ALJABAR *MAX-PLUS* DAN SIFAT-SIFATNYA

SKRIPSI

Oleh:
ABDUL MAJID
NIM. 07610066

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2012

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

ALJABAR *MAX-PLUS* DAN SIFAT-SIFATNYA

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
ABDUL MAJID
NIM. 07610066

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2012

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

ALJABAR *MAX-PLUS* DAN SIFAT-SIFATNYA

SKRIPSI

Oleh:
ABDUL MAJID
NIM. 07610066

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal: 12 Januari 2012

Pembimbing I	**Pembimbing II**
Mohammad Jamhuri, M.Si	**Achmad Nashichuddin, M.A**
NIP. 19810502 200501 1 004	**NIP. 19730705 200003 1 002**

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

ALJABAR *MAX-PLUS* DAN SIFAT-SIFATNYA

SKRIPSI

Oleh:

ABDUL MAJID

NIM. 07610066

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal: 21 Januari 2012

Susunan Dewan Penguji		**Tanda Tangan**
1. Penguji Utama	**: Wahyu Henky Irawan, M.Pd** **NIP. 19710420 200003 1 003**	( )
2. Ketua	**: Abdussakir, M.Pd** **NIP. 19751006 200312 1 001**	( )
3. Sekretaris	**: Mohammad Jamhuri, M.Si** **NIP. 19810502 200501 1 004**	( )
4. Anggota	**: Achmad Nashichuddin, M.A** **NIP. 19730705 200003 1 002**	( )

Mengetahui dan Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Abdul Majid

NIM : 07610066

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambil alihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 12 Januari 2012
Yang membuat pernyataan

Abdul Majid
NIM. 07610066

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

PERSEMBAHAN

بسم الله الرحمن الرحيم

Penulis persembahkan skripsi ini kepada:

Bapak H. Yateman, ibu Hj. Afiah, Kakak Muhammad Hadi

dan keluarga tercinta, yang telah memberikan segalanya.

Dosen dan guru penulis, yang telah memberikan ilmu dan nasihatnya.

Serta Sahabat-sahabat, yang telah memberikan semangat dan pengertian.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

MOTTO

--- بالحماسة والتّبسّم ---

--- انّ الله معنا ---

Bermimpilah tentang apa yang ingin kamu impikan, pergilah ke tempat-tempat kamu ingin pergi. Jadilah seperti yang kamu inginkan, karena kamu hanya memiliki satu kehidupan dan satu kesempatan untuk melakukan hal-hal yang ingin kamu lakukan.

Enjoy Your Self...

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

KATA PENGANTAR

بسم الله الرحمن الرحيم

Alhamdulillahirrobbil 'alamin, segala puji syukur ke hadirat Allah SWT atas limpahan rahmat, taufiq dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "*ALJABAR MAX-PLUS DAN SIFAT-SIFATNYA*" dengan baik. Sholawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada Nabi besar Muhammad SAW sebagai *uswatun hasanah* dalam meraih kesuksesan di dunia dan akhirat.

Selanjutnya penulis haturkan ucapan terima kasih seiring do'a dan harapan *jazakumullah ahsanal jaza'* kepada semua pihak yang telah membantu selesainya skripsi ini. Ucapan terima kasih ini penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku rektor UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU., D.Sc, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika yang telah membimbing penulis, mengarahkan dan memberi pengalaman yang berharga.
4. Mohammad Jamhuri, M.Si, selaku dosen pembimbing, yang telah membimbing, memberi saran dan bantuan selama penulisan skripsi ini.
5. Achmad Nashichuddin, M.A, selaku dosen pembimbing agama, yang telah meluangkan waktunya memberikan arahan selama penulisan skripsi ini.
6. Usman Pagalay, M.Si, selaku dosen wali, yang telah memberikan pengarahan-pengarahan dan nasihat-nasihat yang sangat penulis butuhkan.
7. Seluruh dosen Jurusan Matematika, terimakasih telah memberikan ilmu pengetahuan kepada penulis selama di bangku kuliah, serta seluruh karyawan dan staf.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

8. Seluruh guru penulis yang telah memberikan ilmu dan nasihatnya.
9. Bapak dan Ibu tercinta, yang selalu memberikan semangat dan motivasi baik moril maupun spirituil dan perjuangannya yang tak pernah kenal lelah dalam mendidik dan membimbing penulis hingga penulis sukses dalam meraih cita-cita serta ketulusan do'anya kepada penulis sampai dapat menyelesaikan skripsi ini.
10. Kakak penulis satu-satunya, terima kasih telah memberikan semangat selama kuliah serta dalam menyelesaikan skripsi ini.
11. Sahabat-sahabat yang selalu memberikan motivasi, saran serta doa juga keceriaan dalam menyelesaikan skripsi ini sahabat Izza, Arief, Umi Khorirotin, Mufid, dan Sahabat Syafi'i yang senantiasa memberikan waktu luang dalam membantu penulis menyelesaikan skripsi ini.
12. Sahabat-sahabat Pergerakan Mahasiswa Islam Indonesia (PMII) Rayon *"Pencerahan"* Galileo Komisariat "SA" Malang yang telah memberikan pengalaman dan kenangan dalam hidup.
13. Teman-teman Matematika angkatan 2007, Yanti, Tri Utomo, Saiful, Zaniar, Any, Puspita, teman-teman kelompok PKLI Navis, Krida, Fitri dan semuanya, terima kasih atas do'a serta kenangan yang kalian berikan.
14. Semua pihak yang tidak mungkin penulis sebut satu persatu, atas keikhlasan bantuan moral dan spritual, penulis ucapkan terima kasih.

Semoga skripsi ini bermanfaat dan dapat menambah wawasan keilmuan khususnya matematika. Amiin.

Malang, 12 Januari 2012

Penulis

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL
HALAMAN PENGAJUAN
HALAMAN PERSETUJUAN
HALAMAN PENGUJIAN
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN
HALAMAN PERSEMBAHAN
HALAMAN MOTTO
KATA PENGANTAR……..i
DAFTAR ISI……..iii
DAFTAR GAMBAR……..v
ABSTRAK……vi
ABSTRACT……..…vii
الملخص viii

BAB I PENDAHULUAN 1
1.1 Latar Belakang 1
1.2 Rumusan Masalah 6
1.3 Batasan Masalah..... 7
1.4 Tujuan Penelitian..... 7
1.5 Manfaat Penelitian..... 7
1.6 Metodologi Penelitian 8
1.7 Sistematika Penulisan..... 9

BAB II KAJIAN TEORI..... 11
2.1 Himpunan dan Operasi Biner 11
2.1.1 Himpunan 11
2.1.2 Operasi Biner..... 14
2.2 Grup dan Semi-grup 18
2.2.1 Grup..... 19
2.2.2 Semi-grup 21
2.3 Ring dan Semi-ring 23
2.3.1 Ring 23
2.3.2 Semi-ring 26

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

2.4 Field dan Semi-field 29
2.4.1 Field 30
2.4.2 Semi-field 31
2.5 Bilangan dalam Al-Qur'an 33

BAB III PEMBAHASAN 38
3.1 Definisi Aljabar *Max-plus* 38
3.1.1 Notasi 41
3.2 Aljabar *Max-plus* dan Sifat-sifatnya 42
3.3 Integrasi Aljabar *Max-plus* dengan Al-Qur'an 54

BAB IV PENUTUP 62
4.1 Kesimpulan 62
4.2 Saran 64

DAFTAR PUSTAKA

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

DAFTAR GAMBAR

Gambar 3. 1 Tiga kelompok Manusia 54

Gambar 3. 2 Hubungan antara Manusia dengan Allah 56

Gambar 3. 3 Himpunan Manusia dengan Satu Operasi Biner 58

Gambar 3. 4 Himpunan Manusia dengan Dua Operasi Biner…...…….60

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

ABSTRAK

Majid, Abdul. 2012. **Aljabar *Max-plus* dan Sifat-sifatnya**. Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: I. Mohammad Jamhuri, M.Si.
II. Achmad Nashichuddin, M.A.

Kata Kunci: Semi-grup, Semi-ring, Semi-field, Aljabar *Max-plus*.

Aljabar *max-plus* yang dinotasikan dengan $\mathcal{R}_{max} = (R_{max}, \oplus, \otimes)$ merupakan salah satu struktur dalam aljabar yaitu semi-field idempoten. R_{max} merupakan himpunan $R \cup \{\varepsilon\}$, dimana R merupakan himpunan bilangan real, dengan $\varepsilon = -\infty$, sedangkan operasi $\oplus$ menyatakan maximal dan $\otimes$ menyatakan penjumlahan normal bilangan real, yang didefinisikan sebagai berikut:

$\forall a,b \in R_{max}$

$a \oplus b = \max(a,b)$

$a \otimes b = a + b$

Aljabar *max-plus* $(R_{max}, \oplus, \otimes)$ merupakan semi-ring dengan elemen netral $\varepsilon = -\infty$ dan elemen satuan $e = 0$, karena untuk setiap $a, b, c \in R_{max}$ berlaku sifat-sifat berikut:

i. $(R_{max}, \oplus)$ membentuk semi-grup komutatif dengan elemen identitas ε, karena $(R_{max}, \oplus)$ memiliki sifat assosiatif, komutatif terhadap operasi $\oplus$.
ii. $(R_{max}, \otimes)$ membentuk grup abelian dengan elemen identitas e, dan memiliki elemen netral ε yang bersifat menyerap terhadap operasi $\otimes$, karena $(R_{max}, \otimes)$ memiliki sifat assosiatif, komutatif, terdapat elemen identitas, dan elemen invers terhadap operasi $\otimes$.
iii. $(R_{max}, \oplus, \otimes)$ membentuk semi-ring, karena berdasarkan sifat-sifat di atas maka $(R_{max}, \oplus)$ membentuk semi-grup komutatif dengan elemen identitas ε, $(R_{max}, \otimes)$ membentuk grup abelian dengan elemen identitas e, dan memiliki elemen netral ε yang bersifat menyerap terhadap operasi $\otimes$, dan $(R_{max}, \oplus, \otimes)$ memiliki sifat distributif operasi $\otimes$ terhadap operasi $\oplus$.

Semi-ring R_{max} merupakan semi-ring komutatif jika operasi $\otimes$ bersifat komutatif dan merupakan semi-ring idempoten jika operasi $\oplus$ bersifat idempoten, dan semi-ring komutatif R_{max} merupakan semi-field jika setiap elemen tak netralnya mempunyai invers terhadap operasi $\otimes$. Maka, terlihat bahwa $(R_{max}, \oplus, \otimes)$ merupakan semi-field idempoten.
Maka disarankan kepada peneliti selanjutnya untuk membahas tentang aljabar *max-plus* pada matrik, pada fungsi skalar, pada masalah nilai eigen dan vektor eigen, dan lain-lain. Aljabar *max-plus* memiliki peranan yang sangat banyak dalam menyelesaikan persoalan di beberapa bidang seperti teori graf, fuzzy, kombinatorika, teori sistem, teori antrian dan proses stokastik. Karena penelitian ini adalah aljabar *max-plus*, maka bisa diteliti pula tentang aljabar *min-plus*.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

ABSTRACT

Majid, Abdul. 2012. ***Max-plus* Algebra and Their Properties**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, State Islamic University (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
Advisors: I. Mohammad Jamhuri, M.Si.
II. Achmad Nashichuddin, M.A.

Keywords: Semi-grup, Semi-ring, Semi-field, *Max-plus* Algebra.

Max-plus algebra are denoted by $\mathcal{R}_{max} = (R_{max}, \oplus, \otimes)$ is one of the algebraic structure of idempotent semi-field. R_{max} is the set $R \cup \{\varepsilon\}$, where R is the set of real numbers, with $\varepsilon = -\infty$, while the operation $\oplus$ stated maximum and $\otimes$ normal addition of real numbers, which are defined as follows:

$\forall a,b \in R_{max}$

$a \oplus b = \max(a,b)$

$a \otimes b = a + b$

Max-plus algebra $(R_{max}, \oplus, \otimes)$ is a semi-ring with neutral element $\varepsilon = -\infty$ and identity element $e = 0$, since for every $a, b, c \in R_{max}$ apply the following properties:

i. $(R_{max}, \oplus)$ form a commutative semi-group with identity element ε, because $(R_{max}, \oplus)$ has the properties of associative, and commutative operation on $\oplus$.
ii. $(R_{max}, \otimes)$ form abelian group with identity element e, and has a neutral element ε that are absorbed to the operation $\otimes$, because $(R_{max}, \otimes)$ has the properties of associative, commutative, there is the identity element and inverse elements of the operation $\otimes$.
iii. $(R_{max}, \oplus, \otimes)$ form a semi-ring, because based on the properties of the above then $(R_{max}, \oplus)$ form a commutative semi-group with identity element ε, $(R_{max}, \otimes)$ form abelian group with identity element e, and has neutral element ε that are absorbed to the operation $\otimes$, and $(R_{max}, \oplus, \otimes)$ has a distributive nature of the operations $\otimes$ to the operation $\oplus$.

Semi-ring R_{max} is a commutative semi-ring if the operation $\otimes$ hold on commutative and idempotent semi-ring if the operation $\oplus$ hold on idempotent, and commutative semi-ring R_{max} is the semi-field if every element of neutrality did not have the inverse of the operation $\otimes$. Thus, it appears that $(R_{max}, \oplus, \otimes)$ is an idempotent semi-field.

It is advisable to research further to discuss about the *max-plus* algebra on the matrix, the scalar function, the problem of eigenvalues and eigenvectors, and others. *Max-plus* algebra has a role very much in solving problems in several fields such as graph theory, fuzzy, kombinatorika, systems theory, queuing theory and stochastic processes. Because of this research is the *max-plus* algebra, so it can be observed also on the *min-plus* algebra.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

الملخص

المجيد، عبد .٢٠١٢. الجبر ماكس زائد وطبيعاته .البحث العلمي .قسم الرياضيات بكلية العلوم والتكنولوجيا جامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج.

المشرف: ١. محمد جمهورى، الماجستير.

٢. أحمد ناصح الدّين، الماجستير.

كلمة المفتاح : شبه المجموعة، شبه الدائري، شبه الميدانية، الجبرماكس زائد.

الجبر ماكس زائد المكتوبة ب $\mathcal{R}_{max} = (R_{max}, \oplus, \otimes)$، هو إحدى البنية الجبرية من شبه الميداني ادبمفاتين. R_{max} هو مجموعة من $R \cup \{\varepsilon\}$، حيث R هي مجموعة الأعداد الحقيقية، مع $\varepsilon = -\infty$، وعملية $\oplus$ تدل على الاقصى و $\otimes$ تدل على الإضافة العادية للأعداد الحقيقية، ويتم تعريفها كما يلي:

$$\forall a,b \in R_{max}$$
$$a \oplus b = \max(a, b)$$
$$a \otimes b = a + b$$

الجبر ماكس زائد $(R_{max}, \oplus, \otimes)$ هو شبه الدائري بالعنصر المحايد $\varepsilon = -\infty$ والعنصرالوحدة $e = 0$، لأن لكل من $a, b, c \in R_{max}$ تجري السمات التالية:

١. $(R_{max}, \oplus)$ يكوّن شبه الدائري التبادلي مع عنصر الهوية ε، لأن $(R_{max}, \oplus)$ لها الخصائص الترابطي والتبادلي نحو عملية $\oplus$.

