AKAR-AKAR POLINOMIAL *SEPARABLE* SEBAGAI PEMBENTUK PERLUASAN NORMAL PADA RING MODULO

SKRIPSI

Oleh:
SAROPAH
NIM. 08610012

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG

2012

AKAR-AKAR POLINOMIAL *SEPARABLE* SEBAGAI PEMBENTUK PERLUASAN NORMAL PADA RING MODULO

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
SAROPAH
NIM. 08610012

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2012

AKAR-AKAR POLINOMIAL *SEPARABLE*
SEBAGAI PEMBENTUK PERLUASAN NORMAL
PADA RING MODULO

SKRIPSI

Oleh:
SAROPAH
NIM. 08610012

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal: 29 Februari 2012

Dosen Pembimbing I,	Dosen Pembimbing II,
Wahyu Henky Irawan, M.Pd	Fachrur Rozi, M.Si
NIP. 19710420 200003 1 003	NIP. 19800527 200801 1 012

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

AKAR-AKAR POLINOMIAL *SEPARABLE*
SEBAGAI PEMBENTUK PERLUASAN NORMAL
PADA RING MODULO

SKRIPSI

Oleh:
SAROPAH
NIM. 08610012

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal: 4 April 2012

Penguji Utama:	Abdussakir, M.Pd NIP. 19751006 200312 1 001	....
Ketua Penguji:	Usman Pagalay, M.Si NIP. 19650414 200312 1 001	....
Sekretaris Penguji:	Wahyu Henky Irawan, M.Pd NIP. 19710420 200003 1 003	....
Anggota Penguji:	Fachrur Rozi, M.Si NIP. 19800527 200801 1 012	....

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Saropah

NIM : 08610012

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Akar-akar Polinomial *Separable* sebagai Pembentuk Perluasan Normal pada Ring Modulo

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambil alihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencatumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 2 April 2012
Yang membuat pernyataan,

Saropah
NIM. 08610012

Motto

... يَرۡفَعِ ٱللَّهُ ٱلَّذِينَ ءَامَنُواْ مِنكُمۡ وَٱلَّذِينَ أُوتُواْ ٱلۡعِلۡمَ دَرَجَٰتٖۚ...

"...Allah akan meninggikan orang-orang yang beriman di antaramu dan orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat..."

(Al-Mujaadilah: 11)

أَلعِلْمُ بِلاَ عَمَلٍ كَالشَّجَرِ بِلاَ ثَمَرٍ

"ilmu yang tidak dilakukan (diamalkan) bagaikan pohon yang tidak berbuah"

PERSEMBAHAN

Dengan segenap rasa cinta kasih penulis, skripsi ini dipersembahkan untuk orang-orang yang penulis sayangi dan cintai,,, Pertama, kepada bapak Sali & ibu Muriyam yang selalu mendukung dan mendo'akan penulis dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Kedua, untuk keluarga yang selalu mendukung penulis khususnya untuk kakak Mujib,Mukayat dan Nur Hasan (Almarhum)

KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Assalamu'alaikum Wr.Wb.

Puji syukur kepada Allah Swt, berkat rahmat dan izin-Nya penulis dapat menyelesaikan tugas akhir dengan lancar. Sholawat dan salam penulis persembahkan kepada nabi Muhammad S.A.W, berkat perjuangannya yang telah menghadirkan pencerahan untuk umat manusia dan menjadi motivasi bagi penulis untuk belajar, berusaha, dan menjadi lebih baik.

Dalam menyelesaikan tugas akhir ini, penulis berusaha dengan sekuat tenaga dan pikiran, namun penulis menyadari bahwa tanpa partisipasi dari banyak pihak tugas akhir ini tidak dapat terselesaikan. Dengan iringan do'a dan kerendahan hati izinkanlah penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Drs. Sutiman B. Sumitro, SU, D.Sc, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang
3. Abdussakir M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Wahyu H. Irawan, M.Pd, selaku dosen pembimbing yang dengan sabar telah meluangkan waktunya demi memberikan bimbingan dan pengarahan dalam penyelesaian skripsi ini, dan sekaligus sebagai dosen wali yang telah

memberikan motivasi dan bimbingan mulai semester satu hingga semester akhir.

5. Fachrur Rozi, M.Si, selaku dosen pembimbing agama yang telah memberikan bimbingan dan petunjuk dalam menyelesaikan skripsi ini
6. Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd yang memberikan masukan penulisan skripsi ini sehingga penulis dapat menyusun skripsi ini dengan baik.
7. Seluruh dosen Jurusan Matematika yang telah banyak memberikan pelajaran dan didikan, Abdul Aziz, M.Si, Mohammad Jamhuri, S.Si, Drs. Usman Pagalay, M.Si, Hairur Rahman, M.Si, Drs. H. Turmudi, M.Si, Sri Harini, M.Si, dan Evawati Alisah, M.Pd, terima kasih atas masukan dan arahannya sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini.
8. Bapak dan Ibu dosen, dan karyawan Fakultas yang selalu membantu dan memberikan dorongan semangat semasa kuliah.
9. Kedua orang tua penulis Bapak Sali dan Ibu Muriyam yang tidak pernah berhenti memberikan kasih sayang, do'a, dan dorongan semangat kepada penulis semasa kuliah hingga akhir pengerjaan skripsi ini.
10. Kakak tersayang Nur Hasan (Alm), Mukayat, dan Mujib, terima kasih atas dukungan dan semangat dalam setiap langkah hidup penulis baik berhubungan dengan pendidikan maupun dengan tindakan dalam menghadapi kehidupan ini.
11. Ustad Ivan Alfian dan ustad Ali selaku dosen PKPBA yang telah memberi masukan tentang kajian Islam dalam penulisan skripsi ini.

12. Tanzil Fawaiq Sayyaf dan Ahsanatul Khulailiyah yang telah menyempatkan waktunya dalam menjelaskan ayat Al-Qur'an yang penulis tanyakan padanya tentang penulisan skripsi ini.
13. Semua teman–teman matematika, terutama angkatan 2008 semuanya. Terimakasih atas semua pengalaman dan motivasinya dalam penyelesaian penulisan skripsi ini.
14. Teman seperjuangan Imam Danarto, Lukman Hakim, Nuril, Tri Pendra, Yayuk, Yunita, Ahmad Alif Rizki, Lailin, Rosy, Emil, Dewi, Lailil, Ida Putri, dan Yeni terimakasih atas motivasi dan semangatnya telah medukung penulis dalam skripsi ini.
15. Teman-teman saya Neo Frank, Muhammad Arifin dan Nuris, terimakasih atas motivasi dan pendapat-pendapatnya dalam penulisan skripsi ini.
16. Semua teman-teman di kos Bu Muniro terimakasih atas masukannya dan senantiasa mengisi hari-hari penulis.
17. Teman-teman Jurusan Biologi yaitu Siti Muslikhah, Cicik, dan Umi yang telah memberi semangat dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini.
18. Kerabat dan keluarga Palangan yaitu Wilfred Oin Valen, Wini, ibu Siska dan suami, kakek dan nenek yang telah mendukung penulis atas berjalannya perkuliahan ini sampai selesainya skripsi ini.
19. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu, atas keikhlasan bantuan moril dan spirituil, penulis ucapkan terima kasih sehingga dapat menyelesaikan skripsi.

Semoga Allah Swt membalas kebaikan mereka semua.

Manusia tidak pernah luput dari kesalahan dan lupa serta keterbatasan ilmu yang dimiliki penulis, menjadi celah timbulnya kekurangan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan masukan, saran, kritik, dan teguran dari semua evaluator dan pembaca demi kesempurnaan skripsi ini. Semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi semua pihak dan dapat menjadi literatur penambah wawasan dalam aspek pengajaran matematika terutama dalam pengembangan ilmu matematika di bidang Aljabar Abstrak. Amiin.

Wassalamu'alaikum Wr.Wb

Malang, 4 Februari 2012

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

ABSTRAK

Saropah. 2012. **Akar-akar Polinomial *Separable* sebagai Pembentuk Perluasan Normal pada Ring Modulo**. Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: (I) Wahyu Henky Irawan, M.Pd.
(II) Fachrur Rozi, M.Si

Kata kunci: perluasan lapangan, lapangan pemisah, perluasan normal

Salah satu kegunaan yang terpenting dari teori ring dan lapangan adalah perluasan dari suatu lapangan yang lebih luas sehingga suatu polinomial dapat diketahui mempunyai akar. Dalam penelitian ini peneliti mengambil modulo prima sebagai koefisien yang mengikuti peubahnya yang akan dicari akar-akar penyelesaiannya sehingga dapat diketahui perluasan normalnya. Suatu lapangan F yang dikenakan suatu polinomial membentuk himpunan polinomial $F[x]$, di mana $F[x]$ ini merupakan lapangan yang koefisien suku-sukunya merupakan bilangan modulo prima. Dari himpunan polinomial tersebut ada polinomial $f(x)$ yang tidak tereduksi, maka perlu adanya perluasan lapangan untuk mengetahui akar-akar penyelesaiannya. Misal perluasan lapangan dari F adalah lapangan K. Lapangan K disebut perluasan lapangan atas lapangan F, jika lapangan F merupakan sublapangan dari lapangan K dan $f(x)$ adalah polinomial tidak tereduksi dalam F maka $f(x)$ dapat difaktorkan sebagai hasil kali dari faktor linier dalam lapangan pemisahnya. Jika polinomial $f(x)$ mempunyai akar yang berlainan dalam lapangan pemisahnya maka polinomial tersebut disebut polinomial *separable*. Pada penelitian ini polinomial yang *separable* adalah polinomial yang berpangkat ganjil di mana koefisien suku-suku dari polinomial ini terdapat dalam perluasan lapangannya. Polinomial ganjil ini dinamakan polinomial *separable* karena mempunyai akar yang berlainan dalam faktor-faktornya dan salah satu faktornya terdapat dalam polinomial dalam lapangannya. Lapangan pemisah yang memuat semua himpunan polinomial *separable* ini dinamakan perluasan normal.

ABSTRACT

Saropah. 2012. **Polynomial Separable Roots as Form Normal Extension on Ring Modulo.** Thesis. Mathematics Department Faculty of Science and Technology the State of Islamic University Maulana Malik Ibrahim Malang.
Advisors: (I) Wahyu Henky Irawan, M.Pd.
(II) Fachrur Rozi, M.Si

One of the most important uses of the ring and field theory is an extension of a broader field so that a polynomial can be found to have roots. In this study researchers took modulo a prima as follows indeterminate coeffcients to search for his roots extension the solutions of that it can seen normal. A field F is subject to a polynomial form a set of polynomials $F[x]$, where $F[x]$ is a coefficient field its terms modulo a prime number. Of the set of polynomial exists a polynomial $f(x)$ is irreducible, it is necessary to extension the field to know the roots of the solution. Suppose to extension of the field F is a field K. Field K is called extension the field over a field F, if the field F is subfield of the field K and $f(x)$ is irreducible polynomial in F then $f(x)$ can be factored as a product of linear factors in the splitting field. If the polynomial $f(x)$ has different roots in the splitting field the polynomial is called polynomial separable. In this study polynomial separable is contained of odd degree in which the coefficients of the tribes polynomial is contained in the extension field. Polynomial is called a polynomial separable odd because it has different roots in the factors and there is one factor in a polynomial in the field. Splitting field that contains all the set of polynomials separable is called normal extension.

Key words: extension field, splitting field, normal extension

ملخص البحث

شرفة . 2012 . **جذور كثيرات الحدود وتشكيل الإمتداد الطبيعي مفصول عن مودولو الطوق.**

رسالة جامعية قسم الرياضيات من كلية العلوم و التكنولوجيا التابع لجامعة الدولية الإسلامية مولانا مالك إبرهيم مالا نغ.

مشريف: 1. وحيو هنكي إراوان الماجستير في العلوم
2. فخر الرازي الماجستير في الدين

الكلمة الرئيسية : التوسيع في هذا المجال، مجال الفاصل، وتوسيع طبيعي.

إحدى من أهم استخدامات نظرية خاتم والميدان هو امتداد لمجال أوسع بحيث يمكن العثور على كثير الحدود لجذور . في هذه الدراسة استغرق الباحثون معامل مولود وزراء على النحو التالي عند التغيير للبحث عن جذور التوسيع في حلب حيث يمكن أن ينظر إليه عادة F . مجال يخضع لشكل متعدد الحدود مجموعة من متعدد و$F[x]$ ، حيث $F[x]$ هو حقل معامل شروطه مولودو عدد الوزراء . من مجموعة من متعددة وجدت وسيلة متعدد الحدود و) خ (لم يتم خفض ، فمن الضروري التوسيع في هذا المجال لمعرفة جذور استكماله . على سبيل المثال التوسيع في F الحقل هو الحقل K . ويسمى حقل K التوسيع في هذا المجال على مدى F المجال، إذا كان F حقل دون حقل، الحقل K وو (خ) ليس متعدد الحدودغير قابلة للاختزال فيF ثم و(س) يمكن أن يؤخذ على أنه نتاج عوامل الخطية في تقسيم هذا المجال. إذا كان متعدد الحدود و (خ) له جذور مختلفة في مجال تقسيم يسمى متعدد الحدود متعدد ومفصول. في هذه الدراسة هو مفصول متعدد الحدود من رتبة الغريب الذي يرد في معاملات قبائل متعدد الحدود في التوسيع في هذا المجال . ويسمى متعدد الحدود متعدد الحدود مفصول من الغريب لأنه له جذور في مختلف العوامل وهناك عامل واحد في متعدد الحدود في هذا المجال. ويسمى فاصل الحقل الذي يحتوي على كل مجمعة من متعدد العادي توسيع مفصول.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan ilmu pengetahuan dasar yang dibutuhkan semua manusia dalam kehidupan sehari-hari baik secara langsung maupun tidak langsung. Matematika merupakan ilmu yang tidak terlepas dari alam dan agama, semua itu kebenarannya bisa kita lihat dalam Al-Qur'an. Alam semesta ini banyak mengandung rahasia tentang fenomena-fenomena alam. Namun keberadaan fenomena-fenomena itu sendiri hanya dapat diketahui oleh orang-orang yang benar-benar mengerti arti kebesaran Allah Swt. (Rahman, 2007: 1).

Dalam pandangan Al-Qur'an, tidak ada peristiwa yang terjadi secara kebetulan. Semua terjadi dengan "hitungan", baik dengan hukum-hukum alam yang telah dikenal manusia maupun yang belum. Salah satu peristiwa yang terjadi tercantum dalam Al-Qur'an yaitu dijelaskan dalam surat Al-Furqan ayat 2 sebagai berikut:

... وَخَلَقَ كُلَّ شَيْءٍ فَقَدَّرَهُۥ تَقْدِيرًا ﴿٢﴾

Artinya:"... Dan Dia telah menciptakan segala sesuatu, dan Dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya."

Demikian juga dalam Al-Qur'an surat Ar-Rahman ayat 5 sebagai berikut:

ٱلشَّمْسُ وَٱلْقَمَرُ بِحُسْبَانٍ ﴿٥﴾

Artinya: "Matahari dan bulan (beredar) menurut perhitungan".

Ayat-ayat di atas menjelaskan bahwa semua yang ada di alam ini ada ukurannya, ada hitungan-hitungannya, ada rumusnya, atau ada persamaannya. Jadi matematika sebenarnya telah ada sejak zaman dahulu, manusia hanya menyimbolkan dari fenomena-fenomena yang ada dalam kehidupan sehari-hari. Para ahli matematika atau fisika pun tidak membuat suatu rumus sedikitpun. Mereka hanya menemukan rumus atau persamaan, sehingga rumus-rumus yang ada sekarang bukan diciptakan manusia sendiri, tetapi sudah disediakan. Manusia hanya menemukan dan menyimbolkan dalam bahasa matematika (Abdussakir, 1997: 80).

Matematika berada pada posisi di antara dunia nyata dan dunia ghaib. Matematika tidak berada di dunia nyata sehingga objek matematika bersifat abstrak dan tidak berada di dunia ghaib sehingga objek matematika bukan suatu "penampakan". Membawa objek dunia nyata ke dalam bahasa matematika disebut dengan abstraksi dan mewujudkan matematika dalam dunia nyata disebut aplikasi.

Salah satu sifat matematika yaitu matematika bersifat abstrak, yang berarti bahwa objek-objek matematika diperoleh melalui abstraksi dari fakta-fakta atau fenomena dunia nyata. Karena objek matematika merupakan hasil abstraksi dunia nyata, maka matematika dapat ditelusuri kembali berdasarkan proses abstraksinya. Hal inilah yang mendasari bagaimana cara mempelajari matematika (Abdussakir, 2007: 15).

Ilmu aljabar abstrak merupakan bagian dari ilmu matematika. Salah satu bahasan dalam aljabar abstrak adalah ring. Ring adalah himpunan tak kosong R dengan dua operasi biner yaitu + sebagai operasi pertama dan * sebagai operasi kedua, yang kedua-duanya didefinisikan pada R yang memenuhi aksioma-

aksioma yang telah ditentukan. Sedangkan ring komutatif dengan elemen satuan dan semua unsur di R mempunyai invers terhadap operasi kedua kecuali elemen nol (identitas pada operasi pertama) disebut lapangan (Raisinghania dan Aggarwal, 1980: 313-314).

Salah satu kegunaan yang terpenting dari teori ring dan lapangan adalah perluasan dari suatu lapangan yang lebih besar atau lebih luas sehingga suatu polinomial (suku banyak) dapat diketahui mempunyai akar. Seperti dalam Al-Qur'an surat Nuh ayat 16 sebagai berikut:

وَجَعَلَ ٱلۡقَمَرَ فِيهِنَّ نُورًا وَجَعَلَ ٱلشَّمۡسَ سِرَاجًا ﴿١٦﴾

Artinya: "*Dan Allah menciptakan padanya bulan sebagai cahaya dan menjadikan matahari sebagai pelita*"

Ayat di atas menjelaskan bahwa bulan diciptakan untuk menerangi bumi, namun bulan tidak bisa menerangi bumi tanpa adanya sinar dari matahari. Maka dari itu, Allah Swt menciptakan matahari sebagai pelita (penerang). Pada kenyataannya cahaya bulan yang hanya bisa memberi cahayanya atau menyinari pada waktu mendapatkan sinar dari matahari, dan apabila tidak disinari atau dalam keadaan tertutup atau terhalangi benda lain maka bulan tidak bisa menerangi benda lain (bumi). Sedangkan matahari selalu memberikan sinarnya pada benda-benda disekitarnya, tiada hentinya menyinari alam semesta ini karena matahari sebagai sumber sinar ataupun sumber cahaya bagi alam semesta. Hal ini bisa dipandang seperti halnya pada suatu lapangan yang dapat diperluas. Karena cahaya bulan merupakan bagian dari cahaya atau sinar matahari.

Misalkan suatu lapangan F yang dikenakan polinomial ring yang kemudian membentuk himpunan-himpunan polinomial yang koefisien suku-sukunya merupakan elemen dari field F. Polinomial-polinomial ini kemudian dicari akar-akar penyelesaiannya, dan ternyata dalam mencari akar-akarnya terdapat polinomial-polinomial yang tidak dapat dicari akar-akarnya, dengan kata lain polinomial tersebut tidak dapat difaktorkan (*irreducible*). Maka dibentuklah perluasan lapangan K untuk memperoleh akar-akar penyelesaian dari polinomial-polinomial tak tereduksi tersebut. Akar-akar dari polinomial-polinomial tak tereduksi ini harus berada dalam perluasan lapangannya.

Berdasarkan jurnal yang di tulis oleh Sulastri Daruni, Bayu Surarso, dan Bambang Irawanto (2004), jika dalam lapangan F terdapat $f(x)$ polinomial tak tereduksi maka $f(x)$ dapat dibentuk sebagai hasil kali faktor linier dalam $K(x)$ di mana $K(x)$ adalah himpunan polinomial-polinomial dengan koefisien-koefisien di dalam K. Sehingga dapat dikatakan perluasan lapangan K atas lapangan F adalah lapangan pemisah atas lapangan F terhadap polinomial $f(x)$. Selanjutnya polinomial $f(x)$ dapat disajikan sebagai $f(x) = c(x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_n)$ dengan $c \neq 0 \in F$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n \in F$ dan $K = F(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n)$ kemudian jika akar-akar dari polinomial $f(x)$ tersebut dalam lapangan pemisahnya mempunyai faktor yang akar-akarnya berlainan maka polinomial tidak tereduksi $f(x)$ dalam lapangan F adalah *separable* dalam F. Selanjutnya untuk lapangan pemisah yang memuat semua akar-akar yang berlainan dari lapangan tidak tereduksi $f(x)$ di mana salah satu akar dari akar-akar berlainan tersebut merupakan faktor dari polinomial pada sublapangannya maka lapangan pemisah ini disebut perluasan normal.

Pada polinomial ring, jika tidak ada penjelasan mengenai koefisien-koefisie yang menyertai peubahnya masing-masing, maka dianggap sebagai bilangan real. Tetapi apabila ada penjelasan lebih lanjut, maka koefisien sesuai dengan ring yang ditunjuk. Dari penjelasan di atas maka penulis ingin mengembangkan akar-akar polinomial yang koefisien-koefisiennya merupakan elemen dari lapangan yaitu pada ring modulo. Oleh karena itu, penulis tertarik untuk mengkaji tentang akar-akar polinomial *separable* pada ring modulo dengan judul **"Akar-akar Polinomial *Separable* sebagai Pembentuk Perluasan Normal pada Ring Modulo".**

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan di atas, maka penulis akan membahas tentang akar-akar polinomial separabel sebagai pembentuk perluasan normal, di mana akar-akar tersebut termasuk ring pada modulo. Oleh karena itu, maka rumusan masalah dalam skripsi ini adalah: "Bagaimanakah menentukan akar-akar polinomial *separable* sebagai pembentuk perluasan normal pada ring modulo?"

1.3 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan latar belakang dan rumusan masalah yang tertulis di atas, maka tujuan dari pembahasan skripsi ini adalah: "Untuk menjelaskan bagaimana menentukan akar-akar polinomial *separable* sebagai pembentuk perluasan normal pada ring modulo".

1.4 Batasan Masalah

Pembahasan mengenai aljabar abstrak dalam matematika begitu luas. Agar tidak melampaui apa yang telah menjadi tujuan dari penulisan skripsi ini maka dibutuhkan suatu batasan masalah yang dapat digunakan sebagai acuan dalam penulisan lebih lanjut. Masalah yang akan dibahas oleh peneliti yaitu akar-akar polinomial *separable* sebagai pembentuk perluasan normal pada Ring modulo. Sebagai batasan masalah pada penelitian ini yaitu $f(x) = a_0x^0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ dan pada ring modulo prima.

