

**PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN FUZZY NONLINIER
DENGAN MENGGUNAKAN METODE BROYDEN**

SKRIPSI

Oleh:
TUNJUNG ARY WIBOWO
NIM. 08610043



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2012**

**PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN FUZZY NONLINIER
DENGAN MENGGUNAKAN METODE BROYDEN**

SKRIPSI

Diajukan kepada:
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan
dalam Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
TUNJUNG ARY WIBOWO
NIM. 08610043

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2012**

**PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN FUZZY NONLINIER
DENGAN MENGGUNAKAN METODE BROYDEN**

SKRIPSI

Oleh:
TUNJUNG ARY WIBOWO
NIM. 08610043

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal: 13 Januari 2012

Dosen Pembimbing I

Dosen Pembimbing II

Mohammad Jamhuri, M.Si
NIP. 1981 0502 200501 1 004

Achmad Nashichuddin, M.A
NIP. 1973 07 05 200003 1 002

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

**PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN FUZZY NONLINIER DENGAN
MENGUNAKAN METODE BROYDEN**

SKRIPSI

Oleh:

TUNJUNG ARY WIBOWO

NIM.08610043

**Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)**

Tanggal: 21 Januari 2012

Susunan Dewan Penguji:

Tanda Tangan

- | | | |
|------------------|--|---------|
| 1. Penguji Utama | : Evawati Alisah, M.Pd
NIP. 1972 0604 1999 03 2 001 | (.....) |
| 2. Ketua | : Wahyu Henky Irawan, M.Pd
NIP. 1971 0420 2000 03 1 003 | (.....) |
| 3. Sekretaris | : Mohammad Jamhuri, M.Si
NIP. 1981 0502 2005 01 1 004 | (.....) |
| 4. Anggota | : Achmad Nashichuddin, M.A
NIP. 1973 0705 2000 03 1 002 | (.....) |

**Mengetahui dan Mengesahkan
Ketua Jurusan Matematika**

Abdussakir, M.Pd

NIP.1975 1006 2003 12 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Tunjung Ary Wibowo
NIM : 08610043
Jurusan : Matematika
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 13 Januari 2012
Yang membuat pernyataan,

Tunjung Ary Wibowo
NIM. 08610043

MOTTO

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



PERSEMBAHAN

Ami Mutilah dan Abi Suyanto, terima kasih atas kasih sayang dan doanya



KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Alhamdulillahirobbil'alamin atas segala nikmat yang selalu datang setiap saat kepada seluruh ciptaanNya. Shalawat dan salam senantiasa tercurahkan kepada Nabi Agung Muhammad saw yang telah menunjukkan jalan yang terang benderang yakni *ad-Dinn Al-Islam*, para sahabat dan segenap orang yang mengikuti dan menjalankan sunnahnya dan mencintainya. Atas segala nikmat dan hidayahNya akhirnya penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan judul **“PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN FUZZY NONLINIER DENGAN MENGGUNAKAN METODE BROYDEN”**.

Selanjutnya dalam penulisan laporan skripsi ini, penulis menyadari tidak akan mendapatkan hasil yang baik tanpa adanya bimbingan, bantuan, dorongan, saran serta doa dari berbagai pihak. Maka dalam kesempatan ini, penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU., DSc, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
4. Mohammad Jamhuri, M.Si, selaku dosen pembimbing skripsi yang selalu memberikan bimbingan, motivasi serta inspirasi kepada penulis

5. Achmad Nashichuddin, M.A, selaku dosen pembimbing integrasi Sains dan Islam, yang telah membimbing dan mengarahkan penulis dalam menyusun skripsi ini hingga selesai
6. Seluruh dosen Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang, khususnya seluruh sivitas Jurusan Matematika yang telah memberikan bimbingan, motivasi serta inspirasi kepada penulis
7. Ayah dan ibu yang selalu memberikan kasih sayang dan seluruh keluarga besar yang senantiasa memberikan semangat dan motivasi kepada penulis untuk mencapai kesuksesan.
8. Semua teman di Jurusan Matematika angkatan 2006-2009, paduan suara mahasiswa (PSM) terima kasih atas torehan semangat dan inspirasi serta motivasi yang telah diberikan kepada penulis
9. Semua pihak yang terlibat dalam penulisan skripsi hingga selesainya skripsi ini dan semua pihak yang telah bersedia mendengarkan cerita-cerita penulis hingga selesainya skripsi ini.

Semoga Allah SWT membalas kebaikan kepada seluruh pihak yang tersebut di atas. Semoga skripsi ini bermanfaat dan menambah khasanah keilmuan. Amin.

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Malang, 13 Januari 2012

Penulis

DAFTAR ISI

Halaman Judul.....	i
Lembar Persetujuan.....	ii
Lembar Pengesahan	iii
Halaman Pernyataan Keaslian Tulisan.....	iv
Motto	v
Halaman Persembahan	vi
Kata Pengantar	vii
Daftar Isi.....	ix
Daftar Tabel	xi
Daftar Gambar.....	xii
Daftar Simbol.....	xiii
Abstrak	xvi
Abstract	xvii
ملخص البحث	xviii
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Batasan Masalah.....	3
1.4 Tujuan Penelitian	4
1.5 Manfaat Penelitian	4
1.6 Metode Penelitian.....	5
1.7 Sistematika Penulisan	6
BAB II KAJIAN PUSTAKA	8
2.1 Persamaan Nonlinier	8
2.2 Matriks	9
2.3 Perkalian Vektor dalam Ruang Euclid.....	10
2.4 Galat	12
2.5 Metode Broyden.....	13
2.6 Logika Fuzzy.....	24
2.6.1 Definisi Logika Fuzzy.....	24
2.6.2 Alasan Dipergunakan Logika Fuzzy	25
2.6.3 Fungsi Keanggotaan Fuzzy	26
2.6.4 α - cuts	30
2.6.5 Bilangan Fuzzy.....	31
2.6.6 Persamaan Fuzzy.....	39
2.7 Kemudahan-kemudahan dalam Islam	41
BAB III PEMBAHASAN	47
3.1 Metode Broyden pada Penyelesaian Sistem Persamaan Fuzzy Nonlinier.....	47
3.2 Penyelesaian Sistem Persamaan Fuzzy Nonlinier dengan Metode Broyden.....	51
3.3 Metode Broyden dalam Prespektif Islam.....	70

BAB IV PENUTUP	74
4.1 Kesimpulan	74
4.2 Saran.....	74

DAFTAR PUSTAKA

LAMPIRAN-LAMPIRAN



DAFTAR TABEL

Tabel 2.1 Hasil Perhitungan dengan Metode Broyden.....	19
Tabel 2.2 Hasil Perhitungan dengan Metode Broyden.....	24
Tabel 3.1 Hasil Perhitungan untuk $x^{(k)}(0)$	60
Tabel 3.2 Hasil Perhitungan untuk $y^{(k)}(0)$	60
Tabel 3.3 Hasil Perhitungan untuk $x^{(k)}(1)$	61
Tabel 3.4 Hasil Perhitungan untuk $y^{(k)}(1)$	61
Tabel 3.5 Hasil Perhitungan Akhir dengan Derajat Keanggotaan $0 \leq \mu \leq 1$	68

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Fungsi Keanggotaan dengan Representasi Segitiga Fuzzy	28
Gambar 3.1 Kekonvergenan dari Nilai Fungsi yang Dihasilkan dengan Derajat Keanggotaan 0	62
Gambar 3.2 Kekonvergenan dari Nilai Galat Error untuk Derajat Keanggotaan .	63
Gambar 3.3 Kekonvergenan dari Nilai Akar untuk Derajat Keanggotaan 0.....	64
Gambar 3.4 Kekonvergenan dari Nilai Fungsi yang Dihasilkan dengan Derajat Keanggotaan 1	65
Gambar 3.5 Kekonvergenan dari Nilai Galat Error untuk Derajat Keanggotaan 1	66
Gambar 3.6 Kekonvergenan dari Nilai Akar untuk Derajat Keanggotaan 1.....	67
Gambar 3.7 Representasi Bilangan Fuzzy Segitiga untuk Variabel x	68
Gambar 3.8 Representasi Bilangan Fuzzy Segitiga untuk Variabel y	69

DAFTAR SIMBOL

.	: titik, tanda desimal
f_n	: fungsi ke- n
$\underline{f_n}$	: fungsi ke- n monoton terbatas ke atas
$\overline{f_n}$	: fungsi ke- n monoton terbatas ke bawah
x_n	: nilai x ke- n
$F(x_k)$	: matriks fungsi pada nilai x pada iterasi ke- k
$F(x_{k+1})$	: matriks fungsi pada nilai x pada iterasi ke- $k + 1$
x_k	: nilai x pada iterasi ke- k
x_{k+1}	: nilai x pada iterasi ke- $k + 1$
s_k	: hasil dari $-A_k^{-1} F(x_k)$ pada iterasi ke- k
s_k^t	: transpose hasil dari $-A_k^{-1} F(x_k)$ pada iterasi ke- k
A_k	: matriks Jacobian pada iterasi ke- k
A_k^{-1}	: invers matriks Jacobian pada iterasi ke- k
A_{k+1}^{-1}	: invers matriks Jacobian pada iterasi ke- $k + 1$
y_k	: hasil dari $F(x_{k+1}) - F(x_k)$ pada iterasi ke- k
μ	: derajat keanggotaan, $r \in [0,1]$
n	: $n = 1, 2, \dots$
k	: $k = 0, 1, \dots$
R	: bilangan Riil

$F(x_k(\mu))$: matriks fungsi pada nilai x pada iterasi ke- k dengan derajat keanggotaan- μ

$F(x_{k+1}(\mu))$: matriks fungsi pada nilai x pada iterasi ke- $k+1$ dengan derajat keanggotaan- μ

$\underline{F}(x_k(\mu))$: matriks fungsi monoton terbatas ke atas pada nilai x pada iterasi ke- k dengan derajat keanggotaan- μ

$\overline{F}(x_k(\mu))$: matriks fungsi monoton terbatas ke bawah pada nilai x pada iterasi ke- k dengan derajat keanggotaan- μ

$\underline{F}(x_{k+1}(\mu))$: matriks fungsi monoton terbatas ke atas pada nilai x pada iterasi ke- $k+1$ dengan derajat keanggotaan- μ

$\overline{F}(x_{k+1}(\mu))$: matriks fungsi monoton terbatas ke bawah pada nilai x pada iterasi ke- $k+1$ dengan derajat keanggotaan- μ

$x_n^{(k)}(\mu)$: nilai x ke- n pada saat iterasi ke- k dengan derajat keanggotaan- μ

$\underline{x}_n^{(k)}(\mu)$: nilai x ke- n monoton terbatas ke atas pada saat iterasi ke- k dengan derajat keanggotaan- μ

$\overline{x}_n^{(k)}(\mu)$: nilai x ke- n monoton terbatas ke bawah pada saat iterasi ke- k dengan derajat keanggotaan- μ

$s_k(\mu)$: hasil dari $-A_k^{-1}(\mu)F(x_k(\mu))$ pada iterasi ke- k dengan derajat keanggotaan- μ

$s_k^t(\mu)$: transpose hasil dari $-A_k^{-1}(\mu)F(x_k(\mu))$ pada iterasi ke- k dengan derajat keanggotaan- μ

$A_k(\mu)$: matriks Jacobian pada iterasi ke- k dengan derajat keanggotaan- μ

$A_k^{-1}(\mu)$: invers matriks Jacobian pada iterasi ke- k dengan derajat keanggotaan- μ

$A_{k+1}^{-1}(\mu)$: invers matriks Jacobian pada iterasi ke- k dengan derajat keanggotaan- μ

$y_k(\mu)$: hasil dari $F(x_{k+1}(\mu)) - F(x_k(\mu))$ pada iterasi ke- k dengan derajat keanggotaan- μ

ε : galat



ABSTRAK

Wibowo, Tunjung Ary. 2012. **Penyelesaian Sistem Persamaan Fuzzy Nonlinier Dengan Metode Broyden**. Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing : (I) Mohammad Jamhuri, M.Si (II) Achmad Nashichuddin, M.A.

Kata kunci: penyelesaian, sistem persamaan fuzzy nonlinier, metode Broyden, bilangan fuzzy segitiga

Kehidupan sehari-hari yang serba kompleks membuat suatu permasalahan yang tidak dapat digambarkan dengan riil. Sehingga matematika adalah salah satu alat yang dapat dipergunakan untuk menggambarkan semua itu. Dalam hal ini dapat mempergunakan gabungan antara himpunan fuzzy dan sistem persamaan nonlinier. Kesulitan untuk mendapatkan penyelesaian sistem persamaan fuzzy nonlinier secara analitik dapat diatasi dengan metode Broyden. Sehingga dalam pembahasan penulis ingin mengetahui penyelesaian sistem persamaan fuzzy nonlinier dengan menggunakan metode Broyden.

Representasi himpunan fuzzy sangatlah banyak berdasarkan informasi yang diketahui dari informan, sehingga penulis mempergunakan bilangan fuzzy segitiga. Karena bilangan fuzzy segitiga sangatlah mudah untuk direpresentasikan dan sesuai dengan logika konvensional. Berdasarkan hasil pembahasan diperoleh suatu cara dalam penyelesaian sistem persamaan fuzzy nonlinier dengan menggunakan metode Broyden. Jika diberikan sistem persamaan fuzzy nonlinier maka cara penyelesaian dengan menggunakan metode Broyden adalah:

1. Mengubah sistem persamaan fuzzy nonlinier dalam bentuk parameter.
2. Menentukan titik di sekitar titik potong kurva dari sistem persamaan fuzzy nonlinier dalam bentuk parameter yang berderajat keanggotaan $0 \leq \mu \leq 1$. Kemudian titik di sekitar titik potong kurva yang dihasilkan dipergunakan sebagai nilai awal untuk perhitungan selanjutnya.
3. Menyelesaikan sistem persamaan fuzzy nonlinier dalam bentuk parameter dengan menggunakan metode Broyden hingga galat yang diperoleh $\varepsilon < \text{toleransi maksimum}$.

Disarankan untuk penelitian selanjutnya untuk meneliti penyelesaian sistem persamaan fuzzy dengan bilangan fuzzy secara umum (bilangan fuzzy berdasarkan informasi dari informan) sehingga dapat disesuaikan dengan permasalahan yang ada.

ABSTRACT

Wibowo, Tunjung Ary. 2012. **The Solving Of Fuzzy Nonlinear System of Equations by Broyden Method**. Thesis, Department Mathematics Faculty of Science and Technology, State Islamic University (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.

Promotor : (I) Mohammad Jamhuri, M.Si
(II) Achmad Nashichuddin, M.A

Daily life which is too complex to make an issue that cannot be described by the real. So the math is one tool that can be used to describe all of it. In this case the math can use the combination of a fuzzy set and system of nonlinear equations. Difficulty in obtaining the analytic solution of fuzzy nonlinear system of equations can be solved by the Broyden method. Thus, in the discussion the author wants to know the solution system of fuzzy nonlinear equations using Broyden method.

Representation of a fuzzy set is very much based on known information from the informant, so the author uses triangular fuzzy numbers. Because the triangular fuzzy numbers is very easy to be represented and in accordance with conventional logic. Based on the discussion of the results obtained a manner in the solution of fuzzy nonlinear system of equations using Broyden method. If given system of fuzzy nonlinear equations, the manner of the solution using Broyden method is:

1. Changing the system of fuzzy nonlinear equation into fuzzy parameters
2. Determine the point around the curve intersection point of fuzzy nonlinear system of equations in the form fuzzy parameters which degree of membership $0 \leq \mu \leq 1$. Then the resulting point is used as initial values for further calculations
3. Solving the system of fuzzy nonlinear equations in the form of fuzzy parameters using the Broyden method until obtained the error $\varepsilon < \text{maximum tolerance}$

It is recommended for further research to examine the solution system of fuzzy equations with fuzzy numbers in general (fuzzy numbers based on information from informants) that can be adapted to existing problems.

Keywords : solving, the system of fuzzy nonlinear equations, Broyden method, triangular fuzzy number.

ملخص البحث

ويبووو، تونجوع أري. 2012. تصفية منهج المساواة فزّي Fuzzy غير المساواة بمنهج برويديين Broyden. بحث جامعي، قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، الجامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية بمالانج.

المشرف: (1) محمد جمهري الماجستير في العلوم
(2) أحمد نصيح الدين الماجستير في الفن

كلمة رئيسية: تصفية، منهج المساواة فزّي غير المساواة، منهج برويديين، العدد المثلث الفزّي

الحياة اليومية المختلفة المتنوعة تظهر المشكلة لا يصف بالواقعي. فالرياضيات يكون أحد من الطريقة تستخدم لتصف كلها. وفي هذا استخدام توحيد بين الرابطة الفوزية والمساواة غير المساواة. المشكلة لنيل الحل منهج المساواة فزّي Fuzzy غير المساواة تحليليا يحله بمنهج برويديين Broyden. لغاية ذلك في هذا البحث أراد الباحث معرفة تصفية منهج المساواة فزّي Fuzzy غير المساواة بمنهج برويديين Broyden. كثير وصف الرابطة الفوزية يأسس بمعلومات علم بالمفتش. لذلك، استخدم الباحث العدد المثلث الفزّي. لأن سهل توصيف العدد المثلث الفزّي ومناسبا بمنطق الحال والطرق. مأسسا بنتيجة البحث ينتج خطوة في تصفية منهج المساواة فزّي Fuzzy غير المساواة بمنهج برويديين Broyden. لو يعطي منهج المساواة فزّي Fuzzy غير المساواة فخطوة تحليله بمنهج برويديين Broyden يعني:

1. تغيير منهج المساواة فزّي Fuzzy غير المساواة في شكل بارامتر.
2. تقرير نقطة حول نقطة منقطعة كورفا من منهج المساواة فزّي Fuzzy غير المساواة في شكل بارامتر الذي يستحق درجة الأعضاء $0 \leq \mu \leq 10$. ثم نقطة حول نقطة منقطعة كورفا الذي أنتج يستخدم للقيمة الأولى لتعديد بعده.
3. تصفية منهج المساواة فزّي Fuzzy غير المساواة بمنهج برويديين Broyden في شكل بارامتر باستخدام برويديين Broyden حتى إصلاح الغلط الذي ينتج هو $\epsilon <$ أقصى التسامح.

ينصح للبحث الآتي لبحث تصفية منهج المساواة فزّي Fuzzy غير المساواة عموما

أي العدد الفوزي مأسسا بمعلومات المفتش كي يستطيع يناسبه بالمشكلة م

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Islam diturunkan sebagai agama yang penuh kebenaran dan penuh rahmat. Kitab suci umat Islam adalah Alquran. Alquran berfungsi sebagai petunjuk dan rahmat bagi orang-orang yang beriman. Di dalam Alquran, Allah menyebutkan tentang berbagai hal yang menyangkut masa lalu dan masa yang akan datang termasuk dalam urusan ibadah, hukum, sejarah dan lain sebagainya. Agar manusia selalu dapat melaksanakan ibadah, Allah memberikan keringanan bagi hamba-Nya yang tidak dapat melaksanakannya secara penuh. Allah berfirman dalam QS.Al-Insyirah ayat 6.

إِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٦﴾

Artinya: “Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan”(QS. Al-Insyirah, 94:6).

Dari ayat ini telah diisyaratkan bahwa setiap kesulitan yang dialami seseorang pasti mendapatkan kemudahan (*rukhsah*), termasuk dalam urusan ibadah, takdir dan lain sebagainya. Sehingga dalam hal ini, manusia diwajibkan berfikir (ijtihad) untuk mengatasi suatu permasalahan tanpa harus merubah dan meninggalkan syariat dan hukum yang berlaku pada masalah tersebut.

Sering dijumpai bahwa dalam dunia medis memerlukan proses klasifikasi jenis penyakit agar tidak salah dalam penanganannya. Misalnya contoh kasus pembagian jenis perawatan kepada orang yang sakit panas dengan gejala yang berbeda-beda antara satu individu dengan individu yang lainnya. Dari gejala-gejala yang timbul, metode perawatan dan pengobatan antar individu satu dengan yang lainnya berbeda terutama dalam pemberian

dosis obat dan jenis obat yang dipergunakan dalam mengatasi penyakit tersebut. Sehingga matematika dapat memodelkan kejadian tersebut dalam sistem persamaan fuzzy nonlinier, sehingga dapat meramalkan kejadian penyebaran penyakit hingga sampai pada titik setimbang serta dapat dikembangkan hingga mengetahui bagaimana proses pengobatan yang dianjurkan. Namun, penyelesaian sistem persamaan fuzzy nonlinier tersebut sangatlah diperlukan ketelitian perhitungan yang sangat cepat agar tidak terjadi kesalahan.

Kesalahan yang timbul dari suatu perhitungan dapat diatasi menggunakan suatu pendekatan dengan metode Broyden. Metode Broyden merupakan metode yang mempunyai tingkat konvergensi linier. Selain itu, metode Broyden dapat mengurangi jumlah perhitungan pada setiap iterasi tanpa harus menurunkan kecepatan konvergensinya yang telah dilakukan dengan menggunakan metode Newton (Ramli dkk, 2010:1-2).

