MENENTUKAN RUANG BAGIAN SIKLIS DARI $V_n(Z_m)$

SKRIPSI

Oleh:

NURHIDAYATI
NIM. 08610041

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2012

MENENTUKAN RUANG BAGIAN SIKLIS DARI $V_n(Z_m)$

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Universitas Islam Negeri Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan
Dalam Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
NURHIDAYATI
NIM. 08610041

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2012

MENENTUKAN RUANG BAGIAN SIKLIS DARI $V_n(Z_m)$

SKRIPSI

Oleh:
NURHIDAYATI
NIM. 08610041

Telah Disetujui untuk Diuji
Malang, 13 Agustus 2012

Dosen Pembimbing I,	Dosen Pembimbing II,
Wahyu H. Irawan, M. Pd	**Ach. Nashichuddin, M. A**
NIP. 19710420 200003 1 003	**NIP. 19730705 200003 1 002**

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M. Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

MENENTUKAN RUANG BAGIAN SIKLIS DARI $V_n(Z_m)$

SKRIPSI

Oleh:
NURHIDAYATI
NIM. 08610041

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Malang, 08 September 2012

Susunan Dewan Penguji:			Tanda Tangan
1. Penguji Utama	:	Drs. H. Turmudi, M.Si NIP. 19571005 198203 1 006	( )
2. Ketua Penguji	:	Abdul Aziz, M.Si NIP. 19760318 200604 1 002	( )
3. Sekretaris	:	Wahyu H. Irawan, M.Pd NIP. 19710420 200003 1 003	( )
4. Anggota	:	Ach. Nashichuddin, M.A NIP. 19730705 200003 1 002	( )

Mengetahui dan Mengesahkan

Kajur Matematika

Fakultas Sains dan Teknologi

<u>Abdussakir, M. Pd</u>
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : NURHIDAYATI

NIM : 08610041

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya.

Apabila di kemudian hari terbukti atau dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 9 Agustus 2012
Yang membuat pernyataan

NURHIDAYATI
NIM. 08610041

MOTTO

مَنْ جَدَّ وَجَدَ

"Sopo Temen Tinemu"

LEMBAR PERSEMBAHAN

Dengan lantunan do'a dan untaian kata terimakasih yang tidak akan pernah putus, karya ini penulis persembahkan kepada:

"Kedua orang tua, Ayah Gifari dan Ibu Ismia. Dengan ikhlas penulis dibesarkan dan dididik tanpa mengharap imbalan. Tiada hal yang sebanding dengan perjuangan ayah dan ibu dalam memberikan yang terbaik untuk penulis. Dengan keterbatasan penulis dalam membalas budi, dari dalam hati yang paling dalam, penulis lantunkan do'a di atas segala dosa dan rasa malu penulis pada Sang Khalik agar ayah dan ibu selalu mendapat kebahagiaan baik di dunia maupun di akhirat nanti".

KATA PENGANTAR

بسم الله الرحمن الرحيم

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Syukur alhamdulillah penulis haturkan ke hadirat Allah SWT yang telah memberikan segala kemudahan dan hidayah-Nya sehingga mampu menyelesaikan studi di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang sekaligus mampu menyelesaikan penulisan skripsi dengan judul "**Menentukan Ruang Bagian Siklis dari $\boldsymbol{V_n(Z_m)}$**". Sholawat dan salam penulis persembahkan kepada Nabi Muhammad SAW, berkat perjuangannya yang telah menghadirkan pencerahan untuk umat manusia dan menjadi motivasi bagi penulis untuk belajar, berusaha dan menjadi yang terbaik.

Dalam merampungkan skripsi ini, penulis berusaha dengan sebaik mungkin, namun penulis menyadari bahwa tanpa partisipasi dari banyak pihak skripsi ini tidak dapat terselesaikan. Dengan iringan do'a dan kerendahan hati penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku Rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Drs. Sutiman B. Sumitro, SU, D.Sc, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.

4. Wahyu H. Irawan, M.Pd dan Ach. Nashichuddin, M.A selaku dosen pembimbing skripsi ini, terima kasih atas bimbingan, saran dan seluruh masukan yang membangun sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
5. Hairur Rahman, M.Si selaku dosen wali penulis.
6. Drs. H. Turmudi, M.Si dan Abdul Aziz, M.Si selaku penguji utama dan ketua penguji yang telah memberikan kritik dan sarannya pada penulis atas terwujudnya skripsi yang lebih baik dan berkualitas.
7. Seluruh dosen jurusan Matematika yang telah banyak memberikan ilmu dan pelajaran berharga sebagai bekal di masa depan.
8. Orang tua penulis yakni Bapak Gifari dan Ibu Ismia yang telah memberi do'a dan dukungan penuh pada penulis dalam menyelesaikan pendidikan S1 di Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
9. Kakak dan kakak ipar penulis (Ahmad dan Saitunil Basra), yang telah memberikan motivasi sehingga penulis terus berusaha menjadi anak, adik dan anggota keluarga yang lebih baik lagi.
10. Seluruh teman-teman Musyrifah Ma'had Sunan Ampel Al-Ali Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang, khususnya teman-teman musyrifah di kamar 1 USA (2009-2010), kamar 33 Khadijah (2010-2011), dan kamar 1 ABA (2011-2012) yang selalu setia menyemangati penulis.
11. Para sahabat penulis (Silfiyah Rohmawati, Amilatuz Zakiyah, Nurul Qomariyah, Siti Nur Kholifah, Alfi Sayyidah, Maryam, Siti Cholisna dan Yuli Rohmawati) yang telah memberikan do'a dan dukungan bagi penulis.
12. Teman-teman Matematika angkatan 2008.

13. Para pengasuh, kepala sekolah, para pengurus, dan para pengajar sekolah SMPI Al-IZZAH SIDOARJO, yang telah memberikan pengalaman mengajar bagi penulis.
14. Semua pihak yang tidak mungkin penulis sebut satu persatu, atas keikhlasan bantuan moril dan spirituil, penulis ucapkan terima kasih.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna, sehingga masih membutuhkan banyak saran dan masukan dari pembaca. Semoga hasil yang tak seberapa ini dapat bermanfaat dan menambah wawasan keilmuan matematika khususnya di bidang aljabar. Aamiin.

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Malang, 9 Agustus 2012

Penulis

DAFTAR ISI

BAB III : PEMBAHASAN

BAB IV : PENUTUP

DAFTAR PUSTAKA

LAMPIRAN-LAMPIRAN

ABSTRAK

Nurhidayati. 2012. **Menentukan Ruang Bagian Siklis dari $V_n(Z_m)$.** Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Pembimbing : Wahyu Hengki Irawan, M.Pd.
Ach. Nashichuddin, M.A.

Kata Kunci: Ruang Bagian Siklis, Polinomial, *Monic*.

Ruang bagian siklis merupakan bagian penting dan tidak dapat dipisahkan dengan *cyclic codes* (kode siklis). Kode siklis tersebut merupakan kode yang mudah diimplementasikan dan mempunyai aplikasi yang luas. Cukup banyak peneliti yang meneliti kode siklis, namun, masih minim peneliti yang meneliti ruang bagian siklis, walaupun sebenarnya ruang bagian siklis juga terdapat dalam pembahasan kode siklis. Sehingga, diperlukan penelitian lebih lanjut tentang ruang bagian siklis tersebut. Dengan menggunakan berbagai literatur yang ada dan juga dengan memahami langkah-langkah dalam membangun ruang bagian siklis, akan diteliti ruang bagian siklis hingga $V_n(Z_m)$ yaitu ruang bagian siklis dari persamaan polinomial dengan derajat polinom n pada bilangan modulo m.

Dalam membangun ruang bagian siklis dari $V_n(Z_m)$ menggunakan langkah-langkah yang sama dengan menentukan ruang bagian siklis dari $V_7(Z_2)$ yang sebelumnya telah dibahas dalam jurnal Muhamad Zaki Riyanto yakni dengan memfaktorkan polinomial untuk dapat menentukan *monic*nya. Setelah *monic* diketahui, maka dengan langkah-langkah sesuai literatur, ruang bagian siklis dapat ditentukan. Sehingga, dapat diketahui bahwa banyaknya ruang bagian siklis dalam persamaan polinomial adalah derajat polinom dari persamaan tersebut ditambah satu, sehingga $V_n(Z_m)$ mempunyai tepat $n + 1$ ruang bagian siklis, $n \geq 2$, $m \geq 2$, $n, m \in Z$, $m \in P$.

ABSTRACT

Nurhidayati. 2012. **To Determine Cyclic Subspace From $V_n(Z_m)$.** Thesis. Department of Mathematics Faculty of Science and Technology State Islamic University Maulana Malik Ibrahim Malang
Advisor : Wahyu Hengki Irawan, M.Pd.
Ach. Nashichuddin, M.A.

Key words: Cyclic Subspace, Polynomial, Monic.

Cyclic subspace is an important part and can not be separated with a cyclic codes is easy code to implement and that have broad application. A lot of researchers who examined the cyclic code, however, there is little of research that examines the cyclic subspace, even though the cyclic subspace is also explained in the discussion of cyclic codes. Thus, we need more research about cyclic subspace. By using a variety of existing literature and also by knowing the steps to construct a cyclic subspace, researcher of this thesis will do a research about cyclic subspace to $V_n(Z_m)$. Here, $V_n(Z_m)$ is cyclic subspace of polynomial equations with polynomial n modulo m.

In building a cyclic subspace of $V_n(Z_m)$, we can use the same steps to determine the cyclic subspace of $V_7(Z_2)$ that have previously been discussed in the journal Muhamad Zaki Riyanto. That steps by factoring a polynomial to find the monic. After monic is known, then the appropriate measures literature, cyclic subspace can be determined. Thus, it can be seen that the amount of space the cyclical part of the equation is a polynomial of degree polynomial equation plus one, so $V_n(Z_m)$ have exactly $n + 1$ cyclic subspace, $n \geq 2$, $m \geq 2$, $n, m \in Z$, $m \in P$.

مستخلص البحث

نور هدايتي. 2012. تحديد الجزء الفضاء الدوري من $\boldsymbol{V_n(Z_m)}$. البحث العلمي, قسم الرياضيات. كلية العلوم والتكنولوجيا. جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانق. المشرف الأول: وحيو هانكي إيراوان الماجستير, المشرف الثاني: أحمد نصيح الدين الماجستير.

الكلمات الأساسية: الجزء الفضاء الدوري, متعدد الحدود, مونيك.

دور الفضاء الجزئي هو جزء مهم ولا يمكن فصلها مع رموز دوري, كثيرا ما من الباحثين الذين فحصوا هذا, رمز دوري هو رمز سهل لتنفيذ وتطبيق واسع النطاق لديه. ومع ذلك، لا يزال هناك نقص في الأبحاث التي تدرس الجزء الدورية للغرفة. ولو هناك أيضا جزء يعيش في مناقشة قانون الدورية الدورية . وبالتالي، هناك حاجة إلى المزيد من البحوث بشأن الفضاء الجزئي الدوري .وباستخدام مجموعة متنوعة من الكتابات الموجودة وأيضا لفهم الخطوات في بناء جزء الدورية و في محاولة لدراسة الفضاء الجزئي إلى الفضاء $V_n(Z_m)$ وهو الجزئي دوري دوري متعدد الحدود من المعادلة متعدد الحدود من الدرجة n على عدد مودولو m.

للنوقشت سابقا في الدوري باستخدام نفس الخطوات لتحديد الجزء$V_n(Z_m)$ و في بناء جزء من الدورية .بعد أن تعرف مونيك ، ثم الأدب التدابير مونيك متعددو الحدود مع العوملة لتحديد مجلة محمد زكي ريانطا من الدورية الجزء المساحة مقدار أن اعتبار يمكن وبالتالي، المناسبة، يمكن تحديد الفضاء الجزئي الدوري. يكون $V_n(Z_m)$ لذلك .وبعبارة واحد، زائد الحدود متعدد المعادلة الدرجة من الحدود متعدد هو المعادلة بالضبط الجزئي الفضاء $n+1$ دوري., $n \geq 2$, $m \geq 2$, $n,m \in Z$, $m \in P$.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Secara bahasa, kata ”matematika” berasal dari kata Yunani yaitu ”*mathema*” atau mungkin juga ”*mathematikos*” yang artinya hal-hal yang dipelajari. Orang belanda menyebut matematika dengan *wiskunde* yang artinya ilmu pasti. Sedangkan orang Arab menyebut matematika dengan *’ilmu al hisab*, artinya ilmu berhitung (Abdussakir, 2007:5). Matematika merupakan salah satu cabang ilmu pengetahuan yang banyak sekali manfaatnya. Demikian juga perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi yang sangat pesat saat ini tidak lepas dari peran serta ilmu matematika. Matematika merupakan sebuah ilmu pengetahuan dasar yang dibutuhkan semua manusia dalam kehidupan sehari-hari baik secara langsung maupun tidak langsung (Rahman, 2007:1).

Dari segi wilayah kajian, matematika berawal dari ruang lingkup yang sederhana, yang hanya menelaah tentang bilangan dan ruang, namun sekarang matematika sudah berkembang dengan menelaah hal-hal yang membutuhkan daya pikir dan imajinasi tingkat tinggi (Abdussakir, 2007:6). Dengan mengenal matematika, berarti telah menegaskan bahwasanya orang-orang telah menjauhi kebodohan. Atas itu, Allah selalu memberikan petunjuk pada umatnya agar tidak terjerumus dalam lembah kebodohan. Sebagaimana dalam surat Al-Baqarah ayat 151, Allah berfirman:

كَمَآ أَرۡسَلۡنَا فِيكُمۡ رَسُولاً مِّنكُمۡ يَتۡلُواْ عَلَيۡكُمۡ ءَايَـٰتِنَا وَيُزَكِّيكُمۡ وَيُعَلِّمُكُمُ ٱلۡكِتَـٰبَ وَٱلۡحِكۡمَةَ وَيُعَلِّمُكُم مَّا لَمۡ تَكُونُواْ تَعۡلَمُونَ ﴿١٥١﴾

"Sebagaimana (Kami Telah menyempurnakan nikmat kami kepadamu) kami Telah mengutus kepadamu Rasul diantara kamu yang membacakan ayat-ayat kami kepada kamu dan mensucikan kamu dan mengajarkan kepadamu Al Kitab dan Al-Hikmah, serta mengajarkan kepada kamu apa yang belum kamu ketahui." (QS. Al-Baqarah:151)

Ayat di atas menegaskan bahwa dengan berpegang teguh pada Al-Kitab (Al-Qur'an), para manusia akan diajarkan berbagai hal yang belum pernah mereka ketahui sebelumnya. Hingga dengan demikian, manusia sungguh akan menemukan titik terang sebagai jalan keluar dari kebodohan.

Alam semesta memuat teori-teori dan konsep matematika, meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika itu ada. Alam semesta serta segala isinya diciptakan Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mapan, dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi (Abdussakir, 2007:79). Hal ini menunjukkan bahwa Allah SWT Maha Matematis, Allah Maha Cepat dan Maha Teliti dalam masalah hitung-menghitung. Sebagaimana firman Allah dalam surat Al-Furqan ayat 2:

ٱلَّذِى لَهُۥ مُلۡكُ ٱلسَّمَـٰوَٰتِ وَٱلۡأَرۡضِ وَلَمۡ يَتَّخِذۡ وَلَدًا وَلَمۡ يَكُن لَّهُۥ شَرِيكٌ فِى ٱلۡمُلۡكِ وَخَلَقَ كُلَّ شَىۡءٍ فَقَدَّرَهُۥ تَقۡدِيرًا ﴿٢﴾

"Yang kepunyaan-Nya-lah kerajaan langit dan bumi, dan dia tidak mempunyai anak, dan tidak ada sekutu baginya dalam kekuasaan(Nya), dan dia Telah menciptakan segala sesuatu, dan dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya". (QS. Al-Furqan:2)

Juga dalam Al-Qur'an surat Maryam ayat 94 telah disebutkan bahwa :

لَّقَدۡ أَحۡصَىٰهُمۡ وَعَدَّهُمۡ عَدّٗا ٩٤

"Sesungguhnya Allah Telah menentukan jumlah mereka dan menghitung mereka dengan hitungan yang teliti". (QS. Maryam:94)

Serta dalam surat Maryam ayat 84:

فَلَا تَعۡجَلۡ عَلَيۡهِمۡۖ إِنَّمَا نَعُدُّ لَهُمۡ عَدّٗا ٨٤

"Maka janganlah kamu tergesa-gesa memintakan siksa terhadap mereka, Karena Sesungguhnya kami Hanya menghitung datangnya (hari siksaan) untuk mereka dengan perhitungan yang teliti." (QS. Maryam:84)

Tentunya dengan tidak keluar dari firman-firman Allah SWT tersebut, akan sangat bermanfaat jika terdapat suatu penelitian dan pengkajian khusus tentang matematika dan aspek-aspeknya, seperti halnya pada proses membangun ruang bagian siklis. Pendefinisian suatu ruang bagian siklis merupakan pembahasan dasar dari *cyclic code* (kode siklis) yang mana secara umum kode ini lebih mudah untuk diimplementasikan dan mempunyai aplikasi yang luas. Suatu linear code C disebut *cyclic codes* (kode siklis) jika C merupakan *cyclic subspace* (ruang bagian siklis). Dari definisi tersebut, kita ketahui bahwasanya pembahasan tentang kode siklis tidak akan pernah lepas dari pembahasan tentang ruang bagian siklis. Suatu ruang bagian S atas $V_n(F)$ disebut *cyclic subspace* (ruang bagian siklis) jika $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n) \in S$, maka $(a_n, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) \in S$, yang mana a_i merupakan anggota himpunan vector (Riyanto, 2006:1).

Karena penelitian terdahulu oleh Muhamad Zaki Riyanto tahun 2006 hanya membangun ruang bagian siklis hingga $V_7(Z_2)$, maka dengan berlandaskan jurnalnya yang berjudul "KODE SIKLIS", peneliti mencoba membahas lebih lanjut terkait dengan membangun ruang bagian siklis dalam jurnal tersebut.

Peneliti mencoba menyajikan pembahasan lebih dalam membangun ruang bagian siklis yakni hingga $V_n(Z_m)$ yaitu ruang bagian siklis dari persamaan polinomial dengan derajat n pada bilangan modulo m dengan $n \geq 2$ dan $m \geq 2$, $m, n \in Z$, m bilangan prima. Sehingga peneliti tertarik untuk mengangkat judul "Menentukan Ruang Bagian Siklis dari $V_n(Z_m)$".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah di atas, maka rumusan permasalahan yang akan dibahas yaitu bagaimana menentukan ruang bagian siklis dan berapa banyaknya ruang bagian siklis dari $V_n(Z_m)$?

1.3 Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui dan membahas proses menentukan ruang bagian siklis serta menentukan banyaknya ruang bagian siklis dari $V_n(Z_m)$.

1.4 Batasan Masalah

Agar penulisan skripsi ini tetap terfokus pada pembahasan, maka peneliti membatasi masalah pada menentukan banyaknya ruang bagian siklis dari $V_n(Z_m)$ dengan mengambil Z_m yaitu himpunan bilangan bulat modulo m dan polinomial $f(x) = x^n - 1$ dengan $n \geq 2$ dan $m \geq 2$, $m, n \in Z$, m bilangan prima.

1.5 Manfaat Penelitian

1. Bagi Peneliti

   Penelitian ini diharapkan mampu membantu peneliti dalam mengembangkan dan mengaplikasikan pengetahuan matematika yang telah diperoleh selama di bangku perkuliahan khususnya di bidang aljabar.

2. Bagi Pembaca

   Penelitian ini diharapkan mampu menambah wawasan pembaca tentang ruang bagian siklis dari $V_n(Z_m)$, sehingga nantinya penelitian ini dapat dikembangkan pada bahasan yang lebih luas.

3. Bagi Lembaga

   Sebagai tambahan bahan pustaka di bidang matematika aljabar yang dapat dimanfaatkan untuk perkembangan kedalaman ilmu pengetahuan khususnya di jurusan Matematika Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.

1.6 Metode Penelitian

Metode penelitian yang digunakan dalam penulisan skripsi ini adalah metode penelitian "Kajian Kepustakaan". Pembahasan pada skripsi ini dilakukan dengan:

1. Mengumpulkan dan mempelajari literatur yang berupa buku-buku makalah, dokumentasi, notulen, catatan harian, internet dan lain-lain yang berkaitan dengan masalah penelitian yang akan digunakan dalam menentukan banyaknya ruang bagian siklis dari $V_n(Z_m)$.

2. Menentukan pokok permasalahan dari literatur utama yaitu berupa proses menentukan banyaknya ruang bagian siklis dari $V_n(Z_m)$.
3. Cara menentukan banyaknya ruang bagian siklis dari $V_n(Z_m)$ yaitu dengan langkah-langkah sebagai berikut:
   a. Peneliti memberikan Z_m dengan $m \geq 2, m \in Z$, *m* bilangan prima.
   b. Z_m dikenai polinom yang koefisiennya elemen Z_m.
   c. Himpunan polinomial tersebut dikenai dua operasi yaitu penjumlahan dan perkalian polinomial yang akan menghasilkan ring polinomial yaitu $Z_m[x]$.
   d. Peneliti menentukan $f(x) \in Z_m[x]$.
   e. Peneliti mendefinisikan dua polinomial $h(x), g(x) \in Z_m[x]$ yang disebut kongruen atas *f(x)* jika *h(x)* dan *g(x)* mempunyai sisa yang sama apabila dibagi *f(x)*. Kongruensi ini membentuk klas-klas ekuivalensi.
   f. Klas-klas ekuivalensi dikenai operasi penjumlahan dan perkalian yang akan menghasilkan $(R,+,*)$ yaitu ring polinomial atas $Z_m[x]$.
   g. Peneliti menentukan ruang bagian F yaitu $V_n(F)$ (atau lebih khususnya yaitu $V_n(Z_m)$) dan juga mengambil $f(x) = x^n - 1$.
   h. Peneliti memfaktorkan polinomial *f(x)*.
   i. Peneliti menentukan *monic* yang membagi *f(x)*.
   j. Peneliti membangun ruang bagian siklis dari *monic*.
   k. Peneliti menentukan banyaknya ruang bagian siklis dari $V_n(Z_m)$.

1.7 Sistematika Penulisan

Agar penulisan skripsi ini lebih terarah, mudah ditelaah dan dipahami, maka digunakan sistematika penulisan yeng terdiri dari lima bab. Masing-masing bab dibagi ke dalam beberapa subbab dengan rumusan sebagai berikut:

BAB I : PENDAHULUAN

Bagian ini meliputi: latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian dan sistematika penulisan.

BAB II: KAJIAN PUSTAKA

Bagian ini terdiri atas konsep-konsep (teori-teori) yang mendukung bagian pembahasan. Konsep-konsep tersebut antara lain berisi tentang dasar-dasar teori sebagai acuan dalam penulisan skripsi ini.

BAB III : PEMBAHASAN

Bagian ini menguraikan semua langkah-langkah yang ada pada metode penelitian yang berisi ulasan tentang jawaban dari rumusan masalah.

BAB IV : PENUTUP

Pada bagian ini disajikan kesimpulan dan saran sebagai masukan untuk penelitian selanjutnya.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

Pada bab ini dipaparkan teori-teori yang digunakan sebagai acuan dalam menyelesaikan permasalahan pada bab selanjutnya, serta yang berkaitan dengan pokok permasalahan yang dibahas.

2.1 Ring

Definisi 2.1.1

Operasi atau komposisi * dalam sebuah himpunan tak kosong G adalah biner jika dan hanya jika $a \in G,\ b \in G$ maka $a * b \in G$ (Raisinghania dan Anggarwal, 1980:27).

Definisi 2.1.2

Grup adalah pasangan terurut *(G,*)* dimana G adalah himpunan dan * adalah operasi biner di G yang memenuhi aksioma:

a) * bersifat assosiatif yaitu $a*(b*c)=(a*b)*c$ untuk setiap $a,b,c \in G$.

b) ada elemen identitas yaitu $a*e=e*a=a$ untuk setiap $a \in G$.

c) setiap elemen $a \in G$ mempunyai invers $a^{-1} \in G$ sedemikian sehingga $a*a^{-1}=a^{-1}*a=e$.

Grup *(G, *)* disebut abelian (atau komutatif) jika $a*b=b*a$ untuk setiap $a,b \in G$ (Dummit dan Foote, 1991:225).

Definisi 2.1.3

Suatu Ring (R , $*$, $\bullet$) adalah sebuah himpunan tak kosong R dengan dua operasi biner yaitu $*$ sebagai operasi pertama dan $\bullet$ sebagai operasi kedua, yang kedua-duanya didefinisikan pada R yang memenuhi aksioma berikut :

1. (R , $*$) adalah grup abelian.
2. Operasi $\bullet$ tertutup di R .
3. Operasi $\bullet$ bersifat assosiatif di R.
4. Operasi $\bullet$ bersifat distributif terhadap operasi $*$ di R baik distributif kiri maupun kanan (Dummit dan Foote, 1991:225).

Definisi 2.1.4

Suatu ring (R , $*$, $\bullet$) disebut ring komutatif (*RK*) jika dan hanya jika operasi kedua (operasi $\bullet$) bersifat komutatif di R (Dummit dan Foote, 1991:225).

Definisi 2.1.5

Suatu ring (R , $*$, $\bullet$) disebut ring dengan elemen satuan *(RS)* jika dan hanya jika R punya elemen identitas terhadap operasi kedua (operasi $\bullet$) (Dummit dan Foote, 1991:225).

Suatu ring (R , $*$, $\bullet$) disebut ring komutatif dengan elemen satuan *(RKS)* jika dan hanya jika operasi kedua bersifat komutatif dan R punya elemen identitas terhadap operasi kedua, dengan kata lain merupakan ring komutatif (*RK*) sekaligus ring dengan elemen satuan (*RS*).

Contoh 2.1.6

Diberikan (Z, +, x); dengan Z adalah himpunan bilangan bulat, maka berdasarkan definisi ring, diperoleh:

1. (Z , +) adalah grup abelian yaitu:
   a) $a , b \in Z$ maka $a + b \in Z$.
   b) $a , b, c \in Z$ maka $(a + b) + c = a + (b + c)$.
   c) $a + 0 = 0 + a = a$; 0 adalah identitas terhadap operasi +.
   d) $a + (-a) = (-a) + a = 0$; $(-a) \in Z$ adalah invers dari a.
   e) $a + b = b + a$.
2. Operasi x tertutup di Z yaitu untuk setiap $a , b \in Z$ maka $a \times b \in Z$.
3. Operasi x bersifat assosiatif di Z yaitu untuk setiap $a,b,c \in Z$ berlaku $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$.
4. Operasi x bersifat distributif terhadap operasi + di Z yaitu untuk setiap $a,b,c \in Z$ berlaku $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$ dan $(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$.
5. Untuk tiap $a \in Z$ maka $a \times 1 = 1 \times a = a$, yang berarti ada elemen identitas (yaitu 1) di Z terhadap operasi kedua (operasi x). Jadi (Z, +, x) adalah ring dengan elemen satuan (*RS*).
6. Untuk tiap $a,b \in Z$ maka $a \times b = b \times a$, yang berarti operasi kedua (operasi x) bersifat komutatif di Z. Jadi (Z, +, x) adalah ring komutatif (*RK*).
7. Karena (Z, +, x) adalah ring komutatif (*RK*) dan sekaligus ring dengan elemen satuan (*RS*) maka (Z, +, x) adalah ring komutatif dengan elemen satuan (*RKS*).

Definisi 2.1.7

Misal (R , $*$, $\bullet$) adalah ring komutatif dengan elemen satuan *(RKS)*

Misal i adalah elemen identitas terhadap operasi kedua (i elemen identitas terhadap operasi $\bullet$). Kecuali elemen identitas operasi pertama (e), maka semua unsur di R punya invers terhadap operasi kedua, maka *RKS* yang demikian ini disebut sebagai *Field* (Durbin, 1992: 119).

Contoh 2.1.8

Misal Z_7={0,1,2,3,4,5,6} terhadap penjumlahan mod 7 dan perkalian mod 7. Maka untuk perkalian:

$\times_7$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	**1**	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	**1**	3	5
3	0	3	6	2	5	**1**	4
4	0	4	**1**	5	2	6	5
5	0	5	3	**1**	6	4	2
6	0	6	5	4	3	2	**1**

Pada tabel tersebut terlihat bahwa $1 \times_7 1 = 1,\ 2 \times_7 4 = 4 \times_7 2 = 1,$ $3 \times_7 5 = 5 \times_7 3 = 1,\ 6 \times_7 6 = 1.$ Ini berarti bahwa kecuali elemen identitas operasi pertama (operasi +), maka semua unsur di Z mempunyai invers terhadap operasi kedua (operasi x) yatitu $1^{-1} = 1,\ 2^{-1} = 4,\ 3^{-1} = 5,\ 4^{-1} = 2,\ 5^{-1} = 3,$ $6^{-1} = 6$. Dengan demikian, terbukti bahwa Z merupakan suatu field.

Contoh 2.1.9

1) Himpuan semua bilangan bulat positif modulo n merupakan ring, dinotasikan dengan Z_n.
2) Himpunan semua polinomial dengan koefisiennya adalah elemen suatu field (lapangan) F atas ring R, membentuk ring yang dinotasikan dengan $F[x]$, pada penjumlahan dan perkalian polinomial.

2.2 Suku Banyak (Polinom)

Definisi 2.2.1

Bentuk $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + ax + a_0$ dinamakan suku banyak (polinom) dalam x yang berderajat n dimana n adalah bilangan cacah dan $a_n \neq 0$. Derajat suatu suku banyak dalam x adalah pangkat tertinggi dari x dalam suatu suku banyak (Idel dan Hariyono, 2005:301).

Contoh 2.2.2

1. $6x^3 - 3x^2 + 4x - 8$ adalah suku banyak berderajat 3, dengan koefisien x^3 adalah 6, koefisien x^2 adalah -3, kofisien x adalah 4, dan suku tetapnya -8.
2. $2x^2 - 5x + 4 - \frac{7}{x}$ adalah bukan suku banyak karena memuat pangkat negatif yaitu $\frac{7}{x}$ atau $7x^{-1}$ dengan pangkat –1 bukan anggota bilangan cacah.

Definisi 2.2.3

Suatu polinomial atas suatu field F disebut *monic* jika koefisien utamanya elemen di F (Durbin, 2005:160).

2.3 Faktorisasi Aljabar dan Teorema Sisa

Dalam aljabar, beberapa bilangan yang digunakan mungkin diketahui tetapi bilangan-bilangan lainnya tidak diketahui atau tidak dietntukan. Lebih tepatnya bilangan-bilangan tersebut dilambangkan dengan huruf. Misal $60h + m$, tidak tahu berapa nilai h dan m, maka pernyataan tersebut disebut pernyataan aljabar (Ayres, 2004:3). Untuk memudahkan penguraian bentuk aljabar $(a + b)^5$, $(a + b)^6$, $(a + b)^7$, dan seterusnya, bisa digunakan pola segitiga Pascal dan teorema sisa (khususnya pembagian khusus).

Jika suatu suku banyak $f(x)$ dibagi dengan $(x\text{-}a)$, maka sisanya adalah $s(x) = f(a)$. Sedangkan sisa pembagian dengan $(ax\text{-}b)$ adalah $f(\frac{a}{b})$. Jika suatu suku banyak $f(x)$ dibagi dengan $(x+a)$, maka sisa pembaginya $s(x) = f$. Apabila suatu suku banyak $f(x)$ habis dibagi $(x\text{-}a)$, maka sisa pembaginya $s(x) = f(a) = 0$. Ini berarti bahwa $(x\text{-}a)$ merupakan salah satu akar dari $f(x) = 0$. Rumus pembagian khusus pada teorema sisa yaitu:

1. $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$
2. $a^{2n} - b^{2n} = (a + b)(a^{2n-1} - a^{2n-2}b + \cdots + ab^{2n-2} - b^{2n-1})$
3. $a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a + b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + \cdots + ab^{2n-1} - b^{2n})$ (Idel dan Hariyono, 2005:306).

Contoh 2.3.1

1. $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
2. $a^4 - b^4 = (a + b)(a^3 - a^2b + ab^2 - b^3)$

2.4 Ring Polinomial atas *F* Modulo *f(x)*

Diberikan sebarang polinomial tidak nol $f(x) \in F[x]$ dan misalkan $h(x)$, $g(x) \in F[x]$. $h(x)$ dan $g(x)$ disebut kongruen atas polinomial modulo $f(x)$ *jika dan hanya jika* $f(x)$ membagi $h(x) - g(x)$, yaitu $h(x)$ dan $g(x)$ mempunyai sisa yang sama apabila dibagi dengan $f(x)$. Kongruensi ini membentuk relasi ekuivalensi dan membentuk partisi-partisi, dengan klas-klas ekuivalensi memuat $g(x)$ yang dinotasikan dangan $[g(x)]$ kemudian didefinisikan sebagai

$$[g(x)]=\{h(x):h(x)\equiv g(x) \pmod{f(x)}\}$$

Diberikan $R=F[x]/(f(x))=\{[g(x)]:g(x) \in F[x]\}$

Didefinisikan operasi penjumlahan dan perkalian pada klas-klas ekuivalensi sebagai berikut

$$[g(x)]+[h(x)]=[g(x)+h(x)]$$

dan

$$[g(x)]*[h(x)]=[g(x)*h(x)]$$

Maka $(R,+,*)$ merupakan ring dan disebut dengan *ring polinomial atas* ***F*** *modulo f(x)* (Riyanto, 2006:3).

2.5 Ruang Bagian Siklis dalam Kode Siklis

Kode adalah daftar kata atau simbol yang mengganti secara khusus kata lain. Kode juga merupakan blok dari simbol alphabet yang terbatas. Alphabet yang sering digunakan adalah himpunan barisan biner yaitu simbol 0 dan 1. Salah satu kelas dari kode linier adalah kode siklis. Kode siklis adalah bagian dari kode linier yang mengikuti sifat perputaran siklis. Suatu linear code C disebut *cyclic codes* (kode siklis) jika C merupakan *cyclic subspace*. Karena *cyclic codes* merupakan *linear code*, maka suatu *cyclic codes* mempunyai codeword 0 dan tertutup terhadap operasi penjumlahan. Dalam membangun ruang bagian siklis pada modulo 2, angka yang digunakan untuk merepresentasikan modulo 2 tersebut adalah 0 dan 1 karena lapangan atau field yang dibahas adalah himpunan bilangan bulat positif. Dan bilangan bulat positif tersebut diambil mulai dari bilangan bulat positif yang terkecil beserta bilangan nol (Riyanto, 2006:1-2).

Definisi 2.5.1

Suatu ruang bagian S atas ruang bagian F yaitu $V_n(F)$ disebut *cyclic subspace* (ruang bagian siklis) jika $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n) \in S$, maka $(a_n, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) \in S$. Dengan kata lain, S merupakan suatu ruang bagian dan untuk setiap vektor $a \in S$, setiap *cyclic shift* (pergeseran siklis) juga berada di dalam S (Riyanto, 2006:1).

BAB III

PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas mengenai bagaimana menentukan *cyclic subspace* dan berapa banyaknya *cyclic subspace* dari $V_n(Z_m)$, yang mana n menunjukkan derajat polinom dan m menunjukkan bilangan modulo, dan $n \geq 2$ dan $m \geq 2$, $m, n \in Z$, m bilangan prima. Alasan mengapa n dan m dimulai dari 2 adalah karena :

1. Jika $n = 0$ maka $x^0 - 1 = 1 - 1 = 0$ dan jika $n = 1$ maka $x - 1$, dan karena derajat polinomnya 1, maka tidak dapat ditentukan ruang bagian siklisnya.
2. Jika $m = 0$ maka tidak akan dapat ditentukan ruang bagian siklisnya karena tidak ada pengkodean.
3. Jika $m = 1$ maka akan memberikan hasil tunggal karena pengkodeannya yang tunggal yaitu bilangan nol saja, sehingga tidak dapat ditentukan ruang bagian siklisnya pula.

Sesuai dengan pembahasan dalam jurnal yang merupakan referensi utama dalam skripsi ini, hal yang perlu diingat dan diperhatikan sebelum membentuk ruang bagian siklis adalah:

a. Memfaktorkan polinomial *f(x)* untuk menentukan *monic* yaitu dengan menggunakan teorema sisa (sebagaimana materi yang dijelaskan dalam BAB II).

b. Karena konstanta yang ada pada persamaan polinomial juga digunakan dalam pembentukan ruang bagian siklis, maka koefisien yang digunakan dalam pembentukan ruang bagian siklis adalah koefisien dari variabel (dalam skripsi ini yang digunakan adalah variabel x) yang mana polinom dari variabel tersebut dikurangi 1, sehingga banyak pengkodeannya sesuai dengan derajat polinomnya.

c. Koefisien dan konstanta yang bukan bilangan bulat positif maka dianggap sebagai 0.

3.1 Ruang Bagian Siklis dari $V_n(Z_2)$

Pada modulo 2, pengkodeannya adalah 0 dan 1.

3.1.1 Ruang Bagian Siklis dari $V_2(Z_2)$

Diberikan $V_2(Z_2)$ dan ambil polinom $f(x) \in Z_m[x]$ dengan $f(x) = x^2 - 1$. Faktorisasi *monic* dari $f(x)$ adalah

$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$

Monic yang membagi $f(x)$ adalah

$$g_1(x) = 1$$

$$g_2(x) = x - 1$$

$$g_3(x) = x + 1$$

$$g_4(x) = (x-1)(x+1) = f(x)$$

Pembangunan ruang bagian siklisnya yaitu:

1. $g_1(x) = 1$

   Sehingga, hanya terdapat konstanta dalam $g_1(x)$ yaitu 1. Karena derajat polinomnya 2, maka koefisien x adalah 0. Dengan demikian, akan dibentuk ruang bagian siklis dari (01). Dengan definisi ruang bagian siklis, maka $g_1(x)$ membangun ruang bagian siklis S = {(00), (01), (10)}.

2. $g_2(x) = x - 1$

   Sehingga, koefisien x adalah 1. Karena konstantanya -1, maka konstantanya dianggap sebagai 0. Dengan demikian, akan dibentuk ruang bagian siklis dari (10). Dengan definisi ruang bagian siklis, maka $g_2(x)$ membangun ruang bagian siklis S = {(00), (10), (01)}.

3. $g_3(x) = x + 1$

   Sehingga, koefisien x adalah 1 dan konstantanya adalah 1. Dengan demikian, akan dibentuk ruang bagian siklis dari (11). Dengan definisi ruang bagian siklis, maka $g_3(x)$ membangun ruang bagian siklis S = {(00), (11)} (*menunjukkan identitas penjumlahan dan perkalian*).

4. $g_4(x) = (x - 1)(x + 1) = x^2 - 1$

   Sehingga, koefisien x^2 adalah 1 dan koefisien dari x adalah 0. Karena konstantanya adalah -1, maka konstantanya dianggap sebagai 0. Karena derajat polinomnya 2, maka koefisien dari x^2 tidak digunakan dalam membangun ruang bagian siklis. Dengan demikian, akan dibentuk ruang bagian siklis dari (00). Dengan definisi ruang bagian siklis, maka $g_4(x)$ membangun ruang bagian siklis S = {(00)}.

Dengan pembentukan ruang bagian siklis dari beberapa *monic* yang ada tersebut, telah diketahui bahwa $V_2(Z_2)$ mempunyai tepat 3 ruang bagian siklis. Banyaknya ruang bagian siklis tersebut ditentukan dari ruang bagian siklis terbanyak yang dibentuk dari *monic*.

3.1.2 Ruang Bagian Siklis dari $V_3(Z_2)$

Diberikan $V_3(Z_2)$ dan ambil polinom $f(x) \in Z_m[x]$ dengan *f(x)* = $x^3 - 1$. Faktorisasi *monic* dari *f(x)* adalah

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$$

Monic yang membagi *f(x)* adalah

$$g_1(x) = 1$$

$$g_2(x) = x - 1$$

$$g_3(x) = x^2 + x + 1$$

$$g_4(x) = f(x)$$

Pembangunan ruang bagian siklisnya yaitu:

1) $g_1(x) = 1$

   Sehingga, hanya terdapat konstanta dalam $g_1(x)$ yaitu 1. Karena derajat polinomnya 3, maka koefisien dari x^2 adalah 0 dan koefisien dari *x* adalah 0. Dengan demikian, akan dibentuk ruang bagian siklis dari (001). Dengan definisi ruang bagian siklis, maka $g_1(x)$ membangun ruang bagian siklis *S* = {(000), (001), (100), (010)}.

2) $g_2(x) = x - 1$

   Sehingga, koefisien x^2 adalah 0 dan koefisien x adalah 1. Karena konstantanya -1, maka konstantanya dianggap sebagai 0. Dengan demikian, akan dibentuk ruang bagian siklis dari (010). Dengan definisi ruang bagian siklis, maka $g_2(x)$ membangun ruang bagian siklis *S* = {(000), (010), (001), (100)}.

3) $g_3(x) = \ x^2 + x + 1$

Sehingga, koefisien x^2 adalah 1, koefisien x adalah 1 dan konstantanya adalah 1. Dengan demikian, akan dibentuk ruang bagian siklis dari (111). Dengan definisi ruang bagian siklis, maka $g_3(x)$ membangun ruang bagian siklis S = {(000), (111)} (*menunjukkan identitas penjumlahan dan perkalian*).

4) $g_4(x) = (x-1)(x^2+x+1) = x^3 - 1$

Sehingga, koefisien x^3 adalah 1, koefisien x^2 adalah 0, dan koefisien x adalah 0. Karena konstantanya -1, maka konstantanya dianggap sebagai 0. Karena derajat polinomnya 3, maka koefisien dari x^3 tidak digunakan dalam membangun ruang bagian siklis. Dengan demikian, akan dibentuk ruang bagian siklis dari (000). Dengan definisi ruang bagian siklis, maka $g_4(x)$ membangun ruang bagian siklis S = {(000)}.

Dengan pembentukan ruang bagian siklis dari beberapa *monic* yang ada tersebut, telah diketahui bahwa $V_3(Z_2)$ mempunyai tepat 4 ruang bagian siklis. Banyaknya ruang bagian siklis tersebut ditentukan dari ruang bagian siklis terbanyak yang dibentuk dari *monic*.

3.1.3 Ruang Bagian Siklis dari $V_4(Z_2)$

Diberikan $V_4(Z_2)$ dan ambil polinom $f(x) \in Z_m[x]$ dengan *f(x)* = $x^4 - 1$. Faktorisasi *monic* dari *f(x)* adalah

$$x^4 - 1 = (x-1)(x^2+1)(x+1)$$

Monic yang membagi *f(x)* adalah

$$g_1(x) = 1$$

$$g_2(x) = x - 1$$

$$g_3(x) = x^2 + 1$$

$$g_4(x) = x + 1$$

$$g_5(x) = (x - 1)(x^2 + 1)$$

$$g_6(x) = (x - 1)(x + 1)$$

$$g_7(x) = (x^2 + 1)(x + 1)$$

$$g_8(x) = f(x)$$

Pembangunan ruang bagian siklisnya yaitu:

a) $g_1(x) = 1$

Sehingga, hanya terdapat konstanta dalam $g_1(x)$ yaitu 1. Karena derajat polinomnya 4, maka koefisien x^3 adalah 0, koefisien x^2 adalah 0, dan koefisien x adalah 0. Dengan demikian, akan dibentuk ruang bagian siklis dari (0001). Dengan definisi ruang bagian siklis, maka $g_1(x)$ membangun ruang bagian siklis S = {(0000), (0001), (1000), (0100), (0010)}.

b) $g_2(x) = x - 1$

Sehingga, koefisien x^3 adalah 0, koefisien x^2 adalah 0, dan koefisien x adalah 1. Karena konstantanya -1, maka konstantanya dianggap sebagai 0. Dengan demikian, akan dibentuk ruang bagian siklis dari (0010). Dengan definisi ruang bagian siklis, maka $g_2(x)$ membangun ruang bagian siklis S = {(0000), (0010), (0001), (1000), (0100)}.

c) $g_3(x) = x^2 + 1$

Sehingga, koefisien x^3 adalah 0, koefisien x^2 adalah 1, dan koefisien x adalah 0. Konstantanya adalah 1. Dengan demikian, akan dibentuk ruang bagian siklis dari (0101). Dengan definisi ruang bagian siklis, maka $g_3(x)$ membangun ruang bagian siklis S = {(0000), (0101), (1010)}.

d) $g_4(x) = x + 1$

Sehingga, koefisien x^3 adalah 0, koefisien x^2 adalah 0, dan koefisien x adalah 1. Konstantanya adalah 1. Dengan demikian, akan dibentuk ruang bagian siklis dari (0011). Dengan definisi ruang bagian siklis, maka $g_4(x)$ membangun ruang bagian siklis S = {(0000), (0011), (1001), (1100), (0110)}.

e) $g_5(x) = (x - 1)(x^2 + 1) = x^3 - x^2 + x - 1$

Sehingga, koefisien x^3 adalah 1, koefisien x^2 adalah -1 maka dianggap sebagai 0, dan koefisien x adalah 1. Karena konstantanya -1, maka konstantanya dianggap sebagai 0. Dengan demikian, akan dibentuk ruang bagian siklis dari (1010). Dengan definisi ruang bagian siklis, maka $g_5(x)$ membangun ruang bagian siklis S = {(0000), (1010), (0101)}.

f) $g_6(x) = (x - 1)(x + 1) = x^2 - 1$

Sehingga, koefisien x^3 adalah 0, koefisien x^2 adalah 1, dan koefisien x adalah 0. Karena konstantanya -1, maka konstantanya dianggap sebagai 0. Dengan demikian, akan dibentuk ruang bagian siklis dari (0100). Dengan definisi ruang bagian siklis, maka $g_6(x)$ membangun ruang bagian siklis S = {(0000), (0100), (0010), (0001), (1000)}.

g) $g_7(x) = (x^2 + 1)(x + 1) = x^3 + x^2 + x + 1$

Sehingga, koefisien x^3 adalah 1, koefisien x^2 adalah 1, dan koefisien x adalah 1. Konstantanya adalah 1. Dengan demikian, akan dibentuk ruang bagian siklis dari (1111). Dengan definisi ruang bagian siklis, maka $g_4(x)$

membangun ruang bagian siklis S = {(0000), (1111)} (*menunjukkan identitas penjumlahan dan perkalian*).

h) $g_8(x) = (x-1)(x^2+1)(x+1) = x^4 - 1$

Sehingga, koefisien x^4 adalah 1, koefisien x^3 adalah 0, koefisien x^2 adalah 0, dan koefisien x adalah 0. Karena konstantanya -1, maka konstantanya dianggap sebagai 0. Karena derajat polinomnya 4, maka koefisien dari x^4 tidak digunakan dalam membangun ruang bagian siklis. Dengan demikian, akan dibentuk ruang bagian siklis dari (0000). Dengan definisi ruang bagian siklis, maka $g_8(x)$ membangun ruang bagian siklis S = {(0000)}.

Dengan pembentukan ruang bagian siklis dari beberapa *monic* yang ada tersebut, telah diketahui bahwa $V_4(Z_2)$ mempunyai tepat 5 ruang bagian siklis. Banyaknya ruang bagian siklis tersebut ditentukan dari ruang bagian siklis terbanyak yang dibentuk dari *monic*.

3.1.4 Ruang Bagian Siklis dari $V_5(Z_2)$

Diberikan $V_5(Z_2)$ dan ambil polinom $f(x) \in Z_m[x]$ dengan $f(x) = x^5 - 1$. Faktorisasi *monic* dari *f(x)* adalah

$$x^5 - 1 = (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$$

Monic yang membagi *f(x)* adalah

$$g_1(x) = 1$$

$$g_2(x) = x - 1$$

$$g_3(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

$$g_4(x) = f(x)$$

Pembangunan ruang bagian siklisnya yaitu:

a. $g_1(x) = 1$

Sehingga, hanya terdapat konstanta dalam $g_1(x)$ yaitu 1. Karena derajat polinomnya 5, maka koefisien x^4 adalah 0, koefisien x^3 adalah 0, koefisien x^2 adalah 0, dan koefisien x adalah 0. Dengan demikian, akan dibentuk ruang bagian siklis dari (00001). Dengan definisi ruang bagian siklis, maka $g_1(x)$ membangun ruang bagian siklis S = {(00000), (00001), (10000), (01000), (00100), (00010)}.

b. $g_2(x) = x - 1$

Sehingga, koefisien x^4 adalah 0, koefisien x^3 adalah 0, koefisien x^2 adalah 0, dan koefisien x adalah 1. Karena konstantanya -1, maka konstantanya dianggap sebagai 0. Dengan demikian, akan dibentuk ruang bagian siklis dari (00010). Dengan definisi ruang bagian siklis, maka $g_2(x)$ membangun ruang bagian siklis S = {(00000), (00010), (00001), (10000), (01000), (00100)}.

c. $g_3(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

Sehingga, koefisien x^4 adalah 1, koefisien x^3 adalah 1, koefisien x^2 adalah 1, dan koefisien x adalah 1. Konstantanya adalah 1. Dengan demikian, akan dibentuk ruang bagian siklis dari (11111). Dengan definisi ruang bagian siklis, maka $g_3(x)$ membangun ruang bagian siklis S = {(00000), (11111)} (*menunjukkan identitas penjumlahan dan perkalian*).

d. $g_4(x) = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = x^5 - 1$

Sehingga, koefisien x^5 adalah 1, koefisien x^4 adalah 0, koefisien x^3 adalah 0, koefisien x^2 adalah 0, dan koefisien x adalah 0. Karena konstantanya -1, maka konstantanya dianggap sebagai 0. Karena derajat polinomnya 5, maka koefisien dari x^5 tidak digunakan dalam membangun ruang bagian siklis. Dengan demikian, akan dibentuk ruang bagian siklis dari (00000). Dengan definisi ruang bagian siklis, maka $g_4(x)$ membangun ruang bagian siklis $S = \{(00000)\}$.

Dengan pembentukan ruang bagian siklis dari beberapa *monic* yang ada tersebut, telah diketahui bahwa $V_5(Z_2)$ mempunyai tepat 6 ruang bagian siklis. Banyaknya ruang bagian siklis tersebut ditentukan dari ruang bagian siklis terbanyak yang dibentuk dari *monic*.

3.1.5 Ruang Bagian Siklis dari $V_6(Z_2)$

Diberikan $V_6(Z_2)$ dan ambil polinom $f(x) \in Z_m[x]$ dengan $f(x) = x^6 - 1$. Faktorisasi *monic* dari *f(x)* adalah

$$x^6 - 1 = (x-1)(x+1)(x^4 + x^2 + 1)$$

Monic yang membagi *f(x)* adalah

$$g_1(x) = 1$$

$$g_2(x) = x - 1$$

$$g_3(x) = x + 1$$

$$g_4(x) = x^4 + x^2 + 1$$

$$g_5(x) = (x-1)(x+1)$$

$$g_6(x) = (x-1)(x^4 + x^2 + 1)$$

$$g_7(x) = (x+1)(x^4 + x^2 + 1)$$

$$g_8(x) = f(x)$$

Pembangunan ruang bagian siklisnya yaitu:

a. $g_1(x) = 1$

Sehingga, hanya terdapat konstanta dalam $g_1(x)$ yaitu 1. Karena derajat polinomnya 6, maka koefisien x^5 adalah 0, koefisien x^4 adalah 0, koefisien x^3 adalah 0, koefisien x^2 adalah 0, dan koefisien x adalah 0. Dengan demikian, akan dibentuk ruang bagian siklis dari (000001). Dengan definisi ruang bagian siklis, maka $g_1(x)$ membangun ruang bagian siklis S = {(000000), (000001), (100000), (010000), (001000), (000100), (000010)}.

b. $g_2(x) = x - 1$

Sehingga, koefisien x^5 adalah 0, koefisien x^4 adalah 0, koefisien x^3 adalah 0, koefisien x^2 adalah 0, dan koefisien x adalah 1. Karena konstantanya -1, maka konstantanya dianggap sebagai 0. Dengan demikian, akan dibentuk ruang bagian siklis dari (000010). Dengan definisi ruang bagian siklis, maka $g_2(x)$ membangun ruang bagian siklis S = {(000000), (000010), (000001), (100000), (010000), (001000), (000100)}.

c. $g_3(x) = x + 1$

Sehingga, koefisien x^5 adalah 0, koefisien x^4 adalah 0, koefisien x^3 adalah 0, koefisien x^2 adalah 0, dan koefisien x adalah 1. Konstantanya adalah 1. Dengan demikian, akan dibentuk ruang bagian siklis dari (000011). Dengan definisi ruang bagian siklis, maka $g_3(x)$ membangun ruang bagian siklis S = {(00000), (000011), (100001), (110000), (011000), (001100), (000110)}.

d. $g_4(x) = x^4 + x^2 + 1$

Sehingga, koefisien x^5 adalah 0, koefisien x^4 adalah 1, koefisien x^3 adalah 0, koefisien x^2 adalah 1, dan koefisien x adalah 0. Konstantanya adalah 1. Dengan demikian, akan dibentuk ruang bagian siklis dari (010101). Dengan definisi ruang bagian siklis, maka $g_4(x)$ membangun ruang bagian siklis S = {(000000), (010101), (101010)}.

e. $g_5(x) = (x-1)(x+1) = x^2 - 1$

Sehingga, koefisien x^5 adalah 0, koefisien x^4 adalah 0, koefisien x^3 adalah 0, koefisien x^2 adalah 1, dan koefisien x adalah 0. Karena konstantanya -1, maka konstantanya dianggap sebagai 0. Sehingga akan dibentuk ruang bagian siklis dari (000100). Dengan definisi ruang bagian siklis, maka $g_5(x)$ membangun ruang bagian siklis S = {(000000), (000100), (000010), (000001), (100000), (010000), (001000)}.

f. $g_6(x) = (x-1)(x^4 + x^2 + 1) = x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$

Sehingga, koefisien x^5 adalah 1, koefisien x^4 adalah -1 maka dianggap sebagai 0, koefisien x^3 adalah 1, koefisien x^2 adalah -1 maka dianggap sebagai 0, dan koefisien x adalah 1. Karena konstantanya -1, maka konstantanya dianggap sebagai 0. Dengan demikian, akan dibentuk ruang bagian siklis dari (101010). Dengan definisi ruang bagian siklis, maka $g_6(x)$ membangun ruang bagian siklis S = {(000000), (101010), (010101)}.

g. $g_7(x) = (x+1)(x^4+x^2+1) = x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$

Sehingga, koefisien x^5 adalah 1, koefisien x^4 adalah 1, koefisien x^3 adalah 1, koefisien x^2 adalah 1, dan koefisien x adalah 1. Konstantanya adalah 1. Dengan demikian, akan dibentuk ruang bagian siklis dari (111111). Dengan definisi ruang bagian siklis, maka $g_7(x)$ membangun ruang bagian siklis S = {(000000), (111111)} (*menunjukkan identitas penjumlahan dan perkalian*).

h. $g_8(x) = (x-1)(x+1)(x^4+x^2+1) = x^6-1$

Sehingga, koefisien x^6 adalah 1, koefisien x^5 adalah 0, koefisien x^4 adalah 0, koefisien x^3 adalah 0, koefisien x^2 adalah 0, dan koefisien x adalah 0. Karena konstantanya -1, maka konstantanya dianggap sebagai 0. Karena derajat polinomnya 6, maka koefisien dari x^6 tidak digunakan dalam membangun ruang bagian siklis. Dengan demikian, akan dibentuk ruang bagian siklis dari (000000). Dengan definisi ruang bagian siklis, maka $g_8(x)$ membangun ruang bagian siklis S = {(000000)}.

Dengan pembentukan ruang bagian siklis dari beberapa *monic* yang ada tersebut, telah diketahui bahwa $V_6(Z_2)$ mempunyai tepat 7 ruang bagian siklis. Banyaknya ruang bagian siklis tersebut ditentukan dari ruang bagian siklis terbanyak yang dibentuk dari *monic*.

3.1.6 Ruang Bagian Siklis dari $V_7(Z_2)$

Diberikan $V_7(Z_2)$ dan ambil polinom $f(x) \in Z_m[x]$ dengan *f(x)* = $x^7 - 1$. Faktorisasi *monic* dari *f(x)* adalah

$$x^7 - 1 = (x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$$

Monic yang membagi *f(x)* adalah

$$g_1(x) = 1$$

$$g_2(x) = x - 1$$

$$g_3(x) = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

$$g_4(x) = f(x)$$

Pembangunan ruang bagian siklisnya yaitu:

a. $g_1(x) = 1$

Sehingga, hanya terdapat konstanta dalam $g_1(x)$ yaitu 1. Karena derajat polinomnya 7, maka koefisien x^6 adalah 0, koefisien x^5 adalah 0, koefisien x^4 adalah 0, koefisien x^3 adalah 0, koefisien x^2 adalah 0, dan koefisien x adalah 0. Dengan demikian, akan dibentuk ruang bagian siklis dari (0000001). Dengan definisi ruang bagian siklis, maka $g_1(x)$ membangun ruang bagian siklis S = {(0000000) ,(0000001), (1000000), (0100000), (0010000), (0001000), (0000100), (0000010)}.

b. $g_2(x) = x - 1$

Sehingga, koefisien x^6 adalah 0, koefisien x^5 adalah 0, koefisien x^4 adalah 0, koefisien x^3 adalah 0, koefisien x^2 adalah 0, dan koefisien x adalah 1. Karena konstantanya -1, maka konstantanya dianggap sebagai 0. Dengan demikian, akan dibentuk ruang bagian siklis dari (0000010). Dengan definisi ruang bagian siklis, maka $g_2(x)$ membangun ruang bagian siklis S = {(0000000), (0000010), (0000001), (1000000), (0100000), (0010000), (0001000), (0000100)}.

c. $g_3(x) = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

Sehingga, koefisien x^6 adalah 1, koefisien x^5 adalah 1, koefisien x^4 adalah 1, koefisien x^3 adalah 1, koefisien x^2 adalah 1, dan koefisien x adalah 1. Konstantanya adalah 1. Dengan demikian, akan dibentuk ruang bagian siklis dari (1111111). Dengan definisi ruang bagian siklis, maka $g_3(x)$ membangun ruang bagian siklis S = {(0000000), (1111111)} (*menunjukkan identitas penjumlahan dan perkalian*).

d. $g_4(x) = (x-1)(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = x^7 - 1$

Sehingga, koefisien x^7 adalah 1, koefisien x^6 adalah 0, koefisien x^5 adalah 0, koefisien x^4 adalah 0, koefisien x^3 adalah 0, koefisien x^2 adalah 0, dan koefisien x adalah 0. Karena konstantanya -1, maka konstantanya dianggap sebagai 0. Karena derajat polinomnya 7, maka koefisien dari x^7 tidak digunakan dalam membangun ruang bagian siklis. Dengan demikian, akan dibentuk ruang bagian siklis dari (0000000). Dengan definisi ruang bagian siklis, maka $g_4(x)$ membangun ruang bagian siklis S = {(0000000)}.

Dengan pembentukan ruang bagian siklis dari beberapa *monic* yang ada tersebut, telah diketahui bahwa $V_7(Z_2)$ mempunyai tepat 8 ruang bagian siklis. Banyaknya ruang bagian siklis tersebut ditentukan dari ruang bagian siklis terbanyak yang dibentuk dari *monic*.

3.1.7 Ruang Bagian Siklis dari $V_n(Z_2)$

Diberikan $V_n(Z_2)$ dan ambil polinom $f(x) \in Z_m[x]$ dengan *f(x)* = $x^n - 1$. Faktorisasi *monic* dari *f(x)* adalah

Untuk *n* ganjil

$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1)$$

Monic yang membagi *f(x)* adalah

$$g_1(x) = 1$$

$$g_2(x) = x - 1$$

$$g_3(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1$$

$$g_4(x) = f(x)$$

Pembangunan ruang bagian siklisnya yaitu:

a. $g_1(x) = 1$

Sehingga, hanya terdapat konstanta dalam $g_1(x)$ yaitu 1. Karena derajat polinomnya *n*, maka koefisien-koefisien dari persamaan tersebut:

$$koefisien\ x^{n-1}\ adalah\ 0$$

$$koefisien\ x^{n-2}\ adalah\ 0$$

$$\vdots$$

$$koefisien\ x\ adalah\ 0$$

Dengan demikian, akan dibentuk ruang bagian siklis dari ({0 sebanyak (*n* - 1)}1). Dengan definisi ruang bagian siklis, maka $g_1(x)$ membangun ruang bagian siklis *S* = {(0 sebanyak *n*), ({0 sebanyak (*n* - 1)}1 yang disikliskan)}.

b. $g_2(x) = x - 1$

Sehingga, koefisien-koefisien dari persamaan tersebut:

$$koefisien\ x^{n-1}\ adalah\ 0$$

$$koefisien\ x^{n-2}\ adalah\ 0$$

$$\vdots$$

$$koefisien\ x\ adalah\ 1$$

Karena konstantanya -1, maka konstantanya dianggap sebagai 0. Sehingga akan dibentuk ruang bagian siklis dari ({0 sebanyak mulai koefisien dari x^{n-1} hingga koefisien x^2}10). Dengan definisi ruang bagian siklis, maka $g_2(x)$ membangun ruang bagian siklis *S* = {(0 sebanyak *n*), ({0 sebanyak mulai koefisien dari x^{n-1} hingga koefisien x^2}10 yang disikliskan)}.

c. $g_3(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1$

Sehingga, koefisien-koefisien dari persamaan tersebut:

$$koefisien\ x^{n-1}\ adalah\ 1$$

$$koefisien\ x^{n-2}\ adalah\ 1$$

$$\vdots$$

$$koefisien\ x\ adalah\ 1$$

Konstantanya adalah 1. Sehingga akan dibentuk ruang bagian siklis dari ({1 sebanyak (*n* - 1)}1). Dengan definisi ruang bagian siklis, maka $g_3(x)$ membangun ruang bagian siklis *S* = {(0 sebanyak *n*), ({1 sebanyak (*n* - 1)}1) yang disikliskan)} yang mana ruang bagian siklis yang terbangun tersebut *menunjukkan identitas penjumlahan dan perkalian.*

d. $g_4(x) = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1) = x^n - 1$

Sehingga, koefisien - koefisien dari persamaan tersebut:

$$koefisien\ x^n\ adalah\ 1$$

$$koefisien\ x^{n-1}\ adalah\ 0$$

$$koefisien\ x^{n-2}\ adalah\ 0$$

$$\vdots$$

$$koefisien\ x\ adalah\ 0$$

Karena konstantanya -1, maka konstantanya dianggap sebagai 0. Karena derajat polinomnya *n*, maka koefisien dari x^n tidak digunakan dalam membangun ruang bagian siklis. Sehingga akan dibentuk ruang bagian siklis dari ({0 sebanyak (*n* - 1)}0). Maka, $g_4(x)$ membangun ruang bagian siklis *S* = {({0 sebanyak (*n* - 1)}0)}.

Untuk *n* genap

$$x^n - 1 = (x-1)(x+1)(x^{n-2} + x^{n-4} + \cdots + x^2 + 1)$$

Monic yang membagi *f(x)* adalah

$$g_1(x) = 1$$

$$g_2(x) = x - 1$$

$$g_3(x) = x + 1$$

$$g_4(x) = x^{n-2} + x^{n-4} + \cdots + x^2 + 1$$

$$g_5(x) = (x-1)(x+1)$$

$$g_6(x) = (x-1)(x^{n-2} + x^{n-4} + \cdots + x^2 + 1)$$

$$g_7(x) = (x+1)(x^{n-2} + x^{n-4} + \cdots + x^2 + 1)$$

$$g_8(x) = f(x)$$

Pembangunan ruang bagian siklisnya yaitu:

a. $g_1(x) = 1$

   Sehingga, hanya terdapat konstanta dalam $g_1(x)$ yaitu 1. Karena derajat polinomnya *n*, maka koefisien-koefisien dari persamaan tersebut:

$$koefisien\ x^{n-1}\ adalah\ 0$$

$$koefisien\ x^{n-2}\ adalah\ 0$$

$$\vdots$$

$$koefisien\ x^2\ adalah\ 0$$

$$koefisien\ x\ adalah\ 0$$

Sehingga akan dibentuk ruang bagian siklis dari ({0 sebanyak (n - 1)}1). Dengan definisi ruang bagian siklis, maka $g_1(x)$ membangun ruang bagian siklis S = { (0 sebanyak n), ({0 sebanyak (n - 1)}1 yang disikliskan) }.

b. $g_2(x) = x - 1$

Sehingga, koefisien-koefisien dari persamaan tersebut:

$$koefisien\ x^{n-1}\ adalah\ 0$$

$$koefisien\ x^{n-2}\ adalah\ 0$$

$$\vdots$$

$$koefisien\ x^2\ adalah\ 0$$

$$koefisien\ x\ adalah\ 1$$

Karena konstantanya -1, maka konstantanya dianggap sebagai 0. Sehingga akan dibentuk ruang bagian siklis dari ({0 sebanyak mulai koefisien dari x^{n-1} hingga koefisien x^2}10). Dengan definisi ruang bagian siklis, maka $g_2(x)$ membangun ruang bagian siklis S = {(0 sebanyak n), ({0 sebanyak mulai koefisien dari x^{n-1} hingga koefisien x^2}10 yang disikliskan)}.

c. $g_3(x) = \ x + 1$

Sehingga, koefisien-koefisien dari persamaan tersebut:

$$koefisien\ x^{n-1}\ adalah\ 0$$

$$koefisien\ x^{n-2}\ adalah\ 0$$

$$\vdots$$

$$koefisien\ x^2\ adalah\ 0$$

$$koefisien\ x\ adalah\ 1$$

Konstantanya adalah 1. Sehingga akan dibentuk ruang bagian siklis dari ({0 sebanyak mulai koefisien dari x^{n-1} hingga koefisien x^2}11). Dengan definisi ruang bagian siklis, maka $g_2(x)$ membangun ruang bagian siklis S = {(0 sebanyak n), ({0 sebanyak mulai koefisien dari x^{n-1} hingga koefisien x^2}11 yang disikliskan)}.

d. $g_4(x) = x^{n-2} + x^{n-4} + \cdots + x^2 + 1$

Sehingga, koefisien - koefisien dari persamaan tersebut:

$$koefisien\ x^{n-1}\ adalah\ 0$$

$$koefisien\ x^{n-2}\ adalah\ 1$$

$$koefisien\ x^{n-3}\ adalah\ 0$$

$$koefisien\ x^{n-4}\ adalah\ 1$$

$$\vdots$$

$$koefisien\ x^2\ adalah\ 1$$

$$koefisien\ x\ adalah\ 0$$

Konstantanya adalah 1. Sehingga akan dibentuk ruang bagian siklis dari (010101 dan seterusnya hingga sebanyak n (banyak derajat polinom)). Dengan definisi ruang bagian siklis, maka $g_4(x)$ membangun ruang bagian siklis S = {(0 sebanyak n), (010101 dan seterusnya hingga sebanyak n yang disikliskan)}.

e. $g_5(x) = (x-1)(x+1) = x^2 - 1$

Sehingga, koefisien - koefisien dari persamaan tersebut:

$$koefisien\ x^{n-1}\ adalah\ 0$$

$$koefisien\ x^{n-2}\ adalah\ 0$$

$$\vdots$$

$$koefisien\ x^3\ adalah\ 0$$

$$koefisien\ x^2\ adalah\ 1$$

$$koefisien\ x\ adalah\ 0$$

Karena konstantanya -1, maka konstantanya dianggap sebagai 0. Sehingga akan dibentuk ruang bagian siklis dari ({0 sebanyak mulai koefisien dari x^{n-1} hingga koefisien x^3}100). Dengan definisi ruang bagian siklis, maka $g_5(x)$ membangun ruang bagian siklis *S* = {(0 sebanyak *n*), ({0 sebanyak mulai koefisien dari x^{n-1} hingga koefisien x^3}100 yang disikliskan)}.

f. $g_6(x) = (x-1)(x^{n-2} + x^{n-4} + \cdots + x^2 + 1) = x^{n-1} - x^{n-2} + \cdots - x^2 + x - 1$

Sehingga, koefisien-koefisien dari persamaan tersebut:

$$koefisien\ x^{n-1}\ adalah\ 1$$

$$koefisien\ x^{n-2}\ adalah - 1\ maka\ dianggap\ sebagai\ 0$$

$$\vdots$$

$$koefisien\ x^2\ adalah - 1\ maka\ dianggap\ sebagai\ 0$$

$$koefisien\ x\ adalah\ 1$$

Karena konstantanya -1, maka konstantanya dianggap sebagai 0. Sehingga akan dibentuk ruang bagian siklis dari (101010 dan seterusnya hingga sebanyak *n* (banyak derajat polinom)). Dengan definisi ruang bagian siklis, maka $g_6(x)$ membangun ruang bagian siklis *S* = {(0 sebanyak *n*), (101010 dan seterusnya hingga sebanyak *n* yang disikliskan)}.

g. $g_7(x) = (x+1)(x^{n-2} + x^{n-4} + \cdots + x^2 + 1) = x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x^2 + x + 1$

Sehingga, koefisien - koefisien dari persamaan tersebut:

$$koefisien\ x^{n-1}\ adalah\ 1$$

$$koefisien\ x^{n-2}\ adalah\ 1$$

$$\vdots$$

$$koefisien\ x^{2}\ adalah\ 1$$

$$koefisien\ x\ adalah\ 1$$

Konstantanya adalah 1. Sehingga akan dibentuk ruang bagian siklis dari (111111 dan seterusnya hingga sebanyak *n* (banyak derajat polinom)). Dengan definisi ruang bagian siklis, maka $g_6(x)$ membangun ruang bagian siklis S = {(0 sebanyak n), (111111 dan seterusnya hingga sebanyak n)} (*menunjukkan identitas penjumlahan dan perkalian*).

h. $g_8(x) = (x-1)(x+1)(x^{n-2} + x^{n-4} + \cdots + x^2 + 1) = x^n - 1$

Sehingga, koefisien - koefisien dari persamaan tersebut:

$$koefisien\ x^{n}\ adalah\ 1$$

$$koefisien\ x^{n-1}\ adalah\ 0$$

$$koefisien\ x^{n-2}\ adalah\ 0$$

$$\vdots$$

$$koefisien\ x^{2}\ adalah\ 0$$

$$koefisien\ x\ adalah\ 0$$

Karena konstantanya -1, maka konstantanya dianggap sebagai 0. Karena derajat polinomnya n, maka koefisien dari x^n tidak digunakan dalam membangun ruang bagian siklis. Sehingga akan dibentuk ruang bagian siklis dari (0 sebanyak n). Dengan definisi ruang bagian siklis, maka $g_8(x)$ membangun ruang bagian siklis S = {(0 sebanyak n)}.

Dengan menyimpulkan hasil pembentukan ruang bagian siklis dari beberapa *monic* yang ada pada beberapa polinom diatas, kita ketahui bahwa baik n ganjil ataupun n genap pada $V_n(Z_2)$ mempunyai tepat $n + 1$ ruang bagian siklis, untuk $n \geq 2, n \in Z$. Banyaknya ruang bagian siklis tersebut ditentukan dari ruang bagian siklis terbanyak yang dibentuk dari *monic*.

3.2 Ruang Bagian Siklis dari $V_n(Z_3)$

Pada modulo 3, pengkodeannya adalah 0,1, dan 2.

3.2.1 Ruang Bagian Siklis dari $V_2(Z_3)$

Diberikan $V_2(Z_3)$ dan ambil polinom $f(x) \in Z_m[x]$ dengan $f(x) = x^2 - 1$. Faktorisasi *monic* dari $f(x)$ adalah

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$$

Monic yang membagi $f(x)$ adalah

$$g_1(x) = 1$$

$$g_2(x) = x - 1$$

$$g_3(x) = x + 1$$

$$g_4(x) = (x - 1)(x + 1) = f(x)$$

Pembangunan ruang bagian siklisnya yaitu:

a. $g_1(x) = 1$

Sehingga, hanya terdapat konstanta dalam $g_1(x)$ yaitu 1. Karena derajat polinomnya 2, maka koefisien-koefisien dari persamaan tersebut yaitu koefisien x adalah 0. Sehingga akan dibentuk ruang bagian siklis dari (01).

Dengan definisi ruang bagian siklis, maka $g_1(x)$ membangun ruang bagian siklis S = {(00), (01), (10)}.

b. $g_2(x) = x - 1$

Sehingga, koefisien x adalah 1. Karena konstantanya -1, maka konstantanya dianggap sebagai 0. Sehingga akan dibentuk ruang bagian siklis dari (10). Dengan definisi ruang bagian siklis, maka $g_2(x)$ membangun ruang bagian siklis S = {(00), (10), (01)}.

c. $g_3(x) = x + 1$

Sehingga, koefisien x adalah 1 dan konstantanya adalah 1. Sehingga akan dibentuk ruang bagian siklis dari (11). Dengan definisi ruang bagian siklis, maka $g_3(x)$ membangun ruang bagian siklis S = {(00), (11)} (*menunjukkan identitas penjumlahan dan perkalian*).

d. $g_4(x) = (x - 1)(x + 1) = x^2 - 1$

Sehingga, koefisien x^2 adalah 1 dan koefisien dari x adalah 0. Karena konstantanya adalah -1, maka konstantanya dianggap sebagai 0. Karena derajat polinomnya 2, maka koefisien dari x^2 tidak digunakan dalam membangun ruang bagian siklis. Sehingga akan dibentuk ruang bagian siklis dari (00). Dengan definisi ruang bagian siklis, maka $g_4(x)$ membangun ruang bagian siklis S = {(00)}.

Dengan pembentukan ruang bagian siklis dari beberapa *monic* yang ada tersebut, telah diketahui bahwa $V_2(Z_3)$ mempunyai tepat 3 ruang bagian siklis. Banyaknya ruang bagian siklis tersebut ditentukan dari ruang bagian siklis terbanyak yang dibentuk dari *monic*.

3.2.2 Ruang Bagian Siklis dari $V_3(Z_3)$

Diberikan $V_3(Z_3)$ dan ambil polinom $f(x) \in Z_m[x]$ dengan *f(x)* = $x^3 - 1$. Faktorisasi *monic* dari *f(x)* adalah

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$$

Monic yang membagi *f(x)* adalah

$$g_1(x) = 1$$

$$g_2(x) = x - 1$$

$$g_3(x) = x^2 + x + 1$$

$$g_4(x) = f(x)$$

Pembangunan ruang bagian siklisnya yaitu:

a. $g_1(x) = 1$

   Sehingga, hanya terdapat konstanta dalam $g_1(x)$ yaitu 1. Karena derajat polinomnya 3, maka koefisien dari x^2 adalah 0 dan koefisien dari *x* adalah 0. Sehingga akan dibentuk ruang bagian siklis dari (001). Dengan definisi ruang bagian siklis, maka $g_1(x)$ membangun ruang bagian siklis *S* = {(000), (001), (100), (010)}.

b. $g_2(x) = x - 1$

   Sehingga, koefisien x^2 adalah 0 dan koefisien x adalah 1. Karena konstantanya -1, maka konstantanya dianggap sebagai 0. Sehingga akan dibentuk ruang bagian siklis dari (010). Dengan definisi ruang bagian siklis, maka $g_2(x)$ membangun ruang bagian siklis *S* = {(000), (010), (001), (100)}.

c. $g_3(x) = x^2 + x + 1$

Sehingga, koefisien x^2 adalah 1 dan koefisien x adalah 1. Konstantanya adalah 1. Sehingga akan dibentuk ruang bagian siklis dari (111). Dengan definisi ruang bagian siklis, maka $g_3(x)$ membangun ruang bagian siklis S = {(000), (111)} (*menunjukkan identitas penjumlahan dan perkalian*).

d. $g_4(x) = (x-1)(x^2+x+1) = x^3 - 1$

Sehingga, koefisien x^3 adalah 1, koefisien x^2 adalah 0, dan koefisien x adalah 0. Karena konstantanya -1, maka konstantanya dianggap sebagai 0. Karena derajat polinomnya 3, maka koefisien dari x^3 tidak digunakan dalam membangun ruang bagian siklis. Sehingga akan dibentuk ruang bagian siklis dari (000). Dengan definisi ruang bagian siklis, maka $g_4(x)$ membangun ruang bagian siklis S = {(000)}.

Dengan pembentukan ruang bagian siklis dari beberapa *monic* yang ada tersebut, telah diketahui bahwa $V_3(Z_3)$ mempunyai tepat 4 ruang bagian siklis. Banyaknya ruang bagian siklis tersebut ditentukan dari ruang bagian siklis terbanyak yang dibentuk dari *monic*.

3.2.3 Ruang Bagian Siklis dari $V_4(Z_3)$

Diberikan $V_4(Z_3)$ dan ambil polinom $f(x) \in Z_m[x]$ dengan *f(x)* = $x^4 - 1$. Faktorisasi *monic* dari *f(x)* adalah

$$x^4 - 1 = (x-1)(x^2+1)(x+1)$$

Monic yang membagi *f(x)* adalah

$$g_1(x) = 1$$

$$g_2(x) = x - 1$$

$$g_3(x) = x^2 + 1$$

$$g_4(x) = x + 1$$

$$g_5(x) = (x - 1)(x^2 + 1)$$

$$g_6(x) = (x - 1)(x + 1)$$

$$g_7(x) = (x^2 + 1)(x + 1)$$

$$g_8(x) = f(x)$$

Pembangunan ruang bagian siklisnya yaitu:

a. $g_1(x) = 1$

Sehingga, hanya terdapat konstanta dalam $g_1(x)$ yaitu 1. Karena derajat polinomnya 4, maka koefisien x^3 adalah 0, koefisien x^2 adalah 0, dan koefisien x adalah 0. Sehingga akan dibentuk ruang bagian siklis dari (0001). Dengan definisi ruang bagian siklis, maka $g_1(x)$ membangun ruang bagian siklis S = {(0000), (0001), (1000), (0100), (0010)}.

b. $g_2(x) = x - 1$

Sehingga, koefisien x^3 adalah 0, koefisien x^2 adalah 0, dan koefisien x adalah 1. Karena konstantanya -1, maka konstantanya dianggap sebagai 0. Sehingga akan dibentuk ruang bagian siklis dari (0010). Dengan definisi ruang bagian siklis, maka $g_2(x)$ membangun ruang bagian siklis S = {(0000), (0010), (0001), (1000), (0100)}.

c. $g_3(x) = x^2 + 1$

Sehingga, koefisien x^3 adalah 0, koefisien x^2 adalah 1, dan koefisien x adalah 0. Dan konstantanya adalah 1. Sehingga akan dibentuk ruang bagian siklis dari (0101). Dengan definisi ruang bagian siklis, maka $g_3(x)$ membangun ruang bagian siklis S = {(0000), (0101), (1010)}.

d. $g_4(x) = x + 1$

Sehingga, koefisien x^3 adalah 0, koefisien x^2 adalah 0, dan koefisien x adalah 1. Konstantanya adalah 1. Sehingga akan dibentuk ruang bagian siklis dari (0011). Dengan definisi ruang bagian siklis, maka $g_4(x)$ membangun ruang bagian siklis S = {(0000), (0011), (1001), (1100), (0110)}.

e. $g_5(x) = (x - 1)(x^2 + 1) = x^3 - x^2 + x - 1$

Sehingga, koefisien x^3 adalah 1, koefisien x^2 adalah -1 maka dianggap sebagai 0, dan koefisien x adalah 1. Karena konstantanya -1, maka konstantanya dianggap sebagai 0. Sehingga akan dibentuk ruang bagian siklis dari (1010). Dengan definisi ruang bagian siklis, maka $g_5(x)$ membangun ruang bagian siklis S = {(0000), (1010), (0101)}.

f. $g_6(x) = (x - 1)(x + 1) = x^2 - 1$

Sehingga, koefisien x^3 adalah 0, koefisien x^2 adalah 1, dan koefisien x adalah 0. Karena konstantanya -1, maka konstantanya dianggap sebagai 0. Sehingga akan dibentuk ruang bagian siklis dari (0100). Dengan definisi ruang bagian siklis, maka $g_6(x)$ membangun ruang bagian siklis S = {(0000), (0100), (0010), (0001), (1000)}.

g. $g_7(x) = (x^2 + 1)(x + 1) = x^3 + x^2 + x + 1$

Sehingga, koefisien x^3 adalah 1, koefisien x^2 adalah 1, dan koefisien x adalah 1. Konstantanya adalah 1. Sehingga akan dibentuk ruang bagian siklis dari (1111). Dengan definisi ruang bagian siklis, maka $g_4(x)$ membangun ruang bagian siklis S = {(0000), (1111)} (*menunjukkan identitas penjumlahan dan perkalian*).

h. $g_8(x) = (x-1)(x^2+1)(x+1) = x^4 - 1$

Sehingga, koefisien x^4 adalah 1, koefisien x^3 adalah 0, koefisien x^2 adalah 0, dan koefisien x adalah 0. Karena konstantanya -1, maka konstantanya dianggap sebagai 0. Karena derajat polinomnya 4, maka koefisien dari x^4 tidak digunakan dalam membangun ruang bagian siklis. Sehingga akan dibentuk ruang bagian siklis dari (0000). Dengan definisi ruang bagian siklis, maka $g_8(x)$ membangun ruang bagian siklis S = {(0000)}.

Dengan pembentukan ruang bagian siklis dari beberapa *monic* yang ada tersebut, telah diketahui bahwa $V_4(Z_3)$ mempunyai tepat 5 ruang bagian siklis. Banyaknya ruang bagian siklis tersebut ditentukan dari ruang bagian siklis terbanyak yang dibentuk dari *monic*.

3.2.4 Ruang Bagian Siklis dari $V_5(Z_3)$

Diberikan $V_5(Z_3)$ dan ambil polinom $f(x) \in Z_m[x]$ dengan $f(x) = x^5 - 1$. Faktorisasi *monic* dari $f(x)$ adalah

$$x^5 - 1 = (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$$

Monic yang membagi *f(x)* adalah

$$g_1(x) = 1$$

$$g_2(x) = x - 1$$

$$g_3(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

$$g_4(x) = f(x)$$

Pembangunan ruang bagian siklisnya yaitu:

a. $g_1(x) = 1$

Sehingga, hanya terdapat konstanta dalam $g_1(x)$ yaitu 1. Karena derajat polinomnya 5, maka koefisien x^4 adalah 0, koefisien x^3 adalah 0, koefisien x^2 adalah 0, dan koefisien x adalah 0. Sehingga akan dibentuk ruang bagian siklis dari (00001). Dengan definisi ruang bagian siklis, maka $g_1(x)$ membangun ruang bagian siklis S = {(00000), (00001), (10000), (01000), (00100), (00010)}.

b. $g_2(x) = x - 1$

Sehingga, koefisien x^4 adalah 0, koefisien x^3 adalah 0, koefisien x^2 adalah 0, dan koefisien x adalah 1. Karena konstantanya -1, maka konstantanya dianggap sebagai 0. Sehingga akan dibentuk ruang bagian siklis dari (00010). Dengan definisi ruang bagian siklis, maka $g_2(x)$ membangun ruang bagian siklis S = {(00000), (00010), (00001), (10000), (01000), (00100)}.

c. $g_3(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

Sehingga, koefisien x^4 adalah 1, koefisien x^3 adalah 1, koefisien x^2 adalah 1, dan koefisien x adalah 1. Konstantanya adalah 1. Sehingga akan dibentuk ruang bagian siklis dari (11111). Dengan definisi ruang bagian siklis, maka $g_3(x)$ membangun ruang bagian siklis S = {(00000), (11111)} (*menunjukkan identitas penjumlahan dan perkalian*).

d. $g_4(x) = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = x^5 - 1$

Sehingga, koefisien x^5 adalah 1, koefisien x^4 adalah 0, koefisien x^3 adalah 0, koefisien x^2 adalah 0, dan koefisien x adalah 0. Karena konstantanya -1, maka konstantanya dianggap sebagai 0. Karena derajat polinomnya 5, maka koefisien dari x^5 tidak digunakan dalam membangun ruang bagian siklis. Sehingga akan dibentuk ruang bagian siklis dari (00000). Dengan definisi ruang bagian siklis, maka $g_4(x)$ membangun ruang bagian siklis $S = \{(00000)\}$.

Dengan pembentukan ruang bagian siklis dari beberapa *monic* yang ada tersebut, telah diketahui bahwa $V_5(Z_3)$ mempunyai tepat 6 ruang bagian siklis. Banyaknya ruang bagian siklis tersebut ditentukan dari ruang bagian siklis terbanyak yang dibentuk dari *monic*.

3.2.5 Ruang Bagian Siklis dari $V_6(Z_3)$

Diberikan $V_6(Z_3)$ dan ambil polinom $f(x) \in Z_m[x]$ dengan $f(x) = x^6 - 1$. Faktorisasi *monic* dari $f(x)$ adalah

$$x^6 - 1 = (x-1)(x+1)(x^4 + x^2 + 1)$$

Monic yang membagi $f(x)$ adalah

$$g_1(x) = 1$$

$$g_2(x) = x - 1$$

$$g_3(x) = x + 1$$

$$g_4(x) = x^4 + x^2 + 1$$

$$g_5(x) = (x-1)(x+1)$$

$$g_6(x) = (x-1)(x^4 + x^2 + 1)$$

$$g_7(x) = (x+1)(x^4 + x^2 + 1)$$

$$g_8(x) = f(x)$$

Pembangunan ruang bagian siklisnya yaitu:

a. $g_1(x) = 1$

Sehingga, hanya terdapat konstanta dalam $g_1(x)$ yaitu 1. Karena derajat polinomnya 6, maka koefisien x^5 adalah 0, koefisien x^4 adalah 0, koefisien x^3 adalah 0, koefisien x^2 adalah 0, dan koefisien x adalah 0. Sehingga akan dibentuk ruang bagian siklis dari (000001). Dengan definisi ruang bagian siklis, maka $g_1(x)$ membangun ruang bagian siklis S = {(000000), (000001), (100000), (010000), (001000), (000100), (000010)}.

b. $g_2(x) = x - 1$

Sehingga, koefisien x^5 adalah 0, koefisien x^4 adalah 0, koefisien x^3 adalah 0, koefisien x^2 adalah 0, dan koefisien x adalah 1. Karena konstantanya -1, maka konstantanya dianggap sebagai 0. Sehingga akan dibentuk ruang bagian siklis dari (000010). Dengan definisi ruang bagian siklis, maka $g_2(x)$ membangun ruang bagian siklis S = {(000000), (000010), (000001), (100000), (010000), (001000), (000100)}.

c. $g_3(x) = x + 1$

Sehingga, koefisien x^5 adalah 0, koefisien x^4 adalah 0, koefisien x^3 adalah 0, koefisien x^2 adalah 0, dan koefisien x adalah 1. Konstantanya adalah 1. Sehingga akan dibentuk ruang bagian siklis dari (000011). Dengan definisi ruang bagian siklis, maka $g_3(x)$ membangun ruang bagian siklis S = {(00000), (000011), (100001), (110000), (011000), (001100), (000110)}.

d. $g_4(x) = x^4 + x^2 + 1$

Sehingga, koefisien x^5 adalah 0, koefisien x^4 adalah 1, koefisien x^3 adalah 0, koefisien x^2 adalah 1, dan koefisien x adalah 0. Konstantanya adalah 1. Sehingga akan dibentuk ruang bagian siklis dari (010101). Dengan definisi ruang bagian siklis, maka $g_4(x)$ membangun ruang bagian siklis S = {(000000), (010101), (101010)}.

e. $g_5(x) = (x - 1)(x + 1) = x^2 - 1$

Sehingga, koefisien x^5 adalah 0, koefisien x^4 adalah 0, koefisien x^3 adalah 0, koefisien x^2 adalah 1, dan koefisien x adalah 0. Karena konstantanya -1, maka konstantanya dianggap sebagai 0. Sehingga akan dibentuk ruang bagian siklis dari (000100). Dengan definisi ruang bagian siklis, maka $g_5(x)$ membangun ruang bagian siklis S = {(000000), (000100), (000010), (000001), (100000), (010000), (001000)}.

f. $g_6(x) = (x - 1)(x^4 + x^2 + 1) = x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$

Sehingga, koefisien x^5 adalah 1, koefisien x^4 adalah -1 maka dianggap sebagai 0, koefisien x^3 adalah 1, koefisien x^2 adalah -1 maka dianggap sebagai 0, dan koefisien x adalah 1. Karena konstantanya -1, maka konstantanya dianggap sebagai 0. Sehingga akan dibentuk ruang bagian siklis dari (101010). Dengan definisi ruang bagian siklis, maka $g_6(x)$ membangun ruang bagian siklis S = {(000000), (101010), (010101)}.

g. $g_7(x) = (x + 1)(x^4 + x^2 + 1) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

Sehingga, koefisien x^5 adalah 1, koefisien x^4 adalah 1, koefisien x^3 adalah 1, koefisien x^2 adalah 1, dan koefisien x adalah 1. Konstantanya adalah 1. Sehingga akan dibentuk ruang bagian siklis dari (111111).

Dengan definisi ruang bagian siklis, maka $g_7(x)$ membangun ruang bagian siklis S = {(000000), (111111)} (*menunjukkan identitas penjumlahan dan perkalian*).

h. $g_8(x) = (x-1)(x+1)(x^4+x^2+1) = x^6 - 1$

Sehingga, koefisien x^6 adalah 1, koefisien x^5 adalah 0, koefisien x^4 adalah 0, koefisien x^3 adalah 0, koefisien x^2 adalah 0, dan koefisien x adalah 0. Karena konstantanya -1, maka konstantanya dianggap sebagai 0. Karena derajat polinomnya 6, maka koefisien dari x^6 tidak digunakan dalam membangun ruang bagian siklis. Sehingga akan dibentuk ruang bagian siklis dari (000000). Dengan definisi ruang bagian siklis, maka $g_8(x)$ membangun ruang bagian siklis S = {(000000)}.

Dengan pembentukan ruang bagian siklis dari beberapa *monic* yang ada tersebut, telah diketahui bahwa $V_6(Z_3)$ mempunyai tepat 7 ruang bagian siklis. Banyaknya ruang bagian siklis tersebut ditentukan dari ruang bagian siklis terbanyak yang dibentuk dari *monic*.

3.2.6 Ruang Bagian Siklis dari $V_7(Z_3)$

Diberikan $V_7(Z_3)$ dan ambil polinom $f(x) \in Z_m[x]$ dengan *f(x)* = $x^7 - 1$. Faktorisasi *monic* dari *f(x)* adalah

$$x^7 - 1 = (x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$$

Monic yang membagi *f(x)* adalah

$$g_1(x) = 1$$

$$g_2(x) = x - 1$$

$$g_3(x) = x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$$

$$g_4(x) = f(x)$$

Pembangunan ruang bagian siklisnya yaitu:

a. $g_1(x) = 1$

Sehingga, hanya terdapat konstanta dalam $g_1(x)$ yaitu 1. Karena derajat polinomnya 7, maka koefisien x^6 adalah 0, koefisien x^5 adalah 0, koefisien x^4 adalah 0, koefisien x^3 adalah 0, koefisien x^2 adalah 0, dan koefisien x adalah 0. Sehingga akan dibentuk ruang bagian siklis dari (0000001). Dengan definisi ruang bagian siklis, maka $g_1(x)$ membangun ruang bagian siklis S = {(0000000) ,(0000001), (1000000), (0100000), (0010000), (0001000), (0000100), (0000010)}.

b. $g_2(x) = x - 1$

Sehingga, koefisien x^6 adalah 0, koefisien x^5 adalah 0, koefisien x^4 adalah 0, koefisien x^3 adalah 0, koefisien x^2 adalah 0, dan koefisien x adalah 1. Karena konstantanya -1, maka konstantanya dianggap sebagai 0. Sehingga akan dibentuk ruang bagian siklis dari (0000010). Dengan definisi ruang bagian siklis, maka $g_2(x)$ membangun ruang bagian siklis S = {(0000000), (0000010), (0000001), (1000000), (0100000), (0010000), (0001000), (0000100)}.

c. $g_3(x) = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

Sehingga, koefisien x^6 adalah 1, koefisien x^5 adalah 1, koefisien x^4 adalah 1, koefisien x^3 adalah 1, koefisien x^2 adalah 1, dan koefisien x adalah 1. Konstantanya adalah 1. Sehingga akan dibentuk ruang bagian siklis dari (1111111). Dengan definisi ruang bagian siklis, maka $g_3(x)$

membangun ruang bagian siklis S = {(0000000), (1111111)} (*menunjukkan identitas penjumlahan dan perkalian*).

d. $g_4(x) = (x-1)(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = x^7 - 1$

Sehingga, koefisien x^7 adalah 1, koefisien x^6 adalah 0, koefisien x^5 adalah 0, koefisien x^4 adalah 0, koefisien x^3 adalah 0, koefisien x^2 adalah 0, dan koefisien x adalah 0. Karena konstantanya -1, maka konstantanya dianggap sebagai 0. Karena derajat polinomnya 7, maka koefisien dari x^7 tidak digunakan dalam membangun ruang bagian siklis. Sehingga akan dibentuk ruang bagian siklis dari (0000000). Dengan definisi ruang bagian siklis, maka $g_4(x)$ membangun ruang bagian siklis S = {(0000000)}.

Dengan pembentukan ruang bagian siklis dari beberapa *monic* yang ada tersebut, telah diketahui bahwa $V_7(Z_3)$ mempunyai tepat 8 ruang bagian siklis. Banyaknya ruang bagian siklis tersebut ditentukan dari ruang bagian siklis terbanyak yang dibentuk dari *monic*.

Untuk modulo selanjutnya, rumus umum penyimbolannya yaitu:

1. Modulo 2 = {0, 1}
2. Modulo 3 = {0, 1, 2}
3. Modulo 4 = {0, 1, 2, 3}
4. Modulo 5 = {0, 1, 2, 3, 4}

   ⋮

5. Modulo m = {0, 1, 2, … , m – 1}

Dengan melihat *monic-monic* dari persamaan polinomial yang telah dipaparkan diatas, tidak terdapat koefisien pada *monic* yang koefisiennya lebih dari 1. Konstanta yang ada hanya memiliki dua kemungkinan yaitu -1 atau 1, yang mana -1 disimbolkan sebagai 0. Hal itu terjadi karena pada pembahasan skripsi ini faktorisasi persamaannya menggunakan pembagian khusus pada teorema sisa, yaitu

1) $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$
2) $a^{2n} - b^{2n} = (a + b)(a^{2n-1} - a^{2n-2}b + \cdots + ab^{2n-2} - b^{2n-1})$
3) $a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a + b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + \cdots + ab^{2n-1} - b^{2n})$

Dengan demikian, dalam skripsi ini, symbol yang digunakan dalam membangun ruang bagian siklis tersebut hanya 0 dan 1. Sehingga pembangunan ruang bagian siklis pada modulo $m \geq 2$, $m \in Z$, m bilangan prima adalah sama dengan pembangunan ruang bagian siklis pada modulo 2. Hal tersebut dibuktikan dengan pembangunan ruang bagian siklis pada modulo 3 diatas yang mana hasilnya sama dengan pembangunan ruang bagian siklis pada modulo 2.

3.3 Ruang Bagian Siklis dari $V_n(Z_m)$

Pada modulo *m*, pengkodeannya adalah 0, 1, 2, $\cdots$, $m - 1$. Diberikan $V_n(Z_m)$ dan ambil polinom $f(x) \in Z_m[x]$ dengan *f(x)* = $x^n - 1$. Faktorisasi *monic* dari *f(x)* adalah

Untuk *n* ganjil

$$x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1)$$

Monic yang membagi *f(x)* adalah

$$g_1(x) = 1$$

$$g_2(x) = x - 1$$

$$g_3(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1$$

$$g_4(x) = f(x)$$

Pembangunan ruang bagian siklisnya yaitu:

a. $g_1(x) = 1$

Sehingga, hanya terdapat konstanta dalam $g_1(x)$ yaitu 1. Karena derajat polinomnya n, maka koefisien-koefisien dari persamaan tersebut:

$$koefisien\ x^{n-1}\ adalah\ 0$$

$$koefisien\ x^{n-2}\ adalah\ 0$$

$$\vdots$$

$$koefisien\ x\ adalah\ 0$$

Sehingga akan dibentuk ruang bagian siklis dari ({0 sebanyak (*n* - 1)}1). Dengan definisi ruang bagian siklis, maka $g_1(x)$ membangun ruang bagian siklis *S* = { (0 sebanyak *n*), ({0 sebanyak (*n* - 1)}1 yang disikliskan) }.

b. $g_2(x) = x - 1$

Sehingga, koefisien-koefisien dari persamaan tersebut:

$$koefisien\ x^{n-1}\ adalah\ 0$$

$$koefisien\ x^{n-2}\ adalah\ 0$$

$$\vdots$$

$$koefisien\ x\ adalah\ 1$$

Karena konstantanya -1, maka konstantanya dianggap sebagai 0. Sehingga akan dibentuk ruang bagian siklis dari ({0 sebanyak mulai koefisien dari x^{n-1} hingga koefisien x^2}10). Dengan definisi ruang bagian siklis, maka $g_2(x)$ membangun ruang bagian siklis *S* = {(0 sebanyak *n*), ({0 sebanyak mulai koefisien dari x^{n-1} hingga koefisien x^2}10 yang disikliskan)}.

c. $g_3(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1$

Sehingga, koefisien-koefisien dari persamaan tersebut:

$$koefisien\ x^{n-1}\ adalah\ 1$$

$$koefisien\ x^{n-2}\ adalah\ 1$$

$$\vdots$$

$$koefisien\ x\ adalah\ 1$$

Konstantanya adalah 1. Sehingga akan dibentuk ruang bagian siklis dari ({1 sebanyak (n - 1)}1). Dengan definisi ruang bagian siklis, maka $g_3(x)$ membangun ruang bagian siklis S = {(0 sebanyak n), ({1 sebanyak (n - 1)}1) yang disikliskan)} yang mana ruang bagian siklis yang terbangun tersebut *menunjukkan identitas penjumlahan dan perkalian*.

d. $g_4(x) = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1) = x^n - 1$

Sehingga, koefisien - koefisien dari persamaan tersebut:

$$koefisien\ x^{n}\ adalah\ 1$$

$$koefisien\ x^{n-1}\ adalah\ 0$$

$$koefisien\ x^{n-2}\ adalah\ 0$$

$$\vdots$$

$$koefisien\ x\ adalah\ 0$$

Karena konstantanya -1, maka konstantanya dianggap sebagai 0. Karena derajat polinomnya n, maka koefisien dari x^n tidak digunakan dalam membangun ruang bagian siklis. Sehingga akan dibentuk ruang bagian siklis dari ({0 sebanyak (n - 1)}0). Sehingga, $g_4(x)$ membangun ruang bagian siklis S = {({0 sebanyak (n - 1)}0)}.

Untuk n genap

$$x^n - 1 = (x-1)(x+1)(x^{n-2} + x^{n-4} + \cdots + x^2 + 1)$$

Monic yang membagi *f(x)* adalah

$$g_1(x) = 1$$

$$g_2(x) = x - 1$$

$$g_3(x) = x + 1$$

$$g_4(x) = x^{n-2} + x^{n-4} + \cdots + x^2 + 1$$

$$g_5(x) = (x - 1)(x + 1)$$

$$g_6(x) = (x - 1)(x^{n-2} + x^{n-4} + \cdots + x^2 + 1)$$

$$g_7(x) = (x + 1)(x^{n-2} + x^{n-4} + \cdots + x^2 + 1)$$

$$g_8(x) = f(x)$$

Pembangunan ruang bagian siklisnya yaitu:

a. $g_1(x) = 1$

Sehingga, hanya terdapat konstanta dalam $g_1(x)$ yaitu 1. Karena derajat polinomnya *n*, maka koefisien-koefisien dari persamaan tersebut:

$$koefisien\ x^{n-1}\ adalah\ 0$$

$$koefisien\ x^{n-2}\ adalah\ 0$$

$$\vdots$$

$$koefisien\ x^2\ adalah\ 0$$

$$koefisien\ x\ adalah\ 0$$

Sehingga akan dibentuk ruang bagian siklis dari ({0 sebanyak (*n* - 1)}1). Dengan definisi ruang bagian siklis, maka $g_1(x)$ membangun ruang bagian siklis *S* = { (0 sebanyak *n*), ({0 sebanyak (*n* - 1)}1 yang disikliskan) }.

b. $g_2(x) = x - 1$

Sehingga, koefisien-koefisien dari persamaan tersebut:

$$koefisien\ x^{n-1}\ adalah\ 0$$

$$koefisien\ x^{n-2}\ adalah\ 0$$

$$\vdots$$

$$koefisien\ x^{2}\ adalah\ 0$$

$$koefisien\ x\ adalah\ 1$$

Karena konstantanya -1, maka konstantanya dianggap sebagai 0. Sehingga akan dibentuk ruang bagian siklis dari ({0 sebanyak mulai koefisien dari x^{n-1} hingga koefisien x^2}10). Dengan definisi ruang bagian siklis, maka $g_2(x)$ membangun ruang bagian siklis S = {(0 sebanyak n), ({0 sebanyak mulai koefisien dari x^{n-1} hingga koefisien x^2}10 yang disikliskan)}.

c. $g_3(x) = x + 1$

Sehingga, koefisien-koefisien dari persamaan tersebut:

$$koefisien\ x^{n-1}\ adalah\ 0$$

$$koefisien\ x^{n-2}\ adalah\ 0$$

$$\vdots$$

$$koefisien\ x^{2}\ adalah\ 0$$

$$koefisien\ x\ adalah\ 1$$

Konstantanya adalah 1. Sehingga akan dibentuk ruang bagian siklis dari ({0 sebanyak mulai koefisien dari x^{n-1} hingga koefisien x^2}11). Dengan definisi ruang bagian siklis, maka $g_2(x)$ membangun ruang bagian siklis S = {(0 sebanyak n), ({0 sebanyak mulai koefisien dari x^{n-1} hingga koefisien x^2}11 yang disikliskan)}.

d. $g_4(x) = x^{n-2} + x^{n-4} + \cdots + x^2 + 1$

Sehingga, koefisien - koefisien dari persamaan tersebut:

$$koefisien\ x^{n-1}\ adalah\ 0$$

$$koefisien\ x^{n-2}\ adalah\ 1$$

$$koefisien\ x^{n-3}\ adalah\ 0$$

$$koefisien\ x^{n-4}\ adalah\ 1$$

$$\vdots$$

$$koefisien\ x^{2}\ adalah\ 1$$

$$koefisien\ x\ adalah\ 0$$

Konstantanya adalah 1. Sehingga akan dibentuk ruang bagian siklis dari (010101 dan seterusnya hingga sebanyak n (banyak derajat polinom)). Dengan definisi ruang bagian siklis, maka $g_4(x)$ membangun ruang bagian siklis S = {(0 sebanyak n), (010101 dan seterusnya hingga sebanyak n yang disikliskan)}.

e. $g_5(x) = (x-1)(x+1) = x^2 - 1$

Sehingga, koefisien - koefisien dari persamaan tersebut:

$$koefisien\ x^{n-1}\ adalah\ 0$$

$$koefisien\ x^{n-2}\ adalah\ 0$$

$$\vdots$$

$$koefisien\ x^{3}\ adalah\ 0$$

$$koefisien\ x^{2}\ adalah\ 1$$

$$koefisien\ x\ adalah\ 0$$

Karena konstantanya -1, maka konstantanya dianggap sebagai 0. Sehingga akan dibentuk ruang bagian siklis dari ({0 sebanyak mulai koefisien dari x^{n-1} hingga koefisien x^3}100). Dengan definisi ruang bagian siklis, maka $g_5(x)$ membangun ruang bagian siklis S = {(0 sebanyak n), ({0 sebanyak mulai koefisien dari x^{n-1} hingga koefisien x^3}100 yang disikliskan)}.

f. $g_6(x) = (x-1)(x^{n-2} + x^{n-4} + \cdots + x^2 + 1) = x^{n-1} - x^{n-2} + \cdots - x^2 + x - 1$

Sehingga, koefisien-koefisien dari persamaan tersebut:

$$koefisien\ x^{n-1}\ adalah\ 1$$

$$koefisien\ x^{n-2}\ adalah - 1\ maka\ dianggap\ sebagai\ 0$$

$$\vdots$$

$$koefisien\ x^2\ adalah - 1\ maka\ dianggap\ sebagai\ 0$$

$$koefisien\ x\ adalah\ 1$$

Karena konstantanya -1, maka konstantanya dianggap sebagai 0. Sehingga akan dibentuk ruang bagian siklis dari (101010 dan seterusnya hingga sebanyak *n* (banyak derajat polinom)). Dengan definisi ruang bagian siklis, maka $g_6(x)$ membangun ruang bagian siklis *S* = {(0 sebanyak *n*), (101010 dan seterusnya hingga sebanyak *n* yang disikliskan)}.

g. $g_7(x) = (x+1)(x^{n-2} + x^{n-4} + \cdots + x^2 + 1) = x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x^2 + x + 1$

Sehingga, koefisien - koefisien dari persamaan tersebut:

$$koefisien\ x^{n-1}\ adalah\ 1$$

$$koefisien\ x^{n-2}\ adalah\ 1$$

$$\vdots$$

$$koefisien\ x^2\ adalah\ 1$$

$$koefisien\ x\ adalah\ 1$$

Konstantanya adalah 1. Sehingga akan dibentuk ruang bagian siklis dari (111111 dan seterusnya hingga sebanyak *n* (banyak derajat polinom)). Dengan definisi ruang bagian siklis, maka $g_6(x)$ membangun ruang bagian siklis $S = \{(0$ sebanyak $n)$, (111111 dan seterusnya hingga sebanyak $n)\}$ (*menunjukkan identitas penjumlahan dan perkalian*).

h. $g_8(x) = (x-1)(x+1)(x^{n-2} + x^{n-4} + \cdots + x^2 + 1) = x^n - 1$

Sehingga, koefisien - koefisien dari persamaan tersebut:

$$koefisien\ x^n\ adalah\ 1$$

$$koefisien\ x^{n-1}\ adalah\ 0$$

$$koefisien\ x^{n-2}\ adalah\ 0$$

$$\vdots$$

$$koefisien\ x^2\ adalah\ 0$$

$$koefisien\ x\ adalah\ 0$$

Karena konstantanya -1, maka konstantanya dianggap sebagai 0. Karena derajat polinomnya n, maka koefisien dari x^n tidak digunakan dalam membangun ruang bagian siklis. Sehingga akan dibentuk ruang bagian siklis dari (0 sebanyak n). Dengan definisi ruang bagian siklis, maka $g_8(x)$ membangun ruang bagian siklis $S = \{(0$ sebanyak $n)\}$.

Dengan menyimpulkan hasil pembentukan ruang bagian siklis dari beberapa *monic* yang ada pada beberapa polinom diatas, ketahui bahwa baik n ganjil ataupun n genap pada $V_n(Z_m)$ mempunyai tepat $n+1$ ruang bagian siklis, $n \geq 2,\ m \geq 2,\ n, m \in Z,\ m$ bilangan prima. Banyaknya ruang bagian siklis tersebut ditentukan dari ruang bagian siklis terbanyak yang dibentuk dari *monic*.

3.4 Integrasi Ruang Bagian Siklis dalam Agama Islam

Alam semesta memuat teori-teori dan konsep matematika, meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika itu ada. Alam semesta serta segala isinya diciptakan Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mapan, dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi (Abdussakir, 2007:79).

Terkait dalam pembahasan skripsi ini, langkah pertama peneliti adalah memberikan Z_m untuk $m \geq 2$, $m \in Z$, m bilangan prima. Setelah dikenai polinom dan dua operasi yaitu penjumlahan dan perkalian polynomial, maka akan menghasilkan ring polinomial yaitu Z_m[x]. dan penelitipun menentukan $f(x) \in Z_m[x]$. Setelah itu, *f(x)* difaktorkan. Dalam menentukan faktorisasi dari *f(x),* sangat dibutuhkan ketelitian. Karena, apabila peneliti salah memfaktorkan, maka *monic* yang dihasilkanpun akan salah. Padahal, nilai kebenaran dari *monic* merupakan syarat utama dalam menentukan ruang bagian siklis yang benar. Oleh karena itu, dalam faktorisasi *f(x)* ini, peneliti harus menguasai metode-metode dalam memfaktorkannya. Dalam hal ini yaitu menggunakan metode teorema sisa. Perhitungan-perhitungannya harus seteliti mungkin untuk mendapatkan hasil yang benar, sebagaimana yang telah dicerminkan Allah SWT melalui sifat-Nya Yang Maha Teliti. Seperti dalam firman Allah surat Maryam ayat 94:

لَّقَدۡ أَحۡصَىٰهُمۡ وَعَدَّهُمۡ عَدّٗا ﴿٩٤﴾

"Sesungguhnya Allah Telah menentukan jumlah mereka dan menghitung mereka dengan hitungan yang teliti". (QS. Maryam:94)

Setelah faktorisasi *f(x)* dan menentukan *monic* dengan benar, maka langkah selanjutnya adalah membangun ruang bagian siklis dari *monic*. Dengan memperoleh dan memperhatikan koefisien dan konstanta pada persamaan polinomialnya, maka akan dapat ditentukan ruang bagian dari polynomial tersebut. Setelah ruang bagian dapat ditentukan, maka ruang bagian tersebutpun dapat disikliskan. Dalam arti sederhana, siklis berarti memutar. Misalnya, memutar antara posisi yang depan ke posisi belakang (dan sebaliknya), memutar antara waktu siang hingga malam (dan sebaliknya), ataupun memutar antara perasaan susah ke perasaan senang (dan sebaliknya). Kisah tentang siklis ini juga tergambar dalam firman Allah surat Al-Insyirah ayat 6:

إِنَّ مَعَ ٱلْعُسْرِ يُسْرًا ۝٦

"Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan." (QS. Al-Insyirah:6)

Dalam pembahasan ruang bagian siklis, definisinya yaitu suatu ruang bagian S atas $V_n(F)$ disebut *cyclic subspace* (ruang bagian siklis) jika $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n) \in S$, maka $(a_n, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) \in S$. Dengan kata lain, S merupakan suatu ruang bagian dan untuk setiap vektor $a \in S$, setiap *cyclic shift* (pergeseran siklis) juga berada di dalam *S*. Jadi, dalam hal ini pengkodeannya yang memutar. Dengan mengetahui integrasi ruang bagian siklis dalam agama ini, semakin terlihat jelas bahwa sungguh, Maha Benar Allah dengan segala firman-Nya.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Dari pembahasan dalam BAB III di atas, dapat diperoleh beberapa kesimpulan, yaitu:

1. Dengan memehami langkah-langkah yang telah dipaparkan di BAB III, secara umum langkah-langkah dalam menentukan ruang bagian siklis dari $V_n(Z_m)$ yaitu:
   a. Mengambil $f(x) = x^n - 1$ dari $Z_m[x]$.
   b. Memfaktorkan polinomial *f(x)*.
   c. Menentukan *monic* yang membagi *f(x)*.
   d. Membangun ruang bagian siklis dari *monic*.
   e. Menentukan banyaknya ruang bagian siklis S dari $V_n(Z_m)$.
2. Banyaknya ruang bagian siklis dalam persamaan polinomial adalah derajat polinom dari persamaan tersebut ditambah satu, sehingga, $V_n(Z_m)$ mempunyai tepat $n + 1$ ruang bagian siklis, $n \geq 2,\ m \geq 2,\ n, m \in Z$, m bilangan prima.

4.2 Saran

1. Dalam membahas ruang bagian siklis, sangat dibutuhkan ketelitian yang tinggi baik dalam memfaktorkan polinomial maupun dalam mensikliskan kode-kode dari *monic*.

2. Untuk penelitian selanjutnya, diharapkan metode pemfaktoran polinomial dalam membangun ruang bagian siklis tidak hanya terbatas dengan teorema sisa saja. Sehingga dengan metode yang berbeda tersebut, dapat dibandingkan hasil pembangunan ruang bagian siklisnya.

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press.

Ayres, Frank. 2004. *Matematika Universitas*. Jakarta: ERLANGGA.

Dummit, David S dan Foote, Richard M. 1991. *Abstract Algebra.* New York: Prentice- Hall International, Inc.

Durbin, J.R. 1992. *Modern Algebra: An Introduction*. Canada: John Wiley & Sons, Inc.

Durbin, J. R. 2005. *Modern Algebra an Introduction Fifth Edition*. Canada: John Wiley & Sons, Inc.

Idel, Antoni dan Hariyono, Rudy. 2005. *MATEMATIKA SMA*. Jawa Timur: Gitamedia Press.

Rahman, Hairur. 2007. *Indahnya Matematika dalam Al-Qur'an*. Malang: UIN Malang Press.

Raisinghania dan Anggarwal. 1980. *Modern Algebra*. New Delhi: S.Chand & Company LTD.

Riyanto, Muhamad Zaki. 2006. *Kode Siklik*. http://zaki.math.web.id. (diakses 24 April 2011).

.