PERSEKITARAN DAN INTERIOR PADA TOPOLOGI FUZZY

SKRIPSI

oleh:
RAKHMAD YANUARDI
NIM. 07610034

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2011

PERSEKITARAN DAN INTERIOR PADA TOPOLOGI FUZZY

SKRIPSI

Diajukan kepada:
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
RAKHMAD YANUARDI
NIM. 07610034

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2011

PERSEKITARAN DAN INTERIOR PADA TOPOLOGI FUZZY

SKRIPSI

Oleh:

RAKHMAD YANUARDI

NIM. 07610034

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji:

Tanggal: 13 Agustus 2011

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Hairur Rahman, M.Si	Ach. Nasichuddin, M.A
NIP. 19800429 200604 1 003	NIP. 19730705 200031 1 002

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP.19751006 200312 1 001

PERSEKITARAN DAN INTERIOR PADA TOPOLOGI FUZZY

SKRIPSI

oleh:
RAKHMAD YANUARDI
NIM. 07610034

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan Untuk
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal: 12 September 2011

Susunan Dewan Penguji		**Tanda Tangan**
1. **Penguji Utama**	: **Drs. H. Turmudi, M.Si** **NIP. 19571005 198203 1 006**	( )
2. **Ketua Penguji**	: **Abdussakir, M.Pd** **NIP. 19751006 200312 1 001**	( )
3. **Sekretaris Penguji**	: **Hairur Rahman, M.Si** **NIP. 19800429 200604 1 003**	( )
4. **Anggota Penguji**	: **Ach. Nasichuddin, M.A** **NIP. 19730705200031 1 002**	( )

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

Motto

Kesuksesan sejati akan datang pada orang-orang yang berani mengatakan TIDAK pada kata "Menyerah"

HALAMAN PERSEMBAHAN

PENULIS PERSEMBAHKAN KARYA KECIL INI KEPADA :

KEDUA ORANG TUA YANG TIADA LETIH MEMBERI LIMPAHAN KASIH SAYANG, DO'A, NASEHAT SERTA BIMBINGAN.

ADIK-ADIK TERCINTA (HARI PRASETYO, MIRA NOVITASARI, HARIS ANDRIANTO, MEIRIANA ANDRIANI) YANG TELAH MEMBERIKAN DOA DAN SEMANGAT DALAM MENITI JALAN PANJANG KEHIDUPAN TUK MERAIH SEGALA ASA HINGGA SAMPAI PADA GERBANG MASA DEPAN YANG CERAH

ADINDA IIN TERSAYANG YANG SELALU MENDOAKAN DAN MEMOTIVASI HINGGA TERSELESAIKANNYA SKRIPSI INI

RIANG FAUZI, DEFIT SETIAWAN, OKI WIDYA GUSTI, ALFI SAYYIDATIL YOU ARE MY BEST FRIEND

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Rakhmad Yanuardi
NIM	: 07610034
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambil alihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 19 September 2011
Yang membuat pernyataan

Rakhmad Yanuardi
NIM. 07610034

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Segala puji bagi Allah SWT, atas segala petunjuk, rahmat, hidayah serta karunia-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi dengan judul **"Persekitaran dan Interior pada Topologi Fuzzy".**

Penulis menyadari bahwa banyak pihak yang telah berpartisipasi dan membantu dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Untuk itu iringan do'a dan ucapan terima kasih yang tak terhingga penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU., D.Sc, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M. Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Hairur Rahman, M.Si, selaku Dosen Pembimbing Matematika, atas bimbingan, bantuan, dan kesabarannya sehingga penulisan skripsi ini dapat diselesaikan.
5. Ach. Nasichuddin, M.A, selaku Dosen Pembimbing Agama yang telah memberikan bimbingan kepada penulis hingga terselesaikannya skripsi ini.
6. Seluruh Dosen Jurusan MatematikaFakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang beserta stafnya atas ilmu dan pengalaman yang diberikan.

7. Ustadz dan guru-guru yang senantiasa mendo’akan dan memberikan ilmunya.
8. Ibu, Ayah dan adik-adik tercinta serta seluruh keluarga yang dengan sepenuh hati memberikan dukungan moril maupun spiritual serta ketulusan do’anya sehingga penulisan skripsi ini dapat diselesaikan.
9. Teman-teman matematika angkatan 2007 yang telah memberikan bantuan, semangat, dorongan dan kebersamaan selama kuliah di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
10. Semua pihak yang telah berjasa dalam membantu penyusunan skripsi ini.

Akhirnya dengan segala bentuk kekurangan dan kesalahan, penulis berharap semoga dengan rahmat dan izin-Nya mudah-mudahan skripsi ini bermanfaat bagi penulis khususnya dan bagi pihak-pihak yang bersangkutan.

Wassalamu’alaikum Wr. Wb.

Malang, Agustus 2011

Penulis

DAFTAR ISI

BAB II KAJIAN TEORI

BAB III PEMBAHASAN

BAB IV PENUTUP

DAFTAR PUSTAKA

ABSTRAK

Yanuardi, Rakhmad. Persekitaran dan Interior pada Topologi Fuzzy. Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing : (I) Hairur Rahman, M.Si.
(II) A. Nasichuddin, M.A.

Kata kunci : topologi fuzzy, topologi,fuzzy, persekitaran, interior.

Logika fuzzy merupakan peningkatan dari logika boolean. Logika boolean menyatakan bahwa segala sesuatu hanya dapat diekspresikan dalam dwinilai, yaitu 0 dan 1, sedangkan dalam logika fuzzy nilai keanggotaan terletak pada interval 0 sampai 1. Selain logika, dalam matematika juga mempelajari konsep topologi. Kajian topologi ini dikembangkan dengan menggunakan konsep teori himpunan dengan memperhatikan himpunan titik-titik dan keluarga himpunan-himpunan.

Topologi fuzzy adalah satu diantara disiplin pokok dari matematika fuzzy yang memiliki pengembangan telah distimulasi dari awal penemuan fuzzy. Dengan topologi dibangun konsep melalui definisi dan teorema. Masalah yang dikaji dalam Skripsi ini adalah persekitaran dan interior pada topologi fuzzy.

Suatu topologi fuzzy pada X adalah suatu keluarga $\mathcal{FT}$ dari himpunan-himpunan bagian fuzzy pada X yang memenuhi kondisi-kondisi berikut:

(i) $\chi_\emptyset, \chi_X \in \mathcal{FT}$.

(ii) Jika $\tilde{A}, \tilde{B} \in \mathcal{FT}$, maka $\tilde{A} \cap \tilde{B} \in \mathcal{FT}$.

(iii) Jika $\tilde{A}_i \in \mathcal{FT}$ untuk setiap $i \in I$, maka $\bigcup_{i\in I} \tilde{A}_i \in \mathcal{FT}$, dimana I adalah suatu himpunan indeks.

Suatu himpunan bagian fuzzy $\tilde{Y}$ pada X adalah suatu persekitaran pada suatu himpunan bagian fuzzy pada $\tilde{A}$ jika ada suatu himpunan bagian fuzzy terbuka $\tilde{U}$ pada X sehingga $\tilde{A} \subseteq \tilde{U} \subseteq \tilde{Y}$.

$\tilde{B}$ disebut suatu himpunan bagian fuzzy interior pada $\tilde{A}$ jika $\tilde{A}$ adalah suatu persekitaran pada $\tilde{B}$. Gabungan dari semua himpunan bagian fuzzy interior pada $\tilde{A}$ disebut interior dari $\tilde{A}$ dan dinotasikan dengan $\tilde{A}^{\circ}$.

Penelitian selanjutnya dapat mengembangkan topologi-topologi yang dikaitkan dengan logika fuzzy, misalnya fungsi kontinyu, kekompakan, dan keterhubungan pada topologi fuzzy beserta definisi, teorema dan buktinya.

ABSTRACT

Yanuardi, Rakhmad. Neighborhood and Interior of Fuzzy Topologi. Thesis. Mathematics Programme Faculty of Science and Technology The State of Islamic University Maulana Malik Ibrahim Malang
Promotor : (I) Hairur Rahman, M.Si.
(II) A. Nasichuddin, M.A.

Key word : fuzzy topologi, topologi, fuzzy, neighborhood, interior.

Fuzzy logic is an increase of boolean logic. Boolean logic states that anythings only can be expressed in two values, namely 0 and 1, while in fuzzy logic elemens value are in the interval 0 until 1. Beside that, there is a concept of topology in mathematics. Topology was developed using concept of set theory by considering the set of points and family of sets.

Fuzzy topology is among the fundamental disciplines of fuzzy mathematics whose development was stimulated from the very beginning of the invention of fuzzy. Topology construcs concepts through definitions and theorems. The problem studied in this thesis is neighborhood and interior on Fuzzy Topology.

A fuzzy topologi on X is a family $\mathcal{FT}$ of fuzzy subsets of X which satisfied the following conditions :

(i) $\chi_{\emptyset}, \chi_X \in \mathcal{FT}$.
(ii) If $\tilde{A}, \tilde{B} \in \mathcal{FT}$, then $\tilde{A} \cap \tilde{B} \in \mathcal{FT}$.
(iii) If $\tilde{A}_i \in \mathcal{FT}$ for each $i \in I$, maka $\bigcup_{i \in I} \tilde{A}_i \in \mathcal{FT}$, where I is an index set.

A fuzzy subset $\tilde{Y}$ of X is a neighborhood of a fuzzy subset $\tilde{A}$ if there exist an open fuzzy subset $\tilde{U}$ of X such that $\tilde{A} \subseteq \tilde{U} \subseteq \tilde{Y}$.

$\tilde{B}$ is called an interior fuzzy subset of $\tilde{A}$ if $\tilde{A}$ is a neighborhood of $\tilde{B}$. The union of all interior fuzzy subsets of $\tilde{A}$ is called interior of $\tilde{A}$ and denoted $\tilde{A}^{o}$.

The next research can develop topologies associated with fuzzy logic, such as continuous functions, compactness, and connectedness in Fuzzy Topology along with definitions, theorems and proof.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Perkembangan suatu ilmu pengetahuan banyak memegang peranan penting dalam perkembangan suatu teknologi. Tanpa ilmu pengetahuan, teknologi akan sulit bisa berkembang dengan cepat. Matematika merupakan salah satu ilmu pengetahuan yang dibutuhkan masyarakat untuk menyelesaikan berbagai permasalahan dalam kehidupan sehari-hari.

Matematika sebagai bahasa simbol yang bersifat universal sangat erat hubungannya dengan kehidupan nyata. Kenyataan membuktikan bahwa untuk menyelesaikan masalah-masalah kehidupan nyata dibutuhkan metode-metode matematika. Akan tetapi pada kenyataannya banyak orang yang memandang matematika sebagai ilmu yang sulit, abstrak, teoritis, penuh dengan lambang-lambang, rumus-rumus yang rumit dan membingungkan. Padahal telah dijelaskan dalam Al-qur'an bahwa ilmu pengetahuan Allah SWT meliputi segala sesuatu yang ada di bumi dan langit. Di mana matematika juga merupakan ilmu pengetahuan Allah yang telah ditemukan oleh manusia. Yang keberadaannya tidak lain adalah untuk memenuhi kebutuhan manusia menjalani kehidupan dunia. Sesungguhnya Allah telah mengajarkan semua yang dibutuhkan oleh manusia yang kesemuanya telah terangkum dalam Al-Qur'an dan Sunnah (Izutsu, 1993)

Oleh karenanya Allah selalu memerintahkan kita untuk selalu belajar dari apa-apa yang ada di diri dan sekitar kita, sebagai mana yang diterangkan dalam surat Ar-Ruum ayat 8:

أَوَلَمْ يَتَفَكَّرُوا۟ فِىٓ أَنفُسِهِم ۗ مَّا خَلَقَ ٱللَّهُ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضَ وَمَا بَيْنَهُمَآ إِلَّا بِٱلْحَقِّ وَأَجَلٍ مُّسَمًّى ۗ
وَإِنَّ كَثِيرًا مِّنَ ٱلنَّاسِ بِلِقَآئِ رَبِّهِمْ لَكَٰفِرُونَ ﴿٨﴾

Artinya :
"Dan Mengapa mereka tidak memikirkan tentang (kejadian) diri mereka? Allah tidak menjadikan langit dan bumi dan apa yang ada diantara keduanya melainkan dengan (tujuan) yang benar dan waktu yang ditentukan. dan Sesungguhnya kebanyakan di antara manusia benar-benar ingkar akan pertemuan dengan Tuhannya".

Matematika merupakan salah satu cabang ilmu pengetahuan yang mempunyai ciri berbeda dengan disiplin yang dimiliki oleh ilmu pengetahuan lain. Hal-hal yang dipelajari dalam matematika terdiri atas beberapa kelompok ilmu, seperti: aljabar, geometri, analisis, matematika komputasi, dan matematika terapan. Banyak cabang matematika yang dulu disebut matematika murni, dikembangkan oleh beberapa beberapa matematikawan yang belajar dan mencintai matematika hanya sebagai hobi dan tidak memperdulikan fungsi dan manfaatnya. Pada kenyataannya banyak sekali cabang ilmu matematika yang dapat diterapkan dalam berbagai ilmu pengetahuan dan teknologi.
http://en.wikipedia.org/wiki/Category:Unsolved_problems_in_mathematics (diakses pada tanggal 17 april 2011).

Salah satu cabang matematika adalah tentang konsep himpunan (set). Himpunan adalah kumpulan dari objek-objek yang didefinisikan dengan jelas. Himpunan dapat mewakili sekelompok manusia tertentu, kumpulan data, kumpulan sifat-sifat tertentu, dan lainnya. Himpunan beserta operasi-operasinya dapat membantu menggambarkan bermacam-macam situasi dalam kehidupan sehari-hari. Konsep himpunan tersebut ternyata juga telah dibahas dalam Al-

Qur'an, walaupun dijelaskan secara implisit. Sebagaimana firman Allah SWT dalam Al-Qur'an surat Al-Fathir ayat 1 yang berbunyi:

ٱلْحَمْدُ لِلَّهِ فَاطِرِ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضِ جَاعِلِ ٱلْمَلَٰٓئِكَةِ رُسُلًا أُو۟لِىٓ أَجْنِحَةٍ مَّثْنَىٰ وَثُلَٰثَ وَرُبَٰعَ ۚ يَزِيدُ فِى ٱلْخَلْقِ مَا يَشَآءُ ۚ إِنَّ ٱللَّهَ عَلَىٰ كُلِّ شَىْءٍ قَدِيرٌ ﴿١﴾

Artinya:
"Segala puji bagi Allah Pencipta langit dan bumi, yang menjadikan malaikat sebagai utusan-utusan (untuk mengurus berbagai macam urusan) yang mempunyai sayap, masing-masing (ada yang) dua, tiga dan empat. Allah menambahkan pada ciptaan-Nya apa yang dikehendaki-Nya. Sesungguhnya Allah Maha Kuasa atas segala sesuatu."

Pada ayat di atas dijelaskan sekelompok makhluk yang disebut malaikat, ada yang mempunyai 2 sayap, 3 sayap atau 4 sayap, bahkan ada yang lebih. Hal ini menunjukkan bahwa para malaikat itu berbeda-beda tingkatan dan kekuatan-kekuatan mereka di sisi Allah SWT sesuai dengan kesiapan ruhani mereka masing-masing. Dalam sahih Muslim diriwayatkan dari Ibnu Mas'ud, bahwa Nabi Muhammad SAW pernah melihat Malaikat Jibril pada rupanya yang asli, dia mempunyai 600 sayap. Allah menambahi dalam menciptakan sayap-sayap sesuai dengan kehendak-Nya, sebagaimana menambahi kaki-kaki binatang sesuai dengan kehendak-Nya. Sampai kadang-kadang kaki-kaki binatang itu mencapai lebih dari 20. Jadi tak ada yang menghalangi Allah untuk melakukan sesuatu yang Dia kehendaki, karena Dia mempunyai kekuasaan dan kekuatan atas segala sesuatu (Al-Maraghi, 1992: 178)

Di dalam ayat tesebut terdapat konsep matematika yang terkandung di dalamnya yaitu kumpulan obyek-obyek yang mempunyai ciri-ciri yang sangat jelas. Inilah yang dalam matematika disebut dengan himpunan (Abdussakir, 2007 ; 108).

Salah satu pengembangan dari himpunan adalah Topologi. Awal kajian topologi dilakukan oleh Euler dan konsep topologinya sendiri diperkenalkan beberapa abad kemudian oleh B.Listing. Kajian topologi ini dikembangkan dengan menggunakan konsep teori himpunan dengan memperhatikan himpunan titik-titik dan keluarga himpunan-himpunan tersebut. Istilah topologi ini digunakan sebagai nama bidang kajiannya atau juga sebagai nama himpunan dengan sifat-sifat tertentu yang digunakan dalam ruang topologinya. Beberapa bidang bagian dari kajian topologi antara lain *point-set topology (*menyelidiki konsep persekitaran ,interior, kekompakan, keterhubungan, dan keterhitungan), topologi aljabar (menyelidiki konsep homotopi dan homologi), dan topologi geometri (menyelidiki konsep manifold).

http://en.wikipedia.org/wiki/Category:Unsolved_problems_in_mathematics (diakses pada tanggal 17 april 2011).

Dalam kondisi yang nyata, beberapa aspek dalam dunia nyata selalu atau biasanya berada diluar model matematis dan bersifat tidak pasti. Konsep ketidakpastian inilah yang menjadi konsep dasar munculnya konsep logika fuzzy. Logika fuzzy merupakan peningkatan dari logika boolean. Dimana dalam logika boolean menyatakan bahwa segala sesuatu hanya dapat diekspresikan dalam dwinilai, yaitu 0 dan 1, sedangkan dalam logika fuzzy nilai keanggotaan terletak pada interval 0 sampai 1. Pencetus gagasan logika fuzzy adalah Prof. L.A. Zadeh (1965) dari California University. Ia berpendapat bahwa logika benar dan salah dari logika boolean tidak dapat mengatasi masalah gradasi yang berada pada dunia nyata. Tidak seperti logika boolean, logika fuzzy mempunyai nilai yang kontinu. Logika fuzzy dinyatakan dalam derajat dari suatu keanggotaan dan derajat dari kebenaran. Oleh sebab itu sesuatu dapat dikatakan sebagian benar dan sebagian salah pada waktu yang sama (Wang, 1997:22).

Topologi fuzzy adalah satu diantara disiplin pokok dari matematika fuzzy memiliki pengembangan yang telah distimulasi dari awal penemuan fuzzy. Topologi fuzzy merupakan topologi dikembangkan dengan menggunakan konsep teori himpunan dengan memperhatikan himpunan titik-titik dan keluarga himpunan-himpunannya, di mana dalam hal ini himpunannya merupakan himpunan fuzzy.

Bidang kajian dalam topologi cukup banyak. Karena itu, harus dibuat langkah-langkah ke arah pemahaman topologi fuzzy sebagai suatu aksioma. Di sini penulis hanya akan membahas tentang persekitaran dan interior pada Topologi Fuzzy. Berdasarkan latar belakang di atas, maka penulis mengambil judul skripsi yaitu **“Persekitaran dan Interior pada Topologi Fuzzy”** .

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah dalam skripsi ini adalah bagaimana cara mendeskripsikan Persekitaran dan Interior pada Topologi Fuzzy?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan penulisan skripsi ini adalah untuk mengetahui cara mendeskripsikan Persekitaran dan Interior pada Topologi fuzzy.

1.4 Manfaat Penelitian

Penulisan skripsi ini diharapkan dapat bermanfaat terutama bagi:

1. Penulis
   a. Merupakan partisipasi penulis dalam memberikan kontribusi terhadap pengembangan keilmuan, khususnya dalam bidang matematika
   b. Sebagai tambahan informasi dan wawasan, khususnya tentang Persekitaran dan Interior pada Topologi Fuzzy.
   c. Sebagai bentuk pengembangan ilmu yang telah penulis dapatkan selama belajar di bangku kuliah
   d. Sebagai bahan referensi dalam menambah pengetahuan tentang Persekitaran dan Interior pada Topologi Fuzzy.
2. Lembaga

   Penulisan skripsi ini diharapkan dapat menambah bahan kepustakaan di lembaga khususnya di Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang sehingga dapat dijadikan sebagai sarana pengembangan wawasan keilmuan terutama bidang matematika.

3. Pembaca
    a. Sebagai wahana dalam menambah khazanah keilmuan
    b. Sebagai titik awal pembahasan yang dapat dilanjutkan atau dikembangkan.

1.5 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode penelitian kepustakaan (*library research)* atau kajian pustaka, yakni melakukan penelitian untuk memperoleh data-data dan informasi-informasi serta objek yang digunakan dalam pembahasan masalah tersebut. Studi kepustakaan merupakan penampilan argumentasi penalaran keilmuan untuk memaparkan hasil olah pikir mengenai suatu permasalahan atau topik kajian kepustakaan yang dibahas dalam penelitian ini.

Adapun langkah-langkah yang akan digunakan oleh peneliti dalam membahas penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Merumuskan masalah. Sebelum peneliti melakukan penelitian, terlebih dahulu disusun suatu rencana penelitian bermula dari suatu masalah tentang topologi fuzzy.
2. Mengumpulkan berbagai literatur pendukung, baik yang bersumber dari buku, jurnal, artikel, diktat kuliah, internet, dan lainnya yang berhubungan dengan permasalahan yang akan dibahas dalam penelitian ini.
3. Memahami dan mempelajari konsep tentang topologi fuzzy
4. Menganalisis data.

Langkah-langkah yang diambil dalam menganalisis data dalam penelitian ini adalah

a. Mendefinisikan topologi.
b. Mendefinisikan himpunan fuzzy
c. Mendefinisikan topologi fuzzy
d. Mendefinisikan persekitaran pada topologi fuzzy
e. Mendefinisikan interior pada topologi fuzzy
f. Membuktikan teorema-teorema interior dan persekitaran pada topologi fuzzy
g. Memberikan contoh-contoh.

1.6 Sistematika Penulisan

Dalam penulisan skripsi ini digunakan sistematika pembahasan yang terdiri dari empat bab. Masing-masing bab dibagi ke dalam beberapa sub bab dengan rumusan sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN

Pendahuluan meliputi: latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian dan sistematika penulisan.

BAB II KAJIAN TEORI

Bagian ini terdiri atas konsep-konsep (teori-teori) yang mendukung bagian pembahasan. Konsep-konsep tersebut antara lain membahas tentang pengertian topologi, himpunan Terbuka, himpunan tertutup, persekitaran, logika fuzzy serta konsep logika dan himpunan dalam Al-Qur'an .

BAB III PEMBAHASAN

Pembahasan berisi tentang definisi topologi fuzzy secara umum ,persekitaran dan interior pada topologi fuzzy yaitu definisi-definisi, teorema-teorema, pembuktian, dan contoh-contoh. Dalam bab ini juga dibahas Topologi Fuzzy dalam Pandangan Islam

BAB IV PENUTUP

Pada bab ini penulis memberikan kesimpulan yang diperoleh dari pembahasan yang dilengkapi dengan saran-saran yang berkaitan dengan hasil penelitian ini.

BAB II

KAJIAN TEORI

2.1. Pengertian Topologi

Dalam sub bab ini akan dibahas tentang pengertian ruang topologi pada suatu himpunan.

Definisi 2.1.1. (*Kartono dan Nurwiyati,1995:13*)

Diberikan X suatu himpunan dan $\tau \subset \mathcal{P}(X)$, dengan $\mathcal{P}(X)$ adalah himpunan kuasa dari X. τ dikatakan suatu topologi pada X jika memenuhi kondisi-kondisi

1. $\emptyset \in \tau$ dan $X \in \tau$.
2. Jika $T_1 \in \tau$ dan $T_2 \in \tau$ maka $T_1 \cap T_2 \in \tau$.
3. Jika $\{T_i\}$ i ∈ I adalah kelas sebarang (berhingga atau tak berhingga) dari anggota-anggota τ maka $\bigcup_{i \in I} T_i \in \tau$.

Dari kondisi 2 dapat diperluas, bahwa jika $T_1 \in \tau$, $T_2 \in \tau$ dan $T_3 \in \boldsymbol{\tau}$ maka $T_1 \cap T_2 \cap T_3 = T_1 \cap (T_2 \cap T_3) \in \tau$. Secara umum, dapat diperluas bahwa jika $T_1 \in \tau$, $T_2 \in \tau$,…, $T_n \in \tau$ maka $T_1 \cap T_2 \cap \ldots \cap T_n = \bigcap_{i \in I} T_i \in \tau$, dimana $i \in I$ berhingga.

Selanjutnya jika τ suatu topologi pada X maka (X, τ) dinamakan **Ruang Topologi** dan anggota-anggota dari τ dinamakan himpunan terbuka (relatif terhadap τ). Penulisan ruang topologi (X, τ) dapat ditulis ruang topologi pada X.

Contoh 2.1.2. Misalnya $X = \{p, q, r\}$, dan diberikan

$$\tau = \{\emptyset, X, \{q\}, \{p, q\}, \{q, r\}\}$$

Apakah τ adalah topologi pada X ?

Untuk membuktikan bahwa τ topologi maka harus ditunjukkan bahwa kondisi 1, 2, 3 dipenuhi, yaitu:

1. Jelas dipenuhi bahwa $\emptyset \in \tau$ dan $X \in \tau$.
2. Irisan dari sebarang anggota τ

$T_1 = \emptyset \in \tau, \quad T_2 = \{q\} \in \tau$ maka $T_1 \cap T_2 = \emptyset \in \tau$

$T_1 = \emptyset \in \tau, \quad T_2 = \{q\} \in \tau$ maka $T_1 \cap T_2 = \emptyset \in \tau$

$T_1 = \emptyset \in \tau, \quad T_2 = \{p, q\} \in \tau$ maka $T_1 \cap T_2 = \emptyset \in \tau$

$T_1 = \emptyset \in \tau, \quad T_2 = \{q, r\} \in \tau$ maka $T_1 \cap T_2 = \emptyset \in \tau$

$T_1 = X \in \tau, \quad T_2 = \{q\} \in \tau$ maka $T_1 \cap T_2 = \{q\} \in \tau$

$T_1 = X \in \tau, \quad T_2 = \{p, q\} \in \tau$ maka $T_1 \cap T_2 = \{p, q\} \in \tau$

$T_1 = X \in \tau, \quad T_2 = \{q, r\} \in \tau$ maka $T_1 \cap T_2 = \{q, r\} \in \tau$

$T_1 = \{q\} \in \tau, T_2 = \{p, q\} \in \tau$ maka $T_1 \cap T_2 = \{q\} \in \tau$

$T_1 = \{q\} \in \tau, \ T_2 = \{q, r\} \in \tau$ maka $T_1 \cap T_2 = \{q\} \in \tau$

$T_1 = \{p, q\} \in \tau, \ T_2 = \{q, r\} \in \tau$ maka $T_1 \cap T_2 = \{q\} \in \tau$

3. Gabungan dari dua sebarang anggota τ

$T_1 = \emptyset \in \tau, \quad T_2 = \{q\} \in \tau$ maka $T_1 \cap T_2 = \emptyset \in \tau$

$T_1 = \emptyset \in \tau, \quad T_2 = \{q\} \in \tau$ maka $T_1 \cup T_2 = \{q\} \in \tau$

$T_1 = \emptyset \in \tau, \quad T_2 = \{p, q\} \in \tau$ maka $T_1 \cup T_2 = \{p, q\} \in \tau$

$T_1 = \emptyset \in \tau, \quad T_2 = \{q, r\} \in \tau$ maka $T_1 \cup T_2 = \{q, r\} \in \tau$

$T_1 = X \in \tau, \quad T_2 = \{q\} \in \tau$ maka $T_1 \cup T_2 = X \in \tau$

$T_1 = X \in \tau, \quad T_2 = \{p, q\} \in \tau$ maka $T_1 \cup T_2 = X \in \tau$

$T_1 = X \in \tau, \quad T_2 = \{q, r\} \in \tau$ maka $T_1 \cup T_2 = X \in \tau$

$T_1 = \{q\} \in \tau, \ T_2 = \{p, q\} \in \tau$ maka $T_1 \cup T_2 = \{p, q\} \in \tau$

$T_1 = \{q\} \in \tau, \ T_2 = \{q, r\} \in \tau$ maka $T_1 \cup T_2 = \{q, r\} \in \tau$

$T_1 = \{p, q\} \in \tau, \ T_2 = \{q, r\} \in \tau$ maka $T_1 \cup T_2 = X \in \tau$

Gabungan dari tiga sebarang anggota τ

$T_1 = \emptyset \in \tau, T_2 = X \in \tau, T_3 = \{q\} \in \tau$ maka $T_1 \cup T_2 \cup T_3 = X \in \tau$

$T_1 = \emptyset \in \tau, T_2 = X \in \tau, T_3 = \{p, q\} \in \tau$ maka $T_1 \cup T_2 \cup T_3 = X \in \tau$

$T_1 = \emptyset \in \tau, T_2 = X \in \tau, T_3 = \{q, r\} \in \tau$ maka $T_1 \cup T_2 \cup T_3 = X \in \tau$

$T_1 = X \in \tau, T_2 = \{q\} \in \tau, T_3 = \{p, q\} \in \tau$ maka $T_1 \cup T_2 \cup T_3 = X \in \tau$

$T_1 = X \in \tau, T_2 = \{q\} \in \tau, T_3 = \{q, r\} \in \tau$ maka $T_1 \cup T_2 \cup T_3 = X \in \tau$

$T_1 = X \in \tau, T_2 = \{p, q\} \in \tau, T_3 = \{q, r\} \in \tau$ maka $T_1 \cup T_2 \cup T_3 = X \in \tau$

$T_1 = X \in \tau, T_2 = \{p, q\} \in \tau, T_3 = \{q, r\} \in \tau$ maka $T_1 \cup T_2 \cup T_3 = X \in \tau$

$T_1 = \{q\} \in \tau, \ T_2 = \{p, q\} \in \tau, \ T_3 = \{q, r\} \in \tau$ maka $T_1 \cup T_2 \cup T_3 = \{p, q, r\} = X \in \tau$

Gabungan dari empat sebarang anggota τ

$T_1 = \emptyset \in \tau, T_2 = X \in \tau, T_3 = \{q\} \in \tau, T_4 = \{p, q\} \in \tau$

maka $T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4 = X \in \tau$

$T_1 = \emptyset \in \tau, T_2 = X \in \tau, T_3 = \{q\} \in \tau, T_4 = \{q, r\} \in \tau$

maka $T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4 = X \in \tau$

$T_1 = X \in \tau, T_2 = \{q\} \in \tau, T_3 = \{p, q\} \in \tau, T_4 = \{q, r\} \in \tau$

maka $T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4 = X \in \tau$

Gabungan dari semua anggota τ

$T_1 = \emptyset \in \tau, T_2 = X \in \tau, T_3 = \{q\} \in \tau, T_4 = \{p, q\} \in \tau, T_5 = \{q, r\} \in \tau$

maka $T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4 \cup T_5 = X \in \tau$

Karena kondisi 1, 2, 3 terpenuhi maka τ merupakan topologi pada X

Definisi 2.1.3. (*Kartono dan Nurwiyati,1995:14*)

Jika $\gamma = \{\emptyset, X\}$ maka γ dinamakan Topologi Indiskrit pada X dan (X, γ) dinamakan ruang topologi indiskrit atau secara singkat dinamakan ruang indiskrit.

Definisi 2.1.4. (*Kartono dan Nurwiyati,1995:15*)

Untuk sebarang himpunan $X \neq \emptyset$ maka $D = \mathcal{P}(X)$ dinamakan Topologi Diskrit pada X dan (X, D) dinamakan ruang topologi diskrit atau secara singkat dinamakan ruang diskrit.

Definisi 2.1.5. (*Kartono dan Nurwiyati,1995:15*)

Diberikan X adalah suatu himpunan sebarang, maka $\tau = \{T \subset X \mid T = \emptyset$ atau T^c berhingga$\}$ dinamakan Topologi Kofinit.

Dengan definisi 2.1.1 akan ditunjukkan bahwa topologi Kofinit memenuhi kondisi 1, 2, 3 yaitu

1. Jelas $\emptyset \in \tau$ dan $X \in \tau$ karena $X^c = \emptyset$ berhingga.
2. Ambil $T_1 \in \tau$ dan $T_2 \in \tau$ maka T_1^c dan T_2^c berhingga. Sehingga berakibat $(T_1 \cap T_2)^c = T_1^c \cup T_2^c$ berhingga. Jadi jelas bahwa bila $T_1 \in \tau$ dan $T_2 \in \tau$ maka $T_1 \cap T_2 \in \tau$.

3. Apabila T_i^c berhingga untuk setiap i ∈ I maka $(\bigcup_{i \in I} T_i)^c = \bigcap_{i \in I} T_i^c$ berhingga. Karena $(\bigcup_{i \in I} T_i)^c$ berhingga maka $\bigcup_{i \in I} T_i \in \tau$.

Contoh 2.1.6. Diberikan topologi biasa pada garis bilangan riil R. didefinisikan

$$\boldsymbol{\mathcal{U}} = \{T \ \subset \boldsymbol{R} \mid T = \ \emptyset \ atau \ T = interval \ terbuka\}.$$

Dengan definisi 2.1.1 Akan ditunjukkan bahwa topologi usual memenuhi kondisi 1, 2, 3 yaitu

1. Jelas bahwa $\emptyset \in \boldsymbol{\mathcal{U}}.$ Selanjutnya akan diperlihatkan bahwa **R** = $\bigcup_\alpha T_\alpha$ yaitu union dari semua interval terbuka. Bila $a \in$ **R** maka terdapat α_0 sedemikian sehingga $a \in T_a$, yang berarti bahwa

$$a \in T_{\alpha_0} \cup T_{\alpha_1} \cup T_{\alpha_2} \dots$$

Karena $a \in$ **R** maka

$$\mathbf{R} \in T_{\alpha_0} \cup T_{\alpha_1} \cup T_{\alpha_2} \dots$$

Sehingga diperoleh **R** ⊂ $\bigcup_\alpha T_\alpha$. Sebaliknya jika

$$a \in T_{\alpha_0} \cup T_{\alpha_1} \cup T_{\alpha_2} \dots$$

Maka a menjadi anggota salah satu dari T_{α_0}, T_{α_1},… katakan bahwa $a \in T_{\alpha_0}$ karena $a \in T_{\alpha_0} \subset$ **R**. Sehingga diperoleh bahwa $\bigcup_\alpha T_\alpha \subset$ **R** maka disimpulkan bahwa $\mathbf{R} = \bigcup_\alpha T_\alpha$. Jadi **R** merupakan gabungan interval terbuka, yang berarti bahwa $\mathbf{R} \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$. Dengan demikian jelas bahwa $\emptyset \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$ dan $\mathbf{R} \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$.

2. Bila $T_\alpha, T_\beta \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$, yang berarti T_α, T_β interval terbuka maka irisan dari T_α dan T_β ada dua kemungkinan yaitu

$$T_\alpha \cap T_\beta = \emptyset, \text{ dan } T_\alpha \cap T_\beta \neq \emptyset$$

Sehingga jika

$$T_\alpha \cap T_\beta = \emptyset, \text{ maka } T_\alpha \cap T_\beta \in \boldsymbol{\mathcal{U}}.$$

Dan jika

$$T_\alpha \cap T_\beta \neq \emptyset \text{ maka } T_\alpha \cap T_\beta$$

Merupakan interval terbuka sehingga $T_\alpha \cap T_\beta \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$. Jadai jika $T_\alpha \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$ dan $T_\beta \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$ maka $T_\alpha \cap T_\beta \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$.

3. Jika $T_{\alpha_0} \in \boldsymbol{\mathcal{U}}, T_{\alpha_1} \in \boldsymbol{\mathcal{U}}, T_{\alpha_2} \in \boldsymbol{\mathcal{U}}, \ldots$ maka

$$T_{\alpha_0} \cup T_{\alpha_1} \cup T_{\alpha_2} \ldots$$

Jika dan hanya jika gabungan dari interval terbuka merupakan interval terbuka maka $\bigcup_\alpha T_\alpha$ adalah interval terbuka. Jadi $\bigcup_\alpha T_\alpha \in \boldsymbol{\mathcal{U}}$.

Dengan demikian jelas bahwa ketiga kondisi yaitu 1, 2, 3 terpenuhi

Dari sini dapat dijelaskan bahwa himpunan terbuka untuk topologi usual pada **R** adalah interval terbuka. Misalnya

$$T = \{x|\ a < x < b\}$$

$$T = \{x|\ a < x < b\} \cup \{x|\ c < x < d\}$$

Tetapi $\{x|\ \ a \leq x \leq b\}$, $\{x|\ \ a \leq x < b\}$, $\{x|\ \ a < x \leq b\}$ maupun singleton $\{a\}$ bukanlah merupakan himpunan terbuka untuk topologi usual pada **R.**

Sekarang akan ditinjau bagaimana interseksi (irisan) antara dua topologi serta union (gabungan) dari dua topologi.

Teorema 2.1.7. (*Kartono dan Nurwiyati,1995:18*)

Diberikan τ_1 dan τ_2 adalah topologi-topologi pada X. maka $\tau_1 \cap \tau_2$ topologi pada X.

Bukti: Akan ditunjukkan bahwa kondisi 1, 2, 3 dipenuhi.

1. Karena $\emptyset \in \tau_1$ dan $\emptyset \in \tau_2$ maka $\emptyset \in \tau_1 \cap \tau_2$ selanjutnya $X \in \tau_1$ dan $X \in \tau_2$ maka $X \in \tau_1 \cap \tau_2$.
2. Jika $T, S \in \tau_1 \cap \tau_2$ maka $T, S \in \tau_1$ dan $T, S \in \tau_2$.

   Karena τ_1 dan τ_2 topologi maka $T \cap S \in \tau_1$ dan $T \cap S \in \tau_2$ akibatnya $T \cap S \in \tau_1 \cap \tau_2$. Jadi jika $T, S \in \tau_1 \cap \tau_2$ maka $T \cap S \in \tau_1 \cap \tau_2$.
3. Jika $T, S \in \tau_1 \cap \tau_2$ maka $T, S \in \tau_1$ dan $T, S \in \tau_2$. Karena τ_1 dan τ_2 topologi maka $T \cup S \in \tau_1$ dan $T \cup S \in \tau_2$. Sehingga berakibat

$$T \cup S \in \tau_1 \cap \tau_2$$

   Jadi terbukti bahwa $\tau_1 \cap \tau_2$ adalah topologi pada X.

Teorema 2.1.8. (*Kartono dan Nurwiyati,1995:18*)

Diberikan τ_1, τ_2, …, τ_n adalah topologi-topologi pada X, maka $\bigcap_{i=1}^{n} \tau_i$ topologi pada X.

Bukti: Akan ditunjukkan bahwa kondisi 1, 2, 3 dipenuhi.

1. Karena $\emptyset \in \tau_1$, $\emptyset \in \tau_2, \dots$, $\emptyset \in \tau_n$ maka $\emptyset \in \tau_1 \cap \tau_2 \cap \dots \cap \tau_n$ selanjutnya $X \in \tau_1, X \in \tau_2, \dots, X \in \tau_n$ maka $X \in \tau_1 \cap \tau_2 \cap \dots \cap \tau_n$.
2. Jika $T, S \in \tau_1 \cap \tau_2 \cap \dots \cap \tau_n$ maka $T, S \in \tau_1$, $T, S \in \tau_2$, …, $T, S \in \tau_n$

Karena $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ topologi maka $T \cap S \in \tau_1$, $T \cap S \in \tau_2$,..., $T \cap S \in \tau_n$ akibatnya $T \cap S \in \tau_1 \cap \tau_2 \cap \dots \cap \tau_n$. Jadi jika $T, S \in \tau_1 \cap \tau_2 \cap \dots \cap \tau_n$ maka $T \cap S \in \tau_1 \cap \tau_2 \cap \dots \cap \tau_n$.

3. Jika $T, S \in \tau_1 \cap \tau_2 \cap \dots \cap \tau_n$ maka $T, S \in \tau_1$, $T, S \in \tau_2, \dots, T, S \in \tau_n$. Karena $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ topologi maka $T \cup S \in \tau_1$, $T \cup S \in \tau_2, \dots, T \cup S \in \tau_n$. Sehingga berakibat

$$T \cup S \in \tau_1 \cap \tau_2 \cap \dots \cap \tau_n$$

Jadi terbukti bahwa $\tau_1 \cap \tau_2 \cap \dots \cap \tau_n$ adalah topologi pada X.

Contoh 2.1.9. Diberikan

$\tau_1 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

$\tau_2 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}\}$

$\tau_3 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b, c\}$

adalah topologi-topologi pada $X = \{a, b, c\}$

Sehingga

$$\tau_1 \cap \tau_2 \cap \tau_3 = \{\emptyset, X, \{a\}\}$$

adalah topologi pada $X = \{a, b, c\}$.

Jika irisan merupakan topologi tetapi gabungan dari dua topologi pada umumnya belum tentu merupakan topologi.

Contoh 2.1.10.

Diberikan $\tau_1 = \{\emptyset, X, \{a\}\}$, dan $\tau_2 = \{\emptyset, X, \{b\}\}$ merupakan topologi-topologi pada $X = \{a, b, c\}$, maka $\tau_1 \cup \tau_2 = \{\emptyset, X, \{a\}, [b\}\}$ bukan merupakan topologi pada $X = \{a, b, c\}$. $\{a\} \in \tau_1 \cup \tau_2$ dan $\{b\} \in \tau_1 \cup \tau_2$, tetapi

$$\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\} \notin \tau_1 \cup \tau_2$$

Karena proposisi yang ketiga tidak dipenuhi maka $\tau_1 \cup \tau_2$ bukan merupakan topologi pada $X = \{a, b, c\}$.

Definisi 2.1.11. (*Kartono dan Nurwiyati,1995:20*)

Diberikan τ_1 dan τ_2 merupakan topologi-topologi pada himpunan $X \neq \emptyset$. Apabila setiap anggota dari τ_1 merupakan anggota dari τ_2 yaitu $\tau_1 \subset \tau_2$ maka dapat dikatakan bahwa τ_1 adalah lebih kecil atau lebih kasar daripada τ_2. Juga dapat dikatakan bahwa τ_2 adalah lebih besar atau lebih halus dari τ_1. Secara simbolik ditulis,

$$\tau_1 \leq \tau_2$$

Contoh 2.1.12.

Diberikan $\tau_1 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}\}$ dan $\tau_2 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}$ $, \{a, b, c, d\}\}$ topologi-topologi pada $X = \{a, b, c, d, e\}$. Karena $\tau_1 \subset \tau_2$ maka τ_1 lebih kasar atau lebih kecil daripada τ_2 atau dapat dikatakan bahwa τ_2 lebih halus atau lebih besar daripada τ_1, sehingga$\tau_1 \leq \tau_2$.

Definisi 2.1.13. (*Kartono dan Nurwiyati,1995:20*)

Diberikan (Y, τ) suatu ruang topologi pada X dan $A \subset X$. Jika $\tau_A = \{T \cap A \mid T \in \tau\}$ maka τ_A suatu topologi pada A dan disebut topologi relative pada A, sehingga ruang topologi (A, τ_A) dinamakan ruang bagian (X, τ).

Dengan definisi 2.1.1 akan ditunjukkan bahwa (A, τ_A) ruang bagian dari (X, τ) memenuhi kondisi 1, 2, 3 yaitu

1. Jelas bahwa $\emptyset = \emptyset \cap A$ dan $A = X \cap A$.

Karena $\emptyset \in \tau$ dan $X \in \tau$ maka $\emptyset \in \tau_A$ dan $A \in \tau_A$.

2. Sekarang ambil bahwa $U \in \tau_A$ dan $V \in \tau_A$.

   Maka terdapat $T \in \tau$ dan $S \in \tau$ sedemikian sehingga $U = T \cap A$ dan $V = S \cap A$, sehingga

$$U \cap V = T \cap A \cap S \cap A = (T \cap S) \cap A .$$

   Karena $T \cap S \in \tau$ maka jelas bahwa $U \cap V \in \tau_A$.

3. Ambil $\{U_i\}$ untuk $i \in I$ adalah kelas dari anggota-anggota τ_A. Untuk setiap $i \in I$, terdapat $T_i \in \tau$ sedemikian sehingga

$$U_i = T_i \cap A.$$

   Sehingga

$$\bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I} (T_i \cap A) = \left(\bigcup_{i \in I} T_i\right) \cap A$$

   Karena $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$ maka $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau_A$. Dengan demikian jelas τ_{A_3} dipenuhi yaitu jika $\{U_i\}_{i \in I}$, adalah kelas dari anggota-anggota τ_A maka $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau_A$.

Contoh 2.1.14.

Diberikan $\tau = \{\emptyset, X, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$ topologi pada $X = \{a, b, c\}$. Diambil $A = \{a, b\}$ sehingga jika

$T = \emptyset$ maka $\emptyset \cap A = \emptyset$

$T = X$ maka $X \cap A = \{a, b\}$.

$T = \{b\}$ maka $\{b\} \cap A = \{b\}$.

$T = \{a, b\}$ maka $\{a, b\} \cap A = \{a, b\}$.

$$T = \{b, c\} \quad \text{maka } \{b, c\} \cap A = \{b\}.$$

Sehingga $\tau_A = \{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}\}$ topologi pada $A = \{a, b\}$ dan (A, τ_A) ruang bagian dari (X, τ).

2.2. Himpunan Terbuka

Dalam sub bab ini akan dijelaskan tentang definisi himpunan terbuka disertai dengan contohnya.

Definisi 2.2.1. (*Kartono dan Nurwiyati,1995:13***)**

Untuk sebarang ruang topologi (X, τ). Anggota-anggota dari τ dikatakan **himpunan terbuka**.

Contoh 2.2.2.

Diberikan $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$ topologi pada $X = \{a, b, c, d, e\}$ sehingga himpunan bagian dari X yang terbuka adalah

$$\{\emptyset, X, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$$

2.3. Himpunan tertutup

Dalam sub bab ini akan dijelaskan tentang definisi dan teorema yang berkaitan dengan himpunan tertutup disertai dengan contohnya.

Definisi 2.2.1. (*Kartono dan Nurwiyati,1995:40*)

Diberikan (X, τ) merupakan suatu ruang topologi pada X dan himpunan $F \subset X$. $F \subset X$ himpunan tertutup jika dan hanya jika F^c himpunan terbuka.

Contoh 2.2.2.

Diberikan Interval $[a,b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x \leq b\}$ adalah himpunan tertutup karena kompemennya $(-\infty, a) \cup (b, \infty)$ terbuka pada topologi τ pada garis bilangan riil **R**. Karena gabungan dari dua interval tak berhingga yang terbuka adalah terbuka.

Contoh 2.2.3.

Diberikan $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e\}\}$ topologi pada $= \{a,b,c,d,e\}$. Karena setiap anggota dari suatu topologi merupakan himpunan terbuka maka himpunan bagian dari X yang tertutup merupakan komplemen dari setiap anggota topologi yaitu:

$$X, \emptyset, \{b,c,d,e\}, \{a,b,e\}, \{a\}$$

Contoh 2.2.4.

Jika $D = \boldsymbol{\mathcal{P}}(\boldsymbol{X})$ topologi diskrit pada X maka himpunan $A \subset X$ adalah himpunan terbuka sekaligus himpunan tertutup. Misalkan $X = (a,b,c)$, maka $D = (\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\})$. Maka himpunan bagian dari X yang tertutup merupakan komplemen dari setiap anggota topologi yaitu

$$X, \emptyset, \{a,c\}, \{a,b\}, \{c\}, \{b\}, \{a\}$$

Jadi setiap himpunan bagian dari X merupakan himpunan terbuka dan tertutup.

Teorema 2.2.5. (*Kartono dan Nurwiyati,1995:41*)

Diberikan (Y, τ) ruang topologi pada X. Irisan berhingga atau tak berhingga dari himpunan tertutup-himpunan tertutup adalah himpunan tertutup. Gabungan berhingga dari himpunan tertutup-himpunan tertutup adalah himpunan tertutup.

Bukti:

F_i himpunan tertutup, berakibat $(F_i)^c = G_i$ terbuka.

Irisan $F_1 \cap F_2 = (G_1)^c \cap (G_2)^c = (G_1 \cup G_2)^c$

Karena $G_1 \cup G_2$ terbuka maka komplemennya tertutup

Gabungan $F_1 \cup F_2 = (G_1)^c \cup (G_2)^c = (G_1 \cap G_2)^c$

Karena $G_1 \cap G_2$ terbuka maka komplemennya tertutup.

Contoh 2.2.6.

Diketahui τ merupakan topologi pada **R** yang terdiri dari R, $\emptyset$ dan interval tak berhingga terbuka

$$E_a = (-\infty, a) = \{x \mid x < a\} \text{ dan } E_b = (b, \infty) = \{x \mid x > b\}.$$

Himpunan tertutup dari topologi tersebut adalah $\emptyset, \mathbf{R}, \{x \mid x \geq a\}$ dan $\{x \mid x \leq b\})$. Jika $a < b$ maka himpunan $= \{x \mid a \leq x \leq b\}$ merupakan irisan dua himpunan tertutup adalah himpunan tertutup. Sehingga suatu singleton misalnya $\{a\}$ adalah himpunan tertutup pada topologi τ ini karena merupakan irisan dari dua himpunan tertutup$\{x \mid x \leq a\}$ dan $\{x \mid x \geq a\}$.

2.4. Persekitaran

Dalam sub bab ini akan dijelaskan tentang definisi dan teorema yang berkaitan dengan persekitaran disertai dengan contohnya.

Definisi 2.4.1. (*Kartono dan Nurwiyati,1995:43*)

Diberikan (X, τ) ruang topologi pada X. Suatu himpunan $V \subset X$ adalah persekitaran dari x (dalam topologi (X, τ)) jika terdapat suatu himpunan terbuka $U \in \tau$ sedemikian sehingga $x \in U \subset V$. Dengan demikian, $V \subset X$ adalah persekitaran dari $x \in X$ jika dan hanya jika V memuat suatu himpunan terbuka yang memuat x.

Jelas bahwa suatu himpunan terbuka yang memuat x adalah pasti merupakan persekitaran dari x. Tetapi suatu persekitaran tidak harus terbuka. Dalam bab ini , notasi $\boldsymbol{n(x)}$ menyatakan sebagai himpunan dari semua persekitaran dari x dalam ruang topologi (X, τ) yang disebut sebagai **sistem persekitaran** dari x.

Contoh 2.4.2. Pada topologi usual U pada garis bilangan riil **R**. Apakah interval-interval di bawah ini merupakan persekitaran dari 0?

i. $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

ii. (-1, 0]

iii. $\left[0, \frac{1}{2}\right)$

iv. (0, 1]

Pembahasan:

i. Karena $0 \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \subset \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ dan $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ adalah interval terbuka maka $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ adalah persekitaran dari titik 0.

ii. (-1, 0] bukan merupakan persekitaran dari titik 0 karena tidak ada interval terbuka yang memuat titik 0 sedemikian sehingga interval terbuka tersebut termuat dalam kedua interval tersebut.

iii. $\left[0, \frac{1}{2}\right)$ bukan merupakan persekitaran dari titik 0 karena tidak ada interval terbuka yang memuat titik 0 sedemikian sehingga interval terbuka tersebut termuat dalam kedua interval tersebut.

iv . karena interval (0, 1] tidak memuat titik 0, maka jelas bahwa interval (0, 1] bukan merupakan dari titik 0.

Contoh 2.4.3.

Diberikan $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, e\}\}$ topologi pada $X = \{a, b, c, d, e\}$.

Tentukan $\boldsymbol{n}(b)$?

Pembahasan :

Himpunan terbuka yang memuat b adalah : $X, \{a, b\}, \{a, b, e\}, \{a, b, c, d\}$.

Himpunan bagian dari X yang memuat X adalah X

Himpunan bagian dari X yang memuat $\{a, b\}$ adalah:

$\{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, c, e\}, \{a, b, d, e\}, X$.

Himpunan bagian dari X yang memuat $\{a, b, e\}$ adalah :

$\{a, b, e\}, \{a, b, c, e\}$,$\{a, b, d, e\}$, X.

Himpunan bagian dari X yang memuat $\{a, b, c, d\}$ adalah :$\{a, b, c, d\}$, X.

Dari sini diperoleh bahwa:

$\boldsymbol{n}(b) = \{X, \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, b, e\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, c, e\},$

$\{a, b, d, e\}\}$.

Teorema 2.4.4. (*Kartono dan Nurwiyati,1995:45*)

Diberikan (X, τ) adalah ruang topologi pada X dan $x \in X$ maka berlaku:

a. Jika $V \in \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})$ maka $x \in V$.

b. Jika $V_1 \in \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})$ dan $V_1 \subset V_2$ maka $V_2 \in \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})$.

c. Jika V_1 dan V_2 dalam $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})$ maka $V_1 \cap V_2 \in \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})$.

d. Jika $V \in \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})$ maka terdapat $W \in \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})$ sedemikian sehingga $y \in W \Rightarrow V \in \boldsymbol{n}(\boldsymbol{y})$.

Bukti :

a. Jika $V \in \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})$ maka V merupakan salah satu persekitaran dari titik x.

   Menurut definisi 2.4.1 maka terdapat $U \in \tau$ sedemikian sehingga $x \in U \subset V$.

   Dari sini jelas bahwa jika $V \in \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})$ maka $x \in V$.

b. Menurut bagian a di atas, berarti $x \in V_1$ karena $V_1 \in \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})$**.** Karena $V_1 \subset V_2$ terdapat $U_1 \in \tau$ sedemikian sehingga $x \in U_1 \subset V_1 \subset V_2$.

   Yang berarti bahwa $x \in U_1 \subset V_2$

   Sesuai dengan definisi 2.4.1, maka $V_2 \in \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})$.

c. Karena $V_1 \in \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})$ maka terdapat $U_1 \in \tau$ sedemikian sehingga $x \in U_1 \subset V_1$ ……………………………………………………….i)

Karena $V_2 \in \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})$ maka terdapat $U_2 \in \tau$ sedemikian sehingga $x \in U_2 \subset V_2$ ……………………………………………………...ii)

Dari i) dan ii) maka $x \in U_1 \cap U_2 \subset V_1 \cap V_2$.

Karena $U_1 \in \tau$ dan $U_2 \in \tau$ maka $U_1 \cap U_2 \in \tau$.

Yang berarti bahwa $V_1 \cap V_2$ adalah persekitaran dari titik x.

Dengan demikian $V_1 \cap V_2 \in \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})$.

d. Karena $V \in \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})$ maka terdapat $U \in \tau$ sedemikian sehingga $x \in U \subset V$.

Jika diambil $W = U$ dan $y \in W$ maka berlaku $y \in W \subset V$.

Yang berarti bahwa : $V \in \boldsymbol{n}(\boldsymbol{y})$.

Contoh 2.4.5. Diketahui $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c,d\}, \{a,b,c,d\}, \{a,b,e\}\}$ topologi pada $X = \{a,b,c,d,e\}$ jika $V = \{a,b\} \in \boldsymbol{n}(b)$ maka $b \in V$.

Contoh 2.4.6. Diketahui $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c,d\}, \{a,b,c,d\}, \{a,b,e\}\}$ topologi pada $X = \{a,b,c,d,e\}$ jika $V_1 = \{a,b\} \in \boldsymbol{n}(b)$ dan $V_2 = \{a,b,c\}$ maka $\{a,b,c\} \in \boldsymbol{n}(b)$.

Contoh 2.4.7. Diketahui $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c,d\}, \{a,b,c,d\}, \{a,b,e\}\}$ topologi pada $X = \{a,b,c,d,e\}$ jika $V_1 = \{a,b\} \in \boldsymbol{n}(b)$ dan $V_2 = \{a,b,c\}$ maka $\{a,b\} \cap \{a,b,c\} \in \boldsymbol{n}(b)$.

Contoh 2.4.8. Diketahui $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c,d\}, \{a,b,c,d\}, \{a,b,e\}\}$ topologi pada $X = \{a,b,c,d,e\}$. Ambil $V = \{a,b,c,d\}$ dan $W = \{a,b,d\}$.

Akan ditunjukkan bahwa jika $d \in \{a,b,d\}$ maka $V = \{a,b,c,d\} \in \boldsymbol{n}(d)$.

Sekarang menentukan $\boldsymbol{n}(d)$.

Himpunan terbuka yang memuat d adalah $X, \{a,c,d\}, \{a,b,c,d\}$.

Himpunan bagian dari X yang memuat X adalah X.

Himpunan bagian dari X yang memuat $\{a,c,d\}$ adalah $\{a,c,d\}$, $\{a,b,c,d\}, \{a,c,d,e\}, X$.

Himpunan bagian dari X yang memuat $\{a,b,c,d\}$ adalah $\{a,b,c,d\}, X$.

sehingga $\boldsymbol{n}(d) = \{X, \{a,c,d\}, \{a,b,c,d\}, \{a,c,d,e\}\}$.

Contoh 2.4.9.

Ambil a adalah bilangan riil, yang berarti $a \in \mathbf{R}$, maka setiap interval tertutup $[a-\delta, a+\delta]$, dengan pusat a adalah suatu persekitaran dari a karena interval tertutup ini memuat interval terbuka$(a-\delta, a+\delta)$ yang memuat a.

Teorema 2.4.10. (*Kartono dan Nurwiyati*,*1995:47*)

Suatu himpunan G terbuka jika dan hanya jika G merupakan persekitaran dari setiap titik yang di dalamnya.

Bukti : (syarat perlu) Misalnya G adalah himpunan terbuka, maka setiap titik $p \in G$ menjadi anggota pada himpunan terbuka G yang dalam

G yang berarti $p \in G \subset G$. Sehingga G adalah persekitaran dari setiap titik yang di dalamnya.

(syarat cukup) misalnya G adalah suatu persekitaran dari setiap titik yang didalamnya. Sehingga untuk setiap titik $p \in G$, terdapat suatu himpunan terbuka G sedemikian sehingga $p \in G_p \subset G$ sehingga diperoleh

$$G = \cup\ [\{p\} |\ p\ \in G]\ \subset [G_p |\ p\ \in G]\ \subset G$$

Yang berarti bahwa $G = \cup\ [G_p |\ p\ \in G$ dan G adalah terbuka karena gabungan dari himpunan terbuka adalah himpunan terbuka.

Contoh 2.4.11.

Diketahui $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c,d\}, \{a,b,c,d\}, \{a,b,e\}\}$ topologi pada $X = \{a,b,c,d,e\}$, jika

$$n(b) = \{X, \{a,b\}, \{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,b,e\}, \{a,b,c,d\}, \{a,b,d,e\}\}$$

Diambil $G = \{a,b\} \in \tau$. Akan ditunjukkan bahwa $G \in n(b)$ dan $G \in n(a)$. Untuk $G \in n(b)$ telah diperoleh selanjutnya akan ditunjukkan $n(a)$ yaitu himpunan terbuka yang memuat a adalah

$$(X, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c,d\}, \{a,b,c,d\}, \{a,b,c\}.$$

Melihat himpunan terbuka-himpunan terbuka yang memuat a, jelas bahwa $G \in n(a)$. Jadi jika $G = \{a,b\} \in \tau$ maka G merupakan persekitaran dari semua titik di dalamnya. Sekarang jika diambil $H = \{c,d,e\} \notin \tau$ akan diselidiki apakah H merupakan persekitaran dari semua titik di dalamnya, yang berarti bahwa

$$H \in n(c), H \in n(d), H \in n(e).$$

Himpunan terbuka yang memuat c adalah

$$(X, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}),$$

Dengan melihat himpunan terbuka yang memuat c tersebut, jelas bahwa $H \notin n(c)$. Jadi jelas bahwa H bukan merupakan persekitaran dari semua titik di dalamnya.

2.5. Interior

Dalam sub bab ini akan dijelaskan tentang definisi dan teorema yang berkaitan dengan interior disertai dengan contohnya.

Definisi 2.5.1. (*Kartono dan Nurwiyati,1995:51*)

Diberikan (X, τ) ruang topologi pada X dan $A \subset X$. Titik $x \in A$ dikatakan titik interior dari himpunan A jika x anggota dari himpunan terbuka G yang termuat di dalam A yaitu $x \in G \subset A$, dimana G terbuka.

Pandang G_x adalah himpunan terbuka pada ruang topologi (X, τ) yang memuat x dan $A \subset X$. x adalah titik interior dari A jika dan hanya jika terdapat G_x sedemikian sehingga $G_x \subset A$. Himpunan dari semua titik interior dari A dinamakan himpunan interior dari A yang diberi notasi "$\mathbf{int}(A)$"

Teorema 2.5.2. (*Kartono dan Nurwiyati,1995:52*)

Diberikan (X, τ) ruang topologi pada X dan $A \subset X$. Jika A merupakan gabungan dari semua himpunan bagian dari A yang terbuka maka

$$\operatorname{int}(A) = \bigcup_{i \in I} G_i .$$

Bukti:

Pandang $\{G_i\}$ adalah kelas dari semua himpunan bagian dari A yang terbuka. Jika $x \in \text{int}(A)$ maka terdapat himpunan bagian dari A yang terbuka, katakan G_{i_0} sedemikian sehingga $x \in G_{i_0}$ sehingga berlaku bahwa $x \in \bigcup_{i \in I} G_i$ dengan demikian berarti bahwa

$$\text{int}(A) \subset \bigcup_{i \in I} G_i \,.$$

sebaliknya jika $y \in G_i$ maka terdapat himpunan bagian dari A yang terbuka, katakan G_{i_0} sedemikian sehingga $y \in G_{i_0}$. Dengan demikian berarti bahwa $y \in \text{int}(A)$, maka berlaku bahwa

$$\bigcup_{i \in I} G_i \subset \text{int}(A)$$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa $\text{int}(A) = \bigcup_{i \in I} G_i$.

Dengan demikian interior dari A merupakan gabungan dari semua himpunan bagian dari A yang terbuka, yang berarti

$$\text{int}(A) = \cup \{G \subset X \mid G \in \tau, G \in A\}.$$

Contoh 2.5.3.

Pada ruang topologi biasa dari himpunan bilangan riil R, akan ditunjukkan bahwa $\text{int}([a,b)) = (a,b)$ jika $A = [a,b)$. Dengan demikian karena titik a bukan merupakan titik interior dari A, karena tidak dapat ditemukan G_a sedemikian sehingga $G_a \subset A$. Demikian juga untuk b, karena tidak dapat ditemukan G_b sedemikian sehingga $G_b \subset A$ jadi

$$\text{int}([a,b)) = (a,b).$$

Lebih lanjut akan ditunjukkan $\text{int}((a, b]) = (a, b)$, jika $B = (a, b]$ dengan demikian karena titik a bukan merupakan titik interior dari B, karena tidak dapat ditemukan G_a sedemikian sehingga $G_a \subset B$. Demikian juga untuk b, karena tidak dapat ditemukan G_b sedemikian sehingga $G_b \subset B$ jadi

$$\text{int}((a, b]) = (a, b).$$

Sedangkan untuk $\text{int}([a, b]) = (a, b)$, jika $C = (a, b]$ dengan demikian karena titik a bukan merupakan titik interior dari C, karena tidak dapat ditemukan G_a sedemikian sehingga $G_a \subset C$. Demikian juga untuk b, karena tidak dapat ditemukan G_b sedemikian sehingga $G_b \subset C$ jadi

$$\text{int}([a, b]) = (a, b).$$

Teorema 2.5.4. (*Kartono dan Nurwiyati,1995:53*)

Jika A himpunan sebarang dalam ruang topologi (X, τ) dan $\text{int}(A)$ adalah himpunan terbuka terbesar yang termuat dalam A maka

$$\text{int}(A) \subset A\,.$$

Bukti:

Menurut definisi 2.5.1, maka $\text{int}(A)$ adalah terbuka. Pandang $\{G_i\}_{i \in I}$ kelas dari semua himpunan terbuka dalam X, dan $G_i \subset A$, maka

$$\text{int}(A) = \bigcup_{i \in I} G_i \subset A\,.$$

karena $\text{int}(A)$ terbuka dan $\text{int}(A) \subset A$ maka terdapat suatu G_{i_0} sedemikian sehingga

$$G_{i_0} = \mathrm{int}(A).$$

Misalkan G_{j_0} himpunan terbuka terbesar yang termuat dalam A, maka

$$\mathrm{int}(A) \subset G_{j_0} \subset A\,.$$

tetapi karena

$$G_{j_0} \subset \bigcup_{i \in I} G_i\,,$$

Maka

$$G_{j_0} \subset \mathrm{int}(A) \subset A\,,$$

Jadi

$$G_{j_0} = \mathrm{int}(A)\,.$$

Sehingga jika terdapat himpunan terbuka yang lain yang termuat dalam A maka pasti termuat pada $\mathrm{int}(A)$, jadi $\mathrm{int}(A) \subset A$.

Contoh 2.5.5. Diberikan $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e\}\}$ pada $X = \{a,b,c,d,e\}$ maka

$$\mathrm{int}(\{a\}) = \{a\},$$

$$\mathrm{int}(\{a,b\}) = \{a\}$$

sehingga jika, $A = \{a,b\}$ dan $\mathrm{int}(A) = \{a\}$ maka $\{a\} \subset \{a,b\}$, yang berakibat $\mathrm{int}(A) \subset A$.

Teorema 2.5.6. (*Kartono dan Nurwiyati*,*1995:55*)

Diberikan A himpunan sebarang dalam ruang topologi (X,τ) dan A terbuka jika dan hanya jika $A = \mathrm{int}(A)$.

Bukti:

(Syarat perlu) jika A terbuka maka $A \subset \text{int}(A)$. Sesuai dengan teorema 2.5.4. ,yaitu $\text{int}(A) \subset A$. Dengan demikian berarti bahwa jika A terbuka maka $A \subset \text{int}(A) \subset A$, sehingga berakibat $A = \text{int}(A)$.

(Syarat cukup) karena $\text{int}(A)$ terbuka dan $A = \text{int}(A)$ maka A terbuka.

Contoh 2.5.7. Diberikan $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e\}\}$ pada $X = \{a,b,c,d,e\}$, ambil $A = \{a,c,d\} \in \tau$, maka

$$\text{int}(A) = \{c,d\} \cup \{a,c,d\} = \{a,c,d\} = A .$$

sekarang ambil $B = \{a,b\} \notin \tau$, maka

$$\text{int}(B) = \{a\} \neq B.$$

Teorema 2.5.8. (*Kartono dan Nurwiyati,1995:55*)

Misalkan (X,τ) suatu topologi, maka

$$\text{int}(\emptyset) = \emptyset \text{ dan } \text{int}(X) = X$$

Bukti:

Menurut teorema 2.5.6. maka $\emptyset$ terbuka jika dan hanya jika $\text{int}(\emptyset) = \emptyset$ selanjutnya menurut teorema 2.5.6. maka X terbuka jika dan hanya jika $\text{int}(X) = X$

Teorema 2.5.9. (*Kartono dan Nurwiyati,1995:56*)

Jika A dan B dua himpunan sebarang dalam ruang topologi (X,τ) dan $A \supset B$ maka

$$\text{int}(A) \supset \text{int}(B) .$$

Bukti:

Pandang $\{G_i\}_{i\in I}$ kelas dari semua himpunan terbuka dalam X dan $G_i \subset A$, maka

$$\mathrm{int}(A) = \bigcup_{i\in I} G_i \ ,$$

karena $\mathrm{int}(B)$ terbuka dan $\mathrm{int}(B) \subset B \subset A$ maka terdapat indeks k sedemikian sehingga $G_k = \mathrm{int}(B)$, yang berakibat

$$\mathrm{int}(A) = \bigcup_{i\in I} G_i \supset G_k = \mathrm{int}(B).$$

Sehingga terbukti bahwa

$$\mathrm{int}(A) \supset \mathrm{int}(B)\ .$$

Teorema 2.5.10. (*Kartono dan Nurwiyati,1995:57*)

Jika A dan B dua himpunan sebarang dalam ruang topologi (X,τ) maka

$$\mathrm{int}\big(\mathrm{int}(A)\big) = \mathrm{int}(A)$$

Bukti:

Menurut teorema 2.5.6. , dan karena $\mathrm{int}(A)$ terbuka maka

$$\mathrm{int}\big(\mathrm{int}(A)\big) = \mathrm{int}(A)\ .$$

Contoh 2.5.11. Diberikan $\tau = \big\{\emptyset, X, \{a\}, \{c,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d,e\}\big\}$ pada $X = \{a,b,c,d,e\}$, ambil $A = \{a,c,d\}$, maka

$$\mathrm{int}(A) = \{a,c,d\} \text{ dan } \mathrm{int}\big(\mathrm{int}(A)\big) = \{a,c,d\}$$

sehingga dapat disimpulkan bahwa

$$\mathrm{int}\big(\mathrm{int}(A)\big) = \mathrm{int}(A)\ .$$

Teorema 2.5.12. (*Kartono dan Nurwiyati,1995:58*)

Jika A dan B dua himpunan sebarang dalam ruang topologi (X, τ) maka

$$\mathrm{int}(A \cap B) = \mathrm{int}(A) \cap \mathrm{int}(B) .$$

Bukti:

Karena $A \supset A \cap B$ dan $B \supset A \cap B$, menurut teorema 2.5.9. maka

$$\mathrm{int}(A) \supset \mathrm{int}(A \cap B)$$

dan

$$\mathrm{int}(A) \supset \mathrm{int}(A \cap B).$$

Sehinggga diperoleh

$$\mathrm{int}(A) \cap \mathrm{int}(B) \supset \mathrm{int}(A \cap B) ,$$

selanjutnya karena $\mathrm{int}(A) \subset A$ dan $\mathrm{int}(B) \subset B$ maka

$$\mathrm{int}(A) \cap \mathrm{int}(B) \subset A \cap B .$$

ini berarti bahwa $\left(\mathrm{int}(A) \cap \mathrm{int}(B)\right)$ adalah himpunan terbuka yang termuat dalam $A \cap B$. Menurut teorema 2.5.4. , maka

$$\mathrm{int}(A) \cap \mathrm{int}(B) \subset \mathrm{int}(A \cap B)$$

sehingga dapat disimpulkan bahwa

$$\mathrm{int}(A \cap B) = \mathrm{int}(A) \cap \mathrm{int}(B) .$$

Contoh 2.5.13. Diberikan $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$ pada $X = \{a, b, c, d, e\}$, ambil $A = \{a, c, d\}$, $B = \{a\}$maka

$$A \cap B = \{a\} \text{ dan } \mathrm{int}(A \cap B) = \{a\} .$$

Di lain pihak

$$\mathrm{int}(A) \cap \mathrm{int}(B) = \{a, c, d\} \cap \{a\} = \{a\}$$

sehingga dapat disimpulkan bahwa

$$\text{int}(A \cap B) = \text{int}(A) \cap \text{int}(B)\,.$$

Teorema 2.5.14. (*Kartono dan Nurwiyati*,*1995:60*)

Jika A dan B dua himpunan sebarang dalam ruang topologi (X, τ) maka

$$\text{int}(A \cup B) \supset \text{int}(A) \cup \text{int}(B)\,.$$

Bukti:

Karena $A \cup B \supset A$ maka

$$\text{int}(A \cup B) \supset \text{int}(A)\,,$$

lebih lanjut jika $A \cup B \supset B$ maka

$$\text{int}(A \cup B) \supset \text{int}(B)\,.$$

sehingga dapat disimpulkan bahwa

$$\text{int}(A \cup B) \supset \text{int}(A) \cup \text{int}(B)\,.$$

2.6. Logika Fuzzy

Istilah logika *fuzzy* saat ini digunakan dalam dua pengertian yang berbeda. Dalam pengertian sempit, logika *fuzzy* adalah suatu sistem logis pada suatu informasi logis yang bertujuan pada suatu formalisasi dari taksiran pemikiran. Dalam pengertian luas, logika *fuzzy* adalah hampir sinonim dengan teori himpunan *fuzzy*. Teori himpunan *fuzzy* pada dasarnya suatu teori dari pengelompokan dengan batas-batas yang tidak tajam. Teori himpunan *fuzzy* lebih luas dibanding logika *fuzzy* dalam arti sempit dan memiliki cabang lebih dari satu. Diantara cabang-cabang tersebut adalah aritmetika *fuzzy*, topologi *fuzzy*, teori grafik *fuzzy*, dan analisis data *fuzzy* (Yudha, 1997:9).

Logika fuzzy merupakan peningkatan dari logika boolean. Dia diperkenalkan oleh Dr. Lotfi Zadeh dari Universitas California, Berkeley pada tahun 1965. Dalam logika boolean menyatakan bahwa segala sesuatu hanya dapat diekspresikan dalam dwinilai, yaitu 0 dan 1, hitam dan putih, atau ya dan tidak. Dalam logika fuzzy memungkinkan nilai keanggotaan antara 0 dan 1, sehingga dalam logika fuzzy mengenal istilah “hitam, keabuan dan putih”, atau “sedikit, lumayan dan sangat”.

Ada beberapa alasan mengapa orang menggunakan logika fuzzy (Kusumadewi dan Purnomo, 2004: 2), antara lain:

1. Konsep logika fuzzy mudah dimengerti. Konsep matematis yang mendasari penalaran fuzzy sangat sederhana dan mudah dimengerti.
2. Logika fuzzy sangat fleksibel.
3. Logika fuzzy memiliki toleransi terhadap data-data yang tidak tepat.
4. Logika fuzzy mampu memodelkan fungsi-fungsi nonlinear yang sangat kompleks.
5. Logika fuzzy dapat membangun dan mengaplikasikan pengalaman-pengalaman para pakar secara langsung tanpa harus melalui proses pelatihan.
6. Logika fuzzy dapat bekerjasama dengan teknik-teknik kendali secara konvensional
7. Logika fuzzy didasarkan pada bahasa alami

2.6.1. Himpunan Fuzzy

Himpunan fuzzy (*fuzzy set*) adalah sekumpulan obyek x dimana masing-masing obyek memiliki nilai keanggotaan (*membership function*) "μ" disebut juga derajat keanggotaan. Derajat keanggotaan dinyatakan dengan suatu bilangan real dalam selang tertutup [0, 1]. Dengan demikian setiap unsur dalam semesta wacananya mempunyai derajat keanggotaan tertentu dalam himpunan tersebut (Susilo, 2006: 50).

Dengan perkataan lain, fungsi keanggotaan dari suatu himpunan fuzzy $\widetilde{A}$ dalam semesta X adalah pemetaan $\mu_{\widetilde{A}} : X \longrightarrow [0,1]$. Nilai fungsi $\mu_{\widetilde{A}}$ menyatakan derajat keanggotaan unsur $x \in X$ dalam himpunan fuzzy $\widetilde{A}$. Nilai fungsi sama dengan 1 menyatakan keanggotaan penuh, dan Nilai fungsi sama dengan 0 menyatakan samasekali bukan anggota himpunan fuzzy tersebut. Maka himpunan tegas juga dapat dipandang sebagai kejadian khusus dari himpunan fuzzy, yaitu himpunan fuzzy yang fungsi keanggotaannya hanya bernilai 0 atau 1 saja. Jadi fungsi keanggotaan dari himpunan tegas A dalam semesta X adalah pemetaan dari X ke himpunan $\{0,1\}$ yang tak lain adalah fungsi karakteristik χ_A, yaitu

$$\chi_A = \begin{cases} 1 & jika\ x \in A \\ 0 & jika\ x \notin A \end{cases}$$

Secara matematis suatu himpunan fuzzy $\widetilde{A}$ dalam semesta wacana X dapat dinyatakan sebagai himpunan berpasangan terurut

$$\widetilde{A} = \{(x, \mu_{\widetilde{A}}(x)) \mid x \in X\}$$

Di mana $\mu_{\widetilde{A}}$ adalah fungsi keanggotaan dari himpunan fuzzy $\widetilde{A}$, yang merupakan suatu pemetaan dari himpunan semesta X ke selang tertutup [0,1]. Apabila semesta X adalah himpunan yang kontinyu, maka himpunan fuzzy $\widetilde{A}$ seringkali dinyatakan dengan

$$\widetilde{A} = \widetilde{A} = \int_{x \in X} \frac{\mu_{\widetilde{A}}(x)}{x}$$

Di mana lambang $\int$ di sini bukan lambang integral seperti yang dikenal dalam kalkulus, tetapi melambangkan keseluruhan unsur-unsur $x \in X$ bersama dengan derajat keanggotaannya dalam himpunan fuzzy $\widetilde{A}$. Apabila semesta X adalah himpunan yang diskrit , maka himpunan fuzzy $\widetilde{A}$ seringkali dinyatakan dengan

$$\widetilde{A} = \sum_{x \in X} \frac{\mu_{\widetilde{A}}(x)}{x}$$

Di mana lambang $\sum$ di sini tidak melambangkan operasi jumlahan seperti yang dikenal dalam aritmatika, tetapi melambangkan keseluruhan unsur-unsur $x \in X$ bersama dengan derajat keanggotaannya dalam himpunan fuzzy $\widetilde{A}$ (Susilo, 2006: 51-52)

Contoh 2.6.1.1.

Dalam semesta himpunan semua bilangan real **R,** misalkan $\widetilde{A}$ adalah himpunan "bilangan real yang dekat dengan nol", maka himpunan fuzzy $\widetilde{A}$ tersebut dapat dinyatakan sebagai

$$\widetilde{A} = \int_{x \in R} \frac{e^{-x^2}}{x}$$

Contoh 2.6.1.2.

Dalam semesta $X = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, himpunan fuzzy $\tilde{A}$ dalam contoh 2.6.1.2 di atas dapat dinyatakan misalnya sebagai

$$\tilde{A} = \sum_{x \in X} \frac{\mu_{\tilde{A}}(x)}{x} = \frac{0.1}{-4} + \frac{0.3}{-3} + \frac{0.5}{-2} + \frac{0.7}{-1} + \frac{1}{0} + \frac{0.7}{1} + \frac{0.5}{2} + \frac{0.3}{3} + \frac{0.1}{4}$$

Bilangan 5 dan -5 mempunyai derajat keanggotaan 0, yang biasanya tidak ditulis dalam penyajian dalam himpunan fuzzy diskrit seperti di atas.

2.6.2. Operator Dasar untuk Himpunan Fuzzy

Seperti halnya himpunan konvensional, ada beberapa operasi yang didefinisikan secara khusus untuk mengkombinasi dan memodifikasi himpunan *fuzzy* (Kusumadewi dan Purnomo, 2004: 25). Berikut ini beberapa operasi logika *fuzzy* yang diciptakan oleh Zadeh:

1. **Operator AND**

   Operator ini berhubungan dengan operasi interseksi pada himpunan. α - predikat sebagai hasil operasi dengan operator AND diperoleh dengan mengambil nilai keanggotaan terkecil antar elemen-elemen pada himpunan-himpunan yang bersangkutan

   $\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}} = min(\mu_{\tilde{A}}[x], \mu_{\tilde{B}}[y])$

2. **Operator OR**

   Operator ini berhubungan dengan operasi union pada himpunan. α - predikat sebagai hasil operasi dengan operator OR diperoleh dengan mengambil nilai keanggotaan terbesar antar elemen-elemen pada himpunan-himpunan yang bersangkutan

$\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}} = max(\mu_{\tilde{A}}[x], \mu_{\tilde{B}}[y])$

3. **Operator NOT**

Operator ini berhubungan dengan operasi komplemen pada himpunan. α – predikat sebagai hasil operasi dengan operator NOT diperoleh dengan mengurangkan nilai keanggotaan elemen pada himpunan yang bersangkutan dengan 1.

$\mu_{A'} = 1 - \mu_{\tilde{A}}[x]$

2.7. Konsep Logika dan Himpunan dalam Al-Qur'an

Logika merupakan cabang ilmu matematika yang sangat penting. Kata "logika" sering terdengar dalam kehidupan sehari-hari, yang biasanya diartikan "menurut akal". Jadi logika disini berhubungan dengan akal dan berfikir.

Dalam Al-Qur'an manusia juga diperintahkan untuk berfikir sebagaimana dalam firman Allah SWT dalam surat Al-Imron ayat 190-191:

إِنَّ فِي خَلۡقِ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلۡأَرۡضِ وَٱخۡتِلَٰفِ ٱلَّيۡلِ وَٱلنَّهَارِ لَأٓيَٰتٖ لِّأُوْلِي ٱلۡأَلۡبَٰبِ
١٩٠ ٱلَّذِينَ يَذۡكُرُونَ ٱللَّهَ قِيَٰمٗا وَقُعُودٗا وَعَلَىٰ جُنُوبِهِمۡ وَيَتَفَكَّرُونَ فِي خَلۡقِ
ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلۡأَرۡضِ رَبَّنَا مَا خَلَقۡتَ هَٰذَا بَٰطِلٗا سُبۡحَٰنَكَ فَقِنَا عَذَابَ ٱلنَّارِ ١٩١

Artinya:
"Sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi, dan silih bergantinya malam dan siang terdapat tanda-tanda bagi orang-orang yang berakal, (yaitu) orang-orang yang mengingat Allah sambil berdiri atau duduk atau dalam keadan berbaring dan mereka memikirkan tentang penciptaan langit dan bumi (seraya

berkata): "Ya Tuhan kami, tiadalah Engkau menciptakan Ini dengan sia-sia, Maha Suci Engkau, Maka peliharalah kami dari siksa neraka."

Dalam ayat di atas dijelaskan bahwa sesungguhnya dalam tatanan langit dan bumi serta keindahan perkiraan dan keajaiban ciptaan Allah juga dalam silih bergantinya siang dan malam secara teratur sepanjang tahun yang dapat dirasakan secara langsung pengaruhnya pada tubuh dan cara berpikir manusia karena pengaruh panas matahari, dinginnya malam dan pengaruhnya yang ada dalam dunia *flora* dan *fauna* dan sebagainya merupakan tanda bukti keesaan Allah, kesempurnaan pengetahuan dan kekuasaannya. Sedangkan *Ulul Albab* adalah orang-orang yang mau menggunakan pikirannya untuk mengambil faedah darinya, mengambil hidayah darinya, mengambarkan keagungan Allah dan mau mengingat hikmah akal dan keutamaannya, di samping keagungan karunia-Nya dalam segala sikap dan perbuatan mereka (Al-Maraghi, 1992:290).

Dari ayat di atas kita dapat menyimpulkan bahwa Logika merupakan pengambilan keputusan dimana pengambilan keputusan ini melalui proses berfikir. Berfikir merupakan perintah Allah yang akan mengantarkan orang yang melakukannya kepada suatu derajat keimanan yang tidak bisa dihasilkan oleh sekadar amal biasa dan akan mengantarkan manusia pada penyingkapan pokok-pokok masalah dan mengetahui mana yang baik dan mana yang buruk dan yang lebih buruk. Sehingga logika berhubungan dengan perintah Allah untuk berfikir.

Dalam Al-Qur'an juga dibicarakan tentang konsep himpunan meskipun secara implisit, seperti yang dijelaskan dalam firman Allah SWT pada surat An-Nur ayat 45 yang berbunyi:

وَٱللَّهُ خَلَقَ كُلَّ دَآبَّةٍ مِّن مَّآءٍ ۖ فَمِنْهُم مَّن يَمْشِى عَلَىٰ بَطْنِهِۦ وَمِنْهُم مَّن يَمْشِى عَلَىٰ
رِجْلَيْنِ وَمِنْهُم مَّن يَمْشِى عَلَىٰٓ أَرْبَعٍ ۚ يَخْلُقُ ٱللَّهُ مَا يَشَآءُ ۚ إِنَّ ٱللَّهَ عَلَىٰ كُلِّ شَىْءٍ قَدِيرٌ
﴿٤٥﴾

Artinya:

"Dan Allah Telah menciptakan semua jenis hewan dari air, Maka sebagian dari hewan itu ada yang berjalan di atas perutnya dan sebagian berjalan dengan dua kaki sedang sebagian (yang lain) berjalan dengan empat kaki. Allah menciptakan apa yang dikehendaki-Nya, Sesungguhnya Allah Maha Kuasa atas segala sesuatu".

Dalam ayat di atas dijelaskan sekelompok, segolongan atau sekumpulan makhluk yang disebut hewan. Dalam kelompok hewan tersebut ada sekelompok yang berjala tanpa kaki, dengan dua kaki, empat atau bahkkan lebih sesuai dengan yang dikehendaki Allah.

Allah menciptakan setiap hewan yang melata di muka bumi dari air yang merupakan bagian dari materinya. Disebutkannya air secara khusus di antara materi-materi lain yang merupakan komposisinya, disebabkan sangat menonjolnya kebutuhan hewan terhadap air – terutama setelahnya strukturnya sempurna – dan karena bagian-bagiannya yang bersifat tanah bercampur dengannya. Kemudian Allah menguraikan beberapa bagian hewan yang melata di muka bumi. Diantaranya ada yang berjalan di atas perutnya, seperti ular, ikan dan hewan reptilia lainnya. Gerakannya disebut berjalan – padahal ia merayap- menunjuk kepada kemampuannya yang sempurna, dan bahwa sekalipun tidak mempunyai alat untuk berjalan, namun seakan ia berjalan. Ada yang berjalan di atas dua kaki, seperti manusia dan burung. Ada pula yang berjalan di atas empat kaki, seperti binatang ternak, (termasuk unta, lembu, kambing, dan kerbau) dan binatang-binatang buas. Allah tidak menyebutkan binatang yang berjalan di atas lebih dari empat kaki, seperti laba-laba dan serangga lainnya, karena itu semua termasuk ciptaan yang dikehendaki Allah di antara yang telah disebutkan dan belum disebutkan dengan perbedaan bentuk, anggota, tubuh, gerak, tabiat, kekuatan dan perbuatan. Perbedaan-perbedaan hewan-hewan ini dalam anggota, kekuatan, ukuran badan, perbuatan dan tingkah lakunya pasti diatur oleh pengatur Yang Maha Bijaksana,Yang Mengetahui segala ikhwal dan rahasia penciptaannya , tidak ada sesuatu sekecil apa pun di bumi dan langit yang tidak Dia ketahui (Al-Maraghi, 1993: 214-216)

Berdasarkan QS An-Nuur ayat 45 tersebut terdapat konsep matematika yang terkandung didalamnya yaitu kumpulan obyek-obyek yang mempunyai ciri-ciri yang sangat jelas. Inilah yang dalam matematika dinamakan himpunan.

BAB III

PEMBAHASAN

3.1. Pengertian Topologi Fuzzy

Sebelum dibahas lebih lanjut tentang interior dan persekitaran pada topologi fuzzy, maka terlebih dahulu dijelaskan tentang pengertian topologi fuzzy. Dalam memahami topologi fuzzy maka harus dipahami juga konsep yang lebih dasar dari topologi seperti himpunan terbuka, himpunan tertutup, interior, persekitaran pada topologi biasa.

Selain itu juga harus dipahami tentang himpunan fuzzy, fungsi karakteristik serta derajat keanggotaan himpunan fuzzy. Pada bab sebelumnya telah dijelaskan bahwa himpunan fuzzy dapat dinyatakan sebagai himpunan pasangan terurut antara anggota semestanya dengan derajat keanggotaan yang dimiliki, misalnya himpunan fuzzy $\tilde{A}$ dinyatakan dengan himpunan terurut $\{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) \mid x \in X\}$ atau dengan kata lain $\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) \mid x \in X\}$.

Seringkali terjadi anggapan bahwa χ dan μ merupakan dua hal yang sama yaitu sama-sama menyatakan nilai keanggotaan. Pada kenyataannya, χ_A dan $\mu_{\tilde{A}}$ merupakan dua hal yang berbeda. χ merupakan simbol dari fungsi karakteristik yang merupakan suatu fungsi yang memetakan suatu himpunan misalnya himpunan A dalam dalam semesta X ke dalam himpunan $\{0,1\}$ atau dalam bahasa simbolnya dapat dituliskan $\chi_A : X \longrightarrow \{0,1\}$. Selanjutnya μ merupakan derajat keanggotaan dari suatu himpunan fuzzy misalnya $\tilde{A}$ merupakan suatu pemetaan dari himpunan semestanya X ke selang tertutup $[0,1]$. Jadi derajat berupa keanggotaan nilainya berada dalam selang tertutup [0,1]. Jadi χ berupa fungsi dan μ berupa nilai.

Berikut ini akan dibahas definisi dari topologi fuzzy.

Definisi 3.1.1. (*Mordeson & Nair, 2001: 79*)

Suatu topologi fuzzy pada X adalah suatu keluarga dari himpunan-himpunan bagian fuzzy pada X, dilambangkan $\mathcal{FT}$, yang memenuhi kondisi-kondisi berikut:

(i) $\chi_\emptyset, \chi_X \in \mathcal{FT}$

$\chi_\emptyset$ merupakan fungsi karakteristik dari himpunan $\emptyset$ dalam semesta X dan $\chi_\emptyset$ menyatakan himpunan bagian fuzzy dari himpunan $\emptyset$ dengan derajat keanggotaan 0 atau jika dinyatakan dengan himpunan pasangan terurut $\{(\emptyset, 0)\}$ dan χ_X merupakan fungsi karakteristik dari himpunan semesta X dan χ_X menyatakan himpunan bagian fuzzy dari himpunan semestanya dengan derajat keanggotaan 1 atau jika dinyatakan dengan himpunan pasangan terurut $\{(X, 1)\}$.

(ii) Jika $\tilde{A}, \tilde{B} \in \mathcal{FT}$, maka $\tilde{A} \cap \tilde{B} \in \mathcal{FT}$.

(iii) Jika $\tilde{A}_i \in \mathcal{FT}$ untuk setiap $i \in I$, $\mu_{\bigcup_{i\in I}\tilde{A}i} = \max(\mu_{\tilde{A}i})$ maka $\bigcup_{i\in I} \tilde{A}_i \in \mathcal{FT}$, dengan I adalah suatu himpunan indeks.

Jika $\tau\mathcal{F}$ adalah suatu topologi fuzzy pada X, maka pasangan $(X, \mathcal{FT})$ disebut suatu ruang topologi fuzzy.

Misalkan $(X, \mathcal{FT})$ suatu ruang topologi fuzzy. Maka setiap anggota dari $\mathcal{FT}$ disebut suatu himpunan bagian fuzzy $\mathcal{FT}$ terbuka. Suatu himpunan bagian fuzzy adalah $\mathcal{FT}$ tertutup jika dan hanya jika komplemen $\mathcal{FT}$ terbuka. Seperti dalam topologi-topologi biasa, topologi fuzzy indiskrit hanya memuat $\chi_{\emptyset}$ dan χ_X, sedangkan topologi fuzzy diskrit memuat semua himpunan-himpunan bagian fuzzy dari X. Suatu topologi fuzzy $\mathcal{FU}$ dikatakan menjadi lebih kasar daripada suatu topologi fuzzy $\tau\mathcal{F}$ jika $\mathcal{FU} \subseteq \mathcal{FT}$.

Contoh 3.1.2. Misalnya semesta $X = \{1, 2, 3\}$, dan diberikan nilai keanggotaan untuk setiap elemen dari X:

$\mu(1) = 0.3, \mu(2) = 0.5, \mu(3) = 0.6$

Jadi

himpunan fuzzy dari himpunan kosong adalah $\chi_{\emptyset} = \{(\emptyset, 0)\}$

himpunan fuzzy dari himpunan semestanya adalah

$\chi_X = \{(1, 0.3), (2, 0.5), (3\ , 0.6)\}$

Diketahui himpunan-himpunan bagian fuzzy dari X sebagai berikut:

$\tilde{A} = \{(2, 0.5)\}$

$\tilde{B} = \{(1, 0.3), (2, 0.5)\}$

$\tilde{C} = \{(2, 0.5), (3\ , 0.6)\}$

Sehingga diperoleh kesamaan sebagai berikut:

$\tilde{A} \cap \tilde{B} = \tilde{A}$ $\quad$ $\tilde{A} \cup \tilde{B} = \tilde{B}$ $\quad$ $\tilde{A} \cup \tilde{B} \cup \tilde{C} = \chi_X$

$\tilde{A} \cap \tilde{C} = \tilde{A}$ $\quad$ $\tilde{A} \cup \tilde{C} = \tilde{C}$

$\tilde{B} \cap \tilde{C} = \tilde{A}$ $\quad$ $\tilde{B} \cup \tilde{C} = \chi_X$

Apakah $\mathcal{FT} = \{\chi_{\emptyset}, \chi_X, \tilde{A},\ \tilde{B},\ \tilde{C}\}$ topologi fuzzy pada X?

Pembahasan:

Akan ditunjukkan bahwa kondisi i, ii, iii dipenuhi:

i. Jelas dipenuhi bahwa $\chi_{\emptyset} \in \mathcal{FT}$ dan $\chi_X \in \mathcal{FT}$.

ii. Irisan dari sebarang himpunan fuzzy dari $\mathcal{FT}$

$\chi_\emptyset \in \mathcal{FT},\ \chi_X \in \mathcal{FT}$ maka $\chi_\emptyset \cap \chi_X = \chi_X \in \mathcal{FT}$

$\chi_\emptyset \in \mathcal{FT}, \tilde{A} \in \mathcal{FT}$ maka $\chi_\emptyset \cap \tilde{A} = \chi_\emptyset \in \mathcal{FT}$

$\chi_\emptyset \in \mathcal{FT},\ \tilde{B} \in \mathcal{FT}$ maka $\chi_\emptyset \cap \tilde{B} = \chi_\emptyset \in \mathcal{FT}$

$\chi_\emptyset \in \mathcal{FT}, \tilde{C} \in \mathcal{FT}$ maka $\chi_\emptyset \cap \tilde{C} = \chi_\emptyset \in \mathcal{FT}$

$\chi_X \in \mathcal{FT}, \tilde{A} \in \mathcal{FT}$ maka $\chi_X \cap \tilde{A} = \tilde{A} \in \mathcal{FT}$

$\chi_X \in \mathcal{FT},\ \tilde{B} \in \mathcal{FT}$ maka $\chi_X \cap \tilde{B} = \tilde{B} \in \mathcal{FT}$

$\chi_X \in \mathcal{FT}, \tilde{C} \in \mathcal{FT}$ maka $\chi_X \cap \tilde{C} = \tilde{C} \in \mathcal{FT}$

$\tilde{A} \in \mathcal{FT}, \tilde{B} \in \mathcal{FT}$ maka $\tilde{A} \cap \tilde{B} = \tilde{A} \in \mathcal{FT}$

$\tilde{A} \in \mathcal{FT},\ \tilde{C} \in \mathcal{FT}$ maka $\tilde{A} \cap \tilde{C} = \tilde{A} \in \mathcal{FT}$

$\tilde{B} \in \mathcal{FT},\ \tilde{C} \in \mathcal{FT}$ maka $\tilde{B} \cap \tilde{C} = \tilde{A} \in \mathcal{FT}$

Gabungan dari dua sebarang anggota $\mathcal{FT}$

$\chi_\emptyset \in \mathcal{FT},\ \chi_X \in \mathcal{FT}$ maka $\chi_\emptyset \cup \chi_X = \chi_X \in \mathcal{FT}$

$\chi_\emptyset \in \mathcal{FT},\ \tilde{A} \in \mathcal{FT}$ maka $\chi_\emptyset \cup \tilde{A} = \tilde{A} \in \mathcal{FT}$

$\chi_\emptyset \in \mathcal{FT}, \tilde{B} \in \mathcal{FT}$ maka $\chi_\emptyset \cup \tilde{B} = \tilde{B} \in \mathcal{FT}$

$\chi_\emptyset \in \mathcal{FT}, \tilde{C} \in \mathcal{FT}$ maka $\chi_\emptyset \cup \tilde{C} = \tilde{C} \in \mathcal{FT}$

$\chi_X \in \mathcal{FT}, \tilde{A} \in \mathcal{FT}$ maka $\chi_X \cup \tilde{A} = \chi_X \in \mathcal{FT}$

$\chi_X \in \mathcal{FT}, \tilde{B} \in \mathcal{FT}$ maka $\chi_X \cup \tilde{B} = \chi_X \in \mathcal{FT}$

$\chi_X \in \mathcal{FT}, \tilde{C} \in \mathcal{FT}$ maka $\chi_X \cup \tilde{C} = \chi_X \in \mathcal{FT}$

$\tilde{A} \in \mathcal{FT},\ \tilde{B} \in \mathcal{FT}$ maka $\tilde{A} \cup \tilde{B} = \tilde{B} \in \mathcal{FT}$

$\tilde{A} \in \mathcal{FT},\ \tilde{C} \in \mathcal{FT}$ maka $\tilde{A} \cup \tilde{C} = \tilde{C} \in \mathcal{FT}$

$\tilde{B} \in \mathcal{FT},\ \tilde{C} \in \mathcal{FT}$ maka $\tilde{B} \cup \tilde{C} = \chi_X \in \mathcal{FT}$

Gabungan dari tiga sebarang anggota $\mathcal{FT}$

$\chi_\emptyset \in \mathcal{FT}, \chi_X \in \mathcal{FT}, \tilde{A} \in \mathcal{FT}$ maka $\chi_\emptyset \cup \chi_X \cup \tilde{A} = \chi_X \in \mathcal{FT}$

$\chi_\emptyset \in \mathcal{FT}, \chi_X \in \mathcal{FT}, \tilde{B} \in \mathcal{FT}$ maka $\chi_\emptyset \cup \chi_X \cup \tilde{B} = \chi_X \in \mathcal{FT}$

$\chi_\emptyset \in \mathcal{FT}, \chi_X \in \mathcal{FT}, \tilde{C} \in \mathcal{FT}$ maka $\chi_\emptyset \cup \chi_X \cup \tilde{C} = \chi_X \in \mathcal{FT}$

$\chi_\emptyset \in \mathcal{FT}, \tilde{A} \in \mathcal{FT}, \tilde{B} \in \mathcal{FT}$ maka $\chi_\emptyset \cup \tilde{A} \cup \tilde{B} = \tilde{B} \in \mathcal{FT}$

$\chi_\emptyset \in \mathcal{FT}, \tilde{A} \in \mathcal{FT}, \tilde{C} \in \mathcal{FT}$ maka $\chi_\emptyset \cup \tilde{A} \cup \tilde{C} = \tilde{C} \in \mathcal{FT}$

$\chi_\emptyset \in \mathcal{FT}, \tilde{B} \in \mathcal{FT}, \tilde{C} \in \mathcal{FT}$ maka $\chi_\emptyset \cup \tilde{B} \cup \tilde{C} = \tilde{C} \in \mathcal{FT}$

$\chi_X \in \mathcal{FT}, \tilde{A} \in \mathcal{FT}, \tilde{B} \in \mathcal{FT}$ maka $\chi_X \cup \tilde{A} \cup \tilde{B} = \chi_X \in \mathcal{FT}$

$\chi_X \in \mathcal{FT}, \tilde{A} \in \mathcal{FT}, \tilde{C} \in \mathcal{FT}$ maka $\chi_X \cup \tilde{A} \cup \tilde{C} = \chi_X \in \mathcal{FT}$

$\chi_X \in \mathcal{FT}, \tilde{B} \in \mathcal{FT}, \tilde{C} \in \mathcal{FT}$ maka $\chi_X \cup \tilde{B} \cup \tilde{C} = \chi_X \in \mathcal{FT}$

$\tilde{A} \in \mathcal{FT}, \tilde{B} \in \mathcal{FT}, \tilde{C} \in \mathcal{FT}$ maka $\tilde{A} \cup \tilde{B} \cup \tilde{C} = \chi_X \in \mathcal{FT}$

Gabungan dari empat sebarang anggota $\mathcal{FT}$

$\chi_\emptyset \in \mathcal{FT}, \chi_X \in \mathcal{FT}, \tilde{A} \in \mathcal{FT}, \tilde{B} \in \mathcal{FT}$

maka $\chi_\emptyset \cup \chi_X \cup \tilde{A} \cup \tilde{B} = \chi_X \in \mathcal{FT}$

$\chi_\emptyset \in \mathcal{FT}, \chi_X \in \mathcal{FT}, \tilde{A} \in \mathcal{FT}, \tilde{C} \in \mathcal{FT}$

maka $\chi_\emptyset \cup \chi_X \cup \tilde{A} \cup \tilde{C} = \chi_X \in \mathcal{FT}$

$\chi_X \in \mathcal{FT}, \tilde{A} \in \mathcal{FT}, \tilde{B} \in \mathcal{FT}, \tilde{C} \in \mathcal{FT}$

maka $\chi_X \cup \tilde{A} \cup \tilde{B} \cup \tilde{C} = \chi_X \in \mathcal{FT}$

Gabungan dari semua anggota $\mathcal{FT}$

$\chi_\emptyset \in \mathcal{FT}, \chi_X \in \mathcal{FT}, \tilde{A} \in \mathcal{FT}, \tilde{B} \in \mathcal{FT}, \tilde{C} \in \mathcal{FT}$

maka $\chi_\emptyset \cup \chi_X \cup \tilde{A} \cup \tilde{B} \cup \tilde{C} = \chi_X \in \mathcal{FT}$

Karena kondisi 1, 2, 3 terpenuhi maka τ merupakan topologi pada X.

3.2. Persekitaran pada topologi fuzzy

Pada sub bab ini akan dibahas tentang definisi persekitaran pada topologi fuzzy, pembuktian teorema disertai dengan contoh-contohnya.

Definisi 3.2.1. (*Mordeson & Nair, 2001: 80*)

Diberikan $(X, \mathcal{FT})$ suatu ruang topologi fuzzy. Suatu himpunan bagian fuzzy $\tilde{Y}$ pada X adalah suatu persekitaran pada suatu himpunan bagian fuzzy pada $\tilde{A}$ jika pada $\tilde{Y}$ suatu himpunan bagian fuzzy terbuka $\widetilde{U}$ yang memuat $\tilde{A}$ sehingga $\tilde{A} \subseteq \widetilde{U} \subseteq \tilde{Y}$.

Contoh 3.2.2.

Misalnya dalam semesta $X = \{1,2,3,4,5\}$ dan diberikan derajat keanggotaan

$\mu(1) = 0.1, \mu(2) = 0.3, \mu(3) = 0.5, \mu(4) = 0.7, \mu(5) = 0.9$

Diketahui

$$\mathcal{FT} = \{\chi_\emptyset, \chi_X, \{(1, 0.1)\}, \{(1, 0.1), (2, 0.3)\}, \{(1, 0.1), (3, 0.5), (4, 0.7)\},$$
$$\{(1, 0.1), (2, 0.3), (3, 0.5), (4, 0.7)\}, \{(1, 0.1), (2, 0.3), (5, 0.9)\}\}$$

Merupakan topologi fuzzy pada X.

Selanjutnya misalnya $\tilde{Y} = \{(1, 0.1), (2, 0,3), (5, 0,9)\}$, $\tilde{A} = \{(1, 0.1)\}$, dan $\widetilde{U} = \{(1, 0.1), (2, 0.3)\}$

$\tilde{Y} = \{(1, 0.1), (2, 0,3), (5, 0,9)\}$ merupakan suatu persekitaran dari $\tilde{A} = \{(1, 0.1)\}$ karena ada himpunan bagian terbuka $\widetilde{U} = \{(1, 0.1), (2, 0.3)\}$ dari X sehingga $\{(1, 0.1)\} \subseteq \{(1, 0.1), (2, 0.3)\} \subseteq \{(1, 0.1), (2, 0.3), (5, 0.9)\}$ atau $\tilde{A} \subseteq \widetilde{U} \subseteq \tilde{Y}$.

Teorema 3.2.3. (*Mordeson & Nair, 2001: 80*)

Diberikan $(X, \mathcal{FT})$ suatu ruang topologi fuzzy. Suatu himpunan bagian fuzzy $\tilde{A}$ pada X adalah terbuka jika dan hanya jika untuk setiap himpunan bagian fuzzy $\tilde{B}$ pada X termuat di dalam $\tilde{A}$, maka $\tilde{A}$ merupakan suatu persekitaran $\tilde{B}$.

Bukti :

Anggap bahwa untuk setiap himpunan bagian fuzzy $\tilde{B}$ pada X termuat dalam $\tilde{A}$, maka $\tilde{A}$ adalah suatu persekitaran $\tilde{B}$.

Akan dibuktikan bahwa jika suatu himpunan bagian fuzzy $\tilde{A}$ pada X terbuka, maka untuk setiap himpunan bagian fuzzy $\tilde{B}$ pada X termuat dalam $\tilde{A}$, $\tilde{A}$ suatu persekitaran $\tilde{B}$. Pada bab sebelumnya telah dijelaskan bahwa suatu himpunan terbuka jika himpunan itu merupakan persekitaran dari setiap titik atau himpunan yang ada di dalamnya. Hal ini juga berlaku pada himpunan fuzzy.

Misalnya $\tilde{A}$ terbuka, maka untuk himpunan fuzzy $\tilde{B}$ yang temuat di dalam $\tilde{A}$ menjadi himpunan bagian dari himpunan terbuka $\tilde{A}$ yang berada dalam $\tilde{A}$ itu sendiri yang berarti $\tilde{B} \subseteq \tilde{A} \subseteq \tilde{A}$. Sehingga $\tilde{A}$ merupakan persekitaran dari himpunan fuzzy $\tilde{B}$ yang termuat di dalamnya

Menurut definisi 3.2.1 himpunan fuzzy $\tilde{A}$ merupakan suatu persekitaran $\tilde{B}$ jika ada himpunan fuzzy terbuka $\tilde{U}$ yang memuat $\tilde{B}$. Selanjutnya karena ada sifat himpunan $\tilde{A} \subseteq \tilde{A}$, maka $\tilde{A} \subseteq \tilde{U} \subseteq \tilde{A}$. Karenanya $\tilde{A} = \tilde{U}$ dan $\tilde{A}$ adalah terbuka.

Contoh 3.2.4.

Misalnya dalam semesta $X = \{1,2,3,4,5\}$ dan diberikan derajat keanggotaan

$\mu(1) = 0.1$, $\mu(2) = 0.3$, $\mu(3) = 0.5$, $\mu(4) = 0.7$, $\mu(5) = 0.9$

Diketahui

$\mathcal{FT} = \{\chi_{\emptyset}, \chi_X, \{(1, 0.1)\}, \{(1, 0.1), (2, 0.3)\}, \{(1, 0.1), (3, 0.5), (4, 0.7)\},$

$\{(1, 0.1), (2, 0.3), (3, 0.5), (4, 0.7)\}, \{(1, 0.1), (2, 0.3), (5, 0.9)\}\}$

Merupakan topologi fuzzy pada X.

Dimisalkan

$\tilde{A} = \{(1, 0.1), (2, 0.3), (3, 0.5), (4, 0.7)\}$ dan $\tilde{B} = \{(1, 0.1), (2, 0.3)\}$ merupakan himpunan bagian fuzzy pada X.

$\tilde{A} = \{(1, 0.1), (2, 0.3), (3, 0.5), (4, 0.7)\}$ merupakan himpunan bagian fuzzy pada X.

$\tilde{A}$ terbuka karena memuat $\tilde{B} = \{(1, 0.1), (2, 0.3)\}$ yang juga merupakan himpunan bagian fuzzy pada X. Jadi $\tilde{A}$ merupakan suatu persekitaran dari $\tilde{B}$.

Definisi 3.2.5. (*Mordeson & Nair, 2001: 80*)

Diberikan $(X, \mathcal{FT})$ suatu ruang topologi fuzzy dan $\tilde{A}$ suatu himpunan bagian fuzzy pada X. $\mathcal{N}$ sistem persekitaran pada $\tilde{A}$ didefinisikan sebagai himpunan semua persekitaran pada $\tilde{A}$.

Contoh 3.2.6.

Misalnya dalam semesta $X = \{1,2,3,4,5\}$ dan diberikan derajat keanggotaan

$\mu(1) = 0.1, \mu(2) = 0.3, \mu(3) = 0.5, \mu(4) = 0.7, \mu(5) = 0.9$

Diketahui

$\mathcal{FT} = \{\chi_{\emptyset}, \chi_X, \{(1, 0.1)\}, \{(1, 0.1), (2, 0.3)\}, \{(1, 0.1), (3, 0.5), (4, 0.7)\},$

$\{(1, 0.1), (2, 0.3), (3, 0.5), (4, 0.7)\}, \{(1, 0.1), (2, 0.3), (5, 0.9)\}\}$

Merupakan topologi fuzzy pada X.

Tentukan $\mathcal{N}((2, 0.3))$

Pembahasan :

Himpunan fuzzy terbuka yang memuat $(2, 0.3)$ adalah

$\{(1, 0.1), (2, 0.3), (3, 0.5), (4, 0.7), (5, 0.9)\}, \{(1, 0.1), (2, 0.3)\}$, $\{(1, 0.1), (2, 0.3), (5, 0.9)\}$, $\{(1, 0.1) , (2, 0.3), (3, 0.5), (4, 0.7)\}$.

Himpunan bagian fuzzy dari X yang memuat $\{(1, 0.1), (2, 0.3), (3, 0.5), (4, 0.7), (5, 0.9)\}$ adalah $\{(1, 0.1), (2, 0.3), (3, 0.5), (4, 0.7)\ (5, 0.9)\}$

Himpunan bagian dari X yang memuat $\{(1, 0.1), (2, 0.3)\}$ adalah

$\{(1, 0.1), (2, 0.3)\}, \{(1, 0.1), (2, 0.3), (5, 0.9)\}, \{(1, 0.1), (2, 0.3), (4, 0.7)\}$, $\{(1, 0.1), (2, 0.3) , (3, 0.5) , (4, 0.7)\}, \{(1, 0.1), (2, 0.3) , (3, 0.5) , (5, 0.9)\}$, $\{(1, 0.1), (2, 0.3), (4, 0.7) , (5, 0.9)\}, \{(1, 0.1), (2, 0.3), (3, 0.5), (4, 0.7)\ (5, 0.9)\}$.

Himpunan bagian dari X yang memuat$\{(1, 0.1), (2, 0.3), (5, 0.9)\}$ adalah :

$\{(1, 0.1), (2, 0.3), (5, 0.9)\}, \{(1, 0.1), (2, 0.3) , (3, 0.5) , (5, 0.9)\}$,$\{(1, 0.1), (2, 0.3), (4, 0.7) , (5, 0.9)\}, \{(1, 0.1), (2, 0.3), (3, 0.5), (4, 0.7)\ (5, 0.9)\}$.

Himpunan bagian dari X yang memuat $\{(1, 0.1) , (2, 0.3), (3, 0.5), (4, 0.7)\}$ adalah $\{(1, 0.1) , (2, 0.3), (3, 0.5), (4, 0.7)\}, \{(1, 0.1), (2, 0.3), (3, 0.5), (4, 0.7)\ (5, 0.9)\}$.

Dari sini diperoleh bahwa $\mathcal{N}\big((2, 0.3)\big)$:

$\{\{(1, 0.1), (2, 0.3)\}, \{(1, 0.1), (2, 0.3), (4, 0.7)\}, \{(1, 0.1), (2, 0.3), (5, 0.9)\}$, $\{(1, 0.1) , (2, 0.3), (3, 0.5), (4, 0.7)\}, \{(1, 0.1), (2, 0.3) , (3, 0.5) , (5, 0.9)\}$, $\{(1, 0.1), (2, 0.3), (4, 0.7) , (5, 0.9)\}, \{(1, 0.1), (2, 0.3), (3, 0.5), (4, 0.7)\ (5, 0.9)\}$

Teorema 3.2.7. (*Mordeson & Nair, 2001: 80*)

Diberikan $(X, \mathcal{FT})$ suatu ruang topologi fuzzy dan $\tilde{A}$ suatu himpunan bagian fuzzy pada X. Misalkan $\mathcal{N}$ sistem persekitaran dari $\tilde{A}$. Jika $\tilde{A}_1, \ldots, \tilde{A}_n \in \mathcal{N}$, maka $\tilde{A}_1 \cap \ldots \cap \tilde{A}_n \in \mathcal{N}$. Jika $\tilde{B}$ suatu himpunan bagian fuzzy dan $\exists \tilde{C} \in \mathcal{N}$ sehingga $\tilde{B} \supseteq \tilde{C}$, maka $\tilde{B} \in \mathcal{N}$.

Bukti :

Jika $\tilde{A}_1$ dan $\tilde{A}_2$ persekitaran dari suatu himpunan bagian fuzzy $\tilde{A}$, ada himpunan terbuka $\widetilde{U}_1$ dan $\widetilde{U}_2$ termuat dalam $\tilde{A}_1$ dan $\tilde{A}_2$, berturut-turut. Dengan demikian $\tilde{A}_1 \cap \tilde{A}_2$ memuat himpunan terbuka $\widetilde{U}_1 \cap \widetilde{U}_2$ dan karenanya $\tilde{A}_1 \cap \tilde{A}_2$ merupakan suatu persekitaran dari $\tilde{A}$. Dengan demikian irisan berhingga dari anggota dari $\mathcal{N}$ adalah suatu anggota dari $\mathcal{N}$. Karenanya, jika suatu himpunan bagian fuzzy $\tilde{B}$ memuat suatu persekitaran $\tilde{C}$ pada $\tilde{A}$, maka $\tilde{B}$ juga merupakan suatu persekitaran terbuka dari $\tilde{A}$ karena $\tilde{B}$ juga memuat elemen dari $\tilde{C}$.

Contoh 3.2.8.

Misalnya dalam semesta $X = \{1,2,3,4,5\}$ dan diberikan derajat keanggotaan

$\mu(1) = 0.1, \mu(2) = 0.3, \mu(3) = 0.5, \mu(4) = 0.7, \mu(5) = 0.9$

Diketahui

$$\mathcal{FT} = \{\chi_\emptyset, \chi_X, \{(1, 0.1)\}, \{(1, 0.1), (2, 0.3)\}, \{(1, 0.1), (3, 0.5), (4, 0.7)\},$$
$$\{(1, 0.1), (2, 0.3), (3, 0.5), (4, 0.7)\}, \{(1, 0.1), (2, 0.3), (5, 0.9)\}\}$$

Merupakan topologi fuzzy pada X.

Dimisalkan $\tilde{A} = \{(1, 0.1), (2, 0.3), (5, 0.9)\}$.

Maka sistem persekitaran $\mathcal{N}$ dari $\tilde{A}$ adalah:

$\mathcal{N}(\tilde{A}) = \{\{(1, 0.1), (2, 0.3), (5, 0.9)\}, \{(1, 0.1), (2, 0.3), (3, 0.5), (5, 0.9)\}$

$, \{(1, 0.1), (2, 0.3), (4, 0.7), (5, 0.9)\}, \{(1, 0.1), (2, 0.3), (3, 0.5), (4, 0.7)\ (5, 0.9)\}\}$

Dari penjabaran di atas diketahui

$\tilde{A}_1 = \{(1, 0.1), (2, 0.3), (5, 0.9)\}$, $\tilde{A}_2 = \{(1, 0.1), (2, 0.3), (3, 0.5), (5, 0.9)\}$,

$\tilde{A}_3 = \{(1, 0.1), (2, 0.3), (4, 0.7), (5, 0.9)\}$ sehingga

$$\begin{aligned} \tilde{A}_1 \cap \tilde{A}_2 \cap \tilde{A}_3 &= \{(1, 0.1), (2, 0.3), (5, 0.9)\} \cap \{(1, 0.1), (2, 0.3), (3, 0.5), (5, 0.9)\} \\ &\quad \cap \{(1, 0.1), (2, 0.3), (4, 0.7), (5, 0.9)\} \\ &= \min(\{(1, 0.1), (2, 0.3), (5, 0.9)\}, \{(1, 0.1), (2, 0.3), (3, 0.5), (5, 0.9)\}, \\ &\quad \{(1, 0.1), (2, 0.3), (4, 0.7), (5, 0.9)\}) \\ &= \{(1, 0.1), (2, 0.3), (5, 0.9)\} \in \mathcal{N}(\tilde{A}). \end{aligned}$$

Dimisalkan

$\tilde{B} = \{(1, 0.1), (2, 0.3), (3, 0.5), (4, 0.7)\ (5, 0.9)\}$ dan

$\tilde{C} = \{(1, 0.1), (2, 0.3), (3, 0.5), (5, 0.9)\} \in \mathcal{N}(\tilde{A})$, dengan demikian $\tilde{B} \supseteq \tilde{C}$, maka $\tilde{B} = \{(1, 0.1), (2, 0.3), (3, 0.5), (4, 0.7)\ (5, 0.9)\} \in \mathcal{N}(\tilde{A})$.

3.3. Interior pada Topologi Fuzzy

Pada sub bab akan dibahas tentang definisi interior pada topologi fuzzy, pembuktian beberapa teorema disertai dengan contoh-contohnya.

Definisi 3.3.1. (*Mordeson, 2001: 81*)

Diberikan $(X, \mathcal{FT})$ suatu ruang topologi fuzzy dan $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ suatu himpunan bagian fuzzy pada X sehingga $\tilde{A} \supseteq \tilde{B}$. Kemudian $\tilde{B}$ disebut suatu himpunan bagian fuzzy interior pada $\tilde{A}$ jika $\tilde{A}$ adalah suatu persekitaran pada $\tilde{B}$. Gabungan dari semua himpunan bagian fuzzy interior pada $\tilde{A}$ disebut interior pada $\tilde{A}$ dan dinotasikan dengan $\tilde{A}^{o}$.

Contoh 3.3.2.

Misalnya dalam semesta $X = \{1,2,3,4,5\}$ dan diberikan derajat keanggotaan

$\mu(1) = 0.1$, $\mu(2) = 0.3$, $\mu(3) = 0.5$, $\mu(4) = 0.7$, $\mu(5) = 0.9$

Diketahui

$\mathcal{FT} = \{\chi_{\emptyset}, \chi_X, \{(1, 0.1)\}, \{(1, 0.1), (2, 0.3)\}, \{(1, 0.1), (3, 0.5), (4, 0.7)\},$

$\{(1, 0.1), (2, 0.3), (3, 0.5), (4, 0.7)\}, \{(1, 0.1), (2, 0.3), (5, 0.9\}\}$

Merupakan topologi fuzzy pada X.

Dimisalkan $\tilde{A} = \{(1, 0.1), (2, 0.3), (5, 0.9)\}$ dan $\tilde{B} = \{(1, 0.1), (2, 0.3)\}$. Jelas bahwa $\tilde{A} \supseteq \tilde{B}$. Selanjutnya akan ditunjukan bahwa $\tilde{A}$ merupakan salah satu persekitaran dari $\tilde{B}$.

Himpunan fuzzy terbuka yang memuat $\tilde{B} = \{(1, 0.1), (2, 0.3)\}$ adalah

$\{(1, 0.1), (2, 0.3), (3, 0.5), (4, 0.7)(5, 0.9)\}, \{(1, 0.1), (2, 0.3)\},$

$\{(1, 0.1), (2, 0.3), (3, 0.5), (4, 0.7)\}$.

Himpunan bagian fuzzy dari X yang memuat $\{(1, 0.1), (2, 0.3), (3, 0.5), (4, 0.7),$ $(5, 0.9)\}$ adalah $\{(1, 0.1), (2, 0.3), (3, 0.5), (4, 0.7)\ (5, 0.9)\}$

Himpunan bagian fuzzy dari X yang memuat $\{(1, 0.1), (2, 0.3)\}$ adalah

$\{(1, 0.1), (2, 0.3)\}, \{(1, 0.1), (2, 0.3), (3, 0.5)\}, \{(1, 0.1), (2, 0.3), (4, 0.7)\}$

$, \{(1, 0.1), (2, 0.3), (5, 0.9)\}\{(1, 0.1), (2, 0.3), (3, 0.5), (4, 0.7)\},$

$\{(1, 0.1), (2, 0.3), (3, 0.5), (5, 0.9)\}, \{(1, 0.1), (2, 0.3), (4, 0.7), (5, 0.9)\}$

$, \{(1, 0.1), (2, 0.3), (3, 0.5), (4, 0.7)\ (5, 0.9)\}$.

Himpunan bagian fuzzy dari X yang memuat $\{(1, 0.1), (2, 0.3), (3, 0.5), (4, 0.7)\}$ adalah :

$\{(1, 0.1), (2, 0.3), (3, 0.5), (5, 0.7)\}, \{(1, 0.1), (2, 0.3), (3, 0.5), (4, 0.7)\ (5, 0.9)\}$.

Himpunan bagian dari X yang memuat $\{(1, 0.1)\ , (2, 0.3)\ , (5, 0.9)\}$ adalah :

$\{(1, 0.1)\ , (2, 0.3)\ , (5, 0.9)\}, \{(1, 0.1), (2, 0.3)\ , (3, 0.5)\ , (5, 0.9)\}$

$, \{(1, 0.1), (2, 0.3), (4, 0.7)\ , (5, 0.9)\}, \{(1, 0.1), (2, 0.3), (3, 0.5), (4, 0.7)\ (5, 0.9)\}$.

Dari sini diperoleh bahwa $\mathcal{N}\big((1, 0.1), (2, 0.3)\big)$:

$\{(1, 0.1), (2, 0.3)\}$, $\{(1, 0.1), (2, 0.3)\ , (3, 0.5)\}$, $\{(1, 0.1), (2, 0.3), (4, 0.7)\}$,

$\{(1, 0.1), (2, 0.3), (5, 0.9)\}, \{(1, 0.1), (2, 0.3), (3, 0.5), (4, 0.7)\}$,

$\{(1, 0.1), (2, 0.3)\ , (3, 0.5)\ , (5, 0.9)\}, \{(1, 0.1), (2, 0.3), (3, 0.5), (4, 0.7)\ (5, 0.9)\}$

Karena $\tilde{A} = \{(1, 0.1), (2, 0.3), (5, 0.9)\}$ merupakan salah satu persekitaran dari $\widetilde{B} = \{(1, 0.1), (2, 0.3)\}$ maka $\tilde{B}$ disebut suatu himpunan bagian fuzzy interior pada $\tilde{A}$.

Sedangkan interior pada $\tilde{A}$ yang dinotasikan dengan $\tilde{A}^{o}$ yang merupakan gabungan dari semua himpunan bagian fuzzy interior dari $\tilde{A}$ yaitu:

$$\begin{aligned}
\tilde{A}^{o} &= \{(1, 0.1)\} \cup \{(2, 0.3)\} \cup \{(5, 0.9)\} \cup \{(1, 0.1), (2, 0.3)\} \cup \{(1, 0.1), (5, 0.9)\} \\
&\quad \cup \{(2, 0.3)\ , (5, 0.9)\} \cup \{(1, 0.1), (2, 0.3), (5, 0.9)\} \\
&= \max(\{0.1\}, \{0.3\}, \{0.9\}, \{0.1\ , 0.3\}, \{0.1\ , 0.9\}, \{0.3\ , 0.9\}, \{0.1\ , 0.3\ , 0.9\}) \\
&= \{0.1\ , 0.3\ , 0.9\} \Leftrightarrow \tilde{A} = \{(1, 0.1), (2, 0.3), (5, 0.9)\}.
\end{aligned}$$

Teorema 3.3.3. (*Mordeson, 2001: 81*)

Diberikan $(X, \mathcal{FT})$ suatu ruang topologi fuzzy dan $\tilde{A}$ suatu himpunan bagian fuzzy pada X. $\tilde{A}$ adalah terbuka jika dan hanya jika $\tilde{A} = \tilde{A}^{o}$ dan $\tilde{A}^{o}$ merupakan himpunan bagian fuzzy terbuka paling besar termuat dalam $\tilde{A}$.

Bukti:

Dengan definisi 3.3.1. $\tilde{A}^{o}$ adalah suatu himpunan bagian fuzzy interior dari $\tilde{A}$. Oleh karena itu ada suatu himpunan bagian fuzzy interior $\tilde{U}$ sehingga $\tilde{A}^{o} \subseteq \tilde{U} \subseteq \tilde{A}$. Tetapi $\tilde{U}$ juga merupakan suatu himpunan bagian fuzzy interior dari $\tilde{A}$ sehingga $\tilde{U} \subseteq \tilde{A}^{o}$. Karena $\tilde{A}^{o} \subseteq \tilde{U}$ dan $\tilde{U} \subseteq \tilde{A}^{o}$ maka $\tilde{A}^{o} = \tilde{U}$. Dengan demikian $\tilde{A}^{o}$ adalah terbuka dan merupakan himpunan bagian fuzzy terbuka paling besar yang termuat dalam $\tilde{A}$. Jika $\tilde{A}$ terbuka, maka $\tilde{A} \subseteq \tilde{A}^{o}$ karena $\tilde{A}^{o}$ adalah suatu himpunan bagian fuzzy interior dari $\tilde{A}$. Karenanya $\tilde{A} = \tilde{A}^{o}$.

Contoh 3.3.4.

Misalnya dalam semesta $X = \{1,2,3,4,5\}$ dan diberikan derajat keanggotaan

$\mu(1) = 0.1, \mu(2) = 0.3, \mu(3) = 0.5, \mu(4) = 0.7, \mu(5) = 0.9$

Diketahui

$$\mathcal{FT} = \{\chi_{\emptyset}, \chi_X, \{(1, 0.1)\}, \{(1, 0.1), (2, 0.3)\}, \{(1, 0.1), (3, 0.5), (4, 0.7)\},$$
$$\{(1, 0.1), (2, 0.3), (3, 0.5), (4, 0.7)\}, \{(1, 0.1), (2, 0.3), (5, 0.9\}\}$$

Merupakan topologi fuzzy pada X.

Dimisalkan $\tilde{A} = \{(1, 0.1), (2, 0.3), (5, 0.9)\}$. Dari contoh 3.3.4 diketahui bahwa:

$\tilde{A}^{o} = \{(1, 0.1), (2, 0.3), (5, 0.9)\}$

Karena $\tilde{A} = \tilde{A}^{o}$, maka $\tilde{A}$ terbuka. Sehingga $\tilde{A}^{o}$ juga terbuka dan merupakan himpunan bagian fuzzy terbuka paling besar termuat dalam $\tilde{A}$.

3.4. Topologi Fuzzy dalam Pandangan Islam

Topologi Fuzzy merupakan konsep teori himpunan dengan memperhatikan himpunan titik-titik dan keluarga himpunan-himpunan tersebut. Dimana dalam hal ini himpunan yang digunakan adalah himpunan fuzzy. Hal inilah yang membedakan antara topologi biasa dengan topologi fuzzy, dimana pada topologi biasa himpunan yang digunakan adalah himpunan tegas (crisp). Pada bab sebelumnya telah dijelaskan bahwa himpunan adalah kumpulan obyek-obyek yang mempunyai ciri-ciri yang sangat jelas. Letak perbedaan antara himpunan tegas (crisp) dan himpunan fuzzy yaitu pada nilai keanggotaannya. Pada Himpunan tegas (crisp) nilai keanggotaanya hanya ada 2 kemungkinan, yaitu 0 atau 1, sedangkan pada himpunan fuzzy nilai keanggotaan terletak pada rentang 0 sampai 1.

Himpunan fuzzy disebut juga himpunan kabur, tidak jelas atau samar. Di mana yang kabur atau tidak jelas itu terletak pada nilai keanggotaan himpunannya. Kekaburan dan kesamaran ini ada karena banyaknya permasalahan yang tidak pasti, banyak keraguan dan ketidakpastian, seperti halnya permasalahan orang munafik dalam islam yang memiliki kedudukan yang tidak pasti dalam islam, kaum munafik mengaku islam tetapi hatinya tidak, mereka selalu dalam keraguraguan sebagaimana yang diterangkan dalam surat An nisaa' ayat 143:

مُّذَبۡذَبِينَ بَيۡنَ ذَٰلِكَ لَآ إِلَىٰ هَٰٓؤُلَآءِ وَلَآ إِلَىٰ هَٰٓؤُلَآءِۚ وَمَن يُضۡلِلِ ٱللَّهُ فَلَن تَجِدَ لَهُۥ سَبِيلٗا ١٤٣

Artinya:

"Mereka dalam keadaan ragu-ragu antara yang demikian (iman atau kafir): tidak masuk kepada golongan Ini (orang-orang beriman) dan tidak (pula) kepada golongan itu (orang-orang kafir), Maka kamu sekali-kali tidak akan mendapat jalan (untuk memberi petunjuk) baginya".

Dalam ayat di atas, dijelaskan tentang orang-orang munafik. Qatadah mengatakan bahwa mereka bukan orang-orang mukmin yang murni, bukan pula orang-orang musyrik yang terang-terangan dengan kemusyrikannya. Qatadah juga mengatakan, telah diceritakan bahwa Nabi Muhammad pernah membuat perumpamaan bagi orang mukmin dan orang munafik serta orang kafir. Perihalnya sama dengan tiga orang yang berangkat menuju ke sebuah sungai. Lalu orang mukmin menceburkan dirinya ke sungai itu dan berhasil menyebranginya. Kemudian orang munafik menceburkan dirinya, tetapi ketika ia hampir sampai ke tempat orang mukmin, tiba-tiba orang kafir menyerunya "kemarilah kepadaku, karena sesungguhnya aku merasa khawatir denganmu." Lalu orang mukmin menyerunya pula, "kemarilah kepadaku, kemarilah ke sisiku." Padahal jika ia berenang terus, niscaya ia dapat memperoleh apa yang ada di sisi orang mukmin itu. Tetapi orang munafik itu terus-menerus dalam keadaan kebingungan di antara kedua orang tersebut, hingga datang air bah yang menenggelamkannya. Orang munafik masih tetap dalam keadaan ragu dan kebingungan hingga ajal datang menjemputnya, sedangkan ia masih tetap dalam keraguannya (Ibnu Katsir, 2001: 589-590).

Golongan orang-orang munafik ini termasuk dalam anggota dari himpunan fuzzy dalam hal kepercayaan. Di mana terdapat orang mukmin dan orang kafir yang berada dalam tingkatan percaya dan tidak percaya, sedangkan orang munafik berada diantara keduanya, karena masih ada dalam keragu-raguan.

Ketika kita membaca Al-Qur’an maka dalam surat Al-Baqarah akan dijumpai tergolong pada tiga golongan, yaitu (1) golongan orang yang bertakwa (muttaqin), (2) golongan orang kafir (kafirin) dan (3) golongan orang munafik (munafiqin). Pada surat Al-Waqi’ah, pada hari kiamat manusia dibagi menjadi 3 kelompok. Jika surat tersebut kita kaitkan dengan konsep himpunan yang sederhana, dapat dikatakan bahwa golongan munafiqin merupakan irisan antara golongan muslimin dengan kafirin. Golongan munafiqin ini yang sering dikatakan kelompok abu-abu. (Abdussakir. 2007: 110).

Salah satu contoh permasalahan lain yang mirip dengan himpunan fuzzy ini adalah permasalahan ayat-ayat yang muhkamaat dan ayat-ayat mutasyaabihaat, sebagaimana yang dijelaskan dalam Al-Qur’an surat Ali imran ayat 7-8 Allah berfirman :

هُوَ ٱلَّذِىٓ أَنزَلَ عَلَيۡكَ ٱلۡكِتَٰبَ مِنۡهُ ءَايَٰتٞ مُّحۡكَمَٰتٌ هُنَّ أُمُّ ٱلۡكِتَٰبِ وَأُخَرُ
مُتَشَٰبِهَٰتٞۖ فَأَمَّا ٱلَّذِينَ فِى قُلُوبِهِمۡ زَيۡغٞ فَيَتَّبِعُونَ مَا تَشَٰبَهَ مِنۡهُ ٱبۡتِغَآءَ ٱلۡفِتۡنَةِ
وَٱبۡتِغَآءَ تَأۡوِيلِهِۦۗ وَمَا يَعۡلَمُ تَأۡوِيلَهُۥٓ إِلَّا ٱللَّهُۗ وَٱلرَّٰسِخُونَ فِى ٱلۡعِلۡمِ يَقُولُونَ ءَامَنَّا بِهِۦ
كُلّٞ مِّنۡ عِندِ رَبِّنَاۗ وَمَا يَذَّكَّرُ إِلَّآ أُوْلُواْ ٱلۡأَلۡبَٰبِ ﴿٧﴾ رَبَّنَا لَا تُزِغۡ قُلُوبَنَا بَعۡدَ إِذۡ
هَدَيۡتَنَا وَهَبۡ لَنَا مِن لَّدُنكَ رَحۡمَةًۚ إِنَّكَ أَنتَ ٱلۡوَهَّابُ ﴿٨﴾

Artinya :
“Dia-lah yang menurunkan Al Kitab (Al Quran) kepada kamu. di antara (isi) nya ada ayat-ayat yang muhkamaat, Itulah pokok-pokok isi Al qur'an dan yang lain (ayat-ayat) mutasyaabihaat. adapun orang-orang yang dalam hatinya condong

kepada kesesatan, Maka mereka mengikuti sebahagian ayat-ayat yang mutasyaabihaat daripadanya untuk menimbulkan fitnah untuk mencari-cari ta'wilnya, padahal tidak ada yang mengetahui ta'wilnya melainkan Allah. dan orang-orang yang mendalam ilmunya berkata: "Kami beriman kepada ayat-ayat yang mutasyaabihaat, semuanya itu dari sisi Tuhan kami." dan tidak dapat mengambil pelajaran (daripadanya) melainkan orang-orang yang berakal. (mereka berdoa): "Ya Tuhan kami, janganlah Engkau jadikan hati kami condong kepada kesesatan sesudah Engkau beri petunjuk kepada kami, dan karuniakanlah kepada kami rahmat dari sisi Engkau; Karena Sesungguhnya Engkau-lah Maha pemberi (karunia)".

Ayat di atas menerangkan bahwa dalam Al Qur'an terdapat Ayat yang muhkamaat ialah ayat-ayat yang terang dan tegas maksudnya, dapat dipahami dengan mudah dan ayat-ayat mutasyaabihaat yaitu ayat-ayat yang mengandung beberapa pengertian dan tidak dapat ditentukan arti mana yang dimaksud kecuali sesudah diselidiki secara mendalam atau ayat-ayat yang pengertiannya hanya Allah yang mengetahui misalnya ayat-ayat yang berhubungan dengan yang ghaib-ghaib misalnya ayat-ayat yang mengenai hari kiamat, surga, neraka dan lain-lain. Dengan kata lain dalam ayat tersebut di atas disebutkan bahwa tidak ada yang mengetahui ta'wilnya kecuali Allah, penggunaan kata ta'wil bermakna mutlak (Jalalain, 2008: 209-210).

Sebagaimana dalam teori himpunan fuzzy yang menyebutkan adanya derajat keanggotaan yang terletak antara [0,1], dalam Al Qur'an menyebutkan adanya ayat-ayat muhkamat dan ayat-ayat mutasyaabihaat yang artinya perlu kajian yang mendalam, derajat keanggotaan hanya dapat ditentukan dengan menghitung secara teliti dan mendalam.

BAB IV

PENUTUP

4.1. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang penulis telah uraikan pada bab III, maka dapat diambil kesimpulan bahwa:

a. Suatu himpunan bagian fuzzy $\tilde{Y}$ pada X adalah suatu persekitaran pada suatu himpunan bagian fuzzy pada $\tilde{A}$ jika ada suatu himpunan bagian fuzzy terbuka $\tilde{U}$ pada X sehingga $\tilde{A} \subseteq \tilde{U} \subseteq \tilde{Y}$.

b. Interior pada $\tilde{A}$, dinotasikan dengan $\tilde{A}^{o}$ terbuka merupakan himpunan bagian fuzzy terbuka paling besar termuat dalam $\tilde{A}$ jika dan hanya jika $\tilde{A}$ = $\tilde{A}^{o}$.

c. Dari hasil pembahasan bab III, ternyata setiap teorema yang terdapat pada persekitaran dan interior pada Topologi juga berlaku pada teori Topologi Fuzzy.

4.2. Saran

Pembahasan pada skripsi ini hanya difokuskan pada pembahasan definisi-definisi dan teorema-teorema Topologi Fuzzy, persekitaran dan Himpunan Interior pada Topologi Fuzzy. Maka untuk penulisan skripsi selanjutnya, penulis menyarankan untuk mengkaji masalah topologi-topologi lain yang dikaitkan dengan Logika Fuzzy, misalnya fungsi kontinyu, kekompakan, dan keterhubungan pada Topologi Fuzzy beserta definisi, teorema dan buktinya.

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press.

Autar, Rusdiana. 2009. *Kajian tentang fuzzy Digraph*. Skripsi Tidak Diterbitkan. Malang: Jurusan Matematika UIN Malang.

Al-Maraghi, Ahmad Mustafa. 1994. *Tafsir Al-Maraghi*. Semarang: CV. Toha Putra Semarang.

Izutsu, Toshihiko. 1993. *Ethico-Religius Concepts in the Qur'an terjemahan Agus Fahri Husein*. Yogyakarta: PT. Tiara Wacana.

Jalaluddin, Imam. 2009. *Terjemahan Tafsir Jalalain berikut Asbabun Nuzul*. Bandung: Sinar Baru Algensindo.

Kartono & Nurwiyati, F.W. 1995. *Pengantar Topologi*. Yogyakarta: Andi Offset Yogyakarta.

Kusumadewi, Sri dkk. 2006. *Fuzzy Multi-Attribute Decision Making (Fuzzy MADM)*. Yogyakarta. Graha Ilmu.

Kusumadewi, Sri & Purnomo, Hadi. 2004. *Aplikasi Logika Fuzzy untuk Pendukung Keputusan*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

Mordeson,John N. & Nair, Premchand S.2001. *Fuzzy Mathematics: An Introduction for Engineers and Scientists Second Edition*. New York: Physics-Verlag Heidelberg.

Munawaroh, Siti. 2007. *Graf Fuzzy*. Skripsi Tidak Diterbitkan. Malang: Jurusan Matematika UIN Malang.

Susilo, Frans.2006. *Himpunan & Logika Kabur serta aplikasinya*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

http://en.wikipedia.org/wiki/Category:Unsolved_problems_in_mathematics (diakses pada tanggal 17 april 2011).

KEMENTRIAN AGAMA
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Malang 65144 Telp. / Fax. (0341) 558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Rakhmad Yanuardi
NIM : 07610034
Fakultas : Sains dan Teknologi
Jurusan : Matematika
Judul Skripsi : Persekitaran dan Interior pada Topologi Fuzzy
Pembimbing I : Hairur Rahman, M.Si
Pembimbing II : Achmad Naschihuddin, MA.

No.	Tanggal	Materi	Ttd. Pembimbing
1	28 Februari 2011	Konsultasi Masalah	
2	03 Maret 2011	Konsultasi Bab I	
3	04 Maret 2011	Revisi Bab I	
4	07 Juni 2011	Konsultasi Bab II	
5	14 Juni 2011	Revisi Bab II	
6	16 Juni 2011	Konsultasi Keagamaan Bab I, II	
7	28 Juli 2011	Konsultasi Bab III	
8	09 Agustus 2011	Revisi Bab III	
9	09 Agustus 2011	Revisi Keagamaan Bab I, II	
10	09 Agustus 2011	Konsultasi Keagamaan Bab III	
11	10 Agustus 2011	Revisi Keagamaan Bab III	
12	10 Agustus 2011	ACC Skripsi Keseluruhan	
13	13 Agustus 2011	ACC Keagamaan Keseluruhan	

Malang, 13 Agustus 2011
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006200312 1 001