٢. $(R_{max}, \otimes)$ يكوّن مجموعة ابليان بعنصر الهوية e، ولها عنصر المحايد ε التي تستوعب إلى عملية $\otimes$، لأن $(R_{max}, \otimes)$ لديه خصائص الترابطي والتبادلي نحو عنصر الهوية وعنصر المعكوس نحو عملية $\oplus$.

٣. $(R_{max}, \oplus, \otimes)$ يكوّن شبه الدائري، اعتمادا على الخصائص السابق يكوّن $(R_{max}, \oplus)$ شبه المجموعة التبادلية مع عنصر الهوية ε، $(R_{max}, \otimes)$ يكوّن مجموعة ابليان بعنصر الهوية، وله عنصر المحايد ε الذي يندمج إلى عملية $\otimes$، و $(R_{max}, \oplus, \otimes)$ طبيعته توزيع عملية $\otimes$ نحو عملية $\oplus$.

شبه الدائري R_{max} هو شبه الدائري التبادلي إذا اتصف عملية $\otimes$ تبادليا، وشبه الدائري ادبمفاتين إذا اتصف عملية $\oplus$ ادبمفاتينا، و شبه الدائري التبادلي R_{max} هو شبه الميداني إذا كان كل عنصر من عناصر الحياد لم يكن لديها معكوس نحو عملية $\otimes$. وبالتالي، يبدو أن $(R_{max}, \oplus, \otimes)$ هو شبه ميدانية ادبمفاتين.

فإننا نحث للباحث يليه أن يبحث حول الجبر ماكس زائد على مصفوفة، والدالة العددية، ومشكلة القيم الذاتية وفقتار عيجين، وغيرها. إن لالجبر ماكس زائد دور كبير في حل المشاكل في العديد من المجالات مثل نظرية الرسم البياني، وغامض، وكومبنطرك، ونظرية النظم ونظرية الطوابير والعمليات العشوائية. لأن موضوع هذه الدراسة هو الجبر ماكس زائد، فيمكن أن يكون هناك بحث في الجبر دقيقة زائد.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

إِنَّ ٱلَّذِينَ يَكۡتُمُونَ مَآ أَنزَلۡنَا مِنَ ٱلۡبَيِّنَٰتِ وَٱلۡهُدَىٰ مِنۢ بَعۡدِ مَا بَيَّنَّٰهُ لِلنَّاسِ فِي ٱلۡكِتَٰبِ أُوْلَٰٓئِكَ يَلۡعَنُهُمُ ٱللَّهُ وَيَلۡعَنُهُمُ ٱللَّٰعِنُونَ ١٥٩

Artinya:

"Sesungguhnya orang-orang yang menyembunyikan apa yang telah Kami turunkan berupa keterangan-keterangan (yang jelas) dan petunjuk, setelah Kami menerangkannya kepada manusia dalam Al Kitab, mereka itu dila'nati Allah dan dila'nati (pula) oleh semua (mahluk) yang dapat mela'nati." (Q. S. Al-Baqarah: 159)

Dari penggalan ayat di atas, Allah SWT melaknat orang yang menyembunyikan ilmu yang diperolehnya, tidak mengamalkan ilmu yang diperoleh, sehingga penulis tergerak untuk memberikan sedikit paparan tentang matematika aljabar.

Alam semesta memuat bentuk-bentuk dan konsep matematika, meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika itu ada. Alam semesta serta segala isinya diciptakan Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mapan, dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi (Abdussakir, 2007: 79).

Semua yang ada di alam ini ada ukurannya, ada hitung-hitungannya, ada rumusnya, atau ada persamaannya. Rumus-rumus yang ada sekarang bukan diciptakaan manusia sendiri, tetapi sudah disediakan. Manusia hanya

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

menemukan dan menyimbolkan dalam bahasa matematika (Abdussakir, 2007: 80).

Secara umum beberapa konsep dari disiplin ilmu telah dijelaskan dalam al-Qur'an, salah satunya adalah matematika. Konsep dari disiplin ilmu matematika yang ada dalam al-Qur'an diantaranya adalah bidang aljabar, matematika terapan, logika, analisis, statistik, dan lain-lain.

Aljabar merupakan salah satu cabang dari ilmu matematika. Sedangkan cabang dari ilmu aljabar itu sendiri antara lain aljabar abstrak dan aljabar linier. Aljabar abstrak memiliki banyak materi yang dapat dibahas dan dikembangkan (Anonim, 2011: 5).

Aljabar abstrak adalah bidang matematika yang mengkaji struktur aljabar seperti grup, ring, field, modul, dan ruang vektor. Pada dasarnya aljabar abstrak juga membahas tentang himpunan dan operasinya. Sehingga dalam mempelajari materi ini selalu identik dengan sebuah himpunan tidak kosong yang mempunyai elemen-elemen yang dapat dikombinasikan dengan penjumlahan, perkalian, ataupun keduanya atau dapat dioperasikan dengan satu atau lebih operasi biner. Hal tersebut berarti pembahasan-pembahasannya melibatkan objek-objek abstrak yang dinyatakan dalam simbol-simbol (Anonim, 2011: 5).

Bidang kajian ini disebut dengan aljabar (saja) sebagai kependekan aljabar abstrak, disebut juga dengan struktur aljabar. Tetapi kebanyakan lebih senang menyebutnya dengan aljabar abstrak untuk membedakannya dengan aljabar elementer. Aljabar abstrak ini banyak digunakan dalam kajian lanjut

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

bidang matematika (teori bilangan aljabar, topologi aljabar, geometri aljabar) (Anonim, 2011: 5).

Kajian mengenai himpunan sudah ada dalam al-Qur'an. Misalnya, kehidupan manusia yang terdiri dari berbagai macam golongan. Di mana golongan merupakan bagian dari himpunan karena himpunan sendiri merupakan kumpulan objek-objek yang terdefinisi. Dalam al-Quran surat al-Fatihah ayat 7 disebutkan.

صِرَٰطَ ٱلَّذِينَ أَنۡعَمۡتَ عَلَيۡهِمۡ غَيۡرِ ٱلۡمَغۡضُوبِ عَلَيۡهِمۡ وَلَا ٱلضَّآلِّينَ ٧

Artinya:

"(yaitu) jalan orang-orang yang telah Engkau beri nikmat kepada mereka; bukan (jalan) mereka yang dimurkai dan bukan (pula jalan) mereka yang sesat". (Q. S. Al-Fatihah: 7)

Dalam ayat 7 surat Al-Fatihah ini dijelaskan manusia terbagi menjadi tiga kelompok, yaitu (1) kelompok yang mendapat nikmat dari Allah SWT, (2) kelompok yang dilaknat, dan (3) kelompok yang sesat (Abdussakir, 2007: 47).

Beberapa bagian dari aljabar abstrak dengan satu operasi biner yang memenuhi sifat-sifat tertentu dikenal dengan *grup*. Sedangkan kajian himpunan dengan satu operasi biner dalam konsep Islam yaitu, bahwa manusia adalah diciptakan secara berpasang-pasangan. Perhatikan firman Allah SWT dalam surat Al-Faathir ayat 11.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

وَٱللَّهُ خَلَقَكُم مِّن تُرَابٍ ثُمَّ مِن نُّطْفَةٍ ثُمَّ جَعَلَكُمْ أَزْوَٰجًا ۚ وَمَا تَحْمِلُ مِنْ أُنثَىٰ وَلَا تَضَعُ إِلَّا بِعِلْمِهِۦ ۚ وَمَا يُعَمَّرُ مِن مُّعَمَّرٍ وَلَا يُنقَصُ مِنْ عُمُرِهِۦٓ إِلَّا فِى كِتَٰبٍ ۚ إِنَّ ذَٰلِكَ عَلَى ٱللَّهِ يَسِيرٌ ﴿١١﴾

Artinya:

"dan Allah menciptakan kamu dari tanah kemudian dari air mani, kemudian Dia menjadikan kamu berpasangan (laki-laki dan perempuan). dan tidak ada seorang perempuanpun mengandung dan tidak (pula) melahirkan melainkan dengan sepengetahuan-Nya. dan sekali-kali tidak dipanjangkan umur seorang yang berumur panjang dan tidak pula dikurangi umurnya, melainkan (sudah ditetapkan) dalam kitab (Lauh Mahfuzh). Sesungguhnya yang demikian itu bagi Allah adalah mudah." (Q. S. Al-Faathir: 11)

Dari surat Al-Faathir ayat 11 diatas disebutkan, bahwa manusia adalah berpasang-pasangan yaitu laki-laki dengan perempuan dengan cara menikah. Biasanya dalam matematika disimbolkan $(G, +)$, dengan G adalah himpunan tak kosongnya yaitu himpunan manusia (laki-laki, perempuan) dan + adalah operasi binernya yaitu pernikahan.

Sedangkan untuk himpunan yang tidak kosong dengan dua operasi biner yang memenuhi sifat-sifat tertentu disebut dengan *ring*. Untuk *ring* sendiri dibagi menjadi dua menurut sifat identitasnya, yaitu *ring* yang mempunyai *identitas* 1 dan *ring* yang tidak mempunyai unsur *identitas* 1. Sedangkan kajian himpunan dengan dua operasi biner dalam konsep Islam yaitu, manusia adalah diciptakan secara berpasang-pasangan dan cara memasangkannya dengan hokum-hukum tertentu. Seperti dijelaskan dalam firman Allah SWT dalam surat An-Nisaa' ayat 23.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

حُرِّمَتۡ عَلَيۡكُمۡ أُمَّهَٰتُكُمۡ وَبَنَاتُكُمۡ وَأَخَوَٰتُكُمۡ وَعَمَّٰتُكُمۡ وَخَٰلَٰتُكُمۡ وَبَنَاتُ
ٱلۡأَخِ وَبَنَاتُ ٱلۡأُخۡتِ وَأُمَّهَٰتُكُمُ ٱلَّٰتِيٓ أَرۡضَعۡنَكُمۡ وَأَخَوَٰتُكُم مِّنَ
ٱلرَّضَٰعَةِ وَأُمَّهَٰتُ نِسَآئِكُمۡ وَرَبَٰٓئِبُكُمُ ٱلَّٰتِي فِي حُجُورِكُم مِّن نِّسَآئِكُمُ ٱلَّٰتِي
دَخَلۡتُم بِهِنَّ فَإِن لَّمۡ تَكُونُواْ دَخَلۡتُم بِهِنَّ فَلَا جُنَاحَ عَلَيۡكُمۡ وَحَلَٰٓئِلُ
أَبۡنَآئِكُمُ ٱلَّذِينَ مِنۡ أَصۡلَٰبِكُمۡ وَأَن تَجۡمَعُواْ بَيۡنَ ٱلۡأُخۡتَيۡنِ إِلَّا مَا قَدۡ
سَلَفَۗ إِنَّ ٱللَّهَ كَانَ غَفُورٗا رَّحِيمٗا ٢٣

Artinya:

"diharamkan atas kamu (mengawini) ibu-ibumu; anak-anakmu yang perempuan; saudara-saudaramu yang perempuan, saudara-saudara bapakmu yang perempuan; saudara-saudara ibumu yang perempuan; anak-anak perempuan dari saudara-saudaramu yang laki-laki; anak-anak perempuan dari saudara-saudaramu yang perempuan; ibu-ibumu yang menyusui kamu; saudara perempuan sepersusuan; ibu-ibu isterimu (mertua); anak-anak isterimu yang dalam pemeliharaanmu dari isteri yang telah kamu campuri, tetapi jika kamu belum campur dengan isterimu itu (dan sudah kamu ceraikan), Maka tidak berdosa kamu mengawininya; (dan diharamkan bagimu) isteri-isteri anak kandungmu (menantu); dan menghimpunkan (dalam perkawinan) dua perempuan yang bersaudara, kecuali yang telah terjadi pada masa lampau; Sesungguhnya Allah Maha Pengampun lagi Maha Penyayang." (Q. S. An-Nisaa': 23)

Maka dari firman Allah SWT diatas dijelaskan bahwa manusia adalah berpasang-pasangan antara laki-laki dan perempuan dengan menikah. Akan tetapi cara menikah dengan pasangannya harus secara hukum agama. Dalam matematika biasanya disimbolkan (R , + , *) , dengan R adalah himpunan tak kosongnya yaitu himpunan manusia (laki-laki, perempuan), + adalah operasi

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

pertamanya yaitu pernikahan, dan * adalah operasi keduanya yaitu hukum agamanya.

Pada teori ring didefinisikan bahwa himpunan R disebut ring, jika himpunan R merupakan grup komutatif, pergandaan asosiatif, distributif kanan dan ditributif kiri. Karena sifat ini dipandang terlalu kuat, didefinisikan teori semi-ring yang merupakan semi-grup terhadap kedua operasi binernya selanjutnya memenuhi distributif kanan dan distributif kiri.

Aljabar *Max-plus* yang dinotasikan dengan $\mathcal{R}_{max} = (R_{max}, \oplus, \otimes)$ merupakan salah satu struktur dalam aljabar yaitu semi-field komutatif idempoten (Baccelli, 2001: 102). R_{max} merupakan himpunan $R \cup \{\varepsilon\}$, dimana R merupakan himpunan bilangan real, dengan $\varepsilon = -\infty$, sedangkan operasi $\oplus$ menyatakan maksimal dan $\otimes$ menyatakan penjumlahan normal bilangan real, yang didefinisikan sebagai berikut (Heidergott, 2005: 13):

$\forall a,b \in R_{max}$

$$a \oplus b = \max(a,b)$$

$$a \otimes b = a + b$$

Berdasarkan keterangan tersebut maka penulis tertarik untuk meneliti tentang aljabar *max-plus* dan sifat-sifatnya. Sehingga penulis merumuskan judul penelitian tersebut adalah **"Aljabar *Max-plus* dan sifat-sifatnya"**.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka permasalahan yang dapat dirumuskan adalah bagaimana aljabar *max-plus* dan sifat-sifatnya?

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah dalam penelitian ini adalah membahas aljabar *max-plus* dan sifat-sifatnya saja.

1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui aljabar *max-plus* dan sifat-sifatnya.

1.5 Manfaat Penelitian

Hasil penelitian ini diharapkan dapat bermanfaat bagi:

1. Penulis

   Menambah pengetahuan dan keilmuan tentang hal-hal yang berkaitan dengan aljabar *max-plus*.

2. Lembaga

   Sebagai tambahan pustaka untuk rujukan penelitian dan bahan perkuliahan khususnya tentang materi aljabar *max-plus*.

3. Pembaca

   Sebagai bahan pembelajaran dan pengetahuan mengenai aljabar *max-plus*, dan diharapkan dapat menjadi rujukan untuk penelitian yang akan datang.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

1.6 Metodologi Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode penelitian kepustakaan (*library research)* atau kajian pustaka, yakni melakukan penelitian untuk memperoleh data-data dan informasi-informasi serta objek yang digunakan dalam pembahasan masalah tersebut. Studi kepustakaan merupakan penampilan argumentasi penalaran keilmuan untuk memaparkan hasil olah pikir mengenai suatu permasalahan atau topik kajian kepustakaan yang dibahas dalam penelitian ini.