1.5 Manfaat Penelitian

Hasil penelitian yang berupa pembahasan masalah ini diharapkan dapat memberikan manfaat:

1. Bagi Penulis
   a. Menambah pengetahuan dan keilmuan tentang hal-hal yang berkaitan dengan akar-akar polinomial *separable* sebagai pembentuk perluasan normal pada ring modulo.
   b. Mengembangkan wawasan dan menggali keilmuan yang berada di dalam polinomial ring.
2. Bagi Lembaga
   a. Sebagai bahan informasi tentang pembelajaran aljabar abstrak.
   b. Sebagai tambahan kepustakaan.
3. Bagi Mahasiswa

   Sebagai bahan informasi baru tentang polinomial ring untuk dipelajari sebagai acuan penelitian selanjutnya, khususnya pada akar-akar polinomial *separable* sebagai pembentuk perluasan normal pada ring modulo.

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode penelitian kepustakaan *(library research)* atau kajian pustaka, yakni melakukan penelitian untuk memperoleh data-data dan informasi-informasi serta objek-objek yang digunakan dalam pembahasan masalah tersebut. Studi kepustakaan merupakan penampilan argumentasi penalaran keilmuan untuk memaparkan hasil olah pikir mengenai suatu permasalahan atau topik kajian kepustakaan yang dibahas dalam penelitian ini.

Adapun langkah-langkah yang digunakan oleh peneliti ini sebagai berikut:

1. Mencari literatur utama yang dijadikan acuan dalam pembahasan. Literatur yang dimaksud adalah buku tentang aljabar abstrak karangan Raisinghania dan Aggarwal yang diterbitkan tahun 1980.
2. Mengumpulkan literatur pendukung, baik yang bersumber dari buku, jurnal, internet, dan lainnya yang berhubungan dengan permasalahan yang dibahas dalam penelitian.
3. Mempelajari dan memahami konsep ring, polinomial ring, faktorisasi polinomial, lapangan, perluasan lapangan, lapangan pemisah, dan polinomial *separable*. Selain itu juga menentukan atau menunjukkan teorema-teorema yang berkaitan dengan lapangan pemisah dan polinomial *separable*, disertai dengan bukti teorema tersebut.

4. Menerapkan konsep lapangan pemisah dan polinomial *separable* dalam perluasan normal pada ring modulo dengan langkah-langkah sebagai berikut:
   a. Diberikan suatu lanpang yang dikenakan polinomial.
   b. Menentukan perluasan lapangan dari polinomial-polinomial tersebut.
   c. Menentukan lapangan pemisah dari perluasan lapangannya.
   d. Menentukan akar-akar polinomial *separable* dalam lapangan pemisah.
   e. Menentukan akar-akar polinomial *separable* dalam lapangan pemisahnya sebagai perluasan normal.

1.7 Sistematika Penulisan

Untuk memudahkan pembaca dalam memahami hasil penelitian ini dan tidak menemukan kesulitan, maka dalam penyajiannya ditulis berdasarkan suatu sistematika yang secara garis besar dibagi menjadi empat bab, yaitu:

BAB I PENDAHULUAN

Pendahuluan meliputi: latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II KAJIAN PUSTAKA

Bagian ini terdiri atas konsep-konsep (teori-teori) yang mendukung bagian pembahasan. Konsep-konsep tersebut antara lain membahas tentang pengertian ring, polinomial ring, lapangan, perluasan lapangan, lapangan pemisah, polinomial *separable*, perluasan normal dan kajian perluasan lapangan dalam Al-Qur’an.

BAB III PEMBAHASAN

Pembahasan berisi tentang definisi perluasan lapangan, lapangan pemisah, akar-akar polinomial *separable*, perluasan normal pada ring modulo, dan kajian dalam Al-Qur'an.

BAB IV PENUTUP

Pada bab ini disajikan tentang kesimpulan dan saran.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Ring

Suatu sistem aljabar yang terdiri dari satu himpunan tak kosong dengan satu operasi dinamakan grup. Sistem aljabar tersebut berjumlah cukup untuk menampung struktur-struktur yang ada dalam matematika. Pada bagian ini dikembangkan suatu sistem aljabar yang terdiri dari satu himpunan tak kosong dengan dua operasi biner yang disebut dengan ring (gelanggang). Secara eksplisit, suatu ring didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 1. Ring (Raisinghania dan Aggarwal, 1980: 313)

Suatu ring $(R,+,*)$ adalah himpunan tak kosong R dengan dua operasi biner yaitu + sebagai operasi pertama dan * sebagai operasi kedua, yang kedua-duanya didefinisikan pada R yang memenuhi aksioma berikut:

i. $(R,+)$ merupakan grup abelian.

ii. Operasi * bersifat asosiatif di R:

$(a*b)*c = a*(b*c), \forall a,b,c \in R$

iii. Operasi * bersifat distributif terhadap operasi + di R baik kanan maupun kiri:

$a*(b+c) = (a*b)+(a*c)$ (distributif kanan)

$(a+b)*c = (a*c)+(b*c)$ (distributif kiri).

Contoh 1:

Selidiki apakah $(\mathbb{Z}, +, *)$ dengan $\mathbb{Z}$ bilangan bulat adalah merupakan ring?

Jawab:

i. $(\mathbb{Z},+)$ merupakan grup abelian karena:

   a. Ambil $a, b \in \mathbb{Z}$ maka $a + b \in \mathbb{Z}$.

      Jadi $\mathbb{Z}$ tertutup terhadap operasi penjumlahan

   b. Ambil $a, b, c \in \mathbb{Z}$, maka $(a + b) + c = a + (b + c)$

      Jadi operasi penjumlahan bersifat asosiatif di $\mathbb{Z}$

   c. Ada $0 \in \mathbb{Z}$ sehingga $a + 0 = 0 + a = a, \forall a \in \mathbb{Z}$.

      Jadi 0 adalah identitas penjumlahan.

   d. Untuk masing-masing $a \in \mathbb{Z}$ ada $(-a) \in \mathbb{Z}$ sehingga

      $a + (-a) = (-a) + a = 0$

      Jadi invers dari a adalah $-a$.

ii. Operasi * bersifat asosiatif di $\mathbb{Z}$

   $(a * b) * c = a * (b * c)\ ; \forall a, b, c \in \mathbb{Z}$

iii. Operasi * bersifat distributif terhadap operasi + di $\mathbb{Z}$ baik kanan maupun kiri:

   $(a + b) * c = (a * c) + (b * c)\ ; \forall a, b, c \in \mathbb{Z}$

   $a * (b + c) = (a * b) + (a * c)\ ; \forall a, b, c \in \mathbb{Z}$

Karena bilangan bulat memenuhi aksioma-aksioma pada ring, maka $\mathbb{Z}$ merupakan ring.

Contoh 2:

Ring modulo lima adalah suatu ring $(\mathbb{Z}_5, +, \times)$ yang operasi pertama dan keduanya dikenakan pada bilangan modulo, di mana ring ini juga memenuhi aksioma-aksioma ring. Misalkan $\mathbb{Z}_5$ adalah ring. Maka harus memenuhi aksioma-aksioma pada ring.

$$\mathbb{Z}_5 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$$

1. $(\mathbb{Z}_5, +)$ merupakan grup abelian:
   a. Ambil sebarang anggota di $\mathbb{Z}_5$, misal $\bar{1}$ dan $\bar{2}$ berlaku

      $\bar{1} + \bar{2} = \bar{2} + \bar{1} \ \in \mathbb{Z}_5$

   b. Ambil sebarang anggota di $\mathbb{Z}_5$, misal $\bar{1}$, $\bar{2}$, dan $\bar{3}$ berlaku $\bar{1} + (\bar{2} + \bar{3}) = (\bar{1} + \bar{2}) + \bar{3} \ \in \mathbb{Z}_5$

   c. Ambil sebarang anggota di $\mathbb{Z}_5$, misal $\bar{4}$ berlaku

      $\bar{4} + 0 = \bar{4}$ 0 adalah identitas pada penjumlahan

   d. Ambil sebarang anggota di $\mathbb{Z}_5$, misal $\bar{4}$ berlaku

      $\bar{4} + (-\bar{4}) = 0$ ada invers pada operasi penjumlahan

2. Operasi * bersifat asosiatif di $\mathbb{Z}_5$

   $\bar{1} \times (\bar{2} \times \bar{3}) = (\bar{1} \times \bar{2}) \times \bar{3} \ \in \mathbb{Z}_5$

3. Operasi * bersifat distributif terhadap operasi + di $\mathbb{Z}_5$baik kanan maupun kiri

   $\bar{1} \times (\bar{2} + \bar{3}) = (\bar{1} \times \bar{2}) + (\bar{1} \times \bar{3}) \in \mathbb{Z}_5$

   dan

   $(\bar{1} + \bar{2}) \times \bar{3} = (\bar{1} \times \bar{3}) + (\bar{2} \times \bar{3}) \in \mathbb{Z}_5$

Karena bilangan modulo 5 memenuhi aksioma-aksioma pada ring, maka $\mathbb{Z}_5$ termasuk ring yang disebut dengan ring modulo 5.

2.2 Polinomial

Definisi 2. Polinomial (Munir, 2008: 105)

Polinomial $p(x)$ berderajat n, didefinisikan sebagai suatu fungsi berbentuk:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

Dengan a_i adalah konstanta riil, $i = 0,1,2, \dots, n$ dan $a_n \neq 0$

di mana:

x : merupakan peubah.

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$: merupakan nilai koefisien persamaan x.

n : merupakan orde atau derajat persamaan.

Definisi 3. Turunan Polinomial (Dummit dan Foote, 1999: 526)

Turunan dari polinomial yaitu sebagai berikut:

$$f(x) = a_0 x^0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \in F[x]$$

didefinisikan sebagai polinomial

$$D_x f(x) = a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1} \in F[x]$$

di mana $F[x]$ adalah himpunan polinomial yang koefisien suku-sukunya berada dalam F dengan peubah x.

Contoh 3:

Misalkan diberikan suatu polinomial $f(x) = 3 + 2x + 5x^2 + 3x^3 \in \mathbb{R}[x]$ di mana koefisien suku-sukunya merupakan anggota bilangan real dengan peubah x. Maka turunan dari $f(x)$ adalah $D_x f(x) = 2 + 10x + 9x^2$.

Teorema 1. Algoritma Pembagian (Beachy dan Blair, 1990: 173-174)

Misalkan $f(x)$ dan $g(x)$ adalah dua polinom di mana $f(x),\ g(x) \in F[x]$ dan $g(x) \neq 0$ maka terdapat polinom-polinom unik $q(x), r(x) \in F[x]$ sedemikian hingga:

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x)$$

dengan derajat $r(x)$ kurang dari derajat $g(x)$ atau $r(x) = 0$.

Bukti:

Misalkan $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m$ dan $g(x) = b_0 + \cdots + b_nx^n$, di mana $a_m \neq 0$ dan $b_n \neq 0$. Diasumsikan bahwa teorema ini benar untuk semua polinomial.

Asumsikan bahwa $m \geq n$

Setelah itu bagi a_mx^m dengan b_nx^n diperoleh $a_m{b_n}^{-1}x^{m-n}$, kemudian kalikan dengan $g(x)$ dan mengurangi $f(x)$. Ini diberikan :

$$f_1(x) = f(x) - a_m{b_n}^{-1}x^{m-n}g(x),$$

di mana $f_1(x)$ mempunyai derajat kurang dari m.

Dengan hipotesis induksi, dapat di tulis:

$$f_1(x) = q_1(x)g(x) + r(x) \dots\dots\dots (*)$$

dengan derajat $r(x)$ kurang dari n, kecuali jika $r(x) = 0$. Karena

$$f(x) = f_1(x) + a_m{b_n}^{-1}x^{m-n}g(x),$$

Substitusikan pada persamaan (*) di atas, maka

$$f(x) = \left(q_1(x) + a_m{b_n}^{-1}x^{m-n}\right)g(x) + r(x).$$

Hasil bagi $q(x) = q_1(x) + a_m{b_n}^{-1}x^{m-n}$ mempunyai koefisien di F, di mana $a_m, b_n \in F$, dan $q_1(x)$ mempunyai koefisien di F dengan hipotesis induksi. Akhirnya, sisa $r(x)$ mempunyai koefisien di F dengan hipotesis induksi.

Untuk menunjukkan bahwa hasil bagi $q(x)$ dan sisa $r(x)$ adalah unik, seandainya

$$f(x) = q_1(x)g(x) + r_1(x)$$

dan

$$f(x) = q_2(x)g(x) + r_2(x)$$

dengan demikian

$$[q_1(x) - q_2(x)]g(x) = r_2(x) - r_1(x),$$

Karena $r_2(x) - r_1(x) = 0$ atau derajat $r_2(x) - r_1(x)$ kurang dari derajat $g(x)$, ini dapat dipegang jika hanya $q_1(x) - q_2(x) = 0$ jadi $q_1(x) = q_2(x)$. Kemudian $r_2(x) - r_1(x) = 0$ jadi $r_2(x) = r_1(x)$.

Suatu ring yang dikenakan dengan polinomial dinamakan polinomial ring. Definisi polinomial ring sebagai berikut:

Definisi 4. Polinomial atas Ring (Raishinghania dan Aggarwal, 1980: 422)

Polinomial atas ring adalah polinomial yang koefisien suku-sukunya merupakan himpunan terurut *infinite* dari ring R yang berlaku $a_i \neq 0 \ \forall i > n$ dan $n \in Z^+$.

Misalkan R adalah ring dan pandang $R[x]$ adalah semua himpunan polinomial atas ring pada satu peubah x, maka dapat didefinisikan penjumlahan dan perkalian pada polinomial-polinomial di $R[x]$ seperti di bawah ini:

1. Penjumlahan pada polinomial

   Misalkan

   $f(x) = a_0x^0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ dan

$g(x) = b_0x^0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^m$

adalah dua polinomial di $R[x]$, maka jumlah dari $f(x)$ dan $g(x)$ dinotasikan dengan $f(x) + g(x)$ yaitu didefinisikan dengan

$f(x) + g(x) = (a_0+b_0)x^0 + (a_1 + b_1)x + (a_2+b_2)x^2 + \cdots + (a_k + b_k)x^k$

Dengan jelas merupakan polinomial atas ring dan oleh karenanya anggota dari $R[x]$.

2. Perkalian pada polinomial (Judson, 1997: 257)

Misalkan

$f(x) = a_0x^0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ dan

$g(x) = b_0x^0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m$

adalah dua polinomial di $R[x]$, maka perkalian dari $f(x)$ dan $g(x)$ dinotasikan dengan $f(x) \cdot g(x)$ yaitu didefinisikan dengan

$f(x) \cdot g(x) = c_0x^0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_{n+m}x^{n+m}$

di mana $c_i = \sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k} = a_0b_i + a_1b_{i-1} + \cdots + a_{i-1}b_1 + a_ib_0$, untuk masing-masing i.

Dengan demikian jelas bahwa hasil dari perkalian dua polinomial di $R[x]$ yaitu juga berada dalam $R[x]$. Maka dapat dikatakan suatu polinomial itu memenuhi kedua operasi pada ring yang kemudian dinamakan polinomial atas ring.

Contoh 4:

Misal $\mathbb{Z}_5[x]$ adalah himpunan polinomial-polinomial yang koefisien suku-sukunya merupakan anggota dalam $\mathbb{Z}_5$. Misal

$p(x) = 3x^0 + 4x + 2x^2$

$$q(x) = x^0 + 3x + 4x^2 + 3x^3$$

Jadi dengan definisi penjumlahan dan perkalian polinomial maka diperoleh:

$$p(x) + q(x) = (3+1)x^0 + (4+3)x + (2+4)x^2 + (0+2)x^3$$

$$= 4x^0 + 7x + 6x^2 + 2x^3$$

$$= 4x^0 + 2x + x^2 + 2x^3$$

$$p(x) \cdot q(x) = c_0x^0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5$$

$$c_0 = 3 \cdot 1$$

$$= 3$$

$$c_1 = (3 \cdot 3) + (4 \cdot 1)$$

$$= 4 + 4$$

$$= 3$$

$$c_2 = (3 \cdot 4) + (4 \cdot 3) + (2 \cdot 1)$$

$$= 2 + 2 + 2$$

$$= 1$$

$$c_3 = (3 \cdot 3) + (4 \cdot 4) + (2 \cdot 3) + (0 \cdot 1)$$

$$= 4 + 1 + 1 + 0$$

$$= 1$$

$$c_4 = (4 \cdot 3) + (2 \cdot 4) + (0 \cdot 3)$$

$$= 2 + 3 + 0$$

$$= 0$$

$$c_5 = (2 \cdot 3) + (0 \cdot 4)$$

$$= 1 + 0$$

$$= 1$$

$$\text{Jadi } p(x) \cdot q(x) = 3x^0 + 3x + x^2 + x^3 + 0x^4 + 4x^5$$
$$= 3x^0 + 3x + x^2 + x^3 + 4x^0$$
$$= 2x^0 + 3x + x^2 + x^3$$

2.3 Lapangan (*Field*)

Definisi 5. Lapangan

Lapangan adalah ring komutatif dengan elemen satuan dan semua unsur di R mempunyai invers terhadap operasi kedua kecuali elemen nol (identitas pada operasi pertama) (Raisinghania dan Aggarwal, 1980: 314). Dengan kata lain, untuk setiap elemen bukan nol $a \in R$ ada $a^{-1} \in R$ sedemikian hingga $a \cdot a^{-1} = 1$ (Wahyudin, 1989: 155).

Beachy dan Blair (1990: 163) mengatakan bahwa suatu lapangan F dengan operasi (+) dan (·) harus memenuhi aksioma-aksioma berikut:

i. Tertutup.

   Untuk semua $a, b \in F$ jumlah $a + b$ dan hasil $a \cdot b$ berada dalam F.

ii. Bersifat asosiatif.

   Untuk semua $a, b, c \in F$, berlaku

   $a + (b + c) = (a + b) + c$ dan $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

iii. Bersifat komutatif

   Untuk semua $a, b, c \in F$, berlaku

   $a + b = b + a$ dan $a \cdot b = b \cdot a$

iv. Bersifat distributif

   Untuk semua $a, b, c \in F$, berlaku

   $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ dan $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$

v. Mempunyai elemen identitas

Pada himpunan F terdapat satu elemen identitas pada operasi penjumlahan (+), dinotasikan dengan 0. Sedemikian hingga untuk semua $a \in F$,

$a + 0 = a$ dan $0 + a = a$

Pada himpunan F juga terdapat satu elemen identitas pada operasi perkalian (·), dinotasikan dengan 1. Sedemikian hingga untuk semua $a \in F$,

$a \cdot 1 = a$ dan $1 \cdot a = a$

vi. Mempunyai elemen invers

Untuk masing-masing $a \in F$, persamaan,

$a + x = 0$ dan $x + a = 0$

mempunyai solusi $x \in F$, disebut invers penjumlahan dari a, dan dinotasikan dengan $-a$.

Untuk masing-masing elemen tidak nol $a \in F$ persamaan,

$a \cdot x = 1$ dan $x \cdot a = 1$

mempunyai solusi $x \in F$, disebut invers perkalian dari a, dan dinotasikan dengan a^{-1}.

Definisi 6. Sublapangan (Raisinghania dan Aggarwal, 1980: 360)

Sebuah subset tak kosong F di lapangan K dikatakan suatu sublapangan di K jika F adalah memenuhi kedua operasi di K beserta aksioma-aksiomanya, dan F sendiri adalah lapangan dengan operasinya sendiri. Jika setiap lapangan K adalah sublapangan di K sendiri maka sublapangan ini disebut sublapangan tidak sejati di K. Jika setiap sublapangan di lapangan K, merupakan sublapangan di selain lapangan K, maka sublapangan ini dinamakan sublapangan sejati di K.

Definisi 7. Polinomial atas Lapangan (Beachy dan Blair, 1990: 165)

Misalkan F adalah lapangan. Jika $a_m, a_{m-1}, \dots, a_1, a_0 \in F$, maka sebarang bentuk dari

$$a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

disebut polinomial atas F dengan peubah x koefisien $a_m, a_{m-1}, \dots, a_1, a_0$. Semua himpunan polinomial dengan koefisien di F dinotasikan dengan $F[x]$. Jika n adalah bilangan bulat non negatif paling besar sedemikian hingga $a_n \neq 0$, maka dapat dikatakan bahwa polinomial $f(x) = a_n x_n + \cdots + a_0$ mempunyai derajat n, ditulis dengan $\big(f(x)\big) = n$, dan a_n disebut koefisien pertama dari $f(x)$. Jika koefisien pertama adalah 1, maka $f(x)$ dikatakan polinomial monik.

Sama halnya dengan polinomial ring, yaitu polinomial yang dikenakan pada suatu ring dan memenuhi kedua operasi pada ring yang dimaksud. Begitu juga dengan suatu lapangan yang dikenakan suatu polinomial akan membentuk himpunan polinomial. Dari himpunan polinomial ini ada yang namanya polinomial tak tereduksi, definisi dari polinomial tak tereduksi sebagai berikut:

Definisi 8. Polinomial tidak Tereduksi (*irreducible*) (Fraleigh, 2000: 302)

Misalkan F adalah lapangan, polinomial $f(x) \in F[x]$ dikatakan tidak tereduksi (*irreducible*) pada $F[x]$ jika dan hanya jika $f(x)$ bukan konstanta dan $f(x) \neq g(x)h(x)$ untuk setiap $g(x), h(x) \in F[x]$ dengan derajat $g(x)$ dan $h(x)$ lebih kecil dari derajat $f(x)$.

Contoh 5:

Pada ring polinomial $\mathbb{R}[x]$

(i). Polinomial $x^2 + 1$ merupakan polinomial tidak tereduksi, karena tidak ada $g(x), h(x) \in \mathbb{R}[x]$ sehingga $x^2 + 1 = g(x)h(x)$.

(ii). Polinomial $x^2 - 1$ merupakan polinomial tereduksi, karena $x^2 + 1 = (x + 1)(x - 1)$.

