KETERHUBUNGAN DALAM GRAF KOMUTATIF DARI MATRIKS BILANGAN REAL

SKRIPSI

oleh:
YUSTYCIA PRATAMASARI
NIM. 06510016

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2010

KETERHUBUNGAN DALAM GRAF KOMUTATIF DARI MATRIKS BILANGAN REAL

SKRIPSI

oleh:
YUSTYCIA PRATAMASARI
NIM. 06510016

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2010

KETERHUBUNGAN DALAM GRAF KOMUTATIF DARI MATRIKS BILANGAN REAL

SKRIPSI

Diajukan kepada:
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

oleh:
YUSTYCIA PRATAMASARI
NIM. 06510016

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2010

KETERHUBUNGAN DALAM GRAF KOMUTATIF DARI MATRIKS BILANGAN REAL

SKRIPSI

oleh:
YUSTYCIA PRATAMASARI
NIM. 06510016

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji:
Tanggal: 23 Juni 2010

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Drs. H. Turmudi, M.Si	Dr. Ahmad Barizi, M.A
NIP. 19571005 198203 1 006	NIP. 19731212 199803 1 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

KETERHUBUNGAN DALAM GRAF KOMUTATIF DARI MATRIKS BILANGAN REAL

SKRIPSI

Oleh:
YUSTYCIA PRATAMASARI
NIM: 06510016

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal: 21 Juli 2010

Susunan Dewan Penguji:			Tanda Tangan
1.	Penguji Utama	: Abdussakir, M.Pd NIP. 19751006 200312 1 001	....
2.	Ketua Penguji	: Wahyu Henky Irawan, M.Pd NIP. 19710420 200003 1 003	....
3.	Sekretaris Penguji	: Drs. H. Turmudi, M.Si NIP. 19571005 198203 1 006	....
4.	Anggota Penguji	: Dr. Ahmad Barizi, M.A NIP. 19731212 199803 1 001	....

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

بسم الله الرحمن الرحيم

Penulis Persembahkan

Karya ini untuk orang-orang yang sangat berarti:

Kedua orangtua tercinta yang tanpa lelah memberikan dorongan moral, spiritual, finansial dan tak henti-hentinya mencurahkan kasih sayangnya.

Adik tersayang "Ayusta Maulana Putrasari", teruslah berjuang untuk berbakti dan banggakan kedua orangtua.

Serta keluarga besar yang ada di Pasuruan, terima kasih atas do'a dan semangat yang telah diberikan.

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Yustycia Pratamasari

NIM : 06510016

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambil alihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 16 Juni 2010
Yang membuat pernyataan,

Yustycia Pratamasari
NIM. 06510016

Motto

"Raihlah ilmu, dan untuk meraih ilmu belajarlah untuk tenang dan sabar"

(Khalifah Umar)

"Agama tanpa ilmu adalah buta. Ilmu tanpa agama adalah lumpuh"

(Albert Einstein)

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Syukur alhamdulillah penulis hanturkan kehadirat Allah SWT yang telah melimpahkan Rahmat dan Hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan studi di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang sekaligus menyelesaikan skripsi ini dengan baik.

Selanjutnya penulis haturkan ucapan terima kasih seiring do'a dan harapan *jazakumullah ahsanal jaza'* kepada semua pihak yang telah membantu terselesaikannya skripsi ini. Ucapan terima kasih ini penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo selaku Rektor UIN Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah banyak memberikan pengetahuan dan pengalaman yang berharga.
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU., DSc. selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd selaku ketua jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Drs. H. Turmudi, M.Si dan Dr. Ahmad Barizi, M.A selaku dosen pembimbing skripsi, yang telah banyak memberikan pengarahan dan pengalaman yang berharga.

5. Wahyu Henky Irawan, M.Pd selaku Dosen Wali yang telah memberikan nasihat serta semangat kepada penulis selama menjalani perkuliahan.
6. Segenap dosen jurusan Matematika yang telah berjasa memberikan ilmunya, membimbing dan memberikan motivasi dalam penyelesaian skripsi ini.
7. Himmah Rosyidah, teman seperjuangan penulis dalam penyelesaian skripsi ini.
8. Teman-teman matematika angkatan 2006, khususnya Erni Nur Indah Lestari, Mochamad David Andika Putra, Wildan Habibi, Inda Safitri, Hindayani, Binti Muslimatin, Wiwik Hindriyani, dan Yuvita Eka Lestari, terima kasih atas dukungan, motivasi, dan kebersamaannya selama ini.
9. Teman-teman kos, khususnya Choirunissa, Rosida Wachdani, dan Rizky Hardiyatul Maulidah, terima kasih atas persahabatan kita.
10. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu, yang telah banyak membantu dalam penyelesaian skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa dalam penyusunan skripsi ini masih terdapat kekurangan dan penulis berharap semoga skripsi ini bisa memberikan manfaat kepada para pembaca khususnya bagi penulis secara pribadi. *Amin Ya Rabbal Alamin.*

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Malang, 16 Juli 2010

Penulis

DAFTAR ISI

BAB II KAJIAN PUSTAKA

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Pratamasari, Yustycia. 2010. **Keterhubungan dalam Graf Komutatif dari Matriks Bilangan Real.** Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: (I) Drs. Turmudi, M.Si.
(II) Dr. Ahmad Barizi, M.A.

Berdasarkan definisi tentang graf komutatif dari matriks division ring, diketahui bahwa division ring merupakan entri dari matriks. Field adalah division ring yang bersifat komutatif, contohnya adalah bilangan real. Pada pembahasan tentang graf, salah satu hal yang menarik untuk dibahas yaitu tentang keterhubungan. Berdasarkan latar belakang masalah tersebut penelitian dilakukan dengan tujuan menjelaskan keterhubungan dalam graf komutatif dari matriks bilangan real. Metode penelitian dalam skripsi ini adalah penelitian pustaka, dengan langkah-langkah berikut: (1) Menyelidiki keterhubungan graf komutatif dari matriks diagonal; (2) Menyelidiki keterhubungan graf komutatif dari matriks segitiga.

Berdasarkan hasil pembahasan dapat diperoleh bahwa jika S adalah matriks diagonal dimana $S \subseteq \mathrm{M}_{\mathrm{n}}(\mathrm{R})$, maka tidak terdapat graf komutatif dari S. Hal itu dikarenakan bentuk umum dari matriks diagonal sama dengan centernya, sehingga himpunan simpulnya merupakan himpunan kosong.

Apabila S adalah matriks segitiga dimana entri yang bukan nol adalah boleh bernilai nol dan $S \subseteq \mathrm{M}_2(\mathrm{R})$, maka graf komutatif dari S adalah tidak terhubung. Dan apabila S adalah matriks segitiga dimana entri yang bukan nol adalah tidak boleh bernilai nol dan $S \subseteq \mathrm{M}_{\mathrm{n}}(\mathrm{R})$, maka graf komutatif dari S adalah merupakan graf kosong.

Kata Kunci: Matriks bilangan real, Graf komutatif, Keterhubungan.

ABSTRACT

Pratamasari, Yustycia. 2010. **Connectivity in Commuting Graphs of matrices over Real Numbers.** Thesis, Department of Mathematics Faculty of Science and Technology, State Islamic University Maulana Malik Ibrahim of Malang.
Advisor: (I) Drs. Turmudi, M.Si
(II) Dr. Ahmad Barizi, MA

From the definitions about commuting graphs of matrices over division ring, it is known that the division ring is the entry of matrix. Field is commutative division ring, the example is a real numbers. In the discussion of the graph, one interesting to discuss is about the connectedness. Based on the background of these problems, research was conducted with the aim to explains the connectivity of the commuting graphs of matrices over real numbers.
Methods of research in this thesis is the library research methods, with the following steps: (1) Investigate the connectivity of the commuting graph of diagonal matrix; (2) Investigate the connectivity of the commuting graph of triangular matrix.
Based on the discussion result can be obtained that if *S* is a diagonal matrix where $S \subseteq \mathrm{M}_n(\mathrm{R})$, then there is no commuting graphs. That's because general form of diagonal matrix is equivalent with its center, so vertices set be an empty set.
If *S* is a triangular matrix where non zero entries are may have the zero value and $S \subseteq \mathrm{M}_2(\mathrm{R})$, then commuting graph of *S* is disconnected. And if *S* is a triangular matrix where non zero entries are may have not the zero value and $S \subseteq \mathrm{M}_n(\mathrm{R})$, then commuting graph of *S* is an empty graph.

Keywords: Matrices over real numbers, commuting graph, connectivity.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan ilmu pengetahuan dasar yang dibutuhkan oleh masyarakat dalam kehidupan sehari-hari baik secara langsung maupun tidak langsung. Matematika juga merupakan ilmu yang tidak terlepas dari agama. Pandangan ini dengan jelas dapat diketahui kebenarannya dari ayat-ayat Al-Qur'an yang berkaitan dengan matematika, di antaranya adalah ayat-ayat yang berbicara mengenai bilangan, operasi bilangan, dan adanya perhitungan. (Fathani, 2008: 217)

Hal tersebut dapat dilihat di dalam surat Maryam ayat 94 sebagai berikut:

لَّقَدْ أَحْصَىٰهُمْ وَعَدَّهُمْ عَدًّا ﴿٩٤﴾

"Sesungguhnya Allah telah menentukan jumlah mereka dan menghitung mereka dengan hitungan yang teliti."

Selain itu, Allah juga berfirman dalam surat Al-Qamar ayat 49 sebagai berikut:

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَٰهُ بِقَدَرٍ ﴿٤٩﴾

"Sesungguhnya Kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran."

Berbagai hal yang terdapat di alam semesta ini telah ada ukurannya, hitungannya, dan teoremanya. Seseorang yang ahli matematika tidak membuat suatu teorema. Mereka hanya menemukan teorema tersebut. Oleh karena itu, apabila di dalam kehidupan ditemukan suatu permasalahan, manusia harus selalu berusaha untuk menemukan solusinya.

Pembuktian kebenaran suatu teorema harus selalu ada pada saat menemukan teorema tersebut. Apabila kebenaran teorema tersebut belum jelas, maka kita tidak boleh mengikutinya.

Allah berfirman di dalam surat Al-hujurat ayat 6:

يَٰٓأَيُّهَا ٱلَّذِينَ ءَامَنُوٓاْ إِن جَآءَكُمۡ فَاسِقُۢ بِنَبَإٖ فَتَبَيَّنُوٓاْ أَن تُصِيبُواْ قَوۡمَۢا بِجَهَٰلَةٖ فَتُصۡبِحُواْ عَلَىٰ مَا فَعَلۡتُمۡ نَٰدِمِينَ ٦

"Hai orang-orang yang beriman, jika datang kepadamu orang fasik membawa suatu berita, maka periksalah dengan teliti, agar kamu tidak menimpakan suatu musibah kepada suatu kaum tanpa mengetahui keadaannya yang menyebabkan kamu menyesal atas perbuatanmu itu."

Di dalam ayat tersebut, semua orang muslim diwajibkan untuk menyelidiki kebenaran (فَتَبَيَّنُوٓا) atas segala sesuatu sebelum mempercayainya.

Apabila teorema tersebut benar, maka harus ditunjukkan bukti yang benar dari teorema tersebut.

Allah berfirman di dalam surat Al Baqarah ayat 111 sebagai berikut:

وَقَالُواْ لَن يَدۡخُلَ ٱلۡجَنَّةَ إِلَّا مَن كَانَ هُودًا أَوۡ نَصَٰرَىٰۗ تِلۡكَ أَمَانِيُّهُمۡۗ قُلۡ هَاتُواْ بُرۡهَٰنَكُمۡ إِن كُنتُمۡ صَٰدِقِينَ ١١١

“Dan mereka (Yahudi dan Nasrani) berkata: "Sekali-kali tidak akan masuk surga kecuali orang-orang (yang beragama) Yahudi atau Nasrani." Demikian itu (hanya) angan-angan mereka yang kosong belaka. Katakanlah: "Tunjukkanlah bukti kebenaranmu jika kamu adalah orang yang benar."

Para ahli kitab, baik Yahudi maupun Nasrani, telah berpendapat bahwa hanya golongan mereka sendiri yang akan masuk surga. Di dalam ayat tersebut Allah SWT meminta bukti kebenaran yang menguatkan pendapat mereka. Walaupun arti dari ayat tersebut terdapat tuntunan yang mengemukakan bukti, maknanya menyatakan ketidakbenaran pendapat mereka karena mereka tidak akan dapat mengemukakan bukti yang benar. Dalam ayat tersebut terdapat isyarat bahwa suatu pendapat yang tidak didasarkan bukti yang benar maka pendapat tersebut tidak akan diterima.

Untuk membuktikan kebenaran sesuatu (pernyataan atau berita), maka diperlukan pengetahuan matematika. Salah satu cabang dari pengetahuan matematika adalah aljabar. Aljabar (berasal dari bahasa Arab “*al-jabr*” yang berarti “*pertemuan*”, atau “*hubungan*”) merupakan salah satu cabang dari matematika yang dapat dicirikan sebagai generalisasi dari aritmatika. Aljabar linear mempelajari sistem persamaan linear dan solusinya, vektor, dan transformasi linear. Pembahasan mengenai matriks dan operasinya juga berkaitan erat dengan aljabar linear. Sedangkan aljabar abstrak mempelajari struktur aljabar, seperti grup, ring, medan, dan lain sebagainya. Teori graf juga merupakan bagian dari matematika yang mempelajari sifat-sifat dari graf.

Ketiga bagian dari matematika tersebut bukan merupakan pembahasan yang terpisah. Ketiganya masih memiliki hubungan. Graf komutatif merupakan salah satu contoh pembahasan dari ketiga bagian matematika tersebut. Di dalam pembahasan tentang graf komutatif, diperlukan pemahaman tentang ring yang merupakan bagian dari aljabar abstrak. Selain itu diperlukan operasi perkalian matriks dalam menentukan keterhubungan langsung (*adjacent*) simpul-simpulnya yang mana hal itu terdapat di dalam aljabar linear. Sedangkan penjelasan tentang graf ada di dalam teori graf.

Pada pembahasan tentang graf, salah satu hal yang menarik untuk dibahas yaitu tentang keterhubungan dari graf tersebut. Diberikan sebuah graf G, sebuah lintasan P (*path*) adalah barisan $v_0,e_1,v_1,e_2,\ldots,e_k,v_k$ yang secara berurutan merupakan titik dan sisi berbeda di dalam G, untuk setiap i, $1 \leq i \leq k$, akhir dari e_i adalah v_{i-1} dan v_i. Dikatakan u adalah terhubung ke v di dalam G jika ada lintasan di antara u dan v. Graf G adalah terhubung jika ada lintasan di antara setiap dua titik yang berbeda dari G.

Misal D merupakan division ring dan $\mathrm{M_n(D)}$ merupakan himpunan dari semua matriks n x n atas D. Untuk $S \subseteq \mathrm{M_n(D)}$, graf komutatif dari S, yang dilambangkan dengan $\Gamma(S)$, adalah graf dengan himpunan titik $S \backslash Z(S)$ sedangkan titik berbeda A dan B terhubung langsung (*adjacent*) jika dan hanya jika $AB = BA$ dimana $Z(S) = \{A|A \in S, AB = BA, \forall B \in S\}$. (Vaezpour & Raja, 2009)

Dari pengertian tentang graf komutatif di atas, dapat dikhususkan lagi pengertiannya apabila division ring (D) tersebut diganti dengan bilangan real (R). Hal tersebut dikarenakan bilangan real merupakan salah satu contoh dari field, sedangkan field merupakan division ring yang bersifat komutatif. Sehingga pengertian graf komutatif dari S yang merupakan subset dari matriks bilangan real dengan ordo *n* adalah sebagai berikut:

Misal R merupakan bilangan real dan $\mathrm{M_n}(R)$ merupakan himpunan dari semua matriks *n* x *n* atas *R*. Untuk $S \subseteq \mathrm{M_n}(R)$, graf komutatif dari S, yang dilambangkan dengan $\Gamma(S)$, adalah graf dengan himpunan titik $S \backslash Z(S)$ sedangkan titik berbeda A dan B terhubung langsung (*adjacent*) jika dan hanya jika $AB = BA$ dimana $Z(S) = \{A | A \in S, AB = BA, \forall\, B \in S\}$.

Permasalahan yang muncul di dalam pembahasan mengenai graf komutatif adalah tentang bagaimanakah keterhubungan yang dimiliki oleh graf tersebut. Oleh sebab itu, dalam penelitian ini penulis tertarik untuk meneliti mengenai keterhubungan dalam graf komutatif dari matriks bilangan real.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah bagaimanakah keterhubungan dalam graf komutatif dari matriks bilangan real?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan penulisan skripsi ini adalah untuk menjelaskan keterhubungan dalam graf komutatif dari matriks bilangan real.

1.4 Batasan Masalah

Agar penulisan skripsi ini tidak meluas, maka pembahasan dilakukan hanya pada keterhubungan dalam graf komutatif dari matriks bilangan real. Bilangan real yang menjadi entri matriks adalah field, yang merupakan division ring yang bersifat komutatif.

Matriks bilangan real yang akan dibahas merupakan matriks diagonal dan matriks segitiga. Matriks tersebut dilambangkan dengan S, dimana S merupakan himpunan bagian (*subset*) dari matriks bilangan real dengan ordo n ($S \subseteq \mathrm{M}_{\mathrm{n}}(\mathrm{R})$).

1.5 Manfaat Penelitian

Penulisan skripsi ini diharapkan dapat memberikan manfaat, yaitu:

1) Bagi Penulis

   Penelitian ini digunakan sebagai tambahan informasi dan wawasan pengetahuan tentang aljabar linear, aljabar abstrak, dan teori graf, khususnya tentang penjelasan keterhubungan dalam graf komutatif dari matriks bilangan real.

2) Bagi Lembaga

   Hasil penelitian ini dapat digunakan sebagai tambahan kepustakaan yang dijadikan sarana pengembangan wawasan keilmuan khususnya di jurusan matematika untuk mata kuliah aljabar linear, aljabar abstrak, dan teori graf.

3) Bagi Pengembangan Ilmu

   Hasil penelitian ini dapat dijadikan sebagai bahan kajian keilmuan untuk menambah wawasan keilmuan.

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam skripsi ini adalah metode penelitian pustaka (*library research*), yaitu dengan mengumpulkan data dan informasi dari berbagai sumber seperti buku, jurnal, atau makalah-makalah. Penelitian dilakukan dengan melakukan kajian terhadap buku-buku aljabar linear, aljabar abstrak, dan teori graf dan jurnal-jurnal atau makalah-makalah yang memuat topik tentang graf komutatif.

Langkah selanjutnya adalah menyelidiki keterhubungan dalam graf komutatif dari matriks bilangan real, langkah-langkahnya adalah:

a. Menyelidiki keterhubungan graf komutatif dari S atau $\Gamma(S)$ dimana $S \subseteq M_2(\mathbb{R})$ dan S adalah matriks diagonal.
b. Menyelidiki keterhubungan graf komutatif dari S atau $\Gamma(S)$ dimana $S \subseteq M_2(\mathbb{R})$ dan S adalah matriks segitiga dimana entri yang bukan nol boleh bernilai nol.
c. Menyelidiki keterhubungan graf komutatif dari S atau $\Gamma(S)$ dimana $S \subseteq M_2(\mathbb{R})$ dan S adalah matriks segitiga dimana entri yang bukan nol tidak boleh bernilai nol.

1.7 Sistematika Penulisan

Untuk mempermudah dalam memahami skripsi ini secara keseluruhan maka penulis menggunakan sistematika pembahasan yang terdiri dari 4 bab dan masing-masing akan dijelaskan sebagai berikut:

BAB I. PENDAHULUAN

Dalam bab ini dilakukan penjelasan tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metodologi penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II KAJIAN PUSTAKA

Pada bagian ini terdiri atas konsep-konsep (teori-teori) yang mendukung bagian pembahasan. Konsep-konsep tersebut antara lain membahas aljabar matriks, grup dan ring, teori graf dan representasinya di dalam Islam.

BAB III PEMBAHASAN

Di dalam bab ini akan dijelaskan center dan graf komutatif dari matriks bilangan real. Selanjutnya menyelidiki keterhubungan graf komutatif dari S atau $\Gamma(S)$ dimana $S \subseteq \mathrm{M}_2(\mathrm{R})$ dengan S merupakan matriks diagonal, matriks segitiga dimana entri yang bukan nol boleh bernilai nol, dan matriks segitiga dimana entri yang bukan nol tidak boleh bernilai nol. Setelah itu dilakukan diskusi dari hasil pembahasan tersebut.

BAB IV PENUTUP

Pada bab ini dibahas tentang kesimpulan dan saran.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1. Aljabar Matriks

2.1.1. Definisi Matriks

Di dalam kehidupan, sering dijumpai masalah-masalah yang membutuhkan perlakuan khusus. Hal tersebut dimaksudkan untuk keperluan penyajian dan pencarian metode penyelesaiannya. Salah satu bentuk penyajiannya adalah dengan menyusun item-item dalam bentuk baris dan kolom, yang biasanya disebut dengan matriks.

Penggunaan matriks telah banyak dijumpai dalam kehidupan sehari-hari, disadari ataupun tidak, penggunaan matriks tersebut telah banyak dimanfaatkan dalam menyelesaikan masalah-masalah yang berhubungan dengan kehidupan, misalnya pada aplikasi perbankan dan juga di dalam dunia olahraga yang digunakan sebagai penentuan klasemen suatu pertandingan.

Suatu matriks (*matrix*) adalah jajaran empat persegi panjang dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam jajaran tersebut disebut ***entri*** dari matriks. (Anton dan Rorres, 2004: 26)

Sehingga matriks merupakan suatu susunan yang berbentuk persegi panjang yang terdiri dari bilangan-bilangan. Baris sebuah matriks adalah susunan bilangan-bilangan yang mendatar (arah horizontal) dalam matriks. Kolom sebuah matriks adalah susunan bilangan-bilangan yang tegak (arah vertikal) dalam matriks.

Suatu matriks dapat ditulis dalam bentuk ( ) atau [ ]. Matriks dilambangkan dengan huruf besar, misalnya A, B, dan seterusnya. Entri pada matriks dilambangkan dengan huruf kecil dan berindeks, misalnya a_{mn} yang merupakan entri pada baris ke- *m* dan kolom ke- *n*. Bentuk umum dari matriks adalah:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

dimana *m* menunjukkan baris dan *n* menunjukkan kolom.

Ukuran matriks atau biasa disebut dengan ordo matriks menyatakan jumlah baris dan jumlah kolom yang terdapat di dalam matriks tersebut. Apabila suatu matriks memiliki jumlah baris sebanyak (*m*) dan jumlah kolom (*n*), maka disebut matriks berordo *m* x *n*.

Dari definisi tentang matriks di atas, maka contoh dari matriks adalah sebagai berikut:

a. Matriks berordo 2 x 1: $A = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$

Entri matriks *A* adalah: $a_{11} = 5$ dan $a_{21} = 3$.

b. Matriks berordo 2 x 2: $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

Entri matriks *B* adalah: $b_{11} = 1$, $b_{12} = 4$, $b_{21} = 4$, dan $b_{22} = 3$.

c. Matriks berordo 3 x 3: $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \sqrt{5} \\ 0 & \frac{2}{3} & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Entri matriks *B* adalah: $a_{11} = 1$, $a_{12} = 2$, $a_{13} = \sqrt{5}$, $a_{21} = 0$, $a_{22} = \frac{2}{3}$, $a_{23} = 4$, $a_{31} = 0$, $a_{32} = 0$, dan $a_{33} = 0$.

2.1.2. Kesamaan Matriks

Dua matriks adalah sama (*equal*) jika keduanya memiliki ukuran yang sama dan entri-entri yang bersesuaian adalah sama. (Anton dan Rorres, 2004: 28)

Di dalam notasi matriks, apabila $A = [a_{ij}]$ dan $B = [b_{ij}]$ memiliki ukuran yang sama, maka $A = B$ jika dan hanya jika $(A)_{ij} = (B)_{ij}$, atau $a_{ij} = b_{ij}$ untuk semua i dan j.

Contoh:

a. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 7 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 7 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

Dua matriks di atas memiliki ukuran dan entri-entri yang bersesuaian sama, sehingga $A = B$.

b. $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & x \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$

Apabila nilai $x = 6$, maka $A = B$, tetapi untuk semua nilai x yang lain, matriks A dan B adalah tidak sama karena tidak semua entri-entri yang bersesuaian adalah sama.

2.1.3. Perkalian Skalar Matriks

Jika A adalah matriks sebarang dan c adalah skalar sebarang, maka ***hasilkali***-nya (*product*) cA adalah matriks yang diperoleh dari perkalian setiap entri pada matriks A pada bilangan c. Matriks cA disebut sebagai kelipatan skalar (*scalar multiple*) dari A. (Anton dan Rorres, 2004: 29).

Di dalam notasi matriks, apabila $A = [a_{ij}]$, maka $(cA)_{ij} = c(A)_{ij} = ca_{ij}$. Atau dapat juga ditulis sebagai

$$cA = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \cdots & ca_{1j} \\ ca_{21} & ca_{22} & \cdots & ca_{2j} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ca_{i1} & ca_{i2} & \cdots & ca_{ij} \end{bmatrix}$$

Contoh: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$, maka $3A = \begin{bmatrix} 3(1) & 3(3) & 3(2) \\ 3(3) & 3(5) & 3(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 6 \\ 9 & 15 & 6 \end{bmatrix}$

2.1.4. Perkalian Matriks

Jika *A* adalah matriks *m* x *r* dan *B* adalah matriks *r* x *n* maka hasilkali (*product*) *AB* adalah matriks *m* x *n* yang entri-entrinya ditentukan sebagai berikut. Untuk mencari entri pada baris *i* dan kolom *j* dari *AB*, pisahkanlah baris *i* dari matriks *A* dan kolom *j* dari matriks *B*. Kalikan entri-entri yang bersesuaian dari baris dan kolom tersebut dan kemudian jumlahkan hasil yang diperoleh. (Anton dan Rorres, 2004: 30)

Dengan kata lain, perkalian matriks dapat didefinisikan sebagai berikut: misalkan $A = [a_{mr}]$ dan $B = [b_{rn}]$ merupakan matriks-matriks yang sedemikian rupa sehingga jumlah kolom dari *A* sama dengan jumlah baris dari *B*. Maka hasilkali *AB* adalah matriks *m* x *n* yang mana entri *ij* diperoleh dengan mengalikan baris ke-*i* dari *A* dengan kolom ke-*j* dari *B*.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \boldsymbol{a_{i1}} & \cdots & \boldsymbol{a_{ir}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & \boldsymbol{b_{1j}} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{r1} & \cdots & \boldsymbol{b_{rj}} & \cdots & b_{rn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \boldsymbol{c_{ij}} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

di mana $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ir}b_{rj} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik}b_{kj}$.

Berdasarkan definisi dari perkalian matriks tersebut, maka dua matriks dapat dikalikan apabila jumlah kolom matriks pertama sama dengan jumlah baris dari matriks kedua. Sehingga dapat dituliskan sebagai berikut:

$$A_{m\times r} \times B_{r\times n} = C_{m\times n}$$

Contoh dari perkalian matriks adalah sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

A adalah matriks 2 x 3 dan *B* adalah matriks 3 x 4, sehingga hasil *AB* adalah matriks 2 x 4. Untuk menentukan, misalnya, entri pada baris 2 dan kolom 3 dari *AB*, kita memisahkan baris 2 dari *A* dan kolom 3 dari *B*. Kemudian mengalikan entri-entri yang bersesuaian dan menjumlahkan hasilkalinya.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & \mathbf{2} & 3 \\ 0 & 1 & \text{桥} & 1 \\ 2 & 2 & \mathbf{1} & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \mathbf{13} & \cdots \end{bmatrix}$$

(3.2) + (2.3) + (1.1) = 13

entri pada baris 1 dan kolom 4 dari *AB* dihitung dengan cara berikut.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & \mathbf{3} \\ 0 & 1 & 3 & \mathbf{1} \\ 2 & 2 & 1 & \mathbf{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{11} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

(1.3) + (2.1) + (3.2) = 11

Perhitungan untuk hasilkali lainnya adalah:

(1.2) + (2.0) + (3.2) = 8

(1.1) + (2.1) + (3.2) = 9

(1.2) + (2.3) + (3.1) = 11

$$AB = \begin{bmatrix} 8 & 9 & 11 & 11 \\ 8 & 7 & 13 & 13 \end{bmatrix}$$

(3.2) + (2.0) + (1.2) = 8

(3.1) + (2.1) + (1.2) = 7

(3.3) + (2.1) + (1.2) = 13

Misal *A*, *B*, dan *C* adalah matriks yang dapat dikalikan, maka sifat-sifat dari perkalian matriks adalah:

1. Sifat distributif

    a. $A\ (B + C) = AB + AC$

    b. $(A + B)\ C = AB + BC$

2. Sifat asosiatif

    $A\ (BC) = (AB)\ C$

3. $AB \neq BA$

    Perkalian matriks tidak memenuhi sifat komutatif. Pada bilangan real berlaku $ab = ba$. Sedangkan pada matriks, AB tidak selalu sama dengan BA. Hal tersebut dapat disebabkan pada kasus sebagai berikut:

    a. Hasil dari AB dapat didefinisikan, akan tetapi hasil dari BA tidak dapat didefinisikan. Sebagai contoh, apabila A adalah matriks yang memiliki ordo 2 x 3, dan B adalah matriks yang memiliki ordo 3 x 4.

    b. Hasil dari AB dan BA dapat didefinisikan, akan tetapi masing-masing entri yang bersesuaian dari matriks tersebut adalah berbeda. Sebagai contoh:

    $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ sehingga}$$

    $$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 10 & 8 \end{bmatrix}$$

    $$BA = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}$$

    Dari hasil tersebut, dapat disimpulkan bahwa $AB \neq BA$.

4. Perkalian dengan identitas

    $IA = AI = A$.

2.1.5. Transpos Matriks

Jika A adalah matriks m x n, maka transpos dari A (*transpose of A*), dinyatakan dengan A^T, didefinisikan sebagai matriks n x m yang didapatkan dengan mempertukarkan baris-baris dan kolom-kolom dari A; sehingga kolom pertama dari A^T adalah baris pertama dari A, kolom kedua dari A^T adalah baris kedua dari A, dan seterusnya. (Anton dan Rorres, 2004: 36)

Dari definisi tersebut, dapat dikatakan bahwa matriks transpos adalah suatu matriks yang diperoleh dari perpindahan baris pada matriks A yang berubah menjadi kolom pada matriks A^T, sehingga dapat dituliskan sebagai:

$$A_{m\times n} = (a_{ij}) \rightarrow A^T = (a_{ji})$$

Contoh: $A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 4 \\ 9 & 5 & 5 \\ 2 & 8 & 4 \end{bmatrix}$ sehingga $\_^T = \begin{bmatrix} 2 & 9 & 2 \\ 7 & 5 & 8 \\ 4 & 5 & 4 \end{bmatrix}$.

Transpos dari sebuah hasilkali adalah hasil kali dari transpos-transposnya, tetapi dalam urutan terbalik. (Lipschutz dan Lipson, 2004: 14). Yaitu sebagai berikut:

$$(AB)^T = B^T A^T$$

Apabila perkalian matriks A dan B memiliki sifat komutatif, maka

$$(AB)^T = (BA)^T$$

$$\leftrightarrow B^T A^T = A^T B^T$$

sehingga berlaku:

$$(AB)^T = A^T B^T$$

$$(BA)^T = B^T A^T$$

2.1.6. Matriks Bujursangkar

Matriks bujursangkar adalah matriks dengan jumlah baris dan kolom yang sama. (Lipschutz dan Lipson, 2004: 15)

Matriks bujursangkar atau dapat juga dinamakan matriks persegi yang memiliki orde n, biasanya disebut *matriks bujursangkar-n*. Entri a_{11}, a_{22}, a_{33},..., a_{nn} berada pada diagonal utama dari matriks A. Matriks bujursangkar dibedakan menjadi matriks identitas, matriks diagonal, matriks segitiga, dan matriks simetrik.

Contoh:

1. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, Matriks bujursangkar dengan orde 2.
2. $\begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 6 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \end{bmatrix}$, Matriks bujursangkar dengan orde 3.

2.1.7. Matriks Segitiga

Matriks bujursangkar yang semua entri di atas diagonal utamanya adalah nol disebut matriks **segitiga bawah** (*lower triangular*) dan matriks bujursangkar yang semua entri di bawah diagonal utamanya adalah nol disebut matriks **segitiga atas** (*upper triangular*). Suatu matriks, baik segitiga bawah atau segitiga atas disebut matriks segitiga (*triangular*). (Anton dan Rorres, 2004: 76)

Berdasarkan definisi tersebut, transpos dari matriks segitiga bawah adalah matriks segitiga atas. Demikian juga sebaliknya, transpos dari matriks segitiga atas adalah matriks segitiga bawah.

Contoh matriks segitiga atas:

1. $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$, matriks segitiga atas dengan orde 2.

2. $\begin{bmatrix} 5 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, matriks segitiga atas dengan orde 3.

3. $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, matriks segitiga atas dengan orde 4.

Contoh matriks segitiga bawah:

1. $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$, matriks segitiga bawah dengan orde 2.

2. $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, matriks segitiga bawah dengan orde 3.

3. $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 9 & 3 \end{bmatrix}$, matriks segitiga bawah dengan orde 4.

2.1.8. Matriks Diagonal

Suatu matriks bujursangkar yang semua entrinya yang tidak terletak pada diagonal utama adalah nol disebut **matriks diagonal** (*diagonal matrix*). (Anton dan Rorres, 2004: 74)

Bentuk umum dari matriks diagonal *A*, dengan ordo *n* dapat ditulis sebagai:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{bmatrix}$$

Contoh:

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, matriks *A* adalah matriks diagoonal berordo 2 x 2.

2. $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, matriks B adalah matriks diagoonal berordo 3 x 3.

matriks B merupakan matriks skalar karena nilai entri diagonal utamanya sama, yaitu 3, sedangkan entri di luar diagonal utamanya bernilai nol.

3. $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$, matriks C adalah matriks diagoonal berordo 4 x 4.

2.1.9. Matriks Identitas

Yang menjadi perhatian khusus adalah matriks bujursangkar dengan bilangan 1 pada diagonal utamanya dan 0 pada entri-entri lainnya, seperti

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ dan seterusnya.}$$

Matriks dengan bentuk seperti ini disebut **matriks identitas** (*identity matrix*) dan dinyatakan dengan I. Jika ukurannya penting maka akan ditulis sebagai I_n untuk matriks identitas n x n. (Anton dan Rorres, 2004: 45)

Di dalam perkalian matriks, operasi dengan identitas mempunyai sifat $AI = IA = A$.

Sebagai contoh:

$A = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$ dan $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ maka

$$AI = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$$

$$IA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$$

Sehingga $AI = IA = A = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$

2.1.10. Matriks Singular dan Non Singular

Matriks singular adalah matriks bujur sangkar yang tidak mempunyai invers (berarti determinannya = 0). Sedangkan matriks non singular adalah matriks bujur sangkar yang mempunyai invers (berarti determinannya $\neq$ 0). (Gazali, 2005: 4)

Contoh dari matriks singular adalah:

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, A adalah matriks singular dengan orde 2, karena $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.
2. $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$, B adalah matriks singular dengan orde 3, karena

$B^{-1} = \begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.

Contoh dari matriks non singular adalah:

1. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, A adalah matriks non singular dengan orde 2.
2. $B = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, B adalah matriks non singular dengan orde 3.

2.1.11. Determinan

Permutasi dari himpunan bilangan bulat atau integer {1, 2, ..., n} adalah susunan integer-integer ini menurut suatu aturan tanpa adanya penghilangan atau pengulangan. (Anton dan Rorres, 2004: 90)

Sebagai contoh, pada himpunan bilangan bulat {1, 2, 3} memiliki 6 permutasi. Antara lain (1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), dan (3, 2, 1). Inversi dapat terjadi di dalam suatu permutasi apabila bilangan bulat yang lebih besar mendahului yang lebih kecil. Misalnya di dalam permutasi (2, 4, 1, 3), maka banyaknya inversi adalah 1 + 2 + 0 = 3.

Suatu permutasi dikatakan genap (*even*) jika total banyaknya inversi adalah integer genap dan dikatakan ganjil (*odd*) jika total banyaknya inversi adalah integer ganjil. (Anton dan Rorres, 2004: 92)

Hasilkali elementer dari suatu matriks bujursangkar dengan orde n merupakan hasilkali dari *n* entri dari matriks tersebut, yang tidak satu pun berasal dari baris atau kolom yang sama. Apabila *A* merupakan matriks bujursangkar dengan orde *n*, maka matriks *A* memiliki hasilkali elementer sebanyak *n*!. Bentuk dari hasilkali elementer tersebut adalah $a_{1j_1}a_{2j_2}\dots a_{nj_n}$, di mana $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ adalah permutasi dari himpunan {1, 2, ..., n}. Sedangkan hasilkali elementer bertanda dari *A* adalah dari hasilkali elementer tersebut adalah $a_{1j_1}a_{2j_2}\dots a_{nj_n}$ dikalikan dengan + 1 untuk permutasi genap dan – 1 untuk permutasi ganjil.

Misalkan *A* adalah suatu matriks bujursangkar. Fungsi determinan (*determinant function*) dinotasikan dengan det dan kita mendefinisikan det(*A*) sebagai jumlah dari semua hasilkali elementer bertanda dari *A*. Angka det(*A*) disebut determinan dari *A* (*determinant of A*). (Anton dan Rorres, 2004: 92)

Misal $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, maka determinan dari A adalah $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Sedangkan untuk $B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, maka determinan dari B adalah $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$.

2.1.12. Invers Matriks ordo 2

Diberikan matriks bujursangkar *A*. Jika terdapat matriks bujursangkar A^{-1} yang memenuhi hubungan

$$A^{-1}.A = A.A^{-1} = I$$

Maka A^{-1} disebut invers kebalikan dari *A*. (Hadley, 1992: 89)

Jika *A* adalah matriks bujursangkar, dan jika terdapat matriks *B* yang ukurannya sama sedemikian rupa sehingga *AB* = *BA* = *I*, maka *A* disebut dapat dibalik (*invertible*) dan *B* disebut sebagai invers (*inverse*) dari *A*. Jika matriks *B* tidak dapat didefinisikan, maka *A* dinyatakan sebagai matriks singular. (Anton dan Rorres, 2004: 46)

Sebelum menentukan invers, maka harus dicari terlebih dahulu nilai determinan dari matriks tersebut. Misalkan *A* merupakan matriks yang mempunyai ordo 2. Determinan dari matriks *A* adalah selisih antara perkalian entri-entri pada diagonal utama dengan perkalian entri-entri pada diagonal sekunder. Determinan dari matriks A dinotasikan dengan det A atau $|A|$. Sedangkan nilai dari determinan suatu matriks adalah bilangan real.

Misalkan $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

Sehingga det A = $|A|$ = $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ = $ad - bc$.

Dari definisi tentang invers matriks, maka selanjutnya dapat ditentukan rumus dari invers matriks yang berordo 2.

Misalkan $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$

Karena $AB = I$, maka $B = A^{-1}$.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ap + br & aq + bs \\ cp + dr & aq + ds \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Berdasarkan kesamaan dua matriks, diperoleh:

$ap + br = 1$ ....(1) $\quad$ $aq + bs = 0$ ....(3)

$cp + dr = 0$ ....(2) $\quad$ $aq + ds = 1$ ....(4)

Dengan menyelesaikan sistem persamaan linear tersebut, maka diperoleh:

$p = \frac{d}{ad-bc}$ $\quad$ $q = \frac{-b}{ad-bc}$

$p = \frac{-c}{ad-bc}$ $\quad$ $p = \frac{a}{ad-bc}$

Dengan demikian,

$$B = A^{-1} = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Jadi $B = A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$, dengan $ad - bc \neq 0$.

Oleh karena $ad - bc$ = det A, maka $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

Contoh menentukan invers matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -7 & 11 \end{bmatrix}$

det A = $\begin{vmatrix} 3 & -6 \\ -7 & 11 \end{vmatrix}$ = 3(11) – (-6)(-7) = 33 – 42 = -9

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} 11 & 6 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{-9}\begin{bmatrix} 11 & 6 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-11}{9} & \frac{-6}{9} \\ \frac{-7}{9} & \frac{-3}{9} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-11}{9} & \frac{-2}{3} \\ \frac{-7}{9} & \frac{-1}{3} \end{bmatrix}$$

2.2. Grup dan Ring

2.2.1. Definisi Grup

Sebuah sistem aljabar (G, •) yang terdiri atas himpunan tidak kosong G dan komposisi biner • dinamakan grup jika postulat berikut terpenuhi:

(I) Hukum Assosiatif: komposisi bersifat assosiatif,

$(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)\ \forall a, b, c \in G$.

(II) Terdapat Identitas. Komposisi mempunyai elemen identitas di G yang mana elemen tersebut dinotasikan dengan e di G, sebagaimana

$e \bullet a = a \bullet e = a\ \forall a \in G$

(III) Terdapat invers. Masing-masing elemen di G adalah invertible terhadap komposisi • yang berkorespondensi pada setiap elemen $a \in G$, yang dinamakan invers dan dinotasikan dengan a^{-1} di G sebagaimana

$a^{-1} \bullet a = a \bullet a^{-1} = e$

dimana e merupakan elemen identitas di G. (Raisinghania, 1980: 31)

Contoh dari grup adalah sebagai berikut:

1. (G, x)

$G = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \middle| a, b, c \in Z\right\}$ dengan $\begin{vmatrix} a & b \\ 0 & c \end{vmatrix} \neq 0$

(I) berlaku hukum assosiatif

ambil $x, y, z \in G$ yaitu

$x = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}$, dan $z = \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ 0 & c_3 \end{bmatrix}$

maka berlaku (x x y) x z = x x (y x z)

$$\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}\right) \times \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ 0 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ 0 & c_3 \end{bmatrix}\right)$$

$$\leftrightarrow \begin{bmatrix} a_1a_2a_3 & a_1a_2b_3 + a_1b_2c_3 + b_1c_2c_3 \\ 0 & c_1c_2c_3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_1a_2a_3 & a_1a_2b_3 + a_1b_2c_3 + b_1c_2c_3 \\ 0 & c_1c_2c_3 \end{bmatrix}$$

(II) terdapat identitas, yaitu $e = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

ambil $a \in G$ yaitu $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$, maka e x a = a x e = a $\forall a \in G$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\leftrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} = a \text{ , } \forall a \in G.$$

(III) terdapat invers, yaitu $a^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & \frac{-b}{ac} \\ 0 & \frac{1}{c} \end{bmatrix}$, a^{-1} di G

ambil $a \in G$ yaitu $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$, maka a^{-1} x a = a x a^{-1} = e , dimana e merupakan elemen identitas di G.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{a} & \frac{-b}{ac} \\ 0 & \frac{1}{c} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & \frac{-b}{ac} \\ 0 & \frac{1}{c} \end{bmatrix}$$

$$\leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = e \text{ , } \forall a \in G.$$

2. $(M, +)$

$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ d & c \end{bmatrix} \middle| a, b, c, d \in R \right\}$ dengan $\begin{vmatrix} a & b \\ d & c \end{vmatrix} \neq 0$

(I) berlaku hukum assosiatif

ambil $x, y, z \in M$ yaitu

$x = (x_{ij})_{2\times2}$, $y = (y_{ij})_{2\times2}$, dan $z = (z_{ij})_{2\times2}$

maka berlaku $(x + y) + z = x + (y + z)$

$$\begin{aligned} (x + y) + z &= \left((x_{ij})_{2\times2} + (y_{ij})_{2\times2} \right) + (z_{ij})_{2\times2} \\ &= \left(x_{ij} + y_{ij} \right)_{2\times2} + (z_{ij})_{2\times2} \\ &= \left(x_{ij} + y_{ij} + z_{ij} \right)_{2\times2} \\ &= (x_{ij})_{2\times2} + \left(y_{ij} + z_{ij} \right)_{2\times2} \\ &= (x_{ij})_{2\times2} + \left((y_{ij})_{2\times2} + (z_{ij})_{2\times2} \right) \\ &= x + (y + z) \end{aligned}$$

(II) terdapat identitas, yaitu $e = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

ambil $a \in M$ yaitu $\begin{bmatrix} a & b \\ d & c \end{bmatrix}$, maka $e + a = a + e = a$ $\forall a \in M$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ d & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\leftrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ d & c \end{bmatrix} = a \text{ , } \forall a \in G.$$

(III) terdapat invers, yaitu $a^{-1} = \begin{bmatrix} -a & -b \\ -d & -c \end{bmatrix}$, a^{-1} di G

ambil $a \in G$ yaitu $\begin{bmatrix} a & b \\ d & c \end{bmatrix}$, maka a^{-1} x a = a x a^{-1} = e , dimana e merupakan elemen identitas di G.

$\begin{bmatrix} -a & -b \\ -d & -c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ d & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a & -b \\ -d & -c \end{bmatrix}$

$\leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = e$, $\forall a \in G$.

3. $(R, +)$

dimana R merupakan sistem bilangan real.

(I) berlaku hukum assosiatif

ambil $x, y, z \in R$,

maka berlaku $(x + y) + z = x + (y + z)$

(II) terdapat identitas, yaitu $e = 0$

ambil $a \in R$,

maka $0 + a = a + 0 = a$, $\forall a \in R$

(III) terdapat invers,

ambil $a \in R$, inversnya adalah $-a \in R$

maka $-a + a = a + (-a) = e$, $\forall a \in R$.

2.2.2. Center dari Grup

Center dari grup G biasanya ditulis dengan notasi $Z(G)$ adalah elemen dari grup yang komutatif dengan setiap elemen dari grup tersebut. Di dalam $Z(G)$ ada elemen identitas dari G, karena $eg = g = ge$, $\forall g \in G$. Oleh karena itu, dengan definisi dari $Z(G)$, maka $e \in Z(G)$.

Contoh:

Misal (G, x) adalah grup.

$G = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \middle| a, b, c \in Z \right\}$ dengan $\begin{vmatrix} a & b \\ 0 & c \end{vmatrix} \neq 0$

Maka center dari dari grup G adalah

$Z(G) = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \middle| a \in Z \right\}$ dengan $a \neq 0$

Karena

$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$

$\leftrightarrow \begin{bmatrix} aa & ab \\ 0 & ac \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa & ab \\ 0 & ac \end{bmatrix}$

Elemen identitas dari G adalah $e = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, sehingga $e \in Z(G)$ untuk nilai a = 1.

Karena

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\leftrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$.

2.2.3. Definisi Ring

Sistem matematika $(R, +, \times)$ disebut gelanggang (*ring*) jika memenuhi:

I. Terhadap operasi tambah $(R, +)$ membentuk grup komutatif.

II. Terhadap operasi kali $(R, \times)$ memenuhi sifat asosiatif: $(ab)c = a(bc)$ untuk semua unsur a, b, c di R;

III. Terhadap operasi tambah dan operasi kali secara bersama-sama $(R, +, \times)$ memenuhi sifat distributif: $a(b + c) = ab + ac$ dan $(a + b)c = ac + bc$ untuk semua unsur a, b, c di R. (Arifin, 2000: 72-73)

Contoh dari ring adalah sebagai berikut:

1. $(M, +, \times)$

Dimana $M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ d & c \end{bmatrix} \middle| a, b, c, d \in R \right\}$ dengan $\begin{vmatrix} a & b \\ d & c \end{vmatrix} \neq 0$

I. Terhadap operasi tambah $(M, +)$ membentuk grup komutatif.

$(M, +)$ merupakan suatu grup.

$(M, +)$ membentuk grup komutatif.

Ambil unsur $a, b \in M$, yaitu

$a = (a_{ij})_{2\times 2}$, $b = (b_{ij})_{2\times 2}$,

maka berlaku $a + b = b + a$.

$$\begin{aligned} a + b &= (a_{ij})_{2\times 2} + (b_{ij})_{2\times 2} \\ &= (a_{ij} + b_{ij})_{2\times 2} \\ &= (b_{ij} + a_{ij})_{2\times 2} \\ &= (b_{ij})_{2\times 2} + (a_{ij})_{2\times 2} \\ &= b + a \end{aligned}$$

II. Terhadap operasi kali $(M, \times)$ memenuhi sifat asosiatif: $(ab)c = a(bc)$ untuk semua unsur a, b, c di M;

Ambil $a, b, c \in M$, yaitu

$a = (a_{ij})_{2\times 2}$, $b = (b_{jk})_{2\times 2}$, dan $c = (c_{ki})_{2\times 2}$

maka berlaku sifat asosiatif: $(ab)c = a(bc)$.

$ab = \sum_{j=1}^{2} a_{ij} b_{jk}$

$$\begin{aligned} (ab)c &= \sum_{k=1}^{2} \left(\sum_{j=1}^{2} a_{ij} b_{jk} \right) c_{ki} \\ &= \sum_{k=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} a_{ij} b_{jk} c_{ki} \end{aligned}$$

$bc = \sum_{k=1}^{2} b_{jk}c_{ki}$

$a(bc) = \sum_{j=1}^{2} a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{2} a_{ij}b_{jk}\right)$

$= \sum_{j=1}^{2} \sum_{k=1}^{2} a_{ij}b_{jk}\, c_{ki}$

$= \sum_{k=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} a_{ij}b_{jk}\, c_{ki}$

Sehingga $(ab)c = a(bc)$.

III. Terhadap operasi tambah dan operasi kali secara bersama-sama $(R,+,\times)$ memenuhi sifat distributif: $a(b+c) = ab + ac$ dan $(a+b)c = ac + bc$ untuk semua unsur a, b, c di R.

Ambil $a, b, c \in M$, yaitu

$a = \left(a_{ij}\right)_{2\times 2}$, $b = \left(b_{jk}\right)_{2\times 2}$, dan $c = \left(c_{jk}\right)_{2\times 2}$

maka untuk semua unsur a, b, c di R, berlaku sifat distributif:

$a(b+c) = ab + ac$

$a(b+c) = \sum_{j=1}^{2} a_{ij}\left(b_{jk} + c_{jk}\right)$

$= \sum_{j=1}^{2}\left(a_{ij}b_{jk} + a_{ij}c_{jk}\right)$

$= \sum_{j=1}^{2} a_{ij}b_{jk} + \sum_{j=1}^{2} a_{ij}c_{jk}$

$= ab + ac$

Maka $a(b+c) = ab + ac$, dengan perhitungan yang sama dapat diperoleh $(a+b)c = ac + bc$.

2. $(R,+,\times)$ dimana R merupakan sistem bilangan real.

I. Terhadap operasi tambah $(R,+)$ membentuk grup komutatif.

$(R,+)$ merupakan suatu grup.

$(R,+)$ membentuk grup komutatif.

Ambil unsur $a, b \in R$,

maka berlaku $a + b = b + a$.

II. Terhadap operasi kali $(R,\times)$ memenuhi sifat asosiatif: $(ab)c = a(bc)$ untuk semua unsur a, b, c di R;

Ambil $a, b, c \in R$,

maka berlaku sifat asosiatif: $(ab)c = a(bc)$.

Terdapat unsur kesatuan $1 \in R$ dan bersifat $a1 = 1a = a$ untuk semua unsur $a \in R$.

III. Terhadap operasi tambah dan operasi kali secara bersama-sama $(R, +,\times)$ memenuhi sifat distributif: $a(b + c) = ab + ac$ dan $(a + b)c = ac + bc$ untuk semua unsur a, b, c di R.

Ambil $a, b, c \in R$,

maka berlaku sifat distributif: $a(b + c) = ab + ac$ dan $(a + b)c = ac + bc$ untuk semua unsur a, b, c di R.

2.2.4. Ring Komutatif

Jika komposisi perkalian bersifat komutatif di dalam ring R, itu dinamakan ring komutatif. (Raisinghania, 1980: 314)

Contoh dari ring komutatif:

$(R, +,\times)$ dimana R merupakan sistem bilangan real.

Ambil unsur $a, b \in R$,

maka berlaku $a \times b = b \times a$.

2.2.5. Ring dengan Satuan

Jika ada identitas perkalian di dalam ring R, itu dinamakan ring dengan satuan. (Raisinghania, 1980: 314)

Contoh dari ring dengan satuan:

1. $(M, +, \times)$

   Dimana $M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ d & c \end{bmatrix} \middle| a, b, c, d \in R \right\}$ dengan $\begin{vmatrix} a & b \\ d & c \end{vmatrix} \neq 0$

   Terdapat unsur kesatuan $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in M$

   Ambil $a \in M$, yaitu

   $$a = \begin{bmatrix} a & b \\ d & c \end{bmatrix}$$

   sehingga $\begin{bmatrix} a & b \\ d & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ d & c \end{bmatrix}$

   untuk semua unsur $a \in M$.

2. $(R, +, \times)$ dimana R merupakan sistem bilangan real.

   Ambil unsur $a \in R$, identitas perkaliannya adalah 1.

   maka berlaku $a \times 1 = 1 \times a = a$.

2.2.6. Division ring

Sebuah ring R dengan identitas 1, dimana $1 \neq 0$, dinamakan division ring (atau *skew field*) jika setiap elemen yang bukan nol $a \in R$ memiliki invers perkalian, sehingga terdapat $b \in R$ sedemikian hingga ab = ba = 1. Sebuah division ring yang komutatif dinamakan field. (Dummit dan Foote, 1991: 256)

Sebuah ring dengan sedikitnya dua elemen dinamakan division ring atau skew field jika merupakan ring dengan satuan dan setiap elemen yang bukan identitas dari operasi penjumlahan memiliki invers dari operasi perkalian. (Raisinghania, 1980: 314)

Contoh dari skew field adalah $(M, +, \times)$

dimana $M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ d & c \end{bmatrix} \middle| a, b, c, d \in R \right\}$ dengan $\begin{vmatrix} a & b \\ d & c \end{vmatrix} \neq 0$

$(M, +, \times)$ merupakan dengan satuan.

Ambil unsur $a \in M$, a bukan identitas dari operasi penjumlahan, yaitu

$a = \begin{bmatrix} a & b \\ d & c \end{bmatrix}$

sehingga invers dari operasi perkaliannya adalah $a^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{c}{ac-bd} & \frac{-b}{ac-bd} \\ \frac{-d}{ac-bd} & \frac{a}{ac-bd} \end{bmatrix}$.

Maka

$$\begin{bmatrix} a & b \\ d & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{c}{ac-bd} & \frac{-b}{ac-bd} \\ \frac{-d}{ac-bd} & \frac{a}{ac-bd} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{c}{ac-bd} & \frac{-b}{ac-bd} \\ \frac{-d}{ac-bd} & \frac{a}{ac-bd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sebuah ring dengan sedikitnya dua elemen dinamakan field jika merupakan ring komutatif dengan satuan dan setiap elemen yang bukan identitas dari operasi penjumlahan memiliki invers dari operasi perkalian. (Raisinghania, 1980: 314)

Contoh dari field adalah $(R, +, \times)$

dimana R merupakan sistem bilangan real.

$(R, +, \times)$ merupakan ring komutatif.

$(R, +, \times)$ merupakan dengan satuan.

Ambil unsur $a \in R$, a bukan identitas dari operasi penjumlahan, sehingga invers dari operasi perkaliannya adalah $\frac{1}{a}$.

Maka $a \times \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \times a = 1$.

2.3. Graf

2.3.1. Definisi Graf

Suatu graf *G* adalah suatu pasangan himpunan (*V*, *E*) dimana *V* adalah himpunan tak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut titik (*vertex*), dan *E* adalah himpunan dari pasangan tak terurut dari titik-titik berbeda di *V* yang disebut sisi (*edge*). Himpunan titik di graf *G* ditulis *V*(*G*) dan himpunan sisi di graf *G* dilambangkan dengan *E*(*G*). (Chartrand dan Lesniak, 1986: 4).

Definisi graf tersebut menyatakan bahwa *V*(*G*) tidak boleh kosong, sedangkan *E*(*G*) boleh kosong. Sehingga sebuah graf bisa saja tidak memiliki sisi satupun, akan tetapi harus mempunyai minimal satu titik.

Titik di dalam graf dinomori dengan huruf, misalnya *a*, *b*, *c*, ... dengan bilangan asli, misalnya 1, 2, 3, ... atau dengan gabungan keduanya. Sedangkan *e* merupakan sisi yang menghubungkan titik v_i dengan v_j, maka *e* dapat ditulis sebagai $e = (v_i, v_j)$.

Titik (*vertex*) yang ada di dalam graf dapat berupa obyek yang sembarang seperti kota, atom-atom suatu zat, komponen alat elektronik, dan sebagainya. Sedangkan sisi (*edge*) dapat menunjukkan hubungan yang sembarang seperti raya, sambungan telepon, ikatan kimia, dan lain sebagainya.

Secara geometri, suatu graf digambarkan di dalam dimensi dua sebagai sekumpulan titik *V*(*G*) yang dihubungkan dengan sekumpulan sisi *E*(*G*).

Contoh graf adalah sebagai berikut:

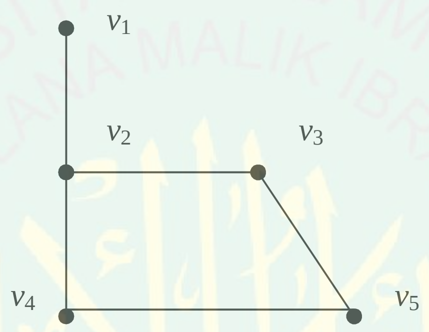
Misal $G : (V, E)$

dengan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$

$E(G) = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_4, v_5),$

$(v_3, v_5)\}$

Jadi graf *G* digambar sebagai berikut:

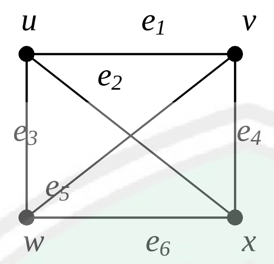


Gambar 2.1: Sebuah Graf *G*

2.3.2. Adjacent dan Incident

Sisi $e = (u, v)$ dikatakan menghubungkan titik u dan v. Jika $e = (u, v)$ adalah sisi di graf G, maka u dan v disebut terhubung langsung (*adjacent*), u dan e serta v dan e disebut terkait langsung (*incident*). Untuk selanjutnya, sisi $e = (u, v)$ akan ditulis $e = uv$. (Chartrand dan Lesniak, 1986: 4).

Dari definisi tersebut, maka dua buah titik (*vertex*) pada graf *G* dikatakan *adjacent* bila keduanya terhubung langsung dengan sebuah sisi. Dengan kata lain, u terhubung langsung (*adjacent*) dengan v jika (u, v) adalah sebuah sisi pada graf G. Sedangkan untuk sembarang sisi $e = (u, v)$ maka sisi e dikatakan terkait langsung (*incident*) dengan titik u dan titik v.



Gambar 2.2: Sebuah Graf yang Terhubung

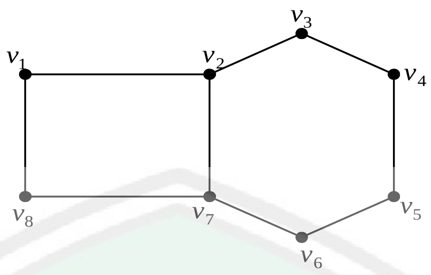
Pada gambar tersebut, titik u terhubung langsung (*adjacent*) dengan titik v, w, dan x. Sedangkan sisi e_1 terkait langsung (*incident*) dengan titik u dan titik v, sisi e_2 terkait langsung (*incident*) dengan titik u dan titik x, sisi e_3 terkait langsung (*incident*) dengan titik u dan titik w, sisi e_4 terkait langsung (*incident*) dengan titik v dan titik x, sisi e_5 terkait langsung (*incident*) dengan titik v dan titik w, dan sisi e_6 terkait langsung (*incident*) dengan titik w dan titik x.

2.3.3. Graf Terhubung

Misalkan u dan v titik berbeda pada graf G. Maka titik u dan v dapat dikatakan terhubung (*connected*), jika terdapat lintasan $u - v$ di G. Sedangkan suatu graf G dapat dikatakan terhubung (*connected*), jika untuk setiap titik u dan v di G terhubung. (Chartrand dan Lesniak, 1986: 28).

Dengan kata lain, graf G disebut graf terhubung jika untuk setiap pasang titik (*vertex*) u dan v di dalam himpunan V terdapat lintasan dari u ke v. Apabila hal tersebut tidak terpenuhi, maka graf G merupakan graf tak terhubung.

Berdasarkan definisi tersebut, maka contoh dari graf terhubung adalah:



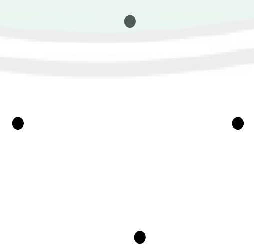
Gambar 2.3: Graf Terhubung (*connected*).

Graf G pada Gambar tersebut dikatakan terhubung karena setiap titiknya terhubung dengan titik yang lain.

Graf yang hanya terdiri atas satu titik (*vertex*) dan tidak mempunyai sisi dikatakan graf terhubung karena titik tunggalnya terhubung dengan dirinya sendiri.

2.3.4 Graf Kosong

Graf yang himpunan sisinya merupakan himpunan kosong disebut sebagai graf kosong dan ditulis N_n, yang dalam hal ini n adalah jumlah simpul. (Munir, 2005: 366). Sehingga graf kosong (*Null Graph* atau *Empty Graph*) merupakan graf yang hanya mempunyai simpul dan tidak mempunyai sisi.



Gambar 2.4: Graf Kosong N_4

2.4 Graf Komutatif

2.4.1 Center dan Graf Komutatif

Definisi center dari S atau $Z(S)$ dimana $S \subseteq \mathrm{M}_2(\mathrm{R})$ adalah elemen dari S yang bersifat komutatif terhadap setiap elemen yang ada di dalam S.

$Z(S) = \{z \in S : zx = xz\ \forall x \in S\}$.

Sebelum diperoleh definisi graf komutatif dari matriks bilangan real, terlebih dahulu harus diketahui definisi graf komutatif dari matriks division ring, yaitu sebagai berikut:

Misal D merupakan division ring dan $\mathrm{M_n}(\mathrm{D})$ merupakan himpunan dari semua matriks n x n atas D. Untuk $S \subseteq \mathrm{M_n}(\mathrm{D})$, graf komutatif dari S, yang dilambangkan dengan $\Gamma(S)$, adalah graf dengan himpunan titik $S\backslash Z(S)$ sedangkan titik berbeda A dan B terhubung langsung (*adjacent*) jika dan hanya jika $AB = BA$ dimana $Z(S) = \{A|A \in S, AB = BA, \forall\ B \in S\}$. (Vaezpour & Raja, 2009)

Dari definisi tersebut, diketahui bahwa division ring merupakan entri dari matriks. Division ring ada dua macam, yaitu yang bersifat non komutatif disebut dengan skew field, sedangkan yang bersifat komutatif disebut dengan field. Salah satu contoh dari field adalah bilangan real. Sedangkan $S\backslash Z(S)$ merupakan bentuk lain dari $S-Z(S)$ atau $S \cap Z(S)^c$. Titik berbeda A dan B merupakan titik yang berada di dalam $S\backslash Z(S)$.

2.4.2 Graf Komutatif dari S

Berdasarkan definisi mengenai graf komutatif tersebut maka dapat diambil $S \subseteq \mathrm{M_n}(\mathrm{D})$, dengan nilai n = 3.

$M_3(D)$ merupakan himpunan dari semua matriks persegi dengan ordo 3 yang elemennya merupakan division ring (D).

Di dalam kasus ini diambil division ring (D) yang bersifat komutatif atau biasa disebut dengan field. Sehingga elemen dari $M_3(D)$ adalah bilangan real.

$M_3(D)$ =

$$\left\{\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & d & 0 \\ d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 \\ e & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}, \dots \right\}$$

Dengan a, b, c, d dan e merupakan bilangan real yang tidak sama dengan nol.

$S \subseteq M_3(D)$.

$$S = \left\{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$

Sehingga centernya adalah: $Z(S) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, maka

$$S \backslash Z(S) = \left\{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}$$

Misal: $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ $E = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Diperoleh:

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga $AB = BA$

$$AC = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$CA = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga $AC \neq CA$

$$AD = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$DA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 24 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga $AD \neq DA$

$$AE = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

$$EA = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga $AE \neq EA$

$$BC = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$CB = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga $BC = CB$

$$BD = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$DB = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga $BD = DB$

$$BE = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$EB = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga $BE \neq EB$

$$CD = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$DC = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

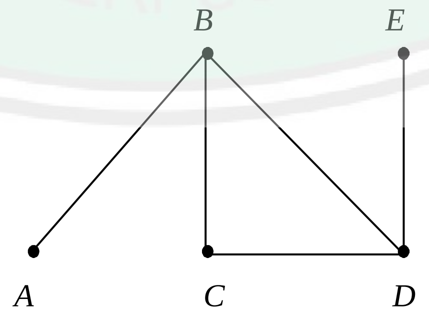
Sehingga $CD = DC$

$$CE = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$EC = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sehingga $CE \neq EC$

Maka gambar dari graf komutatifnya adalah:



Gambar 2.5: Contoh Graf Komutatif dari $S \subseteq M_3(\mathbb{R})$.

Titik yang terhubung langsung (*adjacent*) adalah bersifat komutatif terhadap perkaliannya.

2.5. Kajian Keagamaan

2.5.1. Matematika di Dalam Al-Qur'an

Al-Qur'an adalah firman Allah SWT dan merupakan kitab suci umat Islam, yang juga sering disebut sebagai mukjizat atau bukti yang dibawa oleh Rasulullah SAW untuk mereka yang telah mengingkari kebenaran firman Allah SWT tersebut. Sedangkan, bagi orang muslim, Al-Qur'an merupakan petunjuk dalam kehidupan. Sehingga apabila seseorang yang muslim dan memiliki ilmu pengetahuan dapat mengetahui berbagai rahasia yang ada di dalam Al-Qur'an untuk memperoleh hikmah dan ilmu.

Matematika merupakan ilmu pengetahuan dasar yang dibutuhkan semua manusia dalam kehidupan sehari-hari baik secara langsung maupun tidak langsung. Matematika merupakan ilmu yang tidak terlepas dari alam dan agama, semua itu kebenarannya bisa kita lihat dalam Al-Qur'an. (Rahman, 2007: 1)

Di dalam Islam ada pembahasan tentang masalah mawaris (*faraidh*). Oleh karena itu, kita sebagai orang muslim diperintahkan untuk mempelajari matematika. Di dalam Al-Qur'an hal tersebut dijelaskan secara tersirat.

2.5.2. Konsep Graf di Dalam Al-Qur'an

Isra' dan Mi'raj merupakan perjalanan Rasulullah SAW yang dilakukan hanya satu malam. Kejadian ini adalah salah satu dari peristiwa penting bagi umat

Islam karena melalui Isra’ dan Mi’raj, Rasulullah SAW mendapatkan perintah untuk melaksanakan shalat lima waktu.

Isra’ merupakan perjalanan Rasulullah SAW dari Masjidil haram yang berada di Mekah menuju ke Masjidil Aqsha yang berada di Palestina. Sedangkan Mi’raj merupakan perjalanan Rasulullah SAW dari Masjidil Aqsha di Planet Bumi menuju ke Sidratulmuntaha yang merupakan tempat tertinggi. Di tempat tersebut, Beliau mendapatkan perintah langsung dari Allah SWT untuk melaksanakan shalat lima waktu.

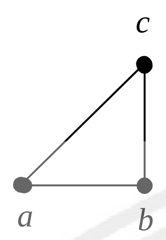
Allah telah berfirman di dalam Al-Qur’an surat Al Israa (surat ke-17) ayat 1 sebagai berikut:

سُبْحَٰنَ ٱلَّذِىٓ أَسْرَىٰ بِعَبْدِهِۦ لَيْلًا مِّنَ ٱلْمَسْجِدِ ٱلْحَرَامِ إِلَى ٱلْمَسْجِدِ ٱلْأَقْصَا ٱلَّذِى بَٰرَكْنَا

حَوْلَهُۥ لِنُرِيَهُۥ مِنْ ءَايَٰتِنَآ ۚ إِنَّهُۥ هُوَ ٱلسَّمِيعُ ٱلْبَصِيرُ ١

”Maha Suci Allah, yang Telah memperjalankan hamba-Nya pada suatu malam dari Al Masjidil Haram ke Al Masjidil Aqsha yang Telah kami berkahi sekelilingnya agar kami perlihatkan kepadanya sebagian dari tanda-tanda (kebesaran) kami. Sesungguhnya dia adalah Maha mendengar lagi Maha Mengetahui.”

Kejadian Isra’ dan Mi’raj berdasarkan tempat dapat digambarkan sebagai graf berikut:



Gambar 2.6: Representasi Isra' dan Mi'raj Berdasarkan Tempat

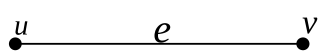
Keterangan: *a*. Masjidil Haram di Mekah

b. Masjidil Aqsha di Palestina

c. Sidratulmuntaha

Selain itu, di dalam Islam, penjelasan tentang terhubung langsung (*adjacent*) yang ada di dalam graf digunakan untuk menggambarkan hubugan antara orang tua dengan do'a anak yang salih saling terhubung langsung. Apabila dimisalkan *u* sebagai titik pertama adalah "orang tua" dan *v* sebagai titik kedua adalah "anak yang salih", maka *e* yang merupakan sisi penghubung antara orang tua dengan anak adalah "do'a".

Hubungan orang tua dengan do'a anak yang salih saling terhubung langsung (*adjacent*) dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 2.7: Hubungan Orang Tua dengan Do'a Anak yang Salih.

Anak yang salih, baik laki-laki maupun perempuan, akan terus memberikan manfaat kepada para orang tua mereka dengan do'a yang baik untuk orang tua mereka, shadaqah yang dilakukan dengan ikhlas oleh anak yang salih untuk orang tua mereka, bahkan doa yang diucapkan oleh orang yang pernah mendapatkan kebaikan dari anak yang salih tersebut.

Selain itu, di dalam Islam, juga terdapat kewajiban untuk mendidik anak agar menjadi anak yang salih dan menumbuhkan mereka menjadi orang yang salih sehingga nantinya akan dapat mendo'akan kebaikan setelah orang tua mereka meninggal. Seorang anak yang salih dianjurkan mendo'akan orang tuanya bersamaan dengan do'a untuk dirinya di dalam maupun di luar shalat. Hal ini termasuk perbuatan berbakti yang akan terus ada setelah orang tua mereka meninggal. Allah SWT berfirman di dalam surat Yaasiin (surat ke-36) ayat 12:

إِنَّا نَحۡنُ نُحۡيِ ٱلۡمَوۡتَىٰ وَنَكۡتُبُ مَا قَدَّمُواْ وَءَاثَٰرَهُمۡۚ وَكُلَّ شَيۡءٍ أَحۡصَيۡنَٰهُ فِيٓ إِمَامٖ مُّبِينٖ ١٢

"Sesungguhnya Kami menghidupkan orang-orang mati dan Kami menuliskan apa yang telah mereka kerjakan dan bekas-bekas yang mereka tinggalkan. dan segala sesuatu Kami kumpulkan dalam kitab Induk yang nyata (Lauh Mahfuzh)."

BAB III

PEMBAHASAN

3.1. Graf Komutatif dari Matriks Diagonal

S merupakan matriks diagonal dimana $S \subseteq \mathrm{M_n(R)}$ yang mempunyai bentuk umum:

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \middle| a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn} \in R \right\}$$

Misal

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix} \text{dan } Y = \begin{bmatrix} y_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & y_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & y_{nn} \end{bmatrix}$$

Sehingga $XY = YX$, untuk setiap $Y \in S$,

atau $\{X | X \in S, XY = YX, \forall\, Y \in S\}$

maka diperoleh $Z(S) = S$.

Oleh karena itu, $S \backslash Z(S) = S - Z(S) = \emptyset$.

Maka didapatkan teorema berikut ini.

Teorema 1. Jika S adalah matriks diagonal dimana $S \subseteq \mathrm{M_n(R)}$, maka tidak terdapat graf komutatif dari S.

Bukti.

S adalah matriks diagonal dimana $S \subseteq \mathrm{M_n(R)}$ sehingga bentuk umumnya adalah:

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \middle| a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn} \in R \right\}$$

Sehingga bentuk umum centernya adalah sama dengan bentuk umum matriks diagonal.

Oleh karena itu $S \backslash Z(S) = \emptyset$, sehingga $S \backslash Z(S)$ tidak memiliki anggota, akibatnya tidak ada titik pada grafnya.

3.2. Graf Komutatif dari Matriks Segitiga

Bentuk umum dari matriks segitiga dimana $S \subseteq \mathrm{M_n(R)}$ adalah sebagai berikut:

Pada matriks segitiga atas:

$$S_a = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \middle| a_{11}, a_{12}, a_{22}, \dots, a_{nn} \in R \right\}$$

Pada matriks segitiga bawah:

$$S_b = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \middle| a_{11}, a_{21}, a_{22}, \dots, a_{nn} \in R \right\}$$

Dari bentuk umum tersebut, entri yang bukan nol merupakan anggota dari bilangan real sehingga diperoleh dua kemungkinan, yaitu entri yang bukan nol boleh bernilai nol dan entri yang bukan nol tidak boleh bernilai nol.

3.2.1. Graf Komutatif dari Matriks Segitiga dimana Entri yang Bukan Nol Boleh Bernilai Nol

a. Graf Komutatif dari Matriks Segitiga Atas

Untuk memudahkan memahami kajian pada bagian ini, penulis memberikan contoh pada matriks ordo 2 sebagai berikut:

$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$ dengan $a, b, c \in R$

Sehingga $S_a = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \middle| a, b, c \in R \right\}$.

Center dari S_a adalah: $Z(S_a) = \{A | A \in S, AB = BA, \forall B \in S\}$.

Untuk menentukan nilai dari center, dapat dilakukan dengan cara berikut.

Ambil $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$ sebagai centernya atau $Z(S_a)$,

maka akan dicari nilai masing-masing entrinya.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}a & a_{11}b + a_{12}c \\ 0 & a_{22}c \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}a & a_{12}a + a_{22}b \\ 0 & a_{22}c \end{bmatrix}$$

Supaya memenuhi sifat komutatif, matriks $\begin{bmatrix} a_{11}a & a_{11}b + a_{12}c \\ 0 & a_{22}c \end{bmatrix}$ harus sama dengan matriks $\begin{bmatrix} a_{11}a & a_{12}a + a_{22}b \\ 0 & a_{22}c \end{bmatrix}$.

Matriks identitas selalu bersifat komutatif terhadap matriks yang lain dengan ordo yang sama ($AI = IA$). Dari hal tersebut dapat diperoleh persamaan $a_{11} = a_{22}$. Selanjutnya didapatkan perhitungan sebagai berikut.

$$a_{11}b + a_{12}c = a_{12}a + a_{22}b$$

$$a_{12}a - a_{12}c = a_{11}b - a_{22}b$$

$$a_{12}(a - c) = b(a_{11} - a_{22})$$

$$a_{12}(a - c) = b.0$$

$$a_{12}(a - c) = 0$$

Karena $a \neq c$ maka $(a - c) \neq 0$

Sehingga $a_{12} = 0$.

Dari perhitungan tersebut diperoleh center dari matriks segitiga atas dengan ordo 2 adalah sebagai berikut:

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$ dengan $a_{11} = a_{22}$.

Maka center atau $Z(S_a)$ dari matriks segitiga atas dengan ordo 2 adalah:

$$Z(S_a) = \left\{ \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} \middle| z \in R \right\}.$$

$$\begin{aligned} S_a \backslash Z(S_a) &= S_a - Z(S_a) \\ &= \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a - z & b \\ 0 & c - z \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Misalkan $x = a - z$ dan $y = c - z$.

Sehingga nilai dari $S_a \backslash Z(S_a)$ yang memenuhi adalah:

$$A = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} x & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & y \end{bmatrix},$$

$$G = \begin{bmatrix} x & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & b \end{bmatrix}, I = \begin{bmatrix} x & b \\ 0 & y \end{bmatrix}, J = \begin{bmatrix} x & x \\ 0 & y \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} x & b \\ 0 & x \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} x & x \\ 0 & x \end{bmatrix},$$

$$M = \begin{bmatrix} x & b \\ 0 & b \end{bmatrix}.$$

Dimana $x, b, y \in R$ dan $x, b, y \neq 0$.

Di dalam himpunan matriks tersebut, yang mempunyai invers adalah matriks yang nilai determinannya tidak sama dengan nol (matriks nonsingular), yaitu:

$$E = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}, I = \begin{bmatrix} x & b \\ 0 & y \end{bmatrix}, J = \begin{bmatrix} x & x \\ 0 & y \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} x & b \\ 0 & x \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} x & x \\ 0 & x \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} x & b \\ 0 & b \end{bmatrix}.$$

Sedangkan nilai inversnya adalah sebagai berikut:

Untuk $E = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}$, inversnya adalah $E^{-1} = \frac{1}{xy}\begin{bmatrix} y & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}$ maka $E^{-1} \in E$.

Untuk $I = \begin{bmatrix} x & b \\ 0 & y \end{bmatrix}$, inversnya adalah $I^{-1} = \frac{1}{xy}\begin{bmatrix} y & -b \\ 0 & x \end{bmatrix}$ maka $I^{-1} \in I$.

Untuk $J = \begin{bmatrix} x & x \\ 0 & y \end{bmatrix}$, inversnya adalah $J^{-1} = \frac{1}{xy}\begin{bmatrix} y & -x \\ 0 & x \end{bmatrix}$ maka $J^{-1} \in I$.

Untuk $K = \begin{bmatrix} x & b \\ 0 & x \end{bmatrix}$, inversnya adalah $K^{-1} = \frac{1}{xx}\begin{bmatrix} x & -b \\ 0 & x \end{bmatrix}$ maka $K^{-1} \in K$.

Untuk $L = \begin{bmatrix} x & x \\ 0 & x \end{bmatrix}$, inversnya adalah $\square^{-1} = \frac{1}{xx}\begin{bmatrix} x & -x \\ 0 & x \end{bmatrix}$ maka $L^{-1} \in K$.

Untuk $M = \begin{bmatrix} x & b \\ 0 & b \end{bmatrix}$, inversnya adalah $M^{-1} = \frac{1}{xb}\begin{bmatrix} b & -b \\ 0 & x \end{bmatrix}$ maka $M^{-1} \in I$.

Penentuan invers tersebut berguna untuk menentukan simpul yang bersifat komutatif, karena $A.A^{-1} = A^{-1}A = I$.

Untuk hasil perkalian masing-masing simpul di dalam himpunan adalah sebagai berikut, sedangkan perhitungannya ada di dalam lampiran.

1. Setiap matriks yang ada di *A*, perkaliannya memiliki sifat komutatif.
2. Setiap matriks yang ada di *B*, perkaliannya memiliki sifat komutatif.
3. Setiap matriks yang ada di *C*, perkaliannya memiliki sifat komutatif.
4. Matriks di *D* yang berbentuk $\begin{bmatrix} x & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, perkaliannya tidak memiliki sifat komutatif. Untuk $x = nb$, dimana $n \in R, n \neq 0 \wedge n \neq 1$, maka perkalian matriks yang bernilai tersebut memiliki sifat komutatif.
5. Setiap matriks yang ada di *E*, perkaliannya memiliki sifat komutatif.
6. Matriks di *F* yang berbentuk $\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & y \end{bmatrix}$, perkaliannya tidak memiliki sifat komutatif. Untuk $b = ny$, dimana $n \in R, n \neq 0 \wedge n \neq 1$, maka perkalian matriks yang bernilai tersebut memiliki sifat komutatif.
7. Setiap matriks yang ada di *G*, perkaliannya memiliki sifat komutatif.
8. Setiap matriks yang ada di *H*, perkaliannya memiliki sifat komutatif.

9. Setiap matriks yang ada di *I*, perkaliannya tidak memiliki sifat komutatif.

10. Matriks di *J* yang berbentuk $\begin{bmatrix} x & x \\ 0 & y \end{bmatrix}$, perkaliannya tidak memiliki sifat komutatif. Untuk $x = ny$, dimana $n \in R, n \neq 0 \wedge n \neq 1$, maka perkalian matriks yang bernilai tersebut memiliki sifat komutatif.

11. Setiap matriks yang ada di *K*, perkaliannya memiliki sifat komutatif.

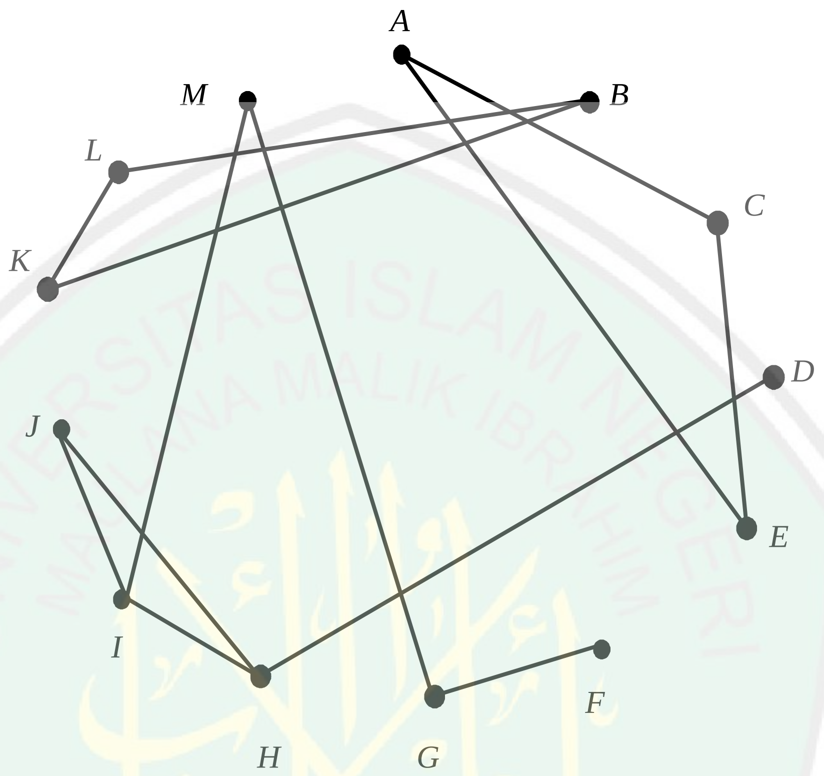
12. Setiap matriks yang ada di *L*, perkaliannya memiliki sifat komutatif.

13. Matriks di *M* yang berbentuk $\begin{bmatrix} x & b \\ 0 & b \end{bmatrix}$, perkaliannya tidak memiliki sifat komutatif. Untuk $x = nb$, dimana $n \in R, n \neq 0 \wedge n \neq 1$, maka perkalian matriks yang bernilai tersebut memiliki sifat komutatif.

Hasil dari perkalian setiap himpunan adalah sebagai berikut, sedangkan perhitungannya ada di dalam lampiran.

$AB \neq BA$, $AC = CA$, $AD \neq DA$, $AE = EA$, $AF \neq FA$, $AG \neq GA$, $AH \neq HA$, $AI \neq IA$, $AJ \neq JA$, $AK \neq KA$, $AL \neq LA$, $AM \neq MA$, $BC \neq CB$, $BD \neq DB$, $BE \neq EB$, $BF \neq FB$, $BG \neq GB$, $BH \neq HB$, $BI \neq IB$, $BJ \neq JB$, $BK = KB$, $BL = LB$, $BM \neq MB$, $CD \neq DC$, $CE = EC$, $CF \neq FC$, $CG \neq GC$, $CH \neq HC$, $CI \neq IC$, $CJ \neq JC$, $CK \neq KC$, $CL \neq LC$, $CM \neq MC$, $DE \neq ED$, $DF \neq FD$, $DG \neq GD$, $DH \neq HD$ (untuk $a = -b$, maka $DH = HD$), $DI \neq ID$, $DJ \neq JD$, $DK \neq KD$, $DL \neq LD$, $DM \neq MD$, $EF \neq FE$, $EG \neq GE$, $EH \neq HE$, $EI \neq IE$, $EJ \neq JE$, $EK \neq KE$, $EL \neq LE$, $EM \neq ME$, $FG \neq GF$ (untuk $a = -b$, maka $FG = GF$), $FH \neq HF$, $FI \neq IF$, $FJ \neq JF$, $FK \neq KF$, $FL \neq LF$, $FM \neq MF$, $GH \neq HG$, $GI \neq IG$, $GJ \neq JG$, $GK \neq KG$, $GL \neq LG$, $GM \neq MG$ (untuk $a = 2b$, maka $GM = MG$), $HI \neq IH$ (untuk $a + b = c$, maka $HI = IH$), $HJ \neq JH$ (untuk $2a = b$, maka $HJ = JH$), $HK \neq KH$, $HL \neq LH$, $HM \neq MH$, $IJ \neq JI$, $IK \neq KI$, $IL \neq LI$, $IM \neq MI$, $JK \neq KJ$, $JL \neq LJ$, $JM \neq MJ$, $KL = LK$, $KM \neq MK$, dan $LM \neq ML$.

Gambar graf komutatif atau $\Gamma(S_a)$ dimana $S_a \subseteq M_2(R)$ adalah sebagai berikut:



Gambar 3.1: Graf Komutatif dari Matriks Segitiga Atas

Pada gambar tersebut, perkalian di dalam setiap himpunan atau simpul *A*, *B*, *C*, *E*, *K*, dan *L* adalah bersifat komutatif. Perkalian setiap simpul *A* dengan *C*, *A* dengan *E*, *C* dengan *E*, *B* dengan *L*, *B* dengan *K*, dan *K* dengan *L* adalah bersifat komutatif sehingga terdapat sisi yang menghubungkan simpul-simpul tersebut.

Sedangkan perkalian di dalam setiap himpunan atau simpul *D*, *F*, *I*, *J*, dan *M* hanya ada beberapa (tidak semua) yang bersifat komutatif. Perkalian setiap simpul *D* dengan *H*, *H* dengan *I*, *H* dengan *J*, *I* dengan *J*, *F* dengan *G*, *G* dengan *M*, dan *I* dengan *M* adalah tidak semua bersifat komutatif.

b. Graf Komutatif dari Matriks Segitiga Bawah

Untuk memudahkan memahami kajian pada bagian ini, penulis memberikan contoh pada matriks ordo 2. Bentuk umum dari matriks segitiga bawah merupakan transpose dari matriks segitiga atas.

Sehingga $S_b = \left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} \middle| a, b, c \in R\right\}$.

Center dari S_b adalah: $Z(S_b) = \{A | A \in S, AB = BA, \forall B \in S\}$.

Untuk menentukan nilai dari center, dapat dilakukan dengan cara berikut.

Ambil $\begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ sebagai centernya atau $Z(S_b)$,

maka akan dicari nilai masing-masing entrinya.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}a & 0 \\ a_{21}a + a_{22}b & a_{22}c \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}a & 0 \\ a_{11}b + a_{21}c & a_{22}c \end{bmatrix}$$

Supaya memenuhi sifat komutatif, matriks $\begin{bmatrix} a_{11}a & 0 \\ a_{21}a + a_{22}b & a_{22}c \end{bmatrix}$ harus sama dengan matriks $\begin{bmatrix} a_{11}a & 0 \\ a_{11}b + a_{21}c & a_{22}c \end{bmatrix}$.

Matriks identitas selalu bersifat komutatif terhadap matriks yang lain dengan ordo yang sama ($AI = IA$). Dari hal tersebut dapat diperoleh persamaan $a_{11} = a_{22}$. Selanjutnya didapatkan perhitungan sebagai berikut.

$$a_{21}a + a_{22}b = a_{11}b + a_{21}c$$

$$a_{21}a - a_{21}c = a_{11}b - a_{22}b$$

$$a_{21}(a - c) = b(a_{11} - a_{22})$$

$$a_{21}(a - c) = b.0$$

$$a_{21}(a - c) = 0$$

Karena $a \neq c$ maka $(a - c) \neq 0$

Sehingga $a_{21} = 0$

Dari perhitungan tersebut diperoleh center dari matriks segitiga atas dengan ordo 2 adalah sebagai berikut:

$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$ dengan $a_{11} = a_{22}$

Maka center atau $Z(S_b)$ dari matriks segitiga bawah dengan ordo 2 adalah:

$$Z(S_b) = \left\{ \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} \middle| z \in R \right\}$$

$$\begin{aligned} S_b \backslash Z(S_b) &= S_b - Z(S_b) \\ &= \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a - z & 0 \\ b & c - z \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Misalkan $x = a - z$ dan $y = c - z$.

Sehingga nilai dari $S_b \backslash Z(S_b)$ yang memenuhi adalah:

$A = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} x & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & y \end{bmatrix},$

$G = \begin{bmatrix} x & 0 \\ x & 0 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & b \end{bmatrix}, I = \begin{bmatrix} x & 0 \\ b & y \end{bmatrix}, J = \begin{bmatrix} x & 0 \\ x & y \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} x & 0 \\ b & x \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} x & 0 \\ x & x \end{bmatrix},$

$M = \begin{bmatrix} x & 0 \\ b & b \end{bmatrix}.$

Dimana $x, b, y \in R$ dan $x, b, y \neq 0$.

Di dalam himpunan matriks tersebut, yang mempunyai invers adalah matriks yang nilai determinannya tidak sama dengan nol (matriks nonsingular), yaitu:

$E = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}, I = \begin{bmatrix} x & 0 \\ b & y \end{bmatrix}, J = \begin{bmatrix} x & 0 \\ x & y \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} x & 0 \\ b & x \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} x & 0 \\ x & x \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} x & 0 \\ b & b \end{bmatrix}.$

Sedangkan nilai inversnya adalah sebagai berikut:

Untuk $E = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}$, inversnya adalah $E^{-1} = \frac{1}{xy}\begin{bmatrix} y & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}$ maka $E^{-1} \in E$.

Untuk $I = \begin{bmatrix} x & 0 \\ b & y \end{bmatrix}$, inversnya adalah $I^{-1} = \frac{1}{xy}\begin{bmatrix} y & 0 \\ -b & x \end{bmatrix}$ maka $I^{-1} \in I$.

Untuk $J = \begin{bmatrix} x & 0 \\ x & y \end{bmatrix}$, inversnya adalah $J^{-1} = \frac{1}{xy}\begin{bmatrix} y & 0 \\ -x & x \end{bmatrix}$ maka $J^{-1} \in I$.

Untuk $K = \begin{bmatrix} x & 0 \\ b & x \end{bmatrix}$, inversnya adalah $K^{-1} = \frac{1}{xx}\begin{bmatrix} x & 0 \\ -b & x \end{bmatrix}$ maka $K^{-1} \in K$.

Untuk $L = \begin{bmatrix} x & 0 \\ x & x \end{bmatrix}$, inversnya adalah $L^{-1} = \frac{1}{xx}\begin{bmatrix} x & 0 \\ -x & x \end{bmatrix}$ maka $L^{-1} \in K$.

Untuk $M = \begin{bmatrix} x & 0 \\ b & b \end{bmatrix}$, inversnya adalah $M^{-1} = \frac{1}{bx}\begin{bmatrix} b & 0 \\ -b & x \end{bmatrix}$ maka $M^{-1} \in I$.

Penentuan invers tersebut berguna untuk menentukan simpul yang bersifat komutatif, karena $A.A^{-1} = A^{-1}A = I$.

Untuk hasil perkalian masing-masing simpul di dalam himpunan adalah sebagai berikut, sedangkan perhitungannya ada di dalam lampiran.

1. Setiap matriks yang ada di A, perkaliannya memiliki sifat komutatif.
2. Setiap matriks yang ada di B, perkaliannya memiliki sifat komutatif.
3. Setiap matriks yang ada di C, perkaliannya memiliki sifat komutatif.
4. Matriks di D yang berbentuk $\begin{bmatrix} x & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}$, perkaliannya tidak memiliki sifat komutatif. Untuk $x = nb$, dimana $n \in R, n \neq 0 \wedge n \neq 1$, maka perkalian matriks yang bernilai tersebut memiliki sifat komutatif.
5. Setiap matriks yang ada di E, perkaliannya memiliki sifat komutatif.
6. Matriks di F yang berbentuk $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & y \end{bmatrix}$, perkaliannya tidak memiliki sifat komutatif. Untuk $b = ny$, dimana $n \in R, n \neq 0 \wedge n \neq 1$, maka perkalian matriks yang bernilai tersebut memiliki sifat komutatif.

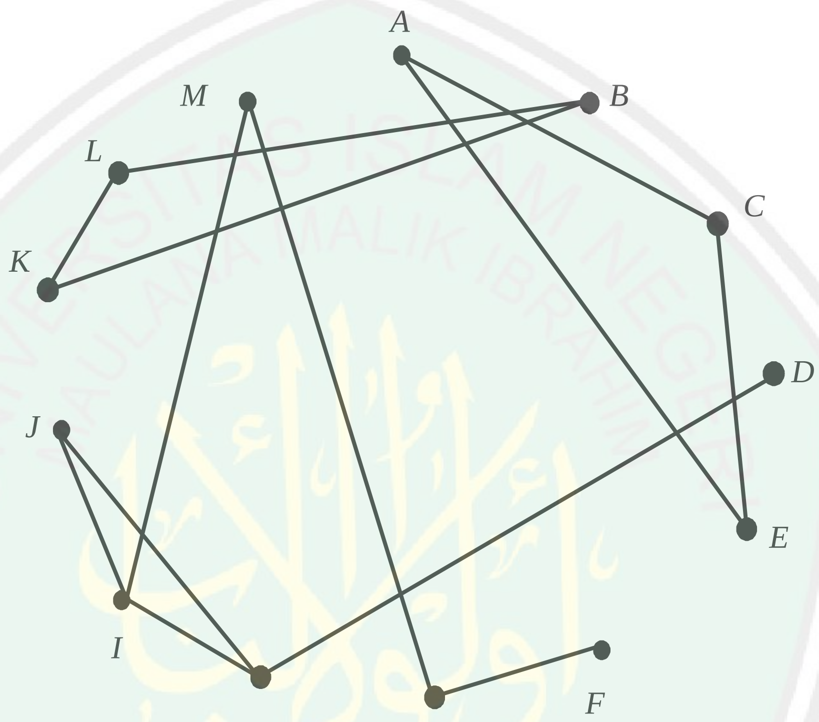
7. Setiap matriks yang ada di *G*, perkaliannya memiliki sifat komutatif.
8. Setiap matriks yang ada di *H*, perkaliannya memiliki sifat komutatif.
9. Setiap matriks yang ada di *I*, perkaliannya tidak memiliki sifat komutatif.
10. Matriks di *J* yang berbentuk $\begin{bmatrix} x & 0 \\ x & y \end{bmatrix}$, perkaliannya tidak memiliki sifat komutatif. Untuk $x = ny$, dimana $n \in R, n \neq 0 \wedge n \neq 1$, maka perkalian matriks yang bernilai tersebut memiliki sifat komutatif.
11. Setiap matriks yang ada di *K*, perkaliannya memiliki sifat komutatif.
12. Setiap matriks yang ada di *L*, perkaliannya memiliki sifat komutatif.
13. Matriks di *M* yang berbentuk $\begin{bmatrix} x & 0 \\ b & b \end{bmatrix}$, perkaliannya tidak memiliki sifat komutatif. Untuk $x = nb$, dimana $n \in R, n \neq 0 \wedge n \neq 1$, maka perkalian matriks yang bernilai tersebut memiliki sifat komutatif.

Hasil dari perkalian setiap himpunan adalah sebagai berikut, sedangkan perhitungannya ada di dalam lampiran.

$AB \neq BA$, $AC = CA$, $AD \neq DA$, $AE = EA$, $AF \neq FA$, $AG \neq GA$, $AH \neq HA$, $AI \neq IA$, $AJ \neq JA$, $AK \neq KA$, $AL \neq LA$, $AM \neq MA$, $BC \neq CB$, $BD \neq DB$, $BE \neq EB$, $BF \neq FB$, $BG \neq GB$, $BH \neq HB$, $BI \neq IB$, $BJ \neq JB$, $BK = KB$, $BL = LB$, $BM \neq MB$, $CD \neq DC$, $CE = EC$, $CF \neq FC$, $CG \neq GC$, $CH \neq HC$, $CI \neq IC$, $CJ \neq JC$, $CK \neq KC$, $CL \neq LC$, $CM \neq MC$, $DE \neq ED$, $DF \neq FD$, $DG \neq GD$, $DH \neq HD$ (untuk $a = -b$, maka $DH = HD$), $DI \neq ID$, $DJ \neq JD$, $DK \neq KD$, $DL \neq LD$, $DM \neq MD$, $EF \neq FE$, $EG \neq GE$, $EH \neq HE$, $EI \neq IE$, $EJ \neq JE$, $EK \neq KE$, $EL \neq LE$, $EM \neq ME$, $FG \neq GF$ (untuk $a = -b$, maka $FG = GF$), $FH \neq HF$, $FI \neq IF$, $FJ \neq JF$, $FK \neq KF$, $FL \neq LF$, $FM \neq MF$, $GH \neq HG$, $GI \neq IG$, $GJ \neq JG$, $GK \neq KG$, $GL \neq LG$, $GM \neq MG$ (untuk $a = 2b$, maka $GM = MG$), $HI \neq IH$ (untuk $a + b = c$, maka $HI = IH$), $HJ \neq JH$ (untuk $2a = b$, maka HJ

$= JH$), $HK \neq KH$, $HL \neq LH$, $HM \neq MH$, $IJ \neq JI$, $IK \neq KI$, $IL \neq LI$, $IM \neq MI$, $JK \neq KJ$, $JL \neq LJ$, $JM \neq MJ$, $KL = LK$, $KM \neq MK$, dan $LM \neq ML$.

Gambar graf komutatif atau $\Gamma(S_b)$ dimana $S_b \subseteq M_2(\mathbb{R})$ adalah sebagai berikut:



Gambar 3.2: Graf Komutatif dari Matriks Segitiga Bawah

Pada gambar tersebut, perkalian di dalam setiap himpunan atau simpul *A*, *B*, *C*, *E*, *K*, dan *L* adalah bersifat komutatif. Perkalian setiap simpul *A* dengan *C*, *A* dengan *E*, *C* dengan *E*, *B* dengan *L*, *B* dengan *K*, dan *K* dengan *L* adalah bersifat komutatif sehingga terdapat sisi yang menghubungkan simpul-simpul tersebut.

Sedangkan perkalian di dalam setiap himpunan atau simpul *D*, *F*, *I*, *J*, dan *M* hanya ada beberapa (tidak semua) yang bersifat komutatif. Perkalian setiap simpul *D* dengan *H*, *H* dengan *I*, *H* dengan *J*, *I* dengan *J*, *F* dengan *G*, *G* dengan *M*, dan *I* dengan *M* adalah tidak semua bersifat komutatif.

Pembahasan mengenai graf komutatif dari matriks segitiga dimana entri yang bukan nol boleh bernilai nol dapat dilakukan pada $\mathrm{M_n(R)}$. Akan tetapi dalam hal ini penulis membatasi pada $\mathrm{M_2(R)}$. Sehingga berdasarkan hasil graf komutatif dari matriks segitiga atas dan matriks segitiga bawah tersebut, maka diperoleh teorema sebagai berikut.

Teorema 2. Jika S adalah matriks segitiga dimana entri yang bukan nol boleh bernilai nol dan $S \subseteq \mathrm{M_2(R)}$, maka graf komutatif dari S adalah tidak terhubung.

Bukti.

Matriks segitiga dibedakan menjadi matriks segitiga atas (S_a) dan matriks segitiga bawah (S_b).

(i) S_a adalah matriks segitiga atas dimana $S_a \subseteq \mathrm{M_2(R)}$ sehingga bentuk umumnya adalah: $S_a = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \middle| a, b, c \in R\right\}$.

Bentuk umum centernya adalah: $Z(S_a) = \left\{\begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} \middle| z \in R\right\}$.

$$S_a \backslash Z(S_a) = S_a - Z(S_a)$$
$$= \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a-z & b \\ 0 & c-z \end{bmatrix}$$

Misalkan $x = a - z$ dan $y = c - z$.

Sehingga nilai dari $S_a \backslash Z(S_a)$ yang memenuhi adalah:

$$A = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} x & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & y \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} x & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & b \end{bmatrix}, I = \begin{bmatrix} x & b \\ 0 & y \end{bmatrix}, J = \begin{bmatrix} x & x \\ 0 & y \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} x & b \\ 0 & x \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} x & x \\ 0 & x \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} x & b \\ 0 & b \end{bmatrix}.$$

Dimana $x, b, y \in R$ dan $x, b, y \neq 0$.

Ambil $F \subseteq S \backslash Z(S_a)$.

Perkalian di dalam F adalah sebagai berikut:

Ambil $F_1 = \begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & y_1 \end{bmatrix}$ dan $F_2 = \begin{bmatrix} 0 & b_2 \\ 0 & y_2 \end{bmatrix}$, dimana $F_1, F_2 \in F$.

Sehingga $F_1F_2 \neq F_2F_1$. Oleh karena itu, matriks di F yang berbentuk $\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & y \end{bmatrix}$, perkaliannya tidak memiliki sifat komutatif.

Untuk $b = ny$, dimana $n \in R, n \neq 0 \wedge n \neq 1$, maka perkalian matriks yang bernilai tersebut memiliki sifat komutatif.

Ambil $F_3 = \begin{bmatrix} 0 & ny_3 \\ 0 & y_3 \end{bmatrix}$ dan $F_4 = \begin{bmatrix} 0 & ny_4 \\ 0 & y_4 \end{bmatrix}$, dimana $F_3, F_4 \in F$.

Sehingga $F_3F_4 = F_4F_3$.

Perkalian dengan himpunan yang lain menghasilkan:

$AF \neq FA$, $BF \neq FB$, $CF \neq FC$, $DF \neq FD$, $EF \neq FE$, $GF \neq FG$ (untuk $a = -b$ maka $GF = FG$), $HF \neq FH$, $IF \neq FI$, $JF \neq FJ$, $KF \neq FK$, $LF \neq FL$, $MF \neq FM$.

Dari perhitungan tersebut, terdapat titik di F yang terhubung langsung (*adjacent*) ke G. Selain titik tersebut, tidak ada titik yang terhubung ke himpunan yang lain. Sedangkan titik di dalam F, pada umumnya tidak bersifat komutatif.

Jadi graf komutatif dari matriks segitiga atas (S_a), dimana $S_a \subseteq M_2(R)$, adalah tidak terhubung.

(ii) S_b adalah matriks segitiga bawah dimana $S_b \subseteq \mathrm{M}_2(\mathrm{R})$ sehingga bentuk umumnya adalah: $S_b = \left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} \middle| a, b, c \in R\right\}$.

Bentuk umum centernya adalah: $Z(S_a) = \left\{\begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} \middle| z \in R\right\}$.

$$S_b \backslash Z(S_b) = S_b - Z(S_b)$$
$$= \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a - z & 0 \\ b & c - z \end{bmatrix}$$

Misalkan $x = a - z$ dan $y = c - z$.

Sehingga nilai dari $S_b \backslash Z(S_b)$ yang memenuhi adalah:

$$A = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} x & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & y \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} x & 0 \\ x & 0 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & b \end{bmatrix}, I = \begin{bmatrix} x & 0 \\ b & y \end{bmatrix}, J = \begin{bmatrix} x & 0 \\ x & y \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} x & 0 \\ b & x \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} x & 0 \\ x & x \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} x & 0 \\ b & b \end{bmatrix}.$$

Dimana $x, b, y \in R$ dan $x, b, y \neq 0$.

Ambil $F \subseteq S \backslash Z(S_b)$.

Perkalian di dalam F adalah sebagai berikut:

Ambil $F_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_1 & y_1 \end{bmatrix}$ dan $F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_2 & y_2 \end{bmatrix}$, dimana $F_1, F_2 \in F$.

Sehingga $F_1 F_2 \neq F_2 F_1$. Oleh karena itu, matriks di F yang berbentuk $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & y \end{bmatrix}$, perkaliannya tidak memiliki sifat komutatif.

Untuk $b = ny$, dimana $n \in R, n \neq 0 \wedge n \neq 1$, maka perkalian matriks yang bernilai tersebut memiliki sifat komutatif.

Ambil $F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ ny_3 & y_3 \end{bmatrix}$ dan $F_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ ny_4 & y_4 \end{bmatrix}$, dimana $F_3, F_4 \in F$.

Sehingga $F_3F_4 = \square_4F_3$.

Perkalian dengan himpunan yang lain menghasilkan:

$AF \neq FA$, $BF \neq FB$, $CF \neq FC$, $DF \neq FD$, $EF \neq FE$, $GF \neq FG$ (untuk a = -b maka $GF = FG$), $HF \neq FH$, $IF \neq FI$, $JF \neq FJ$, $KF \neq FK$, $LF \neq FL$, $MF \neq FM$.

Dari perhitungan tersebut, terdapat titik di F yang terhubung langsung (*adjacent*) ke G. Selain titik tersebut, tidak ada titik yang terhubung ke himpunan yang lain. Sedangkan titik di dalam F, pada umumnya tidak bersifat komutatif.

Jadi graf komutatif dari matriks segitiga bawah (S_b), dimana $S_b \subseteq \mathrm{M}_2(\mathrm{R})$, adalah tidak terhubung.

Graf komutatif dari matriks segitiga atas (S_a) dan graf komutatif dari matriks segitiga bawah (S_b), dimana S_a,$S_b \subseteq \mathrm{M}_2(\mathrm{R})$, adalah tidak terhubung. Oleh karena itu, graf komutatif dari matriks segitiga atau bisa ditulis sebagai $\Gamma(S)$ dimana $S \subseteq \mathrm{M}_2(\mathrm{R})$ adalah tidak terhubung.

3.2.2. Graf Komutatif dari Matriks Segitiga dimana Entri yang Bukan Nol Tidak Boleh Bernilai Nol

Apabila entri yang bukan nol di dalam matriks segitiga tidak boleh bernilai nol, maka definisi dari matriks segitiga adalah sebagai berikut.

Matriks segitiga atas.

$$S_a = [a_{ij}] \text{ dengan } \begin{cases} a_{ij} = 0; \ \forall i > j \\ a_{ij} \neq 0; \ \forall i \leq j \end{cases}$$

Matriks segitiga bawah.

$S_b = [a_{ij}]$ dengan $\begin{cases} a_{ij} = 0;\ \forall i < j \\ a_{ij} \neq 0;\ \forall i \geq j \end{cases}$

Dari definisi tersebut maka dapat diketahui bahwa S tidak punya center atau dapat juga ditulis $Z(S) = \emptyset$.

Sehingga $S \backslash Z(S) = S - Z(S) = S - \emptyset = S$.

Karena $\forall a, b \in S \ni ab \neq ba$, maka graf komutatif dari S merupakan graf kosong karena tidak ada sisi yang menghubungkan di antara dua simpul yang berbeda.

Contoh pada $M_2(R)$ yaitu sebagai berikut.

$S \subseteq M_2(R)$ maka S dapat berupa matriks segitiga atas dan matriks segitiga bawah yang memiliki bentuk umum:

Pada matriks segitiga atas: $S_a = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \middle| a, b, c \neq 0\right\}$

dan pada matriks segitiga bawah: $S_b = \left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} \middle| a, b, c \neq 0\right\}$.

Pada matriks segitiga atas dan matriks segitiga bawah tersebut, keduanya tidak memiliki center.

Oleh karena itu $S \backslash Z(S) = S - Z(S) = S - \emptyset = S$.

Karena $\forall a, b \in S \ni ab \neq ba$, maka graf komutatifnya merupakan graf kosong.

Dari pembahasan tersebut diperoleh teorema sebagai berikut:

Teorema 3. Jika S adalah matriks segitiga dimana entri yang bukan nol tidak boleh bernilai nol dan $S \subseteq M_n(R)$, maka graf komutatif dari S merupakan graf kosong.

Bukti.

S adalah matriks segitiga dimana entri yang bukan nol tidak boleh bernilai nol dan $S \subseteq \mathrm{M_n(R)}$, maka pada matriks segitiga atas.

$$S_a = [a_{ij}] \text{ dengan } \begin{cases} a_{ij} = 0;\ \forall i > j \\ a_{ij} \neq 0;\ \forall i \leq j \end{cases}$$

Dan pada matriks segitiga bawah.

$$S_b = [a_{ij}] \text{ dengan } \begin{cases} a_{ij} = 0;\ \forall i < j \\ a_{ij} \neq 0;\ \forall i \geq j \end{cases}$$

Diperoleh $Z(S) = \emptyset$.

Sehingga $S \backslash Z(S) = S - Z(S) = S - \emptyset = S$.

Karena $\forall a, b \in S \ni ab \neq ba$, maka graf komutatif dari S merupakan graf kosong.

BAB IV

PENUTUP

4.1. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang terdapat dalam bab sebelumnya mengenai keterhubungan dalam graf komutatif dari matriks bilangan real yang meliputi matriks diagonal dan matriks segitiga (entri yang bukan nol boleh bernilai nol dan entri yang bukan nol tidak boleh bernilai nol) dimana matriks tersebut memiliki ordo n, maka dapat disimpulkan bahwa:

a. Jika *S* adalah matriks diagonal dimana $S \subseteq M_n(\mathbb{R})$, maka tidak terdapat graf komutatif dari *S*.
b. Jika S adalah matriks segitiga dimana entri yang bukan nol boleh bernilai nol dan $S \subseteq M_2(\mathbb{R})$, maka graf komutatif dari S adalah tidak terhubung.
c. Jika S adalah matriks segitiga dimana entri yang bukan nol tidak boleh bernilai nol dan $S \subseteq M_n(\mathbb{R})$, maka graf komutatif dari S merupakan graf kosong.

4.2. Saran

Masih banyak lagi penelitian mengenai keterhubungan dalam graf komutatif yang bisa dilakukan. Untuk penelitian selanjutnya dapat melanjutkan penelitian mengenai keterhubungan dalam graf komutatif dari matriks division ring lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Akbari, S. 2004. *On Commuting Graph of a Simple Ring*. 16th Seminar on Algebra-Institute for Advanced studies in Basic Science. (Diakses tanggal 16 Oktober 2009).

Anton, Howard and Rorrers, Chris. 2004. *Aljabar Linear elementer, Versi Aplikasi*. Jakarta: Penerbit Erlangga.

Arifin, Ahmad. 2000. *Aljabar*. Bandung: Penerbit ITB.

Azizah, Nilna Niswatin. 2009. *Eksentrik Digraf dari Graf n-Partisi Komplit $K_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_n}$ dengan $\alpha_i \geq 2$ dan α_i Bilangan Asli*. UIN Malang: Skripsi, tidak diterbitkan.

Chartrand, G. dan Lesniak, L. 1986. *Graph and Digraph 2ndEdition*. California: Wadsworth. Inc.

Fathani, Abdul Halim. 2008. *Hakikat dan Logika Matematika*. Jogjakarta: Ar-Ruzz Media.

Gazali, Wikaria. 2005. *Matriks dan Transformasi Linear*. Yogyakarta: Penerbit Graha Ilmu.

Giudici, M. dan Pope, A. 2010. The Diameters of Commuting Graphs of Linear Groups and Matrix Ring Over The Integers Modulo m. *School of Mathematics and Statistics, The University of Western Australia*. (Diakses tanggal 10 Mei 2010).

Hadley, G. 1992. *Aljabar Linear*. Jakarta: Penerbit Erlangga.

Lipschutz dan Lipson. 2004. *Aljabar Linear Schaum's Easy Outlines*. Jakarta: Penerbit Erlangga.

M.D. Raisinghania and R.S. Anggarwai. 1980. *Modern Algebra*. S. Chand and Company Ltd.

Muliah, Titin. 2009. *Eksentrik Digraf dari Graf Sikel (Cn) dan Graf Bipartisi Komplit (Km,n)*. UIN Malang: Skripsi, tidak diterbitkan.

Munir, Rinaldi. 2005. *Matematika Diskrit*. Bandung: Informatika.

Rahman, Hairur. 2007. *Indahnya Matematika Dalam Al-Qur'an*. Malang: UIN-Malang Press.

S. Dummit, David dan M. Foote, Richard. 1991. *Abstract Algebra*. Prentice-Hall, Inc.

S. M Vaezpour dan P. Raja. 2009. On $\mathcal{C}$ –commuting Graphs of Matrix Algebra. *Electronic Journal of Linear Algebra 18 (2009) 364–370.* (Diakses tanggal 5 September 2009).

KEMENTRIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN)
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Malang (0341)551345 Fax. (0341)572533

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : **Yustycia Pratamasari**
NIM : **06510016**
Fakultas/ Jurusan : **Sains Dan Teknologi/ Matematika**
Judul Skripsi : **Keterhubungan Dalam Graf Komutatif Dari Matriks Bilangan Real**
Pembimbing I : **Drs. H. Turmudi, M.Si**
Pembimbing II : **Dr. Ahmad Barizi, M.A**

No	Tanggal	HAL	Tanda Tangan	
1	03 November 2009	Judul dan Rumusan Masalah	1.	
2	10 November 2009	Konsultasi BAB I dan BAB II		2.
3	12 November 2009	Konsultasi BAB I dan BAB II kajian agama	3.	
4	25 November 2009	ACC seminar proposal skripsi		4.
5	26 November 2009	ACC seminar proposal skripsi kajian agama	5.	
6	17 Maret 2010	Revisi BAB I		6.
7	18 Maret 2010	Revisi BAB I kajian agama	7.	
8	23 Maret 2010	ACC BAB I kajian agama		8.
9	25 Maret 2010	Revisi BAB I	9.	
10	07 April 2010	Konsultasi BAB II kajian agama		10.
11	16 April 2010	ACC BAB I	11.	
12	22 April 2010	Revisi BAB II kajian agama		12.
13	27 April 2010	Konsultasi BAB II	13.	
14	28 April 2010	ACC BAB II kajian agama		14.

15	12 Mei 2010	Revisi BAB II	15.	
16	29 Mei 2010	ACC BAB II		16.
17	04 Juni 2010	Konsultasi BAB III dan BAB IV	17.	
18	08 Juni 2010	Revisi BAB III dan BAB IV		18.
19	16 Juni 2010	ACC BAB III dan BAB IV	19.	
20	16 Juni 2010	ACC semua		20.
21	17 Juni 2010	ACC semua (Kajian Agama)	21.	

Malang, 24 Juni 2010
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Absussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

Lampiran

a. Perhitungan pada matriks segitiga atas

Perhitungan perkalian masing-masing titik di dalam himpunan adalah sebagai berikut:

14. Hasil perkalian di dalam *A*.

Ambil $A_1 = \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ dan $A_2 = \begin{bmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, dimana $A_1, A_2 \in A$.

$\begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1x_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\quad \begin{bmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1x_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

sehingga $A_1A_2 = A_2A_1$.

15. Hasil perkalian di dalam *B*.

Ambil $B_1 = \begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ dan $B_2 = \begin{bmatrix} 0 & b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, dimana $B_1, B_2 \in B$.

$\begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\quad \begin{bmatrix} 0 & b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

sehingga $B_1B_2 = B_2B_1$.

16. Hasil perkalian di dalam *C*.

Ambil $C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y_1 \end{bmatrix}$ dan $C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y_2 \end{bmatrix}$, dimana $C_1, C_2 \in C$.

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y_1y_2 \end{bmatrix}$, $\quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y_1y_2 \end{bmatrix}$

sehingga $C_1C_2 = C_2C_1$.

17. Hasil perkalian di dalam *D*.

Ambil $D_1 = \begin{bmatrix} x_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ dan $D_2 = \begin{bmatrix} x_2 & b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, dimana $D_1, D_2 \in D$.

$\begin{bmatrix} x_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 & b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1x_2 & a_1b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\quad \begin{bmatrix} x_2 & b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1x_2 & a_2b_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

sehingga $D_1D_2 \neq D_2D_1$. Untuk $x = nb$, dimana $n \in R, n \neq 0 \wedge n \neq 1$, maka $D_1D_2 = D_2D_1$.

Ambil $D_3 = \begin{bmatrix} nb_3 & b_3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ dan $D_4 = \begin{bmatrix} nb_4 & b_4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, dimana $D_3, D_4 \in D$.

$\begin{bmatrix} nb_3 & b_3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} nb_4 & b_4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} nb_3nb_4 & nb_3b_4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,

$\begin{bmatrix} nb_4 & b_4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} nb_3 & b_3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} nb_3nb_4 & nb_3b_4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

18. Hasil perkalian di dalam E.

Ambil $E_1 = \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & y_1 \end{bmatrix}$ dan $E_2 = \begin{bmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & y_2 \end{bmatrix}$, dimana $E_1, E_2 \in E$.

$\begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & y_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1x_2 & 0 \\ 0 & y_1y_2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & y_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1x_2 & 0 \\ 0 & y_1y_2 \end{bmatrix}$

sehingga $E_1E_2 = E_2E_1$.

19. Hasil perkalian di dalam F.

Ambil $F_1 = \begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & y_1 \end{bmatrix}$ dan $F_2 = \begin{bmatrix} 0 & b_2 \\ 0 & y_2 \end{bmatrix}$, dimana $F_1, F_2 \in F$.

$\begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & y_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & b_2 \\ 0 & y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b_1y_2 \\ 0 & y_1y_2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & b_2 \\ 0 & y_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b_2y_1 \\ 0 & y_1y_2 \end{bmatrix}$

sehingga $F_1F_2 \neq F_2F_1$. Untuk $b = ny$, dimana $n \in R, n \neq 0 \wedge n \neq 1$, maka $F_1F_2 = F_2F_1$.

Ambil $F_3 = \begin{bmatrix} 0 & ny_3 \\ 0 & y_3 \end{bmatrix}$ dan $F_4 = \begin{bmatrix} 0 & ny_4 \\ 0 & y_4 \end{bmatrix}$, dimana $F_3, F_4 \in F$.

$\begin{bmatrix} 0 & ny_3 \\ 0 & y_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & ny_4 \\ 0 & y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & ny_3y_4 \\ 0 & y_3y_4 \end{bmatrix}$,

$\begin{bmatrix} 0 & ny_4 \\ 0 & y_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & ny_3 \\ 0 & y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & ny_3y_4 \\ 0 & y_3y_4 \end{bmatrix}$.

20. Hasil perkalian di dalam *G*.

Ambil $G_1 = \begin{bmatrix} x_1 & x_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ dan $G_2 = \begin{bmatrix} x_2 & x_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, dimana $G_1, G_2 \in G$.

$\begin{bmatrix} x_1 & x_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 & x_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1x_2 & x_1x_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} x_2 & x_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & x_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1x_2 & x_1x_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

sehingga $G_1G_2 = G_2G_1$.

21. Hasil perkalian di dalam *H*.

Ambil $H_1 = \begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & b_1 \end{bmatrix}$ dan $H_2 = \begin{bmatrix} 0 & b_2 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}$, dimana $H_1, H_2 \in H$.

$\begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & b_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & b_2 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b_1b_2 \\ 0 & b_1b_2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & b_2 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b_1b_2 \\ 0 & b_1b_2 \end{bmatrix}$

sehingga $H_1H_2 = H_2H_1$.

22. Hasil perkalian di dalam *I*.

Ambil $I_1 = \begin{bmatrix} x_1 & b_1 \\ 0 & y_1 \end{bmatrix}$ dan $I_2 = \begin{bmatrix} x_2 & b_2 \\ 0 & y_2 \end{bmatrix}$, dimana $I_1, I_2 \in I$.

$$\begin{bmatrix} x_1 & b_1 \\ 0 & y_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 & b_2 \\ 0 & y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1x_2 & x_1b_2 + b_1y_2 \\ 0 & y_1y_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_2 & b_2 \\ 0 & y_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & b_1 \\ 0 & y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1x_2 & x_2b_1 + b_2y_1 \\ 0 & y_1y_2 \end{bmatrix}$$

sehingga $I_1I_2 \neq I_2I_1$.

23. Hasil perkalian di dalam *J*.

Ambil $J_1 = \begin{bmatrix} x_1 & x_1 \\ 0 & y_1 \end{bmatrix}$ dan $J_2 = \begin{bmatrix} x_2 & x_2 \\ 0 & y_2 \end{bmatrix}$, dimana $J_1, J_2 \in J$.

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_1 \\ 0 & y_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 & x_2 \\ 0 & y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1x_2 & x_1x_2 + x_1y_2 \\ 0 & y_1y_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_2 & x_2 \\ 0 & y_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & x_1 \\ 0 & y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1x_2 & x_1x_2 + x_2y_1 \\ 0 & y_1y_2 \end{bmatrix}$$

sehingga $J_1J_2 \neq J_2J_1$. Untuk $x = ny$, dimana $n \in R, n \neq 0 \wedge n \neq 1$, maka $J_1J_2 = J_2J_1$.

Ambil $J_3 = \begin{bmatrix} ny_3 & ny_3 \\ 0 & y_3 \end{bmatrix}$ dan $J_4 = \begin{bmatrix} ny_4 & ny_4 \\ 0 & y_4 \end{bmatrix}$, dimana $J_3, J_4 \in J$.

$$\begin{bmatrix} ny_3 & ny_3 \\ 0 & y_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ny_4 & ny_4 \\ 0 & y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ny_3ny_4 & ny_3ny_4 + ny_3y_4 \\ 0 & y_3y_4 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} ny_4 & ny_4 \\ 0 & y_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ny_3 & ny_3 \\ 0 & y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ny_3ny_4 & ny_3ny_4 + ny_3y_4 \\ 0 & y_3y_4 \end{bmatrix}.$$

24. Hasil perkalian di dalam K.

Ambil $K_1 = \begin{bmatrix} x_1 & b_1 \\ 0 & x_1 \end{bmatrix}$ dan $K_2 = \begin{bmatrix} x_2 & b_2 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix}$, dimana $K_1, K_2 \in K$.

$$\begin{bmatrix} x_1 & b_1 \\ 0 & x_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 & b_2 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1x_2 & x_1b_2 + b_1x_2 \\ 0 & x_1x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_2 & b_2 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & b_1 \\ 0 & x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1x_2 & x_1b_2 + b_1x_2 \\ 0 & x_1x_2 \end{bmatrix}$$

sehingga $K_1K_2 = K_2K_1$.

25. Hasil perkalian di dalam L.

Ambil $L_1 = \begin{bmatrix} x_1 & x_1 \\ 0 & x_1 \end{bmatrix}$ dan $L_2 = \begin{bmatrix} x_2 & x_2 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix}$, dimana $L_1, L_2 \in L$.

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_1 \\ 0 & x_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 & x_2 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1x_2 & 2x_1x_2 \\ 0 & x_1x_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_2 & x_2 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & x_1 \\ 0 & x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1x_2 & 2x_1x_2 \\ 0 & x_1x_2 \end{bmatrix}$$

sehingga $L_1L_2 = L_2L_1$.

26. Hasil perkalian di dalam M.

Ambil $M_1 = \begin{bmatrix} x_1 & b_1 \\ 0 & b_1 \end{bmatrix}$ dan $M_2 = \begin{bmatrix} x_2 & b_2 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}$, dimana $M_1, M_2 \in M$.

$$\begin{bmatrix} x_1 & b_1 \\ 0 & b_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 & b_2 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1x_2 & x_1b_2 + b_1b_2 \\ 0 & b_1b_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_2 & b_2 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & b_1 \\ 0 & b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1x_2 & x_2b_1 + b_1b_2 \\ 0 & b_1b_2 \end{bmatrix}$$

sehingga $M_1M_2 \neq M_2M_1$. Untuk $x = nb$, dimana $n \in R, n \neq 0 \wedge n \neq 1$, maka $M_1M_2 = M_2M_1$.

Ambil $M_3 = \begin{bmatrix} nb_3 & b_3 \\ 0 & b_3 \end{bmatrix}$ dan $M_4 = \begin{bmatrix} nb_4 & b_4 \\ 0 & b_4 \end{bmatrix}$, dimana $M_3, M_4 \in M$.

$$\begin{bmatrix} nb_3 & b_3 \\ 0 & b_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} nb_4 & b_4 \\ 0 & b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} nb_3nb_4 & nb_3b_4 + b_3b_4 \\ 0 & b_3b_4 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} nb_4 & b_4 \\ 0 & b_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} nb_3 & b_3 \\ 0 & b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} nb_3nb_4 & nb_3b_4 + b_3b_4 \\ 0 & b_3b_4 \end{bmatrix}.$$

Hasil dari perkalian setiap himpunan adalah sebagai berikut:

$\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & xb \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (A dan B)

$\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (A dan C)

$\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & xb \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} x & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (A dan D)

$\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (A dan E)

$\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & xb \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (A dan F)

$\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & xx \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} x & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (A dan G)

$\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & xb \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (A dan H)

$\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & b \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & xb \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} x & b \\ 0 & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (A dan I)

$\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & x \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & xx \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} x & x \\ 0 & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (A dan J)

$\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & b \\ 0 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & xb \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} x & b \\ 0 & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (A dan K)

$$\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & x \\ 0 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & xx \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x & x \\ 0 & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (A \text{ dan } L)$$

$$\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & b \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & xb \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x & b \\ 0 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (A \text{ dan } M)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & by \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (B \text{ dan } C)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & xb \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (B \text{ dan } D)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & by \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & xb \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (B \text{ dan } E)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & by \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (B \text{ dan } F)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & xb \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (B \text{ dan } G)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & bb \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (B \text{ dan } H)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & b \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & by \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x & b \\ 0 & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & xb \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (B \text{ dan } I)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & x \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & by \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x & x \\ 0 & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & xb \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (B \text{ dan } J)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & b \\ 0 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & bx \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x & b \\ 0 & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & bx \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (B \text{ dan } K)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & x \\ 0 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & bx \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x & x \\ 0 & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & bx \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (B \text{ dan } L)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & b \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & bb \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x & b \\ 0 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & xb \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (B \text{ dan } M)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & by \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (C \text{ dan } D)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & yy \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & yy \end{bmatrix} \qquad (C \text{ dan } E)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & yy \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & by \\ 0 & yy \end{bmatrix} \qquad (C \text{ dan } F)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & xy \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (C \text{ dan } G)$$

$$\begin{bmatrix}0&0\\0&y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&b\\0&b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&yb\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0&b\\0&b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\0&y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&by\\0&by\end{bmatrix} \qquad (C \text{ dan } H)$$

$$\begin{bmatrix}0&0\\0&y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&b\\0&y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&yy\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}x&b\\0&y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\0&y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&by\\0&yy\end{bmatrix} \qquad (C \text{ dan } I)$$

$$\begin{bmatrix}0&0\\0&y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&\text{잭}\\0&y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&yy\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}x&x\\0&y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\0&y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&xy\\0&yy\end{bmatrix} \qquad (C \text{ dan } J)$$

$$\begin{bmatrix}0&0\\0&y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&b\\0&x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&xy\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}x&b\\0&x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\0&y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&by\\0&xy\end{bmatrix} \qquad (C \text{ dan } K)$$

$$\begin{bmatrix}0&0\\0&y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&x\\0&x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&xy\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}x&x\\0&x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\0&y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&xy\\0&xy\end{bmatrix} \qquad (C \text{ dan } L)$$

$$\begin{bmatrix}0&0\\0&y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&b\\0&b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&yb\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}x&b\\0&b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\0&y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&yb\\0&yb\end{bmatrix} \qquad (C \text{ dan } M)$$

$$\begin{bmatrix}x&b\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&0\\0&y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}xx&by\\0&0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}x&0\\0&y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&b\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}xx&xb\\0&0\end{bmatrix} \qquad (D \text{ dan } E)$$

$$\begin{bmatrix}x&b\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&b\\0&y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&xb+by\\0&0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0&b\\0&y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&b\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix} \qquad (D \text{ dan } F)$$

$$\begin{bmatrix}x&b\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&x\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}xx&xx\\0&0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}x&x\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&b\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}xx&xb\\0&0\end{bmatrix} \qquad (D \text{ dan } G)$$

$$\begin{bmatrix}x&b\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&b\\0&b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&xb+bb\\0&0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0&b\\0&b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&b\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix} \qquad (D \text{ dan } H)$$

Untuk x = -b, pada matriks $\begin{bmatrix}x&b\\0&0\end{bmatrix}$, maka $DH = HD$.

$$\begin{bmatrix}x&b\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&b\\0&y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}xx&xb+by\\0&0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}x&b\\0&y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&b\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}xx&xb\\0&0\end{bmatrix} \qquad (D \text{ dan } I)$$

$$\begin{bmatrix}x&b\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&x\\0&y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}xx&xx+by\\0&0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}x&x\\0&y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&b\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}/x&xb\\0&0\end{bmatrix} \qquad (D \text{ dan } J)$$

$$\begin{bmatrix}x&b\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&b\\0&x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}xx&xb+bx\\0&0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}x&b\\0&x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&b\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}xx&xb\\0&0\end{bmatrix} \qquad (D \text{ dan } K)$$

$$\begin{bmatrix}x&b\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&x\\0&x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}xx&xx+bx\\0&0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}x&x\\0&x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&b\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}xx&xb\\0&0\end{bmatrix} \qquad (D \text{ dan } L)$$

$$\begin{bmatrix}x&b\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&b\\0&b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}xx&xb+bb\\0&0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}x&b\\0&b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&b\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}xx&xb\\0&0\end{bmatrix} \qquad (D \text{ dan } M)$$

$$\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & xb \\ 0 & yy \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & by \\ 0 & yy \end{bmatrix} \qquad (E \text{ dan } F)$$

$$\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & xx \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & xy \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (E \text{ dan } G)$$

$$\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & xb \\ 0 & yb \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & by \\ 0 & by \end{bmatrix} \qquad (E \text{ dan } H)$$

$$\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & b \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & xb \\ 0 & yy \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x & b \\ 0 & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & by \\ 0 & yy \end{bmatrix} \qquad (E \text{ dan } I)$$

$$\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & x \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & xx \\ 0 & yy \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x & x \\ 0 & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & xy \\ 0 & yy \end{bmatrix} \qquad (E \text{ dan } J)$$

$$\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & b \\ 0 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & xb \\ 0 & yx \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x & b \\ 0 & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & by \\ 0 & yx \end{bmatrix} \qquad (E \text{ dan } K)$$

$$\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & x \\ 0 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & xx \\ 0 & xy \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x & x \\ 0 & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & xy \\ 0 & xy \end{bmatrix} \qquad (E \text{ dan } L)$$

$$\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & b \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & xb \\ 0 & yb \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x & b \\ 0 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & by \\ 0 & by \end{bmatrix} \qquad (E \text{ dan } M)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & xb+xy \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (F \text{ dan } G)$$

Untuk $b = -y$, pada matriks $\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & y \end{bmatrix}$, maka $FG = GF$.

$$\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & aa \\ 0 & ab \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & ab \\ 0 & ab \end{bmatrix} \qquad (F \text{ dan } H)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & b \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & by \\ 0 & yy \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x & b \\ 0 & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & xb+by \\ 0 & yy \end{bmatrix} \qquad (F \text{ dan } I)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & x \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & by \\ 0 & yy \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x & x \\ 0 & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & xb+xy \\ 0 & yy \end{bmatrix} \qquad (F \text{ dan } J)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & b \\ 0 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & bx \\ 0 & xy \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x & b \\ 0 & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & xb+by \\ 0 & xy \end{bmatrix} \qquad (F \text{ dan } K)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & x \\ 0 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & bx \\ 0 & yx \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x & x \\ 0 & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & xb+xy \\ 0 & yx \end{bmatrix} \qquad (F \text{ dan } L)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & b \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & bb \\ 0 & by \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x & b \\ 0 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & xb+by \\ 0 & by \end{bmatrix} \qquad (F \text{ dan } M)$$

$$\begin{bmatrix} x & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2xb \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (G \text{ dan } H)$$

$$\begin{bmatrix} x & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & b \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & xb+xy \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x & b \\ 0 & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & xx \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (G \text{ dan } I)$$

$$\begin{bmatrix} x & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & x \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & xx+xy \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x & x \\ 0 & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & xx \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (G \text{ dan } J)$$

$$\begin{bmatrix} x & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & b \\ 0 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & xb+xx \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x & b \\ 0 & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & xx \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (G \text{ dan } K)$$

$$\begin{bmatrix} x & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & x \\ 0 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & 2xx \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x & x \\ 0 & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & xx \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (G \text{ dan } L)$$

$$\begin{bmatrix} x & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & b \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & 2xb \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x & b \\ 0 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & xx \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (G \text{ dan } M)$$

Untuk $x = 2b$, pada matriks $\begin{bmatrix} x & b \\ 0 & b \end{bmatrix}$, maka $GM = MG$.

$$\begin{bmatrix} 0 & \boxed{?} \\ 0 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & b \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & by \\ 0 & by \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x & b \\ 0 & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & xb+bb \\ 0 & by \end{bmatrix} \qquad (H \text{ dan } I)$$

Untuk $x + b = y$, pada matriks $\begin{bmatrix} x & b \\ 0 & y \end{bmatrix}$, maka $HI = IH$.

$$\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & x \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & by \\ 0 & by \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x & x \\ 0 & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2xb \\ 0 & by \end{bmatrix} \qquad (H \text{ dan } J)$$

Untuk $2x = y$, pada matriks $\begin{bmatrix} x & x \\ 0 & y \end{bmatrix}$, maka $HJ = JH$.

$$\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & b \\ 0 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & bx \\ 0 & bx \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x & b \\ 0 & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & xb+bb \\ 0 & xb \end{bmatrix} \qquad (H \text{ dan } K)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & x \\ 0 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & bx \\ 0 & bx \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x & x \\ 0 & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2xb \\ 0 & xb \end{bmatrix} \qquad (H \text{ dan } L)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & b \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & bb \\ 0 & bb \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x & b \\ 0 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & xb+bb \\ 0 & bb \end{bmatrix} \qquad (H \text{ dan } M)$$

$$\begin{bmatrix} x & b \\ 0 & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & x \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & xx+by \\ 0 & yy \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x & x \\ 0 & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & b \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & bx+xy \\ 0 & yy \end{bmatrix} \qquad (I \text{ dan } J)$$

$$\begin{bmatrix} x & b \\ 0 & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & b \\ 0 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & 2xb \\ 0 & xy \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x & b \\ 0 & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & b \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & xb+by \\ 0 & xy \end{bmatrix} \qquad (I \text{ dan } K)$$

$$\begin{bmatrix} x & b \\ 0 & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & x \\ 0 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & xx+bx \\ 0 & xy \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x & x \\ 0 & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & b \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & bx+xy \\ 0 & xy \end{bmatrix} \qquad (I \text{ dan } L)$$

$$\begin{bmatrix} x & b \\ 0 & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & b \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & xb+bb \\ 0 & by \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x & b \\ 0 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & b \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & xb+by \\ 0 & by \end{bmatrix} \qquad (I \text{ dan } M)$$

$$\begin{bmatrix} x & x \\ 0 & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & b \\ 0 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & xb+xx \\ 0 & xy \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x & b \\ 0 & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & x \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & xx+by \\ 0 & xy \end{bmatrix} \qquad (J \text{ dan } K)$$

$$\begin{bmatrix} x & x \\ 0 & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & x \\ 0 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & 2xx \\ 0 & xy \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x & x \\ 0 & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & x \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & xx+xy \\ 0 & xy \end{bmatrix} \qquad (J \text{ dan } L)$$

$$\begin{bmatrix} x & x \\ 0 & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & b \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & 2xb \\ 0 & by \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x & b \\ 0 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & x \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & xx+by \\ 0 & by \end{bmatrix} \qquad (J \text{ dan } M)$$

$$\begin{bmatrix} x & b \\ 0 & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & x \\ 0 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & xx+bx \\ 0 & xx \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x & x \\ 0 & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & b \\ 0 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & xb+xx \\ 0 & xx \end{bmatrix} \qquad (K \text{ dan } L)$$

$$\begin{bmatrix} x & b \\ 0 & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & b \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & xb+bb \\ 0 & xb \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x & b \\ 0 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & b \\ 0 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa & 2bx \\ 0 & xb \end{bmatrix} \qquad (K \text{ dan } M)$$

$$\begin{bmatrix} x & x \\ 0 & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & b \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & 2xb \\ 0 & xb \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x & b \\ 0 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & x \\ 0 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & xx+bx \\ 0 & bx \end{bmatrix} \qquad (L \text{ dan } M)$$

b. Perhitungan pada matriks segitiga bawah

Untuk hasil perkalian masing-masing titik di dalam himpunan adalah sebagai berikut:

14. Hasil perkalian di dalam A.

Ambil $A_1 = \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ dan $A_2 = \begin{bmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, dimana $A_1, A_2 \in A$.

$$\begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1x_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1x_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sehingga $A_1A_2 = A_2A_1$.

15. Hasil perkalian di dalam B.

Ambil $B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_1 & 0 \end{bmatrix}$ dan $B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_2 & 0 \end{bmatrix}$, dimana $B_1, B_2 \in B$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sehingga $B_1B_2 = B_2B_1$.

16. Hasil perkalian di dalam C.

Ambil $C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y_1 \end{bmatrix}$ dan $C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y_2 \end{bmatrix}$, dimana $C_1, C_2 \in C$.

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y_1y_2 \end{bmatrix}$, $\quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y_1y_2 \end{bmatrix}$

sehingga $C_1C_2 = C_2C_1$.

17. Hasil perkalian di dalam D.

Ambil $D_1 = \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ b_1 & 0 \end{bmatrix}$ dan $D_2 = \begin{bmatrix} x_2 & 0 \\ b_2 & 0 \end{bmatrix}$, dimana $D_1, D_2 \in D$.

$\begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ b_1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 & 0 \\ b_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1x_2 & 0 \\ x_2b_1 & 0 \end{bmatrix}$, $\quad \begin{bmatrix} x_2 & 0 \\ b_2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ b_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1x_2 & 0 \\ xb_2 & 0 \end{bmatrix}$

sehingga $D_1D_2 \neq D_2D_1$. Untuk $x = nb$, dimana $n \in R, n \neq 0 \wedge n \neq 1$, maka $D_1D_2 = D_2D_1$.

Ambil $D_3 = \begin{bmatrix} nb_3 & 0 \\ b_3 & 0 \end{bmatrix}$ dan $D_4 = \begin{bmatrix} nb_4 & 0 \\ b_4 & 0 \end{bmatrix}$, dimana $D_3, D_4 \in D$.

$\begin{bmatrix} nb_3 & 0 \\ b_3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} nb_4 & 0 \\ b_4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} nb_3nb_4 & 0 \\ nb_3b_4 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} nb_4 & 0 \\ b_4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} nb_3 & 0 \\ b_3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} nb_3nb_4 & 0 \\ nb_3b_4 & 0 \end{bmatrix}$.

18. Hasil perkalian di dalam E.

Ambil $E_1 = \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & y_1 \end{bmatrix}$ dan $E_2 = \begin{bmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & y_2 \end{bmatrix}$,dimana $E_1, E_2 \in E$.

$\begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & y_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1x_2 & 0 \\ 0 & y_1y_2 \end{bmatrix}$, $\quad \begin{bmatrix} x_2 & 0 \\ 0 & y_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1x_2 & 0 \\ 0 & y_1y_2 \end{bmatrix}$

sehingga $E_1E_2 = E_2E_1$.

19. Hasil perkalian di dalam F.

Ambil $F_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_1 & y_1 \end{bmatrix}$ dan $F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_2 & y_2 \end{bmatrix}$, dimana $F_1, F_2 \in F$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_1 & y_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_2 & y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_2 y_1 & y_1 y_2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_2 & y_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_1 & y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_1 y_2 & y_1 y_2 \end{bmatrix}$$

sehingga $F_1F_2 \neq F_2F_1$. Untuk $b = ny$, dimana $n \in R, n \neq 0 \wedge n \neq 1$, maka $F_1F_2 = F_2F_1$.

Ambil $F_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ ny_3 & y_3 \end{bmatrix}$ dan $F_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ ny_4 & y_4 \end{bmatrix}$, dimana $F_3, F_4 \in F$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ ny_3 & y_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ ny_4 & y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ ny_3 y_4 & y_3 y_4 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ ny_4 & y_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ ny_3 & y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ ny_3 y_4 & y_3 y_4 \end{bmatrix}.$$

20. Hasil perkalian di dalam G.

Ambil $G_1 = \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ x_1 & 0 \end{bmatrix}$ dan $G_2 = \begin{bmatrix} x_2 & 0 \\ x_2 & 0 \end{bmatrix}$, dimana $G_1, G_2 \in G$.

$$\begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ x_1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 & 0 \\ x_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1x_2 & 0 \\ x_1x_2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} x_2 & 0 \\ x_2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ x_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1x_2 & 0 \\ x_1x_2 & 0 \end{bmatrix}$$

sehingga $G_1G_2 = G_2G_1$.

21. Hasil perkalian di dalam H.

Ambil $H_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_1 & b_1 \end{bmatrix}$ dan $H_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_2 & b_2 \end{bmatrix}$, dimana $H_1, H_2 \in H$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_1 & b_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_2 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_1b_2 & b_1b_2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_2 & b_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_1 & b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b_1b_2 & b_1b_2 \end{bmatrix}$$

sehingga $H_1H_2 = H_2H_1$.

22. Hasil perkalian di dalam I.

Ambil $I_1 = \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ b_1 & y_1 \end{bmatrix}$ dan $I_2 = \begin{bmatrix} x_2 & 0 \\ b_2 & y_2 \end{bmatrix}$, dimana $I_1, I_2 \in I$.

$$\begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ b_1 & y_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 & 0 \\ b_2 & y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1x_2 & 0 \\ x_2b_1 + b_2y_1 & y_1y_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_2 & 0 \\ b_2 & y_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ b_1 & y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1x_2 & 0 \\ x_1b_2 + b_1y_2 & y_1y_2 \end{bmatrix}$$

sehingga $I_1I_2 \neq I_2I_1$.

23. Hasil perkalian di dalam J.

Ambil $J_1 = \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ x_1 & y_1 \end{bmatrix}$ dan $J_2 = \begin{bmatrix} x_2 & 0 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix}$, dimana $J_1, J_2 \in J$.

$$\begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ x_1 & y_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 & 0 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1x_2 & 0 \\ x_1x_2 + x_2y_1 & y_1y_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_2 & 0 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ x_1 & y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1x_2 & 0 \\ x_1x_2 + x_1y_2 & y_1y_2 \end{bmatrix}$$

sehingga $J_1J_2 \neq J_2J_1$. Untuk $x = ny$, dimana $n \in R, n \neq 0 \wedge n \neq 1$, maka $J_1J_2 = J_2J_1$.

Ambil $J_3 = \begin{bmatrix} ny_3 & 0 \\ ny_3 & y_3 \end{bmatrix}$ dan $J_4 = \begin{bmatrix} ny_4 & 0 \\ ny_4 & y_4 \end{bmatrix}$, dimana $J_3, J_4 \in J$.

$$\begin{bmatrix} ny_3 & 0 \\ ny_3 & y_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ny_4 & 0 \\ ny_4 & y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ny_3ny_4 & 0 \\ ny_3ny_4 + ny_3y_4 & y_3y_4 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} ny_4 & 0 \\ ny_4 & y_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ny_3 & 0 \\ ny_3 & y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ny_3ny_4 & 0 \\ ny_3ny_4 + ny_3y_4 & y_3y_4 \end{bmatrix}.$$

24. Hasil perkalian di dalam K.

Ambil $K_1 = \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ b_1 & x_1 \end{bmatrix}$ dan $K_2 = \begin{bmatrix} x_2 & 0 \\ b_2 & x_2 \end{bmatrix}$, dimana $K_1, K_2 \in K$.

$$\begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ b_1 & x_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 & 0 \\ b_2 & x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1x_2 & 0 \\ x_1b_2 + b_1x_2 & x_1x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_2 & 0 \\ b_2 & x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ b_1 & x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1x_2 & 0 \\ x_1b_2 + b_1x_2 & x_1x_2 \end{bmatrix}$$

sehingga $K_1K_2 = K_2K_1$.

25. Hasil perkalian di dalam L.

Ambil $L_1 = \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ x_1 & x_1 \end{bmatrix}$ dan $L_2 = \begin{bmatrix} x_2 & 0 \\ x_2 & x_2 \end{bmatrix}$, dimana $L_1, L_2 \in L$.

$\begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ x_1 & x_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 & 0 \\ x_2 & x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1x_2 & 0 \\ 2x_1x_2 & x_1x_2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} x_2 & 0 \\ x_2 & x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ x_1 & x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1x_2 & 0 \\ 2x_1x_2 & x_1x_2 \end{bmatrix}$

sehingga $L_1L_2 = L_2L_1$.

26. Hasil perkalian di dalam M.

Ambil $M_1 = \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ b_1 & b_1 \end{bmatrix}$ dan $M_2 = \begin{bmatrix} x_2 & 0 \\ b_2 & b_2 \end{bmatrix}$, dimana $M_1, M_2 \in M$.

$$\begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ b_1 & b_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 & 0 \\ b_2 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1x_2 & 0 \\ x_2b_1 + b_1b_2 & b_1b_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_2 & 0 \\ b_2 & b_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ b_1 & b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1x_2 & 0 \\ x_1b_2 + b_1b_2 & b_1b_2 \end{bmatrix}$$

sehingga $M_1M_2 \neq M_2M_1$. Untuk $x = nb$, dimana $n \in R, n \neq 0 \land n \neq 1$, maka $M_1M_2 = M_2M_1$.

Ambil $M_3 = \begin{bmatrix} nb_3 & 0 \\ b_3 & b_3 \end{bmatrix}$ dan $M_4 = \begin{bmatrix} nb_4 & 0 \\ b_4 & b_4 \end{bmatrix}$, dimana $M_3, M_4 \in M$.

$$\begin{bmatrix} nb_3 & 0 \\ b_3 & b_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} nb_4 & 0 \\ b_4 & b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} nb_3nb_4 & 0 \\ nb_3b_4 + b_3b_4 & b_3b_4 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} nb_4 & 0 \\ b_4 & b_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} nb_3 & 0 \\ b_3 & b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} nb_3nb_4 & 0 \\ nb_3b_4 + b_3b_4 & b_3b_4 \end{bmatrix}.$$

Hasil dari perkalian setiap himpunan adalah sebagai berikut:

$\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ bx & 0 \end{bmatrix}$ (A dan B)

$\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (A dan C)

$\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} x & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & 0 \\ bx & 0 \end{bmatrix}$ (A dan D)

$\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (A dan E)

$$\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ bx & 0 \end{bmatrix} \qquad (A \text{ dan } F)$$

$$\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 \\ x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x & 0 \\ x & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & 0 \\ xx & 0 \end{bmatrix} \qquad (A \text{ dan } G)$$

$$\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ bx & 0 \end{bmatrix} \qquad (A \text{ dan } H)$$

$$\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 \\ b & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x & 0 \\ b & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & 0 \\ bx & 0 \end{bmatrix} \qquad (A \text{ dan } I)$$

$$\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 \\ x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x & 0 \\ x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & 0 \\ xx & 0 \end{bmatrix} \qquad (A \text{ dan } J)$$

$$\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 \\ b & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x & 0 \\ b & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & 0 \\ bx & 0 \end{bmatrix} \qquad (A \text{ dan } K)$$

$$\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 \\ x & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x & 0 \\ x & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & 0 \\ xx & 0 \end{bmatrix} \qquad (A \text{ dan } L)$$

$$\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 \\ b & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x & 0 \\ b & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & 0 \\ bx & 0 \end{bmatrix} \qquad (A \text{ dan } M)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ by & 0 \end{bmatrix} \qquad (B \text{ dan } C)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ bx & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (B \text{ dan } D)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ bx & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ by & 0 \end{bmatrix} \qquad (B \text{ dan } E)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ by & 0 \end{bmatrix} \qquad (B \text{ dan } F)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 \\ x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ bx & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x & 0 \\ x & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (B \text{ dan } G)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ bb & 0 \end{bmatrix} \qquad (B \text{ dan } H)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 \\ b & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ bx & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x & 0 \\ b & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ by & 0 \end{bmatrix} \qquad (B \text{ dan } I)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 \\ x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ bx & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x & 0 \\ x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ by & 0 \end{bmatrix} \qquad (B \text{ dan } J)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 \\ b & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ bx & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x & 0 \\ b & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ bx & 0 \end{bmatrix} \qquad (B \text{ dan } K)$$

$$\begin{bmatrix}0 & 0\\ b & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & 0\\ x & x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ bx & 0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}x & 0\\ x & x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ b & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ bx & 0\end{bmatrix}\qquad (B \text{ dan } L)$$

$$\begin{bmatrix}0 & 0\\ b & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & 0\\ b & b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ bx & 0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}x & 0\\ b & b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ b & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ bb & 0\end{bmatrix}\qquad (B \text{ dan } M)$$

$$\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & 0\\ b & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ by & 0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}x & 0\\ b & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\qquad (C \text{ dan } D)$$

$$\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & 0\\ 0 & y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & yy\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}x & 0\\ 0 & y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & yy\end{bmatrix}\qquad (C \text{ dan } E)$$

$$\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ b & y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ by & yy\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0 & 0\\ b & y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & yy\end{bmatrix}\qquad (C \text{ dan } F)$$

$$\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & 0\\ x & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ xy & 0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}x & 0\\ x & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\qquad (C \text{ dan } G)$$

$$\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ b & b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ by & by\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0 & 0\\ b & b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & by\end{bmatrix}\qquad (C \text{ dan } H)$$

$$\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & 0\\ b & y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ by & yy\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}x & 0\\ b & y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & yy\end{bmatrix}\qquad (C \text{ dan } I)$$

$$\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & 0\\ x & y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ xy & yy\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}x & 0\\ x & y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & yy\end{bmatrix}\qquad (C \text{ dan } J)$$

$$\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & 0\\ b & x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ by & xy\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}x & 0\\ b & x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & xy\end{bmatrix}\qquad (C \text{ dan } K)$$

$$\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & 0\\ x & x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ xy & xy\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}x & 0\\ x & x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & xy\end{bmatrix}\qquad (C \text{ dan } L)$$

$$\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & 0\\ b & b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ by & by\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}x & 0\\ b & b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & by\end{bmatrix}\qquad (C \text{ dan } M)$$

$$\begin{bmatrix}x & 0\\ b & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & 0\\ 0 & y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}xx & 0\\ bx & 0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}x & 0\\ 0 & y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & 0\\ b & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}xx & 0\\ by & 0\end{bmatrix}\qquad (D \text{ dan } E)$$

$$\begin{bmatrix}x & 0\\ b & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ b & y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0 & 0\\ b & y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & 0\\ b & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ bx+by & 0\end{bmatrix}\qquad (D \text{ dan } F)$$

$$\begin{bmatrix}x & 0\\ b & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & 0\\ x & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}xx & 0\\ bx & 0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}x & 0\\ x & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & 0\\ b & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}xx & 0\\ xx & 0\end{bmatrix}\qquad (D \text{ dan } G)$$

$$\begin{bmatrix}x & 0\\ b & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ b & b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0 & 0\\ b & b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & 0\\ b & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ bx+bb & 0\end{bmatrix}\qquad (D \text{ dan } H)$$

Untuk x = -b, pada matriks $\begin{bmatrix}x & 0\\ b & 0\end{bmatrix}$, maka $DH = HD$.

$$\begin{bmatrix} x & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 \\ b & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & 0 \\ xb & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x & 0 \\ b & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & 0 \\ xb + by & 0 \end{bmatrix} \qquad (D \text{ dan } I)$$

$$\begin{bmatrix} x & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 \\ x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & 0 \\ bx & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x & 0 \\ x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & 0 \\ xx + by & 0 \end{bmatrix} \qquad (D \text{ dan } J)$$

$$\begin{bmatrix} x & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 \\ b & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & 0 \\ bx & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x & 0 \\ b & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & 0 \\ bx + bx & 0 \end{bmatrix} \qquad (D \text{ dan } K)$$

$$\begin{bmatrix} x & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 \\ x & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & 0 \\ bx & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x & 0 \\ x & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & 0 \\ xx + bx & 0 \end{bmatrix} \qquad (D \text{ dan } L)$$

$$\begin{bmatrix} x & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 \\ b & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & 0 \\ bx & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x & 0 \\ b & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & 0 \\ bx + bb & 0 \end{bmatrix} \qquad (D \text{ dan } M)$$

$$\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ by & yy \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ bx & yy \end{bmatrix} \qquad (E \text{ dan } F)$$

$$\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 \\ x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & 0 \\ xy & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x & 0 \\ x & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & 0 \\ xx & 0 \end{bmatrix} \qquad (E \text{ dan } G)$$

$$\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ by & by \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ bx & by \end{bmatrix} \qquad (E \text{ dan } H)$$

$$\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 \\ b & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & 0 \\ by & yy \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x & 0 \\ b & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & 0 \\ bx & yy \end{bmatrix} \qquad (E \text{ dan } I)$$

$$\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 \\ x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & 0 \\ xy & yy \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x & 0 \\ x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & 0 \\ xx & yy \end{bmatrix} \qquad (E \text{ dan } J)$$

$$\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 \\ b & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & 0 \\ by & xy \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x & 0 \\ b & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & 0 \\ bx & xy \end{bmatrix} \qquad (E \text{ dan } K)$$

$$\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 \\ x & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & 0 \\ xy & xy \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x & 0 \\ x & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & 0 \\ xx & xy \end{bmatrix} \qquad (E \text{ dan } L)$$

$$\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 \\ b & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & 0 \\ by & by \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x & 0 \\ b & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xx & 0 \\ bx & by \end{bmatrix} \qquad (E \text{ dan } M)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 \\ x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ bx + xy & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x & 0 \\ x & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (F \text{ dan } G)$$

Untuk b = -y, pada matriks $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & y \end{bmatrix}$, maka $FG = GF$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ by & by \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ bb & by \end{bmatrix} \qquad (F \text{ dan } H)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 \\ b & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ bx + by & yy \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x & 0 \\ b & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ by & yy \end{bmatrix} \qquad (F \text{ dan } I)$$

$$\begin{bmatrix}0&0\\b&y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&0\\x&y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\bx+xy&yy\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}x&0\\x&y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\b&y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\by&yy\end{bmatrix} \qquad (F \text{ dan } J)$$

$$\begin{bmatrix}0&0\\b&y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&0\\b&x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\bx+by&xy\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}x&0\\b&x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\b&y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\bx&xy\end{bmatrix} \qquad (F \text{ dan } K)$$

$$\begin{bmatrix}0&0\\b&y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&0\\x&x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\bx+xy&xy\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}x&0\\x&x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\b&y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\bx&xy\end{bmatrix} \qquad (F \text{ dan } L)$$

$$\begin{bmatrix}0&0\\b&y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&0\\b&b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\bx+by&by\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}x&0\\b&b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\b&y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\bb&by\end{bmatrix} \qquad (F \text{ dan } M)$$

$$\begin{bmatrix}x&0\\x&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\b&b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0&0\\b&b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&0\\x&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\2bx&0\end{bmatrix} \qquad (G \text{ dan } H)$$

$$\begin{bmatrix}x&0\\x&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&0\\b&y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}xx&0\\xx&0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}x&0\\b&y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&0\\x&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}xx&0\\bx+xy&0\end{bmatrix} \qquad (G \text{ dan } I)$$

$$\begin{bmatrix}x&0\\x&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&0\\x&y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}xx&0\\xx&0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}x&0\\x&y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&0\\x&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}xx&0\\xx+xy&0\end{bmatrix} \qquad (G \text{ dan } J)$$

$$\begin{bmatrix}x&0\\x&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&0\\b&x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}xx&0\\xx&0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}x&0\\b&x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&0\\x&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}xx&0\\bx+xx&0\end{bmatrix} \qquad (G \text{ dan } K)$$

$$\begin{bmatrix}x&0\\x&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&0\\x&x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}xx&0\\xx&0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}x&0\\x&x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&0\\x&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}xx&0\\2xx&0\end{bmatrix} \qquad (G \text{ dan } L)$$

$$\begin{bmatrix}x&0\\x&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&0\\b&b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}xx&0\\xx&0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}x&0\\b&b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&0\\x&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}xx&0\\2bx&0\end{bmatrix} \qquad (G \text{ dan } M)$$

Untuk $x = 2b$, pada matriks $\begin{bmatrix}x&0\\b&b\end{bmatrix}$, maka $GM = MG$.

$$\begin{bmatrix}0&0\\b&b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&0\\b&y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\aa+ab&ac\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}x&0\\b&y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\b&b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\ac&\square c\end{bmatrix} \qquad (H \text{ dan } I)$$

Untuk $a + b = c$, pada matriks $\begin{bmatrix}x&0\\b&y\end{bmatrix}$, maka $HI = IH$.

$$\begin{bmatrix}0&0\\b&b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&0\\x&y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\2xb&by\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}x&0\\x&y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\b&b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\by&by\end{bmatrix} \qquad (H \text{ dan } J)$$

Untuk $2x = y$, pada matriks $\begin{bmatrix}x&0\\x&y\end{bmatrix}$,maka $HJ = JH$.

$$\begin{bmatrix}0&0\\b&b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&0\\b&x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\bx+bb&bx\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}x&0\\b&x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\b&b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\bx&bx\end{bmatrix} \qquad (H \text{ dan } K)$$

$$\begin{bmatrix}0&0\\b&b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x&0\\x&x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\2bx&bx\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}x&0\\x&x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\b&b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\bx&bx\end{bmatrix} \qquad (H \text{ dan } L)$$

$$\begin{bmatrix}0 & 0\\ b & b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & 0\\ b & b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ bx+bb & bb\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}x & 0\\ b & b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ b & b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ bb & bb\end{bmatrix} \qquad (H \text{ dan } M)$$

$$\begin{bmatrix}x & 0\\ b & y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & 0\\ x & y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}xx & 0\\ bx+yx & yy\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}x & 0\\ x & y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & 0\\ b & y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}xx & 0\\ xx+by & yy\end{bmatrix} \qquad (I \text{ dan } J)$$

$$\begin{bmatrix}x & 0\\ b & y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & 0\\ b & x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}xx & 0\\ bx+by & xy\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}x & 0\\ b & x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & 0\\ b & y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}axx & 0\\ 2bx & xy\end{bmatrix} \qquad (I \text{ dan } K)$$

$$\begin{bmatrix}x & 0\\ b & y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & 0\\ x & x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}xx & 0\\ bx+xy & xy\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}x & 0\\ x & x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & 0\\ b & y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}xx & 0\\ xx+xb & xy\end{bmatrix} \qquad (I \text{ dan } L)$$

$$\begin{bmatrix}x & 0\\ b & y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & 0\\ b & b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}xx & 0\\ bx+by & by\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}x & 0\\ b & b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & 0\\ b & y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}xx & 0\\ bx+bb & by\end{bmatrix} \qquad (I \text{ dan } M)$$

$$\begin{bmatrix}x & 0\\ x & y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & 0\\ b & x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}xx & 0\\ xx+by & xy\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}x & 0\\ b & x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & 0\\ x & y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}xx & 0\\ bx+xx & xy\end{bmatrix} \qquad (J \text{ dan } K)$$

$$\begin{bmatrix}x & 0\\ x & y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & 0\\ x & x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}xx & 0\\ xx+xy & xy\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}x & 0\\ x & x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & 0\\ x & y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}xx & 0\\ 2xx & xy\end{bmatrix} \qquad (J \text{ dan } L)$$

$$\begin{bmatrix}x & 0\\ x & y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & 0\\ b & b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}xx & 0\\ xx+by & yb\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}x & 0\\ b & b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & 0\\ x & y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}xx & 0\\ 2xb & yb\end{bmatrix} \qquad (J \text{ dan } M)$$

$$\begin{bmatrix}x & 0\\ b & x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & 0\\ x & x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}xx & 0\\ bx+xx & xx\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}x & 0\\ x & x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & 0\\ b & x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}xx & 0\\ xx+xb & xx\end{bmatrix} \qquad (K \text{ dan } L)$$

$$\begin{bmatrix}x & 0\\ b & x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & 0\\ b & b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}xx & 0\\ 2xb & xb\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}x & 0\\ b & b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & 0\\ b & x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}xx & 0\\ xb+bb & xb\end{bmatrix} \qquad (K \text{ dan } M)$$

$$\begin{bmatrix}x & 0\\ x & x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & 0\\ b & b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}xx & 0\\ xx+xb & xb\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}x & 0\\ b & b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & 0\\ x & x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}xx & 0\\ 2xb & xb\end{bmatrix} \qquad (L \text{ dan } M)$$