Sistem persamaan nonlinier yang sering dipergunakan dalam memodelkan suatu kejadian sering menggunakan data *crisp*. Namun, tidak jarang dalam suatu model data tidak dapat disusun dalam data *crisp*. Sehingga memungkinkan data tersebut dibentuk dalam fuzzy. Pada tahun 2010 telah dilakukan penelitian tentang penyelesaian persamaan fuzzy nonlinier oleh Amirah Ramli, Mohd Lazim, Mustafa Mamat dengan menggunakan metode Broyden. Penelitian serupa juga dilakukan oleh Abbasbandy dan Asady (2004) serta Abbasbandy dan Jafarian (2006) dengan menggunakan metode Newton. Kemudian penelitian yang telah dilakukan oleh Abbasbandy dan Asady (2004) serta Abbasbandy dan Jafarian (2006) dijadikan acuan dalam

penelitian Amirah Ramli, Mohd Lazim, Mustafa Mamat (2010). Pada penelitian ini akan ditampilkan suatu solusi dari sistem persamaan fuzzy nonlinier menggunakan metode Broyden. Sehingga judul yang diangkat oleh penulis adalah “Penyelesaian Sistem Persamaan Fuzzy Nonlinier Dengan Menggunakan Metode Broyden”.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan di atas, maka dalam penelitian ini ditetapkan suatu masalah yang ingin dijawab yaitu bagaimana menyelesaikan sistem persamaan fuzzy nonlinier dengan menggunakan metode Broyden?

1.3 Batasan Masalah

Berdasarkan latar belakang dan rumusan masalah yang telah dipaparkan, maka pada penelitian ini diberikan cakupan bahasan yakni bilangan fuzzy yang dipergunakan adalah bilangan fuzzy segitiga karena bilangan fuzzy segitiga merupakan bilangan fuzzy yang dasar dan paling dekat dengan representasi logika konvensional serta paling sederhana dalam perhitungannya. Sedangkan toleransi maksimum yang dipergunakan adalah 10^{-5} .

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah untuk mendeskripsikan dan menganalisis langkah-langkah penyelesaian sistem persamaan fuzzy nonlinier dengan menggunakan metode Broyden.

1.5 Manfaat Penelitian

Penelitian ini merupakan perpaduan logika fuzzy dan analisis numerik pada sistem persamaan nonlinier yang diselesaikan secara numerik. Dari dua bidang ilmu tersebut, diharapkan memberikan manfaat bagi :

1. Penulis

Penulis mendapatkan pengalaman dalam mengaktualisasikan diri sebagai insan akademik dan dapat diterapkannya pengalaman serta teori-teori ilmu pengetahuan yang telah diperoleh selama menjalani pendidikan hingga dapat melakukan penelitian ini khususnya dalam materi mata kuliah logika fuzzy dan analisis numerik.

2. Pembaca

Hasil dari penelitian ini dapat dipergunakan sebagai sumber referensi awal tentang penyelesaian sistem persamaan fuzzy nonlinier dengan metode Broyden yang selanjutnya pembaca dapat melanjutkan penelitian ini secara lebih luas dengan menggunakan metode yang lain.

3. Lembaga

Hasil penelitian ini dapat dijadikan sebagai bahan rujukan kajian keilmuan tentang analisis numerik dalam logika fuzzy.

4. Pengembangan Ilmu Pengetahuan

Penelitian yang telah dilakukan diharapkan memberikan kontribusi bagi pengembangan ilmu pengetahuan terutama dalam pengembangan ilmu matematika tentang analisis numerik dan logika fuzzy yang dapat diterapkan dalam kehidupan sehari-hari dan berbagai disiplin ilmu.

1.6 Metode Penelitian

Penelitian yang dilakukan ini adalah penelitian kuantitatif dan kepustakaan. Dalam penelitian ini, dipergunakan langkah-langkah sebagai berikut.

- a. Menentukan sistem persamaan fuzzy nonlinier.
- b. Menyelesaikan sistem persamaan fuzzy nonlinier dengan metode Broyden. Adapun langkah-langkahnya adalah sebagai berikut.
 - a) Mengubah sistem persamaan fuzzy nonlinier dalam bentuk parameter.
 - b) Menentukan titik di sekitar titik potong kurva dari sistem persamaan fuzzy nonlinier dalam bentuk parameter yang berderajat keanggotaan $0 \leq \mu \leq 1$. Kemudian titik di sekitar titik potong kurva yang dihasilkan dipergunakan sebagai nilai awal untuk perhitungan selanjutnya.
 - c) Menyelesaikan $A_k s_k = -F(x_k)$ untuk s_k .
 - d) Menyelesaikan $x_{k+1} := x_k + s_k$.
 - e) Menyelesaikan $y_k := F(x_{k+1}) - F(x_k)$.

- f) Menyelesaikan A_{k+1}^{-1} yang telah dimanipulasi secara aljabar dengan menggunakan formula Sherman-Morrison.
- g) Mengulangi langkah (c) sampai (f) hingga galat yang diperoleh memenuhi batas toleransi kesalahan $\varepsilon \leq 10^{-5}$.
- c. Menggambarkan hasil perhitungan dari solusi dan galat sistem persamaan fuzzy nonlinier.

1.7 Sistematika Penulisan

Untuk memudahkan pembaca dalam memahami penelitian ini, penulis menggunakan sistematika penulisan yang terdiri dari empat bab yang mempunyai bagian-bagian yang terperinci. Empat bab tersebut adalah sebagai berikut.

BAB I PENDAHULUAN

Bab pendahuluan berisikan pemaparan dari penulis tentang alasan diangkatnya tema penulisan penelitian ini yaitu penyelesaian sistem persamaan fuzzy nonlinier dengan menggunakan metode Broyden.

BAB II KAJIAN PUSTAKA

Bab II berisikan materi-materi yang mendasari materi yang dipergunakan yakni tentang metode Broyden dan logika fuzzy.

BAB III PEMBAHASAN

Bab selanjutnya adalah bab pembahasan yang berisikan pembahasan tentang penyelesaian sistem persamaan fuzzy nonlinier dengan menggunakan metode Broyden.

BAB IV PENUTUP

Bab penutup ini berisikan kesimpulan yang merupakan jawaban atas rumusan masalah yang telah dipaparkan pada bab pertama.



BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Nonlinier

Definisi 1:

Persamaan nonlinier adalah suatu persamaan yang mempunyai grafik bukan berupa garis lurus (Dugopolski, 2006:826).

Contoh 2.1:

$$x^2 + 3x + 2 = 0 \text{ (persamaan kuadrat)}$$

Definisi 2:

Sistem persamaan nonlinier adalah kumpulan dari beberapa persamaan yang saling berkaitan dan dari beberapa persamaan tersebut terdapat persamaan nonlinier yang berjumlah lebih dari atau sama dengan 1 persamaan (Dugopolski, 2006:826).

Sistem persamaan nonlinier adalah fungsi yang mempunyai bentuk

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

untuk setiap fungsi f_i dengan $i = 1, 2, \dots, n$ dapat digambarkan dengan sebuah vektor $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$ untuk dimensi ke- n pada ruang R^n pada garis riil R (Burden, 2005:602).

2.2 Matriks

Definisi 3:

Matriks adalah sebuah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam susunan tersebut dinamakan entri dalam matriks (Anton dan Rorres, 2004:26).

Definisi 4:

Matriks Identitas adalah matriks persegi yang anggotanya berupa bilangan 1 pada diagonal utamanya dan pada posisi yang lain berisikan bilangan 0 (Anton dan Rorres, 2004:45).

Definisi 5:

Jika A adalah matriks bujursangkar, dan jika terdapat matriks B yang ukurannya sama sedemikian rupa sehingga $AB = BA = I$, maka A dapat dibalik (*invertible*) dan B disebut sebagai invers (*inverse*) dari A . Jika matriks B tidak dapat didefinisikan, maka A dinyatakan sebagai matriks singular (Anton dan Rorres, 2004:46).

Teorema 1:

Jika A dan B adalah matriks-matriks yang dapat dibalik dengan ukuran yang sama, maka AB dapat dibalik dan

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Bukti:

Jika dapat menunjukkan bahwa $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = (B^{-1}A^{-1})(AB) = I$, maka akan dapat menunjukkan bahwa matriks AB dapat dibalik dan bahwa $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Tetapi $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$.

Argumentasi yang sama menunjukkan bahwa $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I$ (Anton dan Rorres, 2004:48).

Definisi 6:

Matriks Jacobian adalah matriks turunan parsial orde pertama dari vektor atau fungsi bernilai skalar dengan umpan baliknya adalah vektor yang lain. Atau dengan kata lain matriks Jacobian dapat ditulis sebagai berikut.

$$F'(x)_{ik} = \frac{\partial}{\partial x_k} F_i(x) \\ (i = 1, 2, \dots, m, \quad k = 1, 2, \dots, n)$$

(Anonim, 2012).

Contoh 2.3:

Diberikan $m = n = 2$, $x = (x_1, x_2)$ dan $F(x) = \begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2(x) \end{pmatrix}$, maka dengan menggunakan Definisi 5, matriks Jacobiannya adalah sebagai berikut.

$$F'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} F_1(x) & \frac{\partial}{\partial x_2} F_1(x) \\ \frac{\partial}{\partial x_1} F_2(x) & \frac{\partial}{\partial x_2} F_2(x) \end{pmatrix}$$

(Neumaier, 2001:303).

2.3 Perkalian Vektor dalam Ruang Euclid

Definisi 7:

Jika $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ dan $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ adalah vektor-vektor sebarang pada R^n , maka hasil kali dalam Euclid (*Euclidean inner product*) $u \cdot v$ didefinisikan sebagai

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$$

(Anton dan Rorres, 2004:182)

Teorema 2 (Sifat-sifat hasil kali dalam Euclid):

Jika u , v , dan w adalah vektor-vektor pada R^n dan k adalah suatu skalar sebarang maka:

- a) $u \cdot v = v \cdot u$
- b) $(u + v) \cdot w = u \cdot w + v \cdot w$
- c) $(ku) \cdot v = k(u \cdot v)$
- d) $v \cdot v \geq 0$. Lebih lanjut, $v \cdot v = 0$ jika dan hanya jika $v = 0$

Bukti:

- a) Misalkan $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ dan $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, maka

$$\begin{aligned} (u \cdot v) &= (u_1, u_2, \dots, u_n) \cdot (v_1, v_2, \dots, v_n) \\ &= u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + \dots + u_n \cdot v_n \\ &= v_1 \cdot u_1 + v_2 \cdot u_2 + \dots + v_n \cdot u_n \\ &= (v_1, v_2, \dots, v_n) \cdot (u_1, u_2, \dots, u_n) \\ &= (v \cdot u) \end{aligned}$$

- b) Misalkan $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ dan $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$,

maka

$$\begin{aligned} (u + v) \cdot w &= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n) \cdot (w_1, w_2, \dots, w_n) \\ &= (u_1 + v_1) w_1 + (u_2 + v_2) w_2 + \dots + (u_n + v_n) w_n \\ &= u_1 w_1 + v_1 w_1 + u_2 w_2 + v_2 w_2 + \dots + u_n w_n + v_n w_n \\ &= (u_1 w_1 + u_2 w_2 + \dots + u_n w_n) + (v_1 w_1 + v_2 w_2 + \dots + v_n w_n) \\ &= ((u_1, u_2, \dots, u_n) \cdot (w_1, w_2, \dots, w_n)) + ((v_1, v_2, \dots, v_n) \cdot (w_1, w_2, \dots, w_n)) \\ &= (u \cdot w) + (v \cdot w) \end{aligned}$$

c) Misalkan k adalah suatu konstanta, $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ dan

$v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, maka

$$\begin{aligned}(ku) \cdot v &= (ku_1, ku_2, \dots, ku_n) \cdot (v_1, v_2, \dots, v_n) \\ &= ku_1v_1 + ku_2v_2 + \dots + ku_nv_n \\ &= k(u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n) \\ &= k(u \cdot v)\end{aligned}$$

d) Diketahui bahwa $v \cdot v = v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2 \geq 0$. Lebih lanjut, kesamaan berlaku jika dan hanya jika $v_1 = v_2 = \dots = v_n = 0$, yaitu, jika dan hanya jika $v = 0$

(Anton dan Rorres, 2004:182).

2.4 Galat

Definisi 8:

Misalkan $\hat{a}$ adalah nilai hampiran terhadap nilai sejati a , maka selisih $\varepsilon = a - \hat{a}$ disebut galat (Munir, 2003:23).

Ketika galat bernilai positif dijumlahkan dengan galat yang bernilai negatif, maka galat tersebut akan saling mengurangi. Sehingga pada penelitian ini dipergunakan galat mutlak. Selain dipergunakan sebagai galat, galat mutlak dipergunakan sebagai metode berhentinya suatu iterasi jika nilai galat yang diperoleh kurang dari toleransi maksimum. Pada galat mutlak, tanda galat tidak dipertimbangkan yang didefinisikan sebagai

$$|\varepsilon| = |a| - |\hat{a}|$$

2.5 Metode Broyden

Metode Broyden adalah metode quasi-Newton untuk penyelesaian persamaan nonlinier dengan n -variabel. Metode ini pertama kali dikenalkan oleh C. G Broyden pada tahun 1965. Metode ini diilhami dari metode Newton dan metode *Secant*. Metode Broyden juga dikatakan metode Quasi-Newton. Metode Broyden adalah perumuman dari metode *Secant* n -dimensi. Metode Broyden menggunakan turunan ke- n dari metode *Secant*

$$f'(x_{k+1}) \approx \frac{f(x_{k+1}) - f(x_{k+1} - 1)}{x_{k+1} - x_k}$$

serta proses dari metode Newton.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{1}{f'(x_k)} f(x_k)$$

Metode Broyden memberikan bentuk umum dari bentuk sistem persamaan $F(x) = 0$, dan turunan f' diganti dengan matriks Jacobian A . Matriks Jacobian adalah turunan menggunakan persamaan *Secant*

$$A_k \cdot (x_{k+1} - x_k) \approx F(x_{k+1}) - F(x_k)$$

Sehingga matriks Jacobian tersebut dapat dipergunakan untuk dimensi yang lebih dari satu. Broyden menyarankan bahwa untuk mendapatkan matriks Jacobian ini dapat dipergunakan estimasi dari A_k dan untuk mengambil solusinya dengan menggunakan persamaan garis potong yang merupakan modifikasi pada A_k

$$A_{k+1} = A_k + \frac{(F_{k+1} - F_k) - A_k(x_{k+1} - x_k)}{(x_{k+1} - x_k)^t (x_{k+1} - x_k)} (x_{k+1} - x_k)^t \quad (2.2)$$

dan proses pada metode Newton

$$x_{k+1} = x_k - A_k^{-1} F(x_k)$$

(Broyden dalam Anonim, 2011).

Sehingga algoritma metode Broyden adalah sebagai berikut.

Diberikan $F: R^n \rightarrow R^n, x_0 \in R^n, A_0 \in R^{n \times n}$

Untuk $k = 0, 1, \dots$:

Selesaikan $A_k s_k = -F(x_k)$ untuk s_k

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + s_k$$

$$y_k = F(x^{(k+1)}) - F(x^{(k)})$$

$$A_{k+1} = A_k + \frac{(y_k - A_k s_k) s_k^t}{s_k^t s_k}$$

Contoh 2.9:

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - 3$$

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 9$$

Dua persamaan di atas mempunyai akar persamaan sebagai berikut.

$$x_1 + x_2 = 3$$

$x_1 = 3 - x_2$ kemudian disubstitusikan ke dalam

$$x_1^2 + x_2^2 = 9$$

$$(3 - x_2)^2 + x_2^2 = 9$$

$$9 - 6x_2 + x_2^2 + x_2^2 = 9$$

$$2x_2^2 - 6x_2 = 0$$

$$x_2(2x_2 - 6) = 0 \text{ maka}$$

$$x_2 = 0 \text{ atau } x_2 = 3$$

Kemudian disubstitusikan ke dalam persamaan yang pertama. Maka

$$x_1 + x_2 = 3$$

$$x_1 + 0 = 3$$

$$x_1 = 3$$

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= 3 \\x_1 + 3 &= 3 \\x_1 &= 0\end{aligned}$$

Sehingga didapatkan solusi analitiknya adalah $(3,0)$ dan $(0,3)$ atau dapat

ditulis dalam bentuk matriks $x = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ dan $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$. Kemudian untuk

perhitungan secara numerik, diberikan $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ dan dipergunakan metode

Broyden untuk menentukan hasil akarnya dengan mensubstitusikan ke dalam variabel x_1 dan x_2 secara terurut pada iterasi pertama. Dari kedua persamaan tersebut maka didapatkan:

$$F(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 - 3 \\ x_1^2 + x_2^2 - 9 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned}A(x_1, x_2) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial (x_1 + x_2 - 3)}{\partial x_1} & \frac{\partial (x_1 + x_2 - 3)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial (x_1^2 + x_2^2 - 9)}{\partial x_1} & \frac{\partial (x_1^2 + x_2^2 - 9)}{\partial x_2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2x_1 & 2x_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Iterasi ke-1

Ketika $x^{(0)}$ disubstitusikan ke dalam matriks (2.3) dan matriks (2.4) maka didapatkan

$$\begin{aligned}
 F(x^{(0)}) &= \begin{bmatrix} x_1 + x_2 - 3 \\ x_1^2 + x_2^2 - 9 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1+5-3 \\ 1^2+5^2-9 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 3 \\ 17 \end{bmatrix} \\
 A_0 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2x_1 & 2x_2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2(1) & 2(5) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Sehingga didapatkan

$$\begin{aligned}
 s_0 &= -A_0^{-1}F(x^{(0)}) \\
 &= -\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 17 \end{bmatrix} \\
 &= -\frac{1}{8} \begin{bmatrix} 13 \\ 11 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -1,625 \\ -1,375 \end{bmatrix} \\
 x^{(1)} &= x^{(0)} + s_0 \\
 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1,625 \\ -1,375 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -0,625 \\ 3,625 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Setelah didapatkan nilai dari $x^{(1)}$ maka selanjutnya disubstitusikan ke dalam matriks (2.3) sehingga didapatkan

$$\begin{aligned}
 F(x^{(1)}) &= \begin{bmatrix} x_1 + x_2 - 3 \\ x_1^2 + x_2^2 - 9 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1+5-3 \\ 1^2+5^2-9 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 4,53125 \end{bmatrix} \\
y_0 &= F(x^{(1)}) - F(x^{(0)}) \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 4,53125 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 17 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -3 \\ -12,46875 \end{bmatrix} \\
A_1 &= A_0 + \frac{(y_0 - A_0 s_0) s_0^t}{s_0^t s_0} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 10 \end{bmatrix} + \frac{\left(\begin{bmatrix} -3 \\ -12,46875 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1,625 \\ -1,375 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} -1,625 & -1,375 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} -1,625 & -1,375 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1,625 \\ -1,375 \end{bmatrix}} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 10 \end{bmatrix} + \frac{1}{4,53125} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -7,36328125 & -6,23046875 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1,625 & -1,375 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0,375 & 8,625 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Iterasi ke-2

$$\begin{aligned}
s_1 &= -A_1^{-1} F(x^{(1)}) \\
&= - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0,375 & 8,625 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 4,53125 \end{bmatrix} \\
&= - \frac{1}{8,25} \begin{bmatrix} -4,53125 \\ 4,53125 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0,549242424 \\ -0,549242424 \end{bmatrix} \\
x^{(2)} &= x^{(1)} + s_1 \\
&= \begin{bmatrix} -0,625 \\ 3,625 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,549242424 \\ -0,549242424 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -0,075757575 \\ 3,075757575 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Setelah didapatkan nilai $x^{(2)}$, kemudian disubstitusikan ke dalam persamaan (2.3)

$$\begin{aligned}
 F(x^{(2)}) &= \begin{bmatrix} x_1 + x_2 - 3 \\ x_1^2 + x_2^2 - 9 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -0.625 + 3.625 - 3 \\ -0.625^2 + 3.625^2 - 9 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 4.53125 \end{bmatrix} \\
 y_1 &= F(x^{(2)}) - F(x^{(1)}) \\
 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0.46602387 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 4.53125 \end{bmatrix} \\
 A_2 &= A_1 + \frac{(y_1 - A_1 s_1) s_1^t}{s_1^t s_1} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.375 & 8.625 \end{bmatrix} + \frac{\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0.466023874 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0.549242424 & -0.549242424 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 0.549242424 & -0.549242424 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.549242424 \\ -0.549242424 \end{bmatrix}} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.375 & 8.625 \end{bmatrix} + \frac{1}{0.60333448} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.253960082 & -0.255960082 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.375 & 8.625 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.424242423 & -0.424242423 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.799242423 & 8.200757576 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Dengan menggunakan langkah-langkah yang sama seperti iterasi ke-1 dan ke-2, maka didapatkan hasil seperti berikut.

Tabel 2.1 Hasil Perhitungan dengan Metode Broyden

k	$x_1^{(k+1)}$	$x_2^{(k+1)}$
2	-0,012794269	3,012794269
3	-0,000287614	3,000287614
4	-0,000001222	3,000001222
5	-0,000000001	3,000000001
6	$2,3152297 \times 10^{-14}$	3

(Dennis, 1983:169-173)

Teorema 3 (Teorema Sherman-Morrison):

Jika A adalah matriks *nonsingular* dan x dan y adalah vektor, maka $A + xy^t$ adalah matriks *nonsingular*, dengan syarat bahwa $y^t A^{-1} x \neq -1$, dan

$$(A + xy^t)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}xy^t A^{-1}}{1 + y^t A^{-1}x}$$

Bukti:

Adit: $(I + P)^{-1}$

Adib: $(A + xy^t)^{-1}$

$$\begin{aligned}
 (I + P)^{-1} &= (I + P)^{-1} I \\
 &= (I + P)^{-1} (I + P - P) \\
 &= (I + P)^{-1} ((I + P) - P) \\
 &= I - (I + P)^{-1} P
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Misal $xy^t = B$, maka

$$\begin{aligned}
 (A + xy^t)^{-1} &= (A + B)^{-1} \\
 (A + B)^{-1} &= (A(I + A^{-1}B))^{-1}
 \end{aligned}$$

$$= (I + A^{-1}B)^{-1} A^{-1} \quad (2.6)$$

Dengan menggunakan persamaan (2.5), maka persamaan (2.6) dapat diubah menjadi

$$\begin{aligned} (A+B)^{-1} &= (I + A^{-1}B)^{-1} A^{-1} \\ &= \left(I - (I + A^{-1}B)^{-1} A^{-1}B \right) A^{-1} \\ &= A^{-1} - (I + A^{-1}B)^{-1} A^{-1}BA^{-1} \\ &= A^{-1} - A^{-1}(I + BA^{-1})^{-1} BA^{-1} \\ &= A^{-1} - A^{-1}B(I + A^{-1}B)^{-1} A^{-1} \\ &= A^{-1} - A^{-1}BA^{-1}(I + BA^{-1})^{-1} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Dan ketika permisalan dimasukkan ke dalam persamaan (2.7), maka persamaannya berubah menjadi

$$\begin{aligned} (A + xy^t)^{-1} &= A^{-1} - A^{-1}xy^t A^{-1} (I + xy^t A^{-1})^{-1} \\ &= A^{-1} - A^{-1}xy^t (I + A^{-1}xy^t)^{-1} A^{-1} \\ &= A^{-1} - A^{-1}x (I + y^t A^{-1}x)^{-1} y^t A^{-1} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Karena hasil dari $y^t A^{-1}x$ berupa sebuah bilangan pada bilangan R^n sehingga

$$(I + y^t A^{-1}x)^{-1} = \frac{1}{1 + y^t A^{-1}x}, \text{ dan persamaan (2.12) di atas dapat dinyatakan}$$

sebagai berikut.

$$(A + xy^t)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}xy^t A^{-1}}{1 + y^t A^{-1}x} \quad (2.9)$$

Dengan menggunakan teorema Sherman-Morrison, metode Broyden dapat dipercepat secara langsung, yakni A_{k+1}^{-1} persamaan (2.9) dengan menggunakan

A_k^{-1} pada persamaan (2.2).

$$\begin{aligned}
A_{k+1} &= A_k + \frac{y_k - A_k s_k}{s_k^t s_k} s_k^t \\
(A_{k+1})^{-1} &= \left(A_k + \frac{y_k - A_k s_k}{s_k^t s_k} s_k^t \right)^{-1} \\
A_{k+1}^{-1} &= A_k^{-1} - \frac{A_k^{-1} \left(\frac{y_k - A_k s_k}{s_k^t s_k} \right) s_k^t A_k^{-1}}{1 + s_k^t A_k^{-1} \left(\frac{y_k - A_k s_k}{s_k^t s_k} \right)} \\
&= A_k^{-1} - \frac{A_k^{-1} (y_k - A_k s_k) s_k^t A_k^{-1}}{s_k^t s_k + s_k^t A_k^{-1} y_k - s_k^t A_k^{-1} A_k s_k} \\
&= A_k^{-1} - \frac{A_k^{-1} (y_k - A_k s_k) s_k^t A_k^{-1}}{s_k^t s_k + s_k^t A_k^{-1} y_k - s_k^t I s_k} \\
&= A_k^{-1} - \frac{A_k^{-1} (y_k - A_k s_k) s_k^t A_k^{-1}}{s_k^t s_k + s_k^t A_k^{-1} y_k - s_k^t s_k} \\
A_{k+1}^{-1} &= A_k^{-1} + \frac{(s_k - A_k^{-1} y_k) s_k^t A_k^{-1}}{s_k^t A_k^{-1} y_k} \quad (2.10)
\end{aligned}$$

Sehingga algoritma metode Broyden yang baru dapat ditulis sebagai berikut.

Diberikan $F : R^n \rightarrow R^n, x_0 \in R^n, A_0 \in R^{n \times n}$

Untuk $k = 0, 1, \dots$:

Selesaikan $A_k s_k = -F(x_k)$ untuk s_k

$$x_{k+1} = x_k + s_k$$

$$y_k = F(x_{k+1}) - F(x_k)$$

$$A_{k+1}^{-1} = A_k^{-1} + \frac{(s_k - A_k^{-1} y_k) s_k^t A_k^{-1}}{s_k^t A_k^{-1} s_k}$$

Contoh 2.10:

Diberikan suatu sistem nonlinier

$$3x_1 - \cos(x_2 x_3) - \frac{1}{2} = 0$$

$$x_1^2 - 81(x_2 + 0,1)^2 + \sin(x_3) + 1,06 = 0$$

$$e^{-x_1 x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} = 0$$

Dan diberikan nilai awal $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}$. Dari sistem persamaan nonlinier

tersebut didapatkan maktriks fungsi dan matriks Jacobian sebagai berikut.

$$F(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} 3x_1 - \cos(x_2 x_3) - \frac{1}{2} \\ x_1^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + \sin(x_3) + 1.06 \\ e^{-x_1 x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} \end{bmatrix}$$

$$A(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

$$A(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} 3 & x_3 \sin x_2 x_3 & x_2 \sin x_2 x_3 \\ 2x_1 & -162(x_2 + 0.1) & \cos x_3 \\ -x_2 e^{-x_1 x_2} & -x_1 e^{-x_1 x_2} & 20 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan metode Broyden yang telah diperbaiki dengan metode Sherman-Morrison, didapatkan hasil sebagai berikut.

$$F(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} 3x_1 - \cos(x_2 x_3) - \frac{1}{2} \\ x_1^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + \sin(x_3) + 1.06 \\ e^{-x_1 x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} \end{bmatrix}$$

$$F(x^{(0)}) = \begin{bmatrix} 3(0) - \cos(0) - \frac{1}{2} \\ 0^2 - 81(0 + 0.1)^2 + \sin(0) + 1.06 \\ e^{-0} + 20(0) + \frac{10\pi - 3}{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} -1,199950 \\ 2,269833 \\ 8,462025 \end{bmatrix} \\
A(x_1, x_2, x_3) &= \begin{bmatrix} 3 & x_3 \sin x_2 x_3 & x_2 \sin x_2 x_3 \\ 2x_1 & -162(x_2 + 0.1) & \cos x_3 \\ -x_2 e^{-x_1 x_2} & -x_1 e^{-x_1 x_2} & 20 \end{bmatrix} \\
A_0 &= \begin{bmatrix} 3 & (0) \sin(0) & (0) \sin(0) \\ 2(0) & -162(0 + 0.1) & \cos(0) \\ -(0) e^{-0} & -x_1 e^{-0} & 20 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 3 & 9,999833 \times 10^{-4} & -9,999833 \times 10^{-4} \\ 0,2 & -32,4 & 0,9950042 \\ -9,900498 \times 10^{-2} & -9,900498 \times 10^{-2} & 20 \end{bmatrix} \\
A_0^{-1} &= \begin{bmatrix} 0,3333332 & 1,023852 \times 10^{-5} & 1,615701 \times 10^{-5} \\ 2,108607 \times 10^{-3} & -3,086883 \times 10^{-2} & 1,535836 \times 10^{-3} \\ 1,660520 \times 10^{-3} & -1,527577 \times 10^{-4} & 5,000768 \times 10^{-2} \end{bmatrix} \\
s_1 &= -A_0^{-1} F(x^{(0)}) \\
&= \begin{bmatrix} 0,3998697 \\ -8,053315 \times 10^{-2} \\ -0,4215204 \end{bmatrix} \\
x^{(1)} &= x^{(0)} - A_0^{-1} F(x^{(0)}) \\
&= \begin{bmatrix} 0,4998697 \\ 1,946685 \times 10^{-2} \\ -0,5215205 \end{bmatrix} \\
F(x^{(1)}) &= \begin{bmatrix} -3,3944465 \times 10^{-4} \\ -0,3443879 \\ 3,188238 \times 10^{-2} \end{bmatrix} \\
y_1 &= F(x^{(1)}) - F(x^{(0)}) \\
&= \begin{bmatrix} 1,199611 \\ 1,925445 \\ -8,430143 \end{bmatrix} \\
A_1^{-1} &= A_0^{-1} + \frac{(s_1 - A_0^{-1} y_1) s_1^t A_0^{-1}}{s_1^t A_0^{-1} s_1}
\end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 0,3333781 & 1,11050 \times 10^{-5} & 8,967344 \times 10^{-6} \\ -2,021270 \times 10^3 & -3,094849 \times 10^{-2} & 2,196906 \times 10^{-3} \\ 1,022214 \times 10^{-3} & -1,650709 \times 10^{-4} & 5,010986 \times 10^{-2} \end{bmatrix}$$

Untuk iterasi selanjutnya, metode yang dipergunakan sama seperti dengan iterasi pertama. Namun mulai iterasi yang kedua, tidak harus terlebih dahulu mencari nilai A_{k+1} , karena sudah didapatkan nilai dari A_{k+1}^{-1} pada iterasi sebelumnya.

Tabel 2.2 Hasil Perhitungan dengan Metode Broyden

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
2	0.499986375456912	0.008737839299257	-0.523174574399749
3	0.500006597059974	0.000867273555790	-0.523572341486402
4	0.500000328717546	0.000039528275306	-0.523597685378835
5	0.500000001566878	0.000000193543975	-0.523598770059983
6	0.5000000000000334	0.0000000000000535	-0.523598775599102

(Burden, 2005:624-626).

2.6 Logika Fuzzy

2.6.1 Definisi Logika Fuzzy

Definisi 9:

Sebuah himpunan fuzzy A di X adalah karakteristik dari fungsi keanggotaan $f_A(x)$ yang berasosiasi dengan beberapa titik di X yang merupakan anggota dari bilangan riil pada interval $[0,1]$, dengan nilai dari $f_A(x)$ pada x yang merepresentasikan nilai keanggotaan x di A (Zadeh, 1965:339).

Contoh 2.4:

Misal diberikan himpunan nilai ujian 7 orang murid di suatu sekolah. Nilai ketujuh murid tersebut adalah 1, 5, 7, 8, 7, 8, 9. Jika digambarkan, maka nilai derajat keanggotaan nilai dari ketujuh murid tersebut dengan kedekatan pada nilai yang sempurna, yakni 10 adalah

$$f_x(1)=0,1; \quad f_x(5)=0,5; \quad f_x(7)=0,7; \quad f_x(8)=0,8; \quad f_x(7)=0,7; \\ f_x(8)=0,8; \quad f_x(9)=0,9.$$

2.6.2 Alasan Dipergunakan Logika Fuzzy

Logika fuzzy adalah suatu cabang ilmu matematika yang baru. Ilmu ini dikenalkan oleh Prof. L.A Zadeh pada tahun 1965. Pada awal perkembangannya, logika fuzzy ini mengalami banyak pertentangan oleh ilmuwan khususnya dari pihak ilmuwan Amerika. Namun seiring dengan banyaknya manfaat dari logika fuzzy yang diterapkan dalam berbagai bidang keilmuan, logika fuzzy ini makin diterima dalam dunia keilmuan sebagai cabang ilmu baru. Ilmu ini banyak diterapkan ke dalam berbagai aspek keilmuan. Seperti halnya pembuatan peralatan-peralatan elektronik yakni dalam pembuatan mesin cuci Takagi-Sugeno-Kang, kamera, televisi dan lain sebagainya.

Alasan semakin banyak dipergunakannya logika fuzzy adalah sebagai berikut (Cox dalam Kusumadewi, 2010: 2-3).

- a. Konsep logika fuzzy mudah dimengerti. Karena logika fuzzy menggunakan dasar teori himpunan, maka konsep matematis yang mendasari penalaran fuzzy tersebut cukup mudah untuk dimengerti.

- b. Logika fuzzy sangat fleksibel, artinya mampu beradaptasi dengan perubahan-perubahan, dan ketidakpastian yang menyertai permasalahan.
- c. Logika fuzzy memiliki toleransi terhadap data yang tidak tepat. Jika diberikan sekelompok data yang cukup homogeny, dan kemudian ada beberapa data yang “eksklusif”, maka logika fuzzy memiliki kemampuan untuk menangani data eksklusif tersebut.
- d. Logika fuzzy mampu memodelkan fungsi-fungsi nonlinier yang sangat kompleks.
- e. Logika fuzzy dapat membangun dan mengaplikasikan pengalaman-pengalaman para pakar secara langsung tanpa harus melalui proses pelatihan. Dalam hal ini, sering dikenal dengan nama *Fuzzy Expert Systems* menjadi bagian terpenting.
- f. Logika fuzzy dapat bekerjasama dengan teknik-teknik kendalai secara konvensional. Hal ini umumnya terjadi pada aplikasi di bidang teknik mesin maupun teknik elektro.
- g. Logika fuzzy didasarkan pada bahasa alami. Logika fuzzy menggunakan bahasa sehari-hari sehingga mudah dimengerti.

2.6.3 Fungsi Keanggotaan Fuzzy

Definisi 9:

Fungsi keanggotaan (*membership function*) adalah suatu kurva yang menunjukkan relasi dari himpunan *crisp* dari semua bagian dari X terhadap derajat keanggotaannya yang merupakan himpunan tertutup dari bilangan riil $[0,1]$ (Kusumadewi dan Purnomo, 8: 2010).

Sehingga dalam penelitian ini mempergunakan fungsi keanggotaan dengan representasi kurva segitiga.

Definisi 10:

$$m(t) = \begin{cases} \frac{t - a_l}{a_0 - a_l}, & \text{jika } t \in [a_l, a_0] \\ \frac{t - a_r}{a_0 - a_r}, & \text{jika } t \in [a_0, a_r] \end{cases}$$

Untuk $a_l, a_0, a_r \in R$ dengan $a_l \leq a_0 \leq a_r$ (Wang dkk, 2010:48).

Keterangan:

$m(t)$: Derajat keanggotaan untuk t

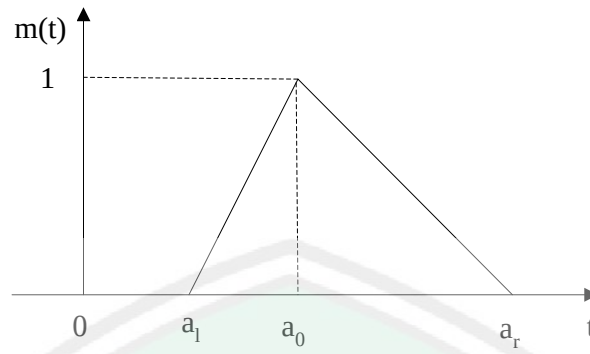
t : Himpunan *crisp*, t beranggotakan a_l, a_0, a_r

a_l : Anggota himpunan *crisp* t yang berderajat 0 terletak di sebelah kiri

a_0 : Anggota himpunan *crisp* t yang berderajat 1 terletak di sebelah tengah

a_r : Anggota himpunan *crisp* t yang berderajat 0 terletak di sebelah kanan

Dengan kata lain Definisi 10 dapat digambarkan seperti Gambar (2.1) dan dapat ditulis ulang sebagai berikut.



Gambar 2.1 Fungsi Keanggotaan dengan Representasi Segitiga (Wang dkk, 2010:48)

a. Untuk $t \in [a_l, a_0]$

$$\begin{aligned} m(t) &= \frac{t - a_l}{a_0 - a_l} \\ (a_0 - a_l)m(t) &= t - a_l \\ t &= a_l + (a_0 - a_l)m(t) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Jika $m(t)$ disimbolkan dengan μ , dan karena t terletak di sebelah kiri dari derajat keanggotaan yang bernilai 1 maka t dapat disimbolkan dengan $\bar{t}$, sehingga Persamaan (2.11) dapat ditulis ulang dengan

$$\bar{t}(\mu) = a_l + (a_0 - a_l)\mu \quad (2.12)$$

Keterangan :

$\bar{t}(\mu)$: Nilai t monoton terbatas naik dengan derajat keanggotaan μ

μ : Derajat keanggotaan, $0 \leq \mu \leq 1$

a_l : Anggota himpunan *crisp* t yang berderajat 0 terletak di sebelah kiri

a_0 : Anggota himpunan *crisp* t yang berderajat 1 terletak di sebelah tengah

b. Untuk $t \in [a_0, a_r]$

$$\begin{aligned} m(t) &= \frac{t - a_r}{a_0 - a_r} \\ (a_0 - a_r)m(t) &= t - a_r \\ t &= a_r + (a_0 - a_r)m(t) \end{aligned} \quad (2.13)$$

Jika $m(t)$ disimbolkan dengan μ , dan karena t terletak di sebelah kanan dari derajat keanggotaan yang bernilai 1 maka dapat disimbolkan dengan $\bar{t}$, sehingga persamaan (2.4) dapat ditulis ulang dengan

$$\bar{t}(\mu) = a_r + (a_0 - a_r)\mu \quad (2.14)$$

Keterangan :

$\bar{t}(\mu)$: Nilai t monoton terbatas turun dengan derajat keanggotaan μ

μ : Derajat keanggotaan, $0 \leq \mu \leq 1$

a_0 : Anggota himpunan *crisp* t yang berderajat 0 terletak di sebelah tengah

a_r : Anggota himpunan *crisp* t yang berderajat 0 terletak di sebelah kanan

Contoh 2.5:

Ketika dalam keadaan normal, suhu tubuh manusia berada pada suhu 37° Celsius. Namun, secara umum suhu tubuh manusia dalam keadaan normal berada pada selang tertutup $[36, 38]$. Jika pernyataan ini dinyatakan dengan Definisi derajat keanggotaan (berdasarkan persamaan (2.3) dan (2.5)) bahwa suhu tubuh terhadap suhu tubuh manusia secara normal maka dapat dituliskan sebagai berikut.

$$A = \begin{cases} \bar{A}(\mu) = 36 + \mu \\ \underline{A}(\mu) = 38 - \mu \end{cases}$$

Selain representasi segitiga, juga terdapat representasi yang lainnya. Dalam merepresentasikan fungsi keanggotaan fuzzy, fungsi keanggotaan fuzzy dapat berdasarkan informasi yang telah didapatkan dan dikumpulkan dari pakar masalah yang bersangkutan. Sehingga dalam merepresentasikan fungsi keanggotaan fuzzy sangat beragam dan tidak terbatas pada representasi segitiga.

2.6.4 α – cuts

Definisi 11:

α -cuts adalah himpunan dari himpunan fuzzy A yang mempunyai derajat keanggotaan lebih dari atau sama dengan derajat keanggotaan yang ditentukan yang dapat didefinisikan dengan $A_\alpha = \{x \in X, \mu_A(x) \geq \alpha\}$. Selain itu juga terdapat *strong α -cuts*, yakni himpunan dari himpunan fuzzy A yang mempunyai derajat keanggotaan lebih dari derajat keanggotaan yang ditentukan atau dengan kata lain $A'_\alpha = \{x \in X, \mu_A(x) > \alpha\}$ (Dubbois, 1980:19).

Contoh 2.6:

Berdasarkan contoh (2.4), dapat ditentukan α -cuts dan *strong α -cuts* 0,4 adalah $A_{0,4} = \{0,5;0,7;0,8;0,9\}$ dan $A'_{0,4} = \{0,5;0,7;0,8;0,9\}$.

Definisi 12:

Support dari suatu himpunan fuzzy A dalam semesta himpunan X adalah himpunan *crisp* yang semua bagian dari X mempunyai derajat keanggotaan tidak nol di A . Sebenarnya *support* A adalah sama

dengan *strong α -cuts* A , untuk $\alpha = 0$. *Support* disimbolkan dengan $S(A)$ atau $\sup(A)$ (Klir dan Yuan, 1995:21).

Definisi 13:

Tinggi ($h(A)$) pada himpunan fuzzy A adalah derajat keanggotaan terbesar dari anggota di himpunan tersebut

$$h(A) = \sup_{x \in X} A(x)$$

(Klir dan Yuan, 1995:21).

Definisi 14:

Sebuah himpunan fuzzy A dikatakan normal jika $h(A) = 1$, dan dikatakan subnormal jika $h(A) < 1$ (Klir dan Yuan, 1995:21).

2.6.5 Bilangan Fuzzy

Definisi 15:

Bilangan fuzzy adalah himpunan fuzzy A di R yang memenuhi tiga sifat di bawah ini.

- a. A adalah himpunan fuzzy normal.
- b. A_α adalah selang tertutup pada setiap $\alpha \in (0,1]$.
- c. *Support* A , A_0' adalah terbatas.

Berdasarkan definisi bilangan fuzzy di atas, dapat diperjelas bahwa A dikatakan himpunan fuzzy normal jika A mempunyai anggota yang berderajat keanggotaan 1. α -cuts dari himpunan fuzzy A mempunyai derajat keanggotaan di dalam selang tertutup dengan $\alpha \in (0,1]$. Sedangkan *support* dari himpunan fuzzy A hanya terdapat

pada anggota dari himpunan fuzzy A yang mempunyai derajat keanggotaan lebih dari 0 dan kurang dari sama dengan 1.

Bilangan fuzzy yang paling banyak dipakai dalam aplikasi adalah bilangan fuzzy dengan fungsi keanggotaan segitiga, yang disebut bilangan fuzzy segitiga, dan bilangan fuzzy dengan fungsi keanggotaan trapesium yang disebut bilangan fuzzy trapesium. Kedua jenis bilangan fuzzy tersebut memenuhi sifat bilangan fuzzy (Susilo, 2006: 112).

Sehingga dalam penelitian ini dipergunakan bilangan fuzzy segitiga.

Definisi 16:

Bilangan fuzzy segitiga adalah bilangan fuzzy dengan fungsi keanggotaan representasi segitiga. Bilangan fuzzy segitiga didefinisikan dengan vektor (a_l, a_0, a_r) . Ada bilangan *crisp* riil a dapat dikatakan suatu bilangan fuzzy segitiga khusus dengan angka $a_l = a_0 = a_r$ (Wang dkk, 2010:48).

Pada referensi yang lainnya, Definisi 16 dikenal dengan representasi derajat keanggotaan segitiga. Namun menurut Wang (2010) berdasarkan representasi derajat keanggotaan segitiga yang telah ada dapat diperluas dengan perluasan definisi sebagai bilangan fuzzy segitiga yang dituliskan sebagai vektor yang mempunyai arah di a_0 yang dapat dilihat dari arah kiri yakni dari a_l dan dari arah kanan yakni arah a_r untuk a_0, a_l, a_r adalah bagian dari bilangan riil *crisp*. Untuk bilangan *crisp* a juga dapat dikatakan sebagai bilangan fuzzy segitiga. Karena

dianggap bahwa $a_0 = a_l = a_r = a$ yang berarti bahwa bilangan tersebut dilihat dari arah kiri dan kanan yang tepat sama dari arah vektornya.

Bilangan fuzzy juga mengenal dengan operasi aritmetika yang sama pada *crisp* yakni penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian. Namun, yang membedakan adalah proses perhitungannya.

Diberikan A dan B yang didefinisikan sebagai bilangan fuzzy dan diberikan $*$ yang didefinisikan sebagai empat operasi dasar aritmetika. Kemudian didefinisikan sebagai himpunan fuzzy pada R , $A*B$, dengan Definisi α -cuts, $(A*B)_\alpha$ sebagai

$$(A*B)_\alpha = A_\alpha * B_\alpha$$

untuk beberapa $\alpha \in (0,1]$ (Ketika $*$ = /, harus diketahui bahwa $0 \notin B_\alpha$

untuk semua $\alpha \in (0,1]$) (Klir dan Yuan, 1995:105).

Contoh 2.7:

Diberikan bilangan fuzzy A dan B yang mempunyai fungsi keanggotaan

$$m_A(t) = \begin{cases} \frac{t+2}{2} & \text{jika } t \in [-2, 0] \\ 1-t & \text{jika } t \in [0, 1] \end{cases}$$

$$m_B(t) = \begin{cases} t-2 & \text{jika } t \in [2, 3] \\ 4-t & \text{jika } t \in [3, 4] \end{cases}$$

secara terurut. Atur $m_A(t) = \alpha$ dan pernyataan t pada bentuk α , dan didapatkan α -cuts untuk A : $A_\alpha = [-2+2\alpha, 1-\alpha]$ untuk $\alpha \in (0,1]$.

Dengan cara yang sama, maka berlaku $B_\alpha = [2 + \alpha, 4 - \alpha]$ untuk $\alpha \in (0, 1]$. Sehingga didapatkan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 (A+B)_\alpha &= A_\alpha + B_\alpha \\
 &= [((-2+2\alpha)+(2+\alpha)), ((1-\alpha)+(4-\alpha))] \\
 &= [3\alpha, 5-2\alpha] \\
 (A-B)_\alpha &= A_\alpha - B_\alpha \\
 &= [((-2+2\alpha)-(4-\alpha)), ((1-\alpha)-(2+\alpha))] \\
 &= [-6+3\alpha, -1-2\alpha] \\
 (A \cdot B)_\alpha &= A_\alpha \cdot B_\alpha \\
 &= \left[\min \begin{bmatrix} ((-2+2\alpha)(2+\alpha)) \\ ((-2+2\alpha)(4-\alpha)) \\ ((1-\alpha)(2+\alpha)) \\ ((1-\alpha)(4-\alpha)) \end{bmatrix}, \max \begin{bmatrix} ((-2+2\alpha)(2+\alpha)) \\ ((-2+2\alpha)(4-\alpha)) \\ ((1-\alpha)(2+\alpha)) \\ ((1-\alpha)(4-\alpha)) \end{bmatrix} \right] \\
 &= \left[\min \begin{bmatrix} (2\alpha^2+2\alpha-4) \\ (-2\alpha^2+10\alpha-8) \\ (-\alpha^2-\alpha+2) \\ (\alpha^2-5\alpha+4) \end{bmatrix}, \max \begin{bmatrix} (2\alpha^2+2\alpha-4) \\ (-2\alpha^2+10\alpha-8) \\ (-\alpha^2-\alpha+2) \\ (\alpha^2-5\alpha+4) \end{bmatrix} \right] \\
 &= [-2\alpha^2+10\alpha-8, \alpha^2-5\alpha+4] \\
 \left(\frac{A}{B}\right)_\alpha &= \frac{A_\alpha}{B_\alpha} \\
 &= \left[\min \left(\frac{-2+2\alpha}{2+\alpha}, \frac{-2+2\alpha}{4-\alpha}, \frac{1-\alpha}{2+\alpha}, \frac{1-\alpha}{4-\alpha} \right), \max \left(\frac{-2+2\alpha}{2+\alpha}, \frac{-2+2\alpha}{4-\alpha}, \frac{1-\alpha}{2+\alpha}, \frac{1-\alpha}{4-\alpha} \right) \right] \\
 &= \left[\frac{-2+2\alpha}{2+\alpha}, \frac{1-\alpha}{2+\alpha} \right]
 \end{aligned}$$

Untuk menentukan selang dari bentuk representasi segitiga maka derajat keanggotaan $\alpha=0$ dan $\alpha=1$ disubstitusikan ke dalam hasil dari penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian.

a. $\alpha = 0$

i. Untuk hasil penjumlahan

$$\begin{aligned} t &= 3\alpha \\ &= 0 \\ t &= 5 - 2\alpha \\ &= 5 \end{aligned}$$

ii. Untuk hasil pengurangan

$$\begin{aligned} t &= -6 + 3\alpha \\ &= -6 \\ t &= -1 - 2\alpha \\ &= -1 \end{aligned}$$

iii. Untuk hasil perkalian

$$\begin{aligned} t &= -2\alpha^2 + 10\alpha - 8 \\ &= -8 \\ t &= \alpha^2 - 5\alpha + 4 \\ &= 4 \end{aligned}$$

iv. Untuk hasil pembagian

$$\begin{aligned} t &= \frac{-2 + 2\alpha}{2 + \alpha} \\ &= \frac{-2}{2} \\ &= -1 \\ t &= \frac{1 - \alpha}{2 + \alpha} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

b. $\alpha = 1$

i. Untuk hasil penjumlahan

$$\begin{aligned} t &= 3\alpha \\ &= 3 \\ t &= 5 - 2\alpha \\ &= 3 \end{aligned}$$

ii. Untuk hasil pengurangan

$$t = -6 + 3\alpha$$

$$= -6 + 3$$

$$= -3$$

$$t = -1 - 2\alpha$$

$$= -1 - 2$$

$$= -3$$

iii. Untuk hasil perkalian

$$t = -2\alpha^2 + 10\alpha - 8$$

$$= -2 + 10 - 8$$

$$= 0$$

$$t = \alpha^2 - 5\alpha + 4$$

$$= 1 - 5 + 4$$

$$= 0$$

iv. Untuk hasil pembagian

$$t = \frac{-2 + 2\alpha}{2 + \alpha}$$

$$= \frac{-2 + 2}{2 + 1}$$

$$= \frac{0}{3}$$

$$= 0$$

$$t = \frac{1 - \alpha}{2 + \alpha}$$

$$= \frac{1 - 1}{2 + 1}$$

$$= \frac{0}{3}$$

$$= 0$$

Berdasarkan hasil dari operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian, maka dapat ditulis ulang sebagai berikut.

a. Untuk hasil penjumlahan

$$t = 3\alpha$$

$$\alpha = \frac{t}{3}$$

$$t = 5 - 2\alpha$$

$$t - 5 = -2\alpha$$

$$\frac{t-5}{-2} = \alpha$$

$$\alpha = \frac{5-t}{2}$$

b. Untuk hasil pengurangan

$$t = -6 + 3\alpha$$

$$t + 6 = 3\alpha$$

$$\alpha = \frac{t+6}{3}$$

$$t = -1 - 2\alpha$$

$$t + 1 = -2\alpha$$

$$\frac{t+1}{-2} = \alpha$$

$$\alpha = \frac{-1-t}{2}$$

c. Untuk hasil perkalian

$$t = -2\alpha^2 + 10\alpha - 8$$

$$t = 2(-\alpha^2 + 5\alpha - 4)$$

$$\frac{t}{2} = -\alpha^2 + 5\alpha - 4$$

$$\alpha = \frac{5 - \sqrt{9 - 2t}}{2}$$

$$t = \alpha^2 - 5\alpha + 4$$

$$\frac{t}{2} = \frac{1}{2}(\alpha^2 - 5\alpha + 4)$$

$$\alpha = \frac{5 - \sqrt{9 + 4t}}{2}$$

d. Untuk hasil pembagian

$$\begin{aligned}
 t &= \frac{-2+2\alpha}{2+\alpha} \\
 2t+t\alpha &= -2+2\alpha \\
 2t-2 &= \alpha(2-t) \\
 \alpha &= \frac{2t-2}{2-t} \\
 t &= \frac{1-\alpha}{2+\alpha} \\
 2t+t\alpha &= 1-\alpha \\
 2t-1 &= \alpha(-1-t) \\
 \alpha &= \frac{1-2t}{t+1}
 \end{aligned}$$

Sehingga berdasarkan selang representasi segitiga serta penulisan ulang dari hasil perhitungan penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian maka didapat ditulis ulang sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 m_{A+B}(t) &= \begin{cases} \frac{t}{3} & \text{jika } t \in [0, 3] \\ \frac{5-t}{2} & \text{jika } t \in [3, 5] \end{cases} \\
 m_{A-B}(t) &= \begin{cases} \frac{t+6}{3} & \text{jika } t \in [-6, -3] \\ \frac{-1-t}{2} & \text{jika } t \in [-3, -1] \end{cases} \\
 m_{A \cdot B}(t) &= \begin{cases} \frac{5-\sqrt{9-2t}}{2} & \text{jika } t \in [-8, 0] \\ \frac{5-\sqrt{9+4t}}{2} & \text{jika } t \in [0, 4] \end{cases} \\
 m_{\frac{A}{B}}(t) &= \begin{cases} \frac{2t+2}{2-t} & \text{jika } t \in [-1, 0] \\ \frac{1-2t}{1+t} & \text{jika } t \in [0, 0.5] \end{cases}
 \end{aligned}$$

(Wang dkk, 2010:53-55).

2.6.6 Persamaan Fuzzy

Definisi 16:

Persamaan fuzzy adalah kombinasi dari bilangan fuzzy dan operasi aritmetika (Klir dan Yuan, 1995:114).

Contoh 2.8:

Misal diberikan suatu persamaan $A \cdot X = B$. Pada persamaan tersebut, A dan B merupakan bilangan fuzzy segitiga sebagai berikut.

$$A(x) = \begin{cases} x-3 & \text{untuk } 3 \leq x \leq 4 \\ 5-x & \text{untuk } 4 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

$$B(x) = \begin{cases} \frac{x-12}{8} & \text{untuk } 12 \leq x \leq 20 \\ \frac{32-x}{12} & \text{untuk } 20 \leq x \leq 32 \end{cases}$$

Berdasarkan representasi dari A dan B maka dapat ditulis ulang dengan

a. Untuk representasi A

$$\alpha = x - 3$$

$$x = \alpha + 3$$

$$\alpha = 5 - x$$

$$x = 5 - \alpha$$

b. Untuk representasi B

$$\alpha = \frac{x-12}{8} \quad \alpha = \frac{32-x}{12}$$

$$8\alpha = x - 12 \quad 12\alpha = 32 - x$$

$$x = 8\alpha + 12 \quad x = 32 - 12\alpha$$

Maka dari representasi A dan B didapatkan ${}^{\alpha}A = [\alpha + 3, 5 - \alpha]$ dan

${}^{\alpha}B = [8\alpha + 12, 32 - 12\alpha]$. Lalu diuji bahwa

$$\frac{8\alpha+12}{\alpha+3} \leq \frac{32-12\alpha}{5-\alpha}$$

Oleh karena itu,

$${}^{\alpha}X = \left[\frac{8\alpha+12}{\alpha+3}, \frac{32-12\alpha}{5-\alpha} \right]$$

untuk setiap $\alpha \in (0,1]$. Dan mudah dipastikan bahwa $\alpha \leq \beta$ yang

berimplikasi ${}^{\beta}X \subseteq {}^{\alpha}X$ untuk setiap pasangan $\alpha, \beta \in (0,1]$. Ketika

$\alpha = 0$ disubstitusikan ke dalam ${}^{\alpha}X$ didapatkan $x = 4$ dan $x = \frac{32}{5}$. Ketika

$\alpha = 1$ disubstitusikan ke dalam ${}^{\alpha}X$ didapatkan $x = 5$ dan $x = 5$.

Walaupun begitu, selesaian dari persamaan fuzzy adalah

$$\begin{aligned} x &= \frac{8\alpha+12}{\alpha+3} \\ \alpha x + 3x &= 8\alpha+12 \\ \alpha(x-8) &= 12-3x \\ \alpha &= \frac{12-3x}{x-8} \\ x &= \frac{32-12\alpha}{5-\alpha} \\ 5x - \alpha x &= 32-12\alpha \\ \alpha(-x+12) &= 32-5x \\ \alpha &= \frac{32-5x}{12-x} \end{aligned}$$

Maka berdasarkan nilai selang dan selesaian dari persamaan fuzzy, representasi X dapat ditulis sebagai berikut.

$$X = \bigcup_{\alpha \in (0,1]} {}^{\alpha}X = \begin{cases} \frac{12-3x}{x-8} & \text{untuk } 4 \leq x \leq 5 \\ \frac{32-5x}{12-x} & \text{untuk } 5 \leq x \leq \frac{32}{5} \end{cases}$$

Atau berdasarkan nilai selang yang didapatkan, bilangan fuzzy segitiga X dapat ditulis sebagai berikut.

$$X = \left(4, 5, \frac{32}{5}\right)$$

Sehingga bentuk persamaan yang dimaksud adalah $\left(4, 5, \frac{32}{5}\right) A = B$

(Klir dan Yuan, 1995:116-117).

2.7 Kemudahan-kemudahan dalam Islam

Islam adalah agama rahmatan lil-alamin. Rahmat yang dapat dirasakan oleh seluruh makhluk. Dalam ajaran agama Islam, Islam tidak mengajarkan sesuatu yang sifatnya memaksa. Akan tetapi jika manusia tidak dapat melaksanakan seperti yang diperintahkan, Allah memberikan kemudahan (*rukhsah*) dalam segala urusannya. Dalam hal ini Allah berfirman dalam QS. Al-Insyirah ayat 6.

إِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٦﴾

Artinya: “Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan” (QS. Al-Insyirah, 94:6).

Ayat keenam dari surat Al-Insyirah ini Allah menegaskan bahwa bersama kesulitan itu ada kemudahan. Ibnu Jarit meriwayatkan dari al-Hasan, dia berkata bahwa : “Nabi saw pernah keluar rumah pada suatu hari dalam keadaan senang dan gembira, dan beliau juga dalam keadaan tertawa seraya bersabda”

لَنْ يَغْلِبَ عُسْرٌ يُسْرَيْنِ، لَنْ يَغْلِبَ عُسْرٌ يُسْرَيْنِ، فَإِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا إِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا

Artinya: “Satu kesulitan itu tidak akan pernah mengalahkan dua kemudahan, satu kesulitan itu tidak akan pernah mengalahkan dua kemudahan, karena

bersama kesulitan itu pasti terdapat kemudahan, sesungguhnya bersama kesulitan itu terdapat kemudahan”(HR. Ibnu Jarit).

Dengan demikian, dapat dikatakan bahwa kesulitan itu dapat diketahui pada dua keadaan, di mana kalimatnya dalam bentuk *mufrad* (tunggal). Sedangkan kemudahan (*al-yusr*) dalam bentuk *nakirah* (tidak ada ketentuannya) sehingga bilangannya bertambah banyak. Oleh karena itu, beliau bersabda, “Satu kesulitan itu tidak akan pernah mengalahkan dua kemudahan” (Syaiikh, 2007:498).

Berita dari Allah pasti sempurna keakuratannya. Janji-Nya tidak akan mungkir. Setiap kali engkau menghadapi tunggulah datangnya kemudahan. Dalam urusan syariat tentu sudah jelas (Al-Utsaimin, 462). Misalnya dalam hal *thaharah* (bersuci) khususnya dalam urusan wudhu. *Thaharah* adalah hal yang paling mendasar yang wajib diketahui oleh setiap muslim. Karena walaupun seorang muslim rajin beribadah namun, dalam badan atau pakaian atau tempat yang dipergunakannya tidak suci atau terdapat najis maka ibadahnya akan gugur.

Begitu juga tentang wudhu. Wudhu merupakan hal yang paling utama dan terpenting sebelum melaksanakan ibadah. Perintah untuk melaksanakan wudhu turun bersamaan dengan turunnya perintah untuk shalat lima waktu pada satu tahun setengah sebelum tahun hijriyah. Allah berfirman dalam QS. Al-Maidah ayat 6:

يَا أَيُّهَا الَّذِينَ آمَنُوا إِذَا قُمْتُمْ إِلَى الصَّلَاةِ فَاغْسِلُوا وُجُوهَكُمْ وَأَيْدِيَكُمْ إِلَى الْمَرَافِقِ
وَامْسَحُوا بِرُءُوسِكُمْ وَأَرْجُلَكُمْ إِلَى الْكَعْبَيْنِ وَإِنْ كُنْتُمْ جُنُبًا فَاطَّهَّرُوا وَإِنْ كُنْتُمْ مَرْضَى
أَوْ عَلَى سَفَرٍ أَوْ جَاءَ أَحَدٌ مِنْكُم مِّنَ الْغَايِطِ أَوْ لَمَسْتُمُ النِّسَاءَ فَلَمْ يَجِدُوا مَاءً فَتَيَمَّمُوا

صَعِيدًا طَيِّبًا فَأَمْسَحُوا بِوُجُوهِكُمْ وَأَيْدِيكُمْ مِّنْهُ مَا يُرِيدُ اللَّهُ لِيَجْعَلَ عَلَيْكُمْ مِّنْ حَرَجٍ وَلَٰكِنْ يُرِيدُ لِيُطَهَّرَكُمْ وَلِيُتِمَّ نِعْمَتَهُ عَلَيْكُمْ لَعَلَّكُمْ تَشْكُرُونَ ﴿٦﴾

Artinya: “Hai orang-orang yang beriman, apabila kamu hendak mengerjakan shalat, maka basuhlah mukamu dan tanganmu sampai dengan siku, dan sapulah kepalamu dan (basuh) kakimu sampai dengan kedua mata kaki, dan jika kamu junub maka mandilah, dan jika kamu sakit atau dalam perjalanan atau kembali dari tempat buang air (kakus) atau menyentuh perempuan, lalu kamu tidak memperoleh air, maka bertayammumlah dengan tanah yang baik (bersih); sapulah mukamu dan tanganmu dengan tanah itu. Allah tidak hendak menyulitkan kamu, tetapi Dia hendak membersihkan kamu dan menyempurnakan nikmat-Nya bagimu, supaya kamu bersyukur” (QS. Al-Maidah. 4:6).

Sehingga ayat ini menegaskan bahwa ketika hendak shalat dan sedang dalam berhadhas, maka sebagai umat Islam diperintahkan untuk berwudhu. Begitu juga jika dalam keadaan junub, maka diwajibkan mandi besar dan segera berwudhu untuk melaksanakan shalat. Menurut hadits yang diriwayatkan secara marfu’ oleh Ahmad, Bukhari dan Muslim dari Abu Hurairah:

لَا يَقْبَلُ اللَّهُ صَلَاةَ أَحَدِكُمْ إِذَا أَحْدَثَ حَتَّى يَتَوَضَّأَ
Artinya: “Allah takkan menerima shalat salah seorang dari kalian, apabila dia telah hadas, kecuali dia berwudhu” (HR. Ahmad, Bukhari dan Muslim).

وَأَنْ كُنْتُمْ جُنُبًا فَاطَّهَّرُوا

Al-Junub, adalah kata yang dipakai sebagai *mufrad* (tunggal), *musanna* dan jamak. Juga sebagai *muzakkar* dan *muannas*. Sedangkan yang dimaksud ialah hubungan kelamin atau persetubuhan. Maksud ayat, dan apabila kalian melakukan persetubuhan (janabat) sebelum mengerjakan shalat, kemudian kamu hendak melakukannya, maka bersucilah dulu dari janabat itu dengan membasuh sekujur badan sebelum kamu memasuki shalat yang kamu kehendaki itu. Termasuk dalam arti persetubuhan ialah keluarnya mani karena mimpi. Itupun menurut syara’ disebut janabat. Dalam sebuah hadits dikatakan:

أَنَّمَا الْمَاءُ مِنَ الْمَاءِ

Artinya: “*Sesungguhnya air itu karena air*”(HR. Muslim)

Maksudnya, sesungguhnya air (mandi) itu wajib dilakukan setelah adanya air (mani) yang memancar ke luar dari seseorang dengan sebab apapun (Al-Maraghi, 1993:117-120).

Ayat ini juga menerangkan tentang keringanan (*rukhsah*) untuk meninggalkannya ketika mengalami kesulitan atau tidak mampu melakukannya karena sakit, perjalanan, buang air besar atau kecil, bersentuhan. Untuk dapat melaksanakan ibadah, maka diperbolehkan untuk melaksanakan bersuci dengan cara lain, yakni dengan tayammum.

Menurut Rasjid (1992:51) tayammum ialah mengusapkan tanah ke muka dan kedua tangan sampai siku dengan beberapa syarat. Tayammum adalah pengganti wudhu atau mandi sebagai *rukhsah* (keringanan) untuk orang yang tidak dapat memakai air karena beberapa halangan seperti:

1. *Uzur* karena sakit. Kalau memakai air dikhawatirkan bertambah sakitnya atau lambat sembuhnya menurut keterangan dokter atau dukun yang telah berpengalaman tentang penyakit serupa itu (Rasjid, 1992:51).
2. Karena dalam perjalanan.
3. Apabila seseorang tidak menemukan air yang akan digunakan untuk berwudhu, mandi jinabah, mandi dari haid, atau mandi dari nifas. Hal ini berlaku bagi orang yang memang tidak menemukan air sama sekali. Menemukannya tetapi air tersebut sangat dibutuhkan buat keperluan minum sehari-hari, buat keperluan minum orang lain atau binatang, atau dibutuhkan untuk membuat adonan dan untuk masak. Demikian pula air

tersebut hanya sedikit sehingga tidak cukup buat wudhu ataupun buat mandi jinabah (Ayyub, 2007:82).

Rasullullah saw bersabda:

عن أبي ذرٍّ: قال رسول الله صلى الله عليه وسلم: التُّرابُ بُ كافيُّكَ ولو لم تجد الماءَ عشرَ سنينَ عشرَ سنينَ فإِذا وَجَدْتَ الماءَ فامْسِهْ جِلْدَكَ

Artinya: “Dari Abu Dzar, Rasullullah saw telah berkata: tanah itu cukup bagimu untuk bersuci walau engkau tidak mendapat air sampai sepuluh tahun, tetapi apabila engkau beroleh air, hendaklah engkau sentuhkan air itu ke kulitmu” (HR. Tirmidzi) (Rasjid, 1992:55).

Adapun syarat-syarat tayammum adalah sebagai berikut:

1. Sudah masuk waktu shalat
2. Sudah diusahakan mencari air tetapi tidak dapat, waktu sudah masuk
3. Dengan tanah suci dan bedebu
4. Menghilangkan najis

Sedangkan rukunnya tayammum adalah

1. Niat
2. Mengusap muka dengan tanah
3. Mengusap kedua tangan sampai ke siku dengan tanah
4. Menertibkan rukun-rukun

Dan sunnah dari tayammum sendiri adalah

1. Membaca bismillah
2. Menghembuskan tanah dari dua telapak tangan supaya tanah yang di atas telapak tangan menjadi tipis
3. Membaca dua kalimat syahadat sesudah selesai tayammum sebagaimana selesai berwudhu

Namun suatu ketika tayammum akan batal dengan apa-apa yang membatalkan wudhu juga batal karena ada air yang bertayammum karena

tidak ada air dan karena mampu menggunakan air bagi yang bertayammum tidak mampu menggunakan air. Sedangkan shalatnya yang sudah dikerjakan tetap sah tidak perlu mengulangnya.

عن أبي سعيد الخدري رضي الله عنه قال: خرج رجلان في سفر فحضر ت الصلاة وليس معهما ماء، فتيمما صعيدا طيبا فصليا، ثم وجدا الماء في الوقت فأعاد فأ حد هما الوضوء و الصلاة ولم يعد الآخر، ثم أتيا رسول الله صلى الله عليه وسلم فذكرا ذلك له، قال: للذي لم يعد أصبت السنة وأجزأتك صلاتك، وقال: للذي توضأ وأعاد: لك الأجر مرتين

Artinya: “*Dari Abi Sa’id al-khudri r.a katanya: Ada orang keluar melaukan safar lalu tibalah waktu shalat sementara keduanya tidak membawa air maka mereka bertayammum dengan permukaan tanah yang bersih, lalu shalat. Kemudian pada waktu itu mereka berdua mendapatkan air. Kemudian seorang dari keduanya mengulangi wudhu dan shalat, sedangkan yang satunya lagi tidak mengulangnya. Kemudian mereka berdua datang kepada Rasullullah saw, lalu menceritakan hal itu kepada Beliau. Maka beliau bersabda kepada orang yang tidak mengulangi (shalatnya), ‘Engkau telah sesuai sunnah (ku) dan shalatmu sudah cukup bagimu’ dan kepada orang yang berwudhu dan mengulangi (shalatnya) beliau bersabda, ‘Engkau mendapatkan dua pahala’*” (HR. Abu Dawud) (Al-Khalafi, 2006:120-121).

Selain sebagai awal dari suatu rangkaian ibadah, wudhu juga memberikan manfaat lain bagi yang melakukannya. Manfaat wudhu adalah sebagai berikut:

1. Memberikan kesegaran dan semangat serta menghilangkan dari kelelahan dan keletihan yang diakibatkan oleh hadats atau pekerjaan lain yang memayahkan
2. Terhindar dari penyakit
3. Memuliakan diri seorang muslim, baik di hadapan keluarga dan masyarakat tempat tinggalnya

(Maraghi, 1993:123).

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Metode Broyden pada Sistem Persamaan Fuzzy Nonlinier

Penyelesaian sistem persamaan fuzzy nonlinier dengan menggunakan metode Broyden, terlebih dahulu ditentukan suatu nilai sebagai nilai awal agar dapat dilakukannya iterasi. Misal diberikan sistem persamaan fuzzy nonlinier sebagai berikut,

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

sistem (3.1) tersebut harus diubah dalam bentuk parameter (3.2), sehingga didapatkan sistem persamaan yang baru (3.2) seperti berikut.

$$F(\underline{x}_1, \bar{x}_1, \dots, \underline{x}_n, \bar{x}_n; \mu) = \begin{bmatrix} \underline{f}_1(\underline{x}_1, \bar{x}_1, \dots, \underline{x}_n, \bar{x}_n; \mu) \\ \bar{f}_1(\underline{x}_1, \bar{x}_1, \dots, \underline{x}_n, \bar{x}_n; \mu) \\ \vdots \\ \underline{f}_i(\underline{x}_1, \bar{x}_1, \dots, \underline{x}_n, \bar{x}_n; \mu) \\ \bar{f}_i(\underline{x}_1, \bar{x}_1, \dots, \underline{x}_n, \bar{x}_n; \mu) \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$\forall \mu \in [0,1], \mu \in R$ dan $\forall i = 1, 2, \dots, n$. Dari sistem persamaan fuzzy nonlinier (3.1), maka didapatkan persamaan fuzzy nonlinier dalam bentuk parameter (3.2) sejumlah $2n$. Selanjutnya untuk menentukan titik potong kurva, sistem persamaan fuzzy nonlinier (3.2) dapat diganti dengan nilai derajat keanggotaannya. Kemudian dipilih $\mu = 0$ (batas bawah dari derajat keanggotaan) dan $\mu = 1$ (batas atas dari derajat keanggotaan). Selain derajat keanggotaan $\mu = 0$ dan $\mu = 1$, dapat ditentukan titik potong kurva lainnya

dengan derajat keanggotaan $0 \leq \mu \leq 1$. Dari titik potong kurva ini, maka didapatkan suatu titik yang akan menjadi tujuan dari penyelesaian sistem persamaan fuzzy nonlinier. Untuk titik tersebut haruslah memenuhi suatu syarat, yakni $\underline{x}_n(0) \leq \bar{x}_n(1) \leq \bar{x}_n(0)$ atau $\underline{x}_n(0) \leq \underline{x}_n(1) \leq \bar{x}_n(0)$. Karena daerah yang memiliki derajat keanggotaan dengan nilai 1 hanya satu bagian saja, maka mengakibatkan $\underline{x}_n(1) = \bar{x}_n(1)$. Dan nilai awal untuk penyelesaian sistem persamaan fuzzy nonlinier dapat ditulis sebagai berikut.

$$x = (\underline{x}_n(0), \underline{x}_n(1), \bar{x}_n(0))$$

Dengan $\forall n = 0, 1, \dots$. Setelah didapatkan titik potong kurva dari sistem persamaan fuzzy nonlinier, maka dapat diselesaikan dengan menggunakan nilai awal yang sama atau mendekati dengan titik potong kurva.

Berdasarkan nilai awal yang didapatkan, maka dapat disubstitusikan dalam sistem persamaan fuzzy nonlinier (3.2) agar mendapatkan solusinya. Sehingga algoritma metode Broyden pada permasalahan sistem persamaan fuzzy nonlinier adalah sebagai berikut.

- a. Menentukan matriks fungsi sistem persamaan dan matriks Jacobian dari sistem persamaan fuzzy nonlinier (3.2)

$$F(\underline{x}_n^{(k)}, \bar{x}_n^{(k)}; \mu) = \begin{bmatrix} \underline{f}_n(\underline{x}_n^{(k)}, \bar{x}_n^{(k)}; \mu) \\ \bar{f}_n(\underline{x}_n^{(k)}, \bar{x}_n^{(k)}; \mu) \end{bmatrix}$$

$$A_F(\underline{x}_n^{(k)}, \bar{x}_n^{(k)}; \mu) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \underline{x}_n} \underline{f}_n(\underline{x}_n^{(k)}, \bar{x}_n^{(k)}; \mu) & \frac{\partial}{\partial \bar{x}_n} \underline{f}_n(\underline{x}_n^{(k)}, \bar{x}_n^{(k)}; \mu) \\ \frac{\partial}{\partial \underline{x}_n} \bar{f}_n(\underline{x}_n^{(k)}, \bar{x}_n^{(k)}; \mu) & \frac{\partial}{\partial \bar{x}_n} \bar{f}_n(\underline{x}_n^{(k)}, \bar{x}_n^{(k)}; \mu) \end{bmatrix}$$

b. Menyelesaikan $s_k(\mu)$

$$s_k(\mu) = -A_k \left(\underline{x}_n^{(k)}, \bar{x}_n^{(k)}; \mu \right)^{-1} F \left(\underline{x}_n^{(k)}, \bar{x}_n^{(k)}; \mu \right)$$

$$= - \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \underline{x}_n} \underline{f}_n \left(\underline{x}_n^{(k)}, \bar{x}_n^{(k)}; \mu \right) & \frac{\partial}{\partial \bar{x}_n} \underline{f}_n \left(\underline{x}_n^{(k)}, \bar{x}_n^{(k)}; \mu \right) \\ \frac{\partial}{\partial \underline{x}_n} \bar{f}_n \left(\underline{x}_n^{(k)}, \bar{x}_n^{(k)}; \mu \right) & \frac{\partial}{\partial \bar{x}_n} \bar{f}_n \left(\underline{x}_n^{(k)}, \bar{x}_n^{(k)}; \mu \right) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \underline{f}_n \left(\underline{x}_n^{(k)}, \bar{x}_n^{(k)}; \mu \right) \\ \bar{f}_n \left(\underline{x}_n^{(k)}, \bar{x}_n^{(k)}; \mu \right) \end{bmatrix}$$

c. Dari $s_k(\mu)$, kemudian menyelesaikan $x^{(k+1)}(\mu)$

$$x^{(k+1)}(\mu) = x^{(k)}(\mu) + s_k(\mu)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{x}_n^{(k+1)}(\mu) \\ \bar{x}_n^{(k+1)}(\mu) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{x}_n^{(k)}(\mu) \\ \bar{x}_n^{(k)}(\mu) \end{bmatrix} - A_k \left(\underline{x}_n^{(k)}, \bar{x}_n^{(k)}; \mu \right)^{-1} F \left(\underline{x}_n^{(k)}, \bar{x}_n^{(k)}; \mu \right)$$

d. Menyelesaikan $y_k(\mu)$

$$y_k(\mu) = F \left(x^{(k+1)} \right) - F \left(x^{(k)} \right)$$

$$= F \left(\underline{x}_n^{(k+1)}, \bar{x}_n^{(k+1)}; \mu \right) - F \left(\underline{x}_n^{(k)}, \bar{x}_n^{(k)}; \mu \right)$$

e. Mencari $A_{k+1}^{-1}(\mu)$

$$A_{k+1}^{-1}(\mu) = A_k^{-1}(\mu) + \frac{(s_k(\mu) - A_k^{-1}(\mu)y_k(\mu))s_k^t(\mu)A_k^{-1}(\mu)}{s_k^t(\mu)A_k^{-1}(\mu)s_k(\mu)}$$

f. Mengulangi langkah (b) hingga langkah (e) hingga mendapatkan $\varepsilon < 10^{-5}$

3.2 Penyelesaian Sistem Persamaan Fuzzy Nonlinier dengan Metode Broyden

Sebagai gambaran dari penyelesaian sistem persamaan fuzzy nonlinier dengan menggunakan metode Broyden, dapat diambil contoh sistem persamaan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}(1, 2, 3)x^2 + (2, 4, 6)y^2 &= (2, 3, 4) \\ (4, 5, 7)x + (1, 4, 5)y &= (1, 3, 5)\end{aligned}\quad (3.3)$$

Dari sistem persamaan fuzzy nonlinier (3.3) di atas, maka didapatkan bentuk parameternya sebagai berikut sesuai dengan sistem persamaan parameter (3.2) dan aturan pada representasi segitiga (2.12) dan (2.14). Berdasarkan persamaan (3.3) dapat dikelompokkan bahwa terdapat 2 variabel yang akan dicari, yakni variabel x dan y serta terdapat 6 bilangan fuzzy segitiga yakni $(1, 2, 3)$, $(2, 4, 6)$, $(2, 3, 4)$, $(4, 5, 7)$, $(1, 4, 5)$ dan $(1, 3, 5)$. Berdasarkan aturan representasi segitiga (2.12) dan (2.14) maka bilangan fuzzy segitiga dan variabel yang akan dicari dapat ditulis sebagai berikut.

a. Untuk bilangan fuzzy segitiga dan variabel fuzzy monoton terbatas ke atas

i. $(1, 2, 3)$

$$\begin{aligned}\bar{t}(\mu) &= a_l + (a_0 - a_l)\mu \\ \bar{t}(\mu) &= 1 + (2 - 1)\mu \\ &= 1 + \mu\end{aligned}$$

ii. $(2, 4, 6)$

$$\begin{aligned}\bar{t}(\mu) &= a_l + (a_0 - a_l)\mu \\ \bar{t}(\mu) &= 2 + (4 - 2)\mu \\ &= 2 + 2\mu\end{aligned}$$

iii. $(2, 3, 4)$

$$\begin{aligned}\bar{t}(\mu) &= a_l + (a_0 - a_l)\mu \\ \bar{t}(\mu) &= 2 + (3 - 2)\mu \\ &= 2 + \mu\end{aligned}$$

iv. $(4,5,7)$

$$\bar{t}(\mu) = a_l + (a_0 - a_l)\mu$$

$$\begin{aligned}\bar{t}(\mu) &= 4 + (5 - 4)\mu \\ &= 4 + \mu\end{aligned}$$

v. $(1,4,5)$

$$\bar{t}(\mu) = a_l + (a_0 - a_l)\mu$$

$$\begin{aligned}\bar{t}(\mu) &= 1 + (4 - 1)\mu \\ &= 1 + 3\mu\end{aligned}$$

vi. $(1,3,5)$

$$\bar{t}(\mu) = a_l + (a_0 - a_l)\mu$$

$$\begin{aligned}\bar{t}(\mu) &= 1 + (3 - 1)\mu \\ &= 1 + 2\mu\end{aligned}$$

vii. x

Karena x adalah suatu variabel yang berbentuk bilangan fuzzy segitiga, maka x ditulis langsung sebagai $\underline{x}(\mu)$

viii. y

Karena y adalah suatu variabel yang berbentuk bilangan fuzzy segitiga, maka y ditulis langsung sebagai $\underline{y}(\mu)$

b. Untuk bilangan fuzzy segitiga dan variabel fuzzy monoton terbatas ke bawah

i. $(1,2,3)$

$$\underline{t}(\mu) = a_r + (a_0 - a_r)\mu$$

$$\begin{aligned}\underline{t}(\mu) &= 3 + (2 - 3)\mu \\ &= 3 - \mu\end{aligned}$$

ii. $(2,4,6)$

$$\underline{t}(\mu) = a_r + (a_0 - a_r)\mu$$

$$\begin{aligned}\underline{t}(\mu) &= 6 + (4 - 6)\mu \\ &= 6 - 2\mu\end{aligned}$$

iii. $(2,3,4)$

$$\underline{t}(\mu) = a_r + (a_0 - a_r)\mu$$

$$\begin{aligned}\underline{t}(\mu) &= 4 + (3 - 4)\mu \\ &= 4 - \mu\end{aligned}$$

iv. $(4,5,7)$

$$\underline{t}(\mu) = a_r + (a_0 - a_r)\mu$$

$$\begin{aligned}\underline{t}(\mu) &= 7 + (5 - 7)\mu \\ &= 7 - 2\mu\end{aligned}$$

v. $(1,4,5)$

$$\underline{t}(\mu) = a_r + (a_0 - a_r)\mu$$

$$\begin{aligned}\underline{t}(\mu) &= 5 + (4 - 5)\mu \\ &= 5 - \mu\end{aligned}$$

vi. $(1,3,5)$

$$\underline{t}(\mu) = a_r + (a_0 - a_r)\mu$$

$$\begin{aligned}\underline{t}(\mu) &= 5 + (3 - 5)\mu \\ &= 5 - 2\mu\end{aligned}$$

vii. x

Karena x adalah suatu variabel yang berbentuk bilangan fuzzy segitiga, maka x ditulis langsung sebagai $\bar{x}(\mu)$.

viii. y

Karena y adalah suatu variabel yang berbentuk bilangan fuzzy segitiga, maka y ditulis langsung sebagai $\bar{y}(\mu)$.

Sehingga dari uraian di atas, maka sistem persamaan fuzzy nonlinier (3.3) mempunyai bentuk parameter (3.4) sebagai berikut.

$$\begin{cases} (1+\mu)\underline{x}^2(\mu) + (2+2\mu)\underline{y}^2(\mu) = (2+\mu) \\ (3-\mu)\bar{x}^2(\mu) + (6-2\mu)\bar{y}^2(\mu) = (4-\mu) \\ (4+\mu)\underline{x}(\mu) + (1+3\mu)\underline{y}(\mu) = (1+2\mu) \\ (7-2\mu)\bar{x}(\mu) + (5-\mu)\bar{y}(\mu) = (5-2\mu) \end{cases} \quad (3.4)$$

Kemudian ambil $\mu = 0$ dan $\mu = 1$ untuk disubstitusikan pada bentuk parametrik (3.4).

$$\begin{cases} \underline{x}^2(0) + 2\underline{y}^2(0) = 2 \\ 3\bar{x}^2(0) + 6\bar{y}^2(0) = 4 \\ 4\underline{x}(0) + \underline{y}(0) = 1 \\ 7\bar{x}(0) + 5\bar{y}(0) = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} 2\underline{x}^2(1) + 4\underline{y}^2(1) = 3 \\ 2\bar{x}^2(1) + 4\bar{y}^2(1) = 3 \\ 5\underline{x}(1) + 4\underline{y}(1) = 3 \\ 5\bar{x}(1) + 4\bar{y}(1) = 3 \end{cases} \quad (3.5)$$

Berdasarkan sistem persamaan (3.5) maka dapat dikelompokkan menjadi 4 sistem persamaan fuzzy nonlinier (3.6) sebagai berikut.

$$\begin{cases} \underline{x}^2(0) + 2\underline{y}^2(0) = 2 \\ 4\underline{x}(0) + \underline{y}(0) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2\underline{x}^2(1) + 4\underline{y}^2(1) = 3 \\ 5\underline{x}(1) + 4\underline{y}(1) = 3 \end{cases} \quad (3.6)$$

$$\begin{cases} 3\bar{x}^2(0) + 6\bar{y}^2(0) = 4 \\ 7\bar{x}(0) + 5\bar{y}(0) = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} 2\bar{x}^2(1) + 4\bar{y}^2(1) = 3 \\ 5\bar{x}(1) + 4\bar{y}(1) = 3 \end{cases}$$

Dari sistem persamaan fuzzy nonlinier (3.6) dapat diselesaikan dengan menggunakan penyelesaian analitik. Sehingga didapatkan selesaian analitik untuk sistem persamaan fuzzy nonlinier (3.6) sebagai berikut.

- a. Untuk derajat keanggotaan 0
- i. Untuk sistem persamaan fuzzy nonlinier (3.6) dalam bentuk monoton terbatas naik

Diambil persamaan yang kedua, kemudian dibuat dalam bentuk $\underline{y}(0)$

$$\begin{aligned}4\underline{x}(0) + \underline{y}(0) &= 1 \\ \underline{y}(0) &= 1 - 4\underline{x}(0)\end{aligned}$$

Setelah didapatkan bentuk $\underline{y}(0)$ maka selanjutnya disubstitusikan dalam persamaan pertama.

$$\begin{aligned}\underline{x}(0)^2 + 2\underline{y}(0)^2 &= 2 \\ \underline{x}(0)^2 + 2(1 - 4\underline{x}(0))^2 &= 2 \\ \underline{x}(0)^2 + 2(1 - 8\underline{x}(0) + 16\underline{x}(0)^2) &= 2\end{aligned}$$

$$33\underline{x}(0)^2 - 16\underline{x}(0) + 2 = 2$$

$$33\underline{x}(0)^2 - 16\underline{x}(0) = 0$$

$$\underline{x}(0)(33\underline{x}(0) - 16) = 0$$

maka diperoleh $\underline{x}(0) = 0$ atau

$$33\underline{x}(0) - 16 = 0$$

$$\underline{x}(0) = \frac{16}{33}$$

Sehingga didapatkan nilai $\underline{x}(0) = 0$ atau $\underline{x}(0) = \frac{16}{33}$. Setelah nilai

$\underline{x}(0)$ diperoleh, maka $\underline{x}(0)$ disubstitusikan ke dalam persamaan yang kedua.

$$4\underline{x}(0) + \underline{y}(0) = 1$$

$$4(0) + \underline{y}(0) = 1$$

$$0 + \underline{y}(0) = 1$$

$$\underline{y}(0) = 1$$

$$4\underline{x}(0) + \underline{y}(0) = 1$$

$$4\left(\frac{16}{33}\right) + \underline{y}(0) = 1$$

$$\underline{y}(0) = 1 - \frac{64}{33}$$

$$\underline{y}(0) = -\frac{31}{33}$$

Maka selesaian yang memenuhi adalah $(\underline{x}(0), \underline{y}(0)) = (0, 1)$ dan

$$(\underline{x}(0), \underline{y}(0)) = \left(\frac{16}{33}, -\frac{31}{33}\right).$$

- ii. Untuk sistem persamaan fuzzy nonlinier (3.6) dalam bentuk monoton terbatas turun

Diambil persamaan yang kedua, kemudian dibuat dalam bentuk $\bar{y}(0)$

$$7\bar{x}(0) + 5\bar{y}(0) = 5$$

$$\bar{y}(0) = 1 - \frac{7}{5}\bar{x}(0)$$

Setelah didapatkan bentuk $\bar{y}(0)$ maka selanjutnya disubstitusikan dalam persamaan pertama.

$$3\bar{x}(0)^2 + 6\bar{y}(0)^2 = 4$$

$$3\bar{x}(0)^2 + 6\left(1 - \frac{7}{5}\bar{x}(0)\right)^2 = 4$$

$$3\bar{x}(0)^2 + 6\left(1 - \frac{14}{5}\bar{x}(0) + \frac{49}{25}\bar{x}(0)^2\right) = 4$$

$$75\bar{x}(0)^2 + 294\bar{x}(0)^2 - 420\bar{x}(0) + 50 = 0$$

$$369\bar{x}(0)^2 - 420\bar{x}(0) + 50 = 0$$

$$\bar{x}(0) = \frac{420 \pm \sqrt{420^2 - 4(369)(50)}}{2(369)}$$

$$\bar{x}(0) = 1.003133262 \text{ atau}$$

$$\bar{x}(0) = 0.135078119$$

Sehingga didapatkan nilai $\bar{x}(0) = 1.003133262$ atau

$\bar{x}(0) = 0.135078119$. Setelah nilai $\bar{x}(0)$ diperoleh, maka $\bar{x}(0)$

disubstitusikan ke dalam persamaan yang kedua.

$$7\bar{x}(0) + 5\bar{y}(0) = 5$$

$$7(1.003133262) + 5\bar{y}(0) = 5$$

$$\bar{y}(0) = 1 - \frac{7(1.003133262)}{5}$$

$$\bar{y}(0) = -0.404386566$$

$$7\bar{x}(0) + 5\bar{y}(0) = 5$$

$$7(0.135078119) + 5\bar{y}(0) = 5$$

$$\bar{y}(0) = 1 - \frac{7(0.135078119)}{5}$$

$$\bar{y}(0) = 0.810890633$$

Maka penyelesaian yang memenuhi adalah

$(\bar{x}(0), \bar{y}(0)) = (1.003133262, -0.404386566)$ dan

$(\bar{x}(0), \bar{y}(0)) = (0.135078119, 0.810890633)$.

b. Untuk derajat keanggotaan 1

Diambil persamaan yang kedua, kemudian dibuat dalam bentuk $\bar{y}(1)$

$$5\bar{x}(1) + 4\bar{y}(1) = 3$$

$$\bar{y}(1) = \frac{3}{4} - \frac{5}{4}\bar{x}(1)$$

Setelah didapatkan bentuk $\bar{y}(1)$ maka selanjutnya disubstitusikan dalam

persamaan pertama.

$$2\bar{x}(1)^2 + 4\bar{y}(1)^2 = 3$$

$$2\bar{x}(1)^2 + 4\left(\frac{3}{4} - \frac{5}{4}\bar{x}(1)\right)^2 = 3$$

$$2\bar{x}(1)^2 + 4\left(\frac{9}{16} - \frac{30}{16}\bar{x}(1) + \frac{25}{16}\bar{x}(1)^2\right) = 3$$

$$25\bar{x}(1)^2 + 8\bar{x}(1)^2 - 30\bar{x}(1) + 9 = 12$$

$$33\bar{x}(1)^2 - 30\bar{x}(1) - 3 = 0$$

$$\bar{x}(1) = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 4(11)(-1)}}{2(11)}$$

$$\bar{x}(1) = 1 \text{ atau}$$

$$\bar{x}(1) = -\frac{1}{11}$$

Sehingga didapatkan nilai $\bar{x}(1) = 1$ atau $\bar{x}(1) = -\frac{1}{11}$. Setelah nilai $\bar{x}(1)$

diperoleh, maka $\bar{x}(1)$ disubstitusikan ke dalam persamaan yang kedua.

$$5\bar{x}(1) + 4\bar{y}(1) = 3$$

$$5(1) + 4\bar{y}(1) = 3$$

$$\bar{y}(1) = \frac{3-5}{4}$$

$$\bar{y}(1) = -\frac{1}{2}$$

$$5\bar{x}(1) + 4\bar{y}(1) = 3$$

$$5\left(-\frac{1}{11}\right) + 4\bar{y}(1) = 3$$

$$\bar{y}(1) = \frac{3 + \frac{5}{11}}{4}$$

$$\bar{y}(1) = \frac{38}{44}$$

Maka penyelesaian yang memenuhi adalah $(\bar{x}(1), \bar{y}(1)) = \left(1, -\frac{1}{2}\right)$ dan

$$(\bar{x}(1), \bar{y}(1)) = \left(-\frac{1}{11}, \frac{38}{44}\right).$$

Karena bentuk sistem persamaan yang berderajat 0 dan yang berderajat 1 mempunyai bentuk yang sama, maka keduanya mempunyai selesaian yang sama.

Berdasarkan penyelesaian yang didapatkan dari sistem persamaan (3.6), maka diperoleh kombinasi bilangan fuzzy segitiga sebagai berikut.

i. Kombinasi pertama

$$\begin{aligned}(x, y) &= \left((\underline{x}(0), \bar{x}(1), \bar{x}(0)), (\underline{y}(0), \bar{y}(1), \bar{y}(0)) \right) \\ &= \left((0, 1, 1.003133262), \left(1, -\frac{1}{2}, -0.404386566 \right) \right)\end{aligned}$$

ii. Kombinasi kedua

$$\begin{aligned}(x, y) &= \left((\underline{x}(0), \bar{x}(1), \bar{x}(0)), (\underline{y}(0), \bar{y}(1), \bar{y}(0)) \right) \\ &= \left((0, 1, 0.135078119), \left(1, -\frac{1}{2}, 0.810890633 \right) \right)\end{aligned}$$

iii. Kombinasi ketiga

$$\begin{aligned}(x, y) &= \left((\underline{x}(0), \bar{x}(1), \bar{x}(0)), (\underline{y}(0), \bar{y}(1), \bar{y}(0)) \right) \\ &= \left(\left(0, -\frac{1}{11}, 1.003133262 \right), \left(1, \frac{38}{44}, -0.404386566 \right) \right)\end{aligned}$$

iv. Kombinasi keempat

$$\begin{aligned}(x, y) &= \left((\underline{x}(0), \bar{x}(1), \bar{x}(0)), (\underline{y}(0), \bar{y}(1), \bar{y}(0)) \right) \\ &= \left(\left(0, -\frac{1}{11}, 0.135078119 \right), \left(1, \frac{38}{44}, 0.810890633 \right) \right)\end{aligned}$$

v. Kombinasi kelima

$$\begin{aligned}(x, y) &= \left((\underline{x}(0), \bar{x}(1), \bar{x}(0)), (\underline{y}(0), \bar{y}(1), \bar{y}(0)) \right) \\ &= \left(\left(\frac{16}{33}, 1, 1.003133262 \right), \left(-\frac{31}{33}, -\frac{1}{2}, -0.404386566 \right) \right)\end{aligned}$$

vi. Kombinasi keenam

$$\begin{aligned}(x, y) &= \left((\underline{x}(0), \bar{x}(1), \bar{x}(0)), (\underline{y}(0), \bar{y}(1), \bar{y}(0)) \right) \\ &= \left(\left(\frac{16}{33}, 1, 0.135078119 \right), \left(-\frac{31}{33}, -\frac{1}{2}, 0.810890633 \right) \right)\end{aligned}$$

vii. Kombinasi ketujuh

$$\begin{aligned}(x, y) &= \left((\underline{x}(0), \bar{x}(1), \bar{x}(0)), (\underline{y}(0), \bar{y}(1), \bar{y}(0)) \right) \\ &= \left(\left(\frac{16}{33}, -\frac{1}{11}, 1.003133262 \right), \left(-\frac{31}{33}, \frac{38}{44}, -0.404386566 \right) \right)\end{aligned}$$

viii. Kombinasi kedelapan

$$\begin{aligned}(x, y) &= \left((\underline{x}(0), \bar{x}(1), \bar{x}(0)), (\underline{y}(0), \bar{y}(1), \bar{y}(0)) \right) \\ &= \left(\left(\frac{16}{33}, -\frac{1}{11}, 0.135078119 \right), \left(-\frac{31}{33}, \frac{38}{44}, 0.810890633 \right) \right)\end{aligned}$$

Dari delapan kombinasi tersebut, yang memenuhi persyaratan sebagai bilangan fuzzy segitiga yang memenuhi sistem persamaan fuzzy nonlinier (3.3) adalah kombinasi yang kelima.

$$\begin{aligned}(x, y) &= \left((\underline{x}(0), \bar{x}(1), \bar{x}(0)), (\underline{y}(0), \bar{y}(1), \bar{y}(0)) \right) \\ &= \left(\left(\frac{16}{33}, 1, 1.003133262 \right), \left(-\frac{31}{33}, -\frac{1}{2}, -0.404386566 \right) \right)\end{aligned}$$

Hal ini dikarenakan kombinasi ini memenuhi $\underline{x}(0) \leq \bar{x}(1) \leq \bar{x}(0)$ dan $\underline{y}(0) \leq \bar{y}(1) \leq \bar{y}(0)$.

Penyelesaian sistem persamaan fuzzy nonlinier (3.3) dengan menggunakan metode Broyden memerlukan nilai awal untuk mendapatkan hasil yang sesuai dengan solusi analitiknya. Maka nilai awal yang dipilih adalah $x = (0, 4; 1; 1)$ dan $y = (-0, 9; -0, 5; -0, 4)$ karena mendekati dengan solusi analitiknya. Dengan menggunakan metode Broyden, maka penyelesaian

sistem persamaan fuzzy nonlinier (3.9) didapatkan hasil (lihat Tabel 3.1, Tabel 3.2, Tabel 3.3, Tabel 3.4, Gambar 3.3, Gambar 3.4, Gambar 3.5, Gambar 3.6, Gambar 3.7 dan Gambar 3.7) adalah sebagai berikut (Untuk jelasnya dapat dilihat dalam lampiran).

Tabel 3.1 Hasil Perhitungan untuk $\underline{x}^{(k)}(0)$

Iterasi ke-k	$\underline{x}^{(k)}(0)$	$\bar{x}^{(k)}(0)$
0	0.4000000000000000	1.0000000000000000
1	0.485526315789474	1.003144654088050
2	0.484825762824838	1.003133403338257
3	0.484848453523843	1.003133258602938

Berdasarkan Tabel 3.1 dapat diketahui bahwa $\underline{x}^{(k)}(0)$ bernilai 0.4000 pada saat sebelum dilakukan iterasi. Setelah dilakukan iterasi hingga iterasi ketiga maka muncul nilai 0.484848453523843 yang menunjukkan bahwa $\underline{x}^{(k)}(0)$ telah konvergen pada titik tersebut. Sedangkan $\bar{x}^{(k)}(0)$ ketika diberikan nilai awal 1, pada iterasi ketiga $\bar{x}^{(k)}(0)$ sudah konvergen pada titik 1.003133258602938 yang dapat dilihat pada kolom ketiga baris ke 5 dari Tabel 3.1.

Tabel 3.2 Hasil Perhitungan untuk $\underline{y}^{(k)}(0)$

Iterasi ke-k	$\underline{y}^{(k)}(0)$	$\bar{y}^{(k)}(0)$
0	-0.9000000000000000	-0.4000000000000000
1	-0.942105263157895	-0.404402515723270
2	-0.939303051299352	-0.404386764673560
3	-0.939393814095373	-0.404386562044113

Tabel 3.2 menunjukkan perjalanan proses kekonvergenan dari $\underline{y}^{(k)}(0)$ dengan nilai awal -0.9 yang konvergen pada iterasi ketiga dengan hasil

-0.939393814095373 serta proses kekonvergensi dari $\bar{y}^{(k)}(0)$ dengan nilai awal -0.4 yang menuju pada titik konvergensiannya di iterasi ketiga dengan nilai -0.404386562044113 .

Tabel 3.3 Hasil Perhitungan untuk $x^{(k)}(1)$

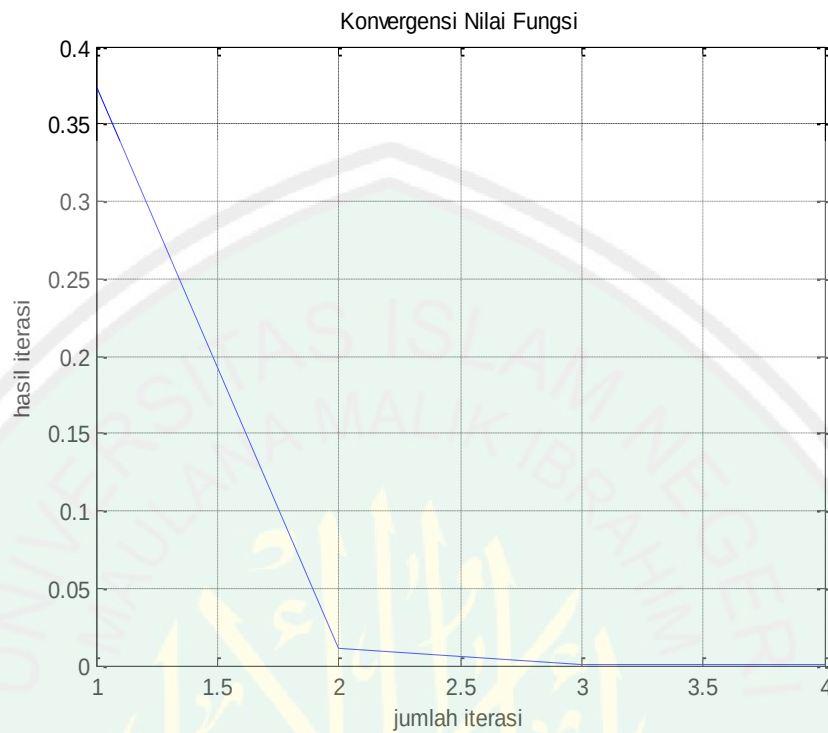
Iterasi ke-k	$\underline{x}^{(k)}(1)$	$\bar{x}^{(k)}(1)$
0	1.0000000000000000	1.0000000000000000
1	1.0000000000000000	1.0000000000000000

Tabel 3.3 merupakan proses perjalanan dari $\underline{x}^{(k)}(1)$ dengan nilai awal iterasi 1.000 dan konvergen pada iterasi pertama di titik 1.000 serta proses kekonvergensi dari $\underline{x}^{(k)}(1)$ dengan nilai awal, proses iterasi dan nilai akhir yang sama dengan $\bar{x}^{(k)}(1)$.

Tabel 3.4 Hasil Perhitungan untuk $y^{(k)}(1)$

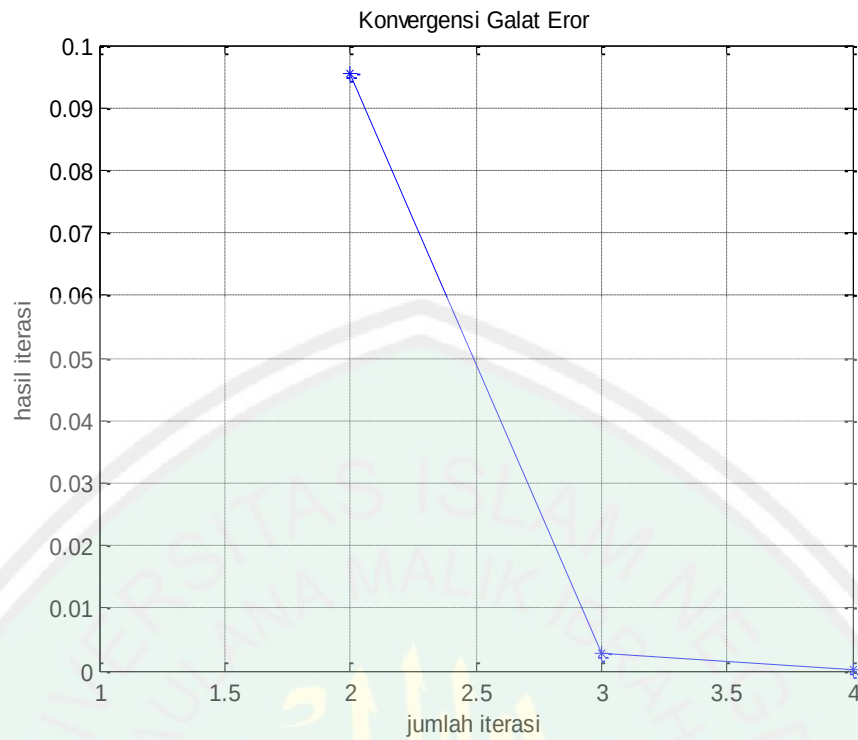
Iterasi ke-k	$\underline{y}^{(k)}(1)$	$\bar{y}^{(k)}(1)$
0	-0.5000000000000000	-0.5000000000000000
1	-0.5000000000000000	-0.5000000000000000

Sedangkan Tabel 3.4 adalah hasil iterasi dari $\underline{y}^{(k)}(1)$ dan $\bar{y}^{(k)}(1)$ yang keduanya dimulai dari nilai awal yang sama yakni -0.500 dan berhenti pada proses iterasi pertama yakni -0.500 . Berdasarkan hasil perhitungan yang dapat dilihat dalam Tabel 3.1, 3.2, 3.3 dan 3.4 maka dapat digambarkan grafik kekonvergenan nilai fungsi, konvergensi galat error, dan konvergensi akar. Dari Tabel 3.1 dan Tabel 3.2 dapat digambarkan (Gambar 3.1) proses kekonvergenan dari nilai fungsi sebagai berikut.



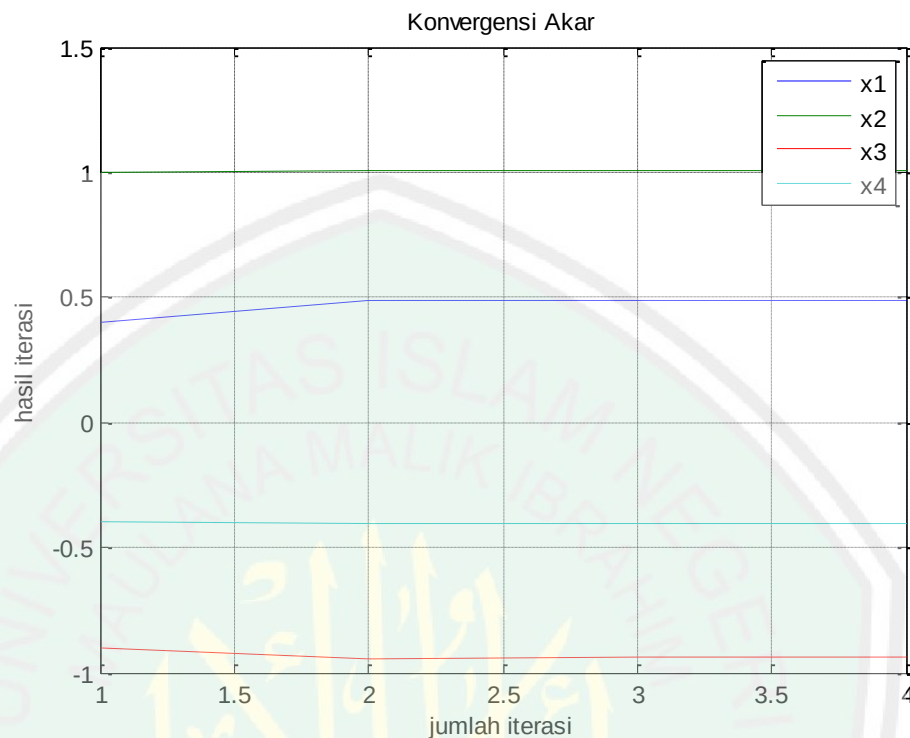
Gambar 3.1 Kekonvergenan dari Nilai Fungsi yang Dihasilkan dengan Derajat Keanggotaan 0 (Hasil Olahan Penulis)

Berdasarkan Gambar 3.1 adalah proses kekonvergenan nilai fungsi untuk derajat 0. Pada iterasi ke-3 nilai sudah menuju pada 0. Hal ini menunjukkan bahwa fungsi tersebut sudah konvergen. Sedangkan proses kekonvergenan dari galat error dapat dilihat dalam Gambar 3.2 sebagai berikut.



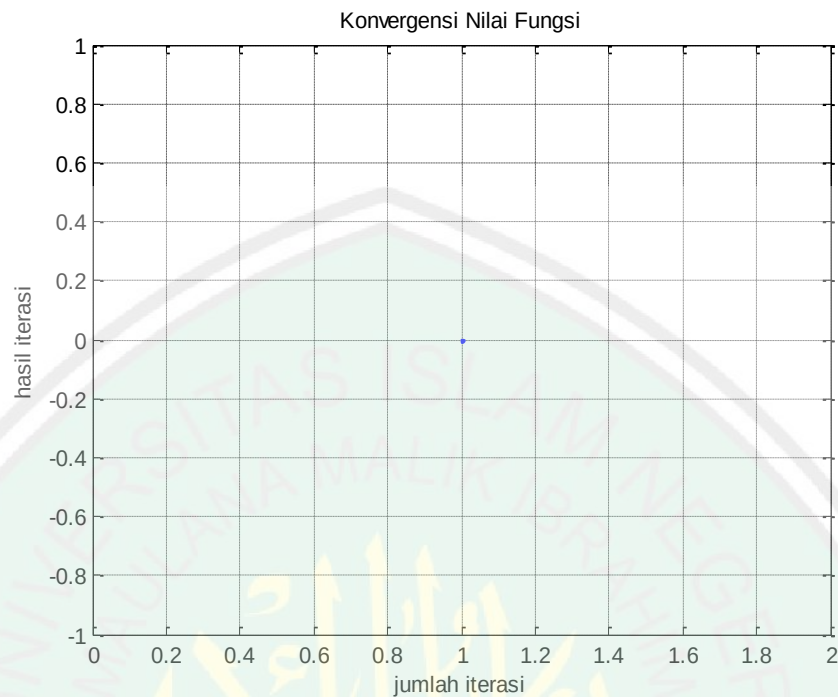
Gambar 3.2 Kekonvergenan dari Nilai Galat Error untuk Derajat Keanggotaan 0 (Hasil Olahan Penulis)

Berdasarkan Gambar 3.2 menunjukkan perjalanan dari proses kekonvergenan dari galat. Ketika iterasi ketiga (hasil iterasi 4) menunjukkan bahwa gambar tersebut menuju 0. Hal ini berarti bahwa galat juga konvergen pada iterasi ketiga. Sedangkan proses kekonvergenan dari akar dapat ditunjukkan pada Gambar 3.3 sebagai berikut.



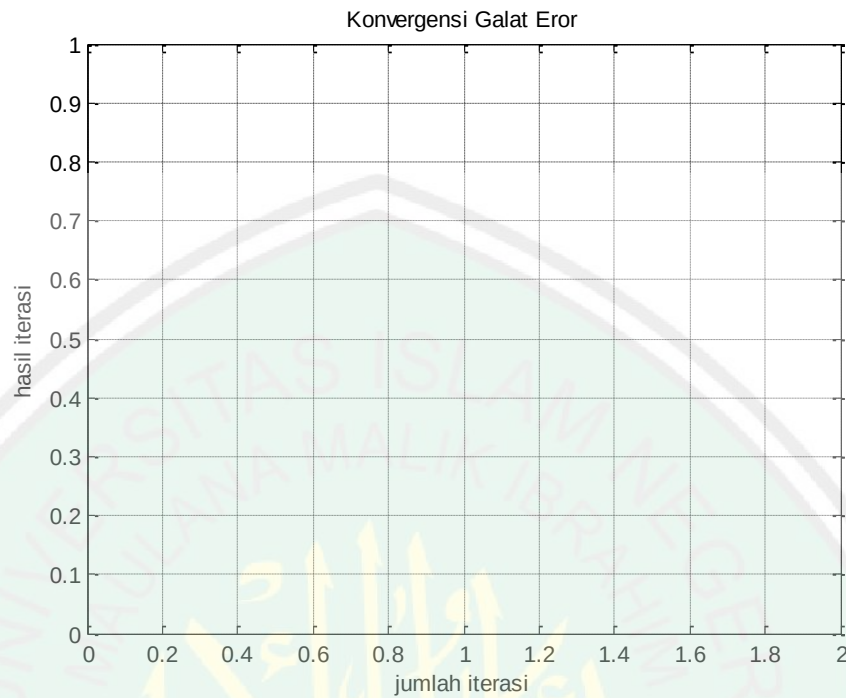
Gambar 3.3 Kekonvergenan dari Nilai Akar untuk derajat keanggotaan 0 (Hasil Olahan Penulis)

Berdasarkan Gambar 3.3 menunjukkan perjalanan kekonvergenan untuk mendapatkan solusi yang dicari untuk derajat keanggotaan 0. Dari gambar dapat dilihat bahwa solusi konvergen pada iterasi ketiga. Untuk x_1 menunjukkan nilai $\underline{x}(\mu)$, x_2 menunjukkan $\bar{x}(\mu)$, $\underline{y}(\mu)$ ditunjukkan dengan x_3 dan x_4 menunjukkan $\bar{y}(\mu)$ Sedangkan berdasarkan perhitungan dengan derajat keanggotaan 1 ditunjukkan dalam Tabel 3.3 dan Tabel 3.4. juga dapat digambarkan proses kekonvergenan nilai fungsi, kekonvergenan galat error, dan kekonvergenan dari nilai akar yang dihasilkan. Berikut adalah proses kekonvergenan dari nilai fungsi dengan derajat keanggotaan 1.



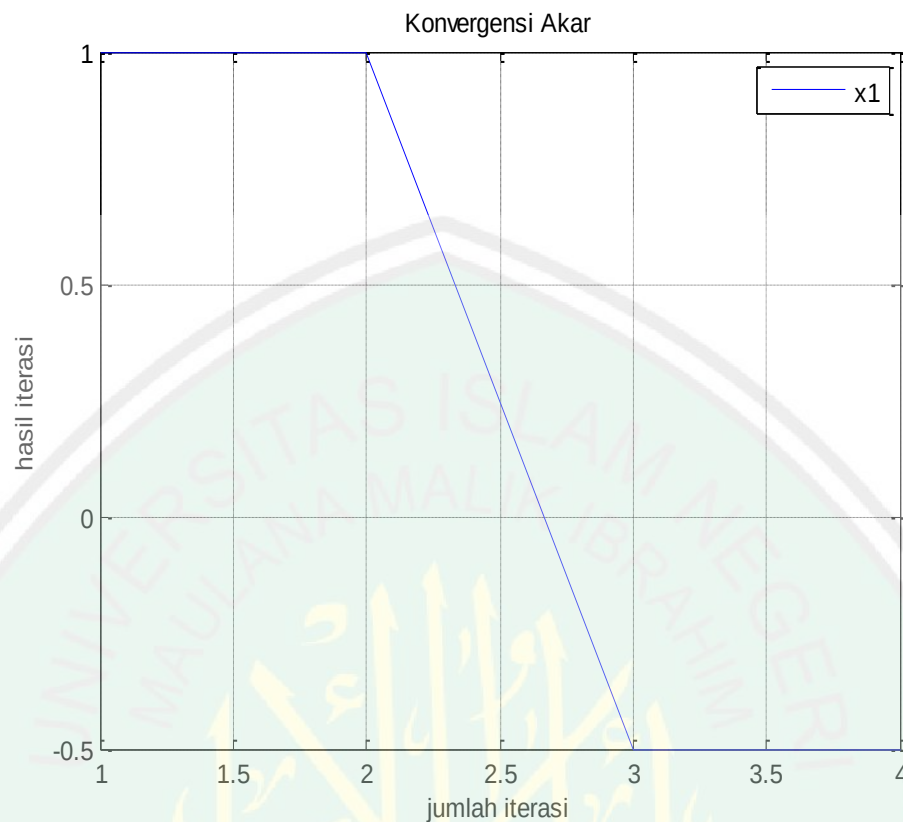
Gambar 3.4 Kekonvergenan dari nilai Fungsi yang dihasilkan dengan derajat 1
(Hasil Olahan Penulis)

Berdasarkan Gambar 3.4 menunjukkan kekonvergenan nilai fungsi untuk derajat keanggotaan 1. Pada Gambar 3.4 hanya terdapat sebuah titik, hal tersebut menunjukkan bahwa tidak ada suatu pergerakan karena pada iterasi pertama fungsi tersebut sudah konvergen. Selain proses konvergensi nilai fungsi, konvergensi nilai dari galat error dapat ditampilkan dalam Gambar 3.5 sebagai berikut.



Gambar 3.5 Kekonvergenan dari Nilai Galat Error untuk derajat keanggotaan 1 (Hasil Olahan Penulis)

Berdasarkan Gambar 3.5 menunjukkan galat dengan derajat keanggotaan 1. Pada gambar tidak menunjukkan sesuatu pergerakan karena pada iterasi pertama fungsi tersebut sudah konvergen dan berdasarkan gambar tersebut, galat yang diberikan bernilai 0. Sedangkan proses konvergensi dari nilai akar yang dicari adalah sebagai berikut dalam Gambar 3.6.



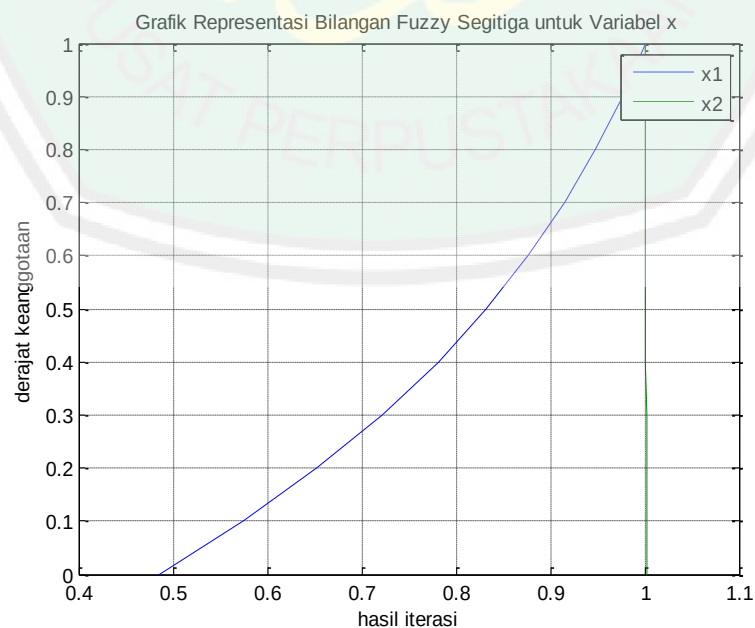
Gambar 3.6 Kekonvergenan dari Nilai Akar untuk derajat keanggotaan 1
(Hasil Olahan Penulis)

Berdasarkan Gambar 3.6 menunjukkan perjalanan kekonvergenan solusi yang dicari untuk derajat keanggotaan 1. Pada Gambar 3.6 menunjukkan bahwa solusi yang ditawarkan konvergen pada iterasi pertama. Dengan menggunakan nilai awal yang sama dan dengan derajat keanggotaan yang lain untuk $0 \leq \mu \leq 1$ serta menggunakan metode Broyden, maka didapatkan nilai solusi akhir seperti Tabel 3.5 berikut.

Tabel 3.5 Hasil Perhitungan Akhir Dengan Derajat Keanggotaan $0 \leq \mu \leq 1$

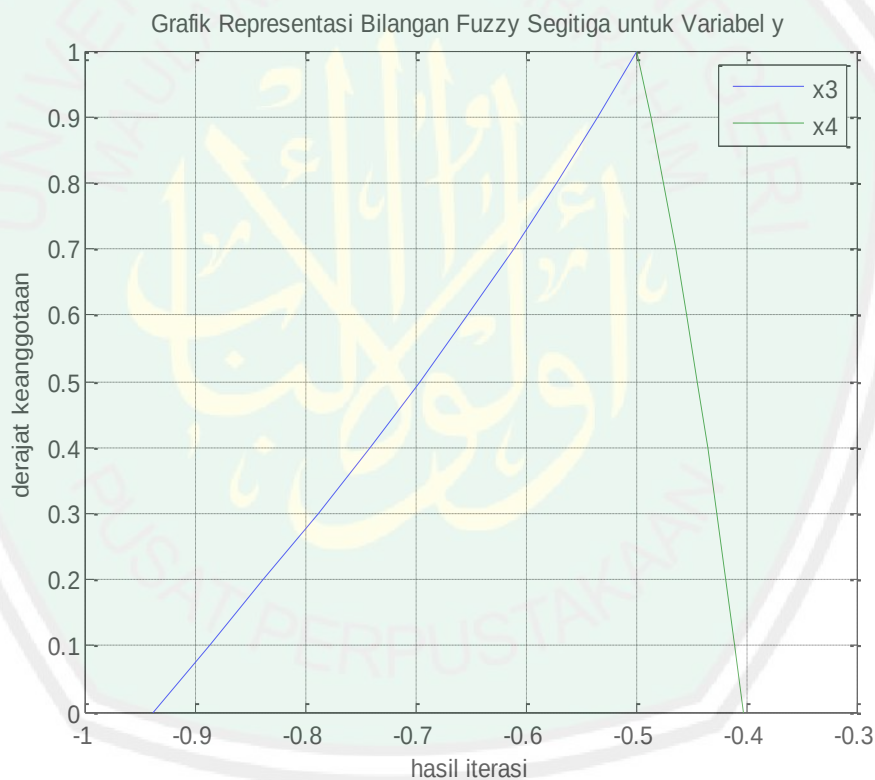
μ	$x(\mu)$		$y(\mu)$	
	$\underline{x}(\mu)$	$\bar{x}(\mu)$	$\underline{y}(\mu)$	$\bar{y}(\mu)$
0	0.4848	1.0031	-0.9394	-0.4044
0.1	0.5744	1.0027	-0.8886	-0.4119
0.2	0.6529	1.0023	-0.8388	-0.4198
0.3	0.7213	1.0019	-0.7903	-0.4281
0.4	0.7807	1.0015	-0.7432	-0.4368
0.5	0.8322	1.0011	-0.6979	-0.4459
0.6	0.8766	1.0008	-0.6544	-0.4556
0.7	0.9149	1.0005	-0.6129	-0.4657
0.8	0.9477	1.0002	-0.5733	-0.4765
0.9	0.9759	1.0001	-0.5357	-0.4879
1	1.0000	1.0000	-0.5000	-0.5000

Berdasarkan Tabel 3.5 dapat diketahui bahwa bilangan fuzzy segitiga untuk $x = (0.4848, 1.0000, 1.0031)$ dan untuk $y = (-0.9394, -0.5000, -0.4044)$ yang dapat digambarkan sebagai hasil dari representasi dari nilai x dan nilai y seperti pada Gambar 3.7.



Gambar 3.7 Representasi Bilangan Fuzzy Segitiga untuk Variabel x (Hasil Olahan Penulis)

Berdasarkan gambar yang didapatkan, pada Gambar 3.7 merupakan hasil representasi dari bilangan fuzzy segitiga untuk variabel x terhadap derajat keanggotaannya. Untuk x_1 menunjukkan pergerakan dari nilai $\underline{x}(\mu)$ dan x_2 menunjukkan pergerakan dari $\bar{x}(\mu)$. Sedangkan representasi dari nilai y dapat digambarkan dalam Gambar 3.8 sebagai berikut.



Gambar 3.8 Representasi Bilangan Fuzzy Segitiga untuk Variabel y (Hasil Olahan Penulis)

Berdasarkan Gambar 3.8 adalah hasil representasi dari bilangan fuzzy segitiga untuk variabel y terhadap derajat keanggotaannya. Untuk x_3 menunjukkan nilai dari $\underline{y}(\mu)$ dan x_4 menunjukkan nilai dari $\bar{y}(\mu)$.

3.3 Metode Broyden dalam Prespektif Islam

Islam merupakan agama yang penuh rahmat. Rahmat yang diperuntukkan kepada seluruh makhluk. Islam adalah agama yang bersifat tidak memaksa dan memberikan kemudahan dalam segala hal termasuk urusan ibadah. Dalam Islam, setiap manusia dianjurkan untuk berfikir agar menjadi orang yang beriman. Berfikir yang dianjurkan meliputi berbagai aspek permasalahan termasuk mencari jalan yang lebih mudah ketika tidak dapat melaksanakan ibadah saat mempunyai halangan sehingga tidak meninggalkan ibadah tersebut. Allah menegaskan hal tersebut dalam Alquran QS.Al-Insyirah ayat 6. Ayat ke enam ini menegaskan bahwa dalam Islam mengajarkan tentang kemudahan dan mengisyaratkan bahwa setiap datangnya kesulitan juga datang kemudahan. Dalam setiap kesulitan tersebut terdapat dua kemudahan yang akan datang. Berdasarkan ayat tersebut dapat ditafsirkan bahwa datang dua kemudahan dalam satu permasalahan. Kemudahan tersebut datangnya atas izin Allah yang dapat diartikan sebagai kemudahan melalui faktor dari dalam dan dari luar diri manusia. Maka sebagai umat Islam haruslah yakin dan sabar dalam menghadapi segala bentuk permasalahan yang melanda. Karena setiap permasalahan yang muncul mempunyai penyelesaian dan jalan keluarnya. Karena Allah tidak akan menguji suatu kaum melebihi kemampuan kaum tersebut. Sehingga jika terdapat kaum yang melakukan jalan pintas mengakhiri permasalahan dengan jalan yang salah, maka kaum tersebut termasuk kaum yang berputus asa dari suatu cobaan yang diberikan. Sehingga manusia diperintahkan berfikir agar bisa mengatasi segala

permasalahan yang ada dan kemudian menyerahkan segala hasilnya kepada Allah.

Permasalahan kehidupan sehari-hari yang sangat kompleks dan berkaitan satu dengan yang lainnya menimbulkan suatu permasalahan yang menyebabkan pembagian atas penyelesaian tersebut tidak dapat dipertegas. Untuk mempertegas hasil tersebut dapat mempergunakan aplikasi fuzzy untuk memodelkan hasilnya dalam sistem persamaan fuzzy nonlinier. Penyelesaian sistem persamaan fuzzy nonlinier secara analitik sangatlah sukar untuk diselesaikan secara cepat. Untuk itu dapat menggunakan metode Broyden. Metode Broyden adalah generalisasi dari metode *secant* dengan memadukan bersama metode Newton. Karena metode ini adalah metode perpaduan, metode Broyden juga dikatakan sebagai metode Quasi-Newton. Sebagai suatu metode, metode Newton memiliki kelemahan saat perhitungan. Kelemahan yang pertama adalah ketika ingin mendapatkan nilai dari matriks Jacobi pada iterasi selanjutnya, haruslah mencari dengan mensubstitusikan $x^{(k+1)}$ pada matriks Jacobi. Dan hal ini membutuhkan waktu serta perhitungan yang teliti. Jika pada saat pensubstitusian tidak dilakukan dengan teliti, maka akan terjadi kesalahan pada iterasi selanjutnya. Sehingga dengan menggunakan manipulasi aljabar dan menggabungkan antara metode Newton dan metode *Secant* maka didapatkan hasil metode Broyden. Metode ini dapat mempercepat perhitungan dan waktu untuk memperoleh nilai matriks Jacobi karena pada metode Broyden untuk mendapatkan nilai matriks Jacobi pada iterasi selanjutnya tidak melakukan pensubstitusian lagi seperti yang dilakukan pada metode Newton. Selain itu, pada saat menginversan matriks Jacobi untuk matriks berukuran

$n \times n$ untuk $n > 2$, penginversan dilakukan dengan menggunakan cara yang tidak seperti biasa yang dilakukan pada saat matriks Jacobi berukuran 2×2 . Salah satu cara penginversan matriks Jacobi untuk matriks berukuran $n \times n$ untuk $n > 2$ dapat dilakukan dengan menggunakan metode Gauss-Jordan. Sehingga hal ini memerlukan waktu yang lebih lama untuk mendapatkan invers matriks Jacobi untuk matriks berukuran $n \times n$ untuk $n > 2$ pada iterasinya. Selain itu metode ini dapat mempercepat perhitungan serta mempercepat kekonvergensian bila dibandingkan dengan metode Newton. Saat penyelesaian sistem persamaan fuzzy nonlinier sangatlah sulit untuk diselesaikan dengan cara analitik. Untuk mempermudah penyelesaiannya, dapat mempergunakan metode Broyden. Selain mendapatkan hasil, kekonvergensian sangat cepat bila dibandingkan dengan yang lain.

Berdasarkan bukti-bukti yang telah dipaparkan, kegunaan metode Broyden dalam menyelesaikan sistem persamaan fuzzy nonlinier bisa menjadi bukti firman Allah QS.Al-Insyirah ayat 6. Yakni setelah datangnya kesulitan datang akan kemudahan. Karena sesungguhnya Islam diturunkan dengan segala kemudahan tanpa menyulitkan bagi seluruh umat. Bukti tersebut dapat dilihat pada kesulitan dan kemudahan yang ditampilkan dalam menyelesaikan sistem persamaan fuzzy nonlinier. Kesulitan dapat diumpamakan dengan penyelesaian sistem persamaan fuzzy nonlinier secara analitik, lambatnya proses kekonvergensian dengan menggunakan metode Newton dan penggunaan metode Broyden yang belum diperbaiki. Sehingga, berdasarkan adanya suatu kesulitan maka manusia diperintahkan untuk berfikir agar dapat mengatasi kesulitan tersebut. Dari proses berfikir tersebut muncul adanya

suatu gagasan untuk memperbaiki metode yang telah ada yakni dengan menggunakan teorema Sherman-Morrison. Kemudahan yang dapat diperoleh dari pembahasan ini adalah dengan mengumpamakan penyelesaian dengan menggunakan metode Broyden yang telah diperbaiki pada proses menginversan dari matriks Jacobian untuk perhitungan kedua dan perhitungan selanjutnya. Dari kemudahan tersebut mengakibatkan proses kekonvergensi pada metode Broyden yang diperbaiki lebih cepat dari metode Newton dan metode Broyden yang belum diperbaiki. Sehingga waktu yang diperlukan untuk menuju pada titik yang konvergen sangat cepat.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan pada skripsi ini, didapatkan bahwa dalam menyelesaikan sistem persamaan fuzzy nonlinier adalah sebagai berikut.

- a. Mengubah sistem persamaan fuzzy nonlinier ke dalam bentuk parameter.
- b. Kemudian ditentukan titik yang dipergunakan sebagai awal iterasi dari titik yang mendekati titik potong kurva. Hal ini dikarenakan titik yang semakin menjauhi titik potong kurva jika dipergunakan nilai yang didapatkan akan mempunyai nilai galat lebih besar dibandingkan dengan titik yang mendekati titik potong kurva.
- c. Kemudian diselesaikan dengan menggunakan metode Broyden hingga mendapatkan ε kurang dari toleransi maksimum. Ketika menyelesaikan sistem persamaan fuzzy nonlinier, μ diganti dengan $0 \leq \mu \leq 1$.

4.2 Saran

Sebagai penelitian lebih lanjut, penelitian ini bisa dikembangkan dengan mempergunakan batasan masalah pada bilangan fuzzy secara umum sehingga dapat disesuaikan dengan informan yang ada dan mempergunakan metode yang lain atau pada materi matematika yang lain dengan domain bilangan fuzzy seperti pada pemodelan fuzzy dan automata fuzzy.

DAFTAR PUSTAKA

- Al-Khalafi, ‘Abdul ‘Azhim bin Badawi. 2006. *Al-Wajiz*. Jakarta: As-Sunnah.
- Al-Maraghi, Ahmad Mushthafa. 1986. *Terjemah Tafsir Al-Maraghi, Jilid 6*. Semarang: Toha Putra.
- Al-Utsaimin, Syaikh Muhammad bin Shalih. 2006. *Tafsir Juz’amma*. Solo: At-Tibyan.
- Anonim. 2011. *Broyden’s Method*. Diakses tanggal 23 Juni 2011 pada www.wikipedia.org
- Anonim. 2012. *Jacobian Matrix*. Diakses tanggal 23 Januari 2012 pada www.wikipedia.org
- Anton, Howard dan Rorres, Chris. 2004. *Aljabar Linear Elementer, Versi Aplikasi, Edisi Kedelapan*. Jakarta: Erlangga.
- Ayyub, Hasan Muhammad. 2007. *Panduan beribadah khusus pria, menjalankan ibadah sesuai tuntunan al-Quran dan as-Sunnah*. Jakarta: Al-Mahira.
- Burden, R.L. 2005. *Numerical Analysis, eight edition*. USA: Thomson.
- Dennis, J.E dan Schnabel, Robert B. 1983. *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*. Eaglewood Cliff: Prentice-Hall.
- Dubois, Deider. 1980. *Fuzzy Sets and Systems, Theory and Applications*. New York: Academic Press.
- Dugopolski, Mark. 2006. *Elementary and Intermediate Algebra, second edition*. New York: McGraw-Hill.
- Klir George J dan Yuan, Bo. 1995. *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic*. London: Prentice-Hall.
- Kusumadewi, Sri dan Purnomo, Hari. 2010. *Aplikasi Logika Fuzzy untuk Pendukung Keputusan, edisi kedua*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Munir, Rinaldi. 2003. *Metode Numerik-Revisi Kedua*. Bandung: Informatika.
- Neumaier, Arnold. 2001. *Introduction to Numerical Analysis*. UK: Cambridge University Press.
- Ramli, Amirah dkk. 2010. *Broyden’s Method for Solving Fuzzy Nonlinear Equations. Advanced in Fuzzy Systems, Volume 2010:1-6*.

- Rasjid, Sulaiman. 1992. *Fiqh Islam (Hukum Fiqh Lengkap)*. Bandung: Sinar Baru.
- Susilo, Frans. 2006. *Himpunan dan Logika Kabur serta Aplikasinya*. Yogyakarta: Graha Ilmu.
- Syaikh, ‘Abdullah bin Muhammad bin ‘Abdurrahman bin Ishaq Alu. 2007. *Tafsir Ibnu Katsir Jilid 8-Juz’amma*. Bogor: Pustaka Imam Asy-Syafi’i.
- Wang, Zhenyuan dkk. 2010. *Nonlinear Integrals and Their Applications in Data Mining, Advances in Fuzzy Systems, Applications and Theory vol 24*. Singapura: World Scientific Publishing.
- Zadeh, L.A. 1965. Fuzzy Sets. *Information and Control*, Volume 8:338-353.



LAMPIRAN

Kode Program dalam Matlab

```

clc;clear
syms x1 x2 x3 x4 r
format long
disp('=====Penyelesaian Sistem Persamaan Fuzzy Nonlinier
dengan menggunakan Metode Broyden=====')
disp('=====Studi Kasus pada Persamaan Fuzzy Lingkaran
dan Persamaan Fuzzy garis=====')
%input
%nilX adalah nilai awal dari variabel x
%nilY adalah nilai awal dari variabel y
%X0 nilai awal
%f adalah fungsi
%A adalah matrik jacobian
%n adalah banyaknya variabel
%tol adalah error
% output matrik X
disp(' ')
disp(' ')
disp(' ')
disp('Diberikan Matrik Fungsi dari Sistem Persamaan dalam bentuk
Parameter')
F=inline('[(1+r)*x1^2+(2+2*r)*x3^2-(2+r);(3-r)*x2^2+(6-2*r)*x4^2-
(4-r);(4+r)*x1+(1+3*r)*x3-(1+2*r);(7-2*r)*x2+(5-r)*x4-(5-2*r)]')
nilX=[0.4 1 1]
nilY=[-0.9 -0.5 -0.4]
a=nilX(1,1);
b=nilX(1,2);
c=nilX(1,3);
d=nilY(1,1);
e=nilY(1,2);
f=nilY(1,3);
n=4;
tol=10^-5;
i=1;
j=1;
fx=zeros(n,1);
X=zeros(n,1);
g=zeros(n,1);
Fx=zeros(n,1);
hasil=zeros(n,1);
mf=zeros(1,1);
tic;
for r=0:0.1:1
    x1=a+(b-a)*r;
    x2=c+(b-c)*r;
    x3=d+(e-d)*r;
    x4=f+(e-f)*r;
    X0=[x1 x2 x3 x4];
    X(:,i)=X0;
    fu=[(1+r)*x1^2+(2+2*r)*x3^2-(2+r);(3-r)*x2^2+(6-2*r)*x4^2-(4-
r);(4+r)*x1+(1+3*r)*x3-(1+2*r);(7-2*r)*x2+(5-r)*x4-(5-2*r)];
    fx(:,i)=fu;
    A=[2*(1+r)*x1 0 2*(2+2*r)*x3 0;0 2*(3-r)*x2 0 2*(6-2*r)*x4;4+r
0 1+3*r 0;0 7-2*r 0 5-r];

```

```

B=inv(A);
norm(fx(:,i));
g(1,i)=nan;
Fx(1,i)=norm(fx(:,i));
while norm(fx(:,i))>tol
    X(:,i+1) = X(:,i)-B*fx(:,i);
    x1=X(1,i+1);
    x2=X(2,i+1);
    x3=X(3,i+1);
    x4=X(4,i+1);
    fx(:,i+1)=[(1+r)*x1^2+(2+2*r)*x3^2-(2+r);(3-r)*x2^2+(6-
2*r)*x4^2-(4-r);(4+r)*x1+(1+3*r)*x3-(1+2*r);(7-2*r)*x2+(5-r)*x4-
(5-2*r)];
    y=fx(:,i+1)-fx(:,i);
    s=X(:,i+1)-X(:,i);
    Blama=B;
    B=Blama+(1/(s'*Blama*y))*(s-Blama*y)*s'*Blama;
    g(1,i+1)=norm(X(:,i+1)-X(:,i));
    Fx(1,i+1)=norm(fx(:,i+1));
    i=i+1;
end
hasil(1,j)=X(1,i);
hasil(2,j)=X(2,i);
hasil(3,j)=X(3,i);
hasil(4,j)=X(4,i);
mf(1,j)=r;
j=j+1;
i=i+1;
end
disp('Iterasi      nilai x1      nilai x2      nilai x3
nilai x4      nilai Fx      nilai Galat')
disp([[1:i-1]' X' Fx(1,:) ' g(1,:)'])
disp('Hasil Akhir Iterasi pada Setiap Derajat Keanggotaan Fuzzy')
disp([hasil' mf'])
disp(['Waktu Komputasi adalah ',num2str(toc)])
subplot(2,2,1);plot(hasil(1,:)','mf',hasil(2,:)','mf');title('Grafik
Representasi Bilangan Fuzzy Segitiga untuk Variabel x');grid on
subplot(2,2,2);plot(hasil(3,:)','mf',hasil(4,:)','mf');title('Grafik
Representasi Bilangan Fuzzy Segitiga untuk Variabel y');grid on
subplot(2,2,3);plot(Fx(1,:))';title('Konvergensi Nilai
Fungsi');grid on
subplot(2,2,4);plot(g(1,:),'-');title('Konvergensi Galat
Error');grid on
%plot(X(:,:))',title('Konvergensi Akar');grid on
% Grafik Fungsi dalam bentuk parameter
% subplot(2,2,1)
% ezplot('x1^2+2*x2^2-2')
% hold on
% ezplot('4*x1+x2-1')
% hold on
% grid on
% subplot(2,2,2)
% ezplot('3*x1^2+6*x2^2-4')
% hold on
% ezplot('7*x1+5*x2-5')
% hold on
% grid on
% subplot(2,2,3)
% ezplot('2*x1^2+4*x2^2-3')

```

```
% hold on
% ezplot('5*x1+4*x2-3')
% hold on
% grid on
```

Hasil Running Program

=====Penyelesaian Sistem Persamaan Fuzzy Nonlinier dengan menggunakan

Metode Broyden=====

=====Studi Kasus pada Persamaan Fuzzy Lingkaran dan Persamaan Fuzzy

garis=====

Diberikan Matrik Fungsi dari Sistem Persamaan dalam bentuk Parameter

F =

Inline function:

$$F(r, x_1, x_2, x_3, x_4) = [(1+r)*x_1^2 + (2+2*r)*x_3^2 - (2+r); (3-r)*x_2^2 + (6-2*r)*x_4^2 - (4-r); (4+r)*x_1 + (1+3*r)*x_3 - (1+2*r); (7-2*r)*x_2 + (5-r)*x_4 - (5-2*r)]$$

nilX =

0.4000000000000000 1.0000000000000000 1.0000000000000000

nilY =

-0.9000000000000000 -0.5000000000000000 -0.4000000000000000

Iterasi	nilai x1	nilai x2	nilai x3	nilai x4	nilai Fx	nilai Galat
---------	----------	----------	----------	----------	----------	-------------

Columns 1 through 3

1.0000000000000000	0.4000000000000000	1.0000000000000000
--------------------	--------------------	--------------------

2.0000000000000000	0.485526315789474	1.003144654088050
--------------------	-------------------	-------------------

3.0000000000000000	0.484825762824838	1.003133403338257
--------------------	-------------------	-------------------

4.0000000000000000	0.484848453523843	1.003133258602938
--------------------	-------------------	-------------------

5.0000000000000000	0.4600000000000000	1.0000000000000000
--------------------	--------------------	--------------------

6.0000000000000000	0.575677005347594	1.002722182723072
7.0000000000000000	0.574386005639090	1.002718755686953
8.0000000000000000	0.574425679796441	1.002718700119248
9.0000000000000000	0.5200000000000000	1.0000000000000000
10.0000000000000000	0.654770293609672	1.002306927411336
11.0000000000000000	0.652812197270053	1.002305706250943
12.0000000000000000	0.652867644468613	1.002305681578476
13.0000000000000000	0.5800000000000000	1.0000000000000000
14.0000000000000000	0.723727174234217	1.001901251506308
15.0000000000000000	0.721209270300418	1.001898845677008
16.0000000000000000	0.721273692907164	1.001898789061368
17.0000000000000000	0.6400000000000000	1.0000000000000000
18.0000000000000000	0.783458874458874	1.001509087571140
19.0000000000000000	0.780642424328148	1.001504044066244
20.0000000000000000	0.780706009790939	1.001503915016826
21.0000000000000000	0.7000000000000000	1.0000000000000000
22.0000000000000000	0.834886128364389	1.001136363636364
23.0000000000000000	0.832118596197336	1.001128813691224
24.0000000000000000	0.832171958859073	1.001128617264358
25.0000000000000000	0.7600000000000000	1.0000000000000000
26.0000000000000000	0.878941463414634	1.000791563955081
27.0000000000000000	0.876571974624365	1.000782802122952
28.0000000000000000	0.876609212220417	1.000782586388445
29.0000000000000000	0.8200000000000000	1.0000000000000000
30.0000000000000000	0.916562091503268	1.000486471005401

31.000000000000000	0.914855976346001	1.000478429663219
32.000000000000000	0.914876316861077	1.000478258306554
33.000000000000000	0.880000000000000	1.000000000000000
34.000000000000000	0.948678089304257	1.000237154150198
35.000000000000000	0.947741198609247	1.000231710588105
36.000000000000000	0.947748668836639	1.000231623133636
37.000000000000000	0.940000000000000	1.000000000000000
38.000000000000000	0.976198883754426	1.000065297541374
39.000000000000000	0.975917726925079	1.000063320314958
40.000000000000000	0.975918841147972	1.000063302648569
41.000000000000000	1.000000000000000	1.000000000000000

Columns 4 through 6

-0.900000000000000	-0.400000000000000	0.374165738677394
-0.942105263157895	-0.404402515723270	0.010861437832253
-0.939303051299352	-0.404386764673560	0.000363539833384
-0.939393814095373	-0.404386562044113	0.000000503400885
-0.860000000000000	-0.410000000000000	0.494963245908219
-0.892519786096257	-0.411940988268752	0.017045921895232
-0.888448171630975	-0.411936232381894	0.000540450527810
-0.888573297819545	-0.411936155267528	0.000001139939080
-0.820000000000000	-0.420000000000000	0.589666145543391
-0.843772020725389	-0.419838691857253	0.023151904863806
-0.838632017833889	-0.419837012761714	0.000674694973340
-0.838777566730110	-0.419836978837072	0.000001871088067

-0.7800000000000000 -0.4300000000000000 0.651965088942652
-0.795803604845858 -0.428120853114973 0.027504126113385
-0.790105190679894 -0.428117577092096 0.000722193186349
-0.790250989210949 -0.428117499998458 0.000002310429898
-0.7400000000000000 -0.4400000000000000 0.679101109408606
-0.748735930735931 -0.436816596291537 0.029026373474946
-0.743103030474479 -0.436809798524067 0.000670450167830
-0.743230201400061 -0.436809624587897 0.000002206440113
-0.7000000000000000 -0.4500000000000000 0.669183270860831
-0.702795031055901 -0.445959595959596 0.027314969829121
-0.697813473155206 -0.445949529366076 0.000537037218009
-0.697909525946331 -0.445949267463588 0.000001627196952
-0.6600000000000000 -0.4600000000000000 0.620487508979835
-0.658260975609756 -0.455588879758970 0.022645191069413
-0.654368244025742 -0.455577330071164 0.000361568465043
-0.654429420076400 -0.455577045693860 0.000000891913948
-0.6200000000000000 -0.4700000000000000 0.531230177230172
-0.615432848408180 -0.465749822704708 0.015922343621931
-0.612846157685873 -0.465739350259076 0.000192126199568
-0.612876996531309 -0.465739127096907 0.000000328715260
-0.5800000000000000 -0.4800000000000000 0.399487095160782
-0.574604361370716 -0.476495388669302 0.008595001088058
-0.573281692154230 -0.476488389803754 0.000069087383076
-0.573292238357608 -0.476488277362293 0.000000063474941
-0.5400000000000000 -0.4900000000000000 0.223165819067347

-0.536047170377483 -0.487887694442718 0.002549125875857
-0.535674827549429 -0.487885186740922 0.000010143581176
-0.535676303141910 -0.487885164334770 0.000000002850859
-0.500000000000000 -0.500000000000000 0

Column 7

NaN
0.095482327538364
0.002888518726156
0.000093556480106
NaN
0.120207669340066
0.004271388411780
0.000131265421426
NaN
0.136870336243481
0.005500343199333
0.000155752607615
NaN
0.144618119507144
0.006229910171667
0.000159397280612
NaN
0.143767786904085
0.006297779635786

0.000142181582138

NaN

0.134980354166307

0.005698711411506

0.000109880933409

NaN

0.119038567197024

0.004557197217302

0.000071618958005

NaN

0.096764647729575

0.003098704916256

0.000036943877786

NaN

0.068979209979323

0.001620893780334

0.000012924666121

NaN

0.036475336127681

0.000466581763772

0.000001849237671

NaN

Hasil Akhir Iterasi pada Setiap Derajat Keanggotaan Fuzzy

Columns 1 through 3

0.484848453523843	1.003133258602938	-0.939393814095373
0.574425679796441	1.002718700119248	-0.888573297819545
0.652867644468613	1.002305681578476	-0.838777566730110
0.721273692907164	1.001898789061368	-0.790250989210949
0.780706009790939	1.001503915016826	-0.743230201400061
0.832171958859073	1.001128617264358	-0.697909525946331
0.876609212220417	1.000782586388445	-0.654429420076400
0.914876316861077	1.000478258306554	-0.612876996531309
0.947748668836639	1.000231623133636	-0.573292238357608
0.975918841147972	1.000063302648569	-0.535676303141910
1.000000000000000	1.000000000000000	-0.500000000000000

Columns 4 through 5

-0.404386562044113	0
-0.411936155267528	0.100000000000000
-0.419836978837072	0.200000000000000
-0.428117499998458	0.300000000000000
-0.436809624587897	0.400000000000000
-0.445949267463588	0.500000000000000
-0.455577045693860	0.600000000000000
-0.465739127096907	0.700000000000000
-0.476488277362293	0.800000000000000
-0.487885164334770	0.900000000000000
-0.500000000000000	1.000000000000000

Waktu Komputasi adalah 0.010151



KEMENTERIAN AGAMA
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Malang 65144 Telp. / Fax. (0341) 558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Tunjung Ary Wibowo
NIM : 08610043
Fakultas : Sains dan Teknologi
Jurusan : Matematika
Judul Skripsi : Penyelesaian Sistem Persamaan Fuzzy Nonlinier dengan Menggunakan Metode Broyden
Pembimbing I : Mohammad Jamhuri, M.Si
Pembimbing II : Achmad Nashichuddin, MA

No.	Tanggal	Materi	Ttd. Pembimbing	
1.	1 Oktober 2011	Konsultasi Agama BAB I	1.	
2.	9 Oktober 2011	Konsultasi Agama BAB I, II	2.	
3.	15 Oktober 2011	Konsultasi BAB I	3.	
4.	17 Oktober 2011	Konsultasi Agama BAB III	4.	
5.	10 Desember 2011	Konsultasi BAB I, II, III	5.	
6.	17 Desember 2011	Konsultasi Agama BAB III	6.	
7.	20 Desember 2011	Konsultasi Agama BAB III	7.	
8.	23 Desember 2011	Konsultasi Agama BAB III	8.	
9.		Konsultasi BAB I, II, III	9.	
10.	07 Januari 2012	Konsultasi BAB I, II, III, IV	10.	

Malang, 13 Januari 2012

Mengetahui,

Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd

NIP. 1975 1006 200312 1 001