Adapun langkah-langkah yang akan digunakan oleh peneliti dalam membahas penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mencari literatur utama yang dijadikan acuan dalam pembahasan ini. Literatur yang dimaksud adalah buku tentang *Max-plus* Algebra karangan Kasie G. Farlow yang diterbitkan tahun 2009.
2. Mengumpulkan berbagai literatur pendukung, baik yang bersumber dari buku, jurnal, artikel, internet, dan lainnya yang berhubungan dengan permasalahan yang akan dibahas dalam penelitian ini.
3. Memahami dan mempelajari konsep himpunan, operasi biner, grup, semi-grup, ring, semi-ring, field, dan semi-field.
4. Dimulai dari suatu himpunan tak kosong G dengan satu operasi biner * yang disebut dengan grup (G, *), kemudian mempelajari konsep semi-grup yang digunakan sebagai dasar dari semi-ring, ketika menyebut semi-ring maka dibutuhkan ring yaitu sebuah himpunan tak kosong dengan 2 operasi biner yaitu (R, +, ×).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

5. Selanjutnya dari suatu semi-ring (S, +, ×) dikatakan komutatif jika operasi × bersifat komutatif, dan semi-ring dikatakan idempoten jika operasi + bersifat idempoten, kemudian semi-ring komutatif disebut semi-field jika setiap elemen tak netralnya mempunyai invers terhadap operasi ×. Karena semi-field memiliki sifat idempoten, maka disebut semi-field idempoten.
6. Sehingga didapatkan sifat-sifat aljabar *max-plus*.

1.7 Sistematika Penulisan

Dalam penyusunan penelitian ini perlu dibuat langkah-langkah yang sistematis guna memudahkan dalam memahami makna dari setiap bab yang ada. Secara umum penulisan penelitian ini terdiri dari empat bab.

1. **BAB I PENDAHULUAN**

   Bab ini membahas mengenai latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

2. **BAB II KAJIAN TEORI**

   Bab ini berisikan teori-teori yang mendasari penulisan skripsi ini, atau lebih dikenal dengan Kajian Teori. Adapun teori-teori yang termuat didalamnya adalah Himpunan, Operasi Biner, Grup, Semi-grup, Ring, Semi-ring, Field, Semi-field, dan Bilangan dalam Al-Qur'an.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

3. **BAB III PEMBAHASAN**

Pada bab ini akan dibahas mengenai definisi Aljabar *Max-plus,* sifat-sifat Aljabar *Max-plus* dan Integrasi Aljabar *Max-plus* dengan Al-Qur'an.

4. **BAB IV PENUTUP**

Bab ini berisi tentang kesimpulan dari materi yang telah dibahas pada bab sebelumnya dan berisi saran untuk pengembangan penelitian selanjutnya.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB II

KAJIAN TEORI

2.1 Himpunan dan Operasi Biner

2.1.1 Himpunan

Istilah himpunan seringkali dijumpai ketika mempelajari aljabar abstrak. Hal ini dikarenakan himpunan merupakan dasar dari berbagai pembahasan-pembahasan mengenai aljabar abstrak. Definisi himpunan dapat dilihat sebagai berikut:

Definisi 1

Himpunan adalah kumpulan obyek-obyek yang mempunyai sifat yang sama, obyek-obyek tersebut selanjutnya disebut sebagai anggota dari himpunan (Bhattacharya, 1990: 3).

Obyek tersebut dapat berupa benda konkrit, seperti meja, kursi, dan lain-lain, atau dapat pula berupa benda abstrak seperti bilangan, fungsi dan yang sejenisnya.

Misal A adalah himpunan, jika x sebuah obyek pada A, maka x dikatakan anggota dari A dan ditulis $x \in A$. Jika A tidak mempunyai anggota maka A disebut himpunan kosong dan dinotasikan dengan $A = \{\}$. Jika A mempunyai anggota sekurang-kurangnya satu anggota maka A disebut himpunan tak kosong. Jika A adalah himpunan berhingga, banyaknya obyek yang berbeda di A disebut order dan dinotasikan $|A|$.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Contoh:

A adalah himpunan semua bilangan prima yang kurang dari 10, maka

$A = \{2,3,5,7\}$

atau dapat ditulis sebagai

$A = \{x | x < 10, x \in \text{prima}\}$

Order A adalah $|A| = 4$

Definisi 2

Misal A dan B himpunan. Himpunan A dikatakan himpunan bagian dari himpunan B jika memenuhi untuk setiap $a \in A$ maka $a \in B$ dan dinotasikan $A \subseteq B$ (A termuat dalam atau sama dengan B) (Bhattacharya, 1990: 40).

Contoh :

Misalkan $A = \{5n | n \in N\}$

$B = \{2n - 1 | n \in N\}$

$N = \{1,2,3,4,5,6,7,8,...\}$

Maka $A \subset N$ dan $B \subset N$ tetapi $A \not\subset B$ (A bukan himpunan bagian dari B). Setiap anggota dari A adalah juga anggota dari N. Setiap anggota dari B adalah juga anggota dari N. Tetapi tidak setiap anggota dari A merupakan anggota dari B.

Definisi 3

Misal A dan B himpunan. A dikatakan sama dengan B jika memenuhi $A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$ atau untuk setiap $a \in A$ maka $a \in B$ dan untuk setiap $b \in B$ maka $b \in A$ dinotasikan $A = B$ (Bhattacharya, 1990: 4).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Dari dua definisi di atas dapat disimpulkan bahwa himpunan A dikatakan sebagai himpunan bagian dari himpunan B jika dan hanya jika setiap anggota himpunan A menjadi anggota himpunan B; atau himpunan B memuat semua anggota himpunan A.

Notasi: $A \subset B$ dibaca sebagai A subset sejati dari B (untuk $A \neq B$)

$A \not\subset B$ dibaca sebagai A bukan subset B

$A \subseteq B$ dibaca sebagai A subset dari B (untuk $A = B$)

Contoh:

Misalkan $A = \{1,3,5,7,9\}$ dan

$B = \{x | x < 10, x \in \text{bilangan ganjil}\}$

Maka $A = B$ meskipun diperoleh syarat keanggotaan yang berbeda.

Definisi 4

Gabungan himpunan A dan B adalah himpunan yang memuat kedua anggota himpunan A atau B dinotasikan $A \cup B = \{x | x \in A \text{ atau } x \in B\}$ (Raisinghania dan Anggarwal, 1980: 3).

Contoh:

Misalkan $A = \{1,3,5,7,9\}$ dan $B = \{2,3,5,7\}$

Maka $A \cup B = \{1,2,3,5,7,9\}$

Definisi 5

Misalkan A dan B himpunan. Irisan A dan B, ditulis $A \cap B$, adalah himpunan yang memuat semua unsur di A dan B yang dinotasikan dengan $A \cap B = \{x | x \in A \text{ dan } x \in B\}$ (Raisinghania dan Anggarwal, 1980: 4).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Contoh:

Misalkan $A = \{1,3,5,7,9\}$ dan $B = \{2,3,5,7\}$

Maka $A \cap B = \{3,5,7\}$

2.1.2 Operasi Biner

Definisi 6

Operasi atau komposisi * dalam sebuah himpunan tidak kosong G adalah biner jika dan hanya jika

$$a \in G, b \in G \text{ maka } a * b \in G, \forall a, b \in G.$$

Sifat di atas dari operasi di G dikatakan tertutup dan jika sifat ini memenuhi operasi * di G (Raisinghania dan Anggarwal, 1980: 27).

Misal $(a, b) \in S \times S$ maka bayangan dari pasangan terurut (a, b) di S dibawah pemetaan * ditulis $a * b$. Dengan kata lain operasi biner * memasangkan setiap a dan b dari himpunan S dengan suatu $a * b$ elemen dari himpunan S. Selanjutnya * dikatakan sebagai operasi biner pada S. Salah satu contoh operasi biner adalah penjumlahan, pengurangan, dan perkalian pada bilangan real R, sebab $a, b \in R$, maka $a + b \in R$, $a - b \in R$, $a \times b \in R$. Sedangkan pembagian bukan opeasi biner pada R karena pembagian dengan nol tak terdefinisi, tetapi pembagian adalah operasi biner pada $R - \{0\}$.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Definisi 7

Suatu operasi biner * pada suatu himpunan S dikatakan komutatif jika dan hanya jika untuk setiap $x, y \in S$, maka $x * y = y * x$ (Whitelaw, 1995: 63).

Contoh:

Z adalah himpunan bilangan bulat

$(Z, +)$ adalah grup

$\forall a, b \in Z$, sehingga $a + b = a + b$

Jadi, berlaku sifat komutatif terhadap operasi +.

Definisi 8

Suatu operasi biner $*$ pada suatu himpunan S bersifat assosiatif jika dan hanya jika setiap $x, y, z \in S$ berlaku $(x * y) * z = x * (y * z)$ (Whitelaw, 1995: 62).

Contoh:

Z adalah himpunan bilangan bulat

$(Z, +)$ adalah grup

$\forall a, b, c \in Z$, sehingga $(a + b) + c = a + (b + c)$

Jadi, berlaku sifat assosiatif terhadap operasi +.

Definisi 9

Suatu himpunan S dikatakan mempunyai elemen identitas (elemen netral) terhadap operasi biner * jika dan hanya jika ada elemen $e \in S$ sedemikian hingga untuk setiap $x \in A$ berlaku $x * e = e * x = x$ (Sukirman, 1986: 6).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Contoh:

Z adalah himpunan bilangan bulat

$(Z, +)$ adalah grup

Ambil $a \in Z$

dan $e \in Z$ dimana e adalah identitas

Maka $a + e = a$

$a + e - a = a - a$

$e = 0$

Sehingga diperoleh $e = 0$

Dimana $0 \in Z$

Jadi, 0 adalah identitas pada (Z, +).

Teorema 1

Jika himpunan S terhadap operasi biner * mempunyai elemen identitas maka elemen identitas itu tunggal (Sukirman, 1986: 7).

Bukti

Misalkan himpunan S terhadap operasi biner Identitas e_1 dan e_2 dengan $e_1, e_2 \in S$. Karena e_1 elemen identitas dari S dan $e_2 \in S$.

Maka $e_1 * e_2 = e_2 * e_1 = e_2$ ...(1)

Karena e_2 elemen identitas dari S dan $e_1 \in S$

Maka $e_2 * e_1 = e_2 * e_1 = e_1$ ...(2)

Dari (1) dan (2) maka $e_1 = e_2$

Terbukti elemen identitas S terhadap operasi biner * adalah tunggal.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Definisi 10

Misalkan himpunan S terhadap operasi biner * mempunyai elemen identitas e. Suatu elemen $y \in S$ dikatakan invers dari $x \in S$ terhadap operasi biner * jika dan hanya jika $x * y = y * x = e$ (Sukirman, 1986: 7).

Invers dari x terhadap operasi biner ditulis x^{-1} (dibaca "invers x").

Contoh:

Z adalah himpunan bilangan bulat

$(Z, +)$ adalah grup

Ambil $a, a^{-1} \in Z$

Dimana a^{-1} adalah invers dari a

Sehingga $a + a^{-1} = e$

Dimana e adalah identitas

Maka $\forall a \in Z$

Pasti memiliki $a^{-1} \in Z$

Dimana $a + (-a) = 0$

Jadi, 0 adalah identitas Z pada operasi +.

Definisi 11

Misalkan operasi-operasi biner Δ dan * terdefinisikan pada suatu himpunan S.

i. Jika untuk setiap $x, y, z \in S$ berlaku $x\Delta(y * z) = (x\Delta y) * (x\Delta z)$ maka pada S berlaku sifat distributif kiri Δ terhadap *.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

ii. Jika untuk setiap x, y, $z \in S$ berlaku $(y * z)\Delta x = (y\Delta x) * (z\Delta x)$ maka pada S berlaku sifat distributif kanan Δ terhadap *.

(Sukirman, 1986: 9).

Contoh:

Z adalah himpunan bilangan bulat

$(Z, +, \times)$ adalah ring

$\forall a, b, c \in Z$, sehingga $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$

Jadi, berlaku sifat distributif operasi $\times$ terhadap operasi +.

2.2 Grup dan Semi-grup

Salah satu struktur aljabar yang paling sederhana adalah grup. Grup didefinisikan sebagai himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan operasi biner yang memenuhi beberapa aksioma, di antaranya tertutup, assosiatif, memiliki elemen identitas, dan memiliki elemen invers. Apabila salah satu aksioma tidak terpenuhi maka bukan grup.

Sistem aljabar (G, *) dengan himpunan tidak kosong di G dan operasi biner * didefinisikan di G adalah grupoid. Grupoid juga disebut semi-grup jika operasi biner * di G adalah assosiatif. Sedangkan semi-grup yang mempunyai elemen identitas di G disebut monoid (Raisinghania dan Anggarwal, 1980: 32).

Sebagai contoh, misalkan himpunan N adalah bilangan asli dengan operasi penjumlahan adalah semi-grup, karena operasi biner di N adalah penjumlahan, maka N bersifat assosiatif. Jadi (N, +) adalah semi-grup. Tetapi

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

(N, +) bukan monoid, karena operasi penjumlahan tidak mempunyai identitas di N. Jadi (N, +) bukan grup.

Definisi grup secara aljabar dapat dilihat sebagai berikut:

2.2.1 Grup

Definisi 12

Misalkan G adalah suatu himpunan tak kosong dan pada G didefinisikan operasi biner *. Sistem matematika (G,*) disebut grup jika memenuhi aksioma-aksioma:

i. Untuk setiap $a, b, c \in G$ maka $(a * b) * c = a * (b * c)$ operasi * bersifat assosiatif di G

ii. G mempunyai unsur identitas terhadap operasi *

Misalkan e unsur di G sedemikian hingga $a * e = e * a$, $\forall a \in G$ maka e disebut unsur identitas.

iii. Setiap unsur di G mempunyai invers terhadap operasi *

Untuk setiap $a \in G$ ada $a^{-1} \in G$ yang disebut sebagai invers dari a, sehingga $a * a = a * a = e$. e adalah unsur identitas.

(Raisinghania dan Anggarwal, 1980: 31).

Untuk syarat tertutup, sudah terpenuhi pada operasi biner.

Contoh:

Z adalah himpunan bilangan bulat

(Z, +)

Akan dibuktikan (Z, +) adalah grup

i. Biner terhadap operasi +

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$\forall a, b \in Z$, maka $a + b \in Z$

Jadi, Z biner terhadap operasi +

ii. Memiliki sifat assosiatif terhadap operasi +

$\forall a, b, c \in Z$, maka $(a + b) + c = a + (b + c)$

Jadi, operasi + bersifat assosiatif di Z

iii. Memiliki unsur identitas terhadap operasi +

$\exists 0 \in Z$, sehingga $a + 0 = 0 + a = a, \forall a \in Z$

Jadi, identitas di Z adalah 0

iv. Memiliki invers terhadap operasi +

$\forall a \in Z, \exists a^{-1} = (-a) \in Z$, sehingga $a + (-a) = (-a) + a = 0$

Jadi, invers dari a adalah $-a$

Dari (*i*), (*ii*), (*iii*) dan (*iv*) maka (*Z*, +) adalah grup.

