PENGEMBANGAN ALJABAR BCI P-SEMISIMPLE DENGAN SIFAT ASSOSIATIF

SKRIPSI

Oleh:
KRIDHA PUSAWIDJAYANTI
NIM. 07610032

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2011

PENGEMBANGAN ALJABAR BCI P-SEMISIMPLE DENGAN SIFAT ASSOSIATIF

SKRIPSI

Diajukan Kepada:

Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri (UIN) Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan Dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
KRIDHA PUSA WIDJAYANTI
NIM. 07610032

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2011

PENGEMBANGAN ALJABAR BCI P-SEMISIMPLE DENGAN SIFAT ASSOSIATIF

SKRIPSI

Oleh:
KRIDHA PUSAWIDJAYANTI
NIM. 07610032

Disetujui oleh:

Pembimbing I,	**Pembimbing II,**
Drs. H. Turmudi, M.Si	**Ach. Nashichuddin, MA**
NIP. 19571005 198203 1 006	**NIP. 19730705 200003 1 002**

Tanggal: 13 Juli 2011

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PENGEMBANGAN ALJABAR BCI P-SEMISIMPLE DENGAN SIFAT ASSOSIATIF

SKRIPSI

Oleh:
KRIDHA PUSAWIDJAYANTI
NIM. 07610032

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal: 22 Juli 2011

Susunan Dewan Penguji		**Tanda Tangan**
1. Penguji Utama	**: Hairur Rahman, M.Si** **NIP. 19800429 200604 1 003**	( )
2. Ketua	**: Usman Pagalay, M.Si** **NIP. 19650414 200312 1 001**	( )
3. Sekretaris	**: Drs. H. Turmudi, M.Si** **NIP. 19571005 198203 1 006**	( )
4. Anggota	**: Achmad Nashichuddin, M.A** **NIP. 19730705 200003 1002**	( )

Mengetahui dan Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama	: Kridha Pusawidjayanti
NIM	: 07610032
Fakultas / Jurusan	: Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Penelitian	: Pengembangan Aljabar BCI p-semisimple dengan Sifat Assosiatif

Menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa hasil penelitian saya ini tidak terdapat unsur-unsur penjiplakan karya penelitian atau karya ilmiah yang pernah dilakukan atau dibuat oleh orang lain, kecuali yang secara tertulis dikutip dalam naskah ini dan disebutkan dalam sumber kutipan dan daftar pustaka.

Apabila ternyata hasil penelitian ini terbukti terdapat unsur-unsur jiplakan, maka saya bersedia untuk mempertanggung jawabkan, serta diproses sesuai peraturan yang berlaku.

Malang, 17 Juli 2011
Yang membuat pernyataan,

Kridha Pusawidjayanti
NIM. 07610032

MOTTO

لَا يُكَلِّفُ ٱللَّهُ نَفْسًا إِلَّا وُسْعَهَا ۚ

"Allah tidak membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya"

HALAMAN PERSEMBAHAN

بسم الله الرحمن الرحيم

Dengan iringan Do'a penulis telah menyelesaikan penelitian ini.

Dan penelitian ini penulis persembahkan hanya kepada:

Ibu dan Bapak

yang selalu bekerja keras dan selalu mendo'akan penulis.

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

DAFTAR SIMBOL

$\in$	: Anggota himpunan
$\notin$	: Bukan anggota himpunan
$\emptyset$	: Himpunan kosong
$\subseteq$	: Himpunan bagian
$\nsubseteq$	: Bukan himpunan bagian
$\sim$	: ekivalen
$\cup$	: Union atau gabungan
$\cap$	: intersection atau irisan
x^{-1}	: Invers dari x
A^c	: komplemen dari A
$\leq$ atau $\geq$	: Relasi Pengurutan Parsial
$(X, *, 0)$	: Aljabar X yang dibangun oleh operasi biner "$*$" dan elemen khusus 0

DAFTAR LAMPIRAN

ABSTRAK

Pusawidjayanti, Kridha. 2011. **Pengembangan Aljabar BCI P-Semisimple Dengan sifat Assosiatif.**Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: I. Drs. H. Turmudi, M.Si.
II. Ach. Nashichuddin, M.A

Kata Kunci: Grup, Aljabar-BCI, Aljabar-BCI p-semisimple.

Suatu struktur aljabar merupakan himpunan tak kosong dengan paling sedikit sebuah relasi ekuivalensi satu atau lebih operasi biner dan memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Dalam perkuliahan selama ini subbab yang dipelajari hanya grup dan ring saja, ternyata masih banyak lagi struktur aljabar yang lain diantaranya adalah aljabar BCI, aljabar BCK dan yang dibahas oleh penulis yaitu aljabar BCI p-semisimple. Berdasarkan latar belakang masalah tersebut penelitian dilakukan dengan tujuan untuk: Mengetahui bentuk Aljabar BCI yang bersifat assosiatif dan mengetahui hubungan Aljabar BCI p-semisimple dengan grup abelian.

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode penelitian kepustakaan (*library research)* atau kajian pustaka. Adapun langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah : (1) Mengumpulkan definisi yang berhubungan dengan topik-topik dalam Aljabar BCI, Aljabar BCK, dan Aljabar BCI p-semisimple. (2) Mengumpulkan teorema yang berhubungan dengan sifat-sifat dalam Aljabar BCI p-semisimple. (3) Membuktikan teorema-teorema yang berhubungan dengan Aljabar BCI p-semisimple..(4) Memberikan contoh-contoh dari teorema yang telah dibuktikan. (5) Membuat Kesimpulan (6) Melaporkan.

Berdasarkan hasil pembahasan dapat diperoleh kesimpulan sebagai berikut.

1. Jika $(X,*,0)$ adalah aljabar BCI yang bersifat assosiatif maka $(X,*,0)$ adalah *Aljabar p-semisimple*
2. Jika $(X,*,0)$ adalah *Aljabar p-semisimple* yang bersifat assosiatif maka $(X,*)$ adalah grup abelian.

ABSTRACT

Widjayanti, Kridha. 2011. **Pengembangan Aljabar BCI P-Semisimple dengan Sifat Assosiatif.** Theses. Mathematics Programme Faculty of Science and Technology The State of Islamic University Maulana Malik Ibrahim Malang.
Promotor: I. Drs. H. Turmudi, M.Si.
II. Ach. Nashichuddin, M.A.

Key Words: Group, *BCI*-Algebras, *BCI*-Algebras *p-semisimple.*

A algebra is not empty set with one equivalency relation biner operation that complay with some axioms. In university lecture topic of algebra just group and ring, so we have research another algebra is BCI algebra, BCK algebra and p-semisimple algebra. From that problem, this research has purposes: knowing BCI algebra who has associative characteristic and knowing relationship BCI p-semisimple algebra with abelian group.

This research use library research method. This research has steps, there are: (1) collect the definition who has relationship with the topics in BCI algebra, BCK algebra, and p-semisimple algebra. (2) collect the theorems who has relationship with the characteristics in BCI algebra, BCK algebra, and p-semisimple algebra. (3) prove the theorems who has relationship with BCI p-semisimple algebra. (4) give examples from the theorems. (5) make conclusion (6) and report the research.

From this thesis, the conclusion is:

1. If $(X,*,0)$ is associative BCI algebra then $(X,*,0)$ is p-semisimple algebra
2. If $(X,*,0)$ is associative p-semisimple algebra then $(X,*,0)$ is abelian group

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan ilmu pasti yang segala sesuatunya tercetak dalam sebuah formula untuk mendapatkan hasil yang valid. Matematika merupakan ilmu pengetahuan dasar yang dibutuhkan semua manusia dalam kehidupan sehari-hari baik secara langsung maupun tidak langsung (Rahman, 2007 ; hal:1).

Dalam kehidupan sehari-hari kita akan berhadapan dengan matematika, dalam jual beli pasti akan menemui matematika. Matematika tidak hanya mempelajari bilangan-bilangan real saja melainkan bilangan yang memuat bilangan imaginer (abstrak) juga dibahas oleh matematika.

Banyak macam cabang dari ilmu matematika diantaranya statistika, analisis, aljabar, dsb. Aljabar misalnya, cabang matematika yang dicirikan sebagai generalisasi dari bidang aritmatika.

Grupoida merupakan sub-bab dari struktur aljabar yaitu himpunan dengan satu operasi biner, dimana dengan grupoida tersebut akan menghasilkan subbab - subbab yang lain dalam struktur aljabar seperti monoid, grup, ring dan lain sebagainya.

Aljabar BCI merupakan bagian dari struktur aljabar dimana didalamnya terdapat grupoida yang mempunyai elemen khusus dan memenuhi sifat-sifat tertentu. Dalam aljabar BCI ini masih banyak yang perlu dikaji seperti aljabar BCI p-semisimple.

Suatu struktur aljabar merupakan himpunan tak kosong dengan paling sedikit sebuah relasi ekuivalensi satu atau lebih operasi biner dan memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Dalam perkuliahan selama ini subbab yang dipelajari hanya grup dan ring saja, ternyata masih banyak lagi struktur aljabar yang lain diantaranya adalah aljabar BCI, aljabar BCK dan yang akan dibahas oleh penulis yaitu aljabar BCI p-semisimple.

Aljabar BCK dikenalkan oleh Y. Imai dan K. Iseki pada tahun 1966. Pada tahun yang sama K. Iseki memperkenalkan aljabar BCI yang merupakan perumuman dari aljabar BCK (Bae Jun, 1998; hal 309).

Dari tahun ketahun Aljabar BCI telah berkembang dan kemudian dikenalkan aljabar BCI p-semisimple oleh T. D. lei pada tahun 1982. Aljabar BCI p-semisimple ini merupakan kelas special aljabar BCI dan termuat dalam Aljabar BCK (Huang, 2006; hal 33).

Dari Pernyataan di atas penulis tertarik ingin membahas Aljabar BCI p-semisimple, karena aljabar BCI p-semisimple merupakan kelas khusus yang melibatkan Aljabar BCI dan Aljabar BCK.

Sebelum menginjak ke pembahasan maka perlu diketahui terlebih dahulu operasi biner, grupoida, grup, semigrup, ring, aljabar BCI, aljabar BCK dan sebagainya.