2.3.1 Perluasan Lapangan (*Extension Field*)

Untuk mengetahui akar-akar dari polinomial tak tereduksi pada lapangan maka perlu dibentuk adanya perluasan lapangan, definisi dari perluasan lapangan sebagai berikut:

Definisi 9. Perluasan Lapangan (Wahyudin, 1989: 234)

Suatu sublapangan (lapangan bagian) dari lapangan K adalah suatu subring (ring bagian) F dan juga merupakan lapangan. Dalam hal ini, lapangan K disebut perluasan dari lapangan F. Misalnya, $\mathbb{Q}$ adalah sublapangan dari $\mathbb{R}$, oleh karena itu $\mathbb{R}$ adalah suatu perluasan dari lapangan $\mathbb{Q}$.

Sebuah lapangan K adalah perluasan lapangan dari F, jika F adalah sublapangan dari K berdasarkan pengertian ini dibuktikan teorema Kronecker sebagai berikut (Fraleigh, 1994: 394):

Teorema 2. Teorema Kronecker (Fraleigh, 1994: 394-395)

Misalkan F adalah lapangan dan $f(x)$ polinomial tidak konstan di dalam $F[x]$. Maka terdapat perluasan lapangan K dari F dan $\alpha \in K$ sedemikian sehingga $f(\alpha) = 0$.

Bukti:

Misalkan $f(x) \in F[x]$ dapat difaktorkan secara tunggal sebagai $f(x) = p_1(x)p_2(x) \dots p_n(x)$, dengan $p_i(x)$ $(i = 1,2, \dots n)$ adalah polinomial prima yang tak tereduksi dengan $F[x]/\langle p(x) \rangle$ adalah suatu lapangan di mana $\langle p(x) \rangle$ himpunan polinomial tidak tereduksi dalam lapangan $F[x]$.

Didefinisikan suatu pemetaan ψ : $F \rightarrow F[x]/\langle p(x) \rangle$

dengan

$$\psi(\mathrm{a}) = \mathrm{a} + \langle p(x) \rangle$$

ψ adalah pemetaan satu-satu, sebab $\forall a, b \in F$

jika

$$\psi(\mathrm{a}) = \psi(\mathrm{b})$$

maka

$$a + \langle p(x) \rangle = b + \langle p(x) \rangle$$

$$\mathrm{a} - \mathrm{b} = 0$$

atau

$$\mathrm{a} = \mathrm{b}$$

$$\Leftrightarrow a - b \in \langle p(x) \rangle$$

Jadi $a - b$ suatu kelipatan $p(x)$ yang berderajat ≥ 1.

ψ homomorfisma ring. Sehingga ψ(F) = {a + $\langle p(x) \rangle$ | a ∈ F } ⊆ $F[x]/\langle p(x) \rangle$ merupakan sublapangan dari $F[x]/\langle p(x) \rangle$. Jadi F ≅ {a + $\langle p(x) \rangle$| a ∈ F}.

Misal $K = F[x]/\langle p(x) \rangle$ maka K merupakan perluasan lapangan dari F. Akan dibuktikan f(α) = 0, ambil α∈E dengan α = x + $\langle p(x) \rangle$. Jika $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ di mana $a_i \in F$ maka $p(\alpha) = a_0 +$

$a_1(\mathrm{x} + \langle p(x)\rangle) + \cdots + a_n(\mathrm{x} + \langle p(x)\rangle)^n = 0$ dalam $K = F[x]/\langle p(x) \rangle$. $p(\alpha) = 0$ karena $f(x) = p_1(x)p_2(x) \dots \dots p_n(x)$, maka $f(\alpha) = 0$. ■

Definisi 10. Akar dari Polinomial (Herstein, 1975: 219)

Jika $p(x) \in F[x]$, maka terdapat elemen α di perluasan lapangan F disebut akar dari $p(x)$ jika $p(\alpha) = 0$.

Contoh 6:

Misalkan $f(x) = 2x^2 + 4x + 4$. Tentukan akar dari $f(x)$ atas $\mathbb{Z}_5$.

Jawab:

Pertama, substitusikan masing-masing dari 5 elemen $\mathbb{Z}_5$ ke dalam $f(x)$ untuk melihat elemen mana yang menghasilkan nol. Di mana $\mathbb{Z}_5 = \{0,1,2,3,4\}$. Maka diperoleh:

$f(0) = 4$,

$f(1) = 0$,

$f(2) = 0$,

$f(3) = 4$,

$f(4) = 2$

Jadi akar-akarnya yaitu 1 dan 2.

Definisi 11. $\boldsymbol{F[x]/\langle p(x) \rangle}$ Lapangan (Wahyudin, 1989: 234)

Suatu polinomial $p(x)$ tidak tereduksi terhadap F, maka ring faktor $K = F[x]/\langle p(x) \rangle$ adalah lapangan. Lapangan K dapat dipandang sebagai suatu perluasan dari lapangan F. Dapat dikatakan bahwa K dapat diperoleh dari F dengan melalui akar tersebut.

Contoh 7: (Beachy, John A., 1990: 191)

Misalkan $F = \mathbb{Z}_2$ dan $p(x) = x^2 + x + 1$. Maka $p(x)$ adalah faktor tunggal atas $\mathbb{Z}_2$ dan dengan demikian $\mathbb{Z}_2\,[x]/\langle x^2 + x + 1\rangle$ adalah lapangan. Kongruensi kelas modulo $x^2 + x + 1$ dapat diwakili oleh [0], [1], $[x]$ dan $[1 + x]$ ini satu-satunya polinomial dari derajat kurang dari 2 atas $\mathbb{Z}_2$ yang memenuhi operasi penjumlahan dan perkalian yang diberikan pada tabel 2.1 dan tabel 2.2 di bawah ini:

Tabel 2.1. Penjumlahan di $\mathbb{Z}_2\,[x]/\langle x^2 + x + 1\rangle$

$(+)$	0	1	x	$1 + x$
0	0	1	x	$1 + x$
1	1	0	$1 + x$	x
x	x	$1 + x$	0	1
$1 + x$	$1 + x$	x	1	0

Tabel 2.2. Perkalian di $\mathbb{Z}_2\,[x]/\langle x^2 + x + 1\rangle$

$(\times)$	0	1	x	$1 + x$
0	0	0	0	0
1	0	1	x	$1 + x$
x	0	x	$1 + x$	1
$1 + x$	0	$1 + x$	1	x

Definisi 12. Aljabar atas *F* (Raisinghania dan Aggarwal, 1980: 538)

Misalkan K adalah perluasan dari lapangan F, maka elemen $\alpha \in K$ dikatakan aljabar atas F, jika α adalah akar dari polinomial tak nol di $F[x]$.

Birkhoff dan Mac Lane (1964: 394) mengatakan bahwa misalkan K adalah lapangan dan F adalah sublapangan dari K. Suatu elemen $x \in K$ disebut aljabar atas F jika x memenuhi a sebagai koefisien di suatu polinomial di mana koefisiennya bukan semua nol di F,

$a_0x^0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = 0$ di mana $a_i \in F$, bukan semua nol.

Definisi 13. Perluasan Aljabar (Raisinghania dan Aggarwal, 1980: 538)

Perluasan K atas lapangan F dikatakan menjadi perluasan aljabar jika masing-masing elemen K adalah aljabar atas F. Dengan kata lain perluasan K atas lapangan F adalah perluasan aljabar jika masing-masing elemen di K adalah akar tak kosong polinomial di $F[x]$.

2.3.2 Lapangan Pemisah (*Splitting Field*)

Perluasan lapangan atas polinomial tak tereduksi disebut sebagai lapangan pemisah dengan definisi sebagai berikut:

Definisi 14. Lapangan Pemisah (Dummit dan Foote, 1999: 516)

Perluasan lapangan K atas lapangan F dikatakan sebagai lapangan pemisah dari polinomial $f(x) \in F[x]$ jika faktor dari $f(x)$ merupakan faktor linier di $K[x]$ dan $f(x)$ bukan faktor linier atas setiap *proper* sublapangan terhadap K di F.

Jika $f(x)$ berderajat n, maka $f(x)$ mempunyai paling banyak n akar di F dan mempunyai tepat n akar di F jika dan hanya jika $f(x)$ pemisah di $F[x]$.

Contoh 8:

Lapangan pemisah dari polinomial $f(x) = x^2 + 1 \in \mathbb{R}[x]$ atas $\mathbb{R}$ adalah $\mathbb{C}$, sebab $f(x) = (x - i)(x + i)$, $i \in \mathbb{C}$ dan $\mathbb{C} = \{\mathbb{R}(i) = a + bi | a, b \in \mathbb{R}\}$.

Teorema 3. (Dummit dan Foote, 1999: 516-517)

Untuk setiap lapangan F, jika $f(x) \in F[x]$ maka ada perluasan lapangan K di F di mana ini adalah lapangan pemisah untuk $f(x)$.

Bukti:

Pertama tunjukkan dulu bahwa ada perluasan lapangan E atas F di mana $f(x)$ pemisah faktor linier dengan menginduksi derajat n di $f(x)$. Jika $n = 1$, maka $E = F$. Seandainya sekarang $n > 1$. Jika faktor tunggal $f(x)$ atas F adalah berderajat 1 semua, maka F adalah lapangan pemisah dari $f(x)$ dan ambil $E = F$. Jika tidak, paling tidak salah satu faktor tunggal, katakan $p(x)$ dan $f(x)$ di $F[x]$ adalah paling tidak berderajat 2. Ada satu perluasan E_1 dari F mengandung satu akar α dari $p(x)$. Berlaku E_1 polinomial $f(x)$ yang mempunyai faktor linier $x - \alpha$. Derajat dari faktor sisa $f_1(x)$ dari $f(x)$ adalah $n - 1$, sehingga dengan induksi di situ adalah satu perluasan E dari E_1 mengandung semua akar dari $f_1(x)$. Ketika $\alpha \in E$, E adalah satu perluasan lapangan dari F mengandung semua akar dari $f(x)$. Sekarang biarkan K menjadi penyilangan dari semua sublapangan dari E mengandung F yang mana juga mengandung semua akar dari $f(x)$. Maka K adalah lapangan di mana ini merupakan lapangan pemisah untuk $f(x)$. ■

2.3.3 Polinomial *Separable*

Polinomial yang mempunyai akar berlainan pada lapangan pemisahnya dinamakan polinomial separabel, definisi dan teorema dari polinomial separabel sebagai berikut:

Definisi 15. Polinomial *Separable* (Chaudhuri, 1983: 126)

Polinomial yang tidak tereduksi lagi $p(x) \in F[x]$ dikatakan *separable* jika hanya mempunyai akar tunggal pada lapangan pemisahnya.

Teorema 4. (Chaudhuri, 1983: 128)

Untuk setiap lapangan F, suatu polinomial tunggal $f(x) \in F[x]$ adalah *separable* jika dan hanya jika $f(x)$ dan $f(x)'$ adalah relatif prima.

Bukti:

Misalkan $d(x) = (f(x), f'(x)) = 1$. Selanjutnya, misalkan $f(x) = (x-\alpha)^k g(x)$ pada lapangan pemisah $f(x)$, dimana α adalah sebuah akar ganda k pada $f(x)$ dan karenanya tak satu pun yang merupakan akar dari $g(x)$. Kita mempunyai

$$f'(x) = k(x-\alpha)^{k-1}g(x) + (x-\alpha)^k g'(x)$$
$$= (x-\alpha)^{k-1}[kg(x) + (x-\alpha)g'(x)]$$

Dengan demikian $(x-\alpha)^{k-1} \mid d(x)$ atas lapangan pemisah dari $f(x)$. Ini menyiratkan derajat $d(x) \geq k-1$. Tetapi derajat $d(x) = 0 \Longrightarrow k-1$, yaitu α adalah akar tunggal. Dengan cara yang sama, semua akar di $f(x)$ adalah tunggal dan $f(x)$ adalah *separable*.

Dan sebaliknya, misalkan $f(x)$ *separable* dan α adalah akar di $f(x)$. Maka $f(x) = (x-\alpha)g(x)$ dan α bukan suatu akar di $g(x)$. Terdapat $f'(x) = g(x) + (x-\alpha)g'(x)$ dan $f'(\alpha) = g(\alpha) \neq 0$. Dengan demikian α bukan akar di $d(x) = (f(x), f'(x))$. Setiap akar di $d(x)$ harus menjadi akar di $f(x)$, $d(x)$ tidak mempunyai akar disemuanya, dan menjadi polinomial monik, harus 1. ■

Definisi 16. Polinomial Monik (Raishinghania dan Aggarwal, 1980: 423)

Suatu polinomial $f(x) \in R[x]$ dengan elemen suku tertingginya identitas dari R atau dengan kata lain jika peubah x dengan pangkat tertingginya adalah 1 maka polinomial ini dinamakan polinomial monik.

Teorema 5. (Chaudhuri, 1983: 128-129)

Polinomial tak tereduksi $f(x) \in F[x]$ adalah *separable* jika dan hanya jika $f(x)' \neq 0$.

Bukti:

Ketika $f(x)$ tak tereduksi, ini hanya membagi dirinya sendiri dan unsur di F. Jika $f'(x) \neq 0$, maka $(f(x), f'(x)) = 1$; sementara jika $f'(x) = 0$, maka $(f(x), f'(x)) = f(x) \neq 1$. ■

Teorema 6. (Chaudhuri, 1983: 129)

Jika karakteristik F adalah 0, maka setiap polinomial tak tereduksi $f(x) \in F[x]$ adalah *separable*.

Bukti:

Ketika $f(x) \in F[x]$ tak tereduksi, ini berarti derajatnya positif, katakan n. Maka $f'(x) = na_n x^{n-1} + \cdots + a_1 \neq 0$, di mana $na_n \neq 0$. ■

Teorema 7. (Chaudhuri, 1983: 129)

Jika karakteristik pada F adalah p, maka polinomial tak tereduksi $f(x) \in F[x]$ adalah *inseparable* (bukan *separable*) jika dan hanya jika $f(x) = g(x^p)$, untuk setiap $g(x) \in F[x]$.

Bukti:

Pada teorema sebelumnya, $f(x)$ bukan *separable* (*inseparable*) jika dan hanya jika $f'(x) = 0$. Sekarang $f'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1$. Jadi $f'(x) = 0$, jika dan hanya jika $ka_k \equiv 0$ untuk $k = 1,2, \dots, n$. Tetapi $ka_k = 0$ jika dan hanya jika juga $a_k = 0$ atau $k \equiv 0(mod\ p)$. Kondisi ini jelas ekuivalen dengan $f(x) = g(x^p)$ untuk setiap $g(x) \in F[x]$; yaitu $f'(x) = 0$ jika dan hanya jika semua koefisien di $f(x)$ adalah kecuali nol, mungkin itu adalah p. ■

Definisi 17. Perluasan Normal (Dummit, 1999: 517)

Jika K adalah perluasan aljabar F di mana ini merupakan lapangan pemisah atas F untuk koleksi polinomial $f(x) \in F[x]$ maka K disebut perluasan normal F.

2.4 Isyarat Konsep Perluasan Lapangan dalam Al-Qur'an

Belajar matematika perlu dilakukan secara bertahap menuju level abstraksi. Dengan demikian matematika perlu dipelajari melalui tahapan nyata (konkret), setengah nyata (semi konkret), dan abstrak. Penyajian matematika secara konkret dapat berupa masalah yang berkaitan dengan kehidupan nyata (realistik/kontekstual). Bahasa yang digunakan adalah bahasa sehari-hari yang dekat dengan kehidupan. Masalah yang disajikan perlu diselesaikan untuk menemukan suatu konsep atau prinsip. Jadi aktivitas matematika adalah aktivitas penemuan melalui pemecahan masalah. Sehingga dikatakan bahwa inti kegiatan belajar matematika adalah pemecahan masalah (Abdussakir, 2007: 15-16).

Dalam penelitian ini, untuk memecahkan masalah adalah dengan cara melakukan faktorisasi terhadap himpunan polinomial dalam lapangan untuk memperoleh akar-akar penyelesaiannya. Apabila polinomial ini tidak dapat difaktorkan dalam lapangannya maka perlu adanya perluasan lapangan dan polinomial yang tidak dapat difaktorkan ini dinamakan polinomial tak tereduksi. Polinomial tak tereduksi ini akar-akarnya berada dalam perluasan lapangannya. Jika polinomial tak tereduksi dalam perluasan lapangan dapat dibentuk sebagai hasil kali dari faktor linier dalam lapangannya maka perluasan lapangan ini dinamakan lapangan pemisah. Jika polinomial dalam lapangan pemisahnya mempunyai akar yang berlainan maka polinomial ini dinamakan polinomial *separable*. Konsep ini secara tersurat dapat dilihat dalam Al-Qur'an surat Al-A'raf ayat 54.

إِنَّ رَبَّكُمُ ٱللَّهُ ٱلَّذِى خَلَقَ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضَ فِى سِتَّةِ أَيَّامٍ ثُمَّ ٱسْتَوَىٰ
عَلَى ٱلْعَرْشِ يُغْشِى ٱلَّيْلَ ٱلنَّهَارَ يَطْلُبُهُۥ حَثِيثًا وَٱلشَّمْسَ وَٱلْقَمَرَ وَٱلنُّجُومَ
مُسَخَّرَٰتٍۭ بِأَمْرِهِۦٓ ۗ أَلَا لَهُ ٱلْخَلْقُ وَٱلْأَمْرُ ۗ تَبَارَكَ ٱللَّهُ رَبُّ ٱلْعَٰلَمِينَ ﴿٥٤﴾

Artinya: *"Sesungguhnya Tuhan kamu ialah Allah yang telah menciptakan langit dan bumi dalam enam masa, lalu Dia bersemayam di atas 'Arsy. Dia menutupkan malam kepada siang yang mengikutinya dengan cepat, dan (diciptakan-Nya pula) matahari, bulan dan bintang-bintang (masing-masing) tunduk kepada perintah-Nya. Ingatlah, menciptakan dan memerintah hanyalah hak Allah. Maha Suci Allah, Tuhan semesta alam".*

Allah Swt yang menciptakan makhluk berupa alam semesta ini. Alam semesta kita khususnya tata surya adalah sebuah sistem yang terdiri dari sub-sub sistem yang padu, dan membentuk satu kesatuan. Kandungan dalam ayat Al-Qur'an surat Al-A'raf ayat 54 di atas menjelaskan bahwa Allah Swt telah menciptakan alam semesta dalam waktu enam masa, disertai dengan pergantian siang dan malam, dan diciptakanNya pula matahari, bulan, dan bintang-bintang di dalamnya. Hal tersebut merupakan himpunan yang berada dalam alam semesta ini. Begitu juga dalam Al-Qur’an surat Yunus ayat 5 sebagai berikut:

هُوَ ٱلَّذِى جَعَلَ ٱلشَّمۡسَ ضِيَآءٗ وَٱلۡقَمَرَ نُورٗا وَقَدَّرَهُۥ مَنَازِلَ لِتَعۡلَمُواْ
عَدَدَ ٱلسِّنِينَ وَٱلۡحِسَابَۚ مَا خَلَقَ ٱللَّهُ ذَٰلِكَ إِلَّا بِٱلۡحَقِّۚ يُفَصِّلُ ٱلۡأٓيَٰتِ
لِقَوۡمٖ يَعۡلَمُونَ ٥

Artinya: ”Dia-lah yang menjadikan matahari bersinar dan bulan bercahaya dan ditetapkan-Nya manzilah-manzilah (tempat-tempat) bagi perjalanan bulan itu, supaya kamu mengetahui bilangan tahun dan perhitungan (waktu). Allah tidak menciptakan yang demikian itu melainkan dengan hak. Dia menjelaskan tanda-tanda (kebesaran-Nya) kepada orang-orang yang mengetahui”.

Al-Qur’an surat Yunus ayat 5 di atas menjelaskan bahwa Allah Swt menciptakan matahari bersinar dan bulan bercahaya dan menempatkan jalannya bulan beredar pada jalan edarannya sendiri, jadi tidak akan bertumbukan dengan benda lain, dari itu dapat diketahui bilangan tahun dan hitungan waktu dalam hal ini bisa menentukan awal bulan dalam tanggalan Hijriyah.

BAB III

PEMBAHASAN

Pada bab ketiga ini akan dibahas mengenai akar-akar polinomial *separable* sebagai pembentuk perluasan normal pada ring modulo yang diperoleh dari lapangan pemisahnya. Adapun untuk memperoleh perluasan normal pada ring modulo dilakukan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Lapangan dikenakan suatu polinomial
2. Dari himpunan polinomial yang terbentuk, terbagi menjadi:
    a. Polinomial konstan
    b. Polinomial tidak konstan yaitu:
        1) Polinomial tereduksi
        2) Polinomial tidak tereduksi
3. Membentuk perluasan lapangan untuk memperoleh akar-akar dari polinomial tidak tereduksi.
4. Perluasan lapangan yang memuat polinomial tidak tereduksi di mana polinomial tidak tereduksi tersebut salah satu faktornya terdapat dalam sublapangan, maka perluasan lapangan ini dinamakan lapangan pemisah.
5. Jika dalam lapangan pemisah polinomialnya mempunyai akar-akar yang berlainan, maka polinomial ini dinamakan polinomial *separable* dalam lapangan.
6. Lapangan pemisah yang memuat semua akar-akar berlainan dinamakan perluasan normal.

Dalam penelitian ini lapangannya dikenakan pada polinomial yang koefisien suku-sukunya adalah bilangan modulo prima dan peubah x berderajat sesuai dengan modulo yang ditunjuk. Selanjutnya penjelasan dari langkah-langkah di atas akan dijabarkan dalam subbab-subbab berikut ini:

3.1. Lapangan yang Dikenakan Polinomial

Lapangan adalah suatu ring $(R, +, \times)$ yang bersifat komutatif dengan elemen satuan, di mana semua unsur di ring R mempunyai invers terhadap operasi kedua, kecuali identitas operasi pertama (Raisinghania, 1980: 314). Dengan kata lain, lapangan adalah ring sejati komutatif R yang memenuhi aksioma berikut. Untuk setiap elemen bukan nol $a \in R$ ada $a^{-1} \in R$ sedemikian hingga $a.a^{-1} = 1$ (Wahyudin, 1989: 155). Pada penelitian ini diberikan lapangan dengan operasi $+$ sebagai operasi pertama dan operasi $\times$ sebagai operasi kedua yang dikenakan pada bilangan modulo prima. Lapangan ini kemudian dikenakan suatu polinomial $f(x)$ yang kemudian diperoleh himpunan polinomial $f_i(x)$ di mana $i = 1,2, \dots, n$ yang koefisien suku-sukunya merupakan unsur-unsur di dalam lapangannya.

Polinomial-polinomial yang sudah terbentuk ini, kemudian ada polinomial yang konstan dan polinomial yang tidak konstan dan dari polinomial-polinomial yang tidak konstan ini terdapat polinomial yang dapat difaktorkan dan ada yang tidak dapat difaktorkan. Polinomial yang dapat difaktorkan berarti mempunyai akar selesaian pada lapangan tersebut, sementara polinomial yang tidak dapat difaktorkan disebut dengan polinomial tidak tereduksi *(irreducible)*. Untuk memperoleh akar-akarnya maka dibentuklah suatu perluasan lapangan yang kemudian akar-akar penyelesaian dari polinomial tidak tereduksi ini berada dalam perluasan lapangannya.

3.2. Perluasan Lapangan

Sebuah lapangan K disebut perluasan atas lapangan F, jika lapangan F adalah sublapangan dari lapangan K (Raishinghania, 1980: 534). Untuk membentuk suatu perluasan dari lapangan diperlukan beberapa langkah sebagai berikut:

1. Dibentuk himpunan polinomial atas lapangan F dengan peubah x, misalkan $F[x]$.
2. Menentukan ideal maksimal dari $F[x]$, misalkan N.
3. Membentuk himpunan koset dari ideal maksimal atas lapangan $F[x]$, sehingga diperoleh $\frac{F[x]}{N} = \{a + N | a \in F[x]\}$ yang merupakan perluasan lapangan dari F.

Pada penelitian ini penulis memberikan lapangan modulo yang dikenakan pada bilangan modulo prima. Bilangan modulo prima antara lain $2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots, n$ di mana n ini hanya bisa dibagi oleh 1 dan bilangan n itu sendiri. Penulis mengambil bilangan modulo $2, 3$, dan 5 sebagai contoh dalam penelitian ini. Pertama dimulai dengan modulo 2, yaitu $M_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$. Lapangan $(M_2, +, \times)$ dikenakan polinomial $k(x)$ dan diperoleh himpunan polinomial yaitu $M_2[x] = \{k(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n\}, a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in M_2$ sebagai berikut:

$k_1(x) = \bar{0}$ ... ... polinomial konstan

$k_2(x) = \bar{1}$ ... ... polinomial konstan

$k_3(x) = x$ … … … … … … polinomial tidak konstan

$k_4(x) = \bar{1} + x$ … … … … polinomial tidak konstan

Dari lapangan $(M_2, +, \times)$ ini hanya diperoleh polinomial-polinomial $M_2[x] = \{k_1(x), k_2(x), k_3(x), k_4(x)\}$ karena anggota $M_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$. Setelah itu polinomial-polinomial yang tidak konstan di atas yaitu $k_3(x)$ dan $k_4(x)$ dicari akar-akar penyelesaiannya yaitu sebagai berikut:

Untuk $\alpha \in T$ sedemikian hingga $k(\alpha) = \bar{0}$ maka,

$k_3(\alpha) = \alpha \Leftrightarrow \bar{0} = \alpha$ atau $\alpha = \bar{0}$

$k_4(\alpha) = \bar{1} + \alpha$

$\Leftrightarrow \quad \bar{0} = \bar{1} + \alpha$

$\Leftrightarrow \quad \alpha = -\bar{1} = \bar{1}$

Karena nilai $\alpha = \bar{0}$ dan $\alpha = \bar{1}$ maka $T = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ untuk $\alpha \in T$ maka hal ini menunjukkan bahwa α berada di dalam M_2. Oleh karena itu, M_2 merupakan perluasan lapangan atas M_2 itu sendiri karena $T = M_2$.

Pada $M_2[x]$ tidak dapat dicari lapangan pemisahnya karena tidak ada polinomial tidak tereduksi dari himpunan polinomial $M_2[x]$ yang terbentuk. Sehingga tidak dapat ditentukan juga perluasan normalnya.

Kedua, penulis memberikan lapangan $(M_3, +, \times)$ yang merupakan suatu lapangan yang anggota atau unsur-unsur dalam lapangannya adalah bilangan modulo 3 yaitu $M_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$. Lapangan $(M_3, +, \times)$ ini dikenakan suatu polinomial $p(x)$ yang menghasilkan himpunan polinomial dalam $M_3[x]$ yaitu $M_3[x] = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n\}, a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in M_3$ sebagaimana disajikan dalam tabel 3.1 berikut:

Tabel 3.1 Himpunan Polinomial pada $M_3[x]$

$p_1(x) = \bar{0}$	$p_{15}(x) = \bar{1} + \bar{2}x$
$p_2(x) = \bar{1}$	$p_{16}(x) = \bar{1} + \bar{2}x$
$p_3(x) = \bar{2}$	$p_{17}(x) = x + x^2$
$p_4(x) = x$	$p_{18}(x) = \bar{2}x + \bar{2}x^2$
$p_5(x) = \bar{2}x$	$p_{19}(x) = \bar{2} + \bar{2}x$
$p_6(x) = x^2$	$p_{20}(x) = \bar{2} + \bar{2}x^2$
$p_7(x) = \bar{2}x^2$	$p_{21}(x) = \bar{1} + x + \bar{2}x^2$
$p_8(x) = x + \bar{2}x^2$	$p_{22}(x) = \bar{1} + \bar{2}x + x^2$
$p_9(x) = \bar{2}x + x^2$	$p_{23}(x) = \bar{2} + x + x^2$
$p_{10}(x) = \bar{1} + x$	$p_{24}(x) = \bar{2} + \bar{2}x + x^2$
$p_{11}(x) = \bar{1} + x^2$	$p_{25}(x) = \bar{2} + x + \bar{2}x^2$
$p_{12}(x) = \bar{2} + x$	$p_{26}(x) = \bar{1} + \bar{2}x + \bar{2}x^2$
$p_{13}(x) = \bar{2} + x^2$	$p_{27}(x) = \bar{1} + x + x^2$
$p_{14}(x) = x + x^2$	$p_{28}(x) = \bar{2} + \bar{2}x + \bar{2}x^2$

Dari himpunan polinomial pada tabel 3.1 di atas polinomial yang bukan polinomial konstan dapat difaktorkan sehingga dapat diketahui akar-akar penyelesaiannya atau pembuat nolnya dalam $M_3[x]$ sebagaimana disajikan dalam tabel 3.2.

Untuk $\alpha \in S$ sedemikian hingga $p(\alpha) = \bar{0}$ maka,

Tabel 3.2 Pembuat Nol pada Polinomial $M_3[x]$

$p_4(\alpha) = \alpha$ $\bar{0} = \alpha$ $\alpha = \bar{0}$	$p_{16}(\alpha) = \bar{1} + \bar{2}\alpha$ $\bar{0} = \bar{1} + \bar{2}\alpha$ $\alpha = \bar{1}$
$p_5(\alpha) = \bar{2}\alpha$ $\bar{0} = \bar{2}\alpha$ $\alpha = \bar{0}$	$p_{17}(\alpha) = \alpha + \alpha^2$ $\bar{0} = \alpha + \alpha^2$ $\alpha = \bar{0}\ atau\ \alpha = -\bar{1} = \bar{2}$
$p_6(\alpha) = \alpha^2$ $\bar{0} = \alpha^2$ $\alpha = \bar{0}$	$p_{18}(\alpha) = \bar{2}\alpha + \bar{2}\alpha^2$ $\bar{0} = \bar{2}\alpha + \bar{2}\alpha^2$ $\bar{0} = \bar{2}\alpha(\bar{1} + \alpha)$ $\bar{2}\alpha = \bar{0}\ atau\ (\bar{1} + \alpha) = \bar{0}$ $\alpha = \bar{0}\ atau\ \alpha = -\bar{1} = \bar{2}$
$p_7(\alpha) = \bar{2}\alpha^2$ $\bar{0} = \bar{2}\alpha^2$ $\alpha = \bar{0}$	$p_{19}(\alpha) = \bar{2} + \bar{2}\alpha$ $\bar{0} = \bar{2} + \bar{2}\alpha$ $\alpha = -\bar{1} = \bar{2}$
$p_8(\alpha) = \alpha + \bar{2}\alpha^2$ $\bar{0} = \alpha + \bar{2}\alpha^2$ $\alpha = \bar{1}$	$p_{20}(\alpha) = \bar{2} + \bar{2}\alpha^2$ $\bar{0} = \bar{2} + \bar{2}\alpha^2$ $\nexists\alpha$ yang memenuhi $p_{20}(\alpha) = \bar{0}$
$p_9(\alpha) = \bar{2}\alpha + \alpha^2$ $\bar{0} = \bar{2}\alpha + \alpha^2$ $\alpha = \bar{0}\ atau\ \alpha = -\bar{2} = \bar{1}$	$p_{21}(\alpha) = \bar{1} + \alpha + \bar{2}\alpha^2$ $\bar{0} = \bar{1} + \alpha + \bar{2}\alpha^2$ $\nexists\alpha$ yang memenuhi $p_{21}(\alpha) = \bar{0}$
$p_{10}(\alpha) = \bar{1} + \alpha$ $\bar{0} = \bar{1} + \alpha$ $\alpha = -\bar{1} = \bar{2}$	$p_{22}(\alpha) = \bar{1} + \bar{2}\alpha + \alpha^2$ $\bar{0} = \bar{1} + \bar{2}\alpha + \alpha^2$ $\alpha = -\bar{1}\ atau\ \alpha = -\bar{1}$ $\alpha = -1 = \bar{2}$
$p_{11}(\alpha) = \bar{1} + \alpha^2$ $\bar{0} = \bar{1} + \alpha^2$ $\nexists\alpha$ yang memenuhi $p_{11}(\alpha) = \bar{0}$	$p_{23}(\alpha) = \bar{2} + \alpha + \alpha^2$ $\bar{0} = \bar{2} + \alpha + \alpha^2$ $\nexists\alpha$ yang memenuhi $p_{23}(\alpha) = \bar{0}$
$p_{12}(\alpha) = \bar{2} + \alpha$ $\bar{0} = \bar{2} + \alpha$ $\alpha = -\bar{2} = \bar{1}$	$p_{24}(\alpha) = \bar{2} + \bar{2}\alpha + \alpha^2$ $\bar{0} = \bar{2} + \bar{2}\alpha + \alpha^2$ $\nexists\alpha$ yang memenuhi $p_{24}(\alpha) = \bar{0}$
$p_{13}(\alpha) = \bar{2} + \alpha^2$ $\bar{0} = \bar{2} + \alpha^2$ $\alpha = \bar{1}$	$p_{25}(\alpha) = \bar{2} + \alpha + \bar{2}\alpha^2$ $\bar{0} = \bar{2} + \alpha + \bar{2}\alpha^2$ $\alpha = \bar{2}$
$p_{14}(\alpha) = \alpha + \alpha^2$ $\bar{0} = \alpha + \alpha^2$ $\alpha = \bar{0}\ atau\ \alpha = -\bar{1} = 2$	$p_{26}(\alpha) = \bar{1} + 2\alpha + 2\alpha^2$ $\bar{0} = \bar{1} + 2\alpha + 2\alpha^2$ $\nexists\alpha$ yang memenuhi $p_{26}(\alpha) = \bar{0}$
$p_{15}(\alpha) = \bar{1} + \bar{2}\alpha$ $\bar{0} = \bar{1} + \bar{2}\alpha$ $\alpha = \bar{1}$	$p_{27}(\alpha) = \bar{1} + \alpha + \alpha^2$ $\bar{0} = \bar{1} + \alpha + \alpha^2$ $\alpha = \bar{1}$
	$p_{28}(\alpha) = \bar{2} + \bar{2}\alpha + \bar{2}\alpha^2$ $\bar{0} = \bar{2} + \bar{2}\alpha + \bar{2}\alpha^2$ $\alpha = \bar{1}$

Berdasarkan tabel 3.2 diperoleh anggota $S = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$ di mana polinomial-polinomial yang berada dalam M_3 juga termasuk dalam S. Dalam mencari akar-akar penyelesaian di atas ternyata ada polinomial yang tidak mempunyai akar atau polinomial yang tidak tereduksi dalam M_3. Maka untuk memperoleh akar-akar dari polinomial tidak tereduksi ini dibentuklah perluasan lapangan dari M_3 yaitu S dengan syarat anggota polinomial tidak tereduksi dalam M_3 harus ideal maksimal dari S. Dikatakan ideal maksimal jika polinomial tidak tereduksi yang berada dalam M_3 berada dalam dirinya sendiri yaitu dalam M_3 dan induknya yaitu dalam S dan tidak termuat dalam ideal lainnya. Sementara sublapangan M_3 dari lapangan S dikatakan ideal jika ideal kanan dan ideal kiri sebagai berikut:

Misal penulis mengambil polinomial tereduksi $p_9(x) = \bar{2}x + x^2 \in M_3[x]$ dan polinomial ini dioperasikan pada operasi kedua atau dikalikan pada lapangan dengan sebarang polinomial tidak tereduksi dalam $S[x]$ sebagai berikut:

Tabel. 3.3 Ideal Kiri $M_3[x]$ dari $S[x]$

$p_9(x) = (\bar{2}x + x^2)p_{11}(x)$ $= x(\bar{2} + x)(\bar{1} + x^2)$ $= \bar{2} + x^2 \in M_3[x]$	$p_9(x) = (\bar{2}x + x^2)p_{23}(x)$ $= x(\bar{2} + x)(\bar{2} + x + x^2)$ $= \bar{2}x + x^2 \in M_3[x]$
$p_9(x) = (\bar{2}x + x^2)p_{20}(x)$ $= x(\bar{2} + x)(\bar{2} + \bar{2}x^2)$ $= \bar{1} + \bar{2}x^2 \in M_3[x]$	$p_9(x) = (\bar{2}x + x^2)p_{24}(x)$ $= x(\bar{2} + x)(\bar{2} + \bar{2}x + x^2)$ $= \bar{1} + \bar{2}x \in M_3[x]$
$p_9(x) = (\bar{2}x + x^2)p_{21}(x)$ $= x(\bar{2} + x)(\bar{1} + x + \bar{2}x^2)$ $= \bar{2} + x \in M_3[x]$	$p_9(x) = (\bar{2}x + x^2)p_{26}(x)$ $= x(\bar{2} + x)(\bar{1} + \bar{2}x + \bar{2}x^2)$ $= x + \bar{2}x^2 \in M_3[x]$

Tabel 3.4 Ideal Kanan $M_3[x]$ dari $S[x]$

$p_9(x) = p_{11}(x)\ (\bar{2}x + x^2)$ $= (\bar{1} + x^2)(\bar{2}x + x^2)$ $= \bar{2} + x^2 \in M_3[x]$	$p_9(x) = p_{23}(x)\ (\bar{2}x + x^2)$ $= (\bar{2} + x + x^2)x(\bar{2} + x)$ $= \bar{2}x + x^2 \in M_3[x]$
$p_9(x) = p_{20}(x)\ (\bar{2}x + x^2)$ $= (\bar{2} + \bar{2}x^2)(\bar{2}x + x^2)$ $= \bar{1} + \bar{2}x^2 \in M_3[x]$	$p_9(x) = p_{24}(x)\ (\bar{2}x + x^2)$ $= (\bar{2} + \bar{2}x + x^2)x(\bar{2} + x)$ $= \bar{1} + \bar{2}x \in M_3[x]$
$p_9(x) = p_{21}(x)\ (\bar{2}x + x^2)$ $= (\bar{1} + x + \bar{2}x^2)x(\bar{2} + x)$ $= \bar{2} + x \in M_3[x]$	$p_9(x) = p_{26}(x)\ (\bar{2}x + x^2)$ $= (\bar{1} + \bar{2}x + \bar{2}x^2)x(\bar{2} + x)$ $= x + \bar{2}x^2 \in M_3[x]$

Untuk polinomial tereduksi $p_{10}(x) = (\bar{1} + x) \in M_3[x]$ dan polinomial ini dikalikan dengan sebarang polinomial tidak tereduksi dalam $S[x]$ sebagai berikut:

Tabel 3.5 Ideal Kiri $M_3[x]$ dari $S[x]$

$p_{10}(x) = (\bar{1} + x)p_{11}(x)$ $= (\bar{1} + x)(\bar{1} + x^2)$ $= \bar{2} + x + \bar{2}x^2 \in M_3[x]$	$p_{10}(x) = (\bar{1} + x)p_{23}(x)$ $= (\bar{1} + x)(\bar{2} + x + x^2)$ $= \bar{1} \in M_3[x]$
$p_{10}(x) = (\bar{1} + x)p_{20}(x)$ $= (\bar{1} + x)(\bar{2} + \bar{2}x^2)$ $= \bar{1} + \bar{2}x + x^2 \in M_3[x]$	$p_{10}(x) = (\bar{1} + x)p_{24}(x)$ $= (\bar{1} + x)(\bar{2} + \bar{2}x + x^2)$ $= \bar{1} + x^2 \in M_3[x]$
$p_{10}(x) = (\bar{1} + x)p_{21}(x)$ $= (\bar{1} + x)(\bar{1} + x + \bar{2}x^2)$ $= \bar{2} + \bar{2}x + \bar{2}x^2 \in M_3[x]$	$p_{10}(x) = (\bar{1} + x)p_{26}(x)$ $= (\bar{1} + x)(\bar{1} + \bar{2}x + \bar{2}x^2)$ $= \bar{1} + x^2 \in M_3[x]$

Tabel 3.6 Ideal Kanan $M_3[x]$ dari $S[x]$

$p_{10}(x) = p_{11}(x)\ (\bar{1} + x)$ $= (\bar{1} + x^2)(\bar{1} + x)$ $= \bar{2} + x + \bar{2}x^2 \in M_3[x]$	$p_{10}(x) = p_{23}(x)\ (\bar{1} + x)$ $= (\bar{2} + x + x^2)(\bar{1} + x)$ $= \bar{1} \in M_3[x]$
$p_{10}(x) = p_{20}(x)(\bar{1} + x)$ $= (\bar{2} + \bar{2}x^2)\ (\bar{1} + x)$ $= \bar{1} + \bar{2}x + x^2 \in M_3[x]$	$p_{10}(x) = p_{24}(x)\ (\bar{1} + x)$ $= (\bar{2} + \bar{2}x + x^2)(\bar{1} + x)$ $= \bar{1} + x^2 \in M_3[x]$
$p_{10}(x) = p_{21}(x)\ (\bar{1} + x)$ $= (\bar{1} + x + \bar{2}x^2)(\bar{1} + x)$ $= \bar{2} + \bar{2}x + \bar{2}x^2 \in M_3[x]$	$p_{10}(x) = p_{26}(x)\ (\bar{1} + x)$ $= (\bar{1} + \bar{2}x + \bar{2}x^2)(\bar{1} + x)$ $= \bar{1} + x^2 \in M_3[x]$

Untuk polinomial tereduksi $p_{12}(x) = (\bar{2} + x) \in M_3[x]$ dan polinomial ini dikalikan dengan sebarang polinomial tidak tereduksi dalam $S[x]$ sebagai berikut:

Tabel 3.7 Ideal Kiri $M_3[x]$ dari $S[x]$

$p_{12}(x) = (\bar{2}+x)p_{11}(x)$ $= (\bar{2}+x)(\bar{1}+x^2)$ $= x+\bar{2}x^2 \in M_3[x]$	$p_{12}(x) = (\bar{2}+x)p_{23}(x)$ $= (\bar{2}+x)(\bar{2}+x+x^2)$ $= \bar{2}+x \in M_3[x]$
$p_{12}(x) = (\bar{2}+x)p_{20}(x)$ $= (\bar{2}+x)(\bar{2}+\bar{2}x^2)$ $= \bar{2}x+x^2 \in M_3[x]$	$p_{12}(x) = (\bar{2}+x)p_{24}(x)$ $= (\bar{2}+x)(\bar{2}+\bar{2}x+x^2)$ $= \bar{2}+x^2 \in M_3[x]$
$p_{12}(x) = (\bar{2}+x)p_{21}(x)$ $= (\bar{2}+x)(\bar{1}+x+\bar{2}x^2)$ $= \bar{1} \in M_3[x]$	$p_{12}(x) = (\bar{2}+x)p_{26}(x)$ $= (\bar{2}+x)(\bar{1}+\bar{2}x+\bar{2}x^2)$ $= \bar{1}+\bar{2}x \in M_3[x]$

Tabel 3.8 Ideal Kanan $M_3[x]$ dari $S[x]$

$p_{12}(x) = p_{11}(x)\,(\bar{2}+x)$ $= (\bar{1}+x^2)(\bar{2}+x)$ $= x+\bar{2}x^2 \in M_3[x]$	$p_{12}(x) = p_{23}(x)\,(\bar{2}+x)$ $= (\bar{2}+x+x^2)\,(\bar{2}+x)$ $= \bar{2}+x \in M_3[x]$
$p_{12}(x) = p_{20}(x)\,(\bar{2}+x)$ $= (\bar{2}+\bar{2}x^2)\,(\bar{2}+x)$ $= \bar{2}x+x^2 \in M_3[x]$	$p_{12}(x) = p_{24}(x)\,(\bar{2}+x)$ $= (\bar{2}+\bar{2}x+x^2)\,(\bar{2}+x)$ $= \bar{2}+x^2 \in M_3[x]$
$p_{12}(x) = p_{21}(x)\,(\bar{2}+x)$ $= (\bar{1}+x+\bar{2}x^2)\,(\bar{2}+x)$ $= \bar{1} \in M_3[x]$	$p_{12}(x) = p_{26}(x)\,(\bar{2}+x)$ $= (\bar{1}+\bar{2}x+\bar{2}x^2)\,(\bar{2}+x)$ $= \bar{1}+\bar{2}x \in M_3[x]$

Berdasarkan uraian tabel 3.3, 3.5, dan 3.7 di mana tabel-tabel ini merupakan ideal kiri yaitu misalkan $p(x) \in M_3[x], q(x) \in S[x]$ di mana $q(x)$ adalah polinomial tidak tereduksi dalam $M_3[x]$ maka berlaku $p(x)\,q(x) \in S[x]$, berdasarkan tabel-tabel 3.4, 3.6, dan 3.8 ideal kanan yaitu misalkan $p(x) \in M_3[x], q(x) \in S[x]$ di mana $q(x)$ adalah polinomial tidak tereduksi dalam $M_3[x]$ maka berlaku $q(x)p(x) \in S[x]$, sehingga $M_3[x]$ merupakan ideal dari $S[x]$. Karena hasil ideal kiri ataupun kanan hasil pengoperasiannya hanya berada dalam $M_3[x]$ dan $S[x]$ maka ideal ini disebut ideal maksimal.

Polinomial-polinomial yang termasuk ideal maksimal yaitu polinomial-polinomial tidak tereduksi dalam $M_3[x]$ diantaranya yaitu sebagai berikut:

$p_{11}(x) = \bar{1}+x^2$

$p_{20}(x) = \bar{2}+\bar{2}x^2$

$p_{21}(x) = \bar{1} + x + \bar{2}x^2$

$p_{23}(x) = \bar{2} + x + x^2$

$p_{24}(x) = \bar{2} + \bar{2}x + x^2$

$p_{26}(x) = \bar{1} + \bar{2}x + \bar{2}x^2$

Polinomial-polinomial $p_{11}(x), p_{20}(x)$, $p_{21}(x)$, $p_{23}(x)$, $p_{24}(x)$, dan $p_{26}(x)$ yang tidak tereduksi dalam perluasan lapangannya ini kemudian dioperasikan pada operasi pertama yaitu penjumlahan $(+)$ terhadap sublapangannya yaitu pada polinomial-polinomial dalam $M_3[x]$, seperti yang disajikan dalam lampiran A di mana tabel A ini membentuk koset dari $M_3[x]$ di $\frac{M_3[x]}{\langle p(x)\rangle}$, untuk setiap $p(x)$ polinomial tidak tereduksi. Dari tabel A ini dapat diketahui bahwa $\frac{M_3[x]}{\langle p(x)\rangle}$ merupakan perluasan atas $M_3[x]$ karena himpunan polinomial dalam $M_3[x]$ merupakan bagian dari himpunan polinomial $S[x] = \frac{M_3[x]}{\langle p(x)\rangle}$, sehingga $M_3[x]$ merupakan sublapangan dari $\frac{M_3[x]}{\langle p(x)\rangle}$. Maka dari itu sudah jelas bahwa $\frac{M_3[x]}{\langle p(x)\rangle}$ adalah perluasan lapangan atas $M_3[x]$.

Selanjutnya yang ketiga, penulis memberikan lapangan $(M_5, +, \times)$ yang merupakan suatu lapangan yang anggota atau unsur-unsur dalam lapangannya adalah bilangan modulo 5 yaitu $M_5 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\ \bar{3}, \bar{4}\}$. Lapangan $(M_5, +, \times)$ ini dikenakan suatu polinomial $f(x)$ yang menghasilkan himpunan polinomial dalam $M_5[x]$ yaitu $M_5[x] = \{f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n\}, a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in M_5$ sebagaimana disajikan dalam tabel 3.9.

Tabel 3.9 Himpunan polinomial pada $M_5[x]$

$f_1(x) = \bar{0}$	$f_{26}(x) = \bar{2}x^2 + \bar{4}x^4$
$f_2(x) = \bar{1}$	$f_{27}(x) = \bar{3}x^3 + \bar{4}x^4$
$f_3(x) = \bar{2}$	$f_{28}(x) = x + \bar{2}x^2 + \bar{3}x^3 + \bar{4}x^4$
$f_4(x) = \bar{3}$	$f_{29}(x) = x + \bar{2}x^2 + \bar{3}x^3$
$f_5(x) = \bar{4}$	$f_{30}(x) = x + \bar{3}x^3 + \bar{4}x^4$
$f_6(x) = x$	$f_{31}(x) = \bar{2}x^2 + \bar{3}x^3 + \bar{4}x^4$
$f_7(x) = \bar{2}x$	$f_{32}(x) = \bar{1} + x + x^2 + x^3 + x^4$
$f_8(x) = \bar{3}x$	$f_{33}(x) = \bar{2} + \bar{2}x + \bar{2}x^2 + \bar{2}x^3 + \bar{2}x^4$
$f_9(x) = \bar{4}x$	$f_{34}(x) = \bar{3} + \bar{3}x + \bar{3}x^2 + \bar{3}x^3 + \bar{3}x^4$
$f_{10}(x) = x^2$	$f_{35}(x) = \bar{4} + \bar{4}x + \bar{4}x^2 + \bar{4}x^3 + \bar{4}x^4$
$f_{11}(x) = \bar{2}x^2$	$f_{36}(x) = x^2 + \bar{2}x^3 + \bar{3}x^4$
$f_{12}(x) = \bar{3}x^2$	$f_{37}(x) = x^3 + \bar{2}x^4$
$f_{13}(x) = \bar{4}x^2$	$f_{38}(x) = \bar{2}x + \bar{3}x^2 + x^3$
$f_{14}(x) = x^3$	$f_{39}(x) = \bar{2}x^2 + \bar{3}x^3 + x^4$
$f_{15}(x) = \bar{2}x^3$	$f_{40}(x) = \bar{4}x^2 + \bar{4}x^3 + x^4$
$f_{16}(x) = \bar{3}x^3$	$f_{41}(x) = \bar{4}x + \bar{4}x^2 + x^3$
$f_{17}(x) = \bar{4}x^3$	$f_{42}(x) = \bar{3}x^2 + \bar{4}x^3 + \bar{2}x^4$
$f_{18}(x) = x^4$	$f_{43}(x) = \bar{3}x + \bar{4}x^2 + \bar{2}x^3$
$f_{19}(x) = \bar{2}x^4$	$f_{44}(x) = x + \bar{3}x^2 + \bar{3}x^3 + x^4$
$f_{20}(x) = \bar{3}x^4$	$f_{45}(x) = \bar{1} + \bar{3}x + \bar{3}x^2 + x^3$
$f_{21}(x) = \bar{4}x^4$	$f_{46}(x) = \bar{2} + \bar{3}x + x^2$
$f_{22}(x) = x + \bar{2}x^2$	$f_{47}(x) = \bar{2} + \bar{2}x + \bar{2}x^2$
$f_{23}(x) = x + \bar{3}x^3$	$f_{48}(x) = \bar{4} + \bar{4}x + x^2$
$f_{24}(x) = x + \bar{4}x^4$	$f_{49}(x) = \bar{3} + \bar{4}x + \bar{2}x^2$
$f_{25}(x) = \bar{2}x^2 + \bar{3}x^3$	$f_n(x) = \cdots$

Dari himpunan polinomial pada tabel 3.9 di atas polinomial yang bukan polinomial konstan dapat difaktorkan sehingga dapat diketahui akar-akar penyelesaiannya atau pembuat nolnya dalam $M_5[x]$ sebagaimana disajikan dalam tabel 3.10.

Untuk $\alpha \in T$ sedemikian hingga $f(\alpha) = \bar{0}$ maka,

Tabel 3.10 Pembuat Nol pada Polinomial $M_5[x]$

$f_6(\alpha) = \alpha$ $\bar{0} = \alpha$	$f_{26}(\alpha) = \bar{2}\alpha^2 + \bar{4}\alpha^4$ $\bar{0} = \bar{2}\alpha^2 + \bar{4}\alpha^4$ $\nexists\alpha$ yang memenuhi $f_{26}(\alpha) = \bar{0}$
$f_7(\alpha) = \bar{2}\alpha$ $\bar{0} = \bar{2}\alpha$ $\bar{0} = \alpha$	$f_{27}(\alpha) = \bar{3}\alpha^3 + \bar{4}\alpha^4$ $\bar{0} = \bar{3}\alpha^3 + \bar{4}\alpha^4$ $\nexists\alpha$ yang memenuhi $f_{27}(\alpha) = \bar{0}$
$f_8(\alpha) = \bar{3}\alpha$ $\bar{0} = \bar{3}\alpha$ $\bar{0} = \alpha$	$f_{28}(\alpha) = \alpha + \bar{2}\alpha^2 + \bar{3}\alpha^3 + \bar{4}\alpha^4$ $\bar{0} = \alpha + \bar{2}\alpha^2 + \bar{3}\alpha^3 + \bar{4}\alpha^4$ $\nexists\alpha$ yang memenuhi $f_{28}(\alpha) = \bar{0}$
$f_9(x) = \bar{4}\alpha$ $\bar{0} = \bar{4}\alpha$ $\bar{0} = \alpha$	$f_{29}(\alpha) = \alpha + \bar{2}\alpha^2 + \bar{3}\alpha^3$ $\bar{0} = \alpha + \bar{2}\alpha^2 + \bar{3}\alpha^3$ $\nexists\alpha$ yang memenuhi $f_{29}(\alpha) = \bar{0}$
$f_{10}(\alpha) = \alpha^2$ $\bar{0} = \alpha^2$ $\bar{0} = \alpha$	$f_{30}(\alpha) = \alpha + \bar{3}\alpha^3 + \bar{4}\alpha^4$ $\bar{0} = \alpha + \bar{3}\alpha^3 + \bar{4}\alpha^4$ $\nexists\alpha$ yang memenuhi $f_{30}(\alpha) = \bar{0}$
$f_{11}(\alpha) = \bar{2}\alpha^2$ $\bar{0} = \bar{2}\alpha^2$ $\bar{0} = \alpha$	$f_{31}(\alpha) = \bar{2}\alpha^2 + \bar{3}\alpha^3 + \bar{4}\alpha^4$ $\bar{0} = \bar{2}\alpha^2 + \bar{3}\alpha^3 + \bar{4}\alpha^4$ $\nexists\alpha$ yang memenuhi $f_{31}(\alpha) = \bar{0}$
$f_{12}(\alpha) = \bar{3}\alpha^2$ $\bar{0} = \bar{3}\alpha^2$ $\bar{0} = \alpha$	$f_{32}(\alpha) = \bar{1} + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4$ $\bar{0} = \bar{1} + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4$ $\nexists\alpha$ yang memenuhi $f_{32}(\alpha) = \bar{0}$
$f_{13}(\alpha) = \bar{4}\alpha^2$ $\bar{0} = \bar{4}\alpha^2$ $\bar{0} = \alpha$	$f_{33}(\alpha) = \bar{2} + \bar{2}\alpha + \bar{2}\alpha^2 + \bar{2}\alpha^3 + \bar{2}\alpha^4$ $\bar{0} = \bar{2} + \bar{2}\alpha + \bar{2}\alpha^2 + \bar{2}\alpha^3 + \bar{2}\alpha^4$ $\nexists\alpha$ yang memenuhi $f_{33}(\alpha) = \bar{0}$
$f_{14}(\alpha) = \alpha^3$ $\bar{0} = \alpha^3$ $\bar{0} = \alpha$	$f_{34}(\alpha) = \bar{3} + \bar{3}\alpha + \bar{3}\alpha^2 + \bar{3}\alpha^3 + \bar{3}\alpha^4$ $\bar{0} = \bar{3} + \bar{3}\alpha + \bar{3}\alpha^2 + \bar{3}\alpha^3 + \bar{3}\alpha^4$ $\nexists\alpha$ yang memenuhi $f_{34}(\alpha) = \bar{0}$
$f_{15}(\alpha) = \bar{2}\alpha^3$ $\bar{0} = \bar{2}\alpha^3$ $\bar{0} = \alpha$	$f_{35}(\alpha) = \bar{4} + \bar{4}\alpha + \bar{4}\alpha^2 + \bar{4}\alpha^3 + \bar{4}\alpha^4$ $\bar{0} = \bar{4} + \bar{4}\alpha + \bar{4}\alpha^2 + \bar{4}\alpha^3 + \bar{4}\alpha^4$ $\nexists\alpha$ yang memenuhi $f_{35}(\alpha) = \bar{0}$
$f_{16}(\alpha) = \bar{3}\alpha^3$ $\bar{0} = \bar{3}\alpha^3$ $\bar{0} = \alpha$	$f_{36}(\alpha) = \alpha^2 + \bar{2}\alpha^3 + \bar{3}\alpha^4$ $\bar{0} = \alpha^2 + \bar{2}\alpha^3 + \bar{3}\alpha^4$ $\nexists\alpha$ yang memenuhi $f_{36}(\alpha) = \bar{0}$
$f_{17}(\alpha) = \bar{4}\alpha^3$ $\bar{0} = \alpha$ $\bar{0} = \bar{4}\alpha^3$	$f_{37}(\alpha) = \alpha^3 + \bar{2}\alpha^4$ $\bar{0} = \alpha^3 + \bar{2}\alpha^4$ $\nexists\alpha$ yang memenuhi $f_{37}(\alpha) = \bar{0}$
$f_{18}(\alpha) = \alpha^4$ $\bar{0} = \alpha^4$ $\bar{0} = \alpha$	$f_{38}(\alpha) = \bar{2}\alpha + \bar{3}\alpha^2 + \alpha^3$ $\bar{0} = \bar{2}\alpha + \bar{3}\alpha^2 + \alpha^3$ $\bar{0} = \alpha(\alpha + \bar{1})(\alpha + \bar{2})$ $\alpha = \bar{0}, \alpha = -\bar{1} = \bar{4}\ atau$ $\alpha = -\bar{2} = \bar{3}$
$f_{19}(\alpha) = \bar{2}\alpha^4$ $\bar{0} = \bar{2}\alpha^4$	$f_{39}(\alpha) = \bar{2}\alpha^2 + \bar{3}\alpha^3 + \alpha^4$ $\bar{0} = \bar{2}\alpha^2 + \bar{3}\alpha^3 + \alpha^4$

$\bar{0} = \alpha$	$\bar{0} = \alpha^2(\alpha + \bar{1})(\alpha + \bar{2})$ $\alpha^2 = \bar{0}, \alpha = -\bar{1} = \bar{4}\ atau$ $\alpha = -\bar{2} = \bar{3}$
$f_{20}(\alpha) = \bar{3}\alpha^4$ $\bar{0} = \bar{3}\alpha^4$ $\bar{0} = \alpha$	$f_{40}(\alpha) = \bar{4}\alpha^2 + \bar{4}\alpha^3 + \alpha^4$ $\bar{0} = \bar{4}\alpha^2 + \bar{4}\alpha^3 + \alpha^4$ $\bar{0} = \alpha^2(\alpha + \bar{2})(\alpha + \bar{2})$ $\alpha = \bar{0}, \alpha = -\bar{2} = \bar{3}\ atau$ $\alpha = -\bar{2} = \bar{3}$
$f_{21}(\alpha) = \bar{4}\alpha^4$ $\bar{0} = \bar{4}\alpha^4$ $\bar{0} = \alpha$	$f_{41}(\alpha) = \bar{4}\alpha + \bar{4}\alpha^2 + \alpha^3$ $\bar{0} = \bar{4}\alpha + \bar{4}\alpha^2 + \alpha^3$ $\bar{0} = \alpha(\alpha + \bar{2})(\alpha + \bar{2})$ $\alpha = \bar{0}, \alpha = -\bar{2} = \bar{3}\ atau$ $\alpha = -\bar{2} = \bar{3}$
$f_{22}(\alpha) = \alpha + \bar{2}\alpha^2$ $\bar{0} = \alpha + \bar{2}\alpha^2$ $\nexists\alpha$ yang memenuhi $f_{22}(\alpha) = \bar{0}$	$f_{42}(\alpha) = \bar{3}\alpha^2 + \bar{4}\alpha^3 + \bar{2}\alpha^4$ $\bar{0} = \bar{3}\alpha^2 + \bar{4}\alpha^3 + \bar{2}\alpha^4$ $\nexists\alpha$ yang memenuhi $f_{42}(\alpha) = \bar{0}$
$f_{23}(\alpha) = \alpha + \bar{3}\alpha^3$ $\bar{0} = \alpha + \bar{3}\alpha^3$ $\nexists\alpha$ yang memenuhi $f_{23}(\alpha) = \bar{0}$	$f_{43}(\alpha) = \bar{3}\alpha + \bar{4}\alpha^2 + \bar{2}\alpha^3$ $\bar{0} = \bar{3}\alpha + \bar{4}\alpha^2 + \bar{2}\alpha^3$ $\nexists\alpha$ yang memenuhi $f_{43}(\alpha) = \bar{0}$
$f_{24}(\alpha) = \alpha + \bar{4}\alpha^4$ $\bar{0} = \alpha + \bar{4}\alpha^4$ $\nexists\alpha$ yang memenuhi $f_{24}(\alpha) = \bar{0}$	$f_{44}(\alpha) = \alpha + \bar{3}\alpha^2 + \bar{3}\alpha^3 + \alpha^4$ $\bar{0} = \alpha + \bar{3}\alpha^2 + \bar{3}\alpha^3 + \alpha^4$ $\bar{0} = \alpha(\alpha + \bar{1})(\alpha + \bar{1})(\alpha + \bar{1})$ $\alpha = \bar{0}\ atau\ \alpha = -\bar{1} = \bar{4}$
$f_{25}(\alpha) = \bar{2}\alpha^2 + \bar{3}\alpha^3$ $\bar{0} = \bar{2}\alpha^2 + \bar{3}\alpha^3$ $\nexists\alpha$ yang memenuhi $f_{25}(\alpha) = \bar{0}$	$f_{45}(\alpha) = \bar{1} + \bar{3}\alpha + \bar{3}\alpha^2 + \alpha^3$ $\bar{0} = \bar{1} + \bar{3}\alpha + \bar{3}\alpha^2 + \alpha^3$ $\bar{0} = (\alpha + \bar{1})(\alpha + \bar{1})(\alpha + \bar{1})$ $\alpha = -\bar{1} = \bar{4}$
$f_{46}(\alpha) = \bar{2} + \bar{3}\alpha + \alpha^2$ $\bar{0} = \bar{2} + \bar{3}\alpha + \alpha^2$ $\bar{0} = (\alpha + \bar{1})(\alpha + \bar{2})$ $\alpha = -\bar{1} = \bar{4}\ atau$ $\alpha = -\bar{2} = \bar{3}$	$f_{48}(\alpha) = \bar{4} + \bar{4}\alpha + \alpha^2$ $\bar{0} = \bar{4} + \bar{4}\alpha + \alpha^2$ $\bar{0} = (\alpha + \bar{2})(\alpha + \bar{2})$ $\alpha = -\bar{2} = \bar{3}\ atau\ \alpha = -\bar{2} = \bar{3}$
$f_{47}(\alpha) = \bar{2} + \bar{2}\alpha + \bar{2}\alpha^2$ $\bar{0} = \bar{2} + \bar{2}\alpha + \bar{2}\alpha^2$ $\nexists\alpha$ yang memenuhi $f_{47}(\alpha) = \bar{0}$	$f_{49}(\alpha) = \bar{3} + \bar{4}\alpha + \bar{2}\alpha^2$ $\bar{0} = \bar{3} + \bar{4}\alpha + \bar{2}\alpha^2$ $\bar{0} = (\alpha + \bar{1})(\bar{2}\alpha + \bar{3})$ $\alpha = -\bar{1} = 4\ atau\ \alpha = -\frac{2}{3} = \bar{0}$
	$f_n(\alpha) = \cdots$

Berdasarkan tabel 3.10 di atas diperoleh anggota $T = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$ di mana polinomial-polinomial yang berada dalam M_5 juga termasuk dalam T. Dalam mencari akar-akar penyelesaian di atas ternyata ada polinomial yang tidak mempunyai akar atau polinomial yang tidak tereduksi dalam M_5. Maka untuk memperoleh akar-akar dari polinomial tidak tereduksi ini dibentuklah perluasan lapangan dari M_5 yaitu T dengan syarat anggota polinomial tidak tereduksi dalam M_5 harus ideal maksimal dari T. Dikatakan ideal maksimal jika polinomial tidak tereduksi yang berada dalam M_5 berada dalam dirinya sendiri yaitu dalam M_5 dan induknya yaitu dalam T dan tidak termuat dalam ideal lainnya. Sementara sublapangan M_5 dari lapangan T dikatakan ideal jika ideal kanan dan ideal kiri sebagai berikut:

Misal penulis mengambil polinomial tereduksi $f_{44}(x) = x + \bar{3}x^2 + \bar{3}x^3 + x^4 \in M_5[x]$ dan polinomial ini dioperasikan pada operasi kedua atau dikalikan pada lapangan dengan sebarang polinomial tidak tereduksi dalam $F[x]$ sebagai berikut:

Tabel 3.11 Ideal Kiri $M_5[x]$ dari $T[x]$

$f_{44}(x) = (x + \bar{3}x^2 + \bar{3}x^3 + x^4)f_{22}(x)$ $= (x(x+\bar{1})(x+\bar{1})(x+\bar{1}))(x+\bar{2}x^2)$ $= \bar{2} + \bar{2}x + x^2 + \bar{4}x^4 \in M_5[x]$
$f_{44}(x) = (x + \bar{3}x^2 + \bar{3}x^3 + x^4)f_{23}(x)$ $= (x(x+\bar{1})(x+\bar{1})(x+\bar{1}))(x+\bar{3}x^3)$ $= \bar{4} + \bar{4}x + \bar{4}x^2 + \bar{3}x^3 + x^4 \in M_5[x]$
$f_{44}(x) = (x + \bar{3}x^2 + \bar{3}x^3 + x^4)f_{24}(x)$ $= (x(x+\bar{1})(x+\bar{1})(x+\bar{1}))(x+\bar{4}x^4)$ $= \bar{2}x + \bar{3}x^2 + \bar{2}x^3 + \bar{3}x^4 \in M_5[x]$
$f_{44}(x) = (x + \bar{3}x^2 + \bar{3}x^3 + x^4)f_{25}(x)$ $= (x(x+\bar{1})(x+\bar{1})(x+\bar{1}))(\bar{2}x^2+\bar{3}x^3)$ $= x + \bar{3}x^2 + \bar{2}x^3 + \bar{4}x^4 \in M_5[x]$
$f_{44}(x) = (x + \bar{3}x^2 + \bar{3}x^3 + x^4)f_{26}(x)$ $= (x(x+\bar{1})(x+\bar{1})(x+\bar{1}))(\bar{2}x^2+\bar{4}x^4)$ $= \bar{4}x + \bar{2}x^2 + x^3 + x^4 \in M_5[x]$

Tabel 3.12 Ideal Kanan $M_5[x]$ dari $T[x]$

$f_{44}(x) = f_{22}(x)\,(x + \bar{3}x^2 + \bar{3}x^3 + x^4)$ $= (x + \bar{2}x^2)\,(x(x + \bar{1})(x + \bar{1})(x + \bar{1})\,)$ $= \bar{2} + \bar{2}x + x^2 + \bar{4}x^4 \in M_5[x]$
$f_{44}(x) = f_{23}(x)\,(x + \bar{3}x^2 + \bar{3}x^3 + x^4)$ $= (x + \bar{3}x^3\,)\,(x(x + \bar{1})(x + \bar{1})(x + \bar{1})\,)$ $= \bar{4} + \bar{4}x + \bar{4}x^2 + \bar{3}x^3 + x^4 \in M_5[x]$
$f_{44}(x) = f_{24}(x)\,(x + \bar{3}x^2 + \bar{3}x^3 + x^4)$ $= (x + \bar{4}x^4)\,(x(x + \bar{1})(x + \bar{1})(x + \bar{1})\,)$ $= \bar{2}x + \bar{3}x^2 + \bar{2}x^3 + \bar{3}x^4 \in M_5[x]$
$f_{44}(x) = f_{25}(x)\,(x + \bar{3}x^2 + \bar{3}x^3 + x^4)$ $= (\bar{2}x^2 + \bar{3}x^3)\,(x(x + \bar{1})(x + \bar{1})(x + \bar{1})\,)$ $= x + \bar{3}x^2 + \bar{2}x^3 + \bar{4}x^4 \in M_5[x]$
$f_{44}(x) = f_{26}(x)(x + \bar{3}x^2 + \bar{3}x^3 + x^4)$ $= (\bar{2}x^2 + \bar{4}x^4)\,(x(x + \bar{1})(x + \bar{1})(x + \bar{1})\,)$ $= \bar{4}x + \bar{2}x^2 + x^3 + x^4 \in M_5[x]$