Definisi 13

Grup (*G*,*) dikatakan komutatif (abelian) jika untuk setiap unsur *a* dan *b* di *G* berlaku *a* * *b* = *b* * *a* (Arifin, 2000: 36).

Contoh:

Z adalah himpunan bilangan bulat

(*Z*, +)

Akan dibuktikan (*Z*, +) adalah grup komutatif

Sudah dibuktikan bahwa (*Z*, +) adalah grup

$\forall a,b \in Z$, maka $a + b = b + a$

Jadi, (*Z*, +) adalah grup komutatif.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

2.2.2 Semi-grup

Definisi 14

Misalkan S adalah himpunan tidak kosong, S dikatakan semi-grup jika pada S dikenai operasi biner * sedemikian sehingga, untuk semua $a, b, c \in S$ sehingga $(a * b) * c = a * (b * c)$ (hukum asosiatif), yang dinotasikan dengan $(S, *)$ adalah semi-grup.

(Kandasamy, 2002: 7).

Untuk syarat tertutup, sudah terpenuhi pada operasi biner.

Contoh:

N adalah himpunan bilangan asli

Akan dibuktikan $(N, +)$ adalah semi-grup

i. Biner terhadap operasi +

   $\forall x, y \in N$, maka $x + y \in N$

   Jadi, operasi + biner di N

ii. Memiliki sifat assosiatif terhadap operasi +

   $\forall x, y \in N$, maka $(x + y) + z = x + (y + z)$

   Jadi, operasi + bersifat assosiatif di N

Definisi 15

Jika semi-grup $(S, *)$ dikatakan semi-grup komutatif jika memenuhi $a * b = b * a$ untuk semua $a, b \in S$ (Kandasamy, 2002: 7).

Jika banyaknya anggota dalam semi-grup S adalah berhingga maka S adalah semi-grup berhingga atau semi-grup order berhingga. Jika semi-grup S memuat element e sedemikian sehingga $e * a = a * e$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$= a$ untuk semua $a \in S$ maka S adalah semi-grup dengan elemen identitas e atau sebuah monoid. Sebuah elemen $x \in S$, S yang monoid dikatakan inversibel atau mempunyai invers di S jika terdapat $y \in S$ sedemikian sehingga $xy = yx = e$.

Contoh:

N adalah himpunan bilangan asli

Akan dibuktikan (N, +) adalah semi-grup komutatif

Sudah dibuktikan bahwa (N, +) adalah semi-grup

Memiliki sifat komutatif terhadap operasi +

$\forall x, y \in N$, maka $x + y = y + x$

Jadi, operasi + memiliki sifat komutatif di N.

Definisi 16

Misalkan (S, *) adalah semi-grup. Subset H yang tidak kosong dari S dikatakan subsemi-grup dari S jika H itu sendiri adalah semi-grup dibawah operasi dari S (Kandasamy, 2002: 7).

Contoh:

Z adalah himpunan bilangan bulat

$2Z = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots\} = \{2x | x \in Z\}$

$2Z \subseteq Z$, jelas dan + assosiatif

($2Z$, +) adalah subsemi-grup dari (Z, +)

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

2.3 Ring dan Semi-ring

Suatu sistem matematika yang yang terdiri dari satu himpunan tak kosong dengan satu operasi dinamakan grup. Sistem matematika tersebut belumlah cukup untuk menampung struktur-struktur yang ada dalam matematika. Pada bagian ini dikembangkan suatu sistem matematika yang terdiri dari satu himpunan tak kosong dengan dengan dua operasi biner yang disebut dengan ring (ring).

2.3.1 Ring

Definisi 17

R adalah himpunan tak kosong dengan dua operasi biner + dan $\times$ (disebut penjumlahan/operasi pertama dan perkalian/operasi kedua) disebut ring jika memenuhi pernyataan berikut:

1. $(R, +)$ adalah grup abelian
2. Operasi $\times$ bersifat asosiatif:

   $(a \times b) \times c = a \times (b \times c), \forall a, b, c \in R$
3. Operasi * bersifat distributif terhadap + di R: $\forall a,b,c \in R$

   $(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$ (distributif kiri)

   $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$ (distributif kanan)

(Dummit dan Foote, 1991: 225).

Contoh:

Selidiki apakah $(Z, +, \times)$ dengan Z bilangan bulat merupakan ring?

Jawab:

i. $(Z, +)$ adalah grup abelian karena

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

a) Z tertutup terhadap operasi +

$\forall a, b \in Z$ berlaku $(a + b) \in Z$

b) + bersifat asosiatif di Z

$\forall a, b, c \in Z$ berlaku $a + (b + c) = (a + b) + c$

c) 0 adalah elemen identitas terhadap operasi + di Z

$\forall a \in Z$ berlaku $a + 0 = 0 + a = a$

d) $\forall a \in Z, \exists a^{-1} = (-a) \in Z$, sehingga

$a + (-a) = (-a) + a = 0$

e) Operasi + bersifat komutatif di Z

$\forall a,b \in Z$ berlaku $a + b = b + a$

ii. Operasi $\times$ bersifat asosiatif di Z

$(a \times b) \times c = a \times (b \times c), \forall a, b, c \in Z$

iii. Operasi $\times$ bersifat distributif terhadap +

$(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c), \forall a, b, c \in Z$

$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c), \forall a, b, c \in Z$

Definisi 18

Ring $(R, +, \times)$ adalah komutatif jika operasi $\times$ bersifat komutatif

$$a \times b = b \times a, \forall a, b \in R$$

(Dummit dan Foote, 1991: 225).

Contoh:

Selidiki apakah $(R, +, \times)$ dengan R bilangan real adalah merupakan ring komutatif?

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Jawab:

Sudah dibuktikan bahwa $(R, +, \times)$ adalah ring

Operasi $\times$ bersifat komutatif di R

$\forall a, b \in R$, sehingga $a \times b = b \times a$

Terbukti R ring komutatif.

Definisi 19

Ring $(R, +, \times)$ dikatakan mempunyai unsur identitas jika ada suatu elemen $1 \in R$ dengan

$$1 \times a = a \times 1 = a, \forall a \in R$$

(Dummit dan Foote, 1991: 225).

Contoh:

Selidiki apakah $(R, +, \times)$ dengan R bilangan real adalah merupakan ring dengan unsur satuan?

Jawab:

Sudah dibuktikan bahwa $(R, +, \times)$ adalah ring

Operasi $\times$ mempunyai unsur identitas di R

$\forall a \in R, \exists 1 \in R$, sehingga $a \times 1 = 1 \times a = a$

Jadi, $(R, +, \times)$ merupakan ring satuan.

Definisi 20

Misalkan R adalah ring. Asumsikan R identitas $1 \neq 0$. Invers elemen u dari R disebut unit di R jika ada suatu v di R sedemikian sehingga $uv = vu = 1$ (Dummit dan Foote, 1991: 228).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Contoh:

Selidiki apakah (R, +, ×) dengan R bilangan real adalah merupakan ring dengan elemen invers untuk operasi ×?

Jawab:

Misalkan $a \in R$, $a \neq 0$, sehingga

$$a \times b = b \times a = 1$$

$$a \times b = 1$$

$$b = \frac{1}{a}$$

$\forall a \in R, a \neq 0, \ni a^{-1} = \frac{1}{a}$, sehingga

$$a \times \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \times a = 1$$

Jadi, R ring dengan elemen invers untuk operasi ×

2.3.2 Semi-ring

Definisi 21

Suatu semi-ring (S, +, ×) adalah suatu himpunan tak kosong S yang dilengkapi dengan dua operasi biner yaitu + dan ×, yang memenuhi aksioma berikut:

i. (S, +) adalah semi-grup komutatif dengan elemen netral 0, yaitu jika a, b, $c \in S$, berlaku:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

$$a + b = b + a$$

$$a + 0 = 0 + a = a$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

ii. $(S, \times)$ adalah semi-grup dengan elemen satuan 1, yaitu jika $a, b, c \in S$, berlaku:

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

$$a \times 1 = 1 \times a = a$$

iii. Elemen netral 0 merupakan elemen penyerap terhadap operasi $\times$, yaitu jika $a \in S$, berlaku:

$$a \times 0 = 0 \times a = 0$$

iv. Operasi $\times$ distributif terhadap operasi $+$, yaitu $a, b, c \in S$, maka:

$$(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$$

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$$

(Rudhito, 2004: 2).

Contoh:

R adalah himpunan semua bilangan real

Misal $(R, +, \times)$ merupakan semi-field dengan elemen netral 0 dan elemen identitas 1, karena untuk setiap $x, y, z \in R$ berlaku:

1. $(R, +)$ merupakan semi-grup komutatif dengan elemen netral 0

   i. $(x + y) + z = x + (y + z)$

      Jadi, operasi + bersifat assosiatif di R

   ii. $x + y = y + x$

      Jadi, operasi + bersifat komutatif di R

   iii. $x + 0 = 0 + x = x$

      Jadi, operasi + memiliki identitas di R

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

2. $(R, \times)$ merupakan semi-grup dengan elemen identitas 1

   i. $(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$

      Jadi, operasi $\times$ bersifat assosiatif di R

   ii. $x \times 1 = 1 \times x = x$

      Jadi, operasi $\times$ memiliki identitas di R

3. Elemen netral 0 bersifat menyerap terhadap operasi $\times$

   $x \times 0 = 0 \times x = 0$

4. $(R, +, \times)$ bersifat distributif $\times$ terhadap $+$

   $(x + y) \times z = (x \times z) + (y \times z)$

   $x \times (y + z) = (x \times y) + (x \times z)$

Definisi 22

Suatu semi-ring $(S, +, \times)$ dikatakan komutatif jika operasi $\times$ bersifat komutatif, yaitu $\forall a, b \in S$, berlaku $a \times b = b \times a$ (Rudhito, 2004: 3).

Contoh:

R adalah himpunan bilangan real

Misal $(R, +, \times)$ adalah semi-ring

$\forall x, y \in R$, sehingga $x \times y = y \times x$

Jadi, $(R, +, \times)$ semi-ring komutatif terhadap operasi $\times$

Definisi 23

Suatu semi-ring $(S, +, \times)$ dikatakan idempoten jika operasi $+$ bersifat idempoten, yaitu $\forall a \in S.\ a + a = a$ (Rudhito, 2004: 3).

Dalam (Baccelli, 2001), semi-ring idempoten disebut dioid.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Contoh:

R adalah himpunan bilangan real

Misal $(R, +, \times)$ adalah semi-ring

$\forall x \in R$, sehingga $x + x = x$

Jadi, $(R, +, \times)$ semi-ring idempoten terhadap operasi +

Definisi 24

Suatu semi-ring komutatif $(S, +, \times)$ disebut semi-field jika setiap elemen tak netralnya mempunyai invers terhadap operasi $\times$, yaitu $\forall a \in S\backslash\{0\}\ \exists\ a^{-1} \in S$, sehingga $a \times a^{-1} = 1$ (Rudhito, 2004: 3).

Contoh:

Semi-ring komutatif $(R, +, \times)$ R adalah himpunan bilangan real, disebut semi-field, karena untuk setiap $x \in R$ terdapat $x^{-1} \in R$, sehingga $x \times \frac{1}{x} = 1$.

2.4 Field dan Semi-field

Unit-unit di ring R membentuk sebuah grup pada operasi perkalian sehingga $(R, \times)$ akan dikenal sebagai grup dari unit-unit R. Dalam istilah ini sebuah field adalah ring komutatif dengan identitas $1 \neq 0$, dimana setiap unsur selain identitas operasi pertama adalah unit.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

2.4.1 Field

Definisi 25

Sebuah ring komutatif, jika unsur selain identitas operasi pertama membentuk sebuah grup terhadap operasi kedua disebut field (Durbin, 1992: 119).

Contoh:

Diketahui $(R, +, \times)$ adalah ring himpunan bilangan real. Selidiki apakah $(R, +, \times)$ merupakan field?

Jawab:

Syarat field adalah

a) Ring komutatif

Ambil $a, b \in R$

Karena $\forall a, b \in R$ berlaku

$ab = ba$ maka

R ring komutatif

b) Ring uniti

Ambil $a \in R$

$\exists 1 \in R, 1 \neq 0$, sehingga

$1a = a1 = a, \forall a \in R$

Jadi R ring dengan satuan

c) $\forall a \neq 0\ \exists a^{-1} \in R \ni a * a^{-1} = 1$

$\forall a \in R$ dan $1 \neq 0$

$\exists \frac{1}{a} \in R$ sehingga

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$a\frac{1}{a} = \frac{1}{a}a = 1$$

Jadi $a^{-1} = \frac{1}{a}$

Jadi (R, +, *) merupakan field.

2.4.2 Semi-field

Definisi 26

Sebuah semi-field (S, +, ×) adalah himpunan yang dikenai dengan dua operasi + dan × sedemikian sehingga:

i. Operasi + asosiatif, komutatif dan memiliki elemen netral 0.
ii. Operasi × membentuk grup abelian dan memiliki elemen identitas 1.
iii. Memiliki sifat distributif × terhadap +.

Sehingga yang dimaksud semi-field adalah

i. Idempoten jika operasi pertama adalah idempoten, sehingga, jika $\forall a \in S,\ a + a = a$.
ii. Komutatif jika grupnya adalah komutatif.

(Baccelli, 2001: 101).

Contoh:

R adalah himpunan semua bilangan real

Misal (R, +, ×) merupakan semi-field dengan elemen netral 0 dan elemen identitas 1, karena untuk setiap $x, y, z \in R$ berlaku:

1. (R, +) merupakan semi-grup komutatif dengan elemen netral 0

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

i. $(x + y) + z = x + (y + z)$

Jadi, operasi + bersifat assosiatif di R

ii. $x + y = y + x$

Jadi, operasi + bersifat komutatif di R

iii. $x + 0 = 0 + x = x$

Jadi, operasi + memiliki identitas di R

iv. $x + x = x$

Jadi, operasi + bersifat idempoten di R

2. $(R, \times)$ merupakan grup abelian dengan elemen identitas 1

i. $(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$

Jadi, operasi $\times$ bersifat assosiatif di R

ii. $x \times y = y \times x$

Jadi, operasi $\times$ bersifat komutatif di R

iii. $x \times 1 = 1 \times x = x$

Jadi, operasi $\times$ memiliki identitas di R

iv. $\exists x^{-1} \in R$, sehingga $x \times x^{-1} = x^{-1} \times x = 1$

Jadi, operasi $\times$ memiliki invers di R

3. Elemen netral 0 bersifat menyerap terhadap operasi $\times$

$x \times 0 = 0 \times x = 0$

4. $(R, +, \times)$ bersifat distributif $\times$ terhadap +

$(x + y) \times z = (x \times z) + (y \times z)$

$x \times (y + z) = (x \times y) + (x \times z)$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

2.5 Bilangan dalam Al-Qur'an

Secara umum beberapa konsep dari disiplin ilmu telah dijelaskan dalam Al-Qur'an, salah satunya adalah matematika. Konsep dari disiplin ilmu matematika yang ada dalam Al-Qur'an diantaranya adalah bidang aljabar, matematika terapan, logika, analisis, statistik, dan lain-lain.