Dalam skripsi ini peneliti mengkaji lebih dalam tentang beberapa bab dalam Aljabar BCI dan Aljabar BCI p-semisimple. Himpunan tak kosong dengan satu operasi biner yang didefinisikan tertentu dan memenuhi empat aksioma

Aljabar BCI sehingga keempat aksioma tersebut menghasilkan 0, maka dalam ilmu tasawuf dapat diartikan bahwa dari thariqah manapun, misalnya dari thariqah Qadiriyah, thariqah Naqsabandiyah dan lain sebagaianya semuanya akan kembali kepada Allah SWT sesuai dalan firman Allah surat surat al-Ankabut ayat 69 berikut :

وَٱلَّذِينَ جَٰهَدُواْ فِينَا لَنَهۡدِيَنَّهُمۡ سُبُلَنَاۚ وَإِنَّ ٱللَّهَ لَمَعَ ٱلۡمُحۡسِنِينَ ٦٩

"Dan orang-orang yang berjihad untuk (mencari keridhaan) kami, benar- benar akan kami tunjukkan kepada mereka jalan-jalan kami. dan Sesungguhnya Allah benar-benar beserta orang-orang yang berbuat baik".

Dari ayat diatas dapat dijelaskan bahwa banyak bermacam-macam jalan dalam mencari ridho Allah agar lebih dekat dengan Allah, seperti halnya Aljabar BCI p-semisimple ada himpunan tak kosong yang dioperasikan dengan operasi biner tertentu kemudian setiap elemen dioperasikan dengan pendefisian tertentu maka akan menghasilkan 0, dengan 0 adalah kembali kepada Allah SWT.

Berdasarkan latar belakang di atas, maka penulis tertarik meneliti tentang **"Pengembangan Aljabar BCI p-semisimple dengan sifat Assosiatif"** dengan harapan bisa lebih memperdalam materi dan bisa memberikan bahan referensi tentang materi yang berhubungan dengan penelitian tersebut.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan di atas maka rumusan masalah dari penelitian ini adalah:

1. Bagaimana bentuk Aljabar BCI yang bersifat assosiatif ?

2. Bagaimana hubungan antara Aljabar BCI p-semisimple dengan grup abelian?

1.3 Tujuan

Dengan mengkaji lebih dalam tentang dasar teori Aljabar BCI p-semisimple, penulis mempunyai tujuan dalam penelitian ini yaitu:

1. Mengetahui bentuk Aljabar BCI yang bersifat assosiatif
2. Mengetahui hubungan Aljabar BCI p-semisimple dengan grup abelian.

1.4 Manfaat penulisan

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah:

1. Penulis
   a. Untuk memperdalam dan mengembangkan wawasan disiplin ilmu yang telah dipelajari untuk mengkaji permasalahan tentang Aljabar BCI p-semisimple.
   b. Sebagai suatu bentuk partisipasi penulis dalam memberikan kontribusi dalam pengembangan keilmuan, khususnya dalam bidang matematika.
2. Pembaca
   a. Sebagai tambahan wawasan dan pengetahuan tentang Aljabar BCI p-semisimple.
   b. Sebagai motivasi kepada para pembaca agar dapat mempelajari dan mengembangkan ilmu dalam bidang matematika.

3. Institusi

    Hasil penelitian ini dapat digunakan sebagai tambahan kepustakaan yang dijadikan sarana pengembangan wawasan keilmuan khususnya di jurusan matematika untuk mata kuliah struktur aljabar.

1.5 Batasan Masalah

Dalam pembahasan penelitian ini penulis hanya membahas struktur aljabar di dalam Aljabar BCI, Aljabar BCK, dan Aljabar BCI p-semisimple.

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode penelitian kepustakaan (*library research)* atau kajian pustaka, yakni melakukan penelitian untuk memperoleh data-data dan informasi-informasi serta objek yang digunakan dalam pembahasan masalah tersebut. Langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah :

1. Mengumpulkan definisi yang berhubungan dengan topik-topik dalam Aljabar BCI, Aljabar BCK, dan Aljabar BCI p-semisimple.
2. Mengumpulkan teorema yang berhubungan dengan sifat-sifat dalam Aljabar BCI p-semisimple.
3. Membuktikan teorema-teorema yang berhubungan dengan Aljabar BCI p-semisimple..
4. Memberikan contoh-contoh dari teorema yang telah dibuktikan.
5. Membuat Kesimpulan
6. Melaporkan

1.7 Sistematika Penulisan

Dalam penulisan tugas akhir ini, penulis menggunakan sistematika penulisan yang terdiri dari 4 bab, dan masing-masing bab dibagi dalam sub bab dengan sistematika penulisan sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN: Pada bab ini meliputi beberapa sub bahasan yaitu latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II KAJIAN PUSTAKA: Pada bab ini penulis menjelaskan beberapa teori-teori yang berhubungan dengan penelitian, diantaranya adalah dasar–dasar himpunan, operasi himpunan, relasi dan fungsi, operasi biner, grup, Aljabar BCI, Aljabar BCK beserta contoh – contohnya.

BAB III PEMBAHASAN: Pada bab ini penulis akan memaparkan definisi Aljabar p-semisimple, contoh Aljabar BCI p-semisimple, teorema-teorema Aljabar BCI p-semisimple beserta contoh-contohnya.

BAB IV PENUTUP: Pada bab ini penulis memberikan kesimpulan yang diperoleh dari pembahasan yang dilengkapi dengan saran-saran yang berkaitan dengan hasil penelitian ini.

BAB II
KAJIAN PUSTAKA

2.1 Dasar-Dasar Himpunan

Himpunan adalah kumpulan objek-objek yang mempunyai sifat tertentu dan didefinisikan dengan baik (*well defined*). Objek dalam pembicaraan matematika dapat berupa benda konkret misalnya siswa SMA, buah-buahan, dapat pula berupa benda abstrak misalnya, bilangan, fungsi, matriks (Soebagio dan Sukirman, 1994;2).

Objek dalam himpunan mempunyai sifat tertentu dan didefinisikan dengan jelas, agar dapat ditentukan apakah suatu objek termasuk dalam himpunan atau tidak. Himpunan bunga indah tidak termasuk didefinisikan dengan jelas karena pengertian "bunga indah" berbeda untuk detiap orang (relatif), tetapi himpunan bunga yang berwarna merah itu telah terdefinisi dengan jelas.

Objek dalam himpunan disebut anggota himpunan, elemen himpunan, atau unsur himpunan. Untuk menyatakan himpunan digunakan huruf capital seperti $A, B, C, ...,$ sedangkan anggota himpunan dinyatakan dengan huruf kecil seperti a,b,c,…,dan ditulis diantara dua kurung kurawal. Lambang keanggotaan adalah $\in$ dan lambang bukan anggota ditulis $\notin$. Suatu himpunan yang anggotanya a, b dan c disajikan dengan $A = \{a, b, c\}$. Lambang $a \in A$ menyatakan bahwa a adalah anggota dari A. lambang $d \notin A$ menyatakan bahwa d bukan anggota dari A.

Definisi 2.1.1

Himpunan kosong atau hampa adalah himpunan yang tidak mempunyai anggota. Himpunan kosong dinyatakan dengan $\emptyset$ atau { } (Soebagio dan Sukirman, 1994;4).

Definisi 2.1.2

Himpunan A dikatakan himpunan bagian *(subset)* dari himpunan B jika dan hanya jika setiap elemen A merupakan elemen dari B. Dalam hal ini, B dikatakan $superset$ dari A.

Dinotasikan: $A \subseteq B \leftrightarrow \{\forall x | x \in A \rightarrow x \in B\}$

Jika ada anggota A yang bukan anggota B berarti A bukan himpunan bagian B.

Dinotasikan: $A \nsubseteq B \leftrightarrow \{\forall x | x \in A \wedge x \notin B\}$ (Munir, 2009;54).

Contoh 2.1.3

1. $P = \{\text{orang indonesia yang pernah ke bulan}\}$, maka $P = \emptyset$
2. Jika $E = \{1,2,3\}$ dan $G = \{\text{bilangan asli kurang dari 15}\}$ maka $A \subseteq B$
3. Jika $A = \{p, q, r\}$ dan $G = \{\text{o, p, q, s, t, u}\}$ maka $A \not\subset B$, karena $r \in A$ tetapi $r \notin B$

Definisi 2.1.4

Dua himpunan A dan B disebut *sama* dan dinotasikan $A = B$, jika dan hanya jika setiap anggota dari A menjadi anggota dari B, dan setiap anggota dari B menjadi anggota dari A. Jadi $A = B \leftrightarrow (\forall x) x \in A \Leftrightarrow x \in B$. (Soebagio dan Sukirman, 1994:5).

Dua himpunan A dan B yang tidak sama dinotasikan $A \neq B$. Jadi $A \neq B$ jika dan hanya jika ada $x \in A$ tetapi $x \notin B$, atau ada $y \in B$ tetapi $y \notin A$. $A \neq B$ merupakan ingkaran atau negasi dari $A = B$ (Soebagio dan Sukirman, 1994;5).

Definisi 2.1.5

Himpunan A dikatakan *ekivalen* dengan himpunan B jika dan hanya jika kardinal dari kedua himpunan tersebut sama. Dinotasikan $A{\sim}B \leftrightarrow n(A) = n(B)$ (Munir, 2009;57-58).

Contoh 2.1.6

1. Jika $P = \{a, b. c\}$ dan $Q = \{b, c, a\}$ maka $A = B$
2. Jika $A = \{3,5,8,5\}$ dan $B = \{3,8\}$, maka $A \neq B$
3. Jika $A = \{1,3,5,7\}$ dan $B = \{a, b, c, d\}$, maka $A{\sim}B$ karena $n(A) = n(B) = 4$

2.2 Operasi-Operasi Terhadap Himpunan

Definisi 2.2.1

Gabungan *(union)* dari dua himpunan A dan B dinotasikan dengan $A \cup B$ adalah himpunan semua elemen A dan B.

Dinotasikan: $A \cup B = \{x | x \in A \text{ atau } x \in B\}$

(Raisinghania,1980:3).

Contoh 2.2.2

Jika $A = \{1,2,3,4\}$ dan $B = \{25,30,35\}$ maka $A \cup B = \{1,2,3,4,25,30,35\}$

Definisi 2.2.3

Irisan (*Intersection*) dari dua himpunan A dan B adalah sebuah himpunan yang setiap elemennya merupakan elemen dari himpunan A dan B

Dinotasikan: $A \cap B = \{x | x \in A \text{ dan } x \in B\}$ (Munir, 2009;60)

Contoh 2.2.4

Jika $A = \{a, i, u, e, o\}$ dan $B = \{a, k, m, i, d\}$ maka $A \cap B = \{a, i\}$

Definisi 2.2.5

Komplemen dari suatu himpunan A terhadap suatu himpunan semesta S adalah suatu himpunan yang elemennya merupakan elemen S bukan elemen A Dinotasikan: $A^c = \{x | x \in S \text{ dan } x \notin A\}$ (Munir, 2009;61).