Untuk polinomial tereduksi $f_{45}(x) = (\bar{1} + \bar{3}x + \bar{3}x^2 + x^3) \in M_5[x]$ dan polinomial ini dikalikan dengan sebarang polinomial tidak tereduksi dalam $M_5[x]$ sebagai berikut:

Tabel 3.13 Ideal Kiri $M_5[x]$ dari $T[x]$

$f_{45}(x) = (\bar{1} + \bar{3}x + \bar{3}x^2 + x^3)f_{22}(x)$ $= \big((x + \bar{1})(x + \bar{1})(x + \bar{1})\,\big)(x + \bar{2}x^2)$ $= \bar{2} + x + \bar{4}x^3 + \bar{2}x^4 \in M_5[x]$
$f_{45}(x) = (\bar{1} + \bar{3}x + \bar{3}x^2 + x^3)f_{23}(x)$ $= \big((x + \bar{1})(x + \bar{1})(x + \bar{1})\,\big)(x + \bar{3}x^3\,)$ $= \bar{4} + \bar{4}x + \bar{3}x^2 + x^3 \in M_5[x]$
$f_{45}(x) = (\bar{1} + \bar{3}x + \bar{3}x^2 + x^3)f_{24}(x)$ $= \big((x + \bar{1})(x + \bar{1})(x + \bar{1})\,\big)(x + \bar{4}x^4)$ $= \bar{2} + \bar{3}x + \bar{2}x^2 + \bar{3}x^3 \in M_5[x]$
$f_{45}(x) = (\bar{1} + \bar{3}x + \bar{3}x^2 + x^3)f_{25}(x)$ $= \big((x + \bar{1})(x + \bar{1})(x + \bar{1})\,\big)(\bar{2}x^2 + \bar{3}x^3)$ $= \bar{1} + \bar{3}x + \bar{2}x^2 + \bar{4}x^3 \in M_5[x]$
$f_{45}(x) = (\bar{1} + \bar{3}x + \bar{3}x^2 + x^3)f_{26}(x)$ $= \big((x + \bar{1})(x + \bar{1})(x + \bar{1})\,\big)(\bar{2}x^2 + \bar{4}x^4)$ $= \bar{4} + \bar{2}x + x^2 + x^3 \in M_5[x]$

Tabel 3.14 Ideal Kanan $M_5[x]$ dari $T[x]$

$f_{45}(x) = f_{22}(x)\,(\bar{1} + \bar{3}x + \bar{3}x^2 + x^3)$ $= (x + \bar{2}x^2)\left((x + \bar{1})(x + \bar{1})(x + \bar{1})\right)$ $= \bar{2} + x + \bar{4}x^3 + \bar{2}x^4 \in M_5[x]$
$f_{45}(x) = f_{23}(x)\,(\bar{1} + \bar{3}x + \bar{3}x^2 + x^3)$ $= (x + \bar{3}x^3)\left((x + \bar{1})(x + \bar{1})(x + \bar{1})\right)$ $= \bar{4} + \bar{4}x + \bar{3}x^2 + x^3 \in M_5[x]$
$f_{45}(x) = f_{24}(x)\,(\bar{1} + \bar{3}x + \bar{3}x^2 + x^3)$ $= (x + \bar{4}x^4)\left((x + \bar{1})(x + \bar{1})(x + \bar{1})\right)$ $= \bar{2} + \bar{3}x + \bar{2}x^2 + \bar{3}x^3 \in M_5[x]$
$f_{45}(x) = f_{25}(x)\,(\bar{1} + \bar{3}x + \bar{3}x^2 + x^3)$ $= (\bar{2}x^2 + \bar{3}x^3)\left((x + \bar{1})(x + \bar{1})(x + \bar{1})\right)$ $= \bar{1} + \bar{3}x + \bar{2}x^2 + \bar{4}x^3 \in M_5[x]$
$f_{45}(x) = f_{26}(x)\,(\bar{1} + \bar{3}x + \bar{3}x^2 + x^3)$ $= (\bar{2}x^2 + \bar{4}x^4)\left((x + \bar{1})(x + \bar{1})(x + \bar{1})\right)$ $= \bar{4} + \bar{2}x + x^2 + x^3 \in M_5[x]$

Untuk polinomial tereduksi $f_{46}(x) = (\bar{2} + \bar{3}x + x^2) \in M_5[x]$ dan polinomial ini dikalikan dengan sebarang polinomial tidak tereduksi dalam $M_5[x]$ sebagai berikut:

Tabel 3.15 Ideal Kiri $M_5[x]$ dari $T[x]$

$f_{46}(x) = (\bar{2} + \bar{3}x + x^2)f_{22}(x)$ $= \left((x + \bar{1})(x + \bar{2})\right)(x + \bar{2}x^2)$ $= \bar{2}x + \bar{2}x^2 + \bar{2}x^3 + \bar{2}x^4 \in M_5[x]$
$f_{46}(x) = (\bar{2} + \bar{3}x + x^2)f_{23}(x)$ $= \left((x + \bar{1})(x + \bar{2})\right)(x + \bar{3}x^3)$ $= \bar{3} + \bar{2}x + \bar{3}x^2 + \bar{2}x^3 + \bar{4}x^4 \in M_5[x]$
$f_{46}(x) = (\bar{2} + \bar{3}x + x^2)f_{24}(x)$ $= \left((x + \bar{1})(x + \bar{2})\right)(x + \bar{4}x^4)$ $= \bar{2} + x + \bar{3}x^2 + x^3 + \bar{3}x^4 \in M_5[x]$
$f_{46}(x) = (\bar{2} + \bar{3}x + x^2)f_{25}(x)$ $= \left((x + \bar{1})(x + \bar{2})\right)(\bar{2}x^2 + \bar{3}x^3)$ $= \bar{3} + \bar{4}x^2 + \bar{2}x^3 + x^4 \in M_5[x]$
$f_{46}(x) = (\bar{2} + \bar{3}x + x^2)f_{26}(x)$ $= \left((x + \bar{1})(x + \bar{2})\right)(\bar{2}x^2 + \bar{4}x^4)$ $= \bar{2} + \bar{4}x + \bar{4}x^2 + x^3 \in M_5[x]$

Tabel 3.16 Ideal Kanan $M_5[x]$ dari $T[x]$

$f_{46}(x) = f_{22}(x)\,(\bar{2} + \bar{3}x + x^2)$ $= (x + \bar{2}x^2)\left((x + \bar{1})(x + \bar{2})\right)$ $= \bar{2}x + \bar{2}x^2 + \bar{2}x^3 + \bar{2}x^4 \in M_5[x]$
$f_{46}(x) = f_{23}(x)\,(\bar{2} + \bar{3}x + x^2)$ $= (x + \bar{3}x^3)\left((x + \bar{1})(x + \bar{2})\right)$ $= \bar{3} + \bar{2}x + \bar{3}x^2 + \bar{2}x^3 + \bar{4}x^4 \in M_5[x]$
$f_{46}(x) = f_{24}(x)\,(\bar{2} + \bar{3}x + x^2)$ $= (x + \bar{4}x^4)\left((x + \bar{1})(x + \bar{2})\right)$ $= \bar{2} + x + \bar{3}x^2 + x^3 + \bar{3}x^4 \in M_5[x]$
$f_{46}(x) = f_{25}(x)\,(\bar{2} + \bar{3}x + x^2)$ $= (\bar{2}x^2 + \bar{3}x^3)\left((x + \bar{1})(x + \bar{2})\right)$ $= \bar{3} + \bar{4}x^2 + \bar{2}x^3 + x^4 \in M_5[x]$
$f_{46}(x) = f_{26}(x)\,(\bar{2} + \bar{3}x + x^2)$ $= (\bar{2}x^2 + \bar{4}x^4)\left((x + \bar{1})(x + \bar{2})\right)$ $= \bar{2} + \bar{4}x + \bar{4}x^2 + x^3 \in M_5[x]$

Berdasarkan uraian tabel 3.11, 3.13, dan 3.15 di mana tabel-tabel ini merupakan ideal kiri yaitu misalkan $f(x) \in M_5[x], g(x) \in T[x]$ di mana $g(x)$ adalah polinomial tidak tereduksi dalam $M_5[x]$ maka berlaku $f(x)\,g(x) \in T[x]$ dan dari tabel-tabel 3.12, 3.14, dan 3.16 ideal kanan yaitu misalkan $f(x) \in M_5[x], g(x) \in T[x]$ di mana $g(x)$ adalah polinomial tidak tereduksi dalam $M_5[x]$ maka berlaku $g(x)f(x) \in T[x]$, sehingga $M_5[x]$ merupakan ideal dari $T[x]$. Karena hasil ideal kiri ataupun kanan hasil pengoperasiannya hanya berada dalam $M_5[x]$ dan $T[x]$ maka ideal ini disebut ideal maksimal.

Polinomial-polinomial yang termasuk ideal maksimal yaitu polinomial-polinomial tidak tereduksi dalam $M_5[x]$ diantaranya yaitu sebagaimana disajikan dalam tabel 3.17.

Tabel 3.17 Polinomial Tidak Tereduksi yang Ideal Maksimal dalam $M_5[x]$

$f_{22}(x) = x + \bar{2}x^2$	$f_{35}(x) = \bar{4} + \bar{4}x + \bar{4}x^2 + \bar{4}x^3 + \bar{4}x^4$
$f_{23}(x) = x + \bar{3}x^3$	$f_{36}(x) = x^2 + \bar{2}x^3 + \bar{3}x^4$
$f_{24}(x) = x + \bar{4}x^4$	$f_{37}(x) = x^3 + \bar{2}x^4$
$f_{25}(x) = \bar{2}x^2 + \bar{3}x^3$	$f_{38}(x) = \bar{2}x + \bar{3}x^2 + x^3$
$f_{26}(x) = \bar{2}x^2 + \bar{4}x^4$	$f_{39}(x) = \bar{2}x^2 + \bar{3}x^3 + x^4$
$f_{27}(x) = \bar{3}x^3 + \bar{4}x^4$	$f_{40}(x) = \bar{4}x^2 + \bar{4}x^3 + x^4$
$f_{28}(x) = x + \bar{2}x^2 + \bar{3}x^3 + \bar{4}x^4$	$f_{41}(x) = \bar{4}x + \bar{4}x^2 + x^3$
$f_{29}(x) = x + \bar{2}x^2 + \bar{3}x^3$	$f_{42}(x) = \bar{3}x^2 + \bar{4}x^3 + \bar{2}x^4$
$f_{30}(x) = x + \bar{3}x^3 + \bar{4}x^4$	$f_{43}(x) = \bar{3}x + \bar{4}x^2 + \bar{2}x^3$
$f_{31}(x) = \bar{2}x^2 + \bar{3}x^3 + \bar{4}x^4$	$f_{44}(x) = x + \bar{3}x^2 + \bar{3}x^3 + x^4$
$f_{32}(x) = \bar{1} + x + x^2 + x^3 + x^4$	$f_{45}(x) = \bar{1} + \bar{3}x + \bar{3}x^2 + x^3$
$f_{33}(x) = \bar{2} + \bar{2}x + \bar{2}x^2 + \bar{2}x^3 + \bar{2}x^4$	$f_{47}(x) = \bar{2} + \bar{2}x + \bar{2}x^2$
$f_{34}(x) = \bar{3} + \bar{3}x + \bar{3}x^2 + \bar{3}x^3 + \bar{3}x^4$	

Polinomial-polinomial $f_{22}(x)$, $f_{23}(x)$, $f_{24}(x)$, $f_{25}(x)$, $f_{26}(x)$, $f_{27}(x)$, $f_{28}(x)$, $f_{29}(x)$, $f_{30}(x)$, $f_{31}(x)$, $f_{32}(x)$, $f_{33}(x)$, $f_{35}(x)$, $f_{36}(x)$, $f_{37}(x)$, dan $f_{47}(x)$ yang tidak tereduksi dari perluasan lapangan ini kemudian dioperasikan pada operasi pertama yaitu penjumlahan (+) terhadap sublapangannya yaitu pada polinomial-polinomial dalam $M_5[x]$, seperti yang disajikan dalam lampiran B untuk membentuk kosetnya. Dari tabel B ini dapat diketahui bahwa $\frac{M_5[x]}{\langle f(x)\rangle}$ merupakan perluasan atas $M_5[x]$ karena himpunan polinomial dalam $M_5[x]$ termasuk dalam himpunan polinomial $T[x] = \frac{M_5[x]}{\langle f(x)\rangle}$, sehingga $M_5[x]$ merupakan sublapangan dari $\frac{M_5[x]}{\langle f(x)\rangle}$. Maka dari itu sudah jelas bahwa $\frac{M_5[x]}{\langle f(x)\rangle}$ adalah perluasan lapangan atas $M_5[x]$.

Kajian Al-Qur’an untuk perluasan lapangan yaitu sebagai berikut. Suatu lapangan F yang dikenakan polinomial yang kemudian membentuk himpunan-himpunan polinomial di mana koefisien suku-sukunya merupakan elemen dari lapangan F. Polinomial-polinomial ini kemudian dicari akar-akar penyelesaiannya, dan ternyata dalam mencari akar-akarnya terdapat polinomial-polinomial yang tidak dapat dicari akar-akarnya, dengan kata lain polinomial tersebut tidak dapat difaktorkan *(irreducible)*. Maka dibentuklah perluasan lapangan K untuk memperoleh akar-akar penyelesaian dari polinomial-polinomial tidak tereduksi tersebut. Akar-akar dari polinomial-polinomial tidak tereduksi tersebut harus berada dalam perluasan lapangannya.

Dalam Al-Qur'an surat Nuh ayat 16 dijelaskan bahwa bulan diciptakan untuk menerangi bumi, namun bulan tidak bisa menerangi bumi tanpa adanya sinar dari matahari. Maka dari itu, Allah Swt menciptakan matahari sebagai pelita (penerang). Hal ini bisa dianalogikan seperti halnya polinomial yang tidak tereduksi pada suatu lapangan yang kemudian lapangan membutuhkan perluasan lapangan untuk memperoleh akar-akar dari polinomial tidak tereduksi ini. Begitu pula cahaya bulan yang menerangi bumi tidak selamanya bulan menyinari bumi. Bulan hanya menyinari bumi pada waktu malam hari saja. Untuk menerangi bumi pun bulan memerlukan adanya sinar dari matahari. Dan ketika bulan tidak bisa menyinari bumi pada siang hari maka mataharilah yang menyinari bumi.

Suatu lapangan K dikatakan perluasan lapangan atas lapangan F jika F sublapangan dari K. Di mana sifat-sifat dari F sama dengan sifat-sifat yang dimiliki oleh lapangan K. Begitu pula cahaya bulan memiliki sifat yang sama dengan sinar/cahaya matahari. Misalnya cahaya bisa tembus benda bening, merambat lurus, dapat dipantulkan dan dapat di biaskan (dalam ilmu fisika) begitu juga dengan sinar matahari. Seperti yang terkandung dalam Al-Qur'an surat An Nuur ayat 35 berikut:

۞ ٱللَّهُ نُورُ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلۡأَرۡضِۚ مَثَلُ نُورِهِۦ كَمِشۡكَوٰةٖ فِيهَا مِصۡبَاحٌۖ
ٱلۡمِصۡبَاحُ فِي زُجَاجَةٍۖ ٱلزُّجَاجَةُ كَأَنَّهَا كَوۡكَبٞ دُرِّيّٞ يُوقَدُ مِن شَجَرَةٖ
مُّبَٰرَكَةٖ زَيۡتُونَةٖ لَّا شَرۡقِيَّةٖ وَلَا غَرۡبِيَّةٖ يَكَادُ زَيۡتُهَا يُضِيٓءُ وَلَوۡ لَمۡ تَمۡسَسۡهُ
نَارٞۚ نُّورٌ عَلَىٰ نُورٖۚ يَهۡدِي ٱللَّهُ لِنُورِهِۦ مَن يَشَآءُۚ وَيَضۡرِبُ ٱللَّهُ ٱلۡأَمۡثَٰلَ
لِلنَّاسِۗ وَٱللَّهُ بِكُلِّ شَيۡءٍ عَلِيمٞ ٣٥

Artinya:''Allah (Pemberi) cahaya (kepada) langit dan bumi. Perumpamaan cahaya Allah, adalah seperti sebuah lubang yang tidak tembus, yang di dalamnya ada pelita besar. Pelita itu di dalam kaca (dan) kaca itu seakan-akan bintang (yang bercahaya) seperti mutiara, yang dinyalakan dengan minyak dari pohon yang berkahnya, (yaitu) pohon zaitun yang tumbuh tidak di sebelah timur (sesuatu) dan tidak pula di sebelah barat(nya), yang minyaknya (saja) hampir-hampir menerangi, walaupun tidak disentuh api. Cahaya di atas cahaya (berlapis-lapis), Allah membimbing kepada cahaya-Nya siapa yang dia kehendaki, dan Allah memperbuat perumpamaan-perumpamaan bagi manusia, dan Allah Maha Mengetahui segala sesuatu''.

Surat An Nuur ayat 35 di atas menjelaskan bahwa cahaya menembus benda bening seperti kaca. Cahaya berasal dari sumber cahaya. Salah satu sumber cahaya yaitu matahari. Sementara bulan memperoleh cahaya dari matahari. Maka dari itu dapat dipandang bahwa cahaya bulan merupakan sub bagian dari cahaya matahari.

3.3. Lapangan Pemisah

Perluasan lapangan K atas lapangan F dikatakan sebagai lapangan pemisah dari polinomial $f(x) \in F[x]$ jika $f(x)$ dapat dibentuk sebagai hasil kali dari faktor linier dalam $K[x]$ dan $f(x)$ bukan faktor linier atas setiap *proper* sublapangan terhadap K di F (Dummit dan Foote, 1999: 517).

Langkah-langkah untuk menentukan lapangan pemisah untuk polinomial $f(x)$ atas F yaitu:

1. Membentuk himpunan semua polinomial atas lapangan F, misal $F[x]$, kemudian tentukan perluasan lapangan dari F, misal K.
2. Mengambil suatu polinomial non konstan dalam $K[x]$ misal $k(x)$, dan $k(x)$ adalah polinomial tidak tereduksi dalam $K[x]$, sedemikian sehingga $f(x) = (x - \alpha_1)\, k(x)$ dengan α_1 adalah pembuat nol dalam $f(x)$.
3. Mencari semua pembuat nol dari $k(x)$, misal $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n\}$. Maka diperoleh lapangan pemisah untuk $f(x)$ atas lapangan $F[x]$ adalah $F[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n]$.

Selanjutnya, jika polinomial tidak tereduksi dalam $F[x]$ mempunyai akar-akar yang berlainan dalam lapangan pemisahnya, maka polinomial ini dinamakan polinomial *separable* dalam F.

Untuk membentuk lapangan pemisah, pertama penulis mengambil suatu polinomial tidak tereduksi dalam lapangan sedemikian sehingga polinomial tersebut termasuk dalam faktor polinomial dalam sublapanganya. Dalam penelitian ini di mulai dengan $M_2[x]$, $M_3[x]$, dan $M_5[x]$.

Pada $M_2[x]$, tidak dapat dicari lapangan pemisahnya karena tidak ada polinomial tidak tereduksi dalam perluasan lapangannya. Selanjutnya dalam $M_3[x]$, misal penulis mengambil polinomial tidak tereduksi dalam $\frac{M_3[x]}{\langle p(x)\rangle}$ yaitu polinomial-polinomial sebagai berikut,

$p_{11}(x) = \bar{1} + x^2$

$= x(x)(x + \bar{1})$

$p_{20}(x) = \bar{2} + \bar{2}x^2$

$= \bar{2}(x)(x)(\bar{1} + \bar{2}x)$

$p_{21}(x) = \bar{1} + x + \bar{2}x^2$

$= x(\bar{1} + x)(\bar{1} + x)$

$p_{23}(x) = \bar{2} + x + x^2$

$= x(\bar{2}x)(x)(\bar{2}x + \bar{1})$

$p_{24}(x) = \bar{2} + \bar{2}x + x^2$

$= x(\bar{2}x)(x^2 + x + \bar{2})$

$p_{26}(x) = \bar{1} + \bar{2}x + \bar{2}x^2$

$= x(x)(x^2 + x + \bar{2})$

Sedemikian sehingga polinomial-polinomial ini dapat di faktorkan dalam perluasan lapangannya, dan faktorisasi dari polinomial tidak tereduksi ini berada dalam faktorisasi polinomial tereduksi dalam lapangannya. Maka perluasan lapangan yang demikian dinamakan lapangan pemisah. Pada polinomial tidak tereduksi dalam $M_3[x]$ yang termasuk polinomial dalam lapangan pemisah hanya $p_{24}(x)$ karena polinomial ini dapat dibentuk sebagai hasil kali dari faktor polinomial dalam lapangan $M_3[x]$. Dan polinomial ini merupakan polinomial *separable* dalam lapangan pemisahnya karena polinomial $p_{24}(x)$ mempunyai akar-akar berlainan.

Pada $M_5[x]$, polinomial-polinomial yang tidak tereduksi yang tersaji pada tabel 3.17 di atas di mana polinomial-polinomial ini adalah anggota dari perluasan lapangan dalam $M_5[x]$. Polinomial-polinomial dalam perluasan lapangan $M_5[x]$ yang dapat dibentuk sebagai hasil kali dari faktor linier dalam lapangan $M_5[x]$ maka perluasan lapangan ini dinamakan lapangan pemisah. Misalkan penulis mengambil polinomial tidak tereduksi dalam lapangan $M_5[x]$ sebagai berikut:

$$f_{22}(x) = x + \bar{2}x^2 = x(\bar{2}x + \bar{1})$$

$$f_{37}(x) = x^3 + \bar{2}x^4 = x(x)(x)(\bar{2}x + \bar{1})$$

$$f_{38}(x) = \bar{2}x + \bar{3}x^2 + x^3 = x\big((x + \bar{3})(x + \bar{4})\big)$$

$$f_{39}(x) = \bar{2}x^2 + \bar{3}x^3 + x^4 = x(x)\big((x + \bar{1})(x + \bar{2})\big)$$

$$f_{40}(x) = \bar{4}x^2 + \bar{4}x^3 + x^4 = x(x)\big((x + \bar{2})(x + \bar{2})\big)$$

$$f_{41}(x) = \bar{4}x + \bar{4}x^2 + x^3 = x\big((x + \bar{2})(x + \bar{2})\big)$$

$$f_{42}(x) = \bar{3}x^2 + \bar{4}x^3 + \bar{2}x^4 = x(x)\big((\bar{2}x + \bar{1})(x + \bar{4})\big)$$

$$f_{43}(x) = \bar{3}x + \bar{4}x^2 + \bar{2}x^3 = x\big((\bar{2}x + \bar{1})(x + \bar{4})\big)$$

Polinomial-polinomial tidak tereduksi di atas, yang merupakan polinomial dalam lapangan pemisah hanya $f_{22}(x)$, $f_{38}(x)$, dan $f_{43}(x)$. Karena polinomial ini dapat dibentuk sebagai hasil kali dari faktor polinomial dalam lapangan $M_5[x]$, maka polinomial-polinomial ini merupakan polinomial *separable* dalam lapangan pemisahnya. Polinomial $f_{22}(x)$, $f_{38}(x)$, dan $f_{43}(x)$ dinamakan polinomial *separable* karena polinomial-polinomial tersebut mempunyai akar-akar berlainan dalam lapangannya.

Dalam Al-Qur'an surat Al-A'raf ayat 54 dan At-Taubah ayat 36 dijelaskan bahwa dalam alam semesta ini terdiri dari sub-sub sistem yang padu. Sama halnya dalam penelitian ini suatu lapangan mempunyai sublapangan di mana sublapangan ini memenuhi dari aksioma-aksioma dari lapangannya. Sehingga sublapangan ini memiliki atau mengawetkan operasi pada lapangannya di mana alam semesta terdiri dari matahari, bulan, bintang, bumi dan planet-planet lainnya. Dalam bumi terjadi adanya siang dan malam, hal itu disebabkan karena bulan berevolusi dan bumi berotasi pada porosnya. Bulan berevolusi 12 kali dalam setahun yang kemudian dianggap ada 12 bulan dalam tanggalan Hijriyah yang dijadikan sebagai patokan atau acuan sebagai penentu hari-hari besar bagi umat Islam di bumi. Terjadinya siang dan malam karena ada pemisah atau penghalang cahaya matahari yang datang ke bumi. Jika cahaya terhalangi bulan maka terjadilah malam dan begitu sebaliknya.

3.4. Perluasan Normal

Jika K adalah perluasan aljabar atas F di mana ini adalah lapangan pemisah atas F untuk koleksi polinomial $f(x) \in F[x]$ maka K disebut sebagai perluasan normal di F (Dummit dan Foote, 1999: 517). Yang dimaksud dengan perluasan aljabar, jika K adalah perluasan lapangan atas F disebut perluasan aljabar jika semua elemen dari K merupakan aljabar atas F. Elemen $\alpha \in K$ disebut elemen aljabar atas F jika $f(\alpha) = 0$, untuk suatu $f(x) \neq 0 \in F[x]$. Selanjutnya, lapangan pemisah yang memuat kesemua akar-akar dari polinomial-polinomial tidak tereduksi $f(x)$ maka lapangan pemisah ini merupakan perluasan normal.

Pada penelitian ini penulis memberi contoh dari $M_2[x], M_3[x]$ dan $M_5[x]$. Untuk $M_2[x]$ tidak dapat dicari perluasan normalnya karena tidak ada polinomial yang tidak tereduksi yang menjadi syarat dalam pembentukan lapangan pemisah yaitu polinomial tidak tereduksi dalam lapangan pemisah harus bisa difaktorkan dan faktorisasi tersebut harus berada dalam polinomial lapangannya.

Pada $M_3[x]$ dan $M_5[x]$ telah diketahui bahwa masing-masing terdapat lapangan pemisah. Pada $M_3[x]$ polinomial tidak tereduksi yang merupakan polinomial yang mempunyai akar-akar berlainan dalam lapangan pemisahnya yaitu $p_{24}(x)$ dan untuk $M_5[x]$ polinomial-polinomial tidak tereduksi yang merupakan polinomial yang tidak mempunyai akar-akar berlainan dalam lapangan pemisahnya yaitu $f_{22}(x)$, $f_{38}(x)$, dan $f_{43}(x)$. Polinomial-polinomial tidak tereduksi inilah yang termasuk dalam perluasan normal di mana polinomial-polinomial tidak tereduksi ini berderajat lebih dari satu yaitu $f(x) > 1$.

Berdasarkan contoh penentuan perluasan normal dari M_2, M_3, dan M_5 dapat diperoleh bentuk umum perluasan normal sebagai berikut. Misalkan suatu ring $(M_n, +, \times)$ adalah lapangan dengan n prima yang memenuhi aksioma-aksioma di bawah ini:

a. $(M_n, +)$ gup abelian

i. Operasi $+$ tertutup di M_n

Jika $a, b \in M_n$ dengan definisi penjumlahan modulo n maka, $a \in M_n, b \in M_n \Rightarrow a + b \in M_n \; \forall a, b \in M_n$

ii. Bersifat asosiatif.

Untuk semua $a, b, c \in M_n$, berlaku

$a + (b + c) = (a + b) + c$

iii. Mempunyai identitas pada operasi $+$

Bilangan bulat $0 \in M_n$ adalah elemen identitas di M_n untuk penjumlahan modulo n, untuk setiap bilangan bulat $a \in M_n$, berlaku $0 + a = a + 0 = a$

iv. Mempunyai invers

Untuk semua elemen $a \in M_n$ kecuali 0 di M_n maka

$a \in M_n, a \neq 0 \Rightarrow 0 < a < n$

$\Rightarrow 0 < n - a < n$

$$\Rightarrow n - a \neq 0 \text{ dan } n - a \in M_n$$

Juga, $(n - a) + a = a + (n - a) = 0$

Jadi masing-masing bilangan bulat bukan nol $a \in M_n$ mempunyai invers di M_n.

v. Bersifat komutatif

Untuk semua $a, b, c \in M_n$, berlaku

$a + b = b + a$

Jadi operasi penjumlahan modulo n adalah komutatif di M_n.

b. Operasi $\times$ tertutup di M_n

Misalkan $a, b \in M_n$ berlaku $1 \leq a \leq n - 1$ dan $1 \leq b \leq n - 1$ dengan definisi dari perkalian modulo n maka $a \times b = r$ di mana $r \leq n - 1$ hasilnya dapat dibagi oleh n maka $1 \leq r \leq n - 1$ dan hal ini menunjukkan bahwa operasi $\times$ tertutup di M_n.

c. Bersifat asosiatif

Untuk semua $a, b, c \in M_n$, berlaku

$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$

d. Mempunyai elemen identitas

Bilangan bulat $1 \in M_n$ adalah elemen identitas untuk perkalian biangan modulo n, jika a menjadi elemen yang berubah-ubah di M_n maka $1 \times a$ sama dengan $a \times 1$ berlaku $1 \times a = a \times 1 = a, \forall a \in M_n$

e. Mempunyai elemen invers

Misalkan $a \in M_n$, mengingat himpunan $M_n{}' = \{1 \times a,\ 2 \times a, 3 \times a, \dots,$ $(n - 1) \times a\}$ maka M_n adalah tertutup pada operasi perkalian modulo n, mengikuti bahwa anggota dari $M_n{}'$ adalah anggota dari M_n. Semua unsur di

$M_n{}'$ berbeda, jika j dan k adalah dua bilangan bulat yang berbeda di M_n sedemikian hingga $j > k$, maka $1 \leq j \leq n-1$, $1 \leq k \leq n-1$ dan $j > k$. Misal $j \times k = k \times a$

$\Rightarrow j \cdot a - k \cdot a$ dapat dibagi n

$\Rightarrow (j-k) \cdot a$ dapat dibagi n

Tetapi ini tidak mungkin, ketika $1 \leq j - k < n - 1$ dan $1 \leq a \leq n - 1$ di mana n prima, jadi $(j-k) \cdot a$ tidak pernah bisa dibagi dengan n. Maka dari itu $j \times a \neq k \times a$.

Dengan demikian himpunan $M_n{}'$ terdiri dari $(n-1)$ elemen yang berbeda di M_n dan oleh sebab itu bertepatan dengan M_n. Jadi satu elemen di $M_n{}'$ harus 1. Misalkan $a' \times a = 1, \forall a' \in M_n$ berakibat $a' \times a = a \times a' = 1$. Hal ini menunjukkan bahwa setiap elemen a di M_n mempunyai invers a' di M_n.

f. Operasi $\times$ bersifat komutatif

Jika $a, b \in M_n$ maka berlaku $a \times b = b \times a, \forall a, b \in M_n$

(Raishinghania dan Aggarwal, 1980: 49-53).

Setelah M_n terbukti merupakan lapangan maka dibuktikan bahwa M_n adalah ideal. Sesuai dengan teorema 1 berikut:

Teorema 1. (Raishinghania dan Aggarwal, 1980: 366)

Jika M_n adalah ring komutatif dan $a \in M_n$, maka $M_n \times a = \{m \times a : m \in M_n\}$ adalah ideal di M_n.

Bukti

Misalkan $(M_n, +, \times)$ adalah ring komutatif dan $a \in M_n$. Maka akan ditunjukkan bahwa $M_n \times a$ adalah ideal dari M_n.

a) $M_n \times a$ adalah subring

Misalkan $m_1 \times a$ dan $m_2 \times a$ adalah dua elemen di $M_n \times a$ maka $(m_1 \times a) - (m_2 \times a) = (m_1 - m_2) \times a \in M_n \times a$. [karena $m_1 \in M_n, m_2 \in M_n \Rightarrow m_1 - m_2 \in M_n$].

Dan untuk $(m_1 \times a) \times (m_2 \times a) = p \times (m_2 \times a)$ di mana

$p = (m_1 \times a) \in M_n$ sebagai $m_1 \in M_n, a \in M_n \Rightarrow m_1 \times a \in M_n$

$= (p \times m_2) \times a \in M_n \times a$ [Jadi $p \in M_n, m_2 \in M_n \Rightarrow p \times m_2 \in M_n$]

Dapat diketahui bahwa $M_n \times a$ adalah subring dari M_n.

b) Misalkan m adalah sebarang elemen di M_n dan $m_1 \times a$ adalah elemen di $M_n \times a$, maka $m \times (m_1 \times a) = (m \times m_1) \times a \in M_n \times a$ ideal kanan dan $(m_1 \times a) \times m = (m_1 \times m) \times a \in M_n \times a$ ideal kiri.

Terbukti bahwa $M_n \times a$ ideal di M_n ■

Teorema 2. (Raishinghania dan Aggarwal, 1980: 366-367)

Suatu ring komutatif dengan elemen satuan disebut lapangan jika lapangan tidak mempunyai *proper* ideal.

Bukti:

Misalkan M_n ring komutatif dengan elemen satuan yang tidak mempunyai *proper* ideal yaitu idealnya hanya identitas $\{0\}$ dan pada dirinya sendiri. Kemudian menunjukkan bahwa M_n adalah lapangan dengan memperlihatkan bahwa setiap elemen bukan nol di M_n mempunyai invers pada operasi perkalian di M_n.

Misalkan a elemen bukan nol di M_n,

$S = \{m \times a : m \in M_n\}$ di mana $S = M_n \times a$

Maka S adalah ideal di M_n .... [Teorema 1]

Sekarang $1 \in M_n \Rightarrow 1 \times a = a \in S$ di mana a adalah suatu elemen bukan nol di M_n. Oleh karena itu S adalah ideal bukan nol dalam M_n.

Ketika M_n tidak mempunyai *proper* ideal dan S adalah ideal bukan nol dalam M_n. Sehingga satu-satunya yang mungkin adalah $S = M_n$.

Sekarang, ketika $1 \in M_n$ dan $S = M_n$, maka harus ada beberapa elemen $b \in M_n$ sedemikian hingga $b \times a = 1$ dengan cara yang sama $a \times b = 1$. Karenanya $a^{-1} = b \in M_n$ yaitu setiap elemen di M_n mempunyai invers pada operasi perkalian atau operasi kedua di M_n. Maka M_n adalah lapangan. ■

Pada teorema 1 dan 2 telah terbukti M_n merupakan lapangan dan ideal maka M_n dikenakan pada suatu polinomial $f(x)$, misalkan $f(x) = a_0x^0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in M_n$ di mana koefisien suku-sukunya merupakan anggota bilangan dalam M_n. Akar-akar dari polinomial $f(x)$ dalam lapangan M_n ini ternyata terdapat polinomial yang tidak tereduksi maka dari itu dibentuklah perluasan lapangan yang akar-akarnya terdapat di dalamnya. Hal ini akan ditunjukkan sebagai berikut. Misalkan polinomial $p(x) = a_2x^2 + a_4x^4 + a_6x^6 + a_8x^8 + a_{10}x^{10} + \cdots + a_{2n}x^{2n}$ tidak tereduksi dalam M_n, polinomial $p(x)$ tidak tereduksi dalam M_n karena polinomial ini tidak mempunyai suatu elemen dalam M_n yang menyebabkan $p(x) = 0$. Diberikan polinomial $p(x) = a_2x^2 + a_4x^4 + a_6x^6 + a_8x^8 + a_{10}x^{10} + \cdots + a_{2n}x^{2n}$ dan di cari akar-akarnya dengan metode horner sebagai berikut:

$$
\begin{array}{c|ccccccc}
x = m & a_{2n} & a_{2n-2} & \dots & a_8 & a_6 & a_4 & a_2 \\
 & & A_{2n}m & & A_{10}m & A_8m & A_6m & A_4m \\
\hline
 & A_{2n} & A_{2n-2} & & A_8 & A_6 & A_4 & A_2
\end{array}
$$

Keterangan:

$$
\begin{aligned}
A_{2n} &= a_{2n} \\
A_{2n-2} &= A_{2n}m + a_{2n-2} \\
A_{2n-4} &= A_{2n-2}m + a_{2n-4} \\
&\vdots \\
A_8 &= A_{10}m + A_8 \\
A_6 &= A_8m + a_6 \\
A_4 &= A_6m + a_4 \\
A_2 &= A_4m + a_2
\end{aligned}
$$

Untuk $m \in M_n$ maka polinomial $p(x)$ tidak tereduksi karena hasil dari pembagiannya bukan nol sehingga sebarang $m \in M_n$ tidak memenuhi $p(x) = 0$. Oleh sebab itu dibentuklah perluasan lapangan atas M_n yaitu lapangan yang memuat akar-akar dari polinomial $p(x)$. Setelah terbentuk perluasan lapangan maka dibentuk lapangan pemisah dengan cara mencari faktorisasi dari polinomial $p(x)$. Misal diambil polinomial genap $p(x) = a_2x^2 + a_4x^4 + a_6x^6 + a_8x^8$

$$= x^2(a_2 + a_4x^2 + a_6x^4 + a_8x^6)$$

Polinomial $p(x)$ dapat dibentuk sebagai hasil kali dari salah satu faktor dalam lapangan M_n maka dari itu polinomial $p(x)$ termasuk polinomial *separable*. Tetapi salah faktornya tersebut tidak linier yaitu x^2, maka polinomial $p(x)$ tidak termasuk dalam perluasan normal. Selanjutnya misal ambil lagi polinomial $q(x)$ di mana polinomial ini merupakan polinomial ganjil dalam perluasan lapangannya maka $q(x) = a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + a_7x^7$

$$= x(a_1 + a_3x^2 + a_5x^4 + a_7x^6)$$

Karena salah satu faktor dari $q(x)$ adalah linier dan faktor berlainan dengan faktor lainnya maka polinomial $q(x)$ merupakan polinomial *separable* dalam lapangan pemisahnya yang termasuk dalam perluasan normal.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Hasil penelitian yang dilakukan penulis dengan mengenakan suatu polinomial pada lapangan M_n di mana M_n adalah lapangan yang koefisien suku-sukunya berada dalam modulo prima dengan peubah x, bahwa $M_n \times a$ ideal dari M_n di mana $M_n \times a$ adalah sublapangan dari M_n. Hal ini menunjukkan bahwa M_n menjadi suatu perluasan dari $M_n \times a$. Terbentuknya perluasan lapangan dikarenakan terdapat polinomial $p(x)$ tidak tereduksi dalam lapangannya sehingga dapat diketahui akar-akar penyelesaiaan pada perluasan lapangan. Pada penelitian ini, semua polinomial tidak tereduksi dalam lapangannya termasuk polinomial *separable* dalam lapangan pemisahnya. Namun, ada polinomial *separable* yang tidak termuat dalam perluasan normal yaitu polinomial *separable* yang berderajat genap. Hal ini dikarenakan adanya faktorisasi nonlinier dalam polinomial tersebut. Sementara untuk polinomial *separable* yang berderajat ganjil $(2k-1)$ di mana k adalah bilangan bulat positif, maka polinomial *separable* dalam lapangan pemisahnya ini termasuk dalam perluasan normal. Hal ini ditunjukkan dengan adanya polinomial *separable* ini yang salah satu faktor liniernya termuat dalam polinomial di lapangannya. Maka semua polinomial *separable* yang berderajad ganjil ini termasuk dalam perluasan normal.

4.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian dan pembahasan maka dapat dilakukan penelitian selanjutnya tentang cara menentukan akar-akar polinomial *separable* sebagai pembentuk perluasan normal pada ring yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika.* Malang: UIN Malang Press

Al-Qarni, Aidh. 2007. *Tafsir Muyassar*. Jakarta: Qisthi Press

Beachy, John A. dan Blair, William D. 1990. *Abstract Algebra with A Concrete Introduction*. Prentice Hall, Englewood, New Jesey 07632

Birkhoff, Garret dan Mac Lane, Saunders. 1964. *A Survey of Modern Algebra Revised Edition*. New York: The Macmillan Company

Chaudhuri. 1983. *Abstract Algebra.* New Delhi: Tata McGraw-Hill. Publishing Company Limited

Dummit, S.D. dan Foote, Richart M. 1999. *Abstract Algebra, Second Edition*. New York: John Wiley & Sons, Inc.

Fraleigh, John B., 1994. *A First Course in Abstract Algebra, Fifth Edition.* New York: Addition and Wisley Publishing Company, USA.

Herstein. 1975. *Topics in Algebra 2nd edition*. New York: John Wiley & Sons

Irawanto, Bambang, dkk. 2004. *Akar-akar Polinomial Separabel sebagai Pembentuk Perluasan Normal*. Yogyakarta: FMIPA UGM

Judson, Thomas W. 1997. *Abstract Algebra: Theory and Aplications*. State University

Munir, Rinaldi. 2008. *Metode Numerik*. Bandung: INFORMATIKA

Rahman, Hairur. 2007. *Indahnya Matematika dalam Al-Qur'an*. Malang: UIN Malang Press

Raisinghania, M.D dan Aggarwal R.S. 1980. *Modern Algebra*. New Delhi: S. Chand & Company LTD.

Wahyudin. 1989. *Aljabar Modern*. Bandung: TARSITO

LAMPIRAN

Tabel A Koset $M_3[x]$ dari $\frac{M_3[x]}{\langle p(x)\rangle}$

(+) Operasi pertama		Polinomial-polinomial dalam Lapangan					
Polinomial-polinomial dalam Sublapangan		$p_{11}(x)$	$p_{20}(x)$	$p_{21}(x)$	$p_{23}(x)$	$p_{24}(x)$	$p_{26}(x)$
	$p_1(x)$	$\bar{1}+x^2$	$\bar{2}+\bar{2}x^2$	$\bar{1}+x+\bar{2}x^2$	$\bar{2}+x+x^2$	$\bar{2}+\bar{2}x+x^2$	$\bar{1}+\bar{2}x+\bar{2}x^2$
	$p_2(x)$	$\bar{2}+x^2$	$\bar{2}x^2$	$\bar{2}+x+\bar{2}x^2$	$x+x^2$	$\bar{2}x+x^2$	$\bar{2}+\bar{2}x+\bar{2}x^2$
	$p_3(x)$	x^2	$\bar{1}+\bar{2}x^2$	$x+\bar{2}x^2$	$\bar{1}+x+x^2$	$\bar{1}+\bar{2}x+x^2$	$\bar{2}x+\bar{2}x^2$
	$p_4(x)$	$\bar{1}+x+x^2$	$\bar{2}+x+\bar{2}x^2$	$\bar{1}+\bar{2}x+\bar{2}x^2$	$\bar{2}+\bar{2}x+x^2$	$\bar{2}+x^2$	$\bar{1}+\bar{2}x^2$
	$p_5(x)$	$\bar{1}+\bar{2}x+x^2$	$\bar{2}+\bar{2}x+\bar{2}x^2$	$\bar{1}+\bar{2}x^2$	$\bar{2}+x^2$	$\bar{2}+x+x^2$	$\bar{1}+x+\bar{2}x^2$
	$p_6(x)$	$\bar{1}+\bar{2}x^2$	$\bar{2}$	$\bar{1}+x$	$\bar{2}+x+\bar{2}x^2$	$\bar{2}+\bar{2}x+\bar{2}x^2$	$\bar{1}+\bar{2}x$
	$p_7(x)$	$\bar{1}$	$\bar{2}+x^2$	$\bar{1}+x+x^2$	$\bar{2}+x$	$\bar{2}+\bar{2}x$	$\bar{1}+\bar{2}x+x^2$
	$p_8(x)$	$\bar{1}+x$	$\bar{2}+x+x^2$	$\bar{1}+\bar{2}x+x^2$	$\bar{2}+\bar{2}x$	$\bar{2}$	$\bar{1}+x^2$
	$p_9(x)$	$\bar{1}+\bar{2}x+\bar{2}x^2$	$\bar{2}+\bar{2}x$	$\bar{1}$	$\bar{2}x+\bar{2}x^2$	$\bar{2}+x+\bar{2}x^2$	$\bar{1}+x$
	$p_{10}(x)$	$\bar{2}+x+x^2$	$x+\bar{2}x^2$	$\bar{2}+\bar{2}x+\bar{2}x^2$	$\bar{2}x+x^2$	x^2	$\bar{2}+\bar{2}x^2$
	$p_{11}(x)$	$\bar{2}+\bar{2}x^2$	$\bar{0}$	$\bar{2}+x+x^2$	$x+\bar{2}x^2$	$\bar{2}x+\bar{2}x^2$	$\bar{2}+\bar{2}x$
	$p_{12}(x)$	$x+x^2$	$\bar{1}+x+\bar{2}x^2$	$\bar{2}x+\bar{2}x^2$	$\bar{1}+\bar{2}x+x^2$	$\bar{1}+x^2$	$\bar{2}x^2$
	$p_{13}(x)$	$x+x^2$	$\bar{1}$	x	$\bar{1}+x$	$\bar{1}+\bar{2}x+\bar{2}x^2$	$\bar{2}x$
	$p_{14}(x)$	$\bar{1}+x+\bar{2}x^2$	$\bar{2}$	$\bar{1}+\bar{2}x$	$\bar{2}+\bar{2}x+\bar{2}x^2$	$\bar{2}+\bar{2}x^2$	$\bar{1}$
	$p_{15}(x)$	$\bar{2}+\bar{2}x+x^2$	$\bar{2}x+\bar{2}x^2$	$\bar{2}+\bar{2}x^2$	x^2	$x+x^2$	$\bar{2}+x+\bar{2}x^2$
	$p_{16}(x)$	$\bar{2}+\bar{2}x+x^2$	$\bar{2}x+\bar{2}x^2$	$\bar{2}+\bar{2}x^2$	x^2	$x+x^2$	$\bar{2}+x+\bar{2}x^2$
	$p_{17}(x)$	$\bar{1}+x+\bar{2}x^2$	$\bar{2}+x$	$\bar{1}+\bar{2}x$	$\bar{2}+\bar{2}x+\bar{2}x^2$	$\bar{2}+\bar{2}x^2$	$\bar{1}$
	$p_{18}(x)$	$\bar{1}+\bar{2}x$	$\bar{2}+\bar{2}x+x^2$	$\bar{1}+x^2$	$\bar{2}$	$\bar{2}+x$	$\bar{1}+x+x^2$
	$p_{19}(x)$	$\bar{2}x+x^2$	$\bar{1}+\bar{2}x+\bar{2}x^2$	$\bar{2}x^2$	$\bar{1}+x^2$	$\bar{1}+x+x^2$	$x+\bar{2}x^2$
	$p_{20}(x)$	$\bar{0}$	$\bar{1}+x^2$	$x+x^2$	$\bar{1}+x$	$\bar{1}+\bar{2}x$	$\bar{2}x+x^2$
	$p_{21}(x)$	$\bar{2}+x$	$x+x^2$	$\bar{2}+\bar{2}x+x^2$	$\bar{2}x$	$\bar{0}$	$\bar{2}+x^2$

	$p_{22}(x)$	$\bar{2}+\bar{2}x+\bar{2}x^2$	$\bar{2}x$	$\bar{2}$	$\bar{2}x^2$	$x+\bar{2}x^2$	$\bar{2}+x$
	$p_{23}(x)$	$x+\bar{2}x^2$	$\bar{1}+x$	$\bar{2}x$	$\bar{1}+\bar{2}x+\bar{2}x^2$	$\bar{1}+\bar{2}x^2$	$\bar{0}$
	$p_{24}(x)$	$\bar{2}x+\bar{2}x^2$	$\bar{1}+\bar{2}x$	$\bar{0}$	$\bar{1}+\bar{2}x^2$	$\bar{1}+x+\bar{2}x^2$	x
	$p_{25}(x)$	x	$\bar{1}+x+x^2$	$\bar{2}x+x^2$	$\bar{1}+\bar{2}x$	$\bar{1}$	x^2
	$p_{26}(x)$	$\bar{2}+\bar{2}x$	$\bar{2}x+x^2$	$\bar{2}+x^2$	$\bar{0}$	x	$\bar{2}+x+x^2$
	$p_{27}(x)$	$\bar{2}+x+\bar{2}x^2$	x	$\bar{2}+\bar{2}x$	$\bar{2}x+\bar{2}x^2$	$\bar{2}x^2$	$\bar{2}$
	$p_{28}(x)$	$\bar{2}x$	$\bar{1}+\bar{2}x+x^2$	x^2	$\bar{1}$	$\bar{1}+x$	$x+x^2$

Himpunan polinomial di atas merupakan koset $M_3[x]$ dari $\frac{M_3[x]}{\langle p(x)\rangle}$ yang menghasilkan himpunan polinomial dalam lapangannya $\left(\frac{M_3[x]}{\langle p(x)\rangle}\right)$ di mana $\langle p(x)\rangle$ adalah polinomial-polinomial yang tak tereduksi dalam lapangan $M_3[x]$.

Tabel B Koset $M_5[x]$ dari $\frac{M_5[x]}{\langle f(x) \rangle}$

(+) Operasi pertama		Polinomial-polinomial dalam Lapangan						
		$f_{22}(x)$	$f_{23}(x)$	$f_{24}(x)$	$f_{25}(x)$	$f_{26}(x)$	$f_{27}(x)$	$f_{28}(x)$
Polinomial-polinomial dalam Sublapangan	$f_1(x)$	$x + \bar{2}x^2$	$x + \bar{3}x^3$	$x + \bar{4}x^4$	$\bar{2}x^2 + \bar{3}x^3$	$\bar{2}x^2 + \bar{4}x^4$	$\bar{3}x^3 + \bar{4}x^4$	$x + \bar{2}x^2 + \bar{3}x^3 + \bar{4}x^4$
	$f_2(x)$	$\bar{1} + x + \bar{2}x^2$	$\bar{1} + x + \bar{3}x^3$	$\bar{1} + x + \bar{4}x^4$	$\bar{1} + \bar{2}x^2 + \bar{3}x^3$	$\bar{1} + \bar{2}x^2 + \bar{4}x^4$	$\bar{1} + \bar{3}x^3 + \bar{4}x^4$	$\bar{1} + x + \bar{2}x^2 + \bar{3}x^3 + \bar{4}x^4$
	$f_3(x)$	$\bar{2} + x + \bar{2}x^2$	$\bar{2} + x + \bar{3}x^3$	$\bar{2} + x + \bar{4}x^4$	$\bar{2} + \bar{2}x^2 + \bar{3}x^3$	$\bar{2} + \bar{2}x^2 + \bar{4}x^4$	$\bar{2} + \bar{3}x^3 + \bar{4}x^4$	$\bar{2} + x + \bar{2}x^2 + \bar{3}x^3 + \bar{4}x^4$
	$f_4(x)$	$\bar{3} + x + \bar{2}x^2$	$\bar{3} + x + \bar{3}x^3$	$\bar{3} + x + \bar{4}x^4$	$\bar{3} + \bar{2}x^2 + \bar{3}x^3$	$\bar{3} + \bar{2}x^2 + \bar{4}x^4$	$\bar{3} + \bar{3}x^3 + \bar{4}x^4$	$\bar{3} + x + \bar{2}x^2 + \bar{3}x^3 + \bar{4}x^4$
	$f_5(x)$	$\bar{4} + x + \bar{2}x^2$	$\bar{4} + x + \bar{3}x^3$	$\bar{4} + x + \bar{4}x^4$	$\bar{4} + \bar{2}x^2 + \bar{3}x^3$	$\bar{4} + \bar{2}x^2 + \bar{4}x^4$	$\bar{4} + \bar{3}x^3 + \bar{4}x^4$	$\bar{4} + x + \bar{2}x^2 + \bar{3}x^3 + \bar{4}x^4$
	$f_6(x)$	$\bar{2}x + \bar{2}x^2$	$\bar{2}x + \bar{3}x^3$	$\bar{2}x + \bar{4}x^4$	$x + \bar{2}x^2 + \bar{3}x^3$	$x + \bar{2}x^2 + \bar{4}x^4$	$x + \bar{3}x^3 + \bar{4}x^4$	$\bar{2}x + \bar{2}x^2 + \bar{3}x^3 + \bar{4}x^4$
	$f_7(x)$	$\bar{3}x + \bar{2}x^2$	$\bar{3}x + \bar{3}x^3$	$\bar{3}x + \bar{4}x^4$	$\bar{2}x + \bar{2}x^2 + \bar{3}x^3$	$\bar{2}x + \bar{2}x^2 + \bar{4}x^4$	$\bar{2}x + \bar{3}x^3 + \bar{4}x^4$	$\bar{3}x + \bar{2}x^2 + \bar{3}x^3 + \bar{4}x^4$
	$f_8(x)$	$\bar{4}x + \bar{2}x^2$	$\bar{4}x + \bar{3}x^3$	$\bar{4}x + \bar{4}x^4$	$\bar{3}x + \bar{2}x^2 + \bar{3}x^3$	$\bar{3}x + \bar{2}x^2 + \bar{4}x^4$	$\bar{3}x + \bar{3}x^3 + \bar{4}x^4$	$\bar{4}x + \bar{2}x^2 + \bar{3}x^3 + \bar{4}x^4$
	$f_9(x)$	$\bar{2}x^2$	$\bar{3}x^3$	$\bar{4}x^4$	$\bar{4}x^4 + \bar{2}x^2 + \bar{3}x^3$	$\bar{4}x^4 + \bar{2}x^2 + \bar{4}x^4$	$\bar{4}x^4 + \bar{3}x^3 + \bar{4}x^4$	$\bar{2}x^2 + \bar{3}x^3 + \bar{4}x^4$
	$f_{10}(x)$	$x + \bar{3}x^2$	$x + x^2 + \bar{3}x^3$	$x + x^2 + \bar{4}x^4$	$\bar{3}x^2 + \bar{3}x^3$	$\bar{3}x^2 + \bar{4}x^4$	$x^2 + \bar{3}x^3 + \bar{4}x^4$	$x + \bar{3}x^2 + \bar{3}x^3 + \bar{4}x^4$
	$f_{11}(x)$	$x + \bar{4}x^2$	x	$x + \bar{2}x^2 + \bar{4}x^4$	$\bar{4}x^2 + \bar{3}x^3$	$\bar{4}x^2 + \bar{4}x^4$	$\bar{2}x^2 + \bar{3}x^3 + \bar{4}x^4$	$x + \bar{4}x^2 + \bar{3}x^3 + \bar{4}x^4$
	$f_{12}(x)$	x	$x + \bar{3}x^2 + \bar{3}x^3$	$x + \bar{3}x^2 + \bar{4}x^4$	$\bar{3}x^3$	$\bar{4}x^4$	$\bar{3}x^2 + \bar{3}x^3 + \bar{4}x^4$	$x + \bar{3}x^3 + \bar{4}x^4$
	$f_{13}(x)$	$x + x^2$	$x + \bar{4}x^2 + \bar{3}x^3$	$x + \bar{4}x^2 + \bar{4}x^4$	$x^2 + \bar{3}x^3$	$x^2 + \bar{4}x^4$	$\bar{4}x^2 + \bar{3}x^3 + \bar{4}x^4$	$x + x^2 + \bar{3}x^3 + \bar{4}x^4$
	$f_{14}(x)$	$x + \bar{2}x^2 + x^3$	$x + \bar{4}x^3$	$x + x^3 + \bar{4}x^4$	$\bar{2}x^2 + \bar{4}x^3$	$\bar{2}x^2 + x^3 + \bar{4}x^4$	$\bar{4}x^3 + \bar{4}x^4$	$x + \bar{2}x^2 + \bar{4}x^3 + \bar{4}x^4$
	$f_{15}(x)$	$x + \bar{2}x^2 + \bar{2}x^3$	x	$x + \bar{2}x^3 + \bar{4}x^4$	$\bar{2}x^2$	$\bar{2}x^2 + \bar{2}x^3 + \bar{4}x^4$	$\bar{4}x^4$	$x + \bar{2}x^2 + \bar{4}x^4$
	$f_{16}(x)$	$x + \bar{2}x^2 + \bar{3}x^3$	$x + x^3$	$x + \bar{3}x^3 + \bar{4}x^4$	$\bar{2}x^2 + x^3$	$\bar{2}x^2 + \bar{3}x^3 + \bar{4}x^4$	$x^3 + \bar{4}x^4$	$x + \bar{2}x^2 + x^3 + \bar{4}x^4$
	$f_{17}(x)$	$x + \bar{2}x^2 + \bar{4}x^3$	$x + \bar{2}x^3$	$x + \bar{4}x^3 + \bar{4}x^4$	$\bar{2}x^2 + \bar{2}x^3$	$\bar{2}x^2 + \bar{4}x^3 + \bar{4}x^4$	$2x^3 + \bar{4}x^4$	$x + \bar{2}x^2 + \bar{2}x^3 + \bar{4}x^4$
	$f_{18}(x)$	$x + \bar{2}x^2 + x^4$	$x + \bar{3}x^3 + x^4$	x	$\bar{2}x^2 + x^4$	$\bar{2}x^2$	$\bar{3}x^3$	$x + \bar{2}x^2 + \bar{3}x^3$
	$f_{19}(x)$	$x + \bar{2}x^2 + 2x^4$	$x + \bar{3}x^3 + \bar{2}x^4$	$x + x^4$	$\bar{2}x^2 + \bar{3}x^3 + \bar{2}x^4$	$\bar{2}x^2 + x^4$	$\bar{3}x^3 + x^4$	$x + \bar{2}x^2 + \bar{3}x^3 + x^4$
	$f_{20}(x)$	$x + \bar{2}x^2 + \bar{3}x^4$	$x + \bar{3}x^3 + \bar{3}x^4$	$x + \bar{2}x^4$	$\bar{2}x^2 + \bar{3}x^3 + \bar{3}x^4$	$\bar{2}x^2 + \bar{2}x^4$	$\bar{3}x^3 + \bar{2}x^4$	$x + \bar{2}x^2 + \bar{3}x^3 + \bar{2}x^4$

	$f_{21}(x)$	$x+\bar{2}x^2+\bar{4}x^4$	$x+\bar{3}x^3+\bar{4}x^4$	$x+\bar{3}x^4$	$\bar{2}x^2+\bar{3}x^3+\bar{4}x^4$	$\bar{2}x^2+\bar{3}x^4$	$\bar{3}x^3+\bar{3}x^4$	$x+\bar{2}x^2+\bar{3}x^3+\bar{3}x^4$
	$f_{22}(x)$	$\bar{2}x+\bar{4}x^2$	$\bar{2}x+\bar{2}x^2+\bar{3}x^3$	$\bar{2}x+\bar{2}x^2+\bar{4}x^4$	$x+\bar{2}x^2+\bar{3}x^3+\bar{4}x^4$	$x+\bar{4}x^2+\bar{4}x^4$	$x+\bar{2}x^2+\bar{3}x^3+\bar{4}x^4$	$\bar{2}x+\bar{4}x^2+\bar{3}x^3+\bar{4}x^4$
	$f_{23}(x)$	$2x+\bar{2}x^2+\bar{3}x^3$	$\bar{2}x+x^3$	$\bar{2}x+\bar{3}x^3+\bar{4}x^4$	$x+\bar{2}x^2+x^3+\bar{4}x^4$	$x+\bar{2}x^2+\bar{3}x^3+\bar{4}x^4$	$x+x^3+\bar{4}x^4$	$\bar{2}x+\bar{2}x^2+x^3+\bar{4}x^4$
	$f_{24}(x)$	$2x+\bar{2}x^2+\bar{4}x^4$	$\bar{2}x+\bar{3}x^3+\bar{4}x^4$	$\bar{2}x+\bar{3}x^4$	$x+\bar{2}x^2+\bar{3}x^3+\bar{4}x^4$	$x+\bar{2}x^2+\bar{3}x^4$	$x+\bar{3}x^3+\bar{3}x^4$	$\bar{2}x+\bar{2}x^2+\bar{3}x^3+\bar{3}x^4$
	$f_{25}(x)$	$x+\bar{4}x^2+\bar{3}x^3$	$x+\bar{2}x^2+x^3$	$x+\bar{2}x^2+\bar{3}x^3+\bar{4}x^4$	$\bar{4}x^2+x^3$	$\bar{4}x^2+\bar{3}x^3+\bar{4}x^4$	$\bar{2}x^2+x^3+\bar{4}x^4$	$x+\bar{4}x^2+x^3+\bar{4}x^4$
	$f_{26}(x)$	$x+\bar{4}x^2+\bar{4}x^4$	$x+\bar{2}x^2+\bar{3}x^3+\bar{4}x^4$	$x+\bar{2}x^2+\bar{3}x^4$	$\bar{4}x^2+\bar{3}x^3+\bar{4}x^4$	$\bar{4}x^2+\bar{3}x^4$	$\bar{2}x^2+\bar{3}x^3+\bar{3}x^4$	$x+\bar{4}x^2+\bar{3}x^3+\bar{3}x^4$
	$f_{27}(x)$	$x+\bar{2}x^2+\bar{3}x^3+\bar{4}x^4$	$x+x^3+\bar{4}x^4$	$x+\bar{3}x^3+\bar{3}x^4$	$\bar{2}x^2+x^3+\bar{4}x^4$	$\bar{2}x^2+\bar{3}x^3+\bar{3}x^4$	$x^3+\bar{3}x^4$	$x+\bar{2}x^2+x^3+\bar{3}x^4$
	$f_{28}(x)$	$\bar{2}x+\bar{4}x^2+\bar{3}x^3+\bar{4}x^4$	$\bar{2}x+\bar{2}x^2+x^3+\bar{4}x^4$	$\bar{2}x+\bar{2}x^2+\bar{3}x^3+\bar{3}x^4$	$x+\bar{4}x^2+x^3+\bar{4}x^4$	$x+\bar{4}x^2+\bar{3}x^3+\bar{3}x^4$	$x+\bar{2}x^2+x^3+\bar{3}x^4$	$\bar{2}x+\bar{4}x^2+x^3+\bar{3}x^4$
	$f_{29}(x)$	$\bar{2}x+\bar{4}x^2+\bar{3}x^3$	$\bar{2}x+\bar{2}x^2+x^3$	$\bar{2}x+\bar{2}x^2+\bar{3}x^3+\bar{4}x^4$	$x+\bar{4}x^2+x^3$	$x+\bar{4}x^2+\bar{3}x^3+\bar{4}x^4$	$x+\bar{2}x^2+x^3+\bar{4}x^4$	$\bar{2}x+\bar{4}x^2+x^3+\bar{4}x^4$
	$f_{30}(x)$	$\bar{2}x+\bar{2}x^2+\bar{3}x^3+\bar{4}x^4$	$\bar{2}x+x^3+\bar{4}x^4$	$\bar{2}x+\bar{3}x^3+\bar{3}x^4$	$x+\bar{2}x^2+x^3+\bar{4}x^4$	$x+\bar{2}x^2+\bar{3}x^3+\bar{3}x^4$	$x+x^3+\bar{3}x^4$	$\bar{2}x+\bar{2}x^2+x^3+\bar{3}x^4$
	$f_{31}(x)$	$x+\bar{4}x^2+\bar{3}x^3+\bar{4}x^4$	$\bar{2}x+\bar{2}x^2+x^3+\bar{4}x^4$	$x+\bar{2}x^2+\bar{3}x^3+\bar{3}x^4$	$\bar{4}x^2+x^3+\bar{4}x^4$	$\bar{4}x^2+\bar{3}x^3+\bar{3}x^4$	$\bar{2}x^2+x^3+\bar{3}x^4$	$x+\bar{4}x^2+x^3+\bar{3}x^4$
	$f_{32}(x)$	$\bar{1}+\bar{2}x+\bar{3}x^2+x^3+x^4$	$\bar{1}+\bar{2}x+x^2+\bar{4}x^3+x^4$	$\bar{1}+\bar{2}x+x^2+x^3$	$\bar{1}+x+\bar{3}x^2+\bar{4}x^3+x^4$	$\bar{1}+x+\bar{3}x^2+x^3$	$\bar{1}+x+x^2+\bar{4}x^3$	$\bar{1}+\bar{2}x+\bar{3}x^2+\bar{4}x^3$
	$f_{33}(x)$	$\bar{2}+\bar{3}x+\bar{4}x^2+\bar{2}x^3+\bar{2}x^4$	$\bar{2}+\bar{3}x+\bar{2}x^2+\bar{2}x^4$	$\bar{2}+\bar{3}x+\bar{2}x^2+\bar{2}x^3+x^4$	$\bar{2}+\bar{2}x+\bar{4}x^2+\bar{2}x^4$	$\bar{2}+\bar{2}x+\bar{4}x^2+\bar{2}x^3+x^4$	$\bar{2}+\bar{2}x+\bar{2}x^2+x^4$	$\bar{2}+\bar{3}x+\bar{4}x^2+x^4$
	$f_{34}(x)$	$\bar{3}+\bar{4}x+\bar{3}x^3+\bar{3}x^4$	$\bar{3}+\bar{4}x+\bar{3}x^2+x^3+\bar{3}x^4$	$\bar{3}+\bar{4}x+\bar{3}x^2+\bar{3}x^3+\bar{2}x^4$	$\bar{3}+\bar{3}x+x^3+\bar{3}x^4$	$\bar{3}+\bar{3}x+\bar{3}x^3+\bar{3}x^4$	$\bar{3}+\bar{3}x+\bar{3}x^2+x^3+\bar{2}x^4$	$\bar{3}+\bar{4}x+x^3+\bar{2}x^4$

	$f_{35}(x)$	$\bar{4} + x^2 + \bar{4}x^3 + \bar{4}x^4$	$\bar{4} + \bar{4}x^2 + \bar{2}x^3 + \bar{4}x^4$	$\bar{4} + \bar{4}x^2 + \bar{4}x^3 + \bar{3}x^4$	$\bar{4} + \bar{4}x + x^2 + \bar{2}x^3 + \bar{4}x^4$	$\bar{4} + \bar{4}x + x^2 + \bar{4}x^3 + \bar{3}x^4$	$\bar{4} + \bar{4}x + \bar{4}x^2 + \bar{2}x^3 + \bar{3}x^4$	$\bar{4} + x^2 + \bar{2}x^3 + \bar{3}x^4$
	… $f_n(x)$							

Himpunan polinomial di atas merupakan koset $M_5[x]$ dari $\frac{M_5[x]}{\langle f(x)\rangle}$ yang menghasilkan himpunan polinomial dalam lapangannya $\left(\frac{M_5[x]}{\langle f(x)\rangle}\right)$ di mana $\langle f(x)\rangle$ adalah polinomial-polinomial yang tak tereduksi dalam lapangan $M_5[x]$.