Aljabar merupakan salah satu cabang dari ilmu matematika. Sedangkan cabang dari ilmu aljabar itu sendiri antara lain aljabar abstrak dan aljabar linier. Aljabar abstrak memiliki banyak materi yang dapat dibahas dan dikembangkan, seperti himpunan dan operasinya, dan di dalamnya banyak mengkaji tentang bilangan.

Dalam bab ini akan dijelaskan tentang bilangan dalam Al-Qur'an, dimulai dari pemaparan ayat-ayat tentang bilangan, kemudian beberapa tafsir tentang bilangan. Bilangan dalam Al-Qur'an terdapat di beberapa ayat dalam Al-Qur'an, yang pertama terdapat dalam Surat Al-Muddatsir ayat 31:

وَمَا جَعَلْنَآ أَصْحَٰبَ ٱلنَّارِ إِلَّا مَلَٰٓئِكَةً ۙ وَمَا جَعَلْنَا عِدَّتَهُمْ إِلَّا فِتْنَةً لِّلَّذِينَ كَفَرُوا۟
لِيَسْتَيْقِنَ ٱلَّذِينَ أُوتُوا۟ ٱلْكِتَٰبَ وَيَزْدَادَ ٱلَّذِينَ ءَامَنُوٓا۟ إِيمَٰنًا ۙ وَلَا يَرْتَابَ ٱلَّذِينَ
أُوتُوا۟ ٱلْكِتَٰبَ وَٱلْمُؤْمِنُونَ ۙ وَلِيَقُولَ ٱلَّذِينَ فِى قُلُوبِهِم مَّرَضٌ وَٱلْكَٰفِرُونَ مَاذَآ
أَرَادَ ٱللَّهُ بِهَٰذَا مَثَلًا ۚ كَذَٰلِكَ يُضِلُّ ٱللَّهُ مَن يَشَآءُ وَيَهْدِى مَن يَشَآءُ ۚ وَمَا يَعْلَمُ
جُنُودَ رَبِّكَ إِلَّا هُوَ ۚ وَمَا هِىَ إِلَّا ذِكْرَىٰ لِلْبَشَرِ ﴿٣١﴾

Artinya:

"dan tiada Kami jadikan penjaga neraka itu melainkan dari Malaikat: dan tidaklah Kami menjadikan bilangan mereka itu melainkan untuk Jadi cobaan bagi orang-orang kafir, supaya orang-orang yang diberi Al-Kitab menjadi yakin dan supaya orang yang beriman bertambah imannya

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

dan supaya orang-orang yang diberi Al kitab dan orng-orang mukmin itu tidak ragu-ragu dan supaya orang-orang yang di dalam hatinya ada penyakit dan orang-orang kafir (mengatakan): "Apakah yang dikehendaki Allah dengan bilangan ini sebagai suatu perumpamaan?" Demikianlah Allah membiarkan sesat orang-orang yang dikehendaki-Nya dan memberi petunjuk kepada siapa yang dikehendaki-Nya. dan tidak ada yang mengetahui tentara Tuhanmu melainkan Dia sendiri. dan Saqar itu tiada lain hanyalah peringatan bagi manusia." (Q. S. Al-Muddatsir: 31)

Menurut Syaikh Abu Bakar Jabir Al-Jazairi *"dan tidaklah Kami menjadikan bilangan mereka,"* yaitu jumlah mereka yang Sembilan belas, *"melainkan untuk jadi cobaan bagi orang-orang kafir,"* agar kesesatan dan kekufuran mereka semakin menjadi-jadi. Hal ini telah terbukti dengan kasus Abu Jalal dan Abul Usyudain. Mereka berdua semakin sesat dan kufur dengan jumlah para malaikat penjaga neraka. (Al-Jazairi, 2009: 701)

Kajian tentang bilangan juga terdapat dalam surat At-Taubah ayat 36-37. Pada ayat 36 manusia wajib mengetahui tentang bilangan bulan, antara lain: bulan muharram, shafar, rabiul awal, rabiul akhir, jumadil awal, jumadil akhir, rajab, sya'ban, ramadhan, syawal, dzulqa'dah, dzulhijjah. Seperti firman Allah dalam Surat At-Taubah ayat 36 di bawah ini:

إِنَّ عِدَّةَ ٱلشُّهُورِ عِندَ ٱللَّهِ ٱثْنَا عَشَرَ شَهْرًا فِى كِتَٰبِ ٱللَّهِ يَوْمَ خَلَقَ ٱلسَّمَٰوَٰتِ
وَٱلْأَرْضَ مِنْهَآ أَرْبَعَةٌ حُرُمٌ ۚ ذَٰلِكَ ٱلدِّينُ ٱلْقَيِّمُ ۚ فَلَا تَظْلِمُوا۟ فِيهِنَّ
أَنفُسَكُمْ ۚ وَقَٰتِلُوا۟ ٱلْمُشْرِكِينَ كَآفَّةً كَمَا يُقَٰتِلُونَكُمْ كَآفَّةً ۚ وَٱعْلَمُوٓا۟
أَنَّ ٱللَّهَ مَعَ ٱلْمُتَّقِينَ ﴿٣٦﴾

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Artinya:

"Sesungguhnya bilangan bulan pada sisi Allah adalah dua belas bulan, dalam ketetapan Allah di waktu Dia menciptakan langit dan bumi, di antaranya empat bulan haram. Itulah (ketetapan) agama yang lurus, Maka janganlah kamu Menganiaya diri kamu dalam bulan yang empat itu, dan perangilah kaum musyrikin itu semuanya sebagaimana merekapun memerangi kamu semuanya, dan ketahuilah bahwasanya Allah beserta orang-orang yang bertakwa." (Q. S. At-taubah: 36)

Menurut Ath-Thabari "*Sesungguhnya bilangan,*" yaitu jumlah bulan dalam satu tahun. "*Pada sisi Allah adalah dua belas bulan, dalam ketetapan Allah,*" yaitu, pada kitab yang di dalamnya Allah SWT mencatat semua yang telah Dia tetapkan berdasarkan *qadha*-Nya. (Ath-Thabari, 2009: 749)

Pada penggalan surat At-Taubah ayat 36, bilangan bulan disini maksudnya antara lain ialah: bulan Haram (bulan Zulkaidah, Zulhijjah, Muharram dan Rajab), tanah Haram (Mekah) dan ihram.

Selanjutnya dalam firman Allah dalam Surat At-Taubah ayat 37:

إِنَّمَا ٱلنَّسِيٓءُ زِيَادَةٌ فِى ٱلْكُفْرِ ۖ يُضَلُّ بِهِ ٱلَّذِينَ كَفَرُوا۟ يُحِلُّونَهُۥ عَامًا وَيُحَرِّمُونَهُۥ عَامًا لِّيُوَاطِـُٔوا۟ عِدَّةَ مَا حَرَّمَ ٱللَّهُ فَيُحِلُّوا۟ مَا حَرَّمَ ٱللَّهُ ۚ زُيِّنَ لَهُمْ سُوٓءُ أَعْمَـٰلِهِمْ ۗ وَٱللَّهُ لَا يَهْدِى ٱلْقَوْمَ ٱلْكَـٰفِرِينَ ﴿٣٧﴾

Artinya:

"Sesungguhnya mengundur-undurkan bulan Haram itu[3)] adalah menambah kekafiran. disesatkan orang-orang yang kafir dengan mengundur-undurkan itu, mereka menghalalkannya pada suatu tahun dan mengharamkannya pada tahun yang lain, agar mereka dapat mempersesuaikan dengan bilangan yang Allah mengharamkannya, Maka mereka menghalalkan apa yang diharamkan Allah. (syaitan) menjadikan mereka memandang perbuatan mereka yang buruk itu. dan Allah tidak memberi petunjuk kepada orang-orang yang kafir." (Q. S. At-Taubah: 37)

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

"*Agar mereka dapat mempersesuaikan dengan bilangan yang Allah mengharamkannya,*" maksudnya adalah agar mereka dapat menyesuaikan apa-apa yang mereka halalkan dan haramkan pada bulan-bulan tersebut dengan bilangan yang telah Allah SWT haramkan. (Ath-Thabari, 2009: 766)

Dalam penggalan Surat Yunus juga disebutkan tentang bilangan tahun dan perhitungan (waktu), maksudnya agar manusia dapat memahami bilangan tahun seperti perhitungan bulan, hari, jam dan lain-lain. Allah menjadikan semua yang disebutkan itu bukanlah dengan percuma, melainkan dengan penuh hikmah. Firman Allah surat Yunus ayat 5:

هُوَ ٱلَّذِى جَعَلَ ٱلشَّمْسَ ضِيَآءً وَٱلْقَمَرَ نُورًا وَقَدَّرَهُۥ مَنَازِلَ لِتَعْلَمُوا۟ عَدَدَ ٱلسِّنِينَ وَٱلْحِسَابَ ۚ مَا خَلَقَ ٱللَّهُ ذَٰلِكَ إِلَّا بِٱلْحَقِّ ۚ يُفَصِّلُ ٱلْءَايَٰتِ لِقَوْمٍ يَعْلَمُونَ ﴿٥﴾

Artinya:

"Dia-lah yang menjadikan matahari bersinar dan bulan bercahaya dan ditetapkan-Nya manzilah-manzilah (tempat-tempat) bagi perjalanan bulan itu, supaya kamu mengetahui bilangan tahun dan perhitungan (waktu). Allah tidak menciptakan yang demikian itu melainkan dengan hak. Dia menjelaskan tanda-tanda (kebesaran-Nya) kepada orang-orang yang mengetahui." (Q. S. Yunus: 5)

"Supaya kamu mengetahui bilangan tahun dan perhitungan (waktu)," artinya adalah, Allah menetapkan tempat-tempat bulan dan matahari itu agar kalian wahai orang-orang beriman tahu jumlah tahun, baik permulaan maupun berakhirnya. Maksud dari perhitungannya disini adalah perhitungan waktu, hari, jam, dan sebagainya. (Ath-Thabari, 2009: 447)

Kemudian yang terakhir ada dalam surat Al-Anbiyaa' ayat 84:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

فَٱسۡتَجَبۡنَا لَهُۥ فَكَشَفۡنَا مَا بِهِۦ مِن ضُرّٖۖ وَءَاتَيۡنَٰهُ أَهۡلَهُۥ وَمِثۡلَهُم مَّعَهُمۡ رَحۡمَةٗ مِّنۡ عِندِنَا وَذِكۡرَىٰ لِلۡعَٰبِدِينَ ٨٤

Artinya:

"Maka Kamipun memperkenankan seruannya itu, lalu Kami lenyapkan penyakit yang ada padanya dan Kami kembalikan keluarganya kepadanya, dan Kami lipat gandakan bilangan mereka, sebagai suatu rahmat dari sisi Kami dan untuk menjadi peringatan bagi semua yang menyembah Allah." (Q. S. Al-Anbiyaa': 84)

Menurut Al-Qurthubi "*lalu Kami lenyapkan penyakit yang ada padanya dan Kami kembalikan keluarganya kepadanya, dan Kami lipat gandakan bilangan mereka."* Mujahid dan Ikrimah mengatakan, "Dikatakan kepada Ayyub SAW, 'Kami telah memberikan kepadamu keluargamu di surga, dan jika kau mau, maka Kami akan mendatangkan mereka kepadamu di dunia". (Al-Qurthubi, 2008: 859)

Dari beberapa surat dan ayat di atas ada beberapa surat lain yang menyebutkan tentang bilangan pula, seperti dalam surat Al-Israa' ayat 12 dan surat Al-Kahfi ayat 22. Maka penting bagi semuanya memahami makna bilangan. Selanjutnya pada Bab III akan dikaji tentang Integrasi Aljabar *Max-plus* dengan Al-Qur'an.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB III

PEMBAHASAN

Dalam bab ini akan dibahas beberapa konsep dasar yang akan digunakan untuk membahas aljabar *max-plus* dan sifat-sifatnya. Mulai dari penjabaran definisi, contoh, teorema dan buktinya.

Meninjau kembali aljabar konvensional yang digunakan dalam menyelesaikan aljabar *max-plus* yang merupakan salah satu struktur dalam aljabar yaitu semi-field idempoten R_{max} (himpunan bilangan real dengan operasi max dan plus). Tujuannya adalah untuk mendefinisikan aljabar *max-plus* dan menjabarkan sifat-sifatnya kemudian memberikan bukti pada tiap-tiap sifatnya.

Bab ini dibagi dalam 3 bagian utama. Pada bagian pertama akan diberikan definisi tentang Aljabar *Max-plus*, pada bagian kedua akan dilanjutkan dengan Aljabar *Max-plus* dan sifat-sifatnya, kemudian pada bagian akhir akan diintegrasikan Aljabar *Max-plus* dengan Al-Qur'an.

Perhatikan definisi Aljabar *Max-plus*, seperti di bawah ini:

3.1 Definisi Aljabar *Max-plus*

Definisi 3.1

Notasi $R_{\max}$ merupakan himpunan $R \cup \{\varepsilon\}$, dimana R adalah anggota bilangan Real, didefinisikan $\varepsilon \coloneqq -\infty$ dan $e := 0$. Untuk $a, b \in R_{\max}$, didefinisikan operasi $\oplus$ dan $\otimes$

$$a \oplus b := \max(a, b) \text{ dan } a \otimes b := a + b. \tag{1.1}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Himpunan $R_{\max}$ dengan operasi $\oplus$ dan $\otimes$ disebut Aljabar *Max-plus* dan dinotasikan dengan

$$\mathcal{R}_{max} = (R_{max}, \oplus, \otimes)$$

Seperti dalam aljabar konvensional, dalam hal urutan pengoperasian (jika tanda kurung tidak dituliskan), operasi $\otimes$ mempunyai prioritas yang lebih besar dari pada operasi $\oplus$.

Contoh:

$$4 \otimes -7 \oplus 5 \otimes 2$$

harus dipahami sebagai

$$(4 \otimes -7) \oplus (5 \otimes 2).$$

Perhatikan bahwa $(4 \otimes -7) \oplus (5 \otimes 2) = \max\ (4 + (-7)), (5 + 2)$

$$= \max\ (-3, 7)$$

$$= 7$$

sedangkan $4 \otimes (-7 \oplus 5) \otimes 2 = 4 + \max\ (-7, 5) + 2$

$$= 4 + 5 + 2$$

$$= 11$$

Perluasan operasi untuk $-\infty$

$\max\ (a, -\infty) = \max\ (-\infty, a) = a$ dan $a + (-\infty) = -\infty + a = -\infty$,

untuk setiap $a \in R_{\max}$, sehingga

$$a \oplus \varepsilon = \varepsilon \oplus a = a \text{ dan } a \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes a = \varepsilon.$$

Contoh:

$7 \oplus 4 = \max\ (7, 4) = 7,$

$7 \oplus \varepsilon = \max\ (7, -\infty) = 7,$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$7 \otimes \varepsilon = 7 + (-\infty) = -\infty = \varepsilon$,

$e \oplus 4 = \max(0, 4) = 4$,

$7 \otimes 4 = 7 + 4 = 11$.