Contoh 2.2.6

Misalkan $S = \{1,2,3, \dots, 9\}$

1. Jika $A = \{1,3,5,7\}$ maka $A^c = \{2,4,6,8,9\}$
2. Jika $A = \{x | x \in P, x < 9\}$, maka $A^c = \{1,4,6,8,9\}$

Definisi 2.2.7

Selisih dari dua himpunan A dan B, yang dinyatakan dengan $A - B$, adalah himpunan yang terdiri atas semua elemen dalam A yang bukan anggota dari B (Soebagio dan Sukirman, 1994;21).

Dinotasikan : $A - B = \{x | x \in A \text{ dan } x \notin B\} = A \cap \overline{B}$

Contoh 2.2.8

Jika $A = \{1,2,3, \dots, 10\}$ dan $B = \{2,3,4,5\}$ maka $A - B = \{1,6,7,8,9,10\}$.

2.3 Relasi dan Fungsi

Relasi antara himpunan A dan B disebut *Relasi Biner*, didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.3.1

Relasi biner R antara A dan B adalah himpunan bagian dari $A \times B$

Dinotasikan : $R \subseteq (A \times B)$

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\} \text{ (Munir, 2009;103).}$$

Jika $(a, b) \in R$, dengan menggunakan notasi aRb yang artinya a dihubungkan dengan b oleh R. Jika $(a, b) \notin R$, dengan menggunakan $a\not R b$ yang artinya a tidak dihubungkan dengan b oleh R.

Contoh 2.3.2

Misalkan $P = \{2,3,4\}$ dan $Q = \{2,4,8,9,15\}$. Jika didefinisikan relasi R dari P ke Q dengan $(p, q) \in R$ jika p habis membagi q

Maka diperoleh : $R = \{(2,2); (2,4); (4,4); (2,8); (4,8); (3,9); (3,15)\}$

Definisi 2.3.3

Misalkan R adalah relasi dari himpunan A ke himpunan B. Inversi dari relasi R dilambangkan dengan R^{-1}adalah relasi dari B ke A yang didefinisikan oleh $R^{-1} = \{(b.a) | (a, b) \in R\}$ (Munir Rinaldi,2009;108).

Contoh 2.3.4

Misalkan $P = \{2,3,4\}$ dan $Q = \{2,4,8,9,15\}$. Jika didefinisikan relasi R dari P ke Q dengan $(p, q) \in R$ jika p habis membagi q

Dari *contoh 2.3.2* diperoleh

$$R = \{(2,2); (2,4); (4,4); (2,8); (4,8); (3,9); (3,15)\}$$

R^{-1} adalah *invers* dari relasi R, yaitu relasi dari Q ke P dengan $(q,p) \in R^{-1}$ jika q adalah kelipatan dari p maka diperoleh:

$$R^{-1} = \{(2,2); (4,2); (4,4); (8,2); (8,4); (9,3); (15,3)\}$$

Definisi 2.3.5

Misalkan R adalah relasi dari himpunan A ke himpunan B, dan S adalah relasi dari himpunan B ke C. komposisi R dan S dinotasikan dengan $S \circ R$ adalah relasi dari A ke C yang didefinisikan sebagai berikut:

$S \circ R = \{(a,c)|a \in A, c \in C, b \in B, (a,b) \in R$ dan $(b,c) \in S\}$

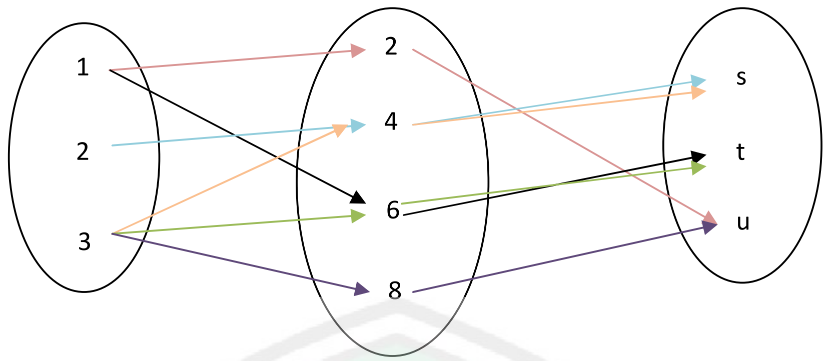
(Munir, 2009;110).

Contoh 2.3.6

Misalkan $R = \{(1,2); (1,6); (2,4); (3,4); (3,6); (3,8)\}$ adalah relasi relasi dari himpunan $\{1,2,3\}$ ke himpunan $\{2,4,6,8\}$ dan S={(2,u);(4,s);(4,t),(6,t),(8,u)} adalah relasi dari himpunan $\{2,4,6,8\}$ ke himpunan (s,t,u). maka komposisi relasi R dan S adalah:

$$S \circ R = \{(1,u), (1,t), (2,s), (2,t), (3,s), (3,t), (3,u)\}$$

Komposisi relasi R dan S lebih jelas lagi jika diperagakan dengan diagram panah pada gambar 2.1



Gambar 2.1 Komposisi Relasi R dan S

Relasi mempunyai beberapa sifat. Sifat-sifat yang paling penting didefinisikan dibawah ini:

Definisi 2.3.7

Relasi R pada himpunan A disebut *Refleksif* jika $(a, a) \in R$ untuk setiap $a \in A$ (Munir, 2009;113).

Dengan kata lain di dalam relasi refleksif setiap elemen di dalam A berhubungan dengan dirinya sendiri. Relasi R pada himpunan A tidak refleksif jika ada $a \in A$ sedemikian sehingga $(a, a) \notin R$.

Contoh 2.3.8

Misalkan $A = \{1,2,3,4\}$, dan relasi R dibawah ini didefinisikan pada himpunan A, maka:

(a) Relasi $R = \{(1,1); (1,3); (2,1); (2,2); (3,3); (4,2); (4,3); (4,4)\}$ bersifat refleksif karena terdapat elemen relasi yang berbentuk (a, a) yaitu $(1,1), (1,2), (3,3)$,dan $(4,4)$.

(b) Relasi $R = \{(1,1); (2,2); (2,3); (4,2); (4,3); (4,4)\}$ tidak bersifat refleksif karena $(3,3) \notin R$

Definisi 2.3.9

Relasi R pada himpunan A disebut *Anti-simetri* jika $(a, b) \in R$ dan $(b, a) \in R$ maka $a = b$ untuk setiap $a, b \in A$ (Munir Rinaldi,2009;114).

Contoh 2.3.10

(a). Relasi $R = \{(1,1); (1,2); (2,2); (2,3)\}$ anti-simetri karena $(1,1) \in R$ sehingga $1 = 1$, dan $(2,2) \in R$ sehingga $2 = 2$.

(b). Relasi $R \{(1,1); (2,4); (3,3); (4,2)\}$ bukan anti-simetri karena $2 \neq 4$ tetapi (2,4) dan (4,2) anggota R.

Definisi 2.3.11

Relasi R pada himpunan A disebut *Transitif* jika $(a, b) \in R$ dan $(b, c) \in R$,maka $(a, c) \in R$, untuk semua $a, b, c \in R$ (Munir Rinaldi,2009;116).

Contoh 2.3.12

Misal $A = \{1,2,3,4\}$ dan misalkan $R = \{(1, 2), (1, 3), (4,2)\}$. Apakah R *transitif* ?

Jawab:

Karena tidak terdapat elemen $a, b,$ dan c di A sedemikian sehingga $a\ R\ b$ dan $b\ R\ c$, tetapi $a \not{R}\ c$, maka R *transitif*. Jadi R tidak *transitif*.

Bagian yang penting dari relasi biner adalah *Partial Ordering.* Dibawah ini akan dibahas lebih lanjut tentang *Partial Ordering.*

Relasi sering digunakan untuk mengurutkan elemen-elemen di dalam himpunan. Misalnya, elemen-elemen didalam himpunan bilangan bulat terurut oleh relasi $\leq$. Karena elemen-elemen tersebut terurut berdasarkan relasi $\leq$, maka jika diberikan sebuah bilangan bulat, kita dapat menentukan bilangan bulat berikutnya (*succesor*) atau bilangan bulat sebelumnya (*predecessor*). Definisi keterurutan pada relasi dinyatakan oleh definisi berikut:

Definisi 2.3.13

Relasi biner $\leq$ pada himpunan A dikatakan *partial Ordering* jika memenuhi aksioma dibawah ini:

$\forall a, b, c \in A$

i. memenuhi sifat *refleksif* : $a \leq a$

ii. memenuhi sifat *anti-simetris* : $a \leq b$ dan $b \leq a$ sehingga $a = b$

iii. Memenuhi sifat *transitif* : $a \leq b$ dan $b \leq c$ sehingga $a \leq c$ (Huang, 2006:4).

Contoh 2.3.14

Himpunan Z^+ adalah himpunan bilangan bulat positif. Relasi $\leq$ adalah sebuah partial ordering pada Z^+.

Jawab:

Jika $a, b \in R$ jika $a \leq b$,

i. karena setiap bilangan bulat = dirinya sendiri maka terbukti refleksif

ii. karena $a \leq b$ dan $b \leq a$ kecuali $a = b$ maka terbukti anti simetris

iii. jika $a \leq b$ dan $b \leq c$ maka $a \leq c$ sehingga terbukti transitif

Definisi 2.3.15

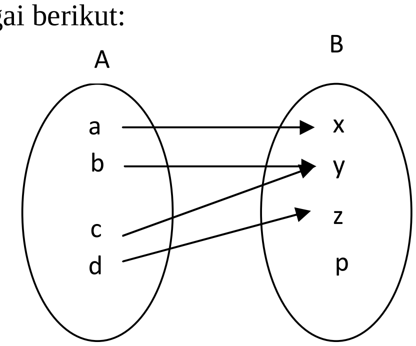
Misalkan A dan B himpunan, relasi biner f dari A ke B merupakan suatu fungsi jika setiap elemen di dalam A dihubungkan tepat satu elemen di dalam B (Munir, 2009;129).

Dinotasikan: $f: A \rightarrow B$, yang artinya f memetakkan A ke B.

