BILANGAN *RAINBOW CONNECTION* DARI HASIL OPERASI PENJUMLAHAN DAN PERKALIAN KARTESIUS DUA GRAF

SKRIPSI

Oleh:
FUAD ADI SAPUTRA
NIM. 08610035

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2012

BILANGAN *RAINBOW CONNECTION* DARI HASIL OPERASI PENJUMLAHAN DAN PERKALIAN KARTESIUS DUA GRAF

SKRIPSI

Diajukan kepada:
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
FUAD ADI SAPUTRA
NIM. 08610035

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2012

BILANGAN *RAINBOW CONNECTION* DARI HASIL OPERASI PENJUMLAHAN DAN PERKALIAN KARTESIUS DUA GRAF

SKRIPSI

Oleh:
FUAD ADI SAPUTRA
NIM : 08610035

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal: 24 Juni 2012

Pembimbing I,	**Pembimbing II,**
Abdussakir, M.Pd	**Ach.Nashichuddin, M.A**
NIP. 19751906 200312 1 001	**NIP. 19730725 200003 1 001**

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

BILANGAN *RAINBOW CONNECTION* DARI HASIL OPERASI PENJUMLAHAN DAN PERKALIAN KARTESIUS DUA GRAF

SKRIPSI

Oleh:
FUAD ADI SAPUTRA
NIM : 08610035

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal: 7 Juli 2012

Penguji Utama	:	Drs. Turmudi, M.Si	
		NIP. 19571005 198203 1 006	....
Ketua Penguji	:	H. Wahyu Henky Irawan, M.Pd	
		NIP. 19710420 200003 1 003	....
Sekretaris Penguji	:	Abdussakir, M.Pd	
		NIP. 19751006 200312 1 001	....
Anggota Penguji	:	Ach. Nashichuddin, MA	
		NIP. 19730725 200003 1 001	....

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP.19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Fuad Adi Saputra
NIM	: 08610035
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul Penelitian	: Bilangan *Rainbow Connection* Dari Hasil Operasi Penjumlahan Dan Perkalian Kartesius Dua Graf

Menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa hasil penelitian saya ini tidak terdapat unsur-unsur penjiplakan atau karya ilmiah yang pernah dilakukan atau dibuat oleh orang lain, kecuali yang secara tertulis dikutip dalam naskah ini dan disebutkan dalam sumber kutipan dan daftar pustaka. Apabila ternyata hasil penelitian ini terbukti terdapat unsur-unsur jiplakan, maka saya bersedia untuk mempertanggungjawabkan, serta diproses sesuai peraturan yang berlaku.

Malang, 24 Juni 2012

Yang membuat pernyataan,

FUAD ADI SAPUTRA

NIM. 08610035

MOTTO

“Sesungguhnya Allah tidak akan mengubah nasib suatu kaum, kecuali kaum itu yang mengubahnya sendiri”

HALAMAN PERSEMBAHAN

Penulis persembahkan skripsi ini untuk keluarga tercinta Ibu Atik Ngatirah, Bapak Imam Thohari, Kakak Nirwana Supriyadi, Kakak Riza Zulhida , Kakak Mirza Safrullah Ahmad, dan keponakan-keponakan penulis, serta tak lupa para teman-teman penulis.

KATA PENGANTAR

بِسْمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحْمَـٰنِ ٱلرَّحِيمِ

Assalamu'alaikum Wr.Wb.

Syukur alhamdulillah penulis haturkan ke hadirat Allah SWT yang telah melimpahkan Rahmat, Taufik dan Hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana Sains dalam bidang Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.

Penulis menyadari bahwa banyak pihak yang telah berpartisipasi dan membantu dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Oleh sebab itu, iringan do'a dan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya penulis sampaikan, terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah banyak memberikan pengetahuan dan pengalaman yang berharga.
2. Prof. Drs. Sutiman B. Sumitro, SU., DSc, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang, serta selaku dosen pembimbing skripsi, yang telah bersedia meluangkan waktu untuk memberikan bimbingan dan arahan selama penulisan skripsi.

4. Ach. Nashichuddin, M.A sebagai dosen pembimbing agama yang telah banyak memberikan bimbingan dan arahan selama penulisan skripsi.
5. Segenap dosen pengajar, terima kasih atas ilmu yang telah diberikan kepada penulis.
6. Seluruh keluarga penulis yang senantiasa memberikan do'a dan dukungan yang terbaik bagi penulis untuk menyelesaikan skripsi ini.
7. Sahabat-sahabat senasib seperjuangan mahasiswa Matematika, terutama angkatan 2008, terima kasih atas segala pengalaman berharga dan kenangan terindah saat menuntut ilmu bersama.
8. Semua pihak yang telah memberikan dukungan kepada penulis.

Penulis berharap semoga skripsi ini bisa memberikan manfaat kepada para pembaca khususnya bagi penulis secara pribadi. *Amin Ya Rabbal Alamin*.

Wassalamu'alaikum Wr.Wb.

Malang, 24 Juni 2012

Penulis

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

Halaman

ABSTRAK

Saputra, Fuad Adi. 2012. **Bilangan *Rainbow Connection* dari Hasil Operasi Penjumlahan dan Perkalian Kartesius Dua Graf**. Skripsi. Program S1 Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: (1) Abdussakir, M.Pd
(2) Ach.Nashichuddin, M.A

Kata Kunci : *Rainbow Connection*, *Rainbow Vertex-Connection*, Graf Penjumlahan, Graf Perkalian Kartesius.

Graf G dengan pewarnaan sisi disebut pelangi sisi terhubung, jika setiap titik pada graf G dihubungkan oleh lintasan yang memiliki sisi-sisi dengan warna yang berbeda. *Rainbow connection* pada graf G yang terhubung, disimbolkan oleh $rc(G)$ yaitu bilangan terkecil dari warna yang dibutuhkan untuk membuat graf G menjadi pelangi sisi terhubung. Sedangkan graf G dengan pewarnaan titik adalah pelangi titik terhubung, jika setiap titik pada graf G dihubungkan oleh lintasan yang memiliki titik-titik interior dengan warna yang berbeda. *Rainbow vertex-connection* pada graf G yang terhubung disimbolkan oleh $rvc(G)$ yaitu bilangan terkecil dari warna yang dibutuhkan untuk membuat graf G menjadi pelangi titik terhubung. Penelitian ini menganalisis besarnya bilangan $rc(G)$ dan $rvc(G)$ dari graf hasil penjumlahan dan perkalian kartesius dua sebarang graf.

Penjumlahan dua graf G_1dan G_2 yang dinotasikan $G = G_1 + G_2$ mempunyai himpunan titik $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan himpunan sisi $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{uv | u \in V(G_1) dan\ v \in V(G_2)\}$. Bilangan *rainbow connection* dari graf G adalah:

$$rc(G) = 1,\ G_1 \text{ dan } G_2 \text{ adalah graf komplit}$$

$$rc(G) \geq 2,\ G_1 \text{atau } G_2 \text{ adalah bukan graf komplit}$$

sedangkan bilangan *rainbow vertex-connection* dari graf G adalah:

$$rvc(G) = \begin{cases} 0, & G_1 \text{dan } G_2 \text{ adalah graf komplit} \\ 1, & G_1 \text{atau } G_2 \text{ adalah bukan graf komplit} \end{cases}$$

Graf G graf hasil kali kartesius adalah graf yang dinotasikan $G = G_1 \times G_2$ dan mempunyai titik $V(G) = V(G_1) \times V(G_2)$, dan dua titik (u_1, u_2) dan (v_1, v_2) dari graf G terhubung langsung jika dan hanya jika $u_1 = v_1$ dan $u_2 v_2 \in E(G_2)$ atau $u_2 = v_2$ dan $u_1 v_1 \in E(G_1)$. Bilangan *rainbow connection* dari graf G adalah:

$$diam\ (G_1) + diam\ (G_2)\ \leq rc(G) \leq rc(G_1) + rc(G_2)$$

sedangkan bilangan *rainbow vertex-connection* dari graf G adalah:

$$diam\ (G_1) + diam\ (G_2) - 1 \leq rvc(G) \leq rvc(G_1) + rvc(G_2) + 1$$

ABSTRACT

Saputra, Fuad Adi. 2012. **The *Rainbow Connection* from The Join and Cartesian Product of Two Graphs**. Thesis. S1 Department of Mathematics Faculty of Science and Technology State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang.
Advisors : (I) Abdussakir, M.Pd, (II) Ach.Nashichuddin, M.A

An edge-colored graph G is rainbow edge-connected if any two vertices are connected by a path whose edges have distinct colors. The rainbow connection of a connected graph G, denoted by $rc(G)$, is the smallest number of colors that are needed in order to make G rainbow edge-connected. A vertex-colored graph G is rainbow vertex-connected if any two vertices are connected by a path whose internal vertices have distinct colors. The rainbow vertex-connection of a connected graph G, denoted by $rvc(G)$, is the smallest number of colors that are needed in order to make G rainbow vertex-connected. This research was analysis about number of $rc(G)$ and $rvc(G)$ from the join and cartesian product of two graphs.

The join $G = G_1 + G_2$ has $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ and $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{uv|u \in V(G_1)\ and\ v \in V(G_2)\}$. The number of *rainbow connection* from graph G is:

$$rc(G) = 1,\ G_1 \text{and } G_2 \text{ are complete graph}$$

$$rc(G) \geq 2,\ G_1 \text{or } G_2 \text{ are non-complete graph}$$

And then the number of *rainbow vertex-connection* from graph G is:

$$rvc(G) = \begin{cases} 0, & G_1 \text{and } G_2 \text{ are complete graph} \\ 1, & G_1 \text{or } G_2\ are \text{ non} - \text{complete graph} \end{cases}$$

The cartesian product $G = G_1 \times G_2$ has $V(G) = V(G_1) \times V(G_2)$, and two vertices (u_1, u_2) and (v_1, v_2) of G adjecent if only if either $u_1 = v_1$ and $u_2v_2 \in E(G_2)$ or $u_2 = v_2$ and $u_1v_1 \in E(G_1)$. The number of *rainbow connection* from graph G is:

$$diam\,(G_1) + diam\,(G_2) \leq rc(G) \leq rc(G_1) + rc(G_2)$$

And then the number of *rainbow vertex-connection* from graph G is:

$$diam\,(G_1) + diam\,(G_2) - 1 \leq rvc(G) \leq rvc(G_1) + rvc(G_2) + 1$$

Keywords : *Rainbow Connection*, *Rainbow Vertex-Connection*, Join Graph, Cartesian Product

الملخص

سفوتر، فؤاد عدي . ٢٠١٢. *rainbow connection* (راينبو كونكتيون) من الانضمام إليها و المنتج الديكارتيةا من الرسوم البيانية. أطروحة. S1 (ش١) قسم الرياضيات بكلية العلوم والتكنولوجيا جامعة الدولة الإسلامية إبراهيم مولانا مالانغ مالك.
المشرفين: (١)عبدوشكر ، م ف د
(٢) احمد نشخودين ، م أ

الرسم البياني G *rainbow edge-connected* (راينبو ادك- كونكتد) هو من الحافة متصلة إذا تم توصيل أي رؤوس اثنين من مسار الذي حواف لها ألوان مميزة. *rainbow connection* (راينبو كونكتيون) لمجموعة الرسم البياني متصلة، الرمز بواسطة الصليب الأحمر $rc(G)$، هو أقل عدد من الألوان التي مطلوبة من أجل جعل مجموعة *rainbow edge-connected* (راينبو ادك- كونكتد) . رسم بياني G *rainbow vertex-connected* (راينبو فرتع- كونكتد) هو قمة الرأس، متصلة إذا تم توصيل أي رؤوس اثنين من مسار القمم التي داخلية لديها ألوان مختلفة. قوس *rainbow vertex-connection* (راينبو فرتع- كونكتيون) من الرسم البياني متصلة، الرمز بواسطة $rvc(G)$ ، هو أقل عدد من الألوان التي مطلوبة من أجل جعل *rainbow vertex-connected* (راينبو فرتع- كونكتد). وكان هذا البحث والتحليل حول عدد من الصليب الأحمر $rc(G)$ و $rvc(G)$ من الانضمام إليها و المنتج الديكارتيةا من الرسوم البيانية.

الانضمام إليها $G = G_1 + G_2$ لديه قمة مجموعة $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ وحافة مجموع . $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{uv|u \in V(G_1)$ و $v \in V(G_2)\}$. عدد *rainbow connection* (راينبو كونكتيون) من الرسم البياني G هو:

$$rc(G) = ١, \quad G_1 \text{ و } G_2 \text{ هو الرسم البياني كاملة}$$

$$rc(G) \geq ٢, \quad G_1 \text{ أو } G_2 \text{ هو عدم الرسم البياني كاملة}$$

وبعد ذلك عدد من *rainbow vertex-connection* (راينبو فرتع- كونكتيون) من الرسم البياني هو:

المنتج الديكارتي $G = G_1 \times G_2$ لديه قمة مجموعة $V(G) = V(G_1) \times V(G_2)$، واثنين من القمم $(u_1، u_2)$ و $(v_1، v_2)$ من G $\Leftrightarrow$ إذا إما $v_1 = u_1$ و $u_2 v_2 \in E(G_2)$ أو $u_2 = v_2$ و $v_1 u_1 \in E(G_1)$, عدد *rainbow connection* (راينبو كونكتيون) من الرسم البياني G هو:

$$diam(G_1) + diam(G_2) \leq rc(G) = rc(G_1) + rc(G_2)$$

وبعد ذلك عدد *rainbow vertex-connection* (راينبو فرتع- كونكتيون) من الرسم البياني هو:

$$diam(G_1) + diam(G_2) - 1 \leq rvc(G) = rvc(G_1) + rvc(G_2) + 1$$

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Dunia matematika lahir dari rahim kesadaran bahwa alam semesta itu diatur oleh hukum-hukum yang teratur. Hal ini menyiratkan arti bahwa untuk memasuki rahasia pemahaman dari dunia matematika maka pertama-tama harus melakukan lompatan kualitatif dalam alam kesadaran. Alam harus dipandang sebagai sesuatu yang tunduk pada hukum-hukum keteraturan (Alisah & Dharmawan, 2007:17).

Alam semesta memuat bentuk-bentuk dan konsep matematika, meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika itu ada. Alam semesta serta segala isinya diciptakan Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mapan, dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi (Abdusysyakir, 2007:79).

Dalam Al Qur'an surat Al Qamar ayat 49 disebutkan:

إِنَّا كُلَّ شَيۡءٍ خَلَقۡنَٰهُ بِقَدَرٖ ۝٤٩

Artinya: "Sesungguhnya kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran" (Q.S. Al-Qamar: 49).

Shihab (2003:482) menafsirkan bahwa kata qadar pada ayat di atas diperselisihkan oleh para ulama. Dari segi bahasa kata tersebut dapat berarti kadar tertentu yang tidak bertambah atau berkurang, atau berarti kuasa. Tetapi karena ayat tersebut berbicara tentang segala sesuatu yang berada dalam kuasa Allah, maka adalah lebih tepat memahaminya dalam arti ketentuan dan sistem yang telah ditetapkan terhadap segala sesuatu. Tidak hanya terbatas pada salah satu aspeknya saja.

Dalam ayat lain juga disebutkan:

ٱلَّذِى لَهُۥ مُلْكُ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضِ وَلَمْ يَتَّخِذْ وَلَدًا وَلَمْ يَكُن لَّهُۥ شَرِيكٌ فِى ٱلْمُلْكِ وَخَلَقَ كُلَّ شَىْءٍ فَقَدَّرَهُۥ تَقْدِيرًا ﴿٢﴾

Artinya: *"Yang kepunyaan-Nya-lah kerajaan langit dan bumi, dan dia tidak mempunyai anak, dan tidak ada sekutu baginya dalam kekuasaan(Nya), dan dia Telah menciptakan segala sesuatu, dan dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya"* (Q.S. Al-Furqan: 2).

Ayat di atas menjelaskan bahwa segala sesuatu yang ada di alam ini ada ukurannya, ada hitungan-hitungannya, ada rumusnya, atau ada persamaannya. Ahli matematika atau fisika tidak membuat suatu rumus sedikitpun. Mereka hanya menemukan rumus atau persamaan, sehingga rumus-rumus yang ada sekarang bukan diciptakan manusia sendiri, tetapi sudah disediakan. Manusia hanya menemukan dan menyimbolkan dalam bahasa matematika (Abdusysyakir, 2007: 80).

Keteraturan merupakan sesuatu yang telah diatur oleh Allah di bawah kehendak kekuasaan-Nya. Segala sesuatu dari apa yang diciptakan-Nya sesuai dengan hikmah yang diinginkan-Nya, sebagai ilmu pengetahuan untuk mempersiapkan manusia agar dapat memahami, memikirkan urusan dunia dan akhirat, menemukan berbagai industri, dan memanfaatkan apa yang terdapat di permukaan serta di dalam perut bumi, termasuk dalam ilmu matematika.

Matematika merupakan raja dan pelayan bagi disiplin ilmu lain atau pun dalam lini kehidupan. Dalam kehidupan sehari-hari banyak permasalahan yang memerlukan pemecahan. Sering dengan bantuan matematika permasalahan tersebut lebih mudah dipahami, lebih mudah dipecahkan, atau bahkan dapat ditunjukkan bahwa suatu persoalan tidak mempunyai penyelesaian. Untuk keperluan tersebut, perlu dicari pokok permasalahannya dan kemudian dibuat rumusan atau model matematikanya (Purwanto, 1998: 1).

Teori graf merupakan salah satu cabang matematika yang penting dan banyak manfaatnya karena teori-teorinya dapat diterapkan untuk memecahkan masalah dalam kehidupan sehari-hari. Dengan mengkaji dan menganalisa model atau rumusan teori graf dapat diperlihatkan peranan dan kegunaannya dalam memecahkan permasalahan. Permasalahan yang dirumuskan dengan teori graf dibuat sederhana, yaitu diambil aspek-aspek yang diperlukan dan dibuang aspek-aspek lainnya (Purwanto, 1998:1).

Graf G adalah pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan tidak kosong dari obyek-obyek yang disebut sebagai titik dan E adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di V yang disebut sebagai sisi. Himpunan titik di G dinotasikan dengan $V(G)$ dan himpunan sisi dinotasikan dengan E(G) (Chartrand dan Lesniak, 1986: 4).

Pewarnaan pada graf G adalah pemetaan warna-warna ke titik atau sisi dari G sedemikian hingga titik atau sisi yang terhubung langsung mempunyai warna-warna yang berbeda. Dikatakan bahwa G adalah berwarna n jika terdapat pewarnaan dari G yang menggunakan n warna. Pewarnaan dengan jumlah warna minimum yang diperlukan untuk mewarnai graf G, disebut bilangan kromatik dari G. Ada tiga macam pewarnaan graf, yaitu pewarnaan titik, pewarnaan sisi, dan pewarnaan wilayah (*region*).

Bahasan mengenai pewarnaan pada graf tidak hanya difokuskan pada beberapa jenis graf itu sendiri, akan tetapi juga dapat diaplikasikan pada kehidupan sehari-hari yang dapat membantu dan memudahkan. Di antaranya seperti pada penjadwalan keberangkatan bus, pesawat, penjadwalan mata kuliah, penjadwalan frekuensi pada stasiun tv dan masih banyak lainnya.

Dalam teori graf konsep pewarnaan terus mengalami perkembangan, salah satunya adalah tentang *rainbow connection*. *Rainbow connection* dibagi menjadi 2 jenis, yang pertama adalah pelangi sisi terhubung (*rainbow edge-connected*) yang didefinisikan sebagai pewarnaan sisi pada graf G jika setiap titik pada graf G dihubungkan oleh lintasan yang memiliki sisi-sisi dengan warna yang berbeda, sedangkan yang kedua adalah pelangi titik terhubung (*rainbow vertex-connected*) yang didefinisikan sebagai pewarnaan titik pada graf G jika setiap titik pada graf G dihubungkan oleh lintasan memiliki titik-titik interior dengan warna yang berbeda. Bilangan *rainbow connection* pada graf terhubung disimbolkan oleh $rc(G)$ yaitu bilangan warna terkecil pada sisi yang dibutuhkan untuk membuat G menjadi pelangi sisi yang terhubung. Bilangan *rainbow vertex-connection* pada graf terhubung disimbolkan oleh $rvc(G)$ yaitu bilangan warna terkecil pada titik yang dibutuhkan untuk membuat G menjadi pelangi titik terhubung (Krivelevich dan Yuster, 2010:1)

Jurnal yang ditulis oleh Michael Krivelevich dan Raphael Yuster (2010) menjelaskan mengenai bilangan *rainbow connection* yang dibangun oleh derajat terkecil dari suatu graf umum. Mereka mengembangkan dari kajian yang ditulis oleh Y. Caro, A. Lev, Y. Roditty, Z. Tuza, dan R. Yuster (2008) dalam jurnalnya yang berjudul *On Rainbow Connection*. Dalam jurnal *On Rainbow Connection* hasil dari bilangan *rainbow connection* $rc(G)$ dan $rvc(G)$ masih dibatasi oleh suatu variabel yang belum jelas, misalkan $rc(G) \leq Cn/\delta$, dimana C adalah variabel. Kemudian oleh Krivelevich dan Yuster dikembangkan lagi dan berhasil menentukan nilai variabelnya menjadi $rc(G) \leq 20n/\delta$ sehingga batas nilai C menjadi lebih jelas. Selain itu juga dijelaskan bahwa bilangan $rc(G) \geq diam(G)$

Penelitian yang dilakukan oleh Krivelevich dan Yuster menggunakan objek graf yang umum. Sedangkan untuk graf dari hasil operasi belum diteliti, khususnya pada operasi penjumlahan dan perkalian kartesius, sehingga perlu dilakukan penelitian lagi untuk objek graf tersebut. Oleh karena itu, penulis akan mengkaji bilangan *rainbow connection* dengan mengambil judul skripsi ” Bilangan *Rainbow connection* dari Hasil Operasi Penjumlahan dan Perkalian Kartesius Dua Graf’.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas maka rumusan masalah penelitian ini yaitu:

1. Bagaimana pola $rc(G)$ dan $rvc(G)$ pada graf G hasil dari operasi penjumlahan dan perkalian kartesius dua graf?
2. Bagaimana bukti dari pola $rc(G)$ dan $rvc(G)$ pada graf G hasil dari operasi penjumlahan dan perkalian kartesius dua graf?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah maka tujuan dari penelitian ini yaitu:

1. Menjelaskan pola $rc(G)$ dan $rvc(G)$ pada graf G hasil dari operasi penjumlahan dan perkalian kartesius dua graf.
2. Menjelaskan pola $rc(G)$ dan $rvc(G)$ pada graf G hasil dari operasi penjumlahan dan perkalian kartesius dua graf.

1.4 Batasan Masalah

Agar penelitian dapat fokus pada permasalahan, maka batasan masalah yang diambil pada penelitian ini adalah:

1. Jenis Graf yang digunakan
    a. Pada graf hasil operasi penjumlahan, menggunakan contoh graf komplit, graf bipartisi komplit, graf roda, graf kipas dan graf kipas ganda.

b. Pada graf hasil operasi perkalian kartesius, menggunakan contoh graf tangga.

2. Untuk menentukan pola $rc(G)$ dan $rvc(G)$ pada jenis graf, dilakukan dengan menggambar untuk $n = 1,2, \dots, 6$, serta setiap kasus yang berperan dalam menentukan teorema, dilakukan dengan menggambar 1 contoh graf.

3. Menggunakan surat Al-Furqan ayat 2 sebagai landasan kajian agama.

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat penelitian ini adalah:

1. Jurusan Matematika

Hasil pembahasan ini dapat digunakan sebagai tambahan bahan dalam pengembangan ilmu matematika khususnya di kalangan mahasiswa jurusan matematika.

2. Peneliti

Melalui penelitian ini dapat menambah penguasaan materi, sebagai pengalaman dalam melakukan penelitian dan menyusun karya ilmiah dalam bentuk skripsi, serta media untuk mengaplikasikan ilmu matematika yang telah diterima dalam bidang keilmuannya.

3. Pengembangan ilmu pengetahuan

Menambah khasanah dan mempertegas keilmuan matematika tentang bilangan *rainbow connection* pada teori graf, dalam peranannya terhadap perkembangan teknologi dan disiplin ilmu lain.

1.5 Metode Penelitian

Metode penelitian yang digunakan adalah metode kepustakaan yakni melakukan penelitian untuk memperoleh informasi dan objek yang digunakan dalam permasalahan tersebut.

Studi kepustakaan merupakan penampilan argumentasi penalaran keilmuan untuk memaparkan hasil olah pikir mengenai suatu permasalahan atau topik kajian kepustakaan yang dibahas dalam penelitian.

1. Jenis Data

Jenis data yang digunakan adalah data primer yaitu data yang diperoleh dari proses menggambar graf-graf tersebut.

2. Langkah-langkah penelitian

Adapun langkah-langkah yang diterapkan dalam penelitian ini adalah:

1. Merumuskan masalah yang akan dibahas.
2. Mempelajari sumber–sumber dan informasi dengan cara membaca dan memahami literatur yang berkaitan dengan graf bipartisi, graf roda, graf sikel, graf kipas, graf komplit dan graf tangga, pewarnaan graf, dan *rainbow connection* pada graf.
3. Menganalisis permasalahan yang telah diperoleh dengan mendeskripsikan permasalahan. Selanjutnya mendapatkan teorema yang dibuktikan.

   Langkah-langkah analisis:

   a. menggambar graf-graf tersebut satu-persatu dengan order mulai dari 1 sampai 6 hingga didapatkan pola dari bilangan $rc(G)$ dan $rvc(G)$ sehingga dapat diperoleh teorema tentang $rc(G)$ dan $rvc(G)$ terhadap graf-graf tersebut

   b. membuktikan teorema tentang $rc(G)$ dan $rvc(G)$ yang telah diperoleh di atas

   c. menganalisis $rc(G)$ dan $rvc(G)$ pada graf hasil operasi penjumlahan dan perkalian kartesius dari dua graf dengan menghubungkan teorema yang telah didapatkan pada langkah sebelumnya, sehingga diperoleh teorema secara umum

   d. membuktikan teorema umum tersebut.