Definisi 3.2

Untuk $x \in R_{max}$ dan $n \in N$

$$x^{\otimes n} = \underbrace{x \otimes x \otimes \ \dots \ \otimes x}_{sebanyak\ n}$$

Dalam exponensial aljabar *max-plus* mereduksi perkalian konvensional $x^{\otimes n} = n \times x$.

Ini akan menjadi natural untuk memperluas exponensial *max-plus* untuk eksponen yang lebih umum sebagai berikut:

i. Jika $x \neq \varepsilon, x^{\otimes 0} = e = 0$.

ii. Jika $\alpha \in R,\ x^{\otimes \alpha} = \alpha x$

iii. Jika $k > 0$ maka $\varepsilon^{\otimes k} = \varepsilon$ ($k \leq 0$ tidak terdefinisi)

Contoh:

Dari definisi 3.2 $x^{\otimes n} = n \times x$

$$7^{\otimes 3} = 3 \times 7 = 21$$

dan

$$9^{\otimes -2} = -2 \times 9 = -18 = 18^{\otimes -1}$$

Contoh:

$$6^{\otimes \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \times 6 = 3$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

dan

$$8^{\otimes -\frac{1}{4}} = -\frac{1}{4} \times 8 = -2 = 2^{\otimes -1}$$

3.1.1 Notasi

Pertama-tama, untuk menekankan analogi dengan kalkulus konvensional, max dinotasikan $\oplus$, dan + dinotasikan $\otimes$. Diperkenalkan simbol / pada notasi konvensional (invers pada operasi + yang mana merupakan aturan perkalian, yaitu, "pembagi"). Karenanya a / b berarti $a - b$. Notasi lain untuk a / b adalah menampilkan suatu notasi

$$\frac{a}{b}$$

Untuk menghilangkan tanda $\otimes$, agar tidak menyebabkan kebingungan. Untuk mencegah kesalahan, gunakan ε dan e untuk "nol" dan "satu", yaitu, elemen-elemen netral dari $\oplus$ dan $\otimes$, masing-masing, yaitu $-\infty$ dan 0. Untuk memperkenalkan pada pembaca dengan notasi baru, diberikan tabel berikut:

Notasi R_{max}	Notasi Konvensional	=
$4 \oplus 7$	max(4, 7)	7
$1 \oplus 2 \oplus 3 \oplus 4 \oplus 5$	max(1, 2, 3, 4, 5)	5
$4 \otimes 5$	4 + 5	9
$4 \oplus \varepsilon$	max(4, $-\infty$)	4
$\varepsilon \otimes 4$	$-\infty + 4$	$-\infty$
$(-5) \otimes 2$	$-5 + 2$	-3

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$e \otimes 5$	0 + 5	5
$3^{\otimes 2} = 2^{\otimes 3} = 3 \otimes 3 = 2 \otimes 2 \otimes 2$	3 x 2 = 2 x 3 = 3 + 3 = 2 + 2 + 2	6
$e^{\otimes 2} = 2^{\otimes 0}$	0 x 2 = 2 x 0	0
$(4 \otimes 7) / (4 \oplus 7)$	(4 + 7) – max(4, 7)	4
$(2 \oplus 3)^{\otimes 3} = 2^{\otimes 3} \oplus 3^{\otimes 3}$	3 x max(2, 3) = max(3 x 2, 3 x 3)	9
$8/e$	8 – 0	8
$e/5$	0 – 5	– 5
$\sqrt[2]{14}$	14/2	7
$\sqrt[5]{25}$	25/5	5

Tabel 3.1 Notasi $R_{\max}$ dan Notasi Konvensional

Di bawah ini diberikan beberapa sifat-sifat dari Aljabar *Max-plus*.

3.2 Aljabar *Max-plus* dan Sifat-sifatnya

Pada bagian ini akan memperkenalkan aljabar *max-plus* dan sifat-sifatnya, mulai dari memberikan bukti dari sifat-sifat aljabar max-plus kemudian memberikan contoh pada tiap-tiap sifatnya.

R_{max} dengan operasi $\oplus$ (R_{max}, $\oplus$), memenuhi sifat-sifat sebagai berikut:

Lemma 3.1

R_{max} memiliki sifat assosiatif pada operasi $\oplus$:

$$\forall x, y, z \in R_{max}: \ x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$$

(Farlow, 2009: 8).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Bukti

$\forall x, y, z \in R_{max}$

$$x \oplus (y \oplus z) = x \oplus \max(y, z) \text{ ... definisi (1.1)}$$

$$= \max(x, \max(y, z))$$

$$= \max(x, y, z)$$

$$= \max(\max(x, y), z)$$

$$= \max(x, y) \oplus z$$

$$= (x \oplus y) \oplus z$$

Jadi, $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$

Contoh:

$$1 \oplus (2 \oplus 3) = (1 \oplus 2) \oplus 3$$

$$1 \oplus \max(2, 3) = \max(1, 2) \oplus 3$$

$$1 \oplus 3 = 2 \oplus 3$$

$$\max(1, 3) = \max(2, 3)$$

$$3 = 3$$

Jadi, $1 \oplus (2 \oplus 3) = (1 \oplus 2) \oplus 3 = 3$

Lemma 3.2

R_{max} memiliki sifat komutatif pada operasi $\oplus$:

$$\forall x, y \in R_{max}: \ x \oplus y = y \oplus x$$

(Farlow, 2009: 8).

Bukti

$\forall x, y \in R_{max}$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$x \oplus y = \max\ (x, y) \text{ ... definisi (1.1)}$$

$$= \max\ (y, x) \text{ ... sifat komutatif}$$

$$= y \oplus x$$

Jadi, $x \oplus y = y \oplus x$

Contoh:

$$4 \oplus 5 = 5 \oplus 4$$

$$\max\ (4, 5) = \max\ (5, 4)$$

$$5 = 5$$

Jadi, $4 \oplus 5 = 5 \oplus 4 = 5$

Lemma 3.3

Terdapat elemen identitas terhadap $\oplus$:

$\forall x \in R_{max}\ \exists \varepsilon \in R_{max}$, sehingga $x \oplus \varepsilon = \varepsilon \oplus x = x$

(Farlow, 2009: 8).

Bukti

$\forall x \in R_{max}$

$x \oplus \varepsilon = \max\ (x, -\infty)$ ... sifat perluasan operasi untuk $-\infty$

$= x$

$\varepsilon \oplus x = \max\ (-\infty, x)$ ... sifat perluasan operasi untuk $-\infty$

$= x$

Jadi, $x \oplus \varepsilon = \varepsilon \oplus x = x$

Contoh:

$$6 \oplus \varepsilon = \varepsilon \oplus 6$$

$$\max\ (6, -\infty) = \max\ (-\infty, 6)$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$6 = 6$$

Jadi, $6 \oplus \varepsilon = \varepsilon \oplus 6 = 6$

Lemma 3.4

Idempoten terhadap operasi $\oplus$:

$$\forall x \in R_{max}: \ x \oplus x = x$$

(Farlow, 2009: 8).

Bukti

$\forall x \in R_{max}$

$$x \oplus x = \max(x, x)$$
$$= x$$

Jadi, $x \oplus x = x$

Contoh:

$$7 \oplus 7 = \max(7, 7)$$
$$= 7$$

Jadi, $7 \oplus 7 = 7$

Dapat dikatakan bahwa R_{max} dengan operasi $\oplus$ (R_{max}, $\oplus$) membentuk Semi-grup Komutatif (abelian) dengan elemen identitas ε, karena memiliki sifat assosiatif, dan komutatif terhadap operasi $\oplus$, bisa disebut juga dengan monoid karena semi-grup memiliki elemen identitas terhadap operasi $\oplus$.

Selanjutnya R_{max} dengan operasi $\otimes$ (R_{max}, $\otimes$), memenuhi sifat-sifat sebagai berikut:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Lemma 3.5

R_{max} memiliki sifat assosiatif pada operasi $\otimes$:

$$\forall x, y, z \in R_{max}: \ x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z$$

(Farlow, 2009: 8).

Bukti

$\forall x, y, z \in R_{max}$

$x \otimes (y \otimes z) = x + (y + z)$... definisi (1.1)

$= (x + y) + z$ ... sifat assosiatif

$= (x \otimes y) \otimes z$

Jadi, $x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z$

Contoh:

$7 \otimes (8 \otimes 9) = (7 \otimes 8) \otimes 9$

$7 + (8 + 9) = (7 + 8) + 9$

$7 + 17 = 15 + 9$

$24 = 24$

Jadi, $7 \otimes (8 \otimes 9) = (7 \otimes 8) \otimes 9 = 24$

Lemma 3.6

R_{max} memiliki sifat komutatif pada operasi $\otimes$:

$$\forall x, y \in R_{max}: \ x \otimes y = y \otimes x$$

(Farlow, 2009: 8).

Bukti

$\forall x, y \in R_{max}$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$x \otimes y = x + y$$

$$= y + x \text{ ... sifat komutatif}$$

$$= y \otimes x$$

Jadi, $x \otimes y = y \otimes x$

Contoh:

$10 \otimes 11 = 11 \otimes 10$

$10 + 11 = 11 + 10$

$21 = 21$

Jadi, $10 \otimes 11 = 11 \otimes 10 = 21$

Lemma 3.7

Terdapat elemen identitas terhadap $\otimes$, misal e adalah identitas terhadap operasi $\otimes$:

$$\forall x \in R_{max}: \ x \otimes e = e \otimes x = x$$

(Farlow, 2009: 8).

Bukti

$\forall x \in R_{max}$

$$x \otimes e = x + 0$$

$$= x$$

$$e \otimes x = 0 + x$$

$$= x$$

Jadi, $x \otimes e = e \otimes x = x$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Contoh:

$12 \otimes e = e \otimes 12$

$12 + 0 = 0 + 12$

$12 = 12$

Jadi, $12 \otimes e = e \otimes 12 = 12$

Lemma 3.8

R_{max} memiliki invers terhadap operasi $\otimes$:

$\forall x \in R_{max}$: $x \neq \varepsilon$ terdapat $\in R_{max}$, sehingga $x \otimes y = e$

(Farlow, 2009: 8).

Bukti

$\forall x \in R_{max}$, $x \neq \varepsilon$

$x \otimes y = x + y = 0$

Sehingga $y = -x \in R_{max}$

Jadi, $x \otimes y = x + y = x + (-x) = 0 = e$

Jadi, Terbukti.

Contoh:

$13 \otimes -13 = 13 + (-13)$

$= 0$

Jadi, $13 \otimes -13 = 0$

Lemma 3.9

Elemen netral bersifat menyerap terhadap operasi $\otimes$:

$$\forall x \in R_{max}: \ x \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes x = \varepsilon$$

(Farlow, 2009: 8).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Bukti

$\forall x \in R_{max}$

$x \otimes \varepsilon = x + (-\infty)$ ... sifat perluasan operasi untuk $-\infty$

$= -\infty$

$= \varepsilon$

$\varepsilon \otimes x = (-\infty) + x$ ... sifat perluasan operasi untuk $-\infty$

$= -\infty$

$= \varepsilon$

Jadi, $x \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes x = \varepsilon$

Contoh:

$14 \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes 14$

$14 + (-\infty) = (-\infty) + 14$

$-\infty = -\infty$

$\varepsilon = \varepsilon$

Jadi, $14 \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes 14 = \varepsilon$

R_{max} dengan operasi $\otimes$ (R_{max}, $\otimes$), merupakan Semi-grup dengan elemen identitas e karena (R_{max}, $\otimes$) memiliki sifat assosiatif dan komutatif terhadap operasi $\otimes$. Membentuk grup abelian karena (R_{max}, $\otimes$) memiliki sifat assosiatif, memiliki sifat komutatif, terdapat elemen identitas, dan memiliki invers terhadap operasi $\otimes$. (R_{max}, $\otimes$) juga memiliki elemen netral yang bersifat menyerap terhadap operasi $\otimes$.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

R_{max} dengan operasi $\oplus$ dan $\otimes$ (R_{max}, $\oplus$, $\otimes$), memenuhi sifat distributif seperti berikut ini:

Teorema 3.10

Distributif operasi $\otimes$ terhadap operasi $\oplus$:

$$\forall x, y, z \in R_{max}: \ (x \oplus y) \otimes z = (x \otimes z) \oplus (y \otimes z)$$

dan

$$\forall x, y, z \in R_{max}: \ x \otimes (y \oplus z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z)$$

(Farlow, 2009: 8).

Bukti

$\forall x, y, z \in R_{max}$

$$(x \oplus y) \otimes z = \max(x, y) + z \text{ ... definisi (1.1)}$$

$$= \max(x + z, y + z) \text{ ... sifat distributif}$$

$$= (x \otimes z) \oplus (y \otimes z)$$

Jadi, $(x \oplus y) \otimes z = (x \otimes z) \oplus (y \otimes z)$

dan

$\forall x, y, z \in R_{max}$

$$x \otimes (y \oplus z) = x + \max(y, z) \text{ ... definisi (1.1)}$$

$$= \max(x + y, x + z) \text{ ... sifat distributif}$$

$$= (x \otimes y) \oplus (x \otimes z)$$

Jadi, $x \otimes (y \oplus z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z)$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Contoh:

$$(2 \oplus 3) \otimes 4 = (2 \otimes 4) \oplus (3 \otimes 4)$$

$$(2 \oplus 3) + 4 = (2 + 4) \oplus (3 + 4)$$

$$\max(2, 3) + 4 = \max\,(2 + 4, 3 + 4)$$

$$3 + 4 = \max(6, 7)$$

$$7 = 7$$

Jadi, $(2 \oplus 3) \otimes 4 = (2 \otimes 4) \oplus (3 \otimes 4) = 7$

dan

$$5 \otimes (6 \oplus 7) = (5 \otimes 6) \oplus (5 \otimes 7)$$

$$5 + (6 \oplus 7) = (5 + 6) \oplus (5 + 7)$$

$$5 + \max(6, 7) = \max(5 + 6, 5 + 7)$$

$$5 + 7 = \max(11, 12)$$

$$12 = 12$$

Jadi, $5 \otimes (6 \oplus 7) = (5 \otimes 6) \oplus (5 \otimes 7) = 12$

Berdasarkan sifat-sifat di atas, maka (R_{max}, $\oplus$, $\otimes$) disebut semi-ring, karena (R_{max}, $\oplus$) membentuk semi-grup komutatif dengan elemen netral ε, dan memiliki elemen identitas terhadap operasi $\oplus$. (R_{max}, $\otimes$) membentuk semi-grup dengan elemen identitas e (R_{max}, $\otimes$) juga memiliki elemen netral yang bersifat menyerap terhadap operasi $\otimes$, dan yang terakhir (R_{max}, $\oplus$, $\otimes$) membentuk sifat ditributif operasi $\otimes$ terhadap operasi $\oplus$.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Contoh:

Diberikan $R_{max} = R \cup \{\varepsilon\}$ dengan R adalah himpunan semua bilangan real dan $\varepsilon = -\infty$. Pada R_{max} didefinisikan operasi berikut:

$$\forall a, b \in R_{max}, a \oplus b = \max(a, b) \text{ dan } a \otimes b = a + b.$$

Misalkan $2 \oplus 1 := \max(2, 1) = 2$; $-3 \otimes 4 := -3 + 4 = 1$.

$(R_{max}, \oplus, \otimes)$ merupakan semi-ring dengan elemen netral $\varepsilon = -\infty$ dan elemen identitas $e = 0$, karena untuk setiap $a, b, c \in R_{max}$ berlaku:

1. $(R_{max}, \oplus)$ merupakan semi-grup komutatif dengan elemen netral ε

   $a \oplus b = \max(a, b) = \max(b, a) = b \oplus a$.

   $(a \oplus b) \oplus c = \max(\max(a, b), c) = \max(a, b, c) = \max(a, \max(b, c)) = a \oplus (b \oplus c)$.

   $a \oplus \varepsilon = \max(a, -\infty) = a$.

   $a \oplus a = \max(a, a) = a$.

2. $(R_{max}, \otimes)$ merupakan semi-grup dengan elemen identitas e

   $(a \otimes b) \otimes c = (a + b) + c = a + (b + c) = a \otimes (b \otimes c)$.

   $a \otimes b = a + b = b + a = b \otimes a$

   $a \otimes e = a + 0 = a = 0 + a = e \otimes a$.

   $a \otimes b = a + b = 0$, dimana $b = -a \in R_{max}$, jadi, $a \otimes b = a + (-a) = 0$

3. Elemen netral ε bersifat menyerap terhadap operasi $\otimes$

   $a \otimes \varepsilon = a + (-\infty) = -\infty = (-\infty) + a = \varepsilon \otimes a$.

4. $(R_{max}, \oplus, \otimes)$ memiliki sifat distributif $\otimes$ terhadap $\oplus$

   $(a \oplus b) \otimes c = \max(a, b) + c = \max(a+c, b+c) = (a \otimes c) \oplus (b \otimes c)$.

   $a \otimes (b \oplus c) = a + \max(b, c) = \max(a+b, a+c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Semi-ring (S, $\oplus$, $\otimes$) dikatakan semi-ring komutatif jika operasi $\otimes$ bersifat komutatif, yaitu $\forall x, y \in S, x \otimes y = y \otimes x$.

Semi-ring (S, $\oplus$, $\otimes$) dikatakan semi-ring idempoten atau dioid jika operasi $\oplus$ bersifat idempoten, yaitu $\forall a \in S, a \oplus a = a$.

Contoh 3.1:

Semi-ring (R_{max}, $\oplus$, $\otimes$) merupakan semi-ring komutatif dan semi-ring idempoten (dioid), karena untuk setiap $a, b \in R_{max}$ berlaku $a \otimes b = a + b = b + a = b \otimes a$ dan $a \oplus a = \max(a, a) = a$.

Semi-ring komutatif (S, $\oplus$, $\otimes$) dikatakan semi-field jika setiap elemen tak netralnya mempunyai invers terhadap operasi $\otimes$, yaitu $\forall a \in S\backslash\{\varepsilon\}, \exists b \in S, a \otimes b = b \otimes a = e$.

Contoh 3.2:

Semi-ring komutatif (R_{max}, $\oplus$, $\otimes$) merupakan semi-field, karena untuk setiap $a \in R$ terdapat $-a \in R$, sehingga berlaku $a \otimes (-a) = a + (-a) = 0 = e$.

Dari Contoh 3.1 dan 3.2 di atas terlihat bahwa (R_{max}, $\oplus$, $\otimes$) merupakan semi-field idempoten. $\mathcal{R}_{max}$ = (R_{max}, $\oplus$, $\otimes$) disebut dengan aljabar *max-plus*, yang selanjutnya cukup dituliskan dengan R_{max}. Elemen-elemen R_{max} akan disebut juga dengan *skalar*. Dalam hal urutan pengoperasian (jika tanda kurung tidak dituliskan), *operasi* $\otimes$ *mempunyai prioritas yang lebih tinggi dari pada operasi* $\oplus$.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

3.3 Integrasi Aljabar *Max-plus* dengan Al-Qur'an

Secara umum beberapa konsep dari disiplin ilmu telah dijelaskan dalam Al-Qur'an, salah satunya adalah matematika. Konsep dari disiplin ilmu matematika yang ada dalam Al-Qur'an di antaranya adalah masalah logika, pemodelan, statistik, teori graf, teori tentang grup dan lain-lain.

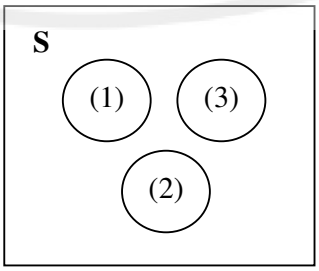
Kajian mengenai himpunan sudah ada dalam Al-Qur'an. Misalnya, kehidupan manusia yang terdiri dari berbagai macam golongan. Di mana golongan juga merupakan himpunan karena himpunan sendiri merupakan kumpulan objek-objek yang terdefinisi. Dalam Al-Qur'an surat Al-Fatihah ayat 7 disebutkan.

صِرَٰطَ ٱلَّذِينَ أَنۡعَمۡتَ عَلَيۡهِمۡ غَيۡرِ ٱلۡمَغۡضُوبِ عَلَيۡهِمۡ وَلَا ٱلضَّآلِّينَ ٧

Artinya:

"(yaitu) jalan orang-orang yang telah Engkau beri nikmat kepada mereka; bukan (jalan) mereka yang dimurkai dan bukan (pula jalan) mereka yang sesat". (Q. S. Al-Fatihah: 7)

Dalam ayat 7 surat Al-Fatihah ini dijelaskan manusia terbagi menjadi tiga kelompok, yaitu (1) kelompok yang mendapat nikmat dari Allah SWT, (2) kelompok yang dilaknat, dan (3) kelompok yang sesat (Abdussakir, 2007: 47). Seperti gambar berikut:



Gambar 3. 1 Tiga kelompok Manusia

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Berbicara tentang himpunan selain himpunan manusia, juga disebutkan dalam Al-Qur'an himpunan-himpunan yang lain. Perhatikan firman Allah SWT dalam surat Al-Faathir ayat 1.

ٱلْحَمْدُ لِلَّهِ فَاطِرِ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضِ جَاعِلِ ٱلْمَلَٰٓئِكَةِ رُسُلًا أُو۟لِىٓ أَجْنِحَةٍ مَّثْنَىٰ وَثُلَٰثَ وَرُبَٰعَ ۚ يَزِيدُ فِى ٱلْخَلْقِ مَا يَشَآءُ ۚ إِنَّ ٱللَّهَ عَلَىٰ كُلِّ شَىْءٍ قَدِيرٌ ﴿١﴾

Artinya:

"Segala puji bagi Allah Pencipta langit dan bumi, yang menjadikan Malaikat sebagai utusan-utusan (untuk mengurus berbagai macam urusan) yang mempunyai sayap, masing-masing (ada yang) dua, tiga dan empat. Allah menambahkan pada ciptaan-Nya apa yang dikehendaki-Nya. Sesungguhnya Allah Maha Kuasa atas segala sesuatu." (Q. S. Al-Faathir: 1)

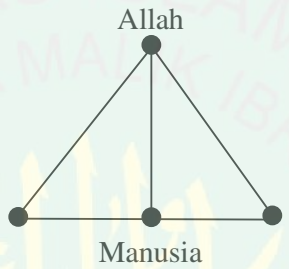
Dari tafsir Ath-Thabari "*Yang mempunyai sayap, masing-masing (ada yang) dua, tiga dan empat.*" Maksudnya, para malaikat itu memiliki sayap. Ada yang memiliki dua sayap, ada yang memiliki tiga sayap, dan ada yang memiliki empat sayap (Ath-Thabari, 2009: 474).

Dalam ayat 1 surat Al-Faathir ini dijelaskan sekelompok, segolongan atau sekumpulan makhluk yang disebut malaikat. Dalam kelompok malaikat tersebut terdapat kelompok malaikat yang mempunyai dua sayap, tiga sayap, atau empat sayap. Bahkan sangat dimungkinkan terdapat kelompok malaikat yang mempunyai lebih dari empat sayap jika allah SWT menghendaki (Abdussakir, 2007: 48).

Setelah membicarakan himpunan dalam konsep Islam, sekarang mengkaji operasi biner dalam konsep Islam. Misal * adalah operasi pada elemen-elemen S maka ia disebut biner, apabila setiap dua elemen a, $b \in S$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

maka $(a * b) \in S$. Jadi jika anggota dari himpunan S dioperasikan hasilnya juga anggota S. Dalam dunia nyata operasi biner dan sifat-sifat yang harus dipenuhi oleh grup merupakan interaksi-interaksi yang terjadi antara sesama makhluk. Jadi sekalipun makhluk-makhluk tersebut berinteraksi dengan berbagai macam pola akan tetap berada dalam himpunan tersebut yaitu himpunan ciptaanNya. Seperti pada gambar berikut:



Gambar 3. 2 Hubungan antara Manusia dengan Allah

Sistem aljabar merupakan salah satu materi pada bagian aljabar abstrak yang mengandung operasi biner. Himpunan dengan satu atau lebih operasi biner disebut sistem aljabar. Sistem aljabar dengan satu operasi biner yang memenuhi sifat-sifat tertentu yaitu tertutup, assosiatif, invers, identitas yang kemudian disebut grup. Sedangkan kajian himpunan dengan satu operasi biner dalam konsep Islam yaitu, bahwa manusia adalah diciptakan secara berpasang-pasangan. Sedangkan kajian grup dalam konsep Islam yaitu, bahwa manusia adalah diciptakan secara berpasang-pasangan. Perhatikan firman Allah SWT dalam surat Al-Faathir ayat 11.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

وَٱللَّهُ خَلَقَكُم مِّن تُرَابٍ ثُمَّ مِن نُّطْفَةٍ ثُمَّ جَعَلَكُمْ أَزْوَٰجًا ۚ وَمَا تَحْمِلُ مِنْ أُنثَىٰ وَلَا تَضَعُ إِلَّا بِعِلْمِهِۦ ۚ وَمَا يُعَمَّرُ مِن مُّعَمَّرٍ وَلَا يُنقَصُ مِنْ عُمُرِهِۦٓ إِلَّا فِى كِتَٰبٍ ۚ إِنَّ ذَٰلِكَ عَلَى ٱللَّهِ يَسِيرٌ ﴿١١﴾

Artinya:

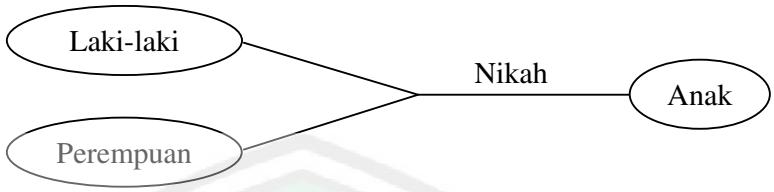
"dan Allah menciptakan kamu dari tanah kemudian dari air mani, kemudian Dia menjadikan kamu berpasangan (laki-laki dan perempuan). dan tidak ada seorang perempuanpun mengandung dan tidak (pula) melahirkan melainkan dengan sepengetahuan-Nya. dan sekali-kali tidak dipanjangkan umur seorang yang berumur panjang dan tidak pula dikurangi umurnya, melainkan (sudah ditetapkan) dalam kitab (Lauh Mahfuzh). Sesungguhnya yang demikian itu bagi Allah adalah mudah." (Q. S. Al-Faathir: 11)

Menurut tafsir Ath-Thabari, Bisyr menceritakan kepada kami, ia berkata: Yazid menceritakan kepada kami, Sa'id menceritakan kepada kami dari Qatadah, mengenai firman Allah "*Dan Allah telah menciptakan kamu dari tanah,* " ia berkata, "Maksudnya adalah Adam. 'Kemudian dari air mani." Maksudnya adalah keturunannya. "*Kemudian Dia menjadikan kamu berpasangan (laki-laki dan perempuan).*" Maksudnya adalah, Allah mengawinkan sebagian dari kalian dengan sebagian yang lain (Ath-Thabari, 2009: 499).

Dari firman di atas bahwa manusia adalah berpasang-pasangan yaitu laki-laki dengan perempuan, sehingga laki-laki dan perempuan harus berpasangan, dan dengan berpasangan (menikah) manusia dapat mengandung dan melahirkan seorang anak dan kemudian anak tersebut juga akan berpasangan dengan anak yang lain.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Seperti gambar berikut:



Gambar 3. 3 Himpunan Manusia dengan Satu Operasi Biner

(M, N) dengan M adalah himpunan manusia {laki-laki, perempuan} dan N adalah pernikahan, maksudnya adalah himpunan manusia disini, yaitu laki-laki dan perempuan jika dihubungkan dengan operasi biner N yakni pernikahan maka akan melahirkan anak kemudian akan terus berkembang, laki-laki menikah dengan perempuan maka akan memiliki anak.

Aljabar *Max-plus* yang dinotasikan dengan $\mathcal{R}_{max} = (R_{max}, \oplus, \otimes)$ merupakan salah satu struktur dalam aljabar yaitu semi-field komutatif idempotent. R_{max} merupakan himpunan $R \cup \{\varepsilon\}$, dimana R merupakan himpunan bilangan real, dengan $\varepsilon = -\infty$, sedangkan operasi $\oplus$ menyatakan maksimal dan $\otimes$ menyatakan penjumlahan normal bilangan real. Jika dikaitkan dengan konsep Islam. Seperti dijelaskan dalam firman Allah SWT dalam surat An-Nisaa' ayat 23.

حُرِّمَتْ عَلَيْكُمْ أُمَّهَٰتُكُمْ وَبَنَاتُكُمْ وَأَخَوَٰتُكُمْ وَعَمَّٰتُكُمْ وَخَٰلَٰتُكُمْ وَبَنَاتُ
ٱلْأَخِ وَبَنَاتُ ٱلْأُخْتِ وَأُمَّهَٰتُكُمُ ٱلَّٰتِىٓ أَرْضَعْنَكُمْ وَأَخَوَٰتُكُم مِّنَ
ٱلرَّضَٰعَةِ وَأُمَّهَٰتُ نِسَآئِكُمْ وَرَبَٰٓئِبُكُمُ ٱلَّٰتِى فِى حُجُورِكُم مِّن نِّسَآئِكُمُ
ٱلَّٰتِى دَخَلْتُم بِهِنَّ فَإِن لَّمْ تَكُونُوا۟ دَخَلْتُم بِهِنَّ فَلَا جُنَاحَ عَلَيْكُمْ وَحَلَٰٓئِلُ

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

أَبۡنَآئِكُمُ ٱلَّذِينَ مِنۡ أَصۡلَٰبِكُمۡ وَأَن تَجۡمَعُواْ بَيۡنَ ٱلۡأُخۡتَيۡنِ إِلَّا مَا قَدۡ سَلَفَۗ إِنَّ ٱللَّهَ كَانَ غَفُورٗا رَّحِيمٗا ٢٣

Artinya:

"diharamkan atas kamu (mengawini) ibu-ibumu; anak-anakmu yang perempuan; saudara-saudaramu yang perempuan, saudara-saudara bapakmu yang perempuan; saudara-saudara ibumu yang perempuan; anak-anak perempuan dari saudara-saudaramu yang laki-laki; anak-anak perempuan dari saudara-saudaramu yang perempuan; ibu-ibumu yang menyusui kamu; saudara perempuan sepersusuan; ibu-ibu isterimu (mertua); anak-anak isterimu yang dalam pemeliharaanmu dari isteri yang telah kamu campuri, tetapi jika kamu belum campur dengan isterimu itu (dan sudah kamu ceraikan), Maka tidak berdosa kamu mengawininya; (dan diharamkan bagimu) isteri-isteri anak kandungmu (menantu); dan menghimpunkan (dalam perkawinan) dua perempuan yang bersaudara, kecuali yang telah terjadi pada masa lampau; Sesungguhnya Allah Maha Pengampun lagi Maha Penyayang." (Q. S. An-Nisaa': 23)

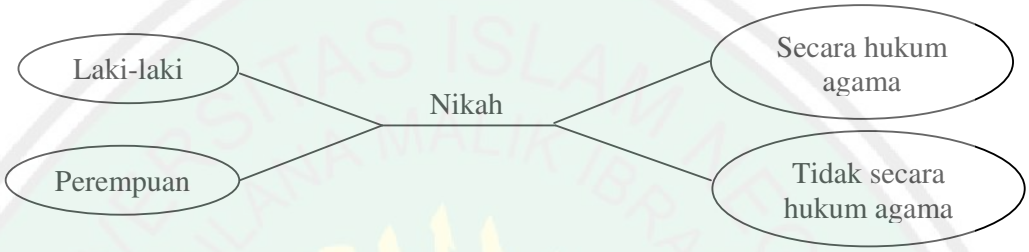
Menurut tafsir Ath-Thabari, "diceritakan oleh Abu Kuraib kepada kami, ia berkata: Ibnu Abi Zaidah menceritakan kepada kami dari Ats-Tsauri, dari A'masy, dari Ismail bin Raja, dari Umair (mantan budak Ibnu Abbas), dari Ibnu Abbas, ia berkata, "Diharamkan sebab keturunan tujuh (orang) dan sebab perkawinan tujuh (orang). Allah berfirman, 'Diharamkan atas kamu (mengawini) ibu-ibumu', sampai kepada (tentang) firman Allah 'Dn menghimpunkan (dalam perkawinan) dua perempuan yang bersaudara, kecuali yang telah terjadi pada masa lampau'. Ketujuh orang itu (dijelaskan) dalam firman Allah, 'Dan janganlah kamu kawini wanita-wanita yang telah dikawini oleh ayahmu' (Ath-Thabari, 2009: 678).

Maka dari firman di atas bahwa manusia adalah berpasang-pasangan antara laki-laki dan perempuan dengan menikah. Akan tetapi cara menikah

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

dengan pasangannya, harus secara hukum agama dan apabila tidak sesuai dengan hukum agama, maka diharamkan bagi kedua pasangan yang akan menikah. Padahal tujuan dalam pernikahan tersebut adalah agar halal. Jadi menikahlah dengan pasangan kamu sesuai dengan hukum agama.

Seperti gambar berikut:



Gambar 3. 4 Himpunan Manusia dengan Dua Operasi Biner

(*M,N,H*), dengan *M* adalah himpunan manusia {laki-laki, perempuan}, *N* adalah pernikahan, dan *H* adalah hukum agama. Ketika laki-laki dan perempuan dioperasikan pada operasi pertama yakni *N* (pernikahan) maka akan melahirkan anak dan berkembang, sedangkan himpunan manusia *M* jika dioperasikan terhadap operasi kedua yakni *H* (hukum islam) maka akan sah secara hukum islam, jika tidak secara hukum islam maka tidak sah.

Kajian surat tentang terapan Aljabar *Max-plus* dengan ayat dalam Al-Qur'an terdapat dalam Firman Allah SWT dalam surat Al-Maidah ayat 2:

يَٰٓأَيُّهَا ٱلَّذِينَ ءَامَنُواْ لَا تُحِلُّواْ شَعَٰٓئِرَ ٱللَّهِ وَلَا ٱلشَّهۡرَ ٱلۡحَرَامَ وَلَا ٱلۡهَدۡيَ وَلَا ٱلۡقَلَٰٓئِدَ
وَلَآ ءَآمِّينَ ٱلۡبَيۡتَ ٱلۡحَرَامَ يَبۡتَغُونَ فَضۡلٗا مِّن رَّبِّهِمۡ وَرِضۡوَٰنٗاۚ وَإِذَا حَلَلۡتُمۡ
فَٱصۡطَادُواْۚ وَلَا يَجۡرِمَنَّكُمۡ شَنَـَٔانُ قَوۡمٍ أَن صَدُّوكُمۡ عَنِ ٱلۡمَسۡجِدِ ٱلۡحَرَامِ أَن

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

تَعۡتَدُواْۘ وَتَعَاوَنُواْ عَلَى ٱلۡبِرِّ وَٱلتَّقۡوَىٰۖ وَلَا تَعَاوَنُواْ عَلَى ٱلۡإِثۡمِ وَٱلۡعُدۡوَٰنِۚ وَٱتَّقُواْ ٱللَّهَۖ إِنَّ ٱللَّهَ شَدِيدُ ٱلۡعِقَابِ ٢

Artinya:

"Hai orang-orang yang beriman, janganlah kamu melanggar syi'ar-syi'ar Allah, dan jangan melanggar kehormatan bulan-bulan haram, jangan (mengganggu) binatang-binatang had-ya, dan binatang-binatang qalaa-id, dan jangan (pula) mengganggu orang-orang yang mengunjungi Baitullah sedang mereka mencari kurnia dan keredhaan dari Tuhannya dan apabila kamu telah menyelesaikan ibadah haji, maka bolehlah berburu. Dan janganlah sekali-kali kebencian(mu) kepada sesuatu kaum karena mereka menghalang-halangi kamu dari Masjidilharam, mendorongmu berbuat aniaya (kepada mereka). Dan tolong-menolonglah kamu dalam (mengerjakan) kebajikan dan takwa, dan jangan tolong-menolong dalam berbuat dosa dan pelanggaran. Dan bertakwalah kamu kepada Allah, sesungguhnya Allah amat berat siksa-Nya."

Firman Allah ini terputus/terpisah dari firman Allah sebelumnya. Perintah untuk saling tolong-menolong dalam mengerjakan kebajikan dan takwa ini merupakan perintah bagi seluruh manusia. Yakni, hendaklah sebagian kalian menolong sebagian yang lain. Berusahalah untuk mengerjakan apa yang Allah perintahkan dan menerapkannya. Jauhilah apa yang Allah larang dan hindarilah (Al-Qurthubi, 2008: 114).

Jadi dengan adanya penelitian ini diharapkan mampu membantu dan menolong pembaca dalam mengkaji tentang Aljabar *Max-plus* dan sifat-sifatnya, bisa juga sebagai bahan ajar yang mempelajari Aljabar *Max-plus* yang sebelumnya belum pernah diajarkan di bangku kuliah, dan dapat dijadikan referensi untuk penelitian selanjutnya.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Dari uraian dalam BAB III dapat disimpulkan bahwa aljabar max-plus R_{max} merupakan semi-field idempoten, Aljabar *max-plus* adalah himpunan $R \cup \{-\infty\}$, dengan R himpunan semua bilangan real yang dilengkapi dengan operasi maksimum, dinotasikan dengan $\oplus$ dan operasi penjumlahan, yang dinotasikan dengan $\otimes$. Selanjutnya $(R_{max},\oplus,\otimes)$ dinotasikan dengan R_{max} dan $\{-\infty\}$ dinotasikan dengan ε. Elemen ε merupakan elemen netral terhadap operasi $\oplus$ dan 0 merupakan elemen identitas terhadap operasi $\otimes$.

$(R_{max},\oplus,\otimes)$ merupakan semi-ring dengan elemen netral $\varepsilon = -\infty$ dan elemen satuan $e = 0$, karena untuk setiap a, b, $c \in R_{max}$ berlaku sifat-sifat berikut:

i. Assosiatif terhadap operasi $\oplus$:

$$\forall x, y, z \in R_{max}: \ x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$$

ii. Komutatif terhadap operasi $\oplus$:

$$\forall x, y, z \in R_{max}: \ x \oplus y = y \oplus x$$

iii. Terdapat elemen identitas terhadap $\oplus$:

$$\forall x \in R_{max}: \ x \oplus \varepsilon = \varepsilon \oplus x = x$$

iv. Idempoten terhadap operasi $\oplus$:

$$\forall x \in R_{max}: \ x \oplus x = x$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

(R_{max}, $\oplus$) membentuk semi-grup komutatif dengan elemen identitas ε.

v. Assosiatif terhadap operasi $\otimes$:

$$\forall x, y, z \in R_{max}: \ x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z$$

vi. Komutatif terhadap operasi $\otimes$:

$$\forall x, y, z \in R_{max}: \ x \otimes y = y \otimes x$$

vii. Terdapat elemen identitas terhadap $\otimes$:

$$\forall x \in R_{max}: \ x \otimes e = e \otimes x = x$$

viii. Invers terhadap operasi $\otimes$:

$$\forall x \in R_{max}: \ x \neq \varepsilon \text{ terdapat } y \in R_{max} \text{ sehingga } x \otimes y = e$$

ix. Elemen netral bersifat menyerap terhadap operasi $\otimes$:

$$\forall x \in R_{max}: \ x \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes x = \varepsilon$$

(R_{max}, $\otimes$) membentuk grup abelian dengan elemen identitas e, dan memiliki elemen netral ε yang bersifat menyerap terhadap operasi $\otimes$.

x. Distributif operasi $\otimes$ terhadap operasi $\oplus$:

$$\forall x, y, z \in R_{max}: \ x \otimes (y \oplus z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z)$$

(R_{max}, $\oplus$, $\otimes$) disebut semi-ring, semi-ring R_{max} merupakan semi-ring komutatif dan semi-ring idempoten jika operasi $\oplus$ bersifat idempoten, dan semi-ring komutatif R_{max} merupakan semi-field jika setiap elemen tak netralnya mempunyai invers terhadap operasi $\otimes$. Maka, terlihat bahwa (R_{max}, $\oplus$, $\otimes$) merupakan semi-field idempoten. $\mathcal{R}_{max}$ = (R_{max},$\oplus$,$\otimes$) disebut dengan aljabar *max-plus*, yang selanjutnya cukup dituliskan dengan R_{max}.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

4.2 Saran

Pada skripsi ini, penulis hanya memfokuskan pada pokok bahasan masalah aljabar *max-plus* dan sifat-sifatnya. Maka disarankan kepada peneliti selanjutnya untuk membahas tentang aljabar *max-plus* pada matrik, pada fungsi skalar, pada masalah nilai eigen dan vektor eigen, dan lain-lain. Aljabar *max-plus* memiliki peranan yang sangat banyak dalam menyelesaikan persoalan di beberapa bidang seperti teori graf, fuzzy, kombinatorika, teori sistem, teori antrian dan proses stokastik. Karena penelitian ini adalah aljabar *max-plus*, maka bisa diteliti pula tentang aljabar *min-plus*.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir. 2007. *Ketika Kiai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press.

Al-Jazairi, Syaikh Abu Bakar Jabir. 2009. *Tafsir Al-Qur'an dan Al-Aisar Jilid 7*. Jakarta: Darus Sunnah.

Al-Qurthubi, Syaikh Imam. 2008. *Tafsir Al-Qurthubi Jilid 7*. Jakarta: Pustaka Azzam.

_____, Syaikh Imam. 2008. *Tafsir Al-Qurthubi Jilid 11*. Jakarta: Pustaka Azzam.

Anonim. 2011. *http://en.wikipedia.org/wiki/matematika*. (diunduh pada tanggal 28 November 2011).

Ath-Thabari. 2009. *Jami' Al Bayan an Ta'wil Ayi Al Qur'an Jilid 6*. Jakarta: Pustaka Azzam.

_____. 2009. *Jami' Al Bayan an Ta'wil Ayi Al Qur'an Jilid 12*. Jakarta: Pustaka Azzam.

_____. 2009. *Jami' Al Bayan an Ta'wil Ayi Al Qur'an Jilid 13*. Jakarta: Pustaka Azzam.

_____. 2009. *Jami' Al Bayan an Ta'wil Ayi Al Qur'an Jilid 21*. Jakarta: Pustaka Azzam.

Arifin, Achmad. 2000. *Aljabar*. Bandung: ITB Bandung.

Baccelli, Francois., dkk. 2001. *Synchronization and Linearity, An Algebra for Discrete Event Systems*. Paris: INDRIA.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Bhattacharya, P, B, dkk. 1994. *Basic Abstract Algebra*. New York: Cambridge University Press.

Dummit, David S dan Foote, Richard M. 1991. *Abstract Algebra*. New York: Prentice Hall International, Inc.

Durbin, John R. 1992. *Modern Algebra an Introduction third edition.* New York: John Willey & Sons, Inc.

Farlow, Kasie G. 2009. *Max-plus Algebra*. Virginia: Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University.

Fraleigh J. B., 1994, *A First Course in Abstract Algebra*. United States: Addison-Wesley Publishing Company inc.

Heidergott, Bernd. 2007. *Max Plus Algebra and Queues*. Amsterdam: Vrije Universiteit.

Heidergott, Bernd. 2005. *Max Plus at Work*. Amsterdam: Princeton University Press.

Kandasamy, W. B. Vasantha. 2002. *Smarandache Semirings, Semifields, and Semivector spaces*. Rehoboth: American Research Press.

Raisinghania, M, D dan Anggarwal, R, S. 1980. *Modern Algebra*. New Delhi: Ram Nagar.

Rudhito, M. Andy. 2004. *Semimodul atas Aljabar Max-plus.* Yogyakarta: Universitas Sanata Dharma.

Sukirman. 2005. *Pengantar Aljabar Abstrak*. Malang: UM Press.

Whitelaw, T, A. 1995. *Introduction to Abstract Algebra.* New York: Blackle Academic & Professional.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

KEMENTRIAN AGAMA
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Malang 65144 Telp. / Fax. (0341) 558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Abdul Majid
NIM : 07610066
Fakultas : Sains danTeknologi
Jurusan : Matematika
Judul Skripsi : Aljabar Max-plus dan Sifat-sifatnya
Pembimbing I : Mohammad Jamhuri, M.Si
Pembimbing II : Achmad Nashichuddin, M.A

No.	Tanggal	Materi	Ttd. Pembimbing	
1.	30 Mei 2011	Konsultasi BAB I	1.	
2.	13 Juni 2011	Konsultasi BAB I, II	2.	
3.		Konsultasi Agama BAB I		3.
4.	17 Juni 2011	Konsultasi BAB I, II	4.	
5.	18 Juni 2011	Konsultasi Agama BAB I, II		5.
6.	30 Juni 2011	Konsultasi BAB I, II	6.	
7.	04 Juli 2011	Konsultasi BAB II	7.	
8.		Konsultasi Agama BAB I, II		8.
9.	23 Desember 2011	Konsultasi BAB I, II, III	9.	
10.	28 Desember 2011	Konsultasi Agama BAB I, II		10.
11.	03 Januari 2012	Konsultasi BAB III, IV	11.	
12.	09 Januari 2012	Konsultasi Agama BAB II, III		12.
13.	11 Januari 2012	Konsultasi BAB III, IV	13.	

Malang, 12 Januari 2012
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 1975 1006 200312 1 001

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG