

**METODE BAYES DENGAN MODEL RANTAI MARKOV MONTE
CARLO UNTUK MENAKSIR JUMLAH KLAIM ASURANSI**

SKRIPSI

Oleh:
DEWI SAFITRI
NIM. 06510049



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN)
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2010**

**METODE BAYES DENGAN MODEL RANTAI MARKOV MONTE
CARLO UNTUK MENAKSIR JUMLAH KLAIM ASURANSI**

SKRIPSI

**Diajukan Kepada:
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)**

**Oleh:
DEWI SAFITRI
NIM. 06510049**

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN)
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2010**

**METODE BAYES DENGAN MODEL RANTAI MARKOV MONTE
CARLO UNTUK MENAKSIR JUMLAH KLAIM ASURANSI**

SKRIPSI

Oleh:
DEWI SAFITRI
NIM. 06510049

Telah Disetujui oleh:

Pembimbing I,

Abdul Aziz, M. Si
NIP. 19760318 200604 1 002

Pembimbing II,

Dr. Ahmad Barizi, M.A
NIP. 197312121998031001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M. Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

**METODE BAYES DENGAN MODEL RANTAI MARKOV MONTE
CARLO UNTUK MENAKSIR JUMLAH KLAIM ASURANSI**

SKRIPSI

Oleh:
DEWI SAFITRI
NIM. 06510049

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal: 30 September 2010

Susunan Dewan Penguji:		Tanda Tangan
1. Penguji Utama	: Abdussakir, M. Pd NIP. 19751006 200312 1 001	()
2. Ketua Penguji	: Evawati Alisah, M. Pd NIP. 19720604 199903 2 001	()
3. Sekretaris Penguji	: Abdul Aziz, M. Si NIP. 19760318 200604 1 002	()
4. Anggota Penguji	: Dr. Ahmad Barizi, M. A NIP. 19731212 199803 1 001	()

Mengetahui dan Mengesahkan
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M. Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : DEWI SAFITRI

NIM : 06510049

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri.

Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 23 September 2010

Yang membuat pernyataan

Dewi Safitri
NIM. 06510049

Motto

فَإِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ۖ إِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ۖ

**Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan,
Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan.**



HALAMAN PERSEMBAHAN

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Penulis Persembahkan karya ini untuk orang-orang yang sangat berarti: Kedua orangtua tercinta yang tanpa lelah memberikan dorongan moral, spiritual, finansial dan tak henti-hentinya mencurahkan kasih sayangnya, serta Kakak tersayang yang terus memotivasi dan memberikan nasihat-nasihat yang bijak kepada penulis.



KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Syukur alhamdulillah kehadiran Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan studi di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang sekaligus menyelesaikan skripsi ini dengan baik.

Selanjutnya penulis haturkan ucapan terima kasih seiring do'a dan harapan jazakumullah *ahsanal jaza'* kepada semua pihak yang telah membantu menyelesaikan skripsi ini. Ucapan terima kasih ini penulis sampaikan kepada:

1. Prof. DR. H. Imam Suprayogo, selaku rektor UIN Maulana Malik Ibrahim Malang, yang telah banyak memberikan pengetahuan dan pengalaman yang berharga.
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU., D.Sc selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd selaku ketua jurusan Matematika Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Abdul Aziz, M.Si selaku dosen pembimbing skripsi, yang telah banyak memberikan pengarahan dan pengalaman yang berharga.
5. Dr. Ahmad Barizi, M.A selaku dosen pembimbing agama, yang telah banyak memberikan pengarahan.
6. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, terutama seluruh dosen, terima kasih atas segenap ilmu dan bimbingannya.
7. Ayahanda dan Ibunda tercinta yang senantiasa memberikan doa dan restunya kepada penulis dalam menuntut ilmu.
8. Mbak Sri Nuryati, Mbak Irma Alliza dan teman-teman kamar E (Hepy, Anggi, Hesti) di pondok pesantren AHAF, terimakasih atas semangat yang telah kalian berikan.

9. Sahabat-sahabat penulis senasib seperjuangan mahasiswa Matematika 2006 terima kasih atas segala pengalaman berharga dan kenangan indah yang telah terukir.
10. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini baik berupa materiil maupun moril.

Penulis menyadari bahwa dalam penyusunan skripsi ini masih terdapat kekurangan dan penulis berharap semoga skripsi ini bisa memberikan manfaat kepada para pembaca khususnya bagi penulis secara pribadi. *Amin Ya Rabbal Alamin.*

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Malang, 23 September 2010

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PENGAJUAN	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
MOTTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	
KATA PENGANTAR	i
DAFTAR ISI	iii
DAFTAR TABEL	v
DAFTAR GAMBAR	vi
ABSTRAK	vii
BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	5
1.3 Tujuan Penelitian	5
1.4 Manfaat Penelitian	5
1.5 Batasan Masalah	6
1.6 Metode Penelitian	6
1.7 Sistematika Penulisan	9
BAB II KAJIAN TEORI	
2.1 Kajian Keagamaan	10
2.2 Metode Bayes	14
2.3 Pengujian <i>Goodness of Fit</i>	17
2.4 Distribusi Binomial	19
2.5 Distribusi Poisson	20
2.6 Distribusi Beta	22
2.7 Model Rantai Markov Monte Carlo	24

2.8	Pengertian Asuransi Jiwa	26
2.9	Polis Asuransi Jiwa	28

BAB III PEMBAHASAN

3.1	Distribusi Prior dan Posterior dengan Analisis Metode Bayes ...	29
3.2	Implementasi Metode Bayes dengan Model MCMC.....	33
3.2.1	Paparan Data Penelitian	33
3.2.2	Analisis Statistik Deskriptif	34
3.2.3	Pendugaan Parameter Distribusi Prior	35
3.2.4	Pengujian <i>Goodness of Fit</i>	37
3.2.5	Proses Simulasi MCMC	44

BAB IV PENUTUP

4.1	Kesimpulan	50
4.2	Saran	51

DAFTAR PUSTAKA

LAMPIRAN

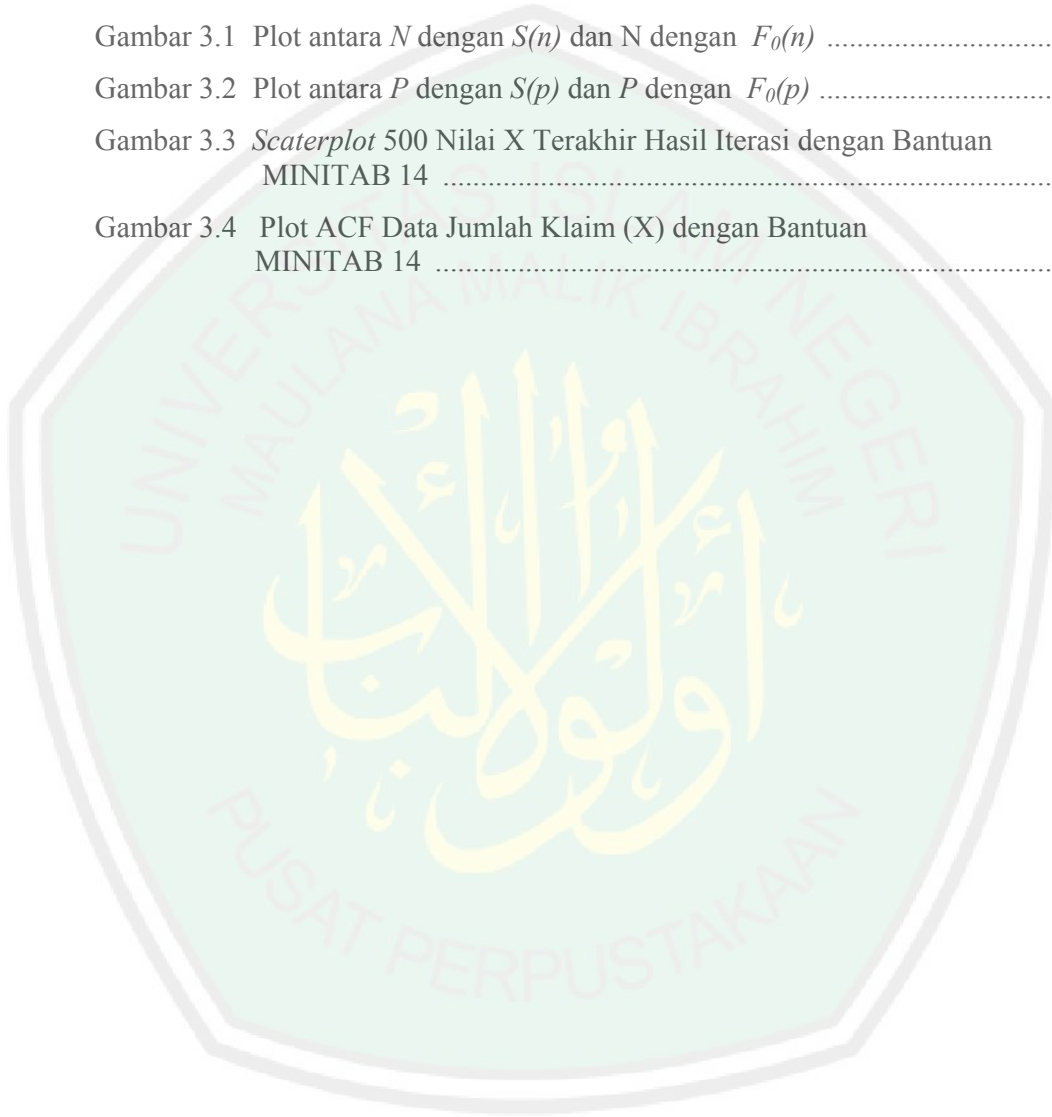
DAFTAR TABEL

Tabel 3.1	Data Jumlah Polis (N), Jumlah Klaim (X), dan Peluang Klaim (P) ...	33
Tabel 3.2	Statistik Deskriptif dengan Bantuan MINITAB 14	34
Tabel 3.3	Ringkasan Data Peluang Klaim	36
Tabel 3.4	Data Polis Asuransi (N), Fungsi Peluang Kumulatif $S(n)$, $F_0(N)$...	39
Tabel 3.5	Data Peluang klaim (P), Fungsi Peluang Kumulatif $S(p)$, $F_0(P)$...	42
Tabel 3.6	Statistik Deskriptif Data Hasil Bangkitan	45



DAFTAR GAMBAR

Gambar 3.1	Plot antara N dengan $S(n)$ dan N dengan $F_0(n)$	38
Gambar 3.2	Plot antara P dengan $S(p)$ dan P dengan $F_0(p)$	43
Gambar 3.3	<i>Scatterplot</i> 500 Nilai X Terakhir Hasil Iterasi dengan Bantuan MINITAB 14	46
Gambar 3.4	Plot ACF Data Jumlah Klaim (X) dengan Bantuan MINITAB 14	47



ABSTRAK

Safitri, Dewi. 2010 **Metode Bayes dengan Model Rantai Markov Monte Carlo Untuk Menaksir Jumlah Klaim Asuransi**. Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Pembimbing: I. Abdul Aziz, M.Si.

II. Dr. Ahmad Barizi, M.A.

Kata Kunci: Metode Bayes, Distribusi Binomial, Distribusi Poisson, Distribusi Beta, Rantai markov Monte Carlo.

Teknik simulasi yang biasa digunakan dalam metode Bayes adalah Rantai Markov Monte Carlo. Rantai Markov Monte Carlo merupakan simulasi untuk mendapatkan satu sampel suatu variabel acak dengan teknik sampling berdasarkan sifat rantai Markov

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mendeskripsikan bentuk distribusi posterior dari parameter P (peluang klaim) $\sim Beta(\alpha, \beta)$ dan N (polis) $\sim Poi(\mu)$ dengan analisis metode Bayes, serta untuk mengetahui hasil implementasi metode Bayes dengan pendekatan model Rantai Markov Monte Carlo dalam menaksir nilai parameter jumlah klaim asuransi. Metode penelitian dalam skripsi ini adalah metode penelitian pustaka (*library research*) langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut: mencari persamaan distribusi posterior dari parameter P (Peluang Klaim) dan parameter N (Polis Asuransi), kemudian dilakukan pendugaan parameter sebaran Prior, pengujian *Goodness of Fit* untuk sebaran prior dan proses simulai untuk mendapatkan data sampel.

Berdasarkan hasil pembahasan diperoleh untuk peubah acak X dengan syarat N dan P atau $f(x|p, n)$ berdistribusi Binomial, $Bin(p, n)$, distribusi prior dari P (peluang klaim) adalah distribusi Beta, $Beta(\alpha, \beta)$ dan distribusi prior dari N (polis) adalah Poisson, $Poi(\mu)$, dimana P dan N saling bebas, maka distribusi posterior dari P dan N berturut-turut adalah $Beta(x+\alpha, n-x+\beta)$ dan $Poi(\mu(1-p))$. Dari pembahasan juga diketahui bahwa rata-rata jumlah klaim yang terjadi setiap bulannya adalah sebesar 32 klaim, selain itu juga diketahui bahwa simpangan baku untuk jumlah klaim sebesar 9.9740 yang berarti bahwa tingkat fluktuasi data jumlah klaim tiap bulannya sebesar 10 klaim.

ABSTRACT

Safitri, Dewi. 2010. **Bayesian Methods with Markov Chain Monte Carlo Model for Estimating the Amount of Claim Insurance.** Undergraduate Thesis. Mathematics Departement Faculty of Science and Technology Maulana Malik Ibrahim State Islamic University, Malang.

Advisors: I. Abdul Aziz, M.Si
II. Dr. Ahmad Barizi, M.A

Keywords: Bayesian Method, Binomial Distribution, Poisson Distribution, Beta Distribution, Markov Chain Monte Carlo.

Simulation technique which is commonly used in Bayesian Methods is Markov Chain Monte Carlo. Markov Chain Monte Carlo is simulation to get one sample of a random variable with sampling technique based on the characteristic of Markov chain.

The objectives of this research is to describe posterior distribution of parameter P (opportunity of claim) $\sim Beta(\alpha, \beta)$ and N (policy) $\sim Poi(\mu)$ with Bayesian methods analysis, and also to know the result of implementation of Bayesian methods with Markov chain Monte Carlo model approach in estimating parameter value of amount of claim insurance. The research method in this thesis is library research methods. The steps conducted within this research are as follow: searching equation posterior distribution of parameter P (Opportunity of Claim) and parameter of N (Insurance Policy), then estimating the parameter Prior distribution, testing the Goodness of Fit for prior distribution, and simulation process to get sample of the data.

The findings of this research is obtained for random variable X on condition N and P or $(x|p, n)$ Binomial Distributions, $Bin(p, n)$, Prior distribution from P (opportunity of claim) is Beta distribution, $Beta(\alpha, \beta)$, and prior distribution from N (policy) is Poisson, $Poi(\mu)$, where P and N dependent, hence posterior distribution of P and N is $Beta(x+\alpha, n-x+\beta)$ and $Poi(\mu(1-p))$. From the discussion also known that the mean of claim amount that happened every month is 32 claims, besides that also known that standard deviation to the amount of claim is 9.9740 means that the degree of data fluctuation of claim amount every month is 10 claims.

BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Sejak lahir hingga meninggal dunia, hidup manusia dikelilingi oleh resiko. Manusia tidak bisa menghindarinya, melainkan harus menghadapinya dan mengatasinya. Sebagai manusia, kita juga tidak tahu kapan dan dimana akan menerima suatu bencana atau resiko. Berawal dari ketidakpastian dimasa mendatang tersebut, muncul suatu peranan dan arti pentingnya lembaga pertanggungangan yang mau menerima sebagian resiko yang ditanggung oleh seseorang dalam suatu perjanjian (Soeisno, 1999: 8). Asuransi sebagai sebuah perlindungan merupakan langkah yang tepat bagi seseorang dalam membagi atau mengalihkan suatu resiko, karena asuransi menjawab kebutuhan rasa aman bagi setiap orang.

Sebagian kalangan Islam beranggapan bahwa asuransi sama dengan menentang *qodlo* dan *qadar* atau bertentangan dengan takdir. Pada dasarnya Islam mengakui bahwa kecelakaan, kemalangan dan kematian merupakan takdir Allah. Hal ini tidak dapat ditolak, hanya saja kita sebagai manusia juga diperintahkan untuk membuat perencanaan untuk menghadapi masa depan.

Allah SWT. berfirman dalam surat al-Hasyr ayat 18 tentang perintah mempersiapkan hari depan juga mengandung makna asuransi :

يٰٓأَيُّهَا الَّذِينَ ءَامَنُوا اتَّقُوا اللَّهَ وَلْتَنْظُرْ نَفْسٌ مَّا قَدَّمَتْ لِغَدٍ وَاتَّقُوا اللَّهَ ۚ إِنَّ اللَّهَ خَبِيرٌ

بِمَا تَعْمَلُونَ ﴿١٨﴾

Artinya: Hai orang-orang yang beriman, bertakwalah kepada Allah dan hendaklah setiap diri memperhatikan apa yang Telah diperbuatnya untuk hari esok (akhirat); dan bertakwalah kepada Allah, Sesungguhnya Allah Maha mengetahui apa yang kamu kerjakan (QS. Al-Hasyr: 18).

Ayat di atas menginstruksikan kepada kita untuk memprediksi hal-hal yang akan terjadi dimasa yang akan datang (وَلْتَنْظُرْ نَفْسٌ مَّا قَدَّمَتْ لِغَدٍ). Asuransi merupakan salah satu upaya antisipatif ke arah masa depan.

Islam mengajarkan pentingnya menjaga lima hal dalam kehidupan manusia, yaitu menjaga agama (*al-din*), menjaga nyawa (*al-nafs*), menjaga akal (*al-'aql*), menjaga keluarga/garis keturunan (*al-'ird*), dan menjaga harta (*al-mal*).

Statistik inferensia terdiri dari dua macam, estimasi dan uji hipotesis (Walpole dan Myers, 1995: 265). Estimasi dibagi menjadi dua, yaitu estimasi titik dan estimasi interval atau yang biasa disebut interval kepercayaan. Interval kepercayaan adalah selang nilai-nilai estimasi parameter yang mungkin muncul. Derajat kemungkinan tersebut biasanya dinyatakan dengan tingkat kepercayaan (*confidence level*), misalnya 95% atau 99% (Djarwanto, 1993: 150).

Pada umumnya estimasi interval kepercayaan sepenuhnya menggunakan data yang diperoleh dari penelitian saat ini. Akan tetapi dalam kasus penelitian yang membutuhkan jangka waktu panjang seperti misalnya peluruhan radioaktif, inferensi statistik dari data sampel saja tidak cukup karena akan membutuhkan waktu yang lama untuk dapat menganalisis kasus tersebut. Jika inferensi dalam kasus seperti di atas menggunakan metode klasik (*frequentis*) yang didasarkan

sepenuhnya pada informasi yang diperoleh melalui sampel, ini dapat menghasilkan error yang besar karena data sampel yang diambil terlalu sedikit, akibatnya inferensi yang dihasilkan nantinya kurang bagus. Untuk mendapatkan inferensi yang lebih bagus, akan lebih baik jika data yang digunakan adalah data gabungan antara data sampel saat ini dengan data penelitian sebelumnya (data prior).

Penggabungan data dilakukan dengan tujuan untuk meminimalkan tingkat kesalahan sehingga inferensi yang dihasilkan mendekati sempurna. Metode inferensi dengan menggunakan data sampel dan data prior disebut dengan metode Bayes (Walpole dan Myers, 1995: 308).

Pada metode Bayes parameter yang digunakan merupakan variabel acak yang mempunyai distribusi tertentu (distribusi prior). Distribusi prior adalah distribusi subyektif berdasarkan pada keyakinan seseorang dan dirumuskan sebelum data sampel diambil (Walpole dan Myers, 1995: 308).

Distribusi sampel yang digabung dengan distribusi prior akan menghasilkan suatu distribusi yaitu distribusi posterior (Hasan, 2002: 33). Distribusi posterior menyatakan derajat keyakinan seseorang mengenai suatu parameter setelah sampel diamati (Walpole dan Myers, 1995: 308). Jadi metode Bayes menggabungkan distribusi sampel dan distribusi prior sehingga dapat diperoleh distribusi posteriornya. Distribusi posterior ini akan digunakan untuk menentukan inferensi tentang suatu parameter yang masih dipandang sebagai variabel acak.

Teknik simulasi yang biasa digunakan dalam metode Bayes adalah Rantai Markov Monte Carlo. Rantai Markov Monte Carlo merupakan simulasi untuk mendapatkan satu sampel suatu variabel acak dengan teknik sampling berdasarkan sifat rantai Markov (Djati, 2007: 87).

Pada hakikatnya simulasi Monte Carlo adalah suatu metode yang digunakan untuk menghasilkan *outcome* dari suatu distribusi Probabilitas. Teknik yang biasa digunakan dalam rantai Markov Monte Carlo yang dikenal adalah *Gibbs Sampler* (Djati, 2007: 89). Dalam melakukan simulasi *Gibbs Sampler* menggunakan distribusi bersyarat untuk membangkitkan data sampel variabel acak.

Salah satu penerapan metode Bayes adalah di bidang asuransi dimana metode tersebut digunakan untuk mempelajari sebaran marginal jumlah klaim jika hanya diketahui sebaran bersyarat dari jumlah klaim. Misalkan X merupakan peubah acak yang mewakili jumlah klaim, dan N polis dengan peluang klaim sama dengan P , maka X dengan syarat N dan P diasumsikan mempunyai sebaran Binomial, $Bin(p, n)$ dimana N dan P merupakan peubah acak yang saling bebas dengan N diasumsikan menyebar Poisson, $Poi(\mu)$ dan P diasumsikan menyebar Beta, $Beta(\alpha, \beta)$.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas dapat dibuat rumusan masalah sebagai berikut:

- 1) Bagaimana bentuk distribusi Posterior dari parameter P (peluang klaim) $\sim Beta(\alpha, \beta)$ dan N (polis) $\sim Poi(\mu)$ dengan analisis metode Bayes.
- 2) Bagaimana implementasi metode Bayes dengan model Rantai Markov Monte Carlo dalam menaksir nilai parameter jumlah klaim asuransi.

1.3 Tujuan

Dari rumusan masalah di atas, peneliti mempunyai tujuan sebagai berikut:

- 1) Untuk mendeskripsikan bentuk distribusi Posterior dari parameter P (peluang klaim) $\sim Beta(\alpha, \beta)$ dan N (polis) $\sim Poi(\mu)$ dengan analisis metode Bayes.
- 2) Mengetahui hasil implementasi metode Bayes dengan model Rantai Markov Monte Carlo dalam menaksir nilai parameter jumlah klaim asuransi.

1.4 Manfaat Penulisan

Penulisan skripsi ini diharapkan dapat memberikan manfaat, yaitu :

- 1) Bagi Penulis

Penelitian ini digunakan sebagai tambahan informasi dan wawasan pengetahuan tentang penerapan ilmu Statistik khususnya metode Bayes di bidang ilmu sosial ekonomi yaitu bidang asuransi.

2) Bagi Lembaga

Hasil penelitian ini dapat digunakan sebagai tambahan kepustakaan yang dijadikan sarana pengembangan wawasan keilmuan khususnya di jurusan matematika untuk mata kuliah Statistika.

1.5 Batasan Masalah

Dalam hal ini peneliti membatasi masalah sebagai berikut:

1. Mengambil data klaim, peluang klaim dan polis asuransi mulai Januari 2008 sampai Juni 2010.
2. Penelitian ini menggunakan metode Bayes untuk data klaim (X) yang mempunyai distribusi bersyarat Binomial, $Bin(n, p)$, dengan parameter P berdistribusi Beta, $Beta(\alpha, \beta)$ dan parameter N berdistribusi Poisson, $Poi(\mu)$.

1.6 Metode Penelitian

Metode penelitian yang digunakan adalah penelitian pustaka yaitu dengan cara mengkaji masalah-masalah yang ada kaitannya dengan penelitian yang dilakukan.

a. Metode Analisis

Metode analisis yang akan dipakai meliputi pendugaan parameter sebaran Prior, pengujian *Goodness of Fit* untuk sebaran prior dan proses simulai untuk mendapatkan data sampel.

b. Data

Data yang akan digunakan dalam penelitian ini adalah data sekunder yaitu data yang diperoleh dari PT. Asuransi Jiwasraya Malang,

yang berupa data jumlah polis asuransi (N) dan jumlah klaim (X) dengan jenis asuransi jiwa, dan data simulasi yang diperoleh dengan membangkitkan data dari komputer yang akan digunakan untuk proses simulasi.

c. Pendugaan Parameter Distribusi Prior

Langkah-langkah yang akan dilakukan dalam pendugaan parameter distribusi Prior adalah:

1. Menyiapkan data polis (N) dan peluang klaim (P).
2. Untuk data peluang klaim diasumsikan berdistribusi Beta, $Beta(\alpha, \beta)$
3. Untuk data jumlah polis diasumsikan berdistribusi Poisson, $Poi(\mu)$.

d. Pengujian *Goodness of Fit*

Pengujian *Goodness of Fit* digunakan untuk menguji apakah sampel sudah sesuai dengan distribusi yang dihipotesiskan. Langkah-langkah yang dilakukan dalam pengujian *Goodness of Fit* dengan menggunakan statistik uji satu sampel *Kolmogorov-Smirnov* adalah sebagai berikut:

1. Untuk data polis asuransi dilakukan langkah-langkah sebagai berikut:
 - a. mengurutkan data dari nilai terkecil sampai nilai terbesar.
 - b. menghitung frekuensi kumulatif dari data yang diurutkan.
 - c. Menghitung nilai fungsi peluang kumulatif yang dihitung dari data sampel.
 - d. Menghitung nilai fungsi peluang kumulatif yang dihitung dari sebaran yang dihipotesiskan.

- e. Menentukan hipotesis yang digunakan.
- f. Menghitung nilai D_{hitung} dengan rumus yang ada
- g. Membandingkan nilai D_{hitung} dengan D_{tabel} untuk taraf nyata yang ditentukan.
- h. Membuat kesimpulan

Jika H_0 diterima maka distribusi yang dihipotesiskan sudah sesuai dengan data sampel.

Jika H_0 ditolak maka distribusi yang dihipotesiskan tidak sesuai dengan data sampel

2. Untuk data peluang klaim, dilakukan langkah-langkah pengujian *Goodness of Fit* seperti pada data polis asuransi.

e. Proses Simulasi

Hal ini dilakukan untuk membangkitkan data sampel berdasarkan distribusi bersyarat. Langkah-langkah yang dilakukan adalah sebagai berikut:

1. Berdasarkan distribusi bersyarat dari X (jumlah klaim) serta sebaran posterior dari P (peluang klaim) dan N (jumlah polis) dilakukan pengambilan sampel menggunakan teknik *Gibbs Sampler*.
2. Menghilangkan pengaruh nilai awal dengan membuang 100 nilai pertama hasil dari langkah 1.
3. Untuk data jumlah klaim (X) dilakukan analisis dengan membuat diagram pencar 500 nilai X terakhir hasil iterasi untuk mengetahui apakah nilai X telah konvergen dan membuat plot *autocorrelation*

function untuk mengetahui nilai X yang didapatkan sudah saling bebas atau tidak.

4. Interpretasi hasil.

1.7 Sistematika Penulisan

Untuk mempermudah dalam memahami skripsi ini secara keseluruhan maka penulis menggunakan sistematika penulisan yang terdiri dari 4 bab dan masing-masing akan dijelaskan sebagai berikut :

BAB I PENDAHULUAN, dalam bab ini diuraikan tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, metode penelitian, dan sistematika pembahasan.

BAB II KAJIAN PUSTAKA, bagian ini terdiri atas konsep-konsep (teori-teori) yang mendukung bagian pembahasan.

BAB III PEMBAHASAN, dalam bab ini dijelaskan bagaimana menganalisis metode Bayes dengan pendekatan Rantai Markov Monte Carlo serta aplikasinya dalam menaksir jumlah klaim.

BAB IV PENUTUP, pada bab ini dibahas tentang kesimpulan dari hasil penelitian yang dilakukan dan saran.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Kajian Keagamaan

Statistika merupakan cabang matematika yang bekerja pada pengumpulan data, pengolahan data, analisis data, dan penarikan kesimpulan. Kegiatan utama dalam statistik adalah pengumpulan data (Abdussakir, 2007: 147). Dalam hal ini tercantum dalam Al-Qur'an surat *Al-Qamar*(54): 52, yang berbunyi:

وَكُلُّ شَيْءٍ فَعَلُوهُ فِي الزُّبُرِ ﴿٥٢﴾

Artinya: "dan segala sesuatu yang telah mereka perbuat tercatat dalam buku-buku catatan".

Peramalan adalah keterampilan untuk menghitung atau menilai sesuatu dengan berpijak pada kejadian-kejadian sebelumnya. Salah satu contoh peramalan yang ada dalam Al-Qur'an adalah masalah perekonomian yang tersurat dalam Al-Qur'an dalam surat *Yusuf*(12): 47-48, yang berbunyi:

قَالَ تَزْرَعُونَ سَبْعَ سِنِينَ دَأَبًا فَمَا حَصَدْتُمْ فَذَرُوهُ فِي سُنْبُلِهِ إِلَّا قَلِيلًا مِّمَّا تَأْكُلُونَ ﴿٤٧﴾ ثُمَّ يَأْتِي مِنْ بَعْدِ ذَلِكَ سَبْعٌ شِدَادٌ يَأْكُلْنَ مَا قَدَّمْتُمْ هُنَّ إِلَّا قَلِيلًا مِّمَّا نُحْصِنُونَ ﴿٤٨﴾

Artinya: 47. Yusuf berkata: "Supaya kamu bertanam tujuh tahun (lamanya) sebagaimana biasa; Maka apa yang kamu tuai hendaklah kamu biarkan dibulirnya kecuali sedikit untuk kamu makan. 48. Kemudian sesudah itu akan datang tujuh tahun yang Amat sulit, yang menghabiskan apa yang kamu simpan untuk menghadapinya (tahun sulit), kecuali sedikit dari (bibit gandum) yang kamu simpan.

Surat *Yusuf* di atas, di dalamnya tersirat makna bahwa Nabi Yusuf diperintah oleh Allah untuk merencanakan ekonomi pertanian untuk masa lima belas tahun, hal ini dilakukan untuk menghadapi terjadinya krisis pangan menyeluruh atau musim paceklik. Dengan cara yang jelas Yusuf menjelaskan strategi mempersiapkan diri menghadapi bencana kekeringan yang akan datang dengan program yang pasti berupa pemberian jatah makanan dan menyimpan kelebihan produksi bahan makanan (Imam, 2008: 908).

Dalam ayat di atas juga dijelaskan bahwa orang-orang yang shaleh harus senantiasa memikirkan kesejahteraan masyarakat dan mempunyai rencana jangka panjang dan jangka pendek. Memperhatikan masa depan dengan perencanaan jangka panjang adalah mutlak perlu bagi siapapun. Karena Al-Qur'an bersifat fleksibel maka peramalan juga dapat digunakan di berbagai bidang, seperti masalah asuransi, sehingga nasabah yang melakukan asuransi merasa lebih siap ketika di masa depan akan terjadi suatu musibah yang tidak diinginkan.

Peramalan yang dilakukan manusia adalah upaya untuk mencari pegangan dalam pengambilan suatu keputusan. Dalam hal ini manusia dilarang sembarangan memutuskan suatu perkara (hal) sebelum jelas informasi yang diperoleh karena sesuatu yang sudah manusia putuskan harus dipertanggungjawabkan, sebagaimana firman Allah surat Al-Isra'(17): 36, yang berbunyi:

وَلَا تَقْفُ مَا لَيْسَ لَكَ بِهِ عِلْمٌ إِنَّ السَّمْعَ وَالْبَصَرَ وَالْفُؤَادَ كُلُّ أُولَئِكَ كَانَ عَنْهُ

مَسْئُولًا ﴿٣٦﴾

Artinya: 36. Dan janganlah kamu mengikuti apa yang kamu tidak mempunyai pengetahuan tentangnya. Sesungguhnya pendengaran, penglihatan dan hati, semuanya itu akan diminta pertanggungjawaban.

Manusia hanya dapat berencana, seperti halnya peramalan yang dilakukan manusia adalah upaya untuk mencari pegangan dalam pengambilan suatu keputusan akan tetapi hasil dari rencana manusia dapat berubah tergantung pada upaya-upaya yang mereka lakukan untuk menjadi yang lebih baik, sebagaimana firman Allah dalam surat Ar-Ra'du(13): 11, yang berbunyi:

إِنَّ اللَّهَ لَا يُغَيِّرُ مَا بِقَوْمٍ حَتَّىٰ يُغَيِّرُوا مَا بِأَنْفُسِهِمْ ۗ

Artinya: "Allah tidak akan merubah nasib seseorang jika ia tidak berusaha mengubah nasibnya".

Berbagai konsep ilmu pasti tidak keluar dari nilai-nilai Al-Qur'an, salah satunya tentang prediksi atau peramalan. Misalnya dalam Al-Qur'an surat Ar-Rum(30): 1-3, yang berbunyi:

الْم ﴿١﴾ غَلِبَتِ الرُّومُ ﴿٢﴾ فِي أَدْنَى الْأَرْضِ وَهُمْ مِنْ بَعْدِ غَلَبِهِمْ

سَيَغْلِبُونَ ﴿٣﴾

Artinya: "(1) Alif laam Miim, (2) telah dikalahkan bangsa Rumawi, (3) di negeri yang terdekat dan mereka sesudah dikalahkan itu akan menang".

Pada ayat di atas, yaitu ayat 2 dan 3 terdapat pemberitaan bangsa Rumawi yang pada mulanya dikalahkan oleh bangsa Persia, tetapi setelah beberapa tahun kemudian kerajaan Ruum dapat menuntut balas dan mengalahkan kerajaan Persia

kembali (Imam, 2008: 448). Ini adalah suatu mukjizat Al Quran, yaitu memberitakan hal-hal yang akan terjadi di masa yang akan datang, dan juga suatu isyarat bahwa kaum muslimin yang demikian lemahnya di waktu itu akan menang dan dapat menghancurkan kaum musyrikin.

Fungsi meramal itu sendiri adalah untuk mempersiapkan apa-apa yang terjadi pada masa yang akan datang, dan ayat di atas menjelaskan bahwa bangsa Romawi sesudah kalah itu akan mendapat kemenangan dalam masa beberapa tahun saja. Hal (peramalan) itu benar-benar terjadi. Beberapa tahun sesudah itu menanglah bangsa Romawi dan kalahlah bangsa Persia.

Di dalam al-Qur'an juga terdapat keterangan sesuai dengan yang di atas, tentang mempersiapkan apa-apa yang akan terjadi dimasa yang akan datang yaitu *Qs. Al-Hasyr(59): 18*, yang berbunyi:

يٰۤاَيُّهَا الَّذِيْنَ ءَامَنُوْا اتَّقُوا اللّٰهَ وَلْتَنْظُرْ نَفْسٌ مَّا قَدَّمَتْ لِغَدٍ وَّاتَّقُوا اللّٰهَ ۗ اِنَّ
اللّٰهَ خَبِيْرٌۢ بِمَا تَعْمَلُوْنَ ﴿١٨﴾

Artinya: "Hai orang-orang yang beriman, bertakwalah kepada Allah dan hendaklah Setiap diri memperhatikan apa yang telah diperbuatnya untuk hari esok (akhirat); dan bertakwalah kepada Allah, Sesungguhnya Allah Maha mengetahui apa yang kamu kerjakan".

Ayat di atas menginstruksikan kepada kita untuk memprediksi hal-hal yang akan terjadi dimasa yang akan datang (وَلْتَنْظُرْ نَفْسٌ مَّا قَدَّمَتْ لِغَدٍ). Sehingga

apabila terjadi suatu resiko, manusia akan lebih siap dalam menghadapinya.

2.2 Metode Bayes

Seorang ahli matematika Inggris, Thomas Bayes, tahun 1763 telah mengembangkan suatu teori untuk menghitung probabilitas tentang sebab-sebab terjadinya suatu kejadian berdasarkan pengaruh yang dapat diperoleh sebagai hasil observasi. Teori ini didasarkan pada prinsip bahwa tambahan informasi dapat memperbaiki probabilitas (Supranto, 1994: 29).

Pengertian secara umum dari probabilitas bersyarat adalah mencari probabilitas dari beberapa peristiwa A jika peristiwa B telah terjadi. Umumnya bahwa peristiwa A adalah suatu dampak akhir dimana peristiwa B adalah suatu penyebab yang mungkin dan bahwa B dan A berderet, dan dalam urusan tersebut seterusnya.

Teorema Jumlah Peluang (Walpole dan Myers, 1996: 45) :

Misalkan kejadian B_1, B_2, \dots, B_k merupakan suatu sekatan dari ruang sampel T dengan $P(B_i) \neq 0$ untuk $i=1,2,3,\dots,k$, maka untuk setiap kejadian A anggota T berlaku:

$$P(A) = \sum_{i=1}^k P(B_i \cap A) = \sum_{i=1}^k P(B_i)P(A|B_i)$$

Teorema Aturan Perkalian (Walpole dan Myers, 1996: 38) :

Bila kejadian A dan B dapat terjadi pada suatu percobaan, maka:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

Dalil Bayes (Walpole dan Myers, 1995: 47).

Misalkan kejadian-kejadian B_1, B_2, \dots, B_k merupakan suatu sekatan ruang sampel T dengan $P(B_i) \neq 0$ untuk $i = 1, 2, \dots, k$. Misalkan A suatu kejadian sebarang dalam T dengan $P(A) \neq 0$ maka:

$$P(B_r|A) = \frac{P(B_r \cap A)}{\sum_{i=1}^k P(B_i \cap A)} = \frac{P(B_r)P(A|B_r)}{\sum_{i=1}^k P(B_i)P(A|B_i)} \quad (2.1)$$

untuk $r = 1, 2, \dots, k$

Bukti (Walpole dan Myers, 1995: 47):

Menurut definisi peluang bersyarat, B bila A diketahui, dinyatakan dengan $P(B|A)$, ditentukan oleh:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \quad \text{bila } P(A) > 0$$

Sehingga diperoleh persamaan:

$$P(B_r|A) = \frac{P(B_r \cap A)}{P(A)}$$

Dengan menggunakan Teorema jumlah peluang pada penyebut, diperoleh:

$$P(B_r|A) = \frac{P(B_r \cap A)}{\sum_{i=1}^k P(B_i \cap A)}$$

Dengan menggunakan aturan perkalian pada pembilang dan penyebut, diperoleh:

$$P(B_r|A) = \frac{P(B_r)P(A|B_r)}{\sum_{i=1}^k P(B_i)P(A|B_i)}, \quad (\text{terbukti}).$$

Probabilitas yang dihitung $P(B_r|A)$ disebut probabilitas posterior dari peristiwa B_r karena adanya informasi yang dikandung dalam peristiwa A . Probabilitas yang berdasarkan atas informasi yang tersedia $P(B_r)$ disebut probabilitas prior. Artinya dalil Bayes ini memperbarui probabilitas awal $P(B_r)$ dengan memasukkan ke dalam informasi yang diamati yang terdapat di dalam peristiwa A (Iqbal, 2002: 33). Dengan memperhatikan peluang bersyarat $B|A$ (terjadi kejadian B setelah A terjadi), dalil peluang total dan dalil Bayes, dapat dikatakan bahwa dalil Bayes memuat peluang total dan peluang bersyarat.

Dalam metode Bayes parameter suatu sebaran dianggap sebagai peubah acak dengan sebaran peluang $f(\theta)$ yang biasa disebut sebagai sebaran prior. Peluang yang berkaitan dengan sebaran prior mengukur tingkat keyakinan peneliti tentang parameter yang akan diduga berdasarkan pengetahuan dan pengalamannya. Metode bayes menggunakan sebaran prior $f(\theta)$ bersama dengan sebaran bersyarat dari contoh $f(x|\theta)$ untuk menghitung sebaran posterior $f(\theta|x)$. Sebaran posterior menyatakan tingkat keyakinan peneliti mengenai parameter setelah pengambilan sampel (Walpole dan Myers, 1996 : 308).

Kerangka umum dalam statistika Bayes adalah (Wan dkk., 2007: 228):

1. Keyakinan awal yang diambil dari bermacam-macam kemungkinan mengikuti asumsi sebuah sebaran prior untuk parameter yang diinginkan.
2. Sebaran prior dan fungsi likelihood yang diperoleh dari data yang digunakan untuk mendapatkan sebaran posterior, yaitu:

$$f(\theta | x) = \begin{cases} \frac{f(x|\theta)f(\theta)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x|\theta)f(\theta)d\theta}, & \text{kontinu} \\ \frac{f(x|\theta)f(\theta)}{\sum_{\theta=-\infty}^{\infty} f(x|\theta)f(\theta)}, & \text{diskrit} \end{cases} \quad (2.2)$$

Untuk menentukan nilai duga parameter dari distribusi Posterior θ digunakan metode Rantai Markov Monte Carlo. Metode ini cukup efektif untuk menentukan nilai duga parameter dari distribusi posterior yang sangat kompleks dan cukup sulit jika diselesaikan dengan metode lain.

2.3 Pengujian *Goodness of Fit*

Salah satu uji yang digunakan untuk pengujian *Goodness of Fit* adalah uji satu sampel *Kolmogorov-Smirnov*. Prosedur dasar dalam uji *Kolmogorov-Smirnov* adalah membandingkan dua fungsi sebaran kumulatif, yaitu sebaran kumulatif yang dihipotesiskan ($F_0(x)$) dan sebaran kumulatif yang teramati ($F(x)$) (Soegiarto, 2004: 363).

Andaikan sebuah sampel acak diambil dari suatu fungsi sebaran $F(x)$ yang belum diketahui dan untuk membuktikan bahwa $F(x) = F_0(x)$ berlaku untuk semua x , maka diharapkan adanya kecocokan antara ($F_0(x)$) dan $S(x)$. $S(x)$ merupakan fungsi peluang kumulatif yang dihitung dari data sampel. Tujuan dari uji sampel *Kolmogorov-Smirnov* adalah menegaskan apakah kurangnya kecocokan antara $F_0(x)$ dan $S(x)$ memadai untuk menyatakan keraguan terhadap hipotesis nol yang menyatakan bahwa $F(x) = F_0(x)$ (Sidney, 1997: 59).

Langkah-langkah uji satu sampel *Kolmogorov-Smirnov* adalah (Soegyarto, 2004: 364):

1. Asumsi

x_1, x_2, \dots, x_n adalah pengamatan saling bebas yang merupakan sampel acak berukuran n dari suatu sebaran $F(x)$ yang belum diketahui

2. Hipotesis

Untuk uji dua sisi: $H_0 : F(x) = F_0(x)$

$H_1 : F(x) \neq F_0(x)$

Untuk uji satu sisi: $H_0 : F(x) = F_0(x)$

$H_1 : F(x) < F_0(x)$ atau $H_1 : F(x) > F_0(x)$

3. Statistik uji

$$D = \text{maksimum} | F_0(x) - S(x) | \quad (2.3)$$

dimana: D : jarak maksimum antara $S(x)$ dan $F_0(x)$

$S(x)$: fungsi peluang kumulatif yang dihitung dari data sampel (proporsi nilai-nilai pengamatan dalam sampel), $S(x) = k/N$, dimana k sama dengan banyaknya sampel yang sama atau kurang dari X

$F_0(x)$: fungsi peluang kumulatif berdasarkan sebaran yang dihipotesiskan.

4. Kaidah pengambilan keputusan

Pada taraf nyata yang ditentukan yaitu α untuk uji satu sisi dan $\frac{\alpha}{2}$ untuk uji dua sisi, maka kaidah pengambilan keputusaannya

adalah, jika:

- $D_{hitung} \leq D_{tabel}$ maka terima H_0

- $D_{hitung} > D_{tabel}$ maka tolak H_0

2.4 Distribusi Binomial

Menurut Walpole dan Myers, (1995: 130), distribusi Binomial adalah suatu distribusi teoritis yang menggunakan variabel random diskrit yang terdiri dari dua kejadian yang berkomplemen, seperti sukses-gagal, ya-tidak, baik-cacat, dan sebagainya.

Peubah acak Binomial adalah peubah acak yang menyatakan banyaknya sukses X dalam n percobaan Binomial. Syarat-syarat percobaan Binomial adalah (Walpole dan Myers, 1995: 130):

1. Percobaan terdiri dari n percobaan berulang.
2. Hasil setiap percobaan adalah sukses atau gagal.
3. Peluang sukses dinyatakan dengan p yang nilainya sama untuk setiap percobaan.
4. Antar percobaan saling bebas.

Distribusi peluang peubah acak Binomial X adalah:

$$b(x; p, n) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, x = 0, 1, 2, \dots, n \quad (2.4)$$

dimana: x : banyaknya sukses
 n : banyaknya percobaan (saling bebas)
 p : peluang sukses
 $1-p$: peluang gagal

Dengan nilai tengah $\mu = np$ dan

$$\text{Ragam } \sigma^2 = np(1-p)$$

Penduga maksimum *likelihood* untuk parameter proporsi (p) untuk sebaran Binomial adalah (Iqbal, 2002: 117):

$$\hat{p} = \frac{x}{n} \quad (2.5)$$

dimana: x : data hasil pengamatan
 n : banyaknya pengamatan

2.5 Distribusi Poisson

Menurut Walpole dan Myers, (1995: 152), distribusi Poisson adalah distribusi peluang peubah acak Poisson X yang menyatakan banyaknya sukses yang terjadi dalam selang waktu tertentu yang dinyatakan dengan persamaan:

$$p(x; \mu) = \frac{e^{-\mu} \mu^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots \quad (2.6)$$

dimana:

μ = rata-rata banyaknya sukses dalam waktu tertentu

$$e = 2,71828$$

Dengan nilai tengah $EX = \mu$, dan variansi (X) = μ

Bukti :

$$EX = \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{e^{-\mu} \mu^x}{x!}$$

$$= \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{e^{-\mu} \mu^{x-1}}{(x-1)!}$$

misalkan $y = x - 1$, maka diperoleh $\sum_{y=0}^{\infty} x \frac{e^{-\mu} \mu^y}{y!} = \mu$

$$EX^2 = \sum_{x=0}^{\infty} x^2 \frac{e^{-\mu} \mu^x}{x!}$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} \{x(x-1) + x\} e^{-\mu} \frac{\mu^x}{x!}$$

$$= \sum_{x=2}^{\infty} e^{-\mu} \frac{\mu^x}{(x-2)!} + \mu = \mu^2 + \mu$$

$$\text{var}(X) = EX^2 - (EX)^2 = \mu$$

Pendugaan parameter μ untuk sebaran poisson adalah

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (2.7)$$

Dimana: x_i : data pengamatan ke-i

n : banyaknya pengamatan

\bar{x} : rata-rata pengamatan

Sifat-sifat percobaan Poisson adalah (Iqbal, 2002: 64):

1. Banyaknya sukses yang terjadi selama selang waktu tertentu tidak bergantung pada banyaknya sukses yang terjadi pada selang waktu yang terpisah.

2. Peluang terjadinya suatu sukses dalam selang waktu yang pendek sebanding dengan panjang selang waktu dan tidak bergantung pada banyaknya sukses yang terjadi diluar selang waktu.
3. Peluang terjadinya lebih dari satu sukses dalam selang waktu yang pendek dapat diabaikan.

2.6 Distribusi Beta

Menurut Murray dkk, (2004: 97), peubah acak mempunyai distribusi Beta dengan parameter α dan β jika peubah tersebut bernilai (0,1) dengan fungsi pdf X adalah:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}, & \alpha, \beta > 0, 0 < x < 1 \\ 0 & , \text{lainnya} \end{cases} \quad (2.8)$$

dimana : α dan β : parameter distribusi beta

$$\Gamma(\alpha) : \text{fungsi gamma: } \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

untuk $0 < x < \infty$ dan $\alpha > 0$

$$\Gamma(\beta) : \text{fungsi gamma: } \int_0^{\infty} x^{\beta-1} e^{-x} dx$$

untuk $0 < x < \infty$ dan $\beta > 0$

Dengan nilai tengah $\mu = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$

$$\text{Ragam } \sigma^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2 (\alpha + \beta + 1)}$$

Menurut Mendenhall, dkk., (1990 : 172), nilai parameter dari α dan β dapat diduga dengan menggunakan metode momen. Momen ke-k berdasarkan hukum peluang, dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 m_k = E(x^k) &= \int_0^1 x^k f(x) dx \\
 &= \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 x^{\alpha+k-1} (1-x)^{\beta-1} dx \\
 &= \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(\alpha+k)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+k+\beta)} \\
 &= \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+k-1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)\dots(\alpha+\beta+k-1)}
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

dimana m_k : momen ke-k

$k : 1,2,3\dots$

$\alpha, \beta : 1,2,3\dots$

untuk menduga parameter α dan β digunakan momen ke-1 dan ke-2 yaitu:

$$m_1 = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \quad \text{dan} \quad m_2 = \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)} \tag{2.10}$$

Dengan melakukan substitusi pada m_1 dan m_2 tersebut maka diperoleh nilai duga untuk parameter α dan β yaitu:

$$\hat{\beta} = \frac{\left(\hat{m}_1 - \hat{m}_2\right) - \left(1 - \hat{m}_1\right)}{\hat{m}_2 - \left(\hat{m}_1\right)^2} \quad \text{dan} \quad \hat{\alpha} = \frac{\hat{\beta} \hat{m}_1}{1 - \hat{m}_1} \tag{2.11}$$

$$\text{Dimana : } \hat{m}_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^k$$

n : ukuran sampel

Sehingga persamaannya menjadi:

$$\hat{\beta} = \frac{(\sum x_i - \sum x_i^2)(1 - \bar{x})}{\sum (x_i - \bar{x})^2} \quad \text{dan} \quad \hat{\alpha} = \frac{\beta \bar{x}}{1 - \bar{x}} \quad (2.12)$$

2.7 Model Rantai Markov Monte Carlo

Suatu proses stokastik $(X_t, t = 0, 1, 2, \dots)$ yang mengikuti sifat bahwa kejadian pada saat t yaitu peubah acak X_t hanya di pengaruhi oleh kejadian satu langkah sebelumnya merupakan proses stokastik khusus yang mengikuti sifat rantai Markov, secara matematis sifat rantai markov adalah:

$$P = (X_t = x_t | X_{t-1} = x_{t-1}, \dots, X_0 = x_0) = P(X_t = x_t | X_{t-1} = x_{t-1}) \quad (2.13)$$

Peluang bersyarat $P(X_t = j | X_{t-1} = i) = P_{ij}$ disebut peluang transisi satu langkah, yaitu proses dalam keadaan j pada waktu t jika mula-mula proses pada keadaan i pada waktu $t-1$. Sedangkan peluang transisi m langkah jika $P_{ij}^{(m)} = P(X_{t+m} = j | X_t = i)$. Suatu rantai markov mempunyai sebaran stasioner $\mu(x)$ jika semua keadaan i dan j pada semua t berlaku:

$$P = (X_t = j | X_{t-1} = i) = P(X_1 = j | X_0 = i).$$

Sedangkan rantai markov disebut *irreducible* jika setiap keadaan j dapat dicapai dari keadaan i yang lain setelah sejumlah terbatas transisi dimana $i \neq j$ dan $P_{ij}^{(m)} > 0$ untuk $0 < m < \infty$ (Taha, 1997: 65).

Model rantai markov monte carlo merupakan metode simulasi untuk mendapatkan data sampel suatu peubah acak dengan teknik sampling yang cara kerjanya menggunakan sifat rantai Markov (Scollnik, 1996). Model MCMC

cukup efektif untuk menentukan nilai duga bagi parameter suatu peubah acak yang diperoleh dari sebaran Posterior yang sangat kompleks dan cukup rumit jika diselesaikan secara analitik.

Teknik yang digunakan dalam metode MCMC adalah *Gibbs Sampler*. Dalam melakukan simulasi *Gibbs Sampler* digunakan sebaran bersyarat untuk menentukan suatu rantai markov yang mempunyai sebaran stasioner $\pi(x)$ (Gamerman, 1995: 265). Misalkan $\pi(x_1, x_2, \dots, x_k)$ adalah sebaran gabungan dari X_j ($j=1,2,3,\dots,k$) di mana X_j dapat berupa peubah ataupun parameter, maka $\pi(x_j)$ dan $\pi(x_j|x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_k)$ secara berturut-turut merupakan sebaran marjinal dan sebaran bersyarat dari masing-masing X_j . Untuk selanjutnya proses *Gibbs sampler* dilakukan dengan cara membangkitkan sampel berdasarkan sebaran bersyarat dari masing-masing X_j tersebut. Langkah-langkah *Gibbs sampler* menurut Scollnik (1996) yaitu:

1. Diberikan nilai awal $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_k^{(0)})$

Nilai awal $x^{(0)}$ yang diberikan adalah sebarang nilai yang sesuai dengan peubah acak X_1, X_2, \dots, X_k . Nilai awal $x^{(0)}$ tersebut digunakan untuk menentukan nilai $x^{(1)}$ dan nilai $x^{(1)}$ digunakan untuk menentukan nilai $x^{(2)}$ dan seterusnya sampai $x^{(n)}$

2. Untuk $i=1$ sampai n dimana $n \rightarrow \infty$ dilakukan pengambilan sampel sebanyak n untuk masing-masing peubah acak X_1, X_2, \dots, X_k berdasarkan sebaran bersyaratnya.

Dari proses tersebut akan didapatkan $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}$, yang masing-masing berupa nilai peubah acak X_1, X_2, \dots, X_k . Nilai peubah acak ini digunakan

untuk menduga sebaran marginal dari peubah acak tersebut berdasarkan rata-rata dari sebaran bersyaratnya.

Pada rantai Markov, misalnya dalam suatu iterasi ditentukan nilai awal x_0 . Nilai x_0 tersebut akan mempengaruhi nilai x_1 (nilai x_1 tergantung x_0) dan selanjutnya dilakukan iterasi sebanyak n sehingga secara langsung berakibat pada x_n (x_n bergantung pada x_0) (Djati, 2007: 83). Pada kondisi yang sangat panjang ($n \rightarrow \infty$) pengaruh nilai awal x_0 pada x_n akan berkurang sehingga dianggap tidak berpengaruh lagi. Pada kondisi ini rantai Markov akan konvergen menuju distribusi $\pi(x)$ tertentu. Suatu kondisi dimana jumlah iterasi diharapkan telah konvergen disebut *burn-in*, misalnya hingga iterasi ke- m ($m < n$) sampel random telah konvergen, maka sampel random hingga ke- m diabaikan sehingga model random yang digunakan adalah dari iterasi ke- $(m+1)$ hingga iterasi ke- n yang telah ditentukan. Jumlah iterasi ke- m yang diabaikan untuk menghilangkan pengaruh nilai awal adalah antara 10-100 nilai pertama hasil iterasi.

Selain pada kondisi *burn-in*, pengambilan sampel juga dapat dilakukan dengan mempertimbangkan nilai koefisien *autokorelasi* (ACF) data hasil simulasi.

2.8 Pengertian Asuransi Jiwa

Asuransi disebut juga *Verzekering* (Bahasa Belanda) yang berarti transaksi pertanggungan, yang melibatkan dua pihak yaitu tertanggung dan penanggung. Dimana penanggung menjamin pihak-pihak tertanggung bahwa mereka akan mendapatkan penggantian terhadap suatu kerugian yang mungkin akan

dideritanya, sebagai akibat yang semula belum tentu akan terjadi atau yang semula belum dapat ditentukan kapan terjadinya. Sebagai kontrak perjanjiannya pihak tertanggung diwajibkan membayar sejumlah uang kepada pihak penanggung, yang besarnya sudah ditentukan, yang biasa di sebut dengan Premi (Djoko Prakoso, 1991: 1).

Menurut C. Arthur William Jr dan Richard M. Heins asuransi adalah pengamanan terhadap kerugian terhadap kerugian finansial yang dilakukan oleh pihak penanggung. Ia juga mendefinisikan bahwa asuransi adalah suatu persetujuan yang mana dua atau lebih orang atau badan mengumpulkan dana untuk menanggulangi kerugian finansial (Djojosoedarso, 1999: 70).

Perusahaan asuransi jiwa yang bidang usahanya sangat berkaitan dengan resiko keuangan sebagai akibat dari kematian orang-orang yang mempertanggungkan jiwanya memiliki suatu aturan tertentu, dalam hal ini hukum berlaku diasuransi.

Adapun hukum asuransi tersebut antara lain (Djojosoedarso, 1999: 73):

1. Peralihan resiko itu harus dilakukan atas dasar kata sepakat dalam bentuk perjanjian.
2. Perjanjian itu harus benar-benar ditutup oleh orang yang mempunyai kepentingan dengan objek perjanjian.
3. Perjanjian itu harus benar-benar dengan etiked baik yang dipertegas.
4. Tujuannya adalah untuk mengalihkan resiko dari pihak tertanggung kepada pihak penanggung.

2.9 Polis Asuransi Jiwa

Setiap asuransi selalu membuat kontrak dengan pihak yang diasuransikan, yang kemudian disebut dengan polis asuransi.

Isi kontrak polis asuransi adalah sebagai berikut (Nababan, 2004: 82):

- a. Setiap yang diasuransikan setuju menyetor sekali atau beberapa kali penyetoran uang (pembayaran premi) kepada pihak lembaga asuransi.
- b. Jumlah nilai polis ditentukan secara jelas.
- c. Pihak lembaga asuransi menyetujui pembayaran kepada pihak yang diasuransikan setelah selesai masa kontrak asuransi.
- d. Yang berhak menerima asuransi adalah pemegang polis atau ahli waris yang tertulis dalam polis asuransi, jika pemegang polis sudah meninggal dunia.

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Distribusi Prior dan Posterior dengan Analisis Metode Bayes

Untuk peubah acak X dengan syarat N dan P atau $f(x|p,n)$ berdistribusi Binomial, $Bin(p,n)$. Distribusi Prior dari P (peluang klaim) adalah distribusi Beta, $Beta(\alpha,\beta)$ dan distribusi Prior dari N (polis) adalah distribusi Poisson, $Poi(\mu)$, dimana P dan N saling bebas. Maka akan dicari distribusi Posterior dari P dan N dengan menggunakan persamaan-persamaan yang telah diketahui.

Diketahui:

- a. Distribusi bersyarat dari peubah acak X adalah Binomial, yaitu sebagai berikut, (Walpole dan Myers, 1995: 132)

$$f(x|p,n) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, x = 0, 1, 2, 3, \dots, n$$

- b. Distribusi Prior dari P adalah Beta, yaitu sebagai berikut, (Murray dkk., 2004: 97)

$$f(p) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} p^{\alpha-1} (1-p)^{\beta-1}, 0 \leq p \leq 1$$

- c. Distribusi Prior dari N adalah Poisson, yaitu sebagai berikut, (Walpole dan Myers, 1995: 152)

$$f(n) = \frac{e^{-\mu} \mu^n}{n!}, n = 0, 1, 2, \dots$$

Untuk menentukan Distribusi Posterior dari P dan N digunakan persamaan sebagai berikut:

d. Distribusi Posterior dari P adalah Beta yaitu sebagai berikut,

$$f(p|x,n) = \frac{f(x|p,n)f(p)}{\int_0^1 f(x|p,n)f(p)dp}$$

dimana:

$$\begin{aligned} f(x|p,n)f(p) &= \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} p^{\alpha-1} (1-p)^{\beta-1} \\ &= \binom{n}{x} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} p^{x+\alpha-1} (1-p)^{n-x+\beta-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x|p,n)f(p)dp &= \int_0^1 \binom{n}{x} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} p^{x+\alpha-1} (1-p)^{n-x+\beta-1} dp \\ &= \binom{n}{x} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 p^{x+\alpha-1} (1-p)^{n-x+\beta-1} dp \\ &= \binom{n}{x} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(x+\alpha)\Gamma(n-x+\beta)}{\Gamma(n+\alpha+\beta)} \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh persamaan distribusi Posterior dengan asumsi P berdistribusi Beta (α, β), sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f(p|x,n) &= \frac{\binom{n}{x} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} p^{x+\alpha-1} (1-p)^{n-x+\beta-1}}{\binom{n}{x} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(x+\alpha)\Gamma(n-x+\beta)}{\Gamma(n+\alpha+\beta)}} \\ &= \frac{\Gamma(n+\alpha+\beta)}{\Gamma(x+\alpha)\Gamma(n-x+\beta)} p^{x+\alpha-1} (1-p)^{n-x+\beta-1} \end{aligned}$$

$$f(p|x,n) \sim \text{Beta}(x+\alpha, n-x+\beta)$$

Jadi untuk data peluang klaim yang diasumsikan berdistribusi Prior Beta, *Beta* (α, β) , mempunyai distribusi Posterior Beta dengan $x + \alpha$ sebagai bentuk parameter pertama dan $(n - x + \beta)$ sebagai parameter kedua.

e. Distribusi Posterior dari N adalah Poisson yaitu sebagai berikut:

$$f(n | x, p) = \frac{f(x | p, n) f(n)}{\sum_{n=0}^{\infty} f(x | p, n) f(n)}$$

dimana:

$$\begin{aligned} f(x | p, n) f(n) &= \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \frac{e^{-\mu} \mu^n}{n!} \\ &= \frac{e^{-\mu} \mu^n p^x (1-p)^{n-x}}{(n-x)! x!} \\ \sum_{n=0}^{\infty} f(x | p, n) f(n) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\mu} \mu^n p^x (1-p)^{n-x}}{(n-x)! x!} \\ &= \frac{e^{-\mu} \mu^x p^x}{x!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^{n-x} (1-p)^{n-x}}{(n-x)!} \\ &= \frac{e^{-\mu} (\mu p)^x}{x!} e^{\mu(1-p)} \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh distribusi posterior dari N dengan asumsi N berdistribusi Poisson, sebagai berikut,:

$$\begin{aligned}
 f(n|x, p) &= \frac{\frac{e^{-\mu} \mu^n p^x (1-p)^{n-x}}{(n-x)! x!}}{\frac{e^{-\mu} (\mu p)^x}{x!} e^{\mu(1-p)}} \\
 &= \frac{e^{-\mu(1-p)} (\mu(1-p))^{n-x}}{(n-x)!} \\
 f(n|x, p) &\sim \text{Poisson}(\mu(1-p))
 \end{aligned}$$

Jadi untuk data jumlah polis asuransi yang diasumsikan berdistribusi Prior Poisson, $Poi(\mu)$, mempunyai distribusi Posterior Poisson dengan rata-rata $\mu(1-p)$.

3.2 Implementasi Metode Bayes dengan Model MCMC

3.2.1. Paparan Data Penelitian

Tabel 3.1 Data Jumlah Polis (N), Jumlah Klaim (X), dan Peluang Klaim (P)

Periode	Bulan Ke-	Polis (lbr)	Klaim (orang)	Peluang Klaim
Tahun 2008	1	108	41	0.379629630
	2	85	14	0.164705882
	3	99	26	0.262626263
	4	101	29	0.287128713
	5	116	28	0.241379310
	6	104	41	0.394230769
	7	92	31	0.336956522
	8	78	32	0.410256410
	9	118	32	0.271186441
	10	140	42	0.300000000
	11	86	33	0.383720930
	12	75	13	0.173333333
Tahun 2009	1	97	52	0.536082474
	2	169	15	0.088757396
	3	88	23	0.261363636
	4	119	24	0.201680672
	5	111	35	0.315315315
	6	91	27	0.296703297
	7	96	21	0.218750000
	8	95	30	0.315789474
	9	128	49	0.382812500
	10	87	29	0.333333333
	11	112	34	0.303571429
	12	137	42	0.306569343
Tahun 2010	1	98	30	0.306122449
	2	109	49	0.449541284
	3	70	26	0.371428571
	4	129	41	0.317829457
	5	150	38	0.253333333
	6	105	40	0.380952381
Jumlah		3193	967	9.245090550
Rata-rata		106.433	32.2333	0.308169685

Sumber: PT. Asuransi Jiwasraya Malang

Data jumlah polis asuransi dan jumlah klaim di atas adalah saling bebas dan peluang klaim merupakan perbandingan antara data yang mengajukan klaim dan banyaknya polis yang terjual dalam satu periode. Dari tabel di atas dapat diketahui selama 30 pengamatan (30 bulan) dimulai bulan Januari 2008 sampai Juli 2010 jumlah data polis asuransi sebanyak 3193 dan jumlah klaim 967 serta total peluang klaim yang terjadi sebanyak 9.2450.

3.2.2. Analisis Statistik Deskriptif

Dari data jumlah polis asuransi, klaim dan peluang klaim dibuat dalam suatu tabel statistik deskriptif untuk mempermudah mempelajari data. Tabel statistik deskriptifnya dapat dilihat di bawah ini:

Tabel 3.2 Statistik Deskriptif dengan bantuan MINITAB 14

Descriptive Statistics: Polis, Klaim, Peluang Klaim					
Variable	N	Mean	SE Mean	StDev	Minimum
Polis	30	106.433	4.15	22.70	70.00
Klaim	30	32.23	1.83	10.02	13.00
Peluang Klaim	30	0.3082	0.0165	0.0904	0.0888
Variable	Q1	Median	Q3	Maximum	
Polis	90.25	102.50	118.25	169.00	
Klaim	26.00	31.50	41.00	52.00	
Peluang Klaim	0.2594	0.3063	0.3800	0.5361	

Dari tabel (3.2) di atas terlihat bahwa jumlah polis asuransi terbesar adalah 169, jumlah klaim terbesar adalah 52, dan jumlah peluang klaim terbesar adalah 0.5361. Untuk rata-rata jumlah polis asuransi pada dua

setengah tahun terakhir adalah 106.4333 dan rata-rata jumlah klaim yang terjadi adalah 32.23. nilai standar deviasi pada data jumlah polis asuransinya adalah 22.70 dan pada data jumlah klaim sebesar 10.02 serta pada peluang klaim adalah 0.0904.

3.2.3 Pendugaan Parameter Distribusi Prior

Pada Metode Bayes, Sebaran Prior adalah sebaran awal untuk suatu parameter. Untuk data jumlah klaim (X) yang mempunyai sebaran bersyarat *Binomial* ($x|p,n$), maka parameter P (peluang klaim) dan N (polis asuransi) juga merupakan peubah acak yang mempunyai sebaran Prior yaitu Beta, *Beta* (α,β) dan Poisson, *Poi* (λ). Data peluang klaim (P) yang digunakan diperoleh dari nilai proporsi jumlah klaim terhadap jumlah polis asuransi pada masing-masing data. Data jumlah polis asuransi, jumlah klaim dan proporsisi klaim (peluang klaim) dapat dilihat pada tabel (3.1) di atas.

Penduga parameter untuk peubah acak N (polis asuransi) yang menyebar Poisson, *Poi* (λ) dapat diperoleh melalui persamaan (2.8). Sesuai data polis asuransi pada tabel (3.1) di didapatkan jumlah data polis asuransi selama 30 bulan sebesar 3193 polis, sehingga dengan persamaan (2.7) diperoleh penduga parameter sebaran Poisson untuk data polis asuransi (N) yaitu $\mu = 106.4333$ atau N berdistribusi Poisson (106.4333).

Untuk menduga parameter α dan β dari distribusi Beta pada peubah acak P (peluang klaim) digunakan persamaan (2.12) dari data proporsisi

klaim yang disebut sebagai peluang klaim pada tabel (3.1) di atas. Untuk mempermudah dalam mempelajari data peluang klaim maka disajikan kembali dalam tabel berikut:

Tabel 3.3 Ringkasan data peluang klaim (P).

N	$\sum p_i$	$\sum p_i^2$	\bar{p}	$\sum (p_i - \bar{p})^2$
30	9.2450	3.0861	0.3081	0.2371

dimana :

- n : banyaknya pengamatan
- $\sum p_i$: jumlah peluang klaim selama 30 bulan
- $\sum p_i^2$: jumlah kuadrat peluang klaim selama 30 bulan
- \bar{p} : rata-rata peluang klaim
- $\sum (p_i - \bar{p})^2$: jumlah kuadrat simpangan peluang klaim selama 30 bulan

Berdasarkan persamaan (2.12) dan tabel (3.3) maka didapatkan penduga parameter untuk sebaran Beta terhadap data peluang klaim (P) adalah:

$$\hat{\beta} = \frac{(\sum p_i - \sum p_i^2)(1 - \bar{p})}{\sum (p_i - \bar{p})^2}$$

$$= \frac{(9.2450 - 3.0861)(1 - 0.3081)}{0.2371}$$

$$= 17.9696$$

dan

$$\hat{\alpha} = \frac{\hat{\beta} \bar{p}}{1 - \bar{p}}$$

$$\hat{\alpha} = \frac{17.9696(0.3081)}{1 - 0.3081}$$

$$\hat{\alpha} = 8.0044$$

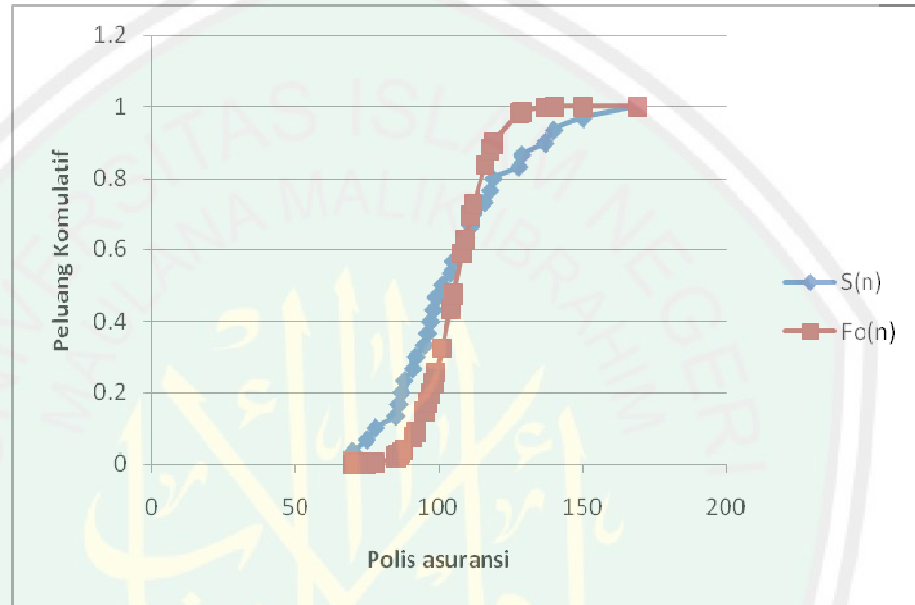
sehingga P menyebar secara Beta dengan parameter pertama 8.0044 dan parameter kedua 17.9696.

3.2.4 Pengujian *Goodness of Fit*

Untuk menguji apakah sebaran prior untuk P (peluang klaim) dan N (polis asuransi) yaitu Beta (8.0044, 17.9696) dan Poisson (106.4333) sudah sesuai dengan data, maka perlu dilakukan *uji Goodness of Fit*. Statistik uji yang digunakan adalah statistik uji satu sampel Kolmogorov-Smirnov seperti pada persamaan (2.3). Pengujian data polis asuransi (N) didasarkan pada asumsi bahwa data polis asuransi (N) menyebar mengikuti distribusi Poisson (106.4333).

Dari data polis asuransi (N) di atas selanjutnya dicari nilai $F_0(n)$ yaitu dengan cara memasukkan nilai rata-rata data pengamatan yang diasumsikan berdistribusi Poisson (106.4333) sehingga diperoleh nilai

$F_0(n)$ dari masing-masing pengamatan seperti di tabel (3.1). Dari data N , $S(n)$ dan $F_0(n)$ dibuat plot antara N dengan $S(n)$ dan N dengan $F_0(n)$ seperti Gambar 3.1 di bawah ini.



Gambar 3.1 Plot antara N dengan $S(n)$ dan N dengan $F_0(n)$

Untuk menguji kebenaran asumsi di atas, maka diperlukan nilai fungsi peluang kumulatif $S(n)$ dan $F_0(n)$ yaitu nilai fungsi peluang kumulatif berdasarkan distribusi yang dihipotesiskan yaitu distribusi Poisson (106.4333) yang disajikan pada Tabel 3.4 di bawah ini.

Tabel 3.4 Data polis asuransi (N), fungsi peluang kumulatif $S(n)$ dan $F_0(n)$.

N	$F.kum$	$S(n)=(F.kum/30)$	$F_0(n)$	$D= F_0(n)-S(n) $
70	1	0.03333	0.00011	0.03322
75	2	0.06667	0.00085	0.06582
78	3	0.10000	0.00244	0.09756
85	4	0.13333	0.01897	0.11436
86	5	0.16667	0.02433	0.14234
87	6	0.20000	0.03088	0.16912
88	7	0.23333	0.03880	0.19453
91	8	0.26667	0.07250	0.19417
92	9	0.30000	0.08759	0.21241
95	10	0.33333	0.14623	0.18710
96	11	0.36667	0.17043	0.19624
97	12	0.40000	0.19697	0.20303
98	13	0.43333	0.22576	0.20757
99	14	0.46667	0.25668	0.20999
101	15	0.50000	0.32418	0.17582
104	16	0.53333	0.43562	0.09771
105	17	0.56667	0.47420	0.09247
108	18	0.60000	0.58922	0.01078
109	19	0.63333	0.62616	0.00717
111	20	0.66667	0.69607	0.02940
112	21	0.70000	0.72854	0.02854
116	22	0.73333	0.83812	0.10479
118	23	0.76667	0.87986	0.11319
119	24	0.80000	0.89754	0.09754
128	25	0.83333	0.98198	0.14865
129	26	0.86667	0.98564	0.11897
137	27	0.90000	0.99817	0.09817
140	28	0.93333	0.99924	0.06591
150	29	0.96667	0.99997	0.03330
169	30	1	1	0

Berdasarkan Gambar 3.1 terlihat bahwa nilai $F_0(n)$ untuk semua N terletak pada interval 0.00011 sampai 1, dan $S(n)$ untuk semua N terletak pada interval 0.0333 sampai 1. Dan terlihat bahwa nilai $F_0(n)$ untuk semua N ada yang terletak di atas dan di bawah nilai-nilai $S(n)$ yang berarti tidak

dapat dikatakan bahwa nilai-nilai $F_0(n)$ ada yang lebih kecil atau lebih besar dari nilai-nilai $S(n)$. Oleh karena itu, dapat digunakan uji hipotesis dua sisi yaitu:

$$H_0 : F(n) = F_0(n)$$

$$H_1 : F(n) \neq F_0(n)$$

dan kesimpulan yang digunakan adalah, jika:

H_0 :diterima maka distribusi yang dihipotesiskan sudah sesuai dengan data sampel

H_0 :ditolak maka distribusi yang dihipotesiskan tidak sesuai dengan data sampel

Statistik uji yang digunakan dalam uji satu sampel *Kolmogorov-Smirnov* adalah nilai $D_{hitung} = maks |S(n)-F_0(n)|$. Dari tabel di atas didapatkan nilai D_{hitung} sebesar 0.2124. Nilai ini akan dibandingkan dengan nilai D_{tabel} pada taraf nyata 0.05 dan $n = 30$ yaitu sebesar 0.24. karena $D_{hitung} (0.2124) < D_{tabel} (0.24)$ maka menolak H_1 , yang berarti bahwa H_0 diterima sehingga disimpulkan bahwa data polis asuransi (N) menyebar mengikuti distribusi Poisson, oleh kerena itu data polis asuransi (N) bisa dikatakan sesuai dengan distribusi yang dihipotesiskan.

Selanjutnya akan diuji sebaran data peluang klaim (P) yang dilakukan dengan asumsi bahwa data peluang klaim (P) menyebar mengikuti Distribusi Beta (8.0044, 17.9696). Untuk menguji kebenaran asumsi tersebut, maka perlu dilakukan perhitungan nilai-nilai $S(p)$ dan $F_0(p)$ untuk semua P dengan cara yang sama seperti pada data polis

asuransi, yaitu pada nilai $F_0(p)$ merupakan nilai fungsi peluang kumulatif dari distribusi yang telah diasumsikan yaitu distribusi Beta (8.0044, 17.9696). Kemudian dibuat plot antara P dengan $S(p)$ dan P dengan $F_0(p)$ seperti pada data polis asuransi di atas. Pengujian data peluang klaim didasarkan pada asumsi bahwa data peluang klaim (P) menyebar mengikuti distribusi Beta (8.0044, 17.9696).

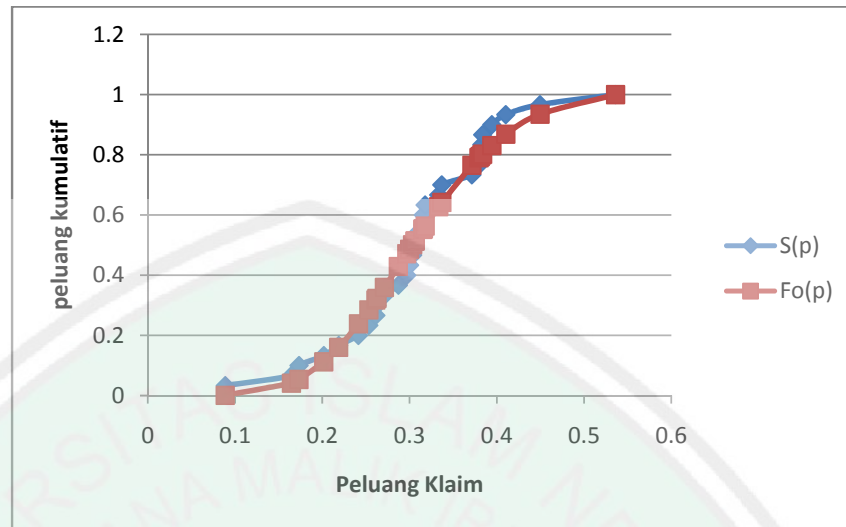
Selanjutnya untuk menguji kebenaran asumsi di atas, maka diperlukan nilai fungsi peluang kumulatif $S(p)$ dan $F_0(p)$ yaitu distribusi Beta (8.0044, 17.9696) yang disajikan pada Tabel 3.5 di bawah ini.



Tabel 3.5 Data peluang klaim (P), fungsi peluang kumulatif $S(p)$ dan $F_0(p)$.

P	$F.kum$	$S(p)=(F.kum/30)$	$F_0(p)$	$D= F_0(p)-S(p) $
0.088757	1	0.03333	0.001029	0.032301
0.164706	2	0.06667	0.041631	0.025039
0.173333	3	0.10000	0.054170	0.045830
0.201681	4	0.13333	0.11242	0.020910
0.218750	5	0.16667	0.160604	0.006066
0.241379	6	0.20000	0.238525	0.038525
0.253333	7	0.23333	0.285094	0.051764
0.261364	8	0.26667	0.318015	0.051345
0.262626	9	0.30000	0.323288	0.023288
0.271186	10	0.33333	0.359648	0.026318
0.287129	11	0.36667	0.429253	0.062583
0.296703	12	0.40000	0.471506	0.071506
0.300000	13	0.43333	0.486031	0.052701
0.303571	14	0.46667	0.501714	0.035044
0.306122	15	0.50000	0.512874	0.012874
0.306569	16	0.53333	0.514825	0.018505
0.315315	17	0.56667	0.552666	0.014004
0.315789	18	0.60000	0.554696	0.045304
0.317829	19	0.63333	0.563401	0.069929
0.333333	20	0.66667	0.627675	0.038995
0.336957	21	0.70000	0.642128	0.057872
0.371429	22	0.73333	0.765444	0.032114
0.379630	23	0.76667	0.790500	0.023830
0.380952	24	0.80000	0.794375	0.005625
0.382813	25	0.83333	0.799751	0.033579
0.383721	26	0.86667	0.802341	0.064329
0.394231	27	0.90000	0.830738	0.069262
0.410256	28	0.93333	0.868480	0.064850
0.449541	29	0.96667	0.934826	0.031844
0.536082	30	1	1	0

Dari data Peluang klaim di atas selanjutnya dicari nilai $F_0(p)$ yaitu dengan cara memasukkan nilai parameter α dan β sehingga diperoleh nilai $F_0(p)$ dari masing-masing pengamatan seperti di tabel (3.5). Dari data peluang klaim (P), $S(p)$ dan $F_0(p)$ dibuat plot antara P dengan $S(p)$ dan P dan $F_0(p)$ seperti Gambar 3.2 di bawah ini.



Gambar 3.2 Plot antara P dengan $S(p)$ dan P dengan $F_0(p)$

Berdasarkan Gambar (3.2) terlihat bahwa nilai $F_0(p)$ untuk semua P terletak pada interval 0.001029 sampai 1, dan $S(p)$ untuk semua P terletak pada interval 0.0333 sampai 1. Dan terlihat bahwa nilai $F_0(p)$ untuk semua P ada yang terletak di atas dan di bawah nilai-nilai $S(p)$ yang berarti tidak dapat dikatakan bahwa nilai-nilai $F_0(p)$ ada yang lebih kecil atau lebih besar dari nilai-nilai $S(p)$. Oleh karena itu, dapat digunakan uji hipotesis dua sisi yaitu:

$$H_0 : F(p) = F_0(p)$$

$$H_1 : F(p) \neq F_0(p)$$

dan kesimpulan yang digunakan adalah, jika:

H_0 :diterima maka distribusi yang dihipotesiskan sudah sesuai dengan data sampel

H_0 :ditolak maka distribusi yang dihipotesiskan tidak sesuai dengan data sampel.

Statistik uji yang digunakan dalam uji satu sampel *Kolmogorov-Smirnov* adalah nilai $D_{hitung} = \max |S(p) - F_0(p)|$. Dari tabel di atas didapatkan nilai D_{hitung} sebesar 0.07150. Nilai ini akan dibandingkan dengan nilai D_{tabel} pada taraf nyata 0.05 dan $n = 30$ yaitu sebesar 0.24. Karena $D_{hitung} (0.07150) < D_{tabel} (0.24)$, maka H_0 diterima sehingga disimpulkan bahwa data peluang klaim (P) menyebar mengikuti distribusi Beta, Oleh karena itu data peluang klaim bisa dikatakan sesuai dengan distribusi yang dihipotesiskan.

3.2.5 Proses Simulasi MCMC

Langkah selanjutnya setelah didapatkan distribusi Prior untuk peluang klaim (P) dan polis asuransi (N) yaitu Beta (8.0044, 17.9696) dan Poisson (106.4333), dilanjutkan dengan menduga distribusi Posterior yang didapatkan dari distribusi Prior dan distribusi bersyarat, dalam penelitian ini digunakan distribusi bersyarat $X|P, N \sim Bin(p, n)$. Dalam pembahasan sebelumnya telah di dapatkan nilai distribusi Posterior untuk $P|X, N$ yaitu $Beta(x + 8.0044, n - x + 17.9696)$ dan Distribusi Posterior untuk $N|X, P$ adalah $Poisson(106.4333(1-p))$.

Dari distribusi Posterior untuk P dan N serta sebaran bersyarat X , dilakukan proses simulasi untuk membangkitkan data sampel untuk X , P dan N . Pembangkitan data dilakukan dengan bantuan program MINITAB 14 sebanyak 1100 data dengan terlebih dahulu memberikan sembarang

nilai awal yang bersesuaian dengan X , P dan N . Nilai awal yang digunakan adalah $x^{(0)} = 25$, $p^{(0)} = 0.5$, $n^{(0)} = 100$.

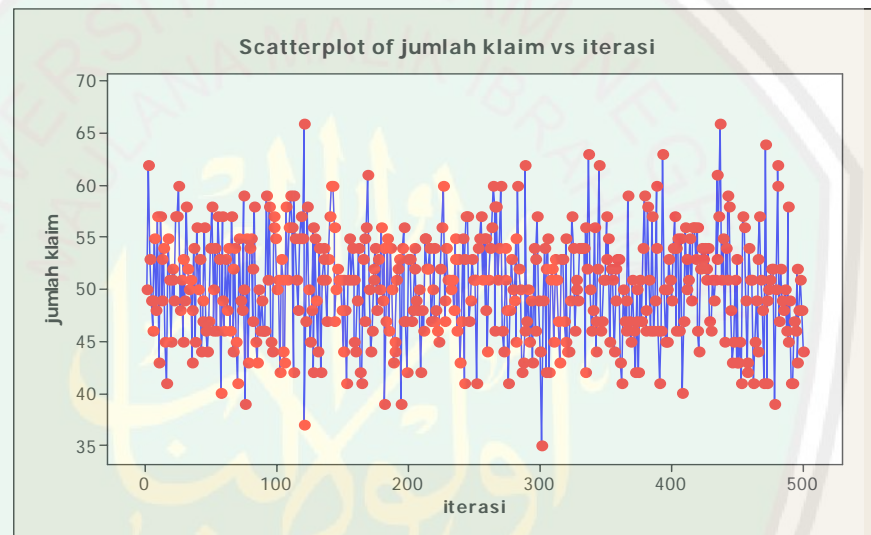
Sehingga untuk nilai jumlah polis asuransi yang diasumsikan menyebar Poisson mempunyai sebaran posterior $N|X,P \sim \text{Poisson}(106.4333(1-(0.5)))$ atau Poisson dengan rata-rata 53.2165 dan untuk peluang klaim yang diasumsikan menyebar beta mempunyai sebaran Posterior $P|X,N \sim \text{Beta}(25+8.0044, 100-25+17.9696)$ atau dengan parameter α sebesar 33.0044 dan parameter β sebesar 92.9696. selanjutnya dari distribusi Posterior tersebut dilakukan pembangkitan data. Statistik dari data bangkitan dapat dilihat pada tabel di bawah ini:

Tabel 3.6 Statistik deskriptif data hasil bangkitan dengan bantuan MINITAB 14

Descriptive Statistics: P,N dan X							
Variable	N	Mean	SE Mean	StDev	Minimum	Q1	Median
P	1100	0.26345	0.00118	0.03899	0.16132	0.23636	0.26220
N	1100	53.283	0.223	7.402	31.000	48.000	53.000
X	1100	50.186	0.152	5.043	35.000	46.000	50.000
Variable	Q3	Maximum					
P	0.28853	0.39260					
N	58.000	77.000					
X	54.000	66.000					

Data hasil bangkitan diperoleh dengan memberikan sembarang nilai awal, data hasil bangkitan pasti akan dipengaruhi oleh penentuan nilai awal tersebut, sehingga untuk menghilangkan pengaruh nilai awalnya harus dibuang 100 nilai pertama hasil iterasi. Hal ini dilakukan untuk mencapai kondisi *burn-in* yaitu suatu kondisi dimana nilai-nilai iterasi sudah tidak dipengaruhi oleh pemberian nilai awal dan telah konvergen menuju distribusi tertentu.

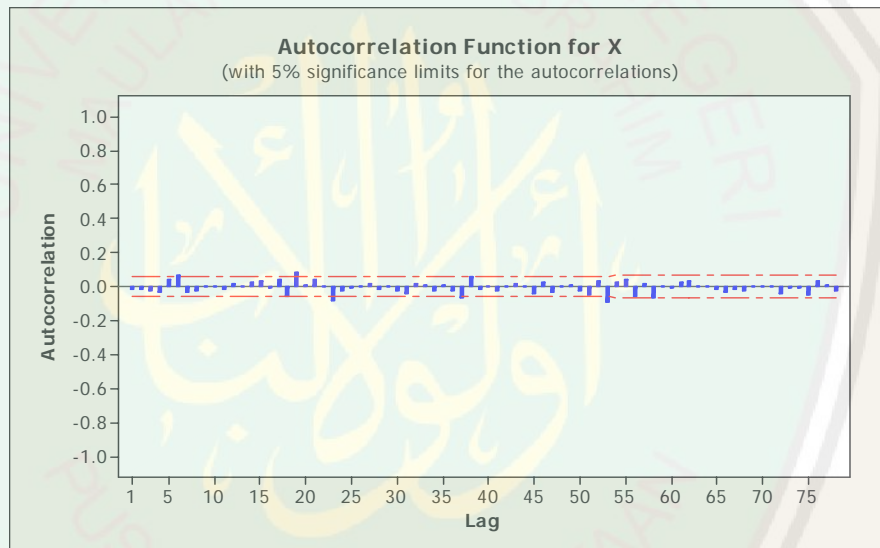
Setelah 100 nilai awal dihilangkan berarti data yang digunakan menjadi 1000 yaitu data ke-101 sampai ke-1100. Selanjutnya untuk mengetahui bahwa data X telah konvergen menuju distribusi tertentu, maka dibuat *scatterplot* 500 nilai X terakhir hasil iterasi. Pembuatan *scatterplot* menggunakan bantuan program MINITAB 14, gambar *scatterplot* dapat dilihat di bawah ini.



Gambar 3.3 *Scatterplot* 500 nilai X terakhir hasil iterasi dengan bantuan MINITAB 14

Dari *scatterplot* di atas dapat dilihat bahwa nilai X hampir mengumpul di sekitar 50. Selain itu nilai X juga menunjukkan suatu pola tertentu sehingga untuk sementara dapat dikatakan bahwa nilai-nilai tersebut telah konvergen menuju distribusi tertentu. Untuk membuktikan hal ini maka akan dilakukan pendugaan bentuk sebaran data X terlebih dahulu.

Selain pada kondisi *burn in*, dalam pengambilan sampel juga dipertimbangkan nilai ACF (*Auto Corellation Function*). Nilai ACF di pertimbangkan untuk menghilangkan nilai awal-nilai awal hasil iterasi. Data yang digunakan dalam membuat plot ACF adalah data jumlah klaim (X). hal ini karena dalam penelitian ini akan dipelajari nilai dari jumlah klaim. Plot ACF untuk data jumlah klaim dapat dilihat pada gambar di bawah ini.



Gambar 3.4 Plot ACF data jumlah klaim (X) dengan bantuan MINITAB 14

Pada gambar di atas tidak terdapat nilai autokorelasi yang signifikan dengan $\alpha = 0.05$ pada lag ke-1 sampai lag ke-78 sehingga data jumlah klaim tersebut bisa dikatakan sudah saling bebas.

Langkah selanjutnya adalah menduga bentuk sebaran marginal dari jumlah klaim (X). Data hasil pendugaan dengan sampel sebanyak 115,

teknik pengambilan sampel ini menggunakan rumus besarnya sampel dalam menaksir suatu populasi (Soegyarto, 2004: 53):

$$n = \left(\frac{Z\sigma}{E} \right)^2$$

dimana,

n : ukuran sampel

Z : nilai normal standar yang bersesuaian dengan tingkat yang diinginkan (dalam kasus ini 95% sehingga $Z=1.96$)

σ : standar deviasi populasi

E : kesalahan maksimal yang diizinkan.

$$\begin{aligned} n &= \left(\frac{Z\sigma}{E} \right)^2 \\ &= \left(\frac{(1.96)(10.02)}{1.83} \right)^2 \\ &= (10.7)^2 = 115.13 \approx 115 \end{aligned}$$

Perhitungan pusat sebaran dan simpangan baku berdasarkan data pada lampiran, dimana $\pi(x)$ sebagai frekuensi relatif dan f sebagai jumlah frekuensi, adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \sum_{i=1}^{115} x_i \pi(x_i) = 32.231 \\ s &= \sqrt{\frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum f_i - 1}} = 9.9740 \end{aligned}$$

Dari perhitungan tersebut didapatkan sebaran marginal dari jumlah klaim menyerupai distribusi tertentu dengan rata-rata 32.23 dan simpangan baku sebesar 9.9740. Hal ini berarti bahwa rata-rata jumlah klaim yang terjadi setiap bulannya adalah sebesar 32 klaim, selain itu juga diketahui bahwa simpangan baku untuk jumlah klaim sebesar 9.9740 yang berarti bahwa tingkat fluktuasi data jumlah klaim tiap bulannya sebesar 10 klaim, diperoleh dari hasil pembulatan 9.9740.



BAB IV

PENUTUP

4.1 KESIMPULAN

Dari pembahasan pada bab sebelumnya dapat disimpulkan bahwa:

1. Untuk peubah acak X dengan syarat N dan P atau $f(x|p,n)$ berdistribusi Binomial, $Bin(p,n)$, distribusi Prior dari P (peluang klaim) adalah distribusi Beta, $Beta(\alpha,\beta)$ dan distribusi Prior dari N (polis) adalah Poisson, $Poi(\mu)$, dimana P dan N saling bebas, maka distribusi Posterior dari P dan N berturut-turut adalah $Beta(x+\alpha, n-x+\beta)$ dan $Poi(\mu(1-p))$. Hal ini berarti bahwa distribusi posterior dari parameter P berdistribusi Beta dengan parameter pertama $x+\alpha$ dan parameter kedua $n-x+\beta$, dan untuk distribusi posterior dari parameter N berdistribusi poisson dengan rata-rata $(\mu(1-p))$.
2. Dari hasil implementasi metode Bayes dengan model Rantai Markov Monte Carlo dalam menaksir nilai jumlah klaim asuransi, didapatkan bahwa nilai rata-rata jumlah klaim sebanyak 32.23 dengan simpangan baku sebesar 9.9740. Hal itu berarti bahwa rata-rata jumlah klaim yang terjadi setiap bulannya adalah sebesar 32 klaim, selain itu juga diketahui bahwa simpangan baku untuk jumlah klaim sebesar 9.9740 yang berarti bahwa tingkat fluktuasi data jumlah klaim setiap bulannya sebesar 10 klaim.

4.2 SARAN

Pada penelitian ini hanya dilakukan pendugaan nilai parameter jumlah klaim asuransi dengan melakukan simulasi dari Distribusi prior dan posterior menggunakan metode Bayes dengan model Rantai Markov Monte Carlo, untuk penelitian selanjutnya disarankan menggunakan metode yang lain.



DAFTAR PUSTAKA

- Abdussakir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN-Malang Press.
- Djarwanto, Pangestu Subagyo. 1993. *Statistik Induktif*. Yogyakarta: BPFE.
- Djati, Bonet Satya Lelono. 2007. *Simulasi Teori dan Aplikasinya*. Yogyakarta: ANDI.
- Gamerman, D. 1995. *Markov Chain Monte Carlo*. London: Chapman & Hall.
- Hasan, Iqbal. 2002. *Pokok-Pokok Statistik 2 (Statistik Inferensif)*. Jakarta: PT. Bumi Aksara.
- Jalaluddin, Imam. 2008. *Tafsir Jalalain*. Bandung: Sinar Baru Algensindo.
- Kai pang, Wan, dkk. 2007. *A Markov Chain Monte Carlo Approach to Estimate the risk of Extremely Large Insurance Claims*. Hong Kong: The Hong Kong Institute of Vocational Education.
- Mangkuatmodjo, Sugiarto. 2004. *Statistik Lanjut*. Jakarta: PT. RINEKA CIPTA.
- Mendenhall, dkk. 1990. *Mathematical Statistic With Application*. California: Duxbury Press.
- Murray R, dkk. 2004. *Probabilitas dan Statistik Edisi kedua*. Jakarta: Erlangga.
- Nababan. 2004. *Matematika Keuangan*. Jakarta: P.T. Grasindo.
- Nugroho, Sigit. 2008. *Dasar-Dasar Metode Statistika*. Jakarta: P.T. Grasindo.
- Prakoso, Djoko. 1991. *Surat Berharga: Alat Pembayaran Dalam Masyarakat Modern*. Jakarta: PT. RINEKA CIPTA.
- Sarkowo. 2007. *Statistik Inferensi*. Yogyakarta: ANDI.
- Scollnik. 1996. *An Introduction to MCMC and Their Actuarial Application*. Department of Mathematic & Statistik University Of Calgari.
- Siegel, Sidney. 1997. *Statistik Nonparametrik Untuk Ilmu-Ilmu Sosial*. Jakarta: PT Gramedia Pustaka Utama.

Soeisno, Djojosoedarso. 1999. *Prinsip-Prinsip Manajemen Resiko & Asuransi*. Jakarta: Salemba Empat.

Srimulyono. 1991. *Statistika Untuk Ekonomi*. Jakarta: Lembaga Penerbit Fakultas Ekonomi UI.

Sugiono. 2008. *Statistik Non Parametris*. Bandung: CV ALFABETA.

Supranto. 1994. *Statistik: Teori & Aplikasi*. Jakarta: Erlangga.

Taha, Hamdi A. 1997. *Operation Research*. Jakarta: Binarupa Aksara.

Usman, Husaini. 2006. *Pengantar Statistika*. Jakarta: PT. Bumi Aksara.

Walpole dan Myers. 1995. *Ilmu Peluang dan Statistika Untuk Insinyur dan Ilmuan*. Bandung: ITB.