4. Merumuskan kesimpulan dari hasil analisis teorema yang telah di buktikan.
5. Menyusun laporan dari penelitian dalam bentuk tugas akhir.

1.6 Sistematika Penulisan

Agar penulisan skripsi ini lebih terarah, mudah ditelaah dan dipahami, maka digunakan sistematika sebagai berikut:

Pada bab I mengkaji tentang pendahuluan yang terdiri dari latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, manfaat penelitian, dan sistematika penulisan.

Pada bab II mengenai kajian teori penulis mengkaji tentang konsep-konsep (teori-teori) yang mendukung bagian pembahasan. Konsep-konsep tersebut antara lain membahas tentang graf, graf terhubung, jenis graf, graf komplit, graf bipartisi, graf roda, graf sikel, graf kipas, graf kipas ganda, graf tangga, pewaarnaan graf, dan bilangan *rainbow connection.*

Dalam bab III mengkaji tentang pembahasan yang terdiri dari bagaimana menentukan teorema tentang bilangan *rainbow connection* pada graf bipartisi, graf roda, graf sikel, graf kipas, graf tangga dan graf komplit kemudian membuktikannya. Kemudian menentukan teorema umum atas graf hasil operasi penjumlahan dan perkalian kartesius. Kajian agama Islam tentang *rainbow connection* akan dibahas juga dalam bab ini. Untuk bab IV tentang kesimpulan dan saran sebagai penutup.

BAB II
KAJIAN PUSTAKA

2.1 Graf

2.1.1 Definisi Graf

Definisi 1

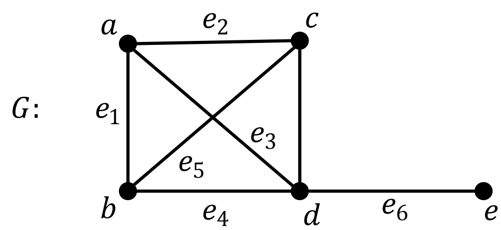
Graf G adalah pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan tidak kosong dari obyek-obyek yang disebut sebagai titik dan E adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di V yang disebut sebagai sisi. Himpunan titik di G dinotasikan dengan $V(G)$ dan himpunan sisi dinotasikan dengan $E(\mathrm{G})$. Sedangkan banyaknya unsur di V disebut order dari G dan dilambangkan dengan $p(G)$ dan banyaknya unsur di E disebut ukuran (*size)* dari G dan dilambangkan dengan $q(G)$. Jika graf yang dibicarakan hanya graf G, maka order dan ukuran dari G tersebut cukup ditulis dengan p dan q (Chartrand dan Lesniak, 1986: 4).

Perhatikan graf G yang memuat himpunan titik V dan himpunan sisi E seperti berikut ini.

$V = \{ a, b, c, d, e\}$

$E = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, d), (b, c), (d, e)\}$.

Graf G tersebut dapat digambar sebagai berikut:



Gambar 2.1 Graf G

Ukuran graf G adalah $q = 6$.

Graf G dengan

$V = \{ a, b, c, d, e\}$

$E = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, d), (b, c), (d, e)\}$

G dapat juga ditulis dengan

$V = \{ a, b, c, d, e\}$

$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$

dengan

$e_1 = (a, b)$

$e_2 = (a, c)$

$e_3 = (a, d)$

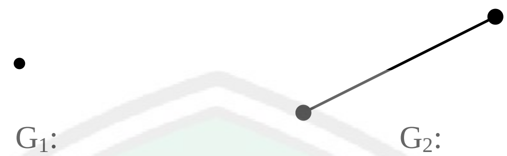
$e_4 = (b, d)$

$e_5 = (b, c)$

$e_6 = (d, e)$

Graf trivial adalah graf berorder satu dengan himpunan sisinya merupakan himpunan kosong. Graf *non trivial* adalah graf yang berorder lebih dari satu (Bondy and Murthy, 1976:3).

Contoh:

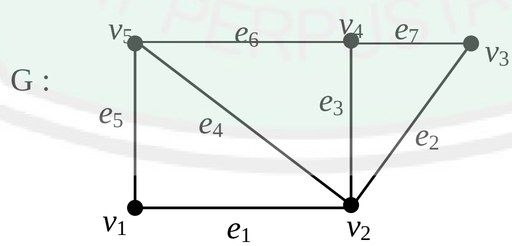


Gambar 2.2 G_1 Graf Trivial dan G_2 Graf Non Trivial

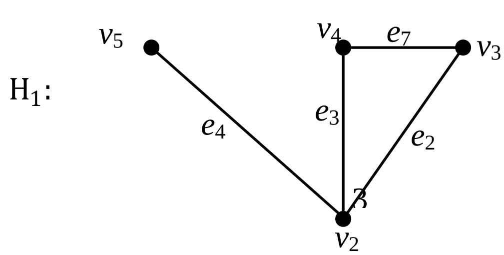
Pada Gambar 2.2 G_1 merupakan graf trivial karena G_1 hanya memuat satu titik atau berorder satu dan himpunan sisinya merupakan himpunan kosong. Sedangkan G_2 merupakan graf non trivial karena berorder lebih dari satu.

Definisi 2

Graf H disebut subgraf dari G jika himpunan titik di H adalah subset dari himpunan titik-titik di G dan himpunan sisi di H adalah subset dari himpunan sisi di G. Dapat ditulis $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$. Subgraf H dari graf G yang memiliki order yang sama pada G, atau jika subgraf H dengan $V(H)=V(G)$, maka H disebut subgraf merentang (*spanning subgraph*) dari G (Chartrand dan Lesniak, 1986:8).

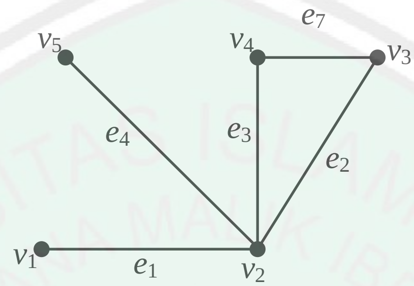


Gambar 2.3 Graf G



Gambar 2.4 H_1 Subgraf dari Graf G

H_2:



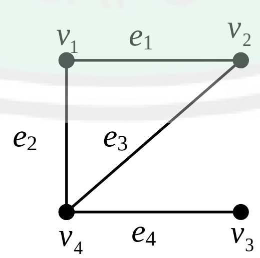
Gambar 2.5 H_2 Subgraf Merentang dari Graf G

2.1.2 *Adjacent* dan *Incident*

Definisi 3

Sisi $e = (u, v)$ dikatakan menghubungkan titik u dan v. Jika $e = (u, v)$ adalah sisi di graf G, maka u dan v disebut terhubung langsung (*adjacent*), u dan e serta v dan e disebut terkait langsung (*incident*). Untuk selanjutnya, sisi $e = (u,v)$ akan ditulis $e = uv$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:4).

Contoh:



Gambar 2.6 Graf G

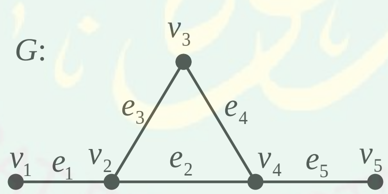
Dari Gambar 2.6 titik v_4 dan sisi e_2, e_3 dan e_4 adalah terkait langsung. Sedangkan titik v_3 dan v_4 adalah terhubung langsung tetapi v_3 dan v_2 tidak.

Definisi 4

Derajat titik v di graf G, ditulis $\deg_G(v)$, adalah banyaknya sisi di G yang terkait langsung dengan v. Jika dalam konteks pembicaraan hanya terdapat satu graf G, maka tulisan $\deg_G(v)$ disingkat menjadi $\deg(v)$. Titik yang berderajat sering disebut titik genap (*even vertices*) dan titik yang berderajat ganjil disebut titik ganjil (*odd vertices*). Titik yang berderajat nol disebut titik terisolasi (*isolated vértices*) dan titik yang berderajat satu disebut titik ujung (*end vertices*) (Chartrand dan Lesniak, 1986:7).

Contoh:

Perhatikan graf G berikut yang mempunyai himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$



Gambar 2.7 Graf *G*

Berdasarkan Gambar 2.7, diperolah bahwa:

$\deg(v_1) = 1$

$\deg(v_2) = 3$

$\deg(v_3) = 2$

$$\deg(v_4) = 3$$

$$\deg(v_5) = 1$$

Titik v_2 dan v_4 adalah titik ganjil, titik v_3 adalah titik genap, titik v_1 dan v_3 adalah titik ujung. Hubungan antara jumlah derajat semua titik dalam suatu graf G dengan banyak sisi, yaitu q, adalah

$$\sum_{v \in G} \deg(v) = 2q.$$

Hal ini dinyatakan dalam teorema berikut:

Teorema 1

Jika G graf dengan $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_P\}$

maka $\sum_{i=1}^{p} \deg(v_i) = 2q$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:7).

Bukti:

Setiap sisi adalah terkait langsung dengan 2 titik. Jika setiap derajat titik dijumlahkan, maka setiap sisi dihitung dua kali.

Corollary 1.

Pada sebarang graf, banyak titik ganjil adalah genap.

Bukti:

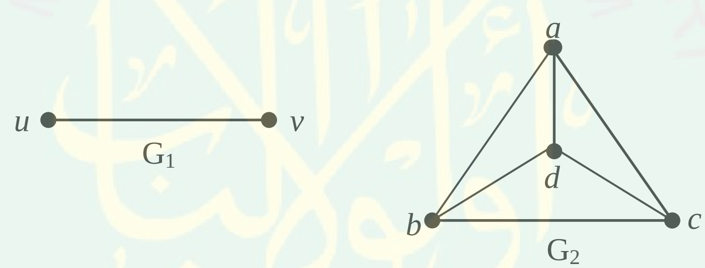
Misalkan graf G dengan banyak sisi (*size*) q. Misalkan W himpunan yang memuat titik ganjil pada G serta U himpunan yang memuat titik genap di G. Dari teorema 1 maka diperoleh:

$$\sum_{v \in v(G)} \deg(v) = \sum_{v \in W} \deg(v) + \sum_{v \in U} \deg(v) = 2q$$

Dengan demikian karena $\sum_{v\in U}\deg(v)$ genap, maka $\sum_{v\in W}\deg(v)$ (jumlah derajat titik ganjil) juga genap. Sehingga $|W|$ adalah genap.

Graf yang semua titiknya berderajat sama disebut graf beraturan (*regular graph*). Suatu graf dikatakan beraturan-r (r-*regular*) jika semua titiknya berderajat r (Purwanto, 1997:8).

Contoh :



Gambar 2.8 Graf G_1 Beraturan-1 dan G_2 Beraturan-3

Graf G_1 pada Gambar 2.8 merupakan graf beraturan-*1*, dan graf G_2 merupakan graf beraturan-*3*.

2.1.3 Graf Terhubung

Definisi 5

Suatu jalan (*walk*) u-v pada graf G adalah barisan berhingga (tak kosong) W : $u = u_0, e_1, u_1, e_2, \ldots, u_{n-1}, e_n, u_n = v$ yang berselang seling antara titik dan sisi, yang dimulai dari titik u dan diakhiri dengan titik v, dengan $e_i = u_{i-1}u_i$ untuk i = 1, 2, . . ., n adalah sisi di G. u_0 disebut titik awal, u_n disebut titik akhir, u_1, u_2, ..., u_{n-1} disebut titik internal, dan n menyatakan panjang dari W (Chartrand dan Lesniak, 1986:26).

Definisi 6

Jalan u-v disebut *terbuka* atau *tertutup* jika $u \neq v$ atau $u = v$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:26).

Definisi 7

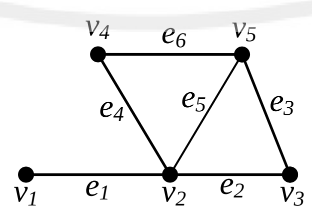
Jalan u-v yang semua sisinya berbeda disebut *trail* u-v (Chartrand dan Lesniak, 1986:26).

Definisi 8

Jalan u-v yang semua sisi dan titiknya berbeda disebut lintasan (*path*) u-v. P : $u = u_0, e_1, u_1, e_2, . . ., u_{n-1}, e_n, u_n = v$, u_0 disebut titik awal, u_n disebut titik akhir. Sedangkan u_1, u_2, ..., u_{n-1} disebut titik internal, dan n menyatakan panjang dari P. Dengan demikian, semua lintasan adalah *trail*. Graf lintasan dengan n titik dinotasikan dengan P_n (Chartrand dan Lesniak, 1986:26).

Contoh:

G:



Gambar 2.9 Graph Terhubung

Dari graf di atas v_1, e_1, v_2, e_5, v_5, e_6, v_4, e_4, v_2, e_2, v_3 adalah trail, sedangkan v_1, e_1, v_2, e_5, v_5, e_6, v_4 adalah lintasan.

Definisi 9

Suatu titik u yang membentuk lintasan *u-u* disebut jalan trivial (Chartrand dan Lesniak, 1986:26).

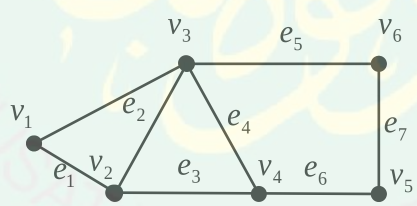
Definisi 10

Suatu jalan tertutup (*closed trail*) yang tak-trivial pada graf *G* disebut sirkuit *G*. (Chartrand dan Lesniak, 1986:28).

Definisi 11

Sirkuit v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, . . ., v_{n-1}, e_{n-1}, e_n, v_n, v_1 dengan $n \geq 3$ dan v_i berbeda untuk setiap *i* disebut sikel (*cycle*) (Chartrand dan Lesniak, 1986:28).

Contoh:



W_1: $v_1, v_3, v_6, v_5, v_4, v_2, v_1$
W_2: $v_1, v_3, v_6, v_5, v_4, v_3, v_1, v_2$
W_3: $v_1, v_3, v_6, v_5, v_4, v_3, v_2$
W_4: $v_1, v_3, v_6, v_5, v_4, v_2$
W_5: v_1, v_2, v_3, v_1

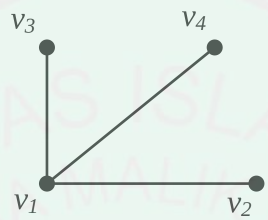
Gambar 2.10 Jalan, Lintasan, Trail, dan Sikel

Dari Gambar 2.10 W_1 disebut jalan tertutup dengan panjang 6 dan W_2 disebut jalan terbuka dengan panjang 7. W_3 adalah trail tetapi bukan lintasan, sedangkan W_4 disebut sebagai lintasan dan W_5 adalah sikel.

Definisi 12

Misalkan *u* dan *v* titik berbeda pada graf *G*. Maka titik *u* dan *v* dapat dikatakan terhubung (*connected*), jika terdapat lintasan *u*–*v* di *G*. Sedangkan suatu graf *G* dapat dikatakan terhubung (*connected*), jika untuk setiap titik *u* dan *v* di *G* terhubung (Chartrand dan Lesniak, 1986:28).

Contoh:



G

Gambar 2.11 Graf Terhubung

Definisi 13

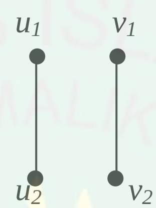
Misalkan *u* dan *v* titik berbeda pada graf *G*, maka jarak antara dua titik di G adalah panjang lintasan terpendek antara kedua titik tersebut yang dinotasikan dengan $dist_G(u, v)$. Sedangkan eksentrisitas titik $v \in V(G)$ adalah $ecc(v) = \max\{dist_G(v, u): u \in V(G)\}$. *Radius* dari G adalah $r(G) = \min\{ecc(v): v \in V(G)\}$ dan diameter dari G adalah $diam(G) = \max\{ecc(v): v \in V(G)\}$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:29).

2.1.4 Operasi pada Graf

Definisi 14

Gabungan dua graf G_1 dan G_2 yang dinotasikan dengan $G = G_1 \cup G_2$ mempunyai himpunan titik $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan himpunan sisi $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2)$. Jika graf G memuat sebanyak $n \geq 2$ graf H, maka dinotasikan dengan $G = nH$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:11).

Contoh:



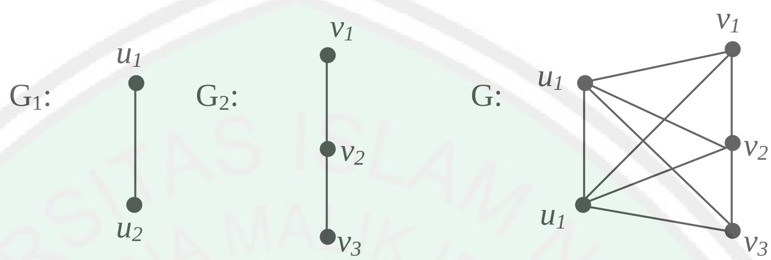
Gambar 2.12 Gabungan Dua Graf Terhubung

Gambar di atas merupakan contoh gabungan graf G_1 dan G_2 yang merupakan graf dengan dua titik dan saling terhubung langsung, yang disebut dengan graf K_2. $V(G_1) = \{u_1,u_2\}$, $V(G_2) = \{v_1,v_2\}$, $E(G) = \{u_1u_2\}$ dan $E(G) = \{v_1v_2\}$. Jika $G = G_1 \cup G_2$, maka $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2) = \{u_1,u_2\} \cup \{v_1,v_2\} = \{u_1,u_2,v_1,v_2\}$ dan $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) = \{u_1u_2\} \cup \{v_1v_2\} = \{u_1u_2, v_1v_2\}$. Karena graf G memuat 2 graf K_2, maka graf tersebut dapat dinotasikan $2K_2$.

Definisi 15

Penjumlahan dua graf G_1dan G_2 yang dinotasikan $G = G_1 + G_2$ mempunyai himpunan titik $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan himpunan sisi $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{uv|u \in V(G_1) dan\ v \in V(G_2)\}$(Chartrand dan Lesniak, 1986: 11).

Perhatikan contoh di bawah ini.



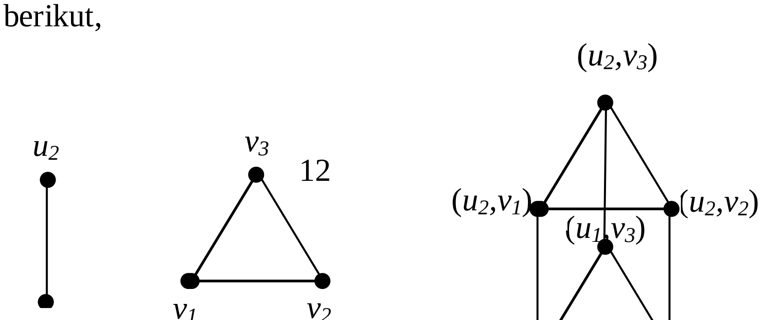
Gambar 2.13 Penjumlahan Graf $G = G_1 + G_2$

Pada contoh di atas, $V(G_1) = \{u_1,u_2\}$, $V(G_2) = \{v_1,v_2,v_3\}$, maka $G = G_1 + G_2$ mempunyai himpunan titik $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2) =$ $\{u_1,u_2\}\{v_1,v_2,v_3\}$ = $\{u_1,u_2,v_1,v_2,v_3\}$ dan himpunan sisi $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{u_1v_1, u_1v_2, u_1v_3, u_2v_1, u_2v_2, u_2v_3\} = \{ u_1u_2, v_1v_2, v_2v_3, u_1v_1, u_1v_2, u_1v_3, u_2v_1, u_2v_2, u_2v_3\}$.

Definisi 16

Hasil kali kartesius adalah graf yang dinotasikan $G = G_1 \times G_2$ dan mempunyai titik $V(G) = V(G_1) \times V(G_2)$, dan dua titik (u_1, u_2) dan (v_1, v_2) dari graf G terhubung langsung jika dan hanya jika $u_1 = v_1$ dan $u_2v_2 \in E(G_2)$ atau $u_2 = v_2$ dan $u_1v_1 \in E(G_1)$(Chartrand dan Lesniak, 1986: 11).

Perhatikan contoh berikut,



G_1: G_2: $G_1 \times G_2$:

Gambar 2.14 Graf Hasil Kali Kartesius

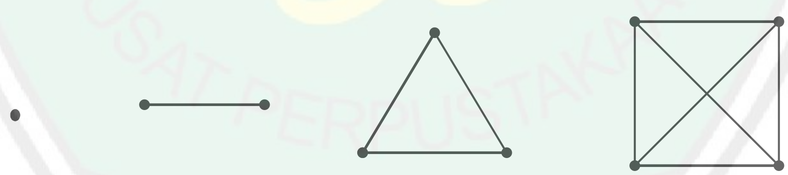
Pada contoh di atas, $V(G_1) = \{u_1, u_2\}$, $V(G_2) = \{v_1, v_2, v_3\}$, maka $G = G_1 \times G_2$ mempunyai himpunan titik $V(G) = \{(u_1,v_1),(u_1,v_2),(u_1,v_3),(u_2,v_1),(u_2,v_2),(u_2,v_3)\}$.

2.1.5 Jenis Graf

1. Graf Komplit

Definisi 17

Graf komplit (*Complete Graph*) adalah graf dengan setiap pasang titik yang berbeda dihubungkan langsung oleh satu sisi. Graf komplit dengan n titik dinyatakan dengan K_n (Purwanto, 1998:21).



K_1 K_2 K_3 K_4

Gambar 2.15 Graf Komplit

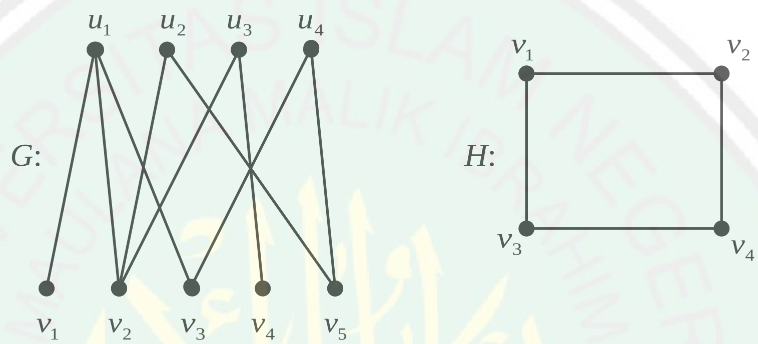
Dari Gambar 2.15 K_1, K_2, K_3 dan K_4 adalah graf komplit karena tiap titik dalam graf tersebut selalu *adjacent* dengan semua titik yang lain.

2. Graf Bipartisi

Definisi 18

Graf bipartisi (*bipartite graph*) adalah graf yang himpunan titiknya dapat dipisahkan menjadi dua himpunan tak kosong X dan Y sehingga masing-masing sisi di graf tersebut menghubungkan satu titik di X dan satu titik di Y; X dan Y disebut himpunan partisi (Purwanto, 1998:21).

Contoh:



Gambar 2.16 Graf Bipartisi

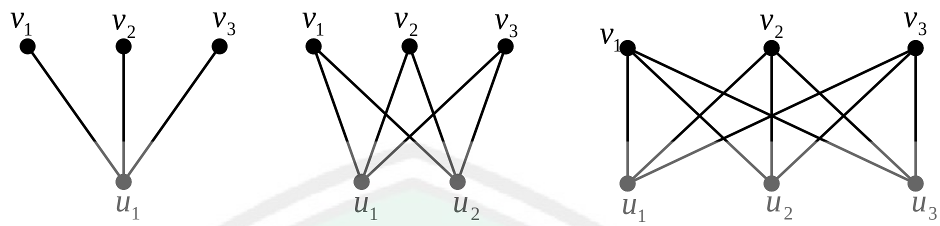
Pada Gambar 2.18 G adalah graf bipartisi dengan himpunan partisi $X = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ dan $Y = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$. Demikian juga H adalah graf bipartisi dengan himpunan partisi $X = \{v_1, v_4\}$ dan $Y = \{v_2, v_3\}$.

3. **Graf Bipartisi Komplit**

Definisi 19

Graf bipartisi komplit (*complete bipartite graph*) adalah graf bipartisi dengan himpunan partisi X dan Y sehingga masing-masing titik di X dihubungkan dengan masing-masing titik di Y oleh tepat satu sisi. Jika $|X| = m$ dan $|Y| = n$, maka graf bipartisi tersebut dinyatakan dengan $K_{m,n}$. (Purwanto, 1998:22).

Contoh:



Gambar 2.17 Graf Bipartisi Komplit

Pada Gambar 2.17 akan dijelaskan sebagai berikut:

$K_{1,3}$ adalah graf bipartisi komplit dengan

$X = \{u_1\}$, $|X| = 1$

$Y = \{v_1, v_2, v_3\}$, $|Y| = 3$

$K_{2,3}$ adalah graf bipartisi komplit dengan

$X = \{u_1, u_2\}$, $|X| = 2$

$Y = \{v_1, v_2, v_3\}$, $|Y| = 3$

$K_{3,3}$ adalah graf bipartisi komplit dengan

$X = \{u_1, u_2, u_3\}$, $|X| = 3$

$Y = \{v_1, v_2, v_3\}$, $|Y| = 3$

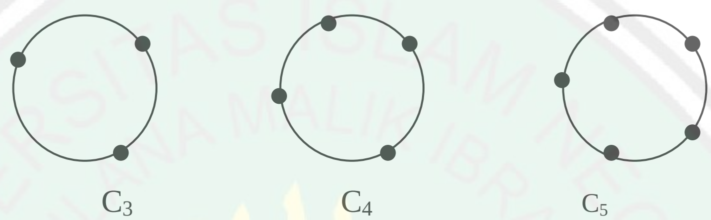
4. **Graf Sikel**

Definisi 20

Graf sikel C_n adalah graf terhubung n titik yang setiap titiknya berderajat 2. Misal graf sikel C_n mempunyai himpunan titik $V(C_n) = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$, maka graf tersebut mempunyai himpunan sisi $E(C_n) = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ dimana $e_i = v_i v_{i+1}$ untuk setiap i=1,2,…,n.

Sikel dengan panjang n disebut *sikel-n* (C_n). Sikel-n disebut genap atau ganjil bergantung pada n genap atau ganjil. Panjang sikel pada graf paling kecil adalah 3 (Chartrand dan Lesniak, 1986: 28).

Contoh:



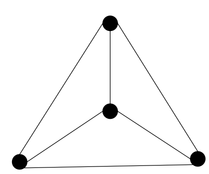
Gambar 2.18 Graf Sikel C_3, C_4, dan C_5

Gambar di atas menunjukkan contoh dari graf sikel, graf sikel C_3 memiliki 3 titik yang masing-masing titiknya berderajat 2, graf sikel C_4 memiliki 4 titik dan masing-masing titiknya berderajat 2, sedangkan graf sikel C_5 memiliki 5 titik dan masing-masing titiknya juga berderajat 2.

5. **Graf Roda**

Definisi 21

Graf roda adalah graf yang dibentuk dari operasi penjumlahan antara graf sikel (C_n) dan graf komplit dengan satu titik (K_n). Graf roda dinotasikan dengan W_n dan $n \geq 3$ (Harary, 1969:46)

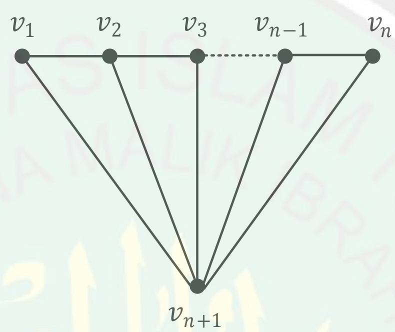


Gambar 2.19 Graf Roda W_3

6. Graf Kipas

Definisi 22

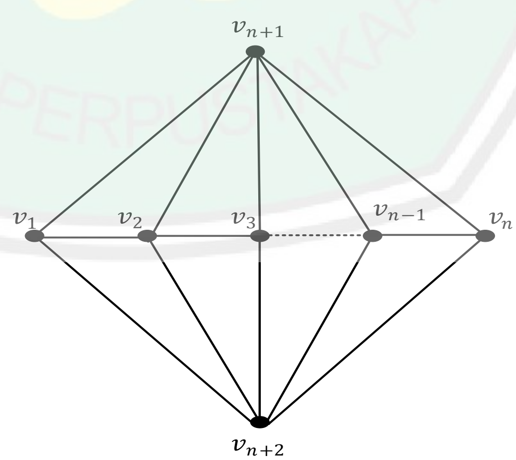
Graf kipas dibentuk dari penjumlahan graf komplit (K_1) dan graf lintasan (P_n) yaitu $F_n = K_1 + P_n$. Dengan demikian graf kipas mempunyai $(n+1)$ titik dan $(2n-1)$ sisi (Gallian, 2007: 16)



Gambar 2.20 Graf Kipas F_n

Definisi 23

Graf Kipas Ganda dibentuk dari penjumlahan antara gabungan dua graf komplit (K_1) dan graf lintasan (P_n) yaitu $dF_n = 2K_1 + P_n$. Dengan demikian graf kipas mempunyai $(n+2)$ titik dan $(3n-1)$ sisi.



Gambar 2.21 Graf Kipas Ganda dF_n

7. **Graf Tangga**

Definisi 24

Graf tangga yang dinotasikan sebagai M_n adalah suatu graf yang dibentuk dari operasi hasil kali kartesius antara graf lintasan dengan dua titik dan graf lintasan dengan n titik yaitu $M_n = P_2 X\ P_n$ (Galian, 2007:12).

2.1.6 Pewarnaan pada Graf

Pewarnaan pada graf dibedakan menjadi tiga, pewarnaan titik, pewarnaan sisi dan pewarnaan peta.

1. **Pewarnaan Titik (*Vertex Colouring*)**

Definisi 25

Pewarnaan titik dari graf *G* adalah suatu proses pemberian warna pada titik-titik suatu graf sehingga tidak ada dua titik yang terhubung langsung pada graf tersebut berwarna sama. Graf *G* berwarna *n* jika terdapat pewarnaan dari *G* yang menggunakan *n* warna (Chartrand dan Lesniak, 1986:271).

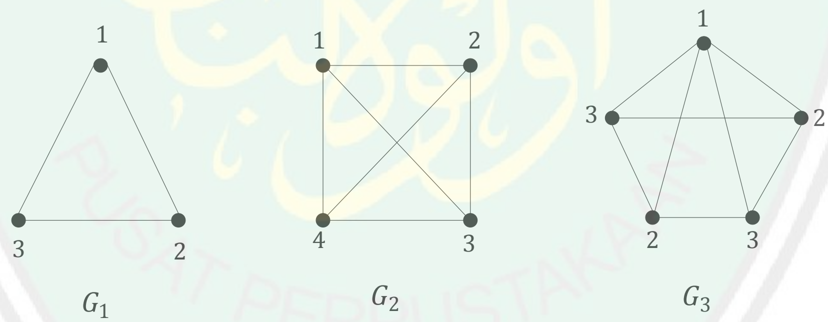
Dalam pewarnaan titik erat kaitannya dengan penentuan bilangan kromatik, yaitu masalah menentukan banyak warna minimum yang diperlukan untuk mewarnai titik-titik pada graf sehingga dua titik yang terhubung langsung mempunyai warna yang berbeda.

Bilangan kromatik (*chromatic number*) dari graf G, dinyatakan dengan $\chi(G)$, adalah bilangan *n* terkecil sehingga G dapat diwarnai dengan *n* warna. Biasanya warna-warna yang digunakan untuk mewarnai suatu graf dinyatakan dengan 1, 2, 3, …, *n*. Jelas bahwa $\chi(\mathrm{G}) \leq |V(G)|$ (Purwanto, 1998:73).

Beberapa graf tertentu dapat langsung ditentukan bilangan kromatiknya. Graf kosong N_n memiliki $\chi(G) = 1$, karena semua titik tidak terhubung langsung. Jadi untuk mewarnai semua titik cukup dibutuhkan satu warna saja. Graf komplit K_n memiliki $\chi(K_n) = n$ sebab semua titik saling terhubung sehingga diperlukan n warna (Chartrand dan Lesniak, 1986:271).

Contoh:

Perhatikan Gambar 2.22, untuk graf G_1, karena $|V(G_1)| = 3$, maka $\chi(G_1) \leq 3$. Untuk G_2, karena $|V(G_2)| = 4$, maka $\chi(G_1) \leq 4$. Karena semua titik pada G_1 dan G_2 saling terhubung langsung, akibatnya $\chi(G_1) \geq 3$ dan $\chi(G_1) \geq 4$. Jadi, $\chi(G_1) = 3$ dan $\chi(G_2) = 4$. Untuk graf G_3, $\chi(G_3) \leq 3$. Karena graf G_3 memuat graf Komplit K_3, maka $\chi(G_3) \geq 3$, akibatnya $\chi(G_3) = 3$.



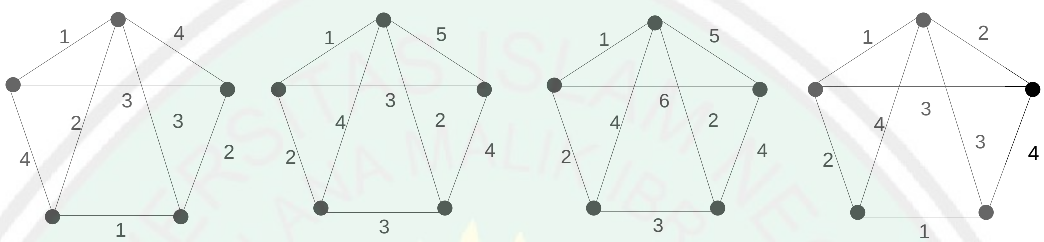
Gambar 2.22 Pewarnaan Titik

2. **Pewarnaan Sisi (*Edge Colouring*)**

Definisi 26

Suatu pewarnaan sisi-k untuk graf G adalah suatu penggunaan k warna untuk mewarnai semua sisi di G sehingga setiap pasang sisi yang mempunyai titik persekutuan diberi warna yang berbeda. Jika G mempunyai pewarnaan sisi-n, maka dikatakan sisi-sisi di G diwarnai dengan n warna. Indeks kromatik G dinotasikan dengan $\chi'(G)$ adalah bilangan n terkecil sehingga sisi di G dapat diwarna dengan n warna (Purwanto, 1998:80).

Contoh:



(a) (b) (c) (d)

Gambar 2.23 Pewarnaan Sisi

Biasanya pewarnaan sisi-n ini ditunjukkan dengan menulis bilangan-bilangan 1, 2, 3, …, n di dekat sisi-sisi yang sesuai. (a), (b), dan (c) di atas mengilustrasikan pewarnaan sisi-4, pewarnaan sisi-5, dan pewarnaan sisi-6 untuk graf G yang memiliki delapan sisi. $\chi'(G) \geq 4$, karena G memuat empat sisi yang bertemu pada titik yang sama (yaitu titik berderajat 4), sehingga padanya harus diberikan warna berbeda. Jadi $\chi'(G) = 4$

2.1.7 *Rainbow Connection*

Definisi 27

Pewarnaan sisi pada graf G disebut pelangi sisi terhubung (*rainbow edge-connected)* jika setiap titik pada graf G dihubungkan oleh lintasan yang memiliki sisi-sisi dengan warna yang berbeda. *Rainbow connection* pada graf

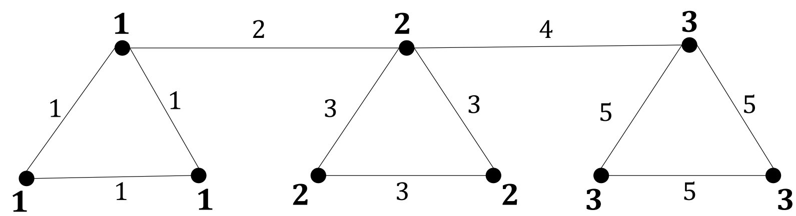
G yang terhubung (*connected graph*) disimbolkan oleh $rc(G)$ yaitu bilangan terkecil dari warna yang dibutuhkan untuk membuat graf G menjadi pelangi sisi terhubung (*rainbow edge-connected)* (Krivelevich dan Yuster, 2010:1).

Lintasan pelangi (*rainbow path*) adalah lintasan antara dua titik sehingga tidak ada dua sisi pada lintasan tersebut yang memiliki warna yang sama. Jika lintasan pelangi tersebut ada di setiap antara dua titik maka pewarnaan tersebut dinamakan pewarnaan pelangi (*rainbow colouring*). Sedangkan bilangan minimum pada warna yang diinginkan dinamakan bilangan pelangi yang terhubung (*rainbow connection number rc(G))*. (L. Sunil Chandran,2011:3).

Definisi 28

Pewarnaan titik pada graf G adalah Pelangi titik terhubung (*rainbow vertex-connected)* jika setiap titik pada graf G dihubungkan oleh lintasan memiliki titik-titik interior dengan warna yang berbeda. *Rainbow vertex-connection* pada graf G yang terhubung (*connected graph*) disimbolkan oleh $rvc(G)$ yaitu bilangan terkecil dari warna yang dibutuhkan untuk membuat graf G menjadi pelangi titik terhubung (*rainbow vertex-connected)* (Krivelevich dan Yuster, 2010: 2).

Misalkan graf G memiliki n titik, maka $rc(G) \leq n-1$. Kemudian jika graf sikel C_n dengan $n \geq 3$ maka $rc(G) \leq [\frac{n}{2}]$. Sedangkan jika dihubungkan dengan $diam\ (G)$, maka $rc(G) \geq diam\ (G)$ dan $rvc(G) \geq diam\ (G) - 1$ (Krivelevich dan Yuster, 2010:1-2).



Gambar 2.24 Graf Pelangi Sisi Terhubung dan Pelangi Titik Terhubung

Gambar 2.24 merupakan contoh dari graf pelangi sisi terhubung dan pelangi titik terhubung dengan 5 warna sisi dan 3 warna titik. Pada gambar di atas mempunyai bilangan $rc(G) = 5$ dan $rvc(G) = 3$.

2.2 Keteraturan dalam Al-Quran

Keteraturan mengenai alam semesta telah diatur oleh Allah yang banyak tercantum dalam ayat-ayat Al-Quran. Salah satunya adalah surat Al-Furqan ayat 2, Allah berfirman:

ٱلَّذِى لَهُۥ مُلْكُ ٱلسَّمَـٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضِ وَلَمْ يَتَّخِذْ وَلَدًا وَلَمْ يَكُن لَّهُۥ شَرِيكٌ فِى ٱلْمُلْكِ وَخَلَقَ كُلَّ شَىْءٍ فَقَدَّرَهُۥ تَقْدِيرًا ﴿٢﴾

Artinya: "Yang kepunyaan-Nya-lah kerajaan langit dan bumi, dan dia tidak mempunyai anak, dan tidak ada sekutu baginya dalam kekuasaan(Nya), dan dia Telah menciptakan segala sesuatu, dan dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya" (Q.S. Al-Furqan: 2).

Menurut Sayyid Quthb (2004:276-278) pada kalimat terakhir pada ayat di atas *"… Di telah mencipatakan segala sesuatu, dan dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya.*" Allah menetapkan volume dan bentuknya, menetapkan fungsi dan tugasnya, menetapkan zaman dan tempatnya, juga menetapkan keserasianya dengan yang lainnya, dari sekian individu dalam wujud yang besar ini.

Susunan semesta ini dan segala sesuatu di dalamnya, merupakan sesuatu yang amat mengundang kekaguman, dan menampikkan ide kebetulan (*koinsidens*) secara mutlak. Di situ terlihat pengaturan yang amat cermat dan teliti yang sulit dihitung bentuk-bentuknya oleh manusia, dalam satu segi saja dari segi-segi alam yang besar ini. Setiap ilmu pengetahuan manusia bertambah maju, maka terungkapkan beberapa segi keserasian yang menakjubkan dalam hukum-hukum semesta, ukuran-ukurannya, dan detail-detailnya, sesuai dengan yang diungkapkan oleh nash Al-Quran yang menakjubkan itu, *"... Dia telah mencipatakan segala sesuatu, dan Dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya."*

Sedangkan menurut Dr. 'Aidh al-Qarni (2008:145) Allah-lah penguasa langit dan bumi, baik dalam penciptaan, pengendalian, maupun pengaturannya. Dia tidak mempunyai anak. Mahasuci Dia. Dia tidak beranak, tidak diperanakan, dan tidak mempunyai sekutu dalam kerajaan-Nya. Dia-lah yang menciptakan seluruh makhluk tanpa seorang pun membantu-Nya dalam penciptaan itu. Oleh karena itu, Dia-lah yang berhak disembah. Tidak ada selain Dia. Dia-lah yang menciptakan manusia dengan bentuk, ukuran, dan perawakan yang sempurna. Tidak ada cela ataupun kekurangan dalam penciptaan, perbuatan, hukum, dan syariat-Nya. Maha Suci Dia yang Maha agung.

Menurut Al Qurthubi (2009 :7) pada kalimat terakhir "*Dan Dia menetapkan ukuran-ukuranya dengan serapi-serapinya,"* maksudnya adalah, menetapkan segala sesuatu dari apa yang diciptakan-Nya sesuai dengan hikmah yang diinginkan-Nya, dan bukan karena nafsu dan kelalaian, melainkan segala sesuatu berjalan sesuai dengan ketentuan-Nya hingga Hari Kiamat dan setelah kiamat. Karena Dia-lah Sang Pencipta Yang Maha Kuasa, dan untuk itulah makhluk beribadah kepada-Nya.

Dalam tafsir Ibnu Katsir (2004:94) tafsir Surat Al-Furqan ayat 2 adalah *"Yang kepunyaan-Nya-lah kerajaan langit dan bumi, dan dia tidak mempunyai anak, dan tidak ada sekutu baginya dalam kekuasaan(Nya),"* Allah sucikan diri-Nya dari memilki anak dan sekutu. Lalu Dia mengabarkan bahwa Dia, *"dan dia Telah menciptakan segala sesuatu, dan dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya."* Artinya, segala sesuatu selain Dia adalah *makhluk* (yang diciptakan) dan *marbub* (yang berada di bawah kekuasaan-Nya). Dia-lah pencipta segala sesuatu, Rabb, Raja dan Ilahnya. Sedangkan segala sesuatu berada di bawah kekuasaan, aturan, tatanan dan takdir-Nya.

Sedangkan Al-Maraghi (1989:259) menyebut bahwa kalimat terakhir pada surat Al-Furqan ayat 2 merupakan sifat keempat dari Allah SWT, yang mana ditafsirkan sebagai berikut:

وَخَلَقَ كُلَّ شَيْءٍ فَقَدَّرَهُۥ تَقْدِيرًا

Dia mengatakan segala sesuatu sesuai dengan tuntutan kehendak-Nya yang didasarkan atas hikmah yang sempurna, serta mempersiapkannya untuk menerima apa yang dikehendaki-Nya, berupa keistemewaan dan perbuatan yang sesuai dengannya. Maka, Dia mempersiapkan manusia untuk dapat memahami, memikirkan urusan dunia dan akhirat, menemukan berbagai industri, dan memanfaatkan apa yang terdapat di permukaan serta di dalam perut bumi. Dia juga mempersiapkan berbagai jenis hewan untuk melakukan berbagai pekerjaan yang sesuai dengannya dan dengan kemampuannya.

Dari kelima tafsir di atas dapat disimpulkan bahwa keteraturan merupakan sesuatu yang telah diatur oleh Allah dibawah kehendak kekuasaan-Nya. Allah menetapkan volume dan bentuknya, menetapkan fungsi dan tugasnya, menetapkan zaman dan tempatnya, juga menetapkan keserasianya dengan yang lainnya, dari sekian individu dalam wujud yang besar ini dan sempurna. Segala sesuatu dari apa yang diciptakan-Nya sesuai dengan hikmah yang diinginkan-Nya, sebagai ilmu pengetahuan untuk mempersiapkan manusia agar dapat memahami, memikirkan urusan dunia dan akhirat, menemukan berbagai industri, dan memanfaatkan apa yang terdapat di permukaan serta di dalam perut bumi.

Sesungguhnya segala sesuatu selain Allah adalah makhluk yang dimiliki. Dia Pencipta, Pemilik dan Sembahan segala sesuatu; dan segala sesuatu berada di bawah kekuasaan, penundukan serta pengukuran-Nya. Dia-lah Sang Pencipta Yang Maha Kuasa, dan untuk itulah makhluk beribadah kepada-Nya.

BAB III

PEMBAHASAN

Dalam pembahasan ini, sebelum mengkaji inti permasalahan yaitu mengkaji bilangan *rainbow connection* dan bilangan *rainbow vertex-connection* pada graf hasil operasi penjumlahan dan perkalian kartesius dua graf dengan menggunakan sebarang graf, maka akan dibahas terlebih dahulu $rc(G)$dan $rvc(G)$ dari jenis graf yang dihasilkan oleh operasi penjumlahan dan perkalian kartesius.

Pewarnaan sisi pada graf G disebut pelangi sisi yang terhubung jika setiap dua titik pada graf G dihubungkan oleh lintasan yang memiliki sisi-sisi dengan warna yang berbeda. *Rainbow connection* pada graf G yang terhubung disimbolkan oleh $rc(G)$ yaitu bilangan terkecil dari warna yang dibutuhkan untuk membuat graf G menjadi pelangi sisi terhubung.

Pewarnaan titik pada graf G adalah pelangi titik yang terhubung jika setiap dua titik pada graf G dihubungkan oleh lintasan memiliki titik-titik interior dengan warna yang berbeda. *Rainbow vertex-connection* pada graf G yang terhubung disimbolkan oleh $rvc(G)$ yaitu bilangan terkecil dari warna yang dibutuhkan untuk membuat graf G menjadi pelangi titik terhubung.

3.1 Bilangan *Rainbow Connection* pada Jenis Graf

Bilangan *rainbow connection* pada jenis graf akan dibagi menjadi 2 bagian yaitu pada jenis graf hasil penjumlahan dua graf dan jenis graf hasil perkalian kartesius dua graf.

3.1.1 Bilangan *Rainbow Connection* pada Jenis Graf Hasil Penjumlahan

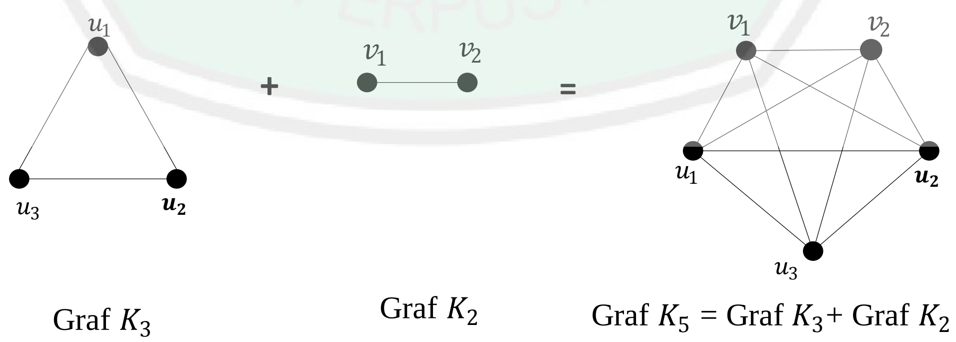
Penjumlahan dua graf G_1 dan G_2 yang dinotasikan $G = G_1 + G_2$ mempunyai himpunan titik $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan himpunan sisi $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{uv | u \in V(G_1)\ dan\ v \in V(G_2)\}$

Pada graf khusus hasil penjumlahan akan diberikan 5 contoh graf yaitu graf komplit, graf bipartisi komplit, graf roda, graf kipas, dan graf Kipas Ganda.

a. Graf Komplit

Graf komplit adalah graf dengan setiap pasang titik yang berbeda dihubungkan oleh satu sisi. Graf komplit dengan n titik dinyatakan dengan K_n.

Graf komplit juga dapat dibentuk dari penjumlahan dua graf, yaitu penjumlahan antara dua graf komplit. Graf komplit dengan 3 titik (K_3) dengan graf komplit dengan 2 titik (K_2) penjumlahannya menghasilkan graf K_5.



Gambar 3.1 Graf K_5 dari Hasil Penjumlahan K_3 dengan K_2

Bilangan *rainbow connection* $(rc(K_n))$ dan bilangan *rainbow vertex-connection* $(rvc(K_n))$ pada graf komplit dapat ditentukan dengan menggambar graf komplit order 1 sampai order 6 sehingga didapat pola $1,2,\ldots,6$ lainnya. Dari pola tersebut kemudian dapat disimpulkan $rc(K_n)$ dan $rvc(K_n)$ pada graf komplit dengan n titik (K_n).

$\boldsymbol{K_1}$ **:**

Gambar 3.2 Graf K_1

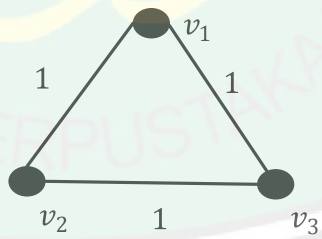
Pada graf K_1 hanya terdapat satu titik dan tidak mempunyai sisi. Sehingga bilangan $rc(K_1) = 0$ dan juga $rvc(K_1) = 0$, dikarenakan tidak terdapatnya lintasan pelangi yang dapat dibentuk pada graf K_1.

$\boldsymbol{K_2}$:

Gambar 3.3 Graf K_2

Graf K_2 terdapat dua titik dan satu sisi. Ada satu lintasan yang dapat dibentuk dari graf K_2 yaitu lintasan u_1- u_2, yang melewati 1 sisi dan 0 titik. Sehingga bilangan $rc(K_2) = 1$ dan $rvc(K_2) = 0$.

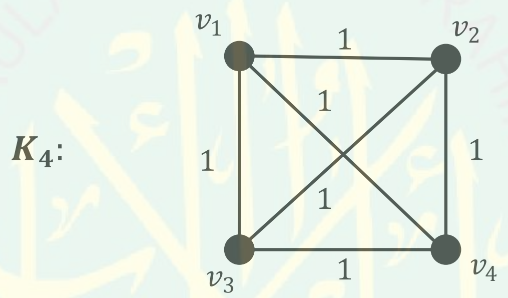
$\boldsymbol{K_3}$:



Gambar 3.4 Graf K_3

Pada graf K_3 terdapat 3 titik dan juga 3 sisi. Lintasan dengan setiap pasangan titik awal dan titik akhir yang dapat dibentuk dari graf K_3 mempunyai karakter yang sama dikarenakan setiap titik pada graf K_3 dihubungkan oleh satu sisi. Graf K_3 dibentuk menjadi pelangi sisi terhubung dimana setiap lintasan antara dua titik pada graf K_3 mempunyai sisi dengan warna berbeda dan dibentuk menjadi pelangi titik terhubung dimana setiap lintasan antara dua titik pada graf K_3 mempunyai titik interior dengan warna yang berbeda.

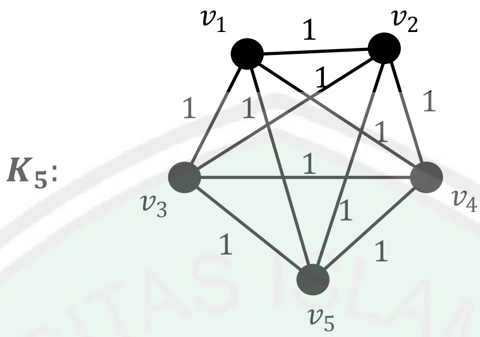
Misalkan v_i,v_j $\in V(K_3)$ dengan $i,j = 1,2,3,$ maka lintasan v_i- v_j dapat dibentuk melalui satu sisi, sehingga warna sisinya 1, dan tidak memiliki titik interior sehingga warna titik 0, karena semua titik terhubung langsung. Sehingga dengan warna sisi 1 akan terbentuk pelangi sisi terhubung pada graf K_3, serta dengan warna titik 0 juga dapat membentuk pelangi titik terhubung, sehingga diperoleh $rc(K_3) = 1$ dan $rvc(K_3) = 0$.



Gambar 3.5 Graf K_4

Pada graf K_4 terdapat 4 titik dan 6 sisi. Lintasan dengan setiap pasangan titik awal dan titi akhir yang dapat dibentuk dari graf K_4 mempunyai karakter yang sama dikarenakan setiap titik pada graf K_4 dihubungkan oleh satu sisi. Graf K_4 dibentuk menjadi pelangi sisi terhubung dimana setiap lintasan antara dua titik pada graf K_4 mempunyai sisi dengan warna berbeda dan dibentuk menjadi pelangi titik terhubung dimana setiap lintasan antara dua titik pada graf K_4 mempunyai titik interior dengan warna yang berbeda.

Misalkan v_i,v_j $\in V(K_4)$ dengan $i,j = 1,2,3,4$, maka lintasan v_i- v_j dapat dibentuk melalui satu sisi, sehingga warna sisinya 1, dan tidak memiliki titik interior sehingga warna titik 0, karena semua titik terhubung langsung. Sehingga dengan warna sisi 1 akan terbentuk pelangi sisi terhubung pada graf K_4, serta dengan warna titik 0 juga dapat membentuk pelangi titik terhubung, sehingga diperoleh $rc(K_4) = 1$ dan $rvc(K_4) = 0$.

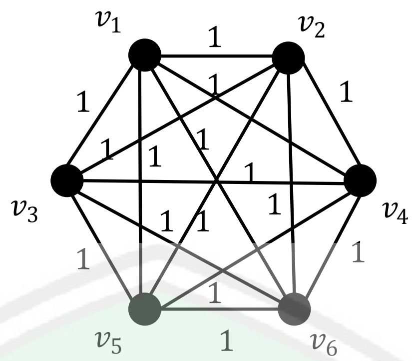


Gambar 3.6 Graf K_5

Pada graf K_5 terdapat 5 titik dan 10 sisi. Lintasan dengan setiap pasangan titik awal dan titik akhir yang dapat dibentuk dari graf K_5 mempunyai karakter yang sama dikarenakan setiap titik pada graf K_5 dihubungkan oleh satu sisi. Graf K_5 dibentuk menjadi pelangi sisi terhubung dimana setiap lintasan antara dua titik pada graf K_5 mempunyai sisi dengan warna berbeda dan dibentuk menjadi pelangi titik terhubung dimana setiap lintasan antara dua titik pada graf K_5 mempunyai titik interior dengan warna yang berbeda.

Misalkan $v_i, v_j \in V(K_4)$ dengan $i, j = 1,2,3,4,5$, maka lintasan v_i- v_j dapat dibentuk melalui satu sisi, sehingga warna sisinya 1, dan tidak memiliki titik interior sehingga warna titik 0, karena semua titik terhubung langsung. Sehingga dengan warna sisi 1 akan terbentuk pelangi sisi terhubung pada graf K_5, serta dengan warna titik 0 juga dapat membentuk pelangi titik terhubung, sehingga diperoleh $rc(K_5) = 1$ dan $rvc(K_5) = 0$.

$\boldsymbol{K_6}$:



Gambar 3.7 Graf K_6

Pada graf K_6 terdapat 6 titik dan 15 sisi. Lintasan dengan setiap pasangan titik awal dan titik akhir yang dapat dibentuk dari graf K_6 mempunyai karakter yang sama dikarenakan setiap titik pada graf K_6 dihubungkan oleh satu sisi. Graf K_6 dibentuk menjadi pelangi sisi terhubung dimana setiap lintasan antara dua titik pada graf K_6 mempunyai sisi dengan warna berbeda dan dibentuk menjadi pelangi titik terhubung dimana setiap lintasan antara dua titik pada graf K_6 mempunyai titik interior dengan warna yang berbeda.

Misalkan v_i,v_j $\in V(K_4)$ dengan $i, j = 1,2, \dots ,6$, maka lintasan v_i- v_j dapat dibentuk melalui satu sisi, sehingga warna sisinya 1, dan tidak memiliki titik interior sehingga warna titik 0, karena semua titik terhubung langsung. Sehingga dengan warna sisi 1 akan terbentuk pelangi sisi terhubung pada graf K_6, serta dengan warna titik 0 juga dapat membentuk pelangi titik terhubung, sehingga diperoleh $rc(K_6) = 1$ dan $rvc(K_6) = 0$.

Keenam hasil di atas ditampilkan dalam tabel berikut:

Tabel 3.1 Pola Bilangan $rc(K_n)$ dan $rvc(K_n)$

No	Jenis Graf	$rc(K_n)$	$rvc(K_n)$
1.	K_1	0	0
2.	K_2	1	0
3.	K_3	1	0
4.	K_4	1	0
5.	K_5	1	0
6.	K_6	1	0
⋮	⋮	⋮	⋮
n.	K_n	1	0

Dari pola yang ditunjukan oleh bilangan *rainbow connection* dan bilangan *rainbow vertex-connection* di atas dapat diperoleh teorema sebagai berikut:

Teorema 1

Pada graf komplit K_n banyak titik $n \geq 2$, bilangan *rainbow connection* $rc(K_n) = 1$, dan bilangan *rainbow vertex-connection* $rvc(K_n) = 0$.

Bukti:

Pembuktian $rc(K_n)$ dan $rvc(K_n)$ dilakukan dengan bukti tidak langsung.

(i) Diasumsikan $rc(K_n) \neq 1$, jadi ada 2 kemungkinan, yaitu: $rc(K_n) = 0$ dan $rc(K_n) > 1$

karena $n \geq 2$ artinya minimal terdapat 2 titik yang terhubung langsung. Maka minimal terdapat lintasan dengan panjang 1. Jadi tidak mungkin $rc(K_n) = 0$.

Selanjutnya ambil $rc(K_n) = a > 1$ dan $u, v \in V(K_n)$ sehingga ada lintasan pelangi dari titik u ke titik v, dengan minimal bilangan warna sisi sebanyak a. Ini artinya lintasan dari titik u ke titik v melewati a sisi dan antara a sisi tersebut pasti terdapat titik lain misalkan titik w. Sehingga dapat dikatakan ada $u, v \in V(K_n)$yang tidak terhubung langsung. Pernyataan ini kontradiksi dengan definisi graf komplit sehingga pengasumsian salah. Jadi dapat disimpulkan bahwa $rc(K_n) = 1, n \geq 2$.

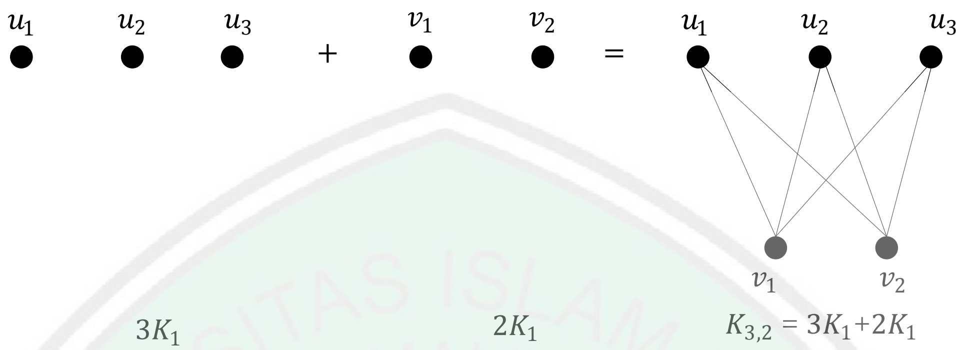
(ii) Diasumsikan $rvc(K_n) \neq 0$ atau $rvc(K_n) > 0$

Ambil $rvc(K_n) = b > 0$ dan $u, v \in V(K_n)$sehingga ada lintasan pelangi dari titik u ke titik v, dengan minimal bilangan warna sisi sebanyak b. Ini artinya lintasan dari titik u ke titik v melewati b titik misalkan titik w. Sehingga dapat dikatakan ada $u, v \in V(K_n)$ yang tidak terhubung langsung. Pernyataan ini kontradiksi dengan definisi graf komplit sehingga pengasumsian salah. Jadi dapat disimpulkan bahwa $rvc(K_n) = 0, n \geq 2$.

b. Graf Bipartisi Komplit

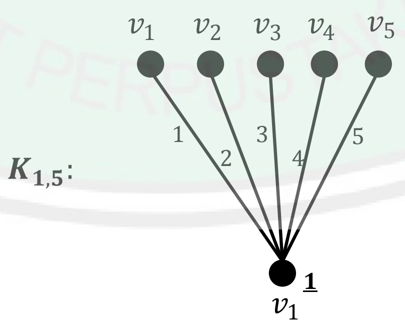
Graf bipartisi komplit adalah graf bipartisi dengan himpunan partisi X dan Y sehingga masing-masing titik di X dihubungkan dengan masing-masing titik di Y oleh tepat satu sisi. Jika $|X| = m$ dan $|Y| = n$, maka graf bipartisi tersebut dinyatakan dengan $K_{m,n}$.

Graf bipartisi komplit juga dapat dibentuk dari penjumlahan dua graf, yaitu penjumlahan antara graf mK_1 dan graf nK_1. Contohnya adalah penjumlahan graf $3K_1$ dengan komplemen graf komplit $2K_1$ yang menghasilkan graf bipartisi komplit $K_{3,2}$.



Gambar 3.8 Graf $K_{3,2}$ dari Hasil Penjumlahan $3K_1$ dengan $2K_1$

Untuk menentukan pola *rainbow connection* dan pola *rainbow vertex-connection* pada graf bipartisi komplit dapat ditentukan dengan menggambar graf bipartisi komplit yang diwakili oleh graf bipartisi komplit $K_{1,5}$, graf $K_{2,4}$, graf $K_{2,6}$, graf $K_{2,10}$, kemudian menggambar pola $rc(K_{m,n})$ dan $rvc(K_{m,n})$ pada graf bipartisi komplit $K_{m,n}$. Dari pola tersebut selanjutnya dapat disimpulkan bilangan *rainbow connection* dan *rainbow vertex-connection* pada graf bipartisi komplit $K_{m,n}$.

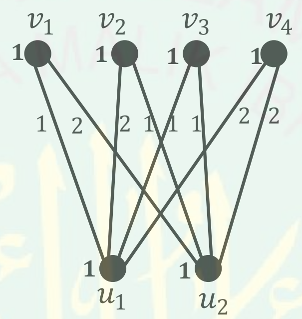


Gambar 3.9 Graf bipartisi $K_{1,5}$

Graf $K_{1,5}$ merupakan graf pohon dengan 6 titik dan 5 sisi. Agar terbentuk graf pelangi sisi terhubung pada graf $K_{1,5}$, di mana setiap antara dua titik terdapat lintasan dengan warna berbeda, dibutuhkan minimal bilangan warna sisi sebanyak

5, sehingga diperoleh bilangan $rc(K_{1,5}) = 5$. Sedangkan agar terbentuk pelangi titik yang terhubung, di mana setiap antara dua titik pada graf $K_{1,5}$ terdapat lintasan dengan warna titik interior yang berbeda, cukup dibutuhkan satu warna titik. Hal ini dikarenakan panjang diameter pada graf $K_{1,5}$ adalah 2 dan titik interior sebanyak 1, sehingga diperoleh bilangan $rvc(K_{1,5}) = 1$.

Graf $K_{2,4}$ =



Gambar 3.10 Graf bipartisi $K_{2,4}$

Graf bipartisi $K_{2,4}$ memiliki 6 titik dan 8 sisi. Terdapat 2 partisi misalkan partisi X dengan 4 titik dan partisi Y dengan 2 titik. Setiap titik pada partisi X tidak terhubung langsung akan tetapi dihubungkan lintasan dengan panjang 2 yang melalui titik di partisi Y. Misalkan $v_i \in V(X), 1 \leq i \leq 4$ dan $u_i \in V(X), i = 1,2$, maka $\deg(v_i) = 2$ dan $\deg(u_i) = 4$. Setiap v_i jika dihubungkan dengan v_j dengan $i \neq j$, maka dapat melalui 2 lintasan, sehingga jika akan dibentuk pelangi sisi terhubung setiap sisi yang terkait langsung dengan v_i diberikan 2 warna yang susunannya harus berbeda dengan titik v_j.

Susunan warna sisi yang terkait langsung dengan v_i dan v_j dapat digambarkan sebagai berikut, misalkan terdapat fungsi pewarnaan sisi $c: E(G) \rightarrow \{1,2\}$, maka terdapat 3 kemungkinan, yaitu:

1. Jika

$$c(v_i, u_1) \neq c(v_j, u_1), \qquad i, j = 1,2,3,4$$

maka

$$c(v_i, u_2) = c(v_j, u_2), \qquad i, j = 1,2,3,4$$

2. Jika

$$c(v_i, u_1) = c(v_j, u_1), \qquad i, j = 1,2,3,4$$

maka

$$c(v_i, u_2) \neq c(v_j, u_2), \qquad i, j = 1,2,3,4$$

3. Jika

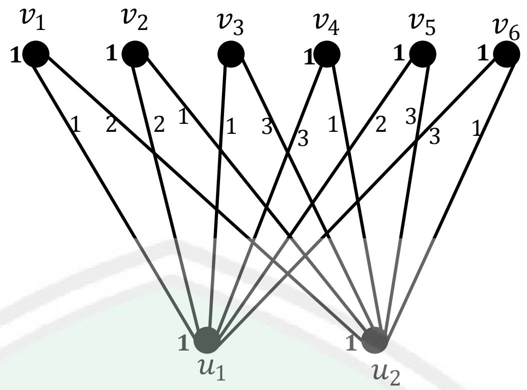
$$c(v_i, u_1) \neq c(v_j, u_1), \qquad i, j = 1,2,3,4$$

maka

$$c(v_i, u_2) \neq c(v_j, u_2), \qquad i, j = 1,2,3,4$$

Menggunakan penyusunan dengan pengulangan dari 2 warna yang disusun ke 2 tempat diperoleh kemungkinan $2 \times 2 = 4$ susunan. Karena $|X| = 4$, maka setiap v_i mempunyai susunan warna sisi yang terkait langsung berbeda dengan v_j dengan $i \neq j$. Sehingga graf $K_{2,4}$ dapat dibentuk pelangi sisi terhubung dengan 2 warna, sehingga diperoleh bilangan $rc(K_{2,4}) = 2$. Sedangkan agar terbentuk pelangi titik yang terhubung, di mana setiap antara dua titik pada graf $K_{2,4}$ terdapat lintasan dengan warna titik interior yang berbeda, cukup dibutuhkan satu warna titik. Hal ini dikarenakan panjang diameter pada graf $K_{2,4}$ adalah 2 dan titik interior sebanyak 1, sehingga diperoleh bilangan $rvc(K_{2,4}) = 1$.

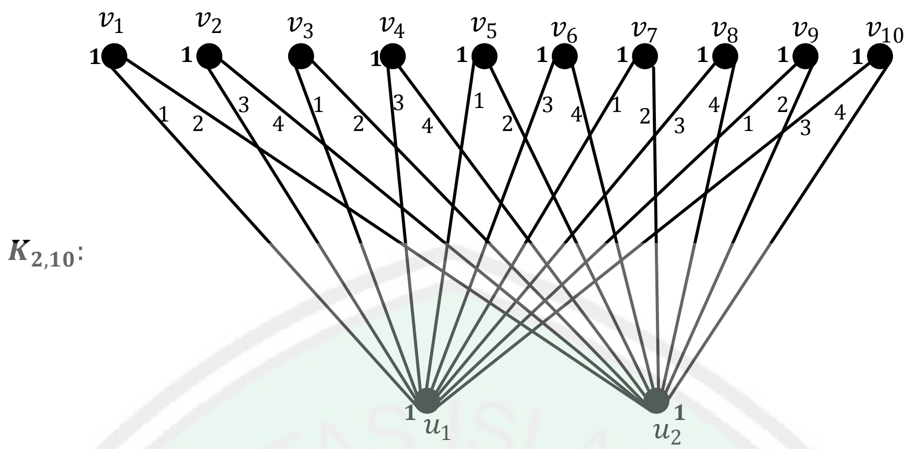
$K_{2,6}$:



Gambar 3.11 Graf Bipartisi $K_{2,6}$

Memakai cara yang sama, pada graf $K_{2,6}$ terdapat 2 partisi X dengan 6 titik dan partisi Y dengan 2 titik. Menggunakan penyusunan dengan pengulangan dari 2 warna yang disusun ke 2 tempat diperoleh kemungkinan $2 \times 2 = 4$ susunan. Karena $|X| = 6 > 4$, maka hanya dengan 2 warna tidak bisa membentuk pelangi sisi terhubung. Artinya, ada 2 titik yang dihubungkan oleh lintasan dengan warna sisi yang sama, sehingga $rc(K_{2,6}) > 2$. Di ambil 3 warna, menggunakan penyusunan dengan pengulangan dari 3 warna yang disusun ke 2 tempat diperoleh kemungkinan $3 \times 3 = 9$ susunan. Karena $|X| = 6 < 9$, maka dengan 3 warna dapat dibentuk pelangi sisi terhubung, sehingga $rc(K_{2,6}) = 3$.

Sedangkan agar terbentuk pelangi titik yang terhubung, di mana setiap antara dua titik pada graf $K_{2,6}$ terdapat lintasan dengan warna titik interior yang berbeda, cukup dibutuhkan satu warna titik. Hal ini dikarenakan panjang diameter pada graf $K_{2,6}$ adalah 2 dan titik interior sebanyak 1, sehingga diperoleh bilangan $rvc(K_{2,6}) = 1$.



Gambar 3.12 Graf Bipartisi $K_{2,10}$

Memakai cara yang sama, pada graf $K_{2,10}$ terdapat 2 partisi X dengan 6 titik dan partisi Y dengan 2 titik. Menggunakan penyusunan dengan pengulangan dari 2 warna yang disusun ke 2 tempat diperoleh kemungkinan $2 \times 2 = 4$ susunan. Menggunakan penyusunan dengan pengulangan dari 3 warna yang disusun ke 2 tempat diperoleh kemungkinan $3 \times 3 = 9$ susunan. Karena $|X| = 10 > 9 > 6$, maka hanya dengan 2 warna dan 3 warna tidak bisa membentuk pelangi sisi terhubung. Artinya, ada 2 titik yang dihubungkan oleh lintasan dengan warna sisi yang sama, sehingga $rc(K_{2,10}) > 3$.

Di ambil 4 warna, maka graf $K_{2,10}$ akan membetuk pelangi sisi terhubung, karena setiap antara dua titik akan terdapat lintasan dengan warna sisi yang berbeda. Hal ini dikarenakan setiap dua titik pada partisi yang sama akan dihubungkan oleh lintasan dengan panjang 4. Misalkan $v_i \in V(X), i \leq 10, i \in \mathbb{N}$ dan $u_i \in V(X), i = 1,2$, maka v_i terhubung langsung dengan u_1, kemudian u_1 terhubung langsung dengan v_{i+1}, kemudian v_{i+1} terhubung langsung dengan u_2 dan u_2 terhubung langsung dengan v_{i+2}.

Misalkan terdapat fungsi pewarnaan sisi $c: E(G) \rightarrow \{1,2,3,4\}$, maka:

$c(v_i, u_1) = 1, \qquad i = 1,3,5,7,9$

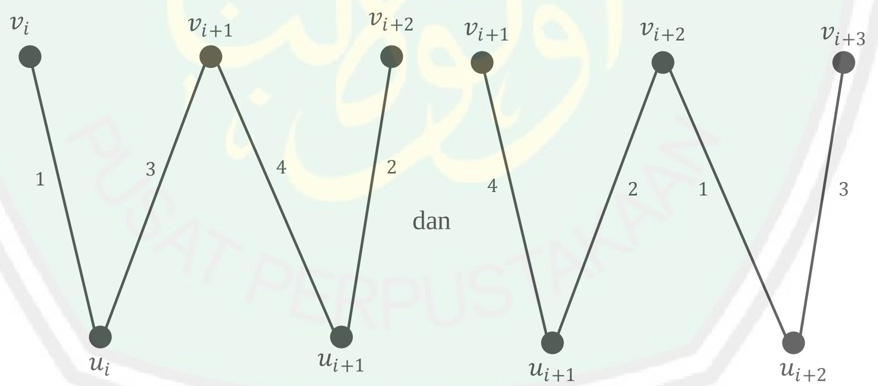
$c(v_{i+1}, u_1) = 3, \qquad i = 1,3,5,7,9$

$c(v_i, u_2) = 2, \qquad i = 1,3,5,7,9$

$c(v_{i+1}, u_2) = 4, \qquad i = 1,3,5,7,9$

Sehingga diperoleh $rc(K_{2,10}) = 4$. Sedangkan agar terbentuk pelangi titik yang terhubung, di mana setiap antara dua titik pada graf $K_{2,10}$ terdapat lintasan dengan warna titik interior yang berbeda, cukup dibutuhkan satu warna titik. Hal ini dikarenakan panjang diameter pada graf $K_{2,10}$ adalah 2 dan titik interior sebanyak 1, sehingga diperoleh bilangan $rvc(K_{2,10}) = 1$.

Secara umum graf $K_{n,m}$ dapat dibentuk menjadi pelangi sisi terhubung hanya dengan menggunakan 4 warna. Hal ini dapat dijelaskan dengan model lintasan antara 2 titik sebagai berikut:



Gambar 3.13 Model Lintasan Graf Bipartisi $K_{m,n}$

Dari beberapa kasus yang ditunjukkan oleh bilangan *rainbow connection* dan bilangan *rainbow vertex-connection* di atas, maka dapat diperoleh teorema graf bipartisi komplit $K_{n,m}$ sebagai berikut:

Teorema 2

Graf bipartisi komplit $K_{n,m}$ dengan $n \leq m$ dan $n, m \in \mathbb{N}$, maka bilangan *rainbow connection* pada graf $K_{n,m}$ adalah:

$$rc(K_{n,m}) = \begin{cases} m, & \text{jika} \quad n = 1 \\ 2, & \text{jika} \quad 2^n \geq m \\ 3, & \text{jika} \quad 2^n < m \leq 3^n \\ 4, & \text{jika lainnya} \end{cases}$$

bilangan *rainbow vertex-connection* pada graf $K_{n,m}$ adalah:

$$rvc(K_{n,m}) = 1$$

Bukti:

Graf bipartisi komplit $K_{n,m}$ terdiri dari 2 partisi, yaitu X dan Y, dengan $|X| = m$ dan $|Y| = n$.Misalkan $v_i \in V(X), i = 1,2, \ldots, m$ dan $u_i \in V(Y), i = 1,2, \ldots, n$. Maka setiap dua titik v_i dan setiap dua titik u_i tidak terhubung langsung, akan tetapi setiap titik v_i dengan u_i akan dihubungkan dengan satu sisi. Terdapat 4 kasus, yaitu:

(i) jika $n = 1$, maka $rc(K_{1,m}) = m$.

Andaikan $rc(K_{1,m}) < m$, maka ada dua sisi di $K_{1,m}$ yang berwarna sama. Misal(v_i, u_1) dan (v_j, u_1) dengan $i \neq j$. Akibatnya lintasan $v_i - v_j$ bukan lintasan pelangi karena hanya ada 1 warna.

Jadi $K_{1,m}$ bukan pelangi sisi yang terhubung, jadi $rc(K_{1,m}) \geq m$.

Karena pewarnaan sisi dengan m warna menghasilkan $K_{1,m}$ graf pelangi sisi, maka $rc(K_{1,m}) \leq m$. Disimpulkan $rc(K_{1,m}) = m$.

(ii) $rc(K_{n,m}) = 2$ jika $2^n \geq m$.

Akan dibuktikan jika $2^n \geq m$, maka $rc(K_{n,m}) = 2$,

$\deg(v_i) = n$ dan $\deg(u_i) = m$

Jika $rc(K_{n,m}) = 2$ maka setiap dua titik, maksimal ada lintasan dengan 2 warna sisi yang berbeda. Untuk itu jika setiap lintasan $v_i - v_j$ dan setiap lintasan $u_i - u_j$ terbentuk lintasan pelangi maka susunan warna yang dikenakan pada sisi yang terkait langsung pada v_i berbeda dengan v_j, begitu juga pada u_i berbeda dengan u_j. Selanjutnya karena $\deg(v_i) = n \leq \deg(u_i) = m$, maka jika setiap susunan warna yang dikenakan pada sisi yang terkait langsung dengan v_i berbeda, maka susunan warna yang dikenakan pada sisi yang terkait langsung dengan setiap u_i juga berbeda. Sehingga cukup dianalisis susunan warna pada sisi yang terkait langsung dengan titik $v_i \in V(X), i = 1,2, \dots, m$.

Diketahui $rc(K_{n,m}) = 2$ dan $\deg(v_i) = n$, jadi dari 2 warna tersebut akan disusun ke-n tempat dengan perulangan, sehingga diperoleh banyaknya susunan $= 2_1 \times 2_2 \times 2_3 \times \dots \times 2_n = 2^n$.Kemudian susunan tersebut diberikan pada setiap titik v_i dan v_j dengan $i \neq j$. Jika banyaknya susunan sebanyak 2^n lebih banyak dari banyaknya titik v_i yang sebanyak m, maka setiap v_i mempunyai susunan warna sisi yang terkait langsung berbeda dengan v_j. Sehingga lintasan $v_i - v_j$ akan membentuk lintasan pelangi. Jadi terbukti jika $2^n \geq m$ maka $rc(K_{n,m}) = 2$.

(iii) Jika $rc(K_{n,m}) = 3$ jika $2^n \leq m \leq 3^n$

Akan dibuktikan jika $2^n \leq m$ maka $rc(K_{n,m}) \geq 3$ dan jika $m \leq 3^n$ maka $rc(K_{n,m}) = 3$.

Ambil $rc(K_{n,m}) = 2$, jika $2^n \leq m$ maka akan dibuktikan ada dua titik yang semua lintasannya mempunyai warna sisi yang sama. Banyak susunan warna 2^n, artinya $v_1, v_2, \dots, v_{2^n}$ susunan warna sisi yang terkait langsung berbeda. Karena $2^n \leq m$ maka ada titik v_{2^n+a} yang mempunyai susunan warna yang sama dengan v_b, dengan $1 \leq a \leq (m-2^n)$ dan $1 \leq b \leq 2^n$.Misalkan ada fungsi $c: E(K_{n,m}) \to \{1,2\}$, maka $c(v_{2^n+a}, u_i) = c(v_b, u_i)$, sehingga lintasan $v_b - v_{2^n+a}$ tidak membentuk lintasan pelangi, karena semua lintasannya pasti mempunyai warna sisi yang sama. Sehingga terbukti jika $2^n \leq m$ maka $rc(K_{n,m}) \geq 3$.

Sekarang $rc(K_{n,m}) = 3$ dan $\deg(v_i) = n$, jadi dari 3 warna tersebut akan disusun ke-n tempat dengan perulangan, sehingga diperoleh banyaknya susunan $= 3_1 \times 3_2 \times 3_3 \times \dots \times 3_n = 3^n$. Kemudian susunan tersebut diberikan pada setiap titik v_i dan v_j dengan $i \neq j$. Jika banyaknya susunan sebanyak 3^n lebih banyak dari banyaknya titik v_i yang sebanyak m, maka setiap v_i mempunyai susunan warna sisi yang terkait langsung berbeda dengan v_j. Sehingga lintasan $v_i - v_j$ akan membentuk lintasan pelangi. Jadi terbukti jika $m \leq 3^n$ maka $rc(K_{n,m}) = 3$.

(iv) $rc(K_{n,m}) = 4$, jika lainnya

Jika sudah tidak memenuhi semua ketentuan di atas, untuk membentuk graf $K_{m,n}$ menjadi pelangi sisi terhubung, maka graf $K_{m,n}$ dapat diwarnai minimal mengunakan 4 warna. Misalkan ada fungsi pewarnaan sisi $c: E(K_{n,m}) \to \{1,2,3,4\}$ maka:

$$c(v_i, u_j) = 1, i \neq j \; dengan \; i = ganjil, j = ganjil,$$

$$c(v_i, u_j) = 3, i \neq j \; dengan \; i = genap, j = ganjil,$$

$$c(v_i, u_j) = 2, i \neq j \; dengan \; i = ganjil, j = genap,$$

$$c(v_i, u_j) = 4, i \neq j \; dengan \; i = genap, j = genap,$$

dengan pewarnaan di atas maka setiap dua titik pada graf $K_{m,n}$ terdapat lintasan dengan warna sisi yang berbeda, sehingga graf $K_{m,n}$ akan membentuk graf pelangi sisi terhubung, jadi dengan demikian terbukti $rc(K_{m,n}) = 4$.

(v) $rvc(K_{m,n}) = 1$

Akan dibuktikan $rvc(K_{m,n}) \geq 1$dan $rvc(K_{m,n}) \leq 1$.

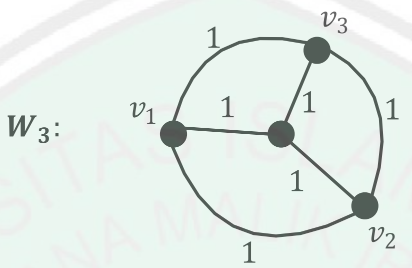
Diketahui $diam(K_{m,n}) = 2$, sehingga $rvc(K_{m,n}) \geq 2 - 1 = 1$.

Untuk membuktikan $rvc(K_{m,n}) \leq 1$, maka akan dibuktikan bahwa dengan 1 warna titik, dapat membentuk pelangi titik yang terhubung, artinya setiap dua titik terdapat lintasan dengan warna titik interior yang berbeda. Ambil $rvc(K_{m,n}) = 1$,misalkan ada fungsi pewarnaan $c: V(K_{n,m}) \rightarrow \{1\}$ maka: $c(v_i) = 1$, dan $c(u_i) = 1$, sehingga setiap lintasan $v_i - v_j$ akan melewati titik interior u_i dimana $c(u_i) = 1$, sedangkan setiap lintasan $u_i - u_j$ akan melewati titik interior v_i dimana $c(v_i) = 1$, dengan demikian setiap dua titik terdapat lintasan dengan warna titik interior yang berbeda. Jadi terbukti $rvc(K_{m,n}) \leq 1$. Karena $rvc(K_{m,n}) \geq 1$ dan $rvc(K_{m,n}) \leq 1$, maka $rvc(K_{m,n}) = 1$.

c. Graf Roda

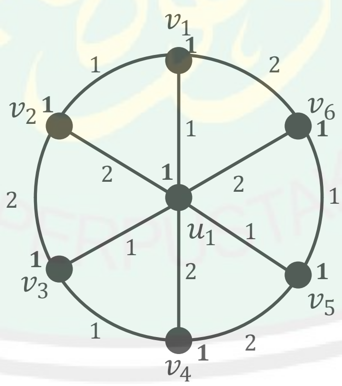
Graf roda adalah graf yang berbentuk dari operasi penjumlahan antara graf sikel (C_n) dan graf komplit dengan satu titik (K_n). Graf roda dinotasikan dengan W_n dan $n \geq 3$.

Bilangan *rainbow connection* dan bilangan *rainbow vertex-connection* pada graf roda dapat ditentukan dengan menentukan terlebih dahulu $rc(W_n)$ dan $rvc(W_n)$ pada graf W_3, graf W_6, graf W_7 dan terakhir menggambar pola warna pada graf W_n agar terbentuk graf pelangi sisi terhubung.



Gambar 3.14 Graf roda W_3

Graf W_3terdiri dari 4 titik dan 6 sisi. Setiap pasang titik yang berbeda pada graf W_3 dihubungkan oleh satu sisi, oleh karena itu bisa dikatakan graf W_3 menyerupai graf K_4. Sehingga bilangan $rc(W_3)$ dan $rvc(W_3)$ juga sama dengan graf K_4 yaitu berturut-turut 1 dan 0.

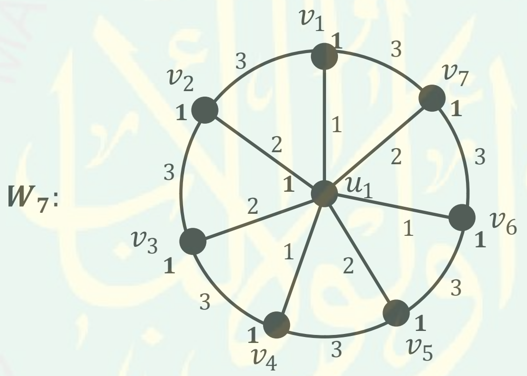


Gambar 3.15 Graf roda W_6

Graf W_6 terdiri dari 7 titik dan 12 sisi serta merupakan graf sikel dengan 6 titik yang setiap titiknya terhubung langsung dengan titik dari graf K_1. Graf W_6 mempunyai diameter dengan panjang 2, sehingga $rc(W_6) \geq 2$. Misalkan fungsi pewarnaan sisi $c: E(W_n) \rightarrow \{1,2\}$ yang didefinisikan oleh $c(v_i, u) = 1$

jika i ganjil, $c(v_i, u) = 2$ jika i genap, $c(v_i, v_{i+1}) = 1$ jika i ganjil, $c(v_i, v_{i+1}) = 2$ jika i genap, maka akan membentuk graf W_6 menjadi graf pelangi sisi yang terhubung dimana setiap dua titik terdapat lintasan dengan warna sisi yang berbeda. Hal ini membuktikan bahwa $rc(W_6) \leq 2$, jadi diperoleh $rc(W_6) = 2$.

Sedangkan agar terbentuk pelangi titik yang terhubung, di mana setiap antara dua titik pada graf W_6 terdapat lintasan dengan warna titik interior yang berbeda, cukup dibutuhkan satu warna titik. Hal ini dikarenakan panjang diameter pada graf W_6 adalah 2 dan titik interior sebanyak 1, sehingga diperoleh bilangan $rvc(W_6) = 1$.



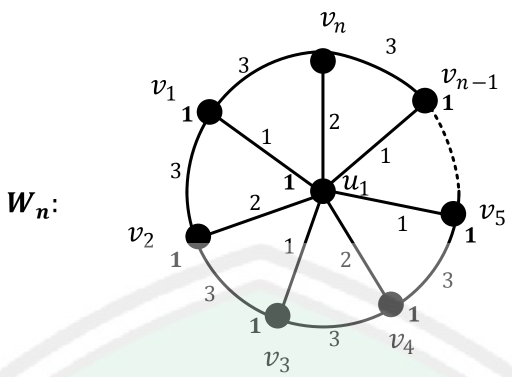
Gambar 3.16 Graf roda W_7

Graf W_7 terdiri dari 8 titik dan 14 sisi serta merupakan graf sikel dengan 7 titik yang setiap titiknya terhubung langsung dengan titik dari graf K_1. Walaupun $diam(W_7) = 2$, tetapi belum tentu graf W_7 dapat dibentuk menjadi graf pelangi sisi yang terhubung dengan menggunakan 2 warna. Misalkan fungsi pewarnaan sisi $c: E(W_7) \rightarrow \{1,2\}$ didefinisikan $c(v_1, u) = 1$,maka $c(v_4, u) = 2$ dan $c(v_5, u) = 2$,karena tidak mungkin menggunakan lintasan sisi C_7 yang panjangnya 3. Kemudian jika $c(v_i, v_{i+1}) = 1$ dengan i ganjil, $c(v_i, v_{i+1}) = 2$ dengan i genap, maka $c(v_6, u) = 1$ membentuk lintasan pelangi, karena panjang lintasan dengan sisi C_7 sama dengan 2 dan warnanya berbeda. Tetapi jika

$c(v_3, u) = 1$,lintasan $v_3 - v_6$ warnanya akan sama dan kalau lintasannya menggunakan sisi C_7 juga tidak mungkin karena panjangnya sama dengan 3, jadi haruslah $c(v_3, u) = 2$.Selanjutnya $c(v_1, u)$ harus sama dengan 1, karena $c(v_5, u) = 2$, akan tetapi pewarnaan demikian akan membuat antara titik v_1 dan v_6 semua lintasannya akan mempunyai warna yang sama, sehingga haruslah $c(v_1, u) = 3$, sehingga $rc(W_7) \geq 3$.

Selanjutnya jika fungsi pewarnaan sisi $c: E(W_7) \rightarrow \{1,2,3\}$ yang didefinisikan oleh $c(v_i, u) = 1$ jika i ganjil, $c(v_i, u) = 2$ jika i genap, dan $c(\varepsilon) = 3, \forall \varepsilon \in E(C_n)$ maka akan membentuk pelangi sisi terhubung, sehingga $rc(W_n) \leq 3$. Jadi dapat diperoleh $rc(W_7) = 3$. Sedangkan agar terbentuk pelangi titik yang terhubung, di mana setiap antara dua titik pada graf W_7 terdapat lintasan dengan warna titik interior yang berbeda, cukup dibutuhkan satu warna titik. Hal ini dikarenakan panjang diameter pada graf W_7 adalah 2 dan titik interior sebanyak 1, sehingga diperoleh bilangan $rvc(W_7) = 1$.

Secara umum graf W_n dapat dibentuk menjadi graf pewarnaan sisi yang terhubung, dengan warna sisi minimal 3, dan juga graf W_n dapat dibentuk menjadi graf pewarnaan titik yang terhubung, dengan warna titik minimal 1, yang ditampilkan dalam model pewarnaan berikut:



Gambar 3.17 Graf roda W_n

Dari beberapa kasus yang ditunjukan oleh bilangan *rainbow connection* dan bilangan *rainbow vertex-connection* di atas maka dapat diperoleh teorema:

Teorema 3

Graf G adalah graf roda W_n dengan $n \in \mathbb{N}$, maka bilangan *rainbow connection* pada graf G adalah:

$$rc(W_n) = \begin{cases} 1, & \text{jika } n = 3 \\ 2, & \text{jika } 4 \leq n \leq 6 \\ 3, & \text{jika } n \geq 7 \end{cases}$$

bilangan *rainbow vertex-connection* pada graf W_n adalah:

$$rvc(W_n) = 1, \qquad \text{jika } n \geq 4$$

Bukti:

graf roda W_n dengan $n \geq 3$adalah graf yang terbentuk dari operasi penjumlahan antara graf sikel (C_n) dan graf komplit dengan satu titik (K_1). Misalkan $v_i \in V(C_n)$, $i = 1,2, \dots, n$, maka $v_{n+1} = v_1$,dan $u \in V(K_1)$, serta untuk semua v_i terhubung langsung dengan u.

(i) Jika $n = 3$, akan dibuktikan W_3 adalah graf K_4.

Untuk semua $v_1, v_2, v_3 \in (C_3)$ terhubung langsung dengan u,sehingga diperoleh $\deg(v_1) = \deg(v_2) = \deg(v_3) = \deg(u) = 3$. Karena graf W_3

dengan 4 titik beraturan-3 maka W_3 adalah graf komplit, jadi terbukti dengan $n = 3$ maka $rc(W_3) = 1$ **(Teorema 1)**.

(ii) Jika $4 \leq n \leq 6$ maka $rc(W_n) = 2$

Akan dibuktikan $rc(W_n) \geq 2$ dan $rc(W_n) \leq 2$.

Graf W_n dengan $4 \leq n \leq 6$ bukan merupakan graf komplit, karena $\deg(v_i) = 3$ sedangkan jumlah titiknya $5 \leq |W_n| \leq 7$, sehingga $rc(G) \geq 2$. Kemudian untuk membuktikan $rc(G) \leq 2$ maka akan dibuktikan bahwa dengan 2 warna dapat membentuk W_n menjadi pelangi sisi yang terhubung, sehingga setiap dua titik terdapat lintasan dengan warna sisi yang berbeda. Fungsi pewarnaan sisi $c: E(W_n) \to \{1,2\}$ yang didefinisikan oleh $c(v_i, u) = 1$ jika i ganjil, $c(v_i, u) = 2$ jika i genap, $c(v_i, v_{i+1}) = 1$ jika i ganjil, $c(v_i, v_{i+1}) = 2$ jika i genap.

Setiap lintasan $v_i - u$ atau $u - v_i$ hanya terdapat satu warna sisi. Kemudian lintasan $v_i - v_j$, jika i genap dan v_i dan j ganjil pasti berbentuk lintasan pelangi 2 warna. Sedangkan untuk lintasan $v_i - v_j$ dengan i dan $j$sama-sama genap atau $i$dan j sama-sama ganjil. Jika $v_i - v_{i+2}$ maka membentuk lintasan pelangi yang sisi-sinya C_n.Tetapi jika lintasan $v_i - v_{i+c}$, dengan $4 \leq c \leq n-2$ maka $c = 4$, karena $n = 6$ diperoleh $4 \leq c \leq 6-2$.Untuk $i = 1$, dengan lintasan $v_1 - v_5$, maka dapat dibentuk lintasan pelangi melewati titik v_6, sedangkan untuk $i = 2$ dengan lintasan $v_2 - v_6$, maka dapat dibentuk lintasan pelangi melewati titik v_1, terbukti setiap dua titik terdapat lintasan dengan warna sisi yang berbeda, sehingga diperoleh $rc(G) \leq 2$. Jadi terbukti untuk $4 \leq n \leq 6$ maka $rc(G) = 2$.

(iii) jika $n \geq 7$ maka $rc(G) = 3$

Akan dibuktikan $rc(G) \geq 3$ dan $rc(G) \leq 3$.

Dibuktikan $rc(G) \leq 3$ maka akan dibuktikan bahwa dengan 3 warna dapat membentuk W_n menjadi pelangi sisi yang terhubung, sehingga setiap dua titik terdapat lintasan dengan warna sisi yang berbeda. Jika fungsi pewarnaan sisi $c: E(W_n) \to \{1,2,3\}$ yang didefinisikan oleh $c(v_i, u) = 1$ jika i ganjil, $c(v_i, u) = 2$ jika i genap, dan $c(\varepsilon) = 3, \forall \varepsilon \in E(C_n)$ maka akan membentuk pelangi sisi terhubung, sehingga $rc(W_n) \leq 3$.

Selanjutnya dibuktikan $rc(G) \geq 3$, dari hasil di atas didapat W_n bukan graf komplit sehingga $rc(G) \geq 2$. Ambil $rc(G) = 2$ Misalkan fungsi pewarnaan sisi $c: E(W_7) \to \{1,2\}$ didefinisikan $c(v_1, u) = 1$,maka $c(v_4, u) = 2$ dan $c(v_5, u) = 2$,karena tidak mungkin menggunakan lintasan sisi C_n yang panjangnya 3. Kemudian jika $c(v_i, v_{i+1}) = 1$ dengan i ganjil, $c(v_i, v_{i+1}) = 2$ dengan i genap, maka $c(v_{n-1}, u) = 1$ membentuk lintasan pelangi, karena panjang lintasan dengan sisi C_n sama dengan 2 dan warnanya berbeda. Tetapi jika $c(v_3, u) = 1$,lintasan $v_3 - v_{n-1}$ warnanya akan sama dan kalau lintasannya menggunakan sisi C_7 juga tidak mungkin karena panjangnya ≥ 3, jadi haruslah $c(v_3, u) = 2$. Selanjutnya $c(v_1, u)$ harus sama dengan 1, karena $c(v_5, u) = 2$, akan tetapi pewarnaan demikian akan membuat antara titik v_1 dan v_{n-1} semua lintasannya akan mempunyai warna yang sama, sehingga haruslah $c(v_1, u) = 3$, hal tersebut berlaku jika $n \geq 7$ karena lintasan $v_1 - v_{n-1}$ minimal mempunyai panjang 3, sehingga $rc(W_n) \geq 3$. Karena $rc(W_n) \geq 3$ dan $rc(W_n) \leq 3$ maka terbukti $rc(W_n) = 3$, dengan $n \geq 7$.

(iv) jika $n \geq 4$ maka $rvc(W_n) = 1$

Akan dibuktikan $rvc(W_n) \geq 1$dan $rvc(W_n) \leq 1$.

Diketahui $diam(W_n) = 2$, sehingga $rvc(W_n) \geq 2 - 1 = 1$.

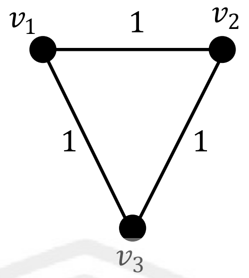
Untuk membuktikan $rvc(W_n) \leq 1$, maka akan dibuktikan bahwa dengan 1 warna titik, dapat membentuk pelangi titik yang terhubung, artinya setiap dua titik terdapat lintasan dengan warna titik interior yang berbeda. Ambil $rvc(W_n) = 1$, misalkan ada fungsi pewarnaan $c: V(K_{n,m}) \rightarrow \{1\}$ maka: $c(u) = 1$, sehingga setiap lintasan $v_i - v_j$ akan melewati titik interior u dimana $c(u) = 1$, sedangkan setiap lintasan $v_i - u$ tidak ada titik interior karena terhubung langsung, dengan demikian setiap dua titik terdapat lintasan dengan warna titik interior yang berbeda. Jadi terbukti $rvc(W_n) \leq 1$. Karena $rvc(W_n) \geq 1$dan $rvc(W_n) \leq 1$, maka $rvc(W_n) = 1$.

d. Graf Kipas

Graf kipas dibentuk dari penjumlahan graf komplit (K_1) dan graf lintasan (P_n) yaitu $F_n = K_1 + P_n$. Dengan demikian graf kipas mempunyai $(n + 1)$ titik dan $(2n - 1)$ sisi.

Bilangan *rainbow connection* dan bilangan *rainbow vertex-connection* pada graf roda dapat ditentukan dengan menentukan terlebih dahulu $rc(F_n)$ dan $rvc(F_n)$ pada graf F_2, graf F_4, graf F_6, graf F_7 dan terakhir menggambar pola warna pada graf F_n agar terbentuk graf pelangi sisi terhubung. Dari pola tersebut selanjutnya dapat disimpulkan mengenai bilangan *rainbow connection* dan *rainbow vertex-connection* pada graf kipas F_n.

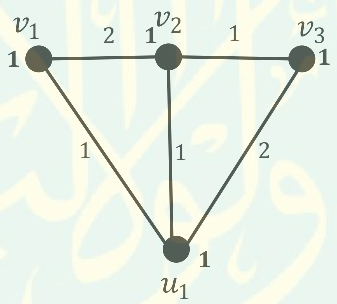
F_2:



Gambar 3.18 Graf kipas F_2

Graf F_2 terdiri dari 3 titik dan 3 sisi, dimana setiap pasang titik yang berbeda dihubungkan dengan satu sisi. Oleh karena itu graf F_2 ekuivalen dengan graf K_3. Sehingga bilangan $rc(G)$ dan $rvc(G)$ sama dengan graf K_3 yaitu berturut-turut sebesar 1 dan 0.

Graf F_3 =

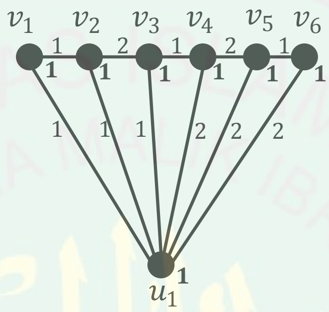


Gambar 3.19 Graf kipas F_3

Graf F_3 terdiri dari 4 titik dan 5 sisi, yang merupakan graf dari hasil penjumlahan graf P_3 dengan graf K_1. Graf F_3 mempunyai diameter dengan panjang 2, sehingga $rc(F_3) \geq 2$. Misalkan fungsi pewarnaan sisi $c: E(F_3) \rightarrow \{1,2\}$ yang didefinisikan oleh $c(v_i, u) = 1$ jika $1 \leq i \leq [\frac{3}{2}]$, $c(v_i, u) = 2$ jika $[\frac{3}{2}] \leq i \leq 3$, $c(v_i, v_{i+1}) = 2$ jika i ganjil, $c(v_i, v_{i+1}) = 1$ jika i genap, maka akan membentuk graf F_3 menjadi graf pelangi sisi yang terhubung dimana setiap dua titik terdapat lintasan dengan warna sisi yang berbeda. Hal ini membuktikan bahwa $rc(F_3) \leq 2$, jadi diperoleh $rc(F_3) = 2$.

Sedangkan agar terbentuk pelangi titik yang terhubung, di mana setiap antara dua titik pada graf F_3 terdapat lintasan dengan warna titik interior yang berbeda, cukup dibutuhkan satu warna titik. Hal ini dikarenakan panjang diameter pada graf F_3 adalah 2 dan titik interior sebanyak 1, sehingga diperoleh bilangan $rvc(F_3) = 1$.

$\boldsymbol{F_6}$:

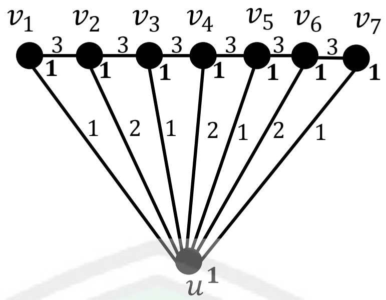


Gambar 3.20 Graf kipas F_6

Graf F_6 terdiri dari 7 titik dan 11 sisi, yang merupakan graf dari hasil penjumlahan graf P_6 dengan graf K_1. Graf F_6 mempunyai diameter dengan panjang 2, sehingga $rc(F_6) \geq 2$. Misalkan fungsi pewarnaan sisi $c: E(F_6) \to \{1,2\}$ yang didefinisikan oleh $c(v_i, u) = 1$ jika $1 \leq i \leq \left[\frac{6}{2}\right]$, $c(v_i, u) = 2$ jika $\left[\frac{6}{2}\right] \leq i \leq 6$, $c(v_i, v_{i+1}) = 1$ jika i ganjil, $c(v_i, v_{i+1}) = 2$ jika i genap, maka akan membentuk graf F_6 menjadi graf pelangi sisi yang terhubung dimana setiap dua titik terdapat lintasan dengan warna sisi yang berbeda. Hal ini membuktikan bahwa $rc(F_6) \leq 2$, jadi diperoleh $rc(F_6) = 2$.

Sedangkan agar terbentuk pelangi titik yang terhubung, di mana setiap antara dua titik pada graf F_6 terdapat lintasan dengan warna titik interior yang berbeda, cukup dibutuhkan satu warna titik. Hal ini dikarenakan panjang diameter pada graf F_6 adalah 2 dan titik interior sebanyak 1, sehingga diperoleh bilangan $rvc(F_6) = 1$.

F_7:

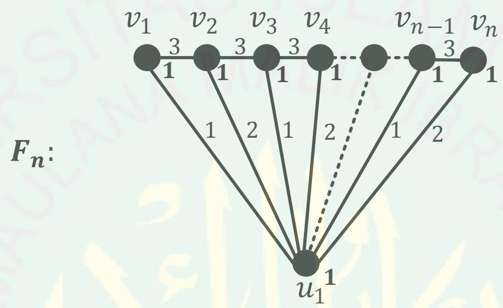


Gambar 3.21 Graf Kipas F_7

Graf F_7 terdiri dari 8 titik dan 13 sisi, yang merupakan graf dari hasil penjumlahan graf P_7 dengan graf K_1. Walaupun $diam(F_7) = 2$, tetapi belum tentu graf F_7 dapat dibentuk menjadi graf pelangi sisi yang terhubung dengan menggunakan 2 warna. Misalkan fungsi pewarnaan sisi $c: E(F_7) \rightarrow \{1,2\}$ didefinisikan $c(v_1, u) = 1$, maka $c(v_4, u) = c(v_5, u) = c(v_6, u) = c(v_7, u) = 2$, karena tidak mungkin menggunakan lintasan sisi P_7 yang panjangnya ≥ 3. Sedangkan jika $c(v_i, v_{i+1}) = 1$ dengan i ganjil, $c(v_i, v_{i+1}) = 2$ dengan i genap, maka $c(v_2, u) = c(v_3, u) = 1$ membentuk lintasan pelangi, karena panjang lintasan dengan sisi P_7 sama dengan 2 dan warnanya berbeda. Pewarnaan demikian akan membuat antara titik $v_4$dan v_7 semua lintasannya akan mempunyai warna yang sama, karena $c(v_4, u) = c(v_7, u) = 2$ dan lintasan dengan sisi P_7 panjangnya sama dengan 3, sehingga haruslah $c(v_4, u) = 3$, maka terbukti $rc(F_7) \geq 3$.

Selanjutnya jika fungsi pewarnaan sisi $c: E(F_7) \rightarrow \{1,2,3\}$ yang didefinisikan oleh $c(v_i, u) = 1$ jika i ganjil, $c(v_i, u) = 2$ jika i genap, dan $c(\varepsilon) = 3, \forall \varepsilon \in E(C_n)$ maka akan membentuk pelangi sisi terhubung, sehingga $rc(F_7) \leq 3$. Jadi dapat diperoleh $rc(F_7) = 3$. Sedangkan agar terbentuk pelangi titik yang terhubung, di mana setiap antara dua titik pada graf F_7 terdapat lintasan dengan warna titik interior yang berbeda, cukup dibutuhkan satu warna titik. Hal ini dikarenakan panjang diameter pada graf F_7 adalah 2 dan titik interior sebanyak 1, sehingga diperoleh bilangan $rvc(F_7) = 1$.

Secara umum graf F_n dapat dibentuk menjadi graf pewarnaan sisi yang terhubung, dengan warna sisi minimal 3, dan juga graf F_n dapat dibentuk menjadi graf pewarnaan titik yang terhubung, dengan warna titik minimal 1, yang ditampilkan dalam model pewarnaan berikut:



Gambar 3.22 Graf Kipas F_n

Dari beberapa kasus yang ditunjukan oleh bilangan *rainbow connection* dan bilangan *rainbow vertex-connection* di atas maka dapat diperoleh teorema graf kipas F_n sebagai berikut:

Teorema 4

Graf kipas F_n dengan $n \in \mathbb{N}$, maka bilangan *rainbow connection* pada graf F_n adalah:

$$rc(F_n) = \begin{cases} 1, & jika\ n = 2 \\ 2, & jika\ 3 \leq n \leq 6 \\ 3, & jika\ n \geq 7 \end{cases}$$

bilangan *rainbow vertex-connection* pada graf F_n adalah:

$$rvc(F_n) = 1, \quad jika\ n \geq 2$$

Bukti:

Graf kipas F_n dibentuk dari penjumlahan graf komplit (K_1) dan graf lintasan (P_n) yaitu $F_n = K_1 + P_n$. Dengan demikian graf kipas mempunyai

$(n+1)$ titik dan $(2n-1)$ sisi. Misalkan $v_i \in V(P_n)$, $i = 1,2,\dots,n$, dan $u \in V(K_1)$, serta untuk semua v_i terhubung langsung dengan u.

(i) Jika $n = 2$, akan dibuktikan F_2 adalah graf K_3.

Untuk semua $v_1, v_2 \in (P_2)$ terhubung langsung dengan u,sehingga diperoleh $\deg(v_1) = \deg(v_2) = \deg(u) = 2$. Karena graf F_2 dengan 3 titik beraturan-2 maka F_2 adalah graf komplit, jadi terbukti dengan $n = 2$ maka $rc(G) = 1$.

(ii) Jika $3 \leq n \leq 6$ maka $rc(G) = 2$

Akan dibuktikan $rc(G) \geq 2$ dan $rc(G) \leq 2$.

Graf F_n dengan $4 \leq n \leq 6$ bukan merupakan graf komplit, karena $\deg(v_i) \leq 3$ sedangkan jumlah titiknya $4 \leq |F_n| \leq 7$, sehingga $rc(G) \geq 2$. Kemudian untuk membuktikan $rc(G) \leq 2$ maka akan dibuktikan bahwa dengan 2 warna dapat membentuk F_n menjadi pelangi sisi yang terhubung, sehingga setiap dua titik terdapat lintasan dengan warna sisi yang berbeda. Fungsi pewarnaan sisi $c: E(F_n) \rightarrow \{1,2\}$ yang didefinisikan oleh $c(v_i, u) = 1$ jika $1 \leq i \leq \left[\frac{n}{2}\right]$, $c(v_i, u) = 2$ jika $\left[\frac{n}{2}\right] \leq i \leq n$, $c(v_i, v_{i+1}) = 1$ jika i ganjil, $c(v_i, v_{i+1}) = 2$ jika i genap.

Setiap lintasan $v_i - u$ atau $u - v_i$ hanya terdapat satu warna sisi. Kemudian lintasan $v_i - v_j$, dengan $1 \leq i \leq \left[\frac{n}{2}\right]$ dan $\left[\frac{n}{2}\right] \leq j \leq n$ pasti berbentuk lintasan pelangi 2 warna. Sedangkan untuk lintasan $v_i - v_j$ dengan i dan j sama-sama $1 \leq i \leq \left[\frac{n}{2}\right]$ atau dengan i dan j sama-sama $\left[\frac{n}{2}\right] \leq i \leq n$. Lintasan terpanjang adalah $v_1 - v_c$ dengan $c = \left[\frac{n}{2}\right]$, karena $n \leq 6$ maka lintasan terpanjangnya $v_1 - v_3$ dan $v_4 - v_6$ maka membentuk lintasan pelangi 2 warna yang sisi-sinya anggota P_n, sehingga terbukti setiap dua titik terdapat lintasan dengan warna sisi yang berbeda, sehingga diperoleh $rc(G) \leq 2$. Jadi terbukti untuk $3 \leq n \leq 6$ maka $rc(G) = 2$.

(iii) jika $n \geq 7$ maka $rc(G) = 3$

Akan dibuktikan $rc(G) \geq 3$ dan $rc(G) \leq 3$.

Dibuktikan $rc(G) \leq 3$ maka akan dibuktikan bahwa dengan 3 warna dapat membentuk F_n menjadi pelangi sisi yang terhubung, sehingga setiap dua titik terdapat lintasan dengan warna sisi yang berbeda. Jika fungsi pewarnaan sisi $c: E(F_n) \rightarrow \{1,2,3\}$ yang didefinisikan oleh $c(v_i, u) = 1$ jika i ganjil, $c(v_i, u) = 2$ jika i genap, dan $c(\varepsilon) = 3, \forall \varepsilon \in E(P_n)$ maka akan membentuk pelangi sisi terhubung, sehingga $rc(F_n) \leq 3$.

Selanjutnya dibuktikan $rc(F_n) \geq 3$, dari hasil di atas didapat F_n bukan graf komplit sehingga $rc(F_n) \geq 2$.Ambil $rc(F_n) = 2$ Misalkan fungsi pewarnaan sisi $c: E(F_n) \rightarrow \{1,2\}$ didefinisikan $c(v_1, u) = 1$, maka $c(v_{1+c}, u) = 2$,dengan $3 \leq c \leq n-1$ karena tidak mungkin menggunakan lintasan sisi P_n yang panjangnya $\geq$ 3. Sedangkan jika $c(v_i, v_{i+1}) = 1$ dengan i ganjil, $c(v_i, v_{i+1}) = 2$ dengan i genap, maka $c(v_2, u) = c(v_3, u) = 1$ membentuk lintasan pelangi, karena panjang lintasan dengan sisi P_n sama dengan 2 dan warnanya berbeda. Pewarnaan demikian akan membuat antara titik v_{1+c} dengan $c = 3$ dan v_{1+c} dengan $c = n-1$ semua lintasannya akan mempunyai warna yang sama, karena $c(v_4, u) = c(v_n, u) = 2$ dan lintasan dengan sisi $P_n$dengan $n \geq 7$ panjangnya lebih dari sama dengan 3, maka terbukti $rc(F_n) \geq 3$. Karena $rc(F_n) \geq 3$ dan $rc(F_n) \leq 3$ maka terbukti $rc(F_n) = 3$, dengan $n \geq 7$.

(iv) jika $n \geq 2$ maka $rvc(F_n) = 1$

Akan dibuktikan $rvc(F_n) \geq 1$ dan $rvc(F_n) \leq 1$.

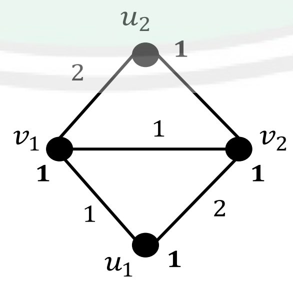
Diketahui $diam(F_n) = 2$, sehingga $rvc(F_n) \geq 2 - 1 = 1$.

Untuk membuktikan $rvc(F_n) \leq 1$, maka akan dibuktikan bahwa dengan 1 warna titik, dapat membentuk pelangi titik yang terhubung, artinya setiap dua titik terdapat lintasan dengan warna titik interior yang berbeda. Ambil $rvc(F_n) = 1$,misalkan ada fungsi pewarnaan $c: V(F_n) \to \{1\}$ maka: $c(u) = 1$, sehingga setiap lintasan $v_i - v_j$ akan melewati titik interior u dimana $c(u) = 1$, sedangkan setiap lintasan $v_i - u$ tidak ada titik interior karena terhubung langsung, dengan demikian setiap dua titik terdapat lintasan dengan warna titik interior yang berbeda. Jadi terbukti $rvc(F_n) \leq 1$. Karena $rvc(F_n) \geq 1$ dan $rvc(F_n) \leq 1$, maka $rvc(F_n) = 1$.

e. Graf Kipas Ganda

Graf kipas ganda dibentuk dari penjumlahan antara gabungan dua graf komplit (K_1) dan graf lintasan (P_n) yaitu $dF_n = (K_1 \cup K_1) + P_n$. Dengan demikian graf kipas mempunyai $(n + 2)$ titik dan $(3n - 1)$.

$\boldsymbol{dF_2}$:

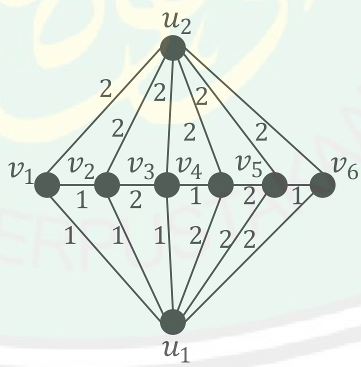


Gambar 3.23 Graf Kipas Ganda dF_2

Graf dF_2 terdiri dari 4 titik dan 5 sisi, dan merupakan graf hasil penjumlahan graf P_2 dengan graf $2K_1$, sehingga setiap titik pada P_2 terhubung langsung dengan setiap titik dari graf $2K_1$. Diketahui $diam\,(dF_2) = 2$, maka $rc(dF_2) \geq 2$. Misalkan $v_i \in V(P_2)$ dan $u_i \in V(2K_2)$, dengan $i = 1{,}2$. Lintasan $v_1 - v_2$ dan $u_i - v_i$ dihubungkan oleh satu sisi sehingga cukup membutuhkan satu warna. Sedangkan lintasan $u_1 - u_2$, dengan memberikan 2 warna sisi yang berbeda pada sisi v_1u_1 dan v_1u_2 atau pada sisi v_2u_1 dan v_2u_2, maka lintasan tersebut mempunyai warna sisi yang berbeda, sehingga dengan minimal 2 warna sisi akan membentuk dF_2 menjadi graf sisi yang terhubung, diperoleh $rc(dF_2) \leq 2$. Karena $rc(dF_2) \geq 2$ dan $rc(dF_2) \leq 2$, maka $rc(dF_2) = 2$.

Sedangkan agar terbentuk pelangi titik yang terhubung, di mana setiap antara dua titik pada graf F_7 terdapat lintasan dengan warna titik interior yang berbeda, cukup dibutuhkan satu warna titik. Hal ini dikarenakan panjang diameter F_7 adalah 2 dan titik interior sebanyak 1, sehingga diperoleh bilangan $rvc(F_7) = 1$.

dF_6:

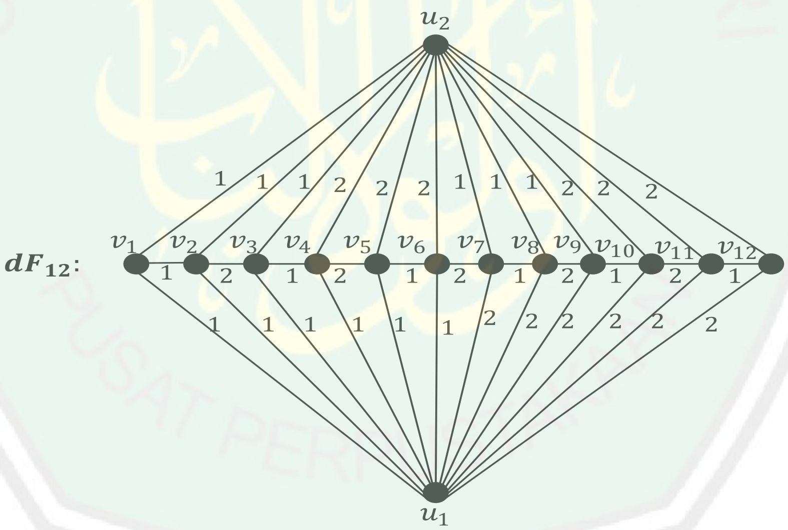


Gambar 3.24 Graf Kipas Ganda dF_6

Graf dF_6 terdiri dari 8 titik dan 17 sisi, dan merupakan graf hasil penjumlahan graf P_6 dengan graf $2K_1$, sehingga setiap titik pada P_6 terhubung langsung dengan setiap titik dari graf $2K_1$. Diketahui $diam\,(dF_6) = 2$, maka $rc(dF_6) \geq 2$. Misalkan $v_i \in V(P_6)$ dengan $i = 1,2,\ldots,6$ dan $u_i \in V(2K_2)$ dengan $i = 1{,}2$, terdapat fungsi pewarnaan sisi $c: E(dF_6) \to \{1{,}2\}$ yang didefinisikan oleh

$c(v_i, u_1) = 1$ jika $1 \leq i \leq [\frac{6}{2}]$, $c(v_i, u_1) = 2$ jika $[\frac{6}{2}] \leq i \leq 6$, $c(v_i, v_{i+1}) = 1$ jika i ganjil, $c(v_i, v_{i+1}) = 2$ jika i genap, serta $c(v_i, u_2) = 2$ maka akan membentuk graf dF_6 menjadi graf pelangi sisi yang terhubung dimana setiap dua titik terdapat lintasan dengan warna sisi yang berbeda. Hal ini membuktikan bahwa $rc(dF_6) \leq 2$, jadi diperoleh $rc(dF_6) = 2$.

Sedangkan agar terbentuk pelangi titik yang terhubung, di mana setiap antara dua titik pada graf dF_6 terdapat lintasan dengan warna titik interior yang berbeda, cukup dibutuhkan satu warna titik. Hal ini dikarenakan panjang diameter pada graf dF_6 adalah 2 dan titik interior sebanyak 1, sehingga diperoleh bilangan $rvc(dF_6) = 1$.



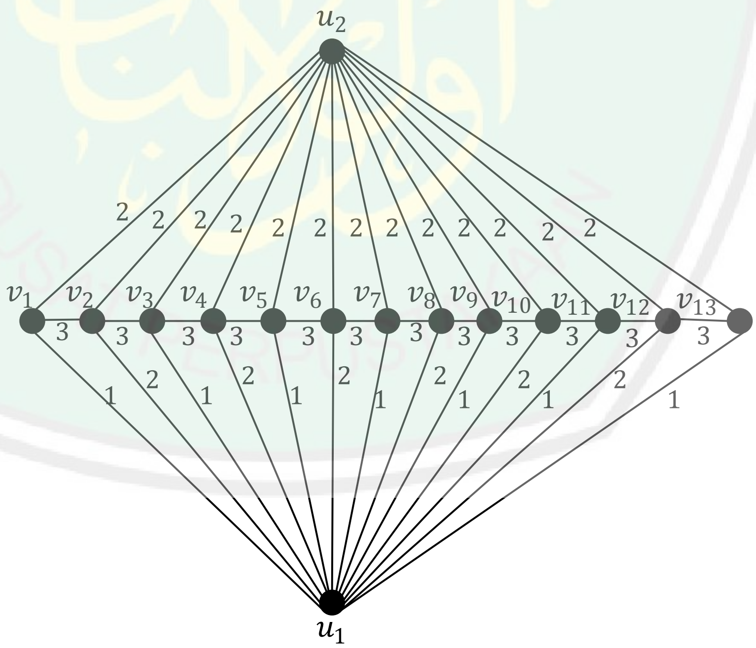
Gambar 3.25 Graf Kipas Ganda dF_{12}

Graf dF_{12} terdiri dari 14 titik dan 35 sisi, dan merupakan graf hasil penjumlahan graf P_{12} dengan graf $2K_1$, sehingga setiap titik pada P_{12} terhubung langsung dengan setiap titik dari graf $2K_1$. Diketahui $diam\,(dF_{12}) = 2$, maka $rc(dF_{12}) \geq 2$.Misalkan $v_i \in V(P_{12})$ dengan $i = 1,2, \dots, 12$ dan $u_i \in V(2K_2)$ dengan $i = 1,2$,terdapat fungsi pewarnaan sisi $c: E(dF_{12}) \rightarrow \{1,2\}$ yang didefinisikan oleh $c(v_i, u_1) = 1$ jika $1 \leq i \leq [\frac{12}{2}]$, $c(v_i, u_1) = 2$ jika $\left[\frac{12}{2}\right] < i \leq$

12, $c(v_i, v_{i+1}) = 1$ jika i ganjil, $c(v_i, v_{i+1}) = 2$ jika i genap, serta $c(v_i, u_2) = 1$ jika $1 \leq i \leq [\frac{12}{4}]$ dan $[\frac{12}{2}] < i \leq [\frac{3x12}{4}]$, kemudian $c(v_i, u_2) = 2$ jika $\left[\frac{12}{4}\right] < i \leq [\frac{12}{2}]$ dan $[\frac{3x12}{4}] < i \leq n$, maka akan membentuk graf dF_{12} menjadi graf pelangi sisi yang terhubung dimana setiap dua titik terdapat lintasan dengan warna sisi yang berbeda. Hal ini membuktikan bahwa $rc(dF_{12}) \leq 2$,jadi diperoleh $rc(dF_{12}) = 2$.

Sedangkan agar terbentuk pelangi titik yang terhubung, di mana setiap antara dua titik pada graf dF_{12} terdapat lintasan dengan warna titik interior yang berbeda, cukup dibutuhkan satu warna titik. Hal ini dikarenakan panjang diameter pada graf dF_{12} adalah 2 dan titik interior sebanyak 1, sehingga diperoleh bilangan $rvc(dF_{12}) = 1$.

dF_{13}:

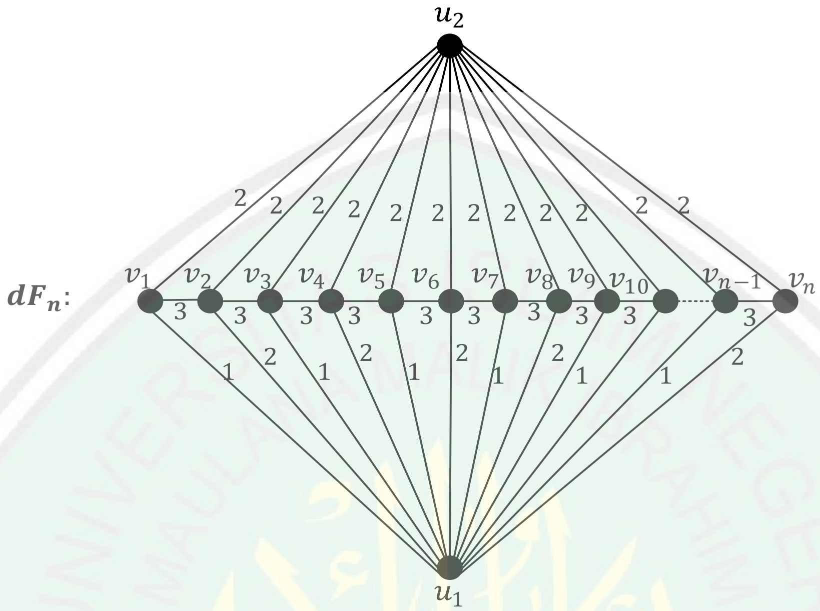


Gambar 3.26 Graf Kipas Ganda dF_{13}

Graf dF_{13} terdiri dari 15 titik dan 38 sisi, dan merupakan graf hasil penjumlahan graf P_{13} dengan graf $2K_1$, sehingga setiap titik pada P_{13} terhubung langsung dengan setiap titik dari graf $2K_1$. Walaupun $diam(dF_{13}) = 2$, tetapi belum tentu graf dF_{13} dapat dibentuk menjadi graf pelangi sisi yang terhubung dengan menggunakan 2 warna. Misalkan fungsi pewarnaan sisi $c: E(dF_{13}) \rightarrow \{1,2\}$, jika $c(v_i, v_{i+1}) = 1$ dengan i ganjil, $c(v_i, v_{i+1}) = 2$ dengan i genap, kemudian $c(v_1, u_1) = c(v_2, u_1) = c(v_3, u_1) = 1$, maka agar terbentuk lintasan pelangi haruslah $c(v_4, u_1) = c(v_5, u_1) = c(v_6, u_1) = 2$, selanjutnya $c(v_7, u_1) = c(v_8, u_1) = c(v_9, u_1) = 1$ maka $c(v_1, u_2) = c(v_2, u_2) = c(v_3, u_2) = 1$dan $c(v_7, u_2) = c(v_8, u_2) = c(v_9, u_2) = 2.$ kemudian $c(v_{10}, u_1) = c(v_{11}, u_1) = c(v_{12}, u_1) = 2$ maka haruslah $c(v_4, u_2) = c(v_5, u_2) = c(v_6, u_2) = 1$dan $c(v_{10}, u_2) = c(v_{11}, u_2) = c(v_{12}, u_2) = 2$,sekarang jika $c(v_{13}, u_1) = 2$agar lintasan v_{10}-v_{13} membentuk lintasan pelangi maka $c(v_{13}, u_2) = 1$, pewarnaan demikian akan ada dua titik yang semua lintasannya mempunyai warna sisi yang sama, yaitu lintasan v_i-v_{13}dengan $4 \leq i \leq 6$, karena $c(v_{13}, u_2) = c(v_i, u_2) = 1$, dan $c(v_{13}, u_1) = c(v_i, u_1) = 2$, maka terbukti $rc(dF_{13}) \geq 3$.

Selanjutnya jika fungsi pewarnaan sisi $c: E(dF_{13}) \rightarrow \{1,2,3\}$ yang didefinisikan oleh $c(v_i, u_1) = 1$ jika i ganjil, $c(v_i, u_1) = 2$ jika i genap, $c(v_i, u_2) = 2$ dan $c(\varepsilon) = 3, \forall \varepsilon \in E(P_{13})$ maka akan membentuk pelangi sisi terhubung, sehingga $rc(dF_{13}) \leq 3$. Jadi dapat diperoleh $rc(dF_{13}) = 3$. Sedangkan agar terbentuk pelangi titik yang terhubung, di mana setiap antara dua titik pada graf dF_{13} terdapat lintasan dengan warna titik interior yang berbeda, cukup dibutuhkan satu warna titik. Hal ini dikarenakan panjang diameter pada graf dF_{13} adalah 2 dan titik interior sebanyak 1, sehingga diperoleh bilangan $rvc(dF_{13}) = 1$.

Secara umum graf dF_n dapat dibentuk menjadi graf pewarnaan sisi yang terhubung, dengan warna sisi minimal 3, dan juga graf dF_n dapat dibentuk menjadi graf pewarnaan titik yang terhubung, dengan warna titik minimal 1, yang ditampilkan dalam model pewarnaan berikut:



Gambar 3.27 Graf Kipas Ganda dF_n

Dari beberapa kasus yang ditunjukan oleh bilangan *rainbow connection* dan bilangan *rainbow vertex-connection* di atas maka dapat diperoleh teorema:

Teorema 5

Graf kipas ganda dF_n dengan jumlah titik $n \geq 2$, maka bilangan *rainbow connection* pada graf dF_n adalah:

$$rc(dF_n) = \begin{cases} 2, & n \leq 12 \\ 3, & n \geq 13 \end{cases}$$

bilangan *rainbow vertex-connection* pada graf dF_n adalah:

$$rvc(dF_n) = 1$$

Bukti:

Graf kipas ganda dibentuk dari penjumlahan antara gabungan dua graf komplit $(2K_1)$ dan graf lintasan (P_n) yaitu $dF_n = 2K_1 + P_n$. Dengan demikian graf kipas mempunyai $(n + 2)$ titik dan $(3n - 1)$ sisi.

(i) $rc(dF_n) = 2$ jika $2 \leq n \leq 12$.

Akan dibuktikan $rc(dF_n) \geq 2$, dan $rc(dF_n) \leq 2$.

Diketahui $diam\,(dF_n) = 2$,karena $rc(G) \geq diam(G)$ maka diperoleh $rc(dF_n) \geq 2$.

Misalkan $v_i \in V(P_n)$ dengan $2 \leq n \leq 12$, $i = 1,2,\dots,n$ dan $u_i \in V(2K_2)$ dengan $i = 1,2$, terdapat fungsi pewarnaan sisi $c: E(dF_n) \to \{1,2\}$ yang didefinisikan oleh $c(v_i, u_1) = 1$ jika $1 \leq i \leq [\frac{n}{2}]$, $c(v_i, u_1) = 2$ jika $\left[\frac{n}{2}\right] < i \leq 12$, $c(v_i, v_{i+1}) = 1$ jika i ganjil, $c(v_i, v_{i+1}) = 2$ jika i genap, serta $c(v_i, u_2) = 1$ jika $1 \leq i \leq [\frac{n}{4}]$ dan $[\frac{n}{2}] < i \leq [\frac{3xn}{4}]$, kemudian $c(v_i, u_2) = 2$ jika $\left[\frac{n}{4}\right] < i \leq [\frac{n}{2}]$ dan $[\frac{3xn}{4}] < i \leq n$, maka akan membentuk graf dF_n menjadi graf pelangi sisi yang terhubung dimana setiap dua titik terdapat lintasan dengan warna sisi yang berbeda. Hal ini membuktikan bahwa $rc(dF_n) \leq 2$, jadi diperoleh dengan $2 \leq n \leq 12$ maka $rc(dF_n) = 2$.

(ii) $rc(dF_n) = 3$ jika $n \geq 13$.

Akan dibuktikan $rc(dF_n) \geq 3$, dan $rc(dF_n) \leq 3$.

Pertama dibuktikan $rc(dF_n) \geq 3$, ambil $rc(dF_n) = 2$, maka dibuktikan dengan menggunakan 2 warna sisi akan ada 2 titik yang semua lintasannya memiliki warna yang sama. Misalkan $v_i \in V(P_n)$ dengan $n \geq 13$, $i = 1,2,\dots,n$ dan $u_i \in V(2K_2)$ dengan $i = 1,2$, terdapat fungsi pewarnaan sisi $c: E(dF_n) \to \{1,2\}$, akan dibentuk setiap dua titik dihubungkan oleh lintasan pelangi. Misalkan lintasan $v_i - v_j$,karena $c(v_i, v_{i+1}) = 1$ jika i ganjil, $c(v_i, v_{i+1}) = 2$ jika i genap, maka $j \geq i + 3$. Jika $c(v_i, u_1) = 1$ agar lintasan $v_i - v_j$ terbentuk lintasan pelangi maka $c(v_j, u_1) = 2$.

Kemudian lintasan $v_i - v_{j+1}$, $v_i - v_{j+2}$, $v_i - v_{j+3}$ maka haruslah $c(v_{j+1}, u_1) = c(v_{j+2}, u_1) = c(v_{j+3}, u_1) = 2$,kemudian untuk lintasan $v_j - v_{j+3}$, karena $c(v_j, u_1) = c(v_{j+3}, u_1) = 2$ dan panjang lintasan dengan sisi P_n sama dengan 3 pasti lintasan tersebut memiliki warna yang sama, sehingga $c(v_j, u_2) = 1$ dan $c(v_{j+3}, u_2) = 2$. Selanjutnya lintasan $v_j - v_{j+4}$, $v_j - v_{j+5}$, $v_j - v_{j+6}$ maka haruslah $c(v_{j+4}, u_2) = c(v_{j+5}, u_2) = c(v_{j+6}, u_2) = 2$. Pewarnaan demikian akan membuat lintasan $v_{j+3} - v_{j+6}$ memiliki warna sisi yang sama, sehingga dengan 2 warna sisi saja maksimal cukup untuk titik v_j sampai v_{j+5}. Begitu juga untuk v_i sampai v_{i+5}. Sehingga dengan 2 warna sisi berlaku untuk 12 titik, sedangkan untuk $n \geq 13$ tidak bisa membuat dF_n menjadi graf pelangi sisi yang terhubung. Jadi terbukti $rc(dF_n) \geq 3$.

Selanjutnya jika fungsi pewarnaan sisi $c: E(dF_n) \to \{1,2,3\}$ yang didefinisikan oleh $c(v_i, u_1) = 1$ jika i ganjil, $c(v_i, u_1) = 2$ jika i genap, $c(v_i, u_2) = 2$ dan $c(\varepsilon) = 3, \forall \varepsilon \in E(P_n)$ maka akan membentuk pelangi sisi terhubung, sehingga $rc(dF_n) \leq 3$.Terbukti dengan $n \geq 13$ maka $rc(dF_n) = 3$.

(iv) jika $n \geq 2$ maka $rvc(dF_n) = 1$

Akan dibuktikan $rvc(dF_n) \geq 1$ dan $rvc(dF_n) \leq 1$.

Diketahui $diam(dF_n) = 2$, sehingga $rvc(dF_n) \geq 2 - 1 = 1$.

Untuk membuktikan $rvc(dF_n) \leq 1$, maka akan dibuktikan bahwa dengan 1 warna titik, dapat membentuk pelangi titik yang terhubung, artinya setiap dua titik terdapat lintasan dengan warna titik interior yang berbeda.

Ambil $rvc(dF_n) = 1$, misalkan ada fungsi pewarnaan $c: V(dF_n) \to \{1\}$ maka: $c(u_1) = 1$, sehingga setiap lintasan $v_i - v_j$ akan melewati titik interior u_1 dimana $c(u_1) = 1$, untuk lintasan $u_1 - u_2$ jika $c(v_i) = 1$, maka akan melewati titik interior v_i dimana $c(v_i) = 1$, sedangkan setiap lintasan $v_i - u_1$ dan $v_i - u_2$ tidak ada titik interior karena terhubung langsung, dengan demikian setiap dua titik terdapat lintasan dengan warna titik interior yang berbeda. Jadi terbukti $rvc(dF_n) \leq 1$.Karena $rvc(dF_n) \geq 1$ dan $rvc(dF_n) \leq 1$, maka $rvc(dF_n) = 1$.

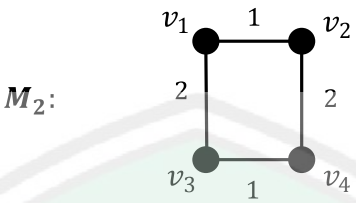
3.1.2 Bilangan *Rainbow Connection* pada Jenis Graf Hasil Perkalian Kartesius

Hasil kali kartesius adalah graf yang dinotasikan $G = G_1 x\, G_2$ dan mempunyai titik $V(G) = V(G_1) x\, V(G_2)$, dan dua titik (u_1, u_2) dan (v_1, v_2) dari graf G terhubung langsung jika dan hanya jika $u_1 = v_1$ dan $u_2 v_2 \in E(G_2)$ atau $u_2 = v_2$ dan $u_1 v_1 \in E(G_1)$.

Pada graf khusus hasil perkalian kartesius akan ditampilkan 1 contoh graf yaitu graf tangga. Graf tangga dibentuk dari perkalian kartesius graf lintasan dengan 2 titik (P_2) dengan graf lintasan dengan n titik (P_n).

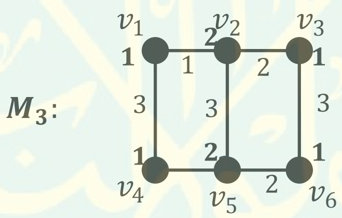
Graf Tangga yang dinotasikan sebagai M_n adalah suatu graf yang dibentuk dari operasi hasil kali kartesius antara graf lintasan dengan dua titik dan graf lintasan dengan n titik yaitu $M_n = P_2 X\, P_n$.

Bilangan *rainbow connection* dan bilangan *rainbow vertex-connection* pada graf tangga dapat ditentukan dengan menggambar banyaknya titik graf tangga M_n order 2 sampai order 6, sehingga didapat pola 2,3, … ,6 lainnya. Dari pola tersebut selanjutnya dapat disimpulkan $rc(M_n)$ dan $rvc(M_n)$ pada graf tangga M_n.



Gambar 3.28 Graf tangga M_2

Graf M_2 terdiri dari 4 titik dan 4 sisi, dan merupakan graf hasil dari perkalian kartesius P_2 dengan P_2. Graf M_2 juga merupakan graf beraturan-2 sehingga ekuivalen dengan graf C_4. Sehingga bilangan $rc(M_2)$ sama dengan graf C_4 yaitu $\left\lceil\frac{4}{2}\right\rceil = 2$, sedangkan besar $rvc(M_2) = 1$.

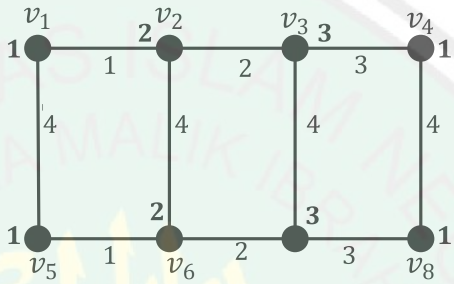


Gambar 3.29 Graf tangga M_3

Graf M_3 terdiri dari 6 titik dan 7 sisi, dan merupakan graf hasil dari perkalian kartesius P_2 dengan P_3,dengan $v_i \in V(P_3), i = 1,2,3$ dan $u_i \in V(P_2), i = 1,2$. Diketahui $diam\ (M_3) = 3$ maka $rc(M_3) \geq 3$ dan $rvc(M_3) \geq 2$. Misalkan graf M_3 dibagi 2 himpunan titik X dan Y. Di mana $(v_i, u_1) \in V(X)$ dan $(v_i, u_2) \in V(Y)$,terdapat fungsi pewarnaan sisi $c: E(M_3) \rightarrow \{1,2,3\}$ maka $c\big((v_i, u_1), (v_{i+1}, u_1)\big) = i$, dengan $i = \{1,2\}$, kemudian $c\big((v_i, u_1), (v_i, u_2)\big) = 3$ serta $c\big((v_i, u_2), (v_{i+1}, u_2)\big) = i$, dengan $i = \{1,2\}$. Pewarnaan sisi demikian akan membuat graf M_3 menjadi pelangi sisi yang terhubung, sehingga $rc(M_3) \leq 3$, jadi $rc(M_3) = 3$.

Selanjutnya misal fungsi pewarnaan titik $c^{'}: V(M_3) \rightarrow \{1,2\}$,maka $c^{'}(v_i, v_1) = i$, dengan $i = \{1,2\}$, kemudian $c^{'}(v_i, v_2) = i$, dengan $i = \{1,2\}$, dan $c^{'}(v_3, v_1) = c^{'}(v_3, v_2) = 1$. Pewarnaan titik demikian akan membuat graf M_3 menjadi pelangi titik yang terhubung, sehingga $rvc(M_3) \leq 2$, jadi diperoleh $rvc(M_3) = 2$.

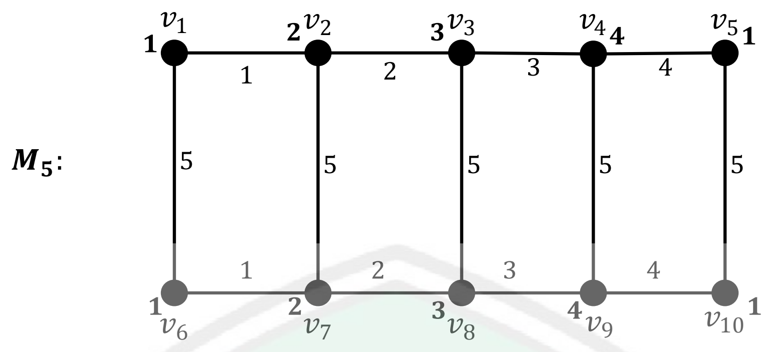
$\boldsymbol{M_4}$:



Gambar 3.30 Graf tangga M_4

Graf M_4 terdiri dari 8 titik dan 10 sisi, dan merupakan graf hasil dari perkalian kartesius P_2 dengan P_4, dengan $v_i \in V(P_4)$, $i = 1,2,3,4$ dan $u_i \in V(P_2)$, $i = 1,2$. Diketahui $diam\,(M_4) = 4$ maka $rc(M_3) \geq 4$ dan $rvc(M_3) \geq 3$. Misalkan graf M_4 dibagi 2 himpunan titik X dan Y. Di mana $(v_i, u_1) \in V(X)$ dan $(v_i, u_2) \in V(Y)$,terdapat fungsi pewarnaan sisi $c: E(M_3) \rightarrow \{1,2,3,4\}$ maka $c\big((v_i, u_1), (v_{i+1}, u_1)\big) = i$, dengan $i = \{1,2,3\}$, kemudian $c\big((v_i, u_1), (v_i, u_2)\big) = 4$ serta $c\big((v_i, u_2), (v_{i+1}, u_2)\big) = i$, dengan $i = \{1,2,3\}$. Pewarnaan sisi demikian akan membuat graf M_4 menjadi pelangi sisi yang terhubung, sehingga $rc(M_4) \leq 4$, jadi $rc(M_4) = 4$.

Selanjutnya misal fungsi pewarnaan titik $c^{'}: V(M_4) \rightarrow \{1,2,3\}$, maka $c^{'}(v_i, v_1) = i$, dengan $i = \{1,2,3\}$, kemudian $c^{'}(v_i, v_2) = i$, dengan $i = \{1,2,3\}$, dan $c^{'}(v_4, v_1) = c^{'}(v_4, v_2) = 1$. Pewarnaan titik demikian akan membuat graf M_4 menjadi pelangi titik yang terhubung, sehingga $rvc(M_4) \leq 3$, jadi diperoleh $rvc(M_3) = 3$.

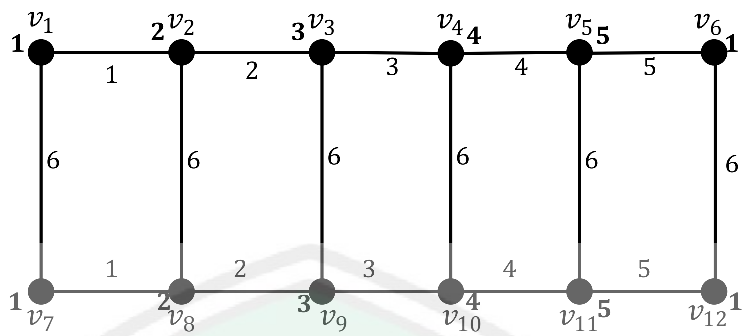


Gambar 3.31 Graf tangga M_5

Graf M_5 terdiri dari 8 titik dan 13 sisi, dan merupakan graf hasil dari perkalian kartesius P_2 dengan P_5, dengan $v_i \in V(P_5)$, $i = 1,2,\dots,5$ dan $u_i \in V(P_2)$, $i = 1,2$. Diketahui $diam\ (M_3) = 6$ maka $rc(M_3) \geq 5$ dan $rvc(M_3) \geq 4$. Misalkan graf M_5 dibagi 2 himpunan titik X dan Y. Di mana $(v_i, u_1) \in V(X)$ dan $(v_i, u_2) \in V(Y)$, terdapat fungsi pewarnaan sisi $c: E(M_5) \to \{1,2,\dots,5\}$ maka $c\big((v_i, u_1), (v_{i+1}, u_1)\big) = i$ dengan $i = \{1,2,3,4\}$, kemudian $c\big((v_i, u_1), (v_i, u_2)\big) = 5$ serta $c\big((v_i, u_2), (v_{i+1}, u_2)\big) = i$, dengan $i = \{1,2,3,4\}$. Pewarnaan sisi demikian akan membuat graf M_5 menjadi pelangi sisi yang terhubung, sehingga $rc(M_5) \leq 5$, jadi $rc(M_5) = 4$.

Selanjutnya misal fungsi pewarnaan titik $c': V(M_5) \to \{1,2,3,4\}$, maka $c'(v_i, v_1) = i$,dengan $i = \{1,2,3,4\}$, kemudian $c'(v_i, v_2) = i$, dengan $i = \{1,2,3,4\}$,dan $c'(v_5, v_1) = c'(v_5, v_2) = 1$. Pewarnaan titik demikian akan membuat graf M_5 menjadi pelangi titik yang terhubung, sehingga $rvc(M_5) \leq 4$, jadi diperoleh $rvc(M_5) = 4$.

M_6:



Gambar 3.32 Graf tangga M_6

Graf M_6 terdiri dari 12 titik dan 16 sisi, dan merupakan graf hasil dari perkalian kartesius P_2 dengan P_6, dengan $v_i \in V(P_6)$, $i = 1,2,\ldots,6$ dan $u_i \in V(P_2)$, $i = 1,2$. Diketahui $diam\ (M_6) = 3$ maka $rc(M_6) \geq 6$ dan $rvc(M_6) \geq 5$. Misalkan graf M_6 dibagi 2 himpunan titik X dan Y. Di mana $(v_i, u_1) \in V(X)$ dan $(v_i, u_2) \in V(Y)$,terdapat fungsi pewarnaan sisi $c: E(M_3) \to \{1,2,\ldots,6\}$ maka $c\big((v_i, u_1), (v_{i+1}, u_1)\big) = i$,dengan $i = \{1,2,\ldots,5\}$, kemudian $c\big((v_i, u_1), (v_i, u_2)\big) = 6$ serta $c\big((v_i, u_2), (v_{i+1}, u_2)\big) = i$, dengan$i = \{1,2,\ldots,5\}$. Pewarnaan sisi demikian akan membuat graf M_6 menjadi pelangi sisi yang terhubung, sehingga $rc(M_6) \leq 6$, jadi $rc(M_6) = 6$.

Selanjutnya misal fungsi pewarnaan titik $c': V(M_6) \to \{1,2,\ldots,5\}$, maka $c'(v_i, v_1) = i$, dengan $i = \{1,2,\ldots,5\}$, kemudian $c'(v_i, v_2) = i$, dengan $i = \{1,2,\ldots,5\}$, dan $c'(v_6, v_1) = c'(v_6, v_2) = 1$. Pewarnaan titik demikian akan membuat graf M_6 menjadi pelangi titik yang terhubung, sehingga $rvc(M_6) \leq 5$, jadi diperoleh $rvc(M_6) = 5$.

Kelima hasil di atas ditampilkam dalam tabel berikut:

Tabel 3.2 Pola bilangan $rc(M_n)$ dan $rvc(M_n)$

No	Jenis Graf	$rc(M_n)$	$rvc(M_n)$
1.	M_2	2	1
2.	M_3	3	2
3.	M_4	4	3
4.	M_5	5	4
5.	M_6	6	5
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n.$	M_n	n	$n-1$

Dari pola yang ditunjukan oleh bilangan *rainbow connection* dan bilangan *rainbow vertex-connection* di atas, diperoleh teorema sebagai berikut:

Teorema 6

Pada graf tangga M_n dengan banyak titik $n \geq 2$,bilangan *rainbow connection* $rc(M_n) = n$,dan bilangan *rainbow vertex-connection* $rvc(M_n) = n - 1$.

Bukti:

Graf tangga yang dinotasikan sebagai M_n adalah suatu graf yang dibentuk dari operasi hasil kali kartesius antara graf lintasan dengan dua titik dan graf lintasan dengan n titik yaitu $M_n = P_2 X\, P_n$, dengan $v_i \in V(P_n),\ i = 1,2, \dots, n$ dan $u_i \in V(P_2),\ i = 1,2.$

(i) Akan dibuktikan $rc(M_n) \geq n$, dan $rvc(M_n) \geq n - 1$.

Diketahui graf tangga M_n memiliki panjang diameter $diam(M_n) = n$. Karena $rc(G) \geq diam(G)$ dan $rvc(G) \geq diam(G) - 1$, maka terbukti $rc(G) \geq n$ dan $rvc(G) \geq n - 1$.

(ii) Akan dibuktikan $rc(M_n) \leq n$, dan $rvc(M_n) \leq n - 1$.

Misalkan graf M_n dibagi 2 himpunan titik X dan Y. Di mana $(v_i, u_1) \in V(X)$ dan $(v_i, u_2) \in V(Y)$, terdapat fungsi pewarnaan sisi $c: E(M_3) \rightarrow \{1,2, \dots, n\}$, maka:

$c\big((v_i, u_1), (v_{i+1}, u_1)\big) = i$, dengan $i = \{1,2, \dots, n-1\}$,

$c\big((v_i, u_1), (v_i, u_2)\big) = n$

$c\big((v_i, u_2), (v_{i+1}, u_2)\big) = i$, dengan $i = \{1,2, \dots, n-1\}$.

Pewarnaan sisi demikian akan membuat graf M_n menjadi pelangi sisi yang terhubung, sehingga $rc(M_n) \leq n$.

Selanjutnya misal fungsi pewarnaan titik $c': V(M_6) \rightarrow \{1,2, \dots, n-1\}$, maka:

$c'(v_i, v_1) = i$, dengan $i = \{1,2, \dots, n-1\}$,

$c'(v_i, v_2) = i$, dengan $i = \{1,2, \dots, n-1\}$,

$c'(v_n, v_1) = c'(v_n, v_2) = 1$

Pewarnaan titik demikian akan membuat graf M_n menjadi pelangi titik yang terhubung, sehingga $rvc(M_n) \leq n - 1$.

Dari (i) dan (ii) terbukti $rc(M_n) = n$ dan $rvc(M_n) = n - 1$.

3.2 Bilangan *Rainbow Connection* pada Sebarang Graf

Pada pembahasan ini, telah didapat model atau teorema dari bilangan *rainbow connection* dan bilangan *rainbow vertex-connection* pada jenis graf dari hasil penjumlahan dan perkalian kartesius dua graf. Dengan berpikir induktif, maka dari pola-pola tersebut dapat disimpulkan $rc(G)$ dan $rvc(G)$ pada sebarang graf. Graf disini merupakan sebarang graf berhingga dan jika dioperasikan akan menghasilkan graf yang terhubung. Kemudian dengan berpikir deduktif maka pola-pola bilangan *rainbow connection* dan bilangan *rainbow vertex-connection* pada sebarang graf tersebut dapat dibuktikan kebenarannya.

3.2.1 Bilangan *Rainbow Connection* pada Graf Hasil Penjumlahan

Untuk menentukan bilangan *rainbow connection* pada graf hasil penjumlahan dengan obyek sebarang graf yaitu dengan cara menganalisis bilangan *rainbow connection* dari jenis graf hasil penjumlahan dua graf yang telah ditampilkan di atas. Terdapat 5 contoh graf, yaitu graf komplit, graf bipartisi komplit, graf roda, graf kipas, dan graf kipas ganda.

Dari kelima graf tersebut dibagi menjadi dua bagian. Bagian pertama adalah graf hasil dari penjumlahan dua graf komplit, sedangkan yang kedua adalah graf hasil dari penjumlahan dua bukan graf komplit. Untuk bagian pertama yaitu graf hasil dari penjumlahan dua graf komplit dicontohkan oleh graf komplit K_n, sedangkan bagian kedua yaitu graf hasil dari penjumlahan dua bukan graf komplit dicontohkan oleh graf bipartisi komplit $K_{m,n}$, graf roda W_n, graf kipas F_n dan graf kipas ganda dF_n.

Graf komplit K_n bilangan $rc(K_n) = 1$, sedangkan $rvc(K_n) = 0$. Pada graf bipartisi $K_{m,n}$ komplit bilangan $rc(K_{m,n}) \geq 2$ dan $rvc(K_{m,n}) = 1$. Untuk graf roda W_n bilangan $rc(W_n) \geq 2$ dan bilangan $rvc(W_n) = 1$. Graf kipas F_n bilangan $rc(F_n) \geq 2$ dan $rvc(F_n) = 1$. Sedangkan pada graf kipas ganda dF_n bilangan $rc(dF_n) \geq 2$ dan $rvc(dF_n) = 1$.

Melihat hasil di atas diperoleh suatu teorema bilangan *rainbow connection* dan bilangan *rainbow vertex-connection* pada graf hasil dari penjumlahan dua sebarang graf sebagai berikut:

Teorema 7

Misalkan graf G adalah graf hasil penjumlahan sebarang graf G_1 dan sebarang graf G_2, maka bilangan *rainbow connection* dari graf G adalah:

$$rc(G) = 1,\ G_1 \text{ dan } G_2 \text{ adalah graf komplit}$$

$$rc(G) \geq 2,\ G_1 \text{atau } G_2 \text{ adalah bukan graf komplit}$$

sedangkan bilangan *rainbow vertex-connection* dari graf G adalah:

$$rvc(G) = \begin{cases} 0, & G_1 \text{dan } G_2 \text{ adalah graf komplit} \\ 1, & G_1 \text{atau } G_2 \text{ adalah bukan graf komplit} \end{cases}$$

Bukti:

Penjumlahan dua graf G_1dan G_2 yang dinotasikan $G = G_1 + G_2$ mempunyai himpunan titik $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan himpunan sisi $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{uv | u \in V(G_1) dan\ v \in V(G_2)\}$.

(i) Jika G_1 dan G_2 adalah graf komplit.

Misalkan $G_1 = K_m$ dan $G_2 = K_n$ maka banyak titik dari graf G adalah $m + n$. Anggap $u \in V(G_1)$dan $v \in V(G_2)\}$, sebelum dioperasikan $\deg(u) = m - 1$, sedangkan $\deg(v) = n - 1$. Kemudian dioperasikan penjumlahan antara G_1 dan G_2, diperoleh setiap titik pada graf G_1terhubung langsung dengan setiap titik pada G_2, $(\{uv|u \in V(G_1) dan\ v \in V(G_2)\})$. Sehingga derajat setiap titik u bertambah sebanyak n menjadi $\deg(u) = m + n - 1$ dan derajat setiap titik v bertambah sebanyak m menjadi $\deg(v) = m + n - 1$. Artinya setiap titik $u, v \in V(G)$ beraturan-$(m + n - 1)$ sehingga graf G adalah graf K_{m+n}. Terbukti bahwa graf dari penjumlahan dua graf komplit mempunyai bilangan *rainbow connection* dan bilangan *rainbow vertex-connection* berturut-turut sebesar 1 dan 0.

(ii) Jika G_1 atau G_2 adalah graf bukan komplit dan $G = G_1 + G_2$. Misalkan $u_i, u_j \in V(G_1)$, dengan $i, j = 1,2, \ldots, n$, serta $v_r, v_s \in V(G_2)$, dengan $r, s = 1,2, \ldots, m$ maka $u, w, v, z \in V(G)$. Akan dibuktikan $diam(G) = 2$, ada 3 kemungkinan:

1. G_1 graf komplit dan G_2 bukan graf komplit.

Jika G_1 graf komplit maka $diam(G_1) = 1$. G_2 bukan graf komplit maka $diam(G_2) = k \geq 0$. Misalkan lintasan $v_r - v_s$ adalah lintasan dengan panjang kurang dari sama dengan k. Karena v_r terhubung langsung dengan u_i dan v_s juga terhubung langsung dengan u_i. Maka lintasan $v_r - v_s$ dapat dibuat melewati u_i, sehingga panjang lintasannya menjadi 2. Dengan demikian $diam(G) = 2$.

2. G_1 bukan graf komplit dan G_2 graf komplit.

Jika G_2 graf komplit maka $diam(G_2) = 1$. G_1 bukan graf komplit maka $diam(G_1) = l \geq 0$. Misalkan lintasan $u_i - u_j$ adalah lintasan dengan panjang kurang dari sama dengan l. Karena u_i terhubung langsung dengan

v_r dan v_j juga terhubung langsung dengan v_r. Maka lintasan $v_i - v_j$ dapat dibuat melewati v_r, sehingga panjang lintasannya menjadi 2. Dengan demikian $diam(G) = 2$.

2. G_1 bukan graf komplit dan G_2 bukan graf komplit.

G_1 bukan graf komplit maka $diam(G_1) = l \geq 0$. Misalkan lintasan $u_i - u_j$ adalah lintasan dengan panjang kurang dari sama dengan l. Karena u_i terhubung langsung dengan v_r dan v_j juga terhubung langsung dengan v_r. Maka lintasan $v_i - v_j$ dapat dibuat melewati v_r, sehingga panjang lintasannya menjadi 2.

G_2 bukan graf komplit maka $diam(G_2) = k \geq 0$. Misalkan lintasan $v_r - v_s$ adalah lintasan dengan panjang kurang dari sama dengan k. Karena v_r terhubung langsung dengan u_i dan v_s juga terhubung langsung dengan u_i. Maka lintasan $v_r - v_s$ dapat dibuat melewati u_i, sehingga panjang lintasannya menjadi 2. Dengan demikian $diam(G) = 2$.

Dari 3 kasus di atas disimpulkan jika $G = G_1 + G_2$ kemudian G_1atau G_2 adalah bukan graf komplit maka $diam\ (G) = 2$. Karena $rc(G) \geq diam\ (G)$ maka terbukti $rc(G) \geq 2$.

Selanjutnya dibuktikan $rvc(G) \geq 1$.

Akan dibuktikan $rvc(dF_n) \geq 1$ dan $rvc(dF_n) \leq 1$.

Diketahui $diam(G) = 2$, sehingga $rvc(G) \geq 2 - 1 = 1$.

Untuk membuktikan $rvc(G) \leq 1$, maka akan dibuktikan bahwa dengan 1 warna titik, dapat membentuk pelangi titik yang terhubung, artinya setiap dua titik terdapat lintasan dengan warna titik interior yang berbeda. Ambil $rvc(G) = 1$, misalkan ada fungsi pewarnaan $c: V(G) \rightarrow \{1\}$ maka:

$c(u_i) = 1$, sehingga setiap lintasan $v_r - v_s$ akan melewati titik interior u_i dimana $c(u) = 1$, untuk lintasan $u_i - u_j$ jika $c(v_r) = 1$, maka akan melewati titik interior v_i dimana $c(v_r) = 1$, sedangkan setiap lintasan $v_r - u_i$ tidak ada titik interior karena terhubung langsung, dengan demikian setiap dua titik terdapat lintasan dengan warna titik interior yang berbeda. Jadi terbukti $rvc(G) \leq 1$. Karena $rvc(G) \geq 1$dan $rvc(G) \leq 1$, maka $rvc(G) = 1$.

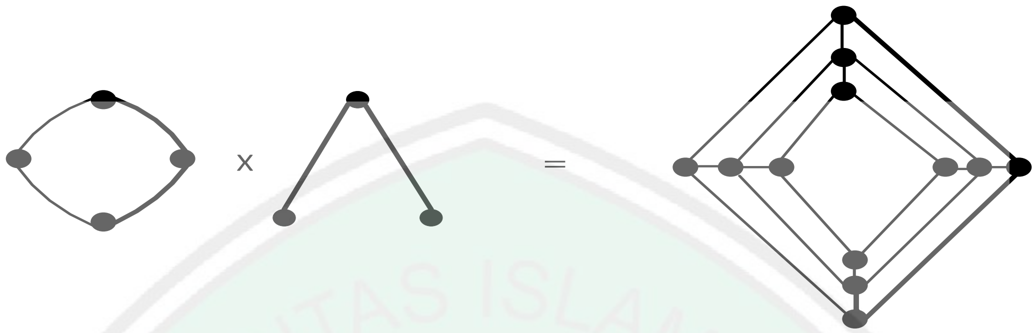
3.3.2 Bilangan *Rainbow Connection* pada Graf Hasil Perkalian Kartesius

Untuk menentukan bilangan *rainbow connection* graf hasil perkalian kartesius dengan sebarang graf yaitu dengan cara menganalisis bilangan *rainbow connection* dari graf khusus hasil perkalian kartesius dua graf yang dengan contoh graf tangga M_n.

Dari hasil pembahasan mengenai bilangan *rainbow connection* dan bilangan *rainbow vertex-connection* pada graf tangga M_n, diperoleh bilangan $rc(G) = n$ dan bilangan $rvc(G) = n - 1$. Kedua pola tersebut dipengaruhi oleh bilangan $rc(G)$ dan $rvc(G)$ dari graf sebelum dioperasikan oleh perkalian kartesius, yaitu P_2 dengan P_n.

Untuk $rc(G) = n$, didapat dari penjumlahan antara $rc(G)$ pada P_2 dengan $rc(G)$ pada P_n yang masing besarnya 1 dan $n - 1$, dimana penjumlahan kedua akan menghasilkan $rc(G) = 1 + (n - 1) = n$. Sedangkan untuk $rvc(G) = n - 1$, didapat dari penjumlahan antara $rvc(G)$ pada P_2 dengan $rvc(G)$ pada P_n yang masing besarnya 0 dan $n - 2$ yang kemudian dijumlah lagi dengan 1, sehingga akan dihasilkan $rvc(G) = 0 + (n - 2) + 1 = n - 1$.

Dengan menggunakan contoh sebarang graf lainnya, misalkan graf sikel C_4 dikalikan kartesius dengan graf bipartisi $K_{1,2}$.



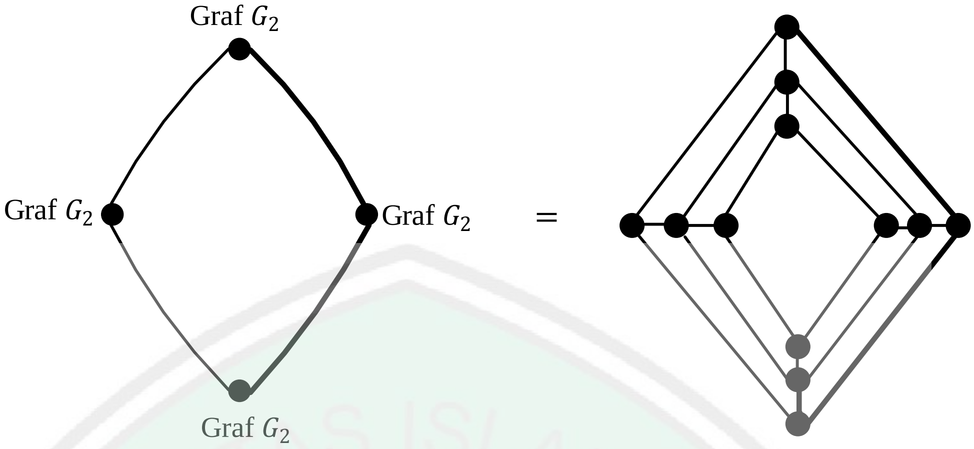
Graf C_4		Graf $K_{1,2}$		Graf C_4 x $K_{1,2}$
$rc(G) = 2$	x	$rc(G) = 2$	=	$rc(G) = 2 + 2 = 4$
$rvc(G) = 1$		$rvc(G) = 1$		$rvc(G) = 1 + 1 + 1 = 3$

Gambar 3.33 Perkalian Kartesius antara Graf C_4 dengan Graf $K_{1,2}$

Dari hasil di atas diperoleh bahwa $rc(G)$ pada graf $C_4 \times K_{1,2}$ adalah 4, yang didapat dari penjumlahan $rc(G)$ pada graf C_4 yang bernilai 2 dengan $rc(G)$ pada graf $K_{1,2}$ yang juga bernilai 2. Sedangkan $rvc(G)$ pada graf $C_4 \times K_{1,2}$ adalah 3, yang didapat dari penjumlahan $rvc(G)$ pada graf C_4 yang bernilai 1 dengan $rvc(G)$ pada graf $K_{1,2}$ yang juga bernilai 1 dan ditambah dengan 1.

Hasil ini bukanlah suatu kebetulan yang muncul dari contoh-contoh yang telah ditampilkan. Akan tetapi ini adalah suatu pola yang terdapat pada setiap graf dari hasil perkalian kartesius dua graf. Setiap sebarang graf G_1 jika dikalikan dengan sebarang graf G_2, maka hasilnya akan isomorfik dengan graf G_2 yang titik-titiknya adalah graf G_1. Begitu juga sebaliknya hasilnya akan isomorfik dengan graf G_1 yang titik-titiknya adalah graf G_2.

Dari contoh di atas, misalnya graf G_1 adalah graf sikel C_4 akan dikalikan kartesius dengan G_2 yaitu graf bipartisi $K_{1,2}$. Maka menghasilkan graf dengan graf bipartisi $K_{1,2}$ akan menggantikan titik-titik pada graf sikel C_4.



Gambar 3.34 Graf $C_4 x K_{1,2}$

Dengan memperhatikan hasil-hasil di atas diperoleh sebagai berikut:

Teorema 8

Graf G adalah graf hasil perkalian kartesius sebarang graf terhubung G_1 dan sebarang graf terhubung G_2. Bilangan *rainbow connection* dari graf G adalah:

$$diam\ (G_1) + diam\ (G_2)\ \leq rc(G) \leq rc(G_1) + rc(G_2)$$

sedangkan bilangan *rainbow vertex-connection* dari graf G adalah:

$$diam\ (G_1) + diam\ (G_2) - 1\ \leq rvc(G) \leq rvc(G_1) + rvc(G_2) + 1$$

Bukti:

Graf G graf hasil kali kartesius adalah graf yang dinotasikan $G = G_1 x\ G_2$ dan mempunyai titik $V(G) = V(G_1) x\ V(G_2)$, dan dua titik (u_1, u_2) dan (v_1, v_2) dari graf G terhubung langsung jika dan hanya jika $u_1 = v_1$ dan $u_2 v_2 \in E(G_2)$ atau $u_2 = v_2$ dan $u_1 v_1 \in E(G_1)$.

(i) Akan dibuktikan jika $G = G_1 x\ G_2$ maka $rc(G) \geq diam\ (G_1) + diam\ (G_2)$ dan $rc(G) \leq rc(G_1) + rc(G_2)$

Diketahui jika $G = G_1 x\, G_2$ maka $diam\,(G) = diam\,(G_1) + diam\,(G_2)$,karena $rc(G) \geq diam\,(G)$ maka $rc(G) \geq diam\,(G_1) + diam\,(G_2)$.

Selanjutnya misalkan $rc(G_1) = k$, artinya dengan bilangan warna sisi minimum sebanyak k akan membuat graf G_1 menjadi graf pelangi sisi yang terhubung, dan $rc(G_2) = l$, artinya dengan bilangan warna sisi minimum sebanyak l akan membuat graf G_2 menjadi graf pelangi sisi yang terhubung. Kemudian $u_i, u_j \in V(G_1)$, dengan $i, j = 1,2, \dots, n$,serta $v_r, v_s \in V(G_2)$, dengan $r, s = 1,2, \dots, m$ maka $(u_i, v_r), (u_j, v_s) \in V(G)$. Jika lintasan $u_i - u_j$ membentuk lintasan pelangi dengan a warna sisi maka $a \leq k$, dan jika $v_r - v_s$ membentuk lintasan pelangi dengan b warna sisi maka $b \leq l$. Akan dibuktikan lintasan $(u_i, v_r) - (u_j, v_s)$ membentuk lintasan pelangi dengan warna sisi $\leq k + l$.

Ada 4 kemungkinan, yaitu:

1. Lintasan $(u_i, v_r) - (u_j, v_s)$ dengan $i = j\ dan\ r \neq s$.

Himpunan dari titik-titik $(u_i, v_r), (u_j, v_s)$ dengan $i = j\ dan\ r \neq s$ akan membentuk graf yang isomorfik dengan graf G_2. Dua titik tersebut bisa terhubung langsung dan juga bisa tidak terhubung langsung akan tetapi keduanya pasti dihubungkan oleh lintasan. Karena setiap $v_r - v_s$ membentuk lintasan pelangi dengan b warna sisi di mana $b \leq l$. Maka Lintasan $(u_i, v_r) - (u_i, v_s)$ juga akan membentuk lintasan pelangi dengan b warna sisi di mana $b \leq l$.

2. Lintasan $(u_i, v_r) - (u_j, v_s)$ dengan $i \neq j$ dan $r = s$

Himpunan dari titik-titik $(u_i, v_r), (u_j, v_s)$ dengan $i \neq j$ dan $r = s$ akan membentuk graf yang isomorfik dengan graf G_1. Dua titik tersebut bisa terhubung langsung dan juga bisa tidak terhubung langsung akan tetapi keduanya pasti dihubungkan oleh lintasan. Karena setiap $u_i - u_j$ membentuk lintasan pelangi dengan a warna sisi di mana $a \leq k$. Maka Lintasan $(u_i, v_s) - (u_i, v_s)$ juga akan membentuk lintasan pelangi dengan a warna sisi di mana $a \leq k$.

3. Lintasan $(u_i, v_r) - (u_j, v_s)$ dengan $i = j$ dan $r = s$

Jika terdapat dua titik (u_i, v_r) dan (u_j, v_s) dengan $i = j$ dan $r = s$, maka kedua titik tersebut sama, sehingga panjang lintasan sama dengan 0.

4. Lintasan $(u_i, v_r) - (u_j, v_s)$ dengan $i \neq j$ dan $r \neq s$

Jika terdapat dua titik (u_i, v_r) dan (u_j, v_s) dengan $i \neq j$ dan $r \neq s$, maka kedua titik tersebut tidak mungkin terhubung langsung. Sehingga kemungkinan lintasan dengan panjang sisi terbesar adalah antara kedua titik ini. Lintasan antara kedua titik (u_i, v_r) dan (u_j, v_s) akan membentuk lintasan $(u_i, v_r) - (u_j, v_r) - (u_j, v_s)$, sehingga terdapat dua langkah. Pertama lintasan $(u_i, v_r) - (u_j, v_r)$, lintasan ini akan membentuk lintasan pelangi dengan a warna sisi di mana $a \leq k$. Kemudian ditambah dengan lintasan $(u_j, v_r) - (u_j, v_s)$, yang membentuk lintasan pelangi dengan b warna sisi di mana $b \leq l$. Sehingga Lintasan $(u_i, v_r) - (u_j, v_s)$ akan membentuk lintasan pelangi dengan $a + b$ warna sisi di mana $a \leq k$ dan $b \leq l$. Jadi terbukti $rc(G) = a + b \leq k + l = rc(G_1) + rc(G_2)$.

(ii) Akan dibuktikan jika $G = G_1 x\, G_2$ maka $rvc(G) \geq diam\,(G_1) + diam\,(G_2) - 1$ dan $rvc(G) \leq rvc(G_1) + rvc(G_2) + 1$

Diketahui jika $G = G_1 x\, G_2$ maka $diam\,(G) = diam\,(G_1) + diam\,(G_2)$, karena $rvc(G) \geq diam\,(G) - 1$ maka $rvc(G) \geq diam\,(G_1) + diam\,(G_2) - 1$.

Selanjutnya $rvc(G_1) \geq diam\,(G_1) - 1$ dan $rvc(G_2) \geq diam\,(G_2) - 1$, ini berakibat $diam\,(G_1) \leq rvc(G_1) + 1$ dan $diam\,(G_2) \leq rvc(G_2) + 1$. Karena

$$rvc(G) \geq diam\,(G_1) + diam\,(G_2) - 1$$

maka

$$rvc(G) \leq rvc(G_1) + 1 + rvc(G_2) + 1 - 1$$

sehingga diperoleh:

$$rvc(G) \leq rvc(G_1) + rvc(G_2) + 1.$$

Jadi terbukti, jika $G = G_1 x\, G_2$ maka :

$$diam\,(G_1) + diam\,(G_2) - 1 \leq rvc(G) \leq rvc(G_1) + rvc(G_2) + 1$$

3.3 Bilangan *Rainbow Connection* dalam Pandangan Islam

Surat Al-Furqan ayat 2 ditafsirkan bahwa keteraturan merupakan sesuatu yang telah diatur oleh Allah dibawah kehendak kekuasaan-Nya. Allah menetapkan volume dan bentuknya, menetapkan fungsi dan tugasnya, menetapkan zaman dan tempatnya, juga menetapkan keserasianya dengan yang lainnya, dari sekian individu dalam wujud yang besar ini dan sempurna. Segala sesuatu dari apa yang diciptakan-Nya sesuai dengan hikmah yang diinginkan-Nya, sebagai ilmu pengetahuan untuk mempersiapkan manusia agar dapat memahami, memikirkan urusan dunia dan akhirat, menemukan berbagai industri, dan memanfaatkan apa yang terdapat di permukaan serta di dalam perut bumi.

Keteraturan bilangan $rc(G)$ dan $rvc(G)$ dari hasil penelitian ini merupakan tanda kebesaran Allah SWT, tentang penciptaan. Ini merupakan salah satu dari sekian keteraturan atau ukuran dari segala sesuatu dalam alam yang semesta ini yang berada di bawah kekuasaan, aturan, tatanan dan takdir-Nya, yang ditetapkan dan diatur oleh Allah SWT.

Semua yang ada di alam ini baik makhluk maupun segala sesuatu yang berada dibawah kekuasaan-Nya adalah hasil penciptaan-Nya, bukan hasil penciptaan dari makhluk lain seperti manusia maupun syetan atau kegelapan seperti yang dikatakan oleh penganut agama Majusi dan penyembah berhala. Bilangan $rc(G)$ dan $rvc(G)$ merupakan hikmah yang sempurna yang memberikan manfaat bagi makhluk lain, serta bukan dari proses koisidens (kebetulan) yang mutlak. Ini semua telah di atur oleh SWT sebagai ilmu pengetahuan serta sebagai bukti terungkapnya beberapa segi keserasian yang menakjubkan dalam hukum-hukum semesta, ukuran-ukuranya, dan detail-detailnya, sesuai dengan yang diungkapkan oleh nash Al-Quran yang menakjubkan itu.

Sedangkan dalam tafsif Al-Maraghi ini merupakan bukti keempat yang mensifati Allah SWT.

وَخَلَقَ كُلَّ شَيْءٍ فَقَدَّرَهُۥ تَقْدِيرًا

Dia mengatakan segala sesuatu sesuai dengan tuntutan kehendak-Nya yang didasarkan atas hikmah yang sempurna, serta mempersiapkannya untuk menerima apa yang dikehendaki-Nya, berupa keistemewaan dan perbuatan yang sesuai dengannya. Maka, Dia mempersiapkan manusia untuk dapat memahami, memikirkan urusan dunia dan akhirat, menemukan berbagai industri, dan memanfaatkan apa yang terdapat di permukaan serta di dalam perut bumi. Dia juga mempersiapkan berbagai jenis hewan untuk melakukan berbagai pekerjaan yang sesuai dengannya dan dengan kemampuannya.

Oleh karena itu, Dia-lah yang berhak disembah. Tidak ada selain Dia. Dia-lah yang menciptakan manusia dengan bentuk, ukuran, dan perawakan yang sempurna. Tidak ada cela ataupun kekurangan dalam penciptaan, perbuatan, hukum, dan syariat-Nya. Maha Suci Dia yang Maha agung.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan pada Bab III, maka dapat diambil kesimpulan sebagai berikut :

1. Penjumlahan dua graf G_1dan G_2 yang dinotasikan $G = G_1 + G_2$, diperoleh bilangan *rainbow connection* dari graf G adalah:

   $$rc(G) = 1,\ G_1 \text{ dan } G_2 \text{ adalah graf komplit}$$

   $$rc(G) \geq 2,\ G_1 \text{atau } G_2 \text{ adalah bukan graf komplit}$$

   sedangkan bilangan *rainbow vertex-connection* dari graf G adalah:

   $$rvc(G) = \begin{cases} 0, & G_1 \text{dan } G_2 \text{ adalah graf komplit} \\ 1, & G_1 \text{atau } G_2 \text{ adalah bukan graf komplit} \end{cases}$$

2. Graf G graf hasil kali kartesius adalah graf yang dinotasikan $G = G_1 x\ G_2$, diperoleh bilangan *rainbow connection* dari graf G adalah:

   $$diam\ (G_1) + diam\ (G_2)\ \leq rc(G) \leq rc(G_1) + rc(G_2)$$

   sedangkan bilangan *rainbow vertex-connection* dari graf G adalah:

   $$diam\ (G_1) + diam\ (G_2) - 1\ \leq rvc(G) \leq rvc(G_1) + rvc(G_2) + 1.$$

4.2 Saran

Pada skripsi ini, penulis memfokuskan pada permasalahan bilangan *rainbow connection* dan *rainbow vertex-connection* pada graf hasil penjumlahan dan perkalian kartesius dua sebarang graf. Untuk itu penulis menyarankan kepada pembaca untuk mengkaji masalah bilangan *rainbow connection* dan *rainbow vertex-connection* pada graf hasil penjumlahan dan perkalian kartesius sebanyak n

sebarang graf, dengan $n > 2$. Selain itu juga pembaca dapat mengembangkan pada operasi lain, atau dapat dilakukan dengan obyek jenis-jenis graf lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Abdullah. 2004. *Tafsir Ibnu Katsir*. Bogor: Pustaka Imam Asy-syafi'i.

Abdusysyakir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press.

Al-Hifnawi, Muhammad Ibrahim. 2009. *Tafsir Al-Qurthubi*. Jakarta: Pustaka Azam.

Al-Maraghi, Ahmad Mustapa. 1989. *Tafsir Al-Maraghi*. Semarang: CV. Toha Putra.

Al-Qarni , 'Aidh. 2008. Tafsir Muyassar, jilid 3. Jakarta: Qitshi Press

Alisah, Evawati dan Dharmawan, Eko Prasetyo. *Filsafat Dunia Matematika*. Jakarta: Prestasi Pustaka Publisher.

Bondy, J.A, and Murty, U.S.R. 1976. *Graph Theory With Applications*. London: MacMillan Press,

Chandran, L. Sunil. *Rainbow Coloring of Graph.* (Online: www.tcs.tifr.res.in/.../nitk.../combinatore.pdf diakses pada tanggal 31 april 2012)

Chartrand, Gery and Lesniak, Linda. 1986. *Graphs and Digraphs Second Edition*. California: a Division of Wadsworth, Inc.

Gafur, Abdul. 2008. *Pewarnaan Titik pada Graf yang Berkaitan dengan Sikel*. UIN Malang: Skripsi, tidak diterbitkan.

Harary, Frank. 1969. *Graph Theory*. Amerika: Addison-Wesley Publishing Company, inc.

J. A. Gallian. 2007. *A dynamic Survey of Graph Labeling*. Electronic journal combinatorics. Dynamic Survey D#56

Krivelevich, Michael dan Yuster, Raphael, *The Rainbow connection of a graph is (at most) reciprocal to its minimum degree*, School of Mathematics, Tel Aviv University (2010)

Purwanto, 1998. *Matematika Diskrit*. Malang: IKIP Malang.

Quthb, Sayyid. 2004. *Tafsir Fi Zhilalil Qur'an*. Jakarta: Gema Insani

Y. Caro, A. Lev, Y. Roditty, Z. Tuza, and R. Yuster, *On rainbow connection*, Electronic Journal of Combinatorics 15 (2008), #R57

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang Telp./Fax.(0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : **Fuad Adi Saputra**
NIM : **08610035**
Fakultas/ Jurusan : **Sains dan Teknologi/Matematika**
Judul Skripsi : **Bilangan *Rainbow Connection* Dari Hasil Operasi Penjumlahan Dan Perkalian Kartesius Dua Graf**

Pembimbing I : **Abdussakir, M.Pd**
Pembimbing II : **Ach.Nashichuddin, M.A**

No	Tanggal	HAL	Tanda Tangan	
1	29 Pebruari 2012	Konsultasi BAB I	1.	
2	25 April 2012	Konsultasi BAB II	2.	
3	11 Mei 2012	Konsultasi Kajian Agama		3.
4	19 Juni 2012	Konsultasi BAB III	4.	
5	21 Juni 2012	Revisi BAB II	5.	
6	23 Juni 2012	Konsultasi Pembuktian Teorema BAB III	6.	
7	24 Juni 2012	Revisi Kajian Agama BAB II		7.
8	25 Juni 2012	Revisi BAB III	8.	
9	26 Juni 2012	Revisi Kajian Agama BAB III		9.
10	27 Juni 2012	ACC Kajian Agama		10.
11	28 Juni 2012	Konsultasi Bab IV	11.	
12	29 Juni 2012	Revisi Abstrak Bahasa Arab		12
13	29 Juni 2012	ACC Keseluruhan	13	

Malang, 29 Juni 2012
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP.19751006 200312 1 001