Nama lain dari fungsi adalah pemetaan, biasa ditulis $f(a) = b$ jika elemen a di dalam A disebut daerah asal (*domain*) dari fungsi f dan himpunan B disebut daerah hasil (*codomain*) dari f. Jika $f(a) = b$, maka b dinamakan bayangan (*image*) dari a dan a dinamakan pra-bayangan (*pre-image*) dari b. himpunan yang berisi semua nilai fungsi f disebut daerah hasil (*range*) dari f.

Contoh 2.3.16

Misalkan $A = \{a, b, c, d\}$ dan $B = \{x, y, z, p\}$, $f: A \rightarrow B$ didefinisikan sebagai berikut:



Gambar 2.2 Fungsi A ke B

Pada fungsi ini dapat dikatakan bahwa $(a) = x$, $f(b) = y$, $f(c) = y$, $f(d) = z$.

1. $A = \{a, b, c, d\}$ adalah daerah asal (*domain*)
2. $B = \{x, y, z, p\}$ adalah daerah kawan (*codomain*)
3. $\{x, y, z\}$ marupakan daerah hasil (*range*)

Definisi 2.3.17

Suatu fungsi $f: S \rightarrow T$ disebut fungsi pada (*surjektif* atau *onto*) jika dan hanya jika $f(S) = T$ (Soebagio A dan Sukirman, 1994;47).

Dinotasikan: $\forall\, t \in T, \exists\, x \in \mathrm{S} \ni f(x) = t$

Definisi 2.3.18

Suatu fungsi $f: S \rightarrow T$ disebut fungsi satu-satu (*injektive*) jika dan hanya jika $\forall x \in f(S)$, $f'(x)$ merupakan himpunan tunggal atau himpunan yang hanya memuat satu elemen (Soebagio A dan Sukirman, 1994;47-48).

Dinotasikan: $\forall\, x, y \in S, \mathrm{x} \neq \mathrm{y} \Longrightarrow f(x) \neq f(y)$

Definisi 2.3.19

Suatu pemetaan yang sekaligus injektif dan surjektif disebut fungsi *bijektive* (Soebagio A dan Sukirman, 1994;48).

Contoh 2.3.20

1. Pemetaan $f = \{(1, w); (2, u); (3, v); (4, u)\}$ dari $A = \{1,2,3,4\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ merupakan fungsi *surjektif* karena semua anggota B merupakan range dari f.
2. Pemetaan $f = \{(1, w); (2, u); (3, x)\}$ dari $A = \{1,2,3\}$ ke $B = \{u, v, w, x\}$ merupakan fungsi *injektif* karena semua anggota A memetakkan tepat satu ke B.
3. Pemetaan $f = \{(1, w); (2, u); (3, v)\}$ dari $A = \{1,2,3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ merupakan fungsi *bijektif* karena merupakan fungsi surjektif dan fungsi injektif.

2.4 Operasi Biner

Diketahui G adalah himpunan dan $a, b \in G$. Operasi biner $" * "$ pada G merupakan pengaitan pasangan elemen (a, b) pada G, yang memenuhi dua kondisi berikut:

i. setiap pasangan elemen (a, b) pada G dikaitkan dengan tepat satu elemen.

ii. setiap elemen yang dikaitkan dengan pasangan elemen (a, b) pada G merupakan elemen di G.

Kondisi (i) disebut dengan kondisi tertutup (*closed*), sedangkan kondisi (ii) disebut juga dengan kondisi terdefinisi dengan baik (*well defined*). Untuk selanjutnya jika G merupakan himpunan tak kosong, $" * "$ merupakan operasi pada G, dan $a, b \in G$, maka $a * b$ menyatakan elemen yang dikaitkan dengan pasangan elemen (a, b) terhadap operasi " $*$ ".

Contoh 2.4.1

1. Diketahui $\mathbb{Z}$, yaitu himpunan semua bilangan bulat dengan " $*$ " adalah operasi pada $\mathbb{Z}$ dengan syarat $a, b \in \mathbb{Z}, a * b = a + b$. akan dibuktikan operasi " $*$ " merupakan operasi biner pada $\mathbb{Z}$.

Jawab:

Pertama, akan ditunjukkan bahwa operasi " $*$ " merupakan operasi yang tertutup. Dapat diperhatikan bahwa sesuai dengan sifat bilangan bulat, maka penjumlahan dua bilangan bulat akan menghasilkan bilangan bulat juga. Sehingga dengan demikian $a * b = a + b \in \mathbb{Z}$. Jadi terbukti operasi " $*$ " merupakan operasi tertutup.

Kedua, akan ditunjukkan bahwa operasi " $*$ " merupakan operasi terdefinisi dengan baik. Dapat diperhatikan bahwa sesuai dengan sifat bilangan bulat, maka setiap dua bilangan bulat dapat dijumlahkan dan menghasilkan bilangan bulat. Jadi terbukti operasi " $*$ " merupakan operasi yang terdefinisi dengan baik.

Jadi, operasi " $*$ " merupakan operasi biner pada $\mathbb{Z}$

2. Didefinisikan operasi " $*$ " pada $\mathbb{Z}$ dengan syarat $\forall a, b \in \mathbb{Z}, a * b = \frac{a}{b}$.

   Apakah operasi " $*$ " merupakan operasi biner pada $\mathbb{Z}$?

Jawab:

Jika $a = 1$ dan $b = 2$ akan berakibat $a * b = 1 * 2 = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$. Jadi, operasi "$*$" tidak memenuhi kondisi tertutup, dan jika $a = 1$ dan $b = 0$ sehingga $a * b = 1 * 0 = \frac{1}{0}$ yang tidak terdefinisikan. Jadi operasi "$*$" tidak memenuhi kondisi terdefinisi dengan baik. Jadi, operasi "$*$" bukan merupakan operasi biner pada $\mathbb{Z}$.

2.5 Sifat-Sifat Operasi Biner

Operasi biner "$*$" pada himpunan S disebut :

a. Tertutup, jika $\forall a, b \in S$ ada $c \in S \ni a * b = c \in S$

b. Komutatif, jika dan hanya jika $\forall a, b \in S$ berlaku $a * b = b * a$

c. Assosiatif, jika dan hanya jika $\forall a, b, c \in S$ berlaku:

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

(Soebagio dan Sukirman, 1994;109).

Contoh 2.5.1

Jika $A = \{1,2,3, \dots\}$, operasi perkalian pada himpunan A mempunyai sifat:

tertutup, $3 \times 2 = 6 \in A$

komutatif, karena $2 \times 3 = 3 \times 2 = 6$

assosiatif, karena $(3 \times 2) \times 4 = 3 \times (2 \times 4) = 24$

Adakalanya operasi biner pada himpunan berhingga dinyatakan dengan tabel atau daftar yang disebut dengan tabel cayley. Tabel cayley merupakan salah satu cara untk mendefinisikan operasi biner pada himpunan, khususnya himpunan berhingga.

Contoh 2.5.2

Misalnya himpunan $S = \{x, y, z\}$ dengan operasi " $*$ " didefinisikan pada tabel 2.3

$*$	x	y	z
x	x	x	z
y	x	y	y
z	z	y	z

Tabel 2.3 Definisi Himpunan S dengan Operasi “*”

Anggota yang dioperasikan dicantumkan pada baris pertama (paling atas) dan pada kolom pertama (paling kiri), hasil operasi anggota S dinyatakan dalam bujur sangkar yang di dalam, mulai baris kedua dalam kolom kedua, cara membacanya anggota yang akan dioperasikan dibaca dari kolom paling kiri, dan anggota yang akan dioperasikan pada sebelah kanan kit abaca pada baris paling atas sebagai contoh perhatikan pada tabel 2.3 yang diarsir itu adalah hasil dari $z + y = y$

Untuk mengetahui sifat-sofat operasi biner melalui tabel sebagai berikut:

a. Jika hasil penjumlahan didalam tabel 2.3 tersebut hanya terdiri dari anggota S maka bersifat tertutup.

b. Jika letak anggota dalam tabel simetris terhadap diagonal utama, maka operasi biner komutatif. Pada tabel 2.3 adalah komutatif.

2.6 Grupoid

Definisi 2.6.1

Suatu himpunan tak kosong dengan satu operasi biner yang tertutup disebut *Grupoid* (Soebagio A dan Sukirman, 1994;112).

Suatu himpunan tak kosong dengan operasi yang didefinisikan kepadanya disebut suatu *struktur aljabar* atau singkatnya *aljabar.*

Contoh 2.6.2

$S = (x, y, z)$ dengan operasi biner " $*$ " dinyatakan pada tabel 2.3. Dengan memperhatikan tabel tersebut diperoleh $(S,*)$ memenuhi sifat tertutup. Jadi $(S,*)$ adalah grupoid.

2.7 Semigrup dan Monoid

Definisi 2.7.1

Suatu grupoid $(G,*)$ disebut *semigrup* jika $\forall a, b, c \in G$ memenuhi:

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

Jadi semigrup adalah grupoid yang bersifat assosiatif (Soebagio dan Sukirman, 1994 ;129).

Definisi 2.7.2

Suatu semigrup $(G,*)$ disebut monoid jika ada $i \in G$ sedemikian sehingga $\forall a \in G$ memenuhi $i * a = a * i = a$, dengan kata lain semigrup yang mempunyai elemen identitas adalah *monoid* (Soebagio dan Sukirman, 1994 ;131).

Contoh 2.7.3

1. Tunjukkan bahwa grupoid pada tabel 2.3 merupakan semigrup?

Dengan metode pengecekan satu persatu akan ditunjukkan apakah grupoid tersebut assosiatif yaitu :

$$\forall\, x, y, z \in S \rightarrow (x * y) * z = x * (y * z)$$

Untuk $x = x, y = x$

$$(x * x) * x = x * (x * x) = x$$

$$(x * x) * y = x * (x * y) = x$$

$$(x * x) * z = x * (x * z) = z$$

Untuk $x = x, y = z$

$$(x * z) * x = x * (z * x) = z$$

$$(\boldsymbol{x} * \boldsymbol{z}) * \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{x} * (\boldsymbol{z} * \boldsymbol{y})$$

$$(x * z) * z = x * (z * z) = z$$

Untuk $x = y, y = y$

$$(y * y) * x = y * (y * x) = x$$

$$(y * y) * y = y * (y * y) = y$$

$$(y * y) * z = y * (y * z) = y$$

Untuk $x = z, y = x$

$$(z * x) * x = z * (x * x) = z$$

$$(\boldsymbol{z} * \boldsymbol{x}) * \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{z} * (\boldsymbol{x} * \boldsymbol{y})$$

$$(z * x) * z = z * (x * z) = z$$

Untuk $x = x, y = y$

$$(x * y) * x = x * (y * x) = \boldsymbol{x}$$

$$(x * y) * y = x * (y * y) = \boldsymbol{x}$$

$$(\boldsymbol{x} * \boldsymbol{y}) * \boldsymbol{z} \neq \boldsymbol{x} * (\boldsymbol{y} * \boldsymbol{z})$$

Untuk $x = y, y = x$

$$(y * x) * x = y * (x * x) = \boldsymbol{x}$$

$$(y * x) * y = y * (x * y) = \boldsymbol{x}$$

$$(\boldsymbol{y} * \boldsymbol{x}) * \boldsymbol{z} \neq \boldsymbol{y} * (\boldsymbol{x} * \boldsymbol{z})$$

Untuk $x = y, y = z$

$$(\boldsymbol{y} * \boldsymbol{z}) * \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y} * (\boldsymbol{z} * \boldsymbol{x})$$

$$(y * z) * y = y * (z * y) = \boldsymbol{y}$$

$$(y * z) * z = y * (z * z) = \boldsymbol{y}$$

Untuk $x = z, y = y$

$$(\boldsymbol{z} * \boldsymbol{y}) * \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{z} * (\boldsymbol{y} * \boldsymbol{x})$$

$$(z * y) * y = z * (y * y) = y$$

$$(z * y) * z = z * (y * z) = y$$

Untuk $x = z.y = z$

$$(z * z) * x = z * (z * x) = z$$

$$(z * z) * y = z * (z * y) = y$$

$$(z * z) * z = z * (z * z) = z$$

Dari pembuktian diatas, maka $(S,*)$ adalah tidak assosiatif, sehingga $(S,*)$ bukan semigrup.

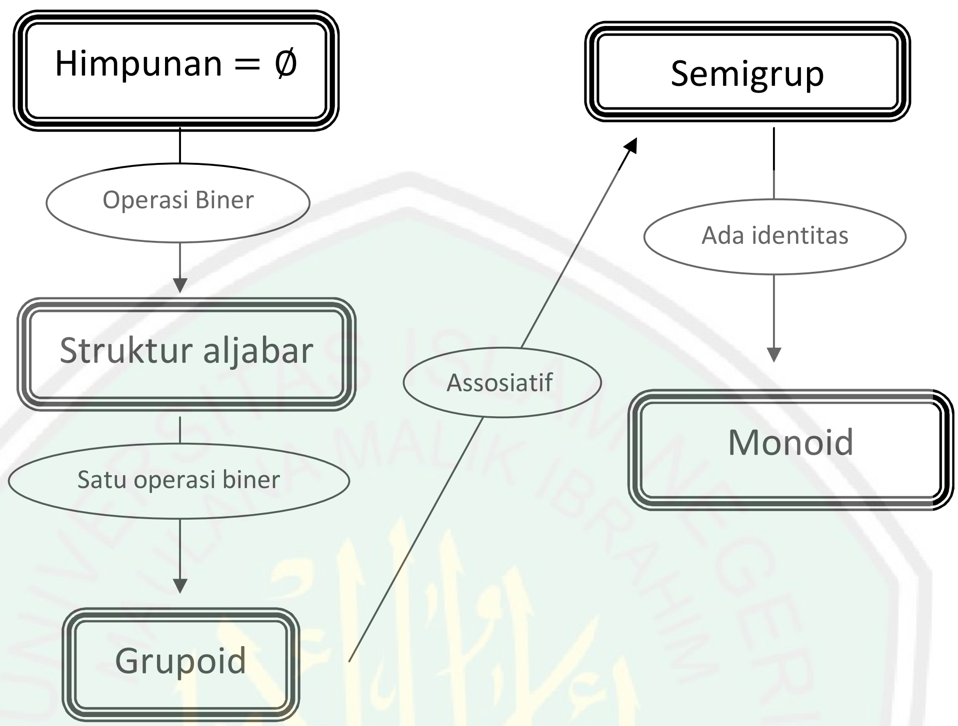
2. Tunjukkan bahwa $(\mathbb{Z},*)$ dengan $a * b = a + b$ adalah monoid?
   a. Pada *contoh 2.4.1* operasi + terbukti tertutup pada $\mathbb{Z}$
   b. Ambil $a, b, c \in \mathbb{Z}$, maka :

      $(a * b) * c = a * (b * c) \leftrightarrow (a + b) + c = a + (b + c)$.

      Jadi operasi penjumlahan bersifat asosiatif di $\mathbb{Z}$, sehingga telah terbukti semigrup.
   c. $\exists\ 0 \in \mathbb{Z}$ sehingga $a + 0 = 0 + a = a, \forall\ a \in \mathbb{Z}$.

Jadi 0 adalah identitas penjumlahan, sehingga terbukti monoid.

Berikut adalah bagan yang melukiskan suatu struktur aljabar yang berupa semigrup dan monoid dapat diperoleh gambar sebagai berikut :



Gambar 2.4 Pelukisan Struktur Aljabar

2.8 Grup dan Sifat-Sifatnya

Definisi 2.8.1

Suatu himpunan X yang tidak kosong dengan satu operasi biner "$*$" merupakan suatu *Grup* jika dan hanya jika memenuhi sifat berikut ini:

i. Tertutup terhadap operasi "$*$"→ $\forall a, b \in X$ sehingga $a * b \in X$

ii. Operasi "$*$" berlaku assosiatif → $\forall a, b, c \in X$ berlaku:

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

iii. X memiliki elemen identitas i → $a \circ i = i \circ a = a, \ \forall\, a \in \mathbb{G}$

iv. Setiap anggota X mempunyai invers → $\forall\, a, a^{-1} \in X$ sehingga $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = i$ (Soebagio dan Sukirman, 1994;142-143).

Dengan kata lain grup adalah suatu monoid yang mempunyai invers.

Contoh 2.8.2

Tunjukkan bahwa $(\mathbb{Z},*)$ dengan $a * b = a + b$ adalah grup?

Jawab:

Pada *contoh 2.7.3* bagian kedua telah terbukti monoid, sehingga akan ditunjukkan setiap elemen pada bilangan $\mathbb{Z}$ mempunyai invers

$\forall a \in \mathbb{Z}$ ada $(-a) \in \mathbb{Z}$, sehingga $a + (-a) = (-a) + a = 0$. Jadi invers dari a adalah $-a$. Sehingga telah terbukti bahwa $(\mathbb{Z},*)$ dengan $a * b = a + b$ adalah grup.

Definisi 2.8.3

Grup $(G,*)$ disebut grup abelian atau grup komutatif jika pada operasi " $*$ " bersifat komutatif yang dinotasikan $a * b = b * a, \forall a, b \in G$ (Raisinghania, 1980:31).

Contoh 2.8.4

1. Tunjukkan bahwa $(\mathbb{Z},*)$ dengan $a * b = a + b$ adalah grup abelian?

Jawab:

Pada contoh 2.8.2 telah ditunjukkan bahwa $(\mathbb{Z},*)$ dengan $a * b = a + b$ adalah grup, sehingga akan ditunjukkan bawha $(\mathbb{Z},*)$ dengan $a * b = a + b$ adalah komutatif.

Untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$ maka $a + b = b + a$, dan terbukti $(\mathbb{Z},*)$ berlaku sifat komutatif sehingga terbukti $(\mathbb{Z},*)$ dengan $a * b = a + b$ adalah grup abelian.

2. Tunjukkan bahwa $(M_3, +)$ adalah grup abelian

Jawab:

$M_3 = \{0,1,2\}$

Dapat dibangun dengan tabel cayley sebagai berikut:

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Tabel 2.5 Modolo 3 dengan Operasi "+"

a. Pada tabel 2.5 diatas maka terbukti bahwa $(M_3, +)$ memenuhi sifat tertutup

b. Asosiatif, $\forall\, a, b, c \in M_3 \rightarrow (a + b) + c = a + (b + c)$

Untuk $a = 0, b = 0$

$(0 + 0) + 0 = 0 + (0 + 0) = 0$

$(0 + 0) + 1 = 0 + (0 + 1) = 1$

$(0 + 0) + 2 = 0 + (0 + 2) = 2$

Untuk $a = 0, b = 2$

$(0 + 2) + 0 = 0 + (2 + 0) = 2$

$(0 + 2) + 1 = 0 + (2 + 1) = 0$

$(0 + 2) + 2 = 0 + (2 + 2) = 1$

Untuk $a = 1, b = 1$

$(1 + 1) + 0 = 1 + (1 + 0) = 2$

$(1 + 1) + 1 = 1 + (1 + 1) = 0$

$(1 + 1) + 2 = 1 + (1 + 2) = 1$

Untuk $a = 0, b = 1$

$(0 + 1) + 0 = 0 + (1 + 0) = 1$

$(0 + 1) + 1 = 0 + (1 + 1) = 2$

$(0 + 1) + 2 = 0 + (1 + 2) = 0$

Untuk $a = 1, b = 0$

$(1 + 0) + 0 = 1 + (0 + 0) = 1$

$(1 + 0) + 1 = 1 + (0 + 1) = 2$

$(1 + 0) + 2 = 1 + (0 + 2) = 0$

Untuk $a = 1, b = 2$

$(1 + 2) + 0 = 1 + (2 + 0) = 0$

$(1 + 2) + 1 = 1 + (2 + 1) = 1$

$(1 + 2) + 2 = 1 + (2 + 2) = 2$

Untuk $a = 2, b = 0$

$(2 + 0) + 0 = 2 + (0 + 0) = 2$

$(2 + 0) + 1 = 2 + (0 + 1) = 0$

$(2 + 0) + 2 = 2 + (0 + 2) = 1$

Untuk $a = 2, b = 1$

$(2 + 1) + 0 = 2 + (1 + 0) = 0$

$(2 + 1) + 1 = 2 + (1 + 1) = 1$

$(2 + 1) + 2 = 2 + (1 + 2) = 2$

Untuk $a = 2, b = 2$

$(2 + 2) + 0 = 2 + (2 + 0) = 1$

$(2 + 2) + 1 = 2 + (2 + 1) = 2$

$(2 + 2) + 2 = 2 + (2 + 2) = 0$

Jadi terbukti bahwa $\forall a, b, c \in M_3$ berlaku $(a + b) + c = a + (b + c)$

c. Ada Identitas sedemikian sehingga $i + a = a + i = a;\ \forall\, a \in M_3$

Untuk $a = 0$ maka diperoleh $0 + 0 = 0 + 0 = 0$

Untuk $a = 1$ maka diperoleh $0 + 1 = 0 + 1 = 1$

Untuk $a = 2$ maka diperoleh $0 + 2 = 0 + 2 = 2$

Jadi terbukti bahwa $i = 0$ adalah identitas dari M_3 sehingga berlaku

$i + a = a + i = a;\ \forall\, a \in M_3$

d. Mempunyai invers $a^{-1} + a = a + a^{-1} = i = 0$

Invers dari $0 = 0^{-1} = 0$

Invers dari $1 = 1^{-1} = 2$

Invers dari $2 = 2^{-1} = 1$

Untuk $a = 0$ maka diperoleh $0 + 0 = 0 + 0 = 0$

Untuk $a = 1$ maka diperoleh $2 + 1 = 1 + 2 = 0$

Untuk $a = 2$ maka diperoleh $1 + 2 = 2 + 1 = 0$

Jadi terbukti bahwa $a \in M_3$ mempunyai elemen invers $a^{-1} \in M_3$.

e. Komutatif. Ambil $\forall\ a, b \in M_3$ maka berlaku $a + b = b + a$

letak anggota dalam tabel 2 diatas adalah simetris terhadap diagonal utama (*lihat contoh 2.5.2b*), maka $(M_3, +)$ komutatif.

Sehingga terbukti $(M_3, +)$ adalah grup abelian.

2.9 Aljabar BCI dan Aljabar BCK

Aljabar BCI dan Aljabar BCK jika disingkat namanya adalah dua Aljabar B (*two B algebra*) yang ditemukan pada tahun 1966 oleh seorang matematikawan Jepang yaitu Y.Imai dan K.Iseki (Huang, 2006:1).

Kemudian pada tahun berikutnya K.Iseki membedakan dua Aljabar B tersebut menjadi Aljabar BCI dan Aljabar BCK, karena Aljabar BCI lebih luas pembahasannya daripada Aljabar BCK. Sedangkan nama Aljabar BCI dan Aljabar BCK terbentuk dari *combionatory logic*. Berikut akan dibahas tentang Aljabar BCI dan Aljabar BCK sehingga dapat dibedakan antara Aljabar BCI, Aljabar BCK, dan Aljabar BCI p-semisimple.

Definisi 2.9.1

Misal X adalah suatu himpunan tak kosong dengan operasi biner “ $*$ ” dan konstanta “0”. Maka struktur aljabar $(X, *, 0)$ dikatakan *Aljabar BCI* jika memenuhi kondisi sebagai berikut:

i. $\big((x * y) * (x * z)\big) * (z * y) = 0,$

ii. $\big(x * (x * y)\big) * y = 0.$

iii. $x * x = 0,$

iv. $x * y = 0$ dan $y * x = 0$ sehingga $x = y,$

Untuk setiap $x, y, z \in X$ (Zhan and Lin, 2005;1675).

Contoh 2.9.2

Tunjukkan bahwa $(\mathbb{Q}, *, 0)$ adalah *Aljabar BCI*, dimana $x * y = xy^{-1}$.

Jawab:

Untuk sebarang $x, y, z \in \mathbb{Q}$ sehingga diperoleh:

i. Akan ditunjukkan $\big((x * y) * (x * z)\big) * (z * y) = 0$

$$\begin{aligned}\big((xy^{-1}) * (xz^{-1})\big) * (zy^{-1}) &= \big((xy^{-1}) * (xz^{-1})\big) * (zy^{-1}) \\ &= \big((xy^{-1})(xz^{-1})^{-1}\big) * (zy^{-1}) \\ &= (xy^{-1}zx^{-1})(zy^{-1})^{-1} \\ &= xy^{-1}zx^{-1}z^{-1}y = 0\end{aligned}$$

ii. Akan ditunjukkan $\big(x * (x * y)\big) * y = 0$

$$\begin{aligned}\big(x * (xy^{-1})\big) * y &= (x(xy^{-1})^{-1}) * y \\ &= xx^{-1}yy^{-1} = 0\end{aligned}$$

iii. Akan ditunjukkan $x * x = 0$

$$xx^{-1} = 0$$

iv. $x * y = 0$ dan $y * x = 0$ sehingga $x = y$

Jika $xy^{-1} = 0$ dan $yx^{-1} = 0$ maka $x = y$

Jadi $(\mathbb{Q}, *, 0)$ dengan $x * y = xy^{-1}$ adalah *Aljabar BCI.*

Definisi 2.9.3

Diberikan struktur aljabar $(X, *, 0)$ adalah Aljabar BCI. Didefinisikan relasi biner $\leq$ atas X yang mana $x \leq y$ jika dan hanya jika $x * y = 0$, untuk sebarang $x, y \in X$ (Bae Jun dan Hwan, 1998;310).

Teorema 2.9.4

Diberikan $(X,*,0)$ adalah *Aljabar BCI*. $(X,\leq)$ merupakan *partially ordered set* (Anjum dan Aslam, 2009;321).

Bukti.

Akan ditunjukkan bahwa $(X,\leq)$ memenuhi aksioma *refleksif*, *antisimetris* dan *transitif*.

i. Ambil sebarang $x \in X$, dari aksioma (iii) Aljabar BCI diperoleh bahwa $x * x = 0$, yang berarti $x \leq x, \forall x \in X$. Jadi $(X,\leq)$ memenuhi aksioma *refleksif*.

ii. Ambil sebarang $x, y \in X$, dari aksioma (*iv*) Aljabar BCI diperoleh bahwa $x * y = 0$ dan $y * x = 0 \rightarrow x = y$, sehingga jika $x \leq y$ dan $y \leq x$ maka $x = y$, $\forall x, y \in X$. Jadi $(X,\leq)$ memenuhi aksioma *antisimetris*.

iii. Ambil sebarang $x, y, z \in X$, jika $x * y = 0$ dan $y * z = 0$, maka $x * z = \big((x * z) * 0\big) * 0 = \big((x * z) * (x * y)\big) * (y * z) = 0$.

Ekuivalen dengan $\forall x, y, z \in X$, $x \leq y$ dan $y \leq z$, maka $x \leq z$. Jadi $(X,\leq)$ memenuhi aksioma *transitif*.

Karena $(X,\leq)$ memenuhi aksioma *refleksif, antisimetris dan transitif*, maka $(X,\leq)$ merupakan *partially ordered set.*

Teorema 2.9.5

Suatu Aljabar BCI $(X,*,0)$ jika dan hanya jika ada suatu partial ordering $\leq$ di X sehingga mengikuti kondisi dibawah ini:

$\forall x, y, z \in X$

i. $(x * y) * (x * z) \leq z * y$

ii. $x * (x * y) \leq y$

Lemma 2.9.6

Diberikan $(X, * ,0)$ adalah Aljabar BCI maka berlaku $x * 0 = 0 \rightarrow x = 0$, $\forall x \in X$(Bhatti,1991;1).

Bukti: Ambil sebarang $x \in X$, diketahui $x * 0 = 0$ maka berangkat dari $0 * x = (x * 0) * x$ kemudian pada definisi (2.9.1.iii) maka diperoleh $0 * x = \big(x * (x * x)\big) * x$ dan pada definisi (2.9.1.ii) $0 * x = 0$.

Karena $x * 0 = 0$ dan $0 * x = 0$, berdasarkan aksioma (iv) aljabar BCI disimpulkan bahwa $x = 0$.

Teorema 2.9.7

Misal x, y, z adalah elemen dari aljabar BCI X, jika:

1. $x \leq y$ maka $z * y \leq z * x$
2. $x \leq y$ maka $x * z \leq y * z$

Bukti.

1. Ambil sebarang $x, y, z \in X$ dari aksioma (i) aljabar BCI diperoleh bahwa $\big((z * y) * (z * x)\big) * (x * y) = 0$ dari definisi ($2.9.3$) karena $x \leq y$ maka $x * y = 0$ sehingga $\big((z * y) * (z * x)\big) * 0 = 0$.

   Misal $\big((z * y) * (z * x)\big) = x$ menurut (2.9.6) karena $\big((z * y) * (z * x)\big) * 0 = 0$ maka $\big((z * y) * (z * x)\big) = 0$

   Maka menurut (2.9.3) maka diperoleh$\big((z * y) \leq (z * x)\big)$.

2. Ambil sebarang $x, y, z \in X$, dari aksioma (i) Aljabar BCI diperoleh bahwa

   $\big((x * z) * (x * y)\big) * (y * z) = 0$, yang berarti

   $\big((x * z) * (x * y)\big) \leq (y * z)$, dari sifat sebelumnya (1), kedua ruas di operasikan dengan $(x * z)$ sehingga diperoleh $(x * z) * (y * z) \leq (x * z) * \big((x * z) * (x * y)\big)$

   Dari aksioma (ii) Aljabar BCI diperoleh $\big((x * z) * ((x * z) * (x * y)\ )\big) * (x * y) = 0$.

   Dari (2.9.3), karena $x \leq y$ maka $((x * z) * (y * z)) * 0 = 0$. Dari (2.9.6) didapatkan $(x * z) * (y * z) = 0$, dengan kata lain $(x * z) \leq (y * z)$.

Definisi 2.9.8

Misal $(X, * , 0)$ adalah aljabar BCI. Y adalah *subset* dari X, maka Y dikatakan *Sub-aljabar* di X jika $0 \in X$, $0 \in Y$ dan $(Y, * , 0)$ juga memenuhi aksioma aljabar BCI (Huang, 2006;4).

Contoh 2.9.9

Misal $X = \{0, a, b, c, d, e\}$ dan $Y = \{0, a, b\}$. Dengan operasi '*' pada X dan Y didefinisikan sebagai berikut:

$*$	0	a	b
0	0	b	a
a	a	0	b
b	b	a	0

Tabel 2.6 Pendefisian Himpunan Y dengan Operasi "*"

$*$	0	a	b	c	d	e
0	0	a	c	b	e	d
a	a	0	e	d	c	b
b	b	d	0	e	a	c
c	c	e	d	0	b	a
d	d	b	a	c	0	e
e	e	c	b	a	d	0

Tabel 2.7 Pendefisian Himpunan X dengan Operasi "*"

Tunjukkan $(Y,*,0)$ adalah *sub-aljabar* dari $(X,*,0)$

Jawab.

Akan ditunjukkan bahwa:

1. $(Y,*,0)$ adalah aljabar BCI
2. $(X,*,0)$ adalah aljabar BCI

Sehingga terbukti $(Y,*,0)$ adalah *sub-aljabar* dari $(X,*,0)$.

Kasus 1

Dengan memenuhi empat aksioma aljabar BCI dan memenuhi aksioma aljabar BCI p-semisimple sebagaimana berikut:

i. Akan ditunjukkan $\forall x, y, z \in X$, berlaku $\big((x * y) * (x * z)\big) * (z * y) = 0$

Untuk $x = 0$, maka diperoleh

$\big((0 * 0) * (0 * 0)\big) * (0 * 0) = 0$

$\big((0 * 0) * (0 * a)\big) * (a * 0) = 0$

$\big((0 * 0) * (0 * b)\big) * (b * 0) = 0$

$\big((0 * a) * (0 * 0)\big) * (0 * a) = 0$

$\big((0 * a) * (0 * a)\big) * (a * a) = 0$

Untuk $x = a$, maka diperoleh

$\big((a * 0) * (a * 0)\big) * (0 * 0) = 0$

$\big((a * 0) * (a * a)\big) * (a * 0) = 0$

$\big((a * 0) * (a * b)\big) * (b * 0) = 0$

$\big((a * a) * (a * 0)\big) * (0 * a) = 0$

$\big((a * a) * (a * a)\big) * (a * a) = 0$

$\big((0 * a) * (0 * b)\big) * (b * a) = 0$

$\big((0 * b) * (0 * 0)\big) * (0 * 0) = 0$

$\big((0 * b) * (0 * a)\big) * (a * 0) = 0$

$\big((0 * b) * (0 * b)\big) * (b * 0) = 0$

$\big((a * a) * (a * b)\big) * (b * a) = 0$

$\big((a * b) * (a * 0)\big) * (0 * b) = 0$

$\big((a * b) * (a * a)\big) * (a * b) = 0$

$\big((a * b) * (a * b)\big) * (b * b) = 0$

Untuk $x = b$, maka diperoleh

$\big((b * 0) * (b * 0)\big) * (0 * 0) = 0$

$\big((b * 0) * (b * a)\big) * (a * 0) = 0$

$\big((b * 0) * (b * b)\big) * (b * 0) = 0$

$\big((b * a) * (b * 0)\big) * (0 * a) = 0$

$\big((b * a) * (b * a)\big) * (a * a) = 0$

$\big((b * a) * (b * b)\big) * (b * a) = 0$

$\big((b * b) * (b * 0)\big) * (0 * b) = 0$

$\big((b * b) * (b * a)\big) * (a * b) = 0$

$\big((b * b) * (b * b)\big) * (b * b) = 0$

Jadi terbukti bahwa, $\forall x, y, z \in X$, berlaku $\big((x * y) * (x * z)\big) * (z * y) = 0$

ii. Akan ditunjukkan $\forall x, y \in X$, berlaku $(x * (x * y)) * y = 0$.

Untuk $x = 0, y = 0$ maka diperoleh $(0 * (0 * 0)) * 0 = 0$

Untuk $x = 0, y = a$ maka diperoleh $(0 * (0 * a)) * a = 0$

Untuk $x = 0, y = b$ maka diperoleh $(0 * (0 * b)) * b = 0$

Untuk $x = a, y = 0$ maka diperoleh $(a * (a * 0)) * 0 = 0$

Untuk $x = a, y = a$ maka diperoleh $(a * (a * a)) * a = 0$

Untuk $x = a, y = b$ maka diperoleh $(a * (a * b)) * b = 0$

Untuk $x = b, y = 0$ maka diperoleh $(b * (b * 0)) * 0 = 0$

Untuk $x = b, y = a$ maka diperoleh $(b * (b * a)) * a = 0$

Untuk $x = b, y = b$ maka diperoleh $(b * (b * b)) * b = 0$

Jadi terbukti bahwa $\forall x, y \in X,$ berlaku $(x * (x * y)) * y = 0$

iii. Dari tabel 3.1 jelas bahwa $\forall x \in X,$ berlaku $x * x = 0$.

iv. Dari tabel 3.1, jelas bahwa $\forall x \in X,$ jika $x * x = 0,$ maka $x = x$

Terbukti bahwa $(X,*,0)$ adalah *Aljabar BCI*.

Kasus 2

Bukti dengan metode pengecekan satu persatu menggunakan tabel 2.7 aljabar BCI $(X,*,0)$ disajikan pada *lampiran 1*.

Dari hasil pengecekan satu persatu diatas maka terbukti bahwa $(Y,*,0)$ adalah *sub-aljabar* dari $(X,*,0)$.

Teorema 2.9.10

Diberikan $(X,*,0)$ adalah aljabar BCI, $\forall x, y, z \in X$ sehingga memenuhi $(x * y) * z = (x * z) * y$.

Bukti:

Ambil sebarang $x, y, z \in X$, dari aksioma (*iv*) Aljabar BCI, akan ditunjukkan bahwa:

1. $\big((x * y) * z\big) * \big((x * z) * y\big) = 0,$
2. $\big((x * z) * y\big) * \big((x * y) * z\big) = 0,$

sehingga $(x * y) * z = (x * z) * y$

Bagian 1.

Dari aksioma (*ii*) Aljabar BCI diperoleh bahwa $\big(x * (x * z)\big) * z = 0$. Dari definisi (2.9.3) diperoleh $\big(x * (x * z)\big) \leq z$. Kemudian dari (2.9.7.1), kedua ruas dioperasikan dengan $(x * y)$, sehingga diperoleh

$(x * y) * z \leq (x * y) * \big(x * (x * z)\big)$. … (1-*i*)

Dari aksioma (i) Aljabar BCI, diperoleh $\big((x*y)*\big(x*(x*z)\big)\big)*((x*z)*y)=0$, Dari definisi (2.9.3), diperoleh

$(x*y)*\big(x*(x*z)\big)\leq(x*z)*y.$ …(1-ii)

Dari (1-i) dan (1-ii) dengan memanfaatkan sifat transitif pada Aljabar BCI, diperoleh $(x*y)*z\leq(x*z)*y$.

Dari definisi (2.9.3) diperoleh $((x*y)*z)*\big((x*z)*y\big)=0$.

Bagian 2.

Dari aksioma (ii) Aljabar BCI diperoleh bahwa $\big(x*(x*y)\big)*y=0$. Dari definisi (2.9.3) diperoleh $\big(x*(x*y)\big)\leq y$. Kemudian dari (2.9.7.1), kedua ruas dioperasikan dengan $(x*z)$, sehingga diperoleh

$(x*z)*y\leq(x*z)*\big(x*(x*y)\big).$ … (2-*i*)

Dari aksioma (i) Aljabar BCI, diperoleh $\big((x*z)*\big(x*(x*y)\big)\big)*((x*y)*z)=0$, Dari definisi (2.9.3) diperoleh

$(x*z)*\big(x*(x*y)\big)\leq(x*y)*z.$ …(2-*ii*)

Dari (2-*i*) dan (2-*ii*), dengan memanfaatkan sifat transitif pada Aljabar BCI, diperoleh $(x*z)*y\leq(x*y)*z$.

Dari definisi (2.9.3) diperoleh $((x*z)*y)*\big((x*y)*z\big)=0$.

Dari bagian 1 dan bagian 2 maka dapat disimpulkan bahwa $(x*y)*z=(x*z)*y$.

Definisi 2.9.11

Diberikan $(X,*,0)$ adalah Aljabar BCI, dengan $A\subseteq X$. A dikatakan ideal jika :

(i) $0 \in A$

(ii) $x \in A$ dan $y * x \in A$ sehingga $y \in A \ \forall x, y \in X$

(Zhan and Lin, 2005;1675).

Contoh 2.9.12

Diberikan $A = \{0, l, m\}$ dan $X = \{0, l, m, n, p, q\}$ dengan operasi "$*$" didefinisikan sebagai berikut:

$*$	0	l	m	n	p	q
0	0	0	0	n	n	n
l	l	0	l	p	n	p
m	m	m	0	q	q	n
n	n	n	n	0	0	0
p	p	n	p	l	0	l
q	q	q	n	m	m	0

Tabel 2.8 Penefinisian Himpunan X dengan Operasi "$*$"

Tunjukkan bahwa A ideal di X!

Jawab:

Bukti $(X, *, 0)$ adalah aljabar BCI ada pada *lampiran* 5, dengan metode pengecekan satu persatu.

Berdasarkan definisi ideal diatas, akan ditunjukkan:

(i) $0 \in A$

(ii) $x \in A$ dan $y * x \in A$ sehingga $y \in A \ \forall x, y \in X$

Kasus I

Pada tabel 2.8 jelas bahwa $0 \in X$

Kasus II

Untuk $x = 0 \implies 0 * 0 = 0 \in A$

$l * 0 = l \in A$

$m * 0 = m \in A$

sehingga $0, l, m \in A$

Untuk $x = l \implies 0 * l = 0 \in A$

$l * l = 0 \in A$

$m * l = m \in A$

sehingga $0, l, m \in A$

Untuk $x = m \implies 0 * m = 0 \in A$

$l * m = l \in A$

$m * m = 0 \in A$

sehingga $0, l, m \in A$

Karena telah memenuhi aksioma (i) dan (ii) definisi ideal maka terbukti A ideal di X.

Lemma 2.9.13

Diberikan $(X, *, 0)$ adalah *Aljabar BCI*, untuk setiap $x, y, z \in X$, berlaku $x * 0 = x$ (Anjum dan Aslam, 2009:2).

Bukti:

Ambil sebarang $x \in X$, untuk menunjukkan $x * 0 = x$, dengan menggunakan aksioma (*iv*) Aljabar BCI, cukup ditunjukkan:

1. $(x * 0) * x = 0$
2. $x * (x * 0) = 0$

Sehingga $(x * 0) = x$

Kasus (1)

Berdasarkan aksioma (iii) dan (ii) Aljabar BCI, diperoleh

$(x * 0) * x = \big(x * (x * x)\big) * x = 0.$

Kasus (2)

Berdasarkan aksioma (iv) Aljabar BCI, untuk menunjukkan $x * (x * 0) = 0$, cukup ditunjukkan bahwa:

$\big(x * (x * 0)\big) * 0 = 0$ …..2.i

$0 * \big(x * (x * 0)\big) = 0$ …..2.ii

Untuk 2.i, jelas terjamin pada aksioma (ii) Aljabar BCI.

Untuk 2.ii, berdasarkan aksioma (ii), (iii), dan (i) Aljabar BCI diperoleh

$0 * \big(x * (x * 0)\big) = \big(x * (x * 0)\big) * 0 * \big(x * (x * 0)\big)$ ... (2.9.1 (iii))

$= \Big(\big(x(x * 0)\big) * (x * x)\Big) * \big(x * (x * 0)\big)$ ... (2.9.1(i))

$= 0$

Sehingga $x * (x * 0) = 0$ dan $(x * 0) * x = 0$, dari aksioma (iv) Aljabar BCI, jelas bahwa $(x * 0) = x$.

Definisi 2.9.14

Misalkan X adalah himpunan tak kosong dengan operasi biner “$*$” dan konstanta “0”. Maka struktur aljabar $(X, *, 0)$ dikatakan *Aljabar BCK* jika memenuhi beberapa aksioma dibawah ini:

$\forall x, y, z \in X$

i. $\big((x * y) * (x * z)\big) * (z * y) = 0,$

ii. $\big(x * (x * y)\big) * y = 0.$

iii. $x * x = 0,$

iv. Jika $x * y = 0$ dan $y * x = 0$ sehingga $x = y$

v. $0 * x = 0$, (Kim, 2001;128).

Dengan kata lain setelah memenuhi empat aksioma aljabar BCI, kemudian ditambahkan aksioma kelima pada Aljabar BCK. Sehingga bisa dikatakan aljabar BCI lebih luas dari aljabar BCK.

Contoh 2.9.15

Misal $X = \{0, a, b, c, d\}$ dengan operasi " $*$ " didefinisikan pada tabel 2.7 berikut:

$*$	**0**	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{c}$	$\boldsymbol{d}$
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{a}$	**0**	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{a}$	**0**
$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{b}$	**0**	**0**	**0**
$\boldsymbol{c}$	$\boldsymbol{c}$	$\boldsymbol{c}$	$\boldsymbol{c}$	**0**	**0**
$\boldsymbol{d}$	$\boldsymbol{d}$	$\boldsymbol{d}$	$\boldsymbol{d}$	$\boldsymbol{d}$	**0**

Tabel 2.9 Pendefinisian Himpunan X dengan Operasi " $*$ "

Tunjukkan bahwa $(X, *, 0)$ adalah *Aljabar BCK*

Jawab:

Bukti telah memenuhi aljabar BCI dengan metode pengecekan satu persatu menggunakan tabel 2.8 disajikan pada *lampiran 2*.

Berikutnya akan dibuktikan aksioma kelima Aljabar BCK bahwa $\forall x \in X$ berlaku $0 * x = 0$. Maka dengan metode pengecekan satu persatu diperoleh:

Untuk $x = 0$ maka $0 * 0 = 0$

Untuk $x = a$ maka $0 * a = 0$

Untuk $x = b$ maka $0 * b = 0$

Untuk $x = c$ maka $0 * c = 0$

Untuk $x = d$ maka $0 * d = 0$

Dengan demikian terbukti bahwa $(X,* ,0)$ adalah *Aljabar BCK*.

Definisi 2.9.16

Misal $(X,* ,0)$ adalah Aljabar BCI dan $M = \{x \in X | 0 * x = 0\}$ maka M dikatakan *BCK part*, jika $M = \{0\}$ maka X adalah *Aljabar BCI p-semisimpel* (Batti, 1991:1).

Dalam bahasan kali ini, penulis ingin menunjukkan hubungan antara Aljabar BCI p-semisimple dengan grup abelian. Pada bagian selanjutnya penulis akan membahas tentang hubungan tersebut, dan akan memberikan penjabaran subbab mengenai Aljabar BCI p-semisimple dan memberikan teorema mengenai nilpoten dan orde dari Aljabar BCI p-semisimple. Sebelum kita membahas lebih dalam tentang Aljabar p-semisimple berikut ini adalah contoh dari BCK part.

Contoh 2.9.17

Misal $X = \{0, a, b, c\}$ dengan operasi " $*$ " didefinikan sebagai berikut:

$*$	0	a	b	c
0	0	0	c	b
a	a	0	c	b
b	b	b	0	c
c	c	c	b	0

Tabel 2.10 Pendefinisian Himpunan X dengan Operasi " $*$ "

Bukti aljabar BCI dengan metode pengecekan satu persatu terdapat dalam *lampiran 3*.

Dari *tabel 2.9* akan dibuktikan $0 * x = 0$ yaitu:

Untuk $x = 0$ maka diperoleh $0 * 0 = 0$

Untuk $x = a$ maka diperoleh $0 * a = 0$

Untuk $x = b$ maka diperoleh $0 * b = c$

Untuk $x = c$ maka diperoleh $0 * c = b$

Maka yang memenuhi $M = \{0, a\}$ maka M disebut BCK part.

2.10 Tasawuf Dalam Islam

Tasawuf pada umumnya menempuh kehidupan zuhud, menghindari gemerlap duniawi, rela hidup dalam keprihatinan, melakukan berbagai jenis amalan ibadah, melaparkan diri, mengerjakan sholat malam dan melantunkan berbagai jenis wirid sampai fisik atau dimensi jiwa atau ruhani menjadi kuat.

Dalam pengertian ini tasawuf adalah usaha menaklukan dimensi jasmani manusia agar tunduk kepada dimensi ruhani (*nafs*), dengan berbagai cara sambil bergerak menuju kesempurnaan akhlak seperti dinyatakan kaum sufi, dan meraih pengetahuan atau makrifat (*ma'rifah*) tentang Zat Ilahi dan kesempurnaan-Nya (Hilal , 2002:19-20).

Tasawuf berazaskan kezuhudan sebagaimana yang dipraktekkan oleh Nabi SAW dan sebagian besar dari kalangan sahabat dan tabi'in. Diantara ayat-ayat Allah yang dijadikan landasan akan urgensi kezuhudan dalam kehidupan dunia firman Allah sebagai berikut:

ٱعْلَمُوٓا۟ أَنَّمَا ٱلْحَيَوٰةُ ٱلدُّنْيَا لَعِبٌ وَلَهْوٌ وَزِينَةٌ وَتَفَاخُرٌۢ بَيْنَكُمْ وَتَكَاثُرٌ فِى
ٱلْأَمْوَٰلِ وَٱلْأَوْلَٰدِ ۖ كَمَثَلِ غَيْثٍ أَعْجَبَ ٱلْكُفَّارَ نَبَاتُهُۥ ثُمَّ يَهِيجُ فَتَرَىٰهُ مُصْفَرًّا
ثُمَّ يَكُونُ حُطَٰمًا ۖ وَفِى ٱلْءَاخِرَةِ عَذَابٌ شَدِيدٌ وَمَغْفِرَةٌ مِّنَ ٱللَّهِ وَرِضْوَٰنٌ ۚ وَمَا
ٱلْحَيَوٰةُ ٱلدُّنْيَآ إِلَّا مَتَٰعُ ٱلْغُرُورِ ﴿٢٠﴾

"Ketahuilah, bahwa sesungguhnya kehidupan dunia Ini hanyalah permainan dan suatu yang melalaikan, perhiasan dan bermegah-megah antara kamu serta berbangga-banggaan tentang banyaknya harta dan anak, seperti hujan yang tanam-tanamannya mengagumkan para petani; Kemudian tanaman itu menjadi kering dan kamu lihat warnanya kuning Kemudian menjadi hancur. dan di akhirat (nanti) ada azab yang keras dan ampunan dari Allah serta keridhaan-Nya. dan kehidupan dunia Ini tidak lain hanyalah kesenangan yang menipu." (Al-Hadid: 20)

Ayat ini menjelaskan bahwa kebanyakan manusia melakukan amalan-amalan yang menjauhkannya dari amalan-amalan yang bermanfaat untuk diri dan keluarganya, sehingga mereka dapat kita temukan menjajakan diri dalam kubangan hitamnya kesenangan dan gelapnya hawa nafsu mulai dari kesenangan dalam berpakaian yang indah, tempat tinggal yang megah, dan segala hal yang dapat menyenangkan hawa nafsu.

Tasawuf juga berdasarkan Alquran dan Hadist dapat dilihat ayat-ayat dan hadist-hadist yang menggambarkan dekatnya manusia dengan Tuhan. Diantaranya terdapat dalam surat Al-Qaf ayat 16, Allah berfirman:

وَلَقَدْ خَلَقْنَا ٱلْإِنسَٰنَ وَنَعْلَمُ مَا تُوَسْوِسُ بِهِۦ نَفْسُهُۥ ۖ وَنَحْنُ أَقْرَبُ إِلَيْهِ مِنْ حَبْلِ ٱلْوَرِيدِ ﴿١٦﴾

"Dan Sesungguhnya Kami telah menciptakan manusia dan mengetahui apa yang dibisikkan oleh hatinya, dan Kami lebih dekat kepadanya dari pada urat lehernya"

Dalam Surat Al-Baqarah ayat 115, Allah berfirman:

وَلِلَّهِ ٱلْمَشْرِقُ وَٱلْمَغْرِبُ ۚ فَأَيْنَمَا تُوَلُّوا۟ فَثَمَّ وَجْهُ ٱللَّهِ ۚ إِنَّ ٱللَّهَ وَٰسِعٌ عَلِيمٌ ﴿١١٥﴾

'Dan kepunyaan Allah-lah timur dan barat, Maka kemanapun kamu menghadap di situlah wajah Allah. Sesungguhnya Allah Maha luas (rahmat-Nya) lagi Maha Mengetahui"

Maksud dari kalimat "disitulah wajah Allah" adalah kekuasaan Allah meliputi seluruh alam sebab itu di mana saja manusia berada, Allah mengetahui perbuatannya karena ia selalu berhadapan dengan Allah.

Ada empat macam tahapan yang harus dilalui oleh seorang hamba yang menekuni ajaran tasawuf untuk mencapai suatu tujuan yang disebut sebagai *As-sa'adah* dan *Insanul kamil* adalah:

Pertama; Syari'ah artinya Undang-undang atau garis-garis yang telah ditentukan termasuk didalamnya hukum-hukum halal dan haram, yang disuruh dan yang dilarang, yang sunnat, yang makruh dan yang mubah. *Syari'ah* dipandang oleh kaum sufi sebagai ajaran islam yang bersifat lahir. Karena itu mengerjakan syari'ah berarti mengerjakan amalan-amalan yang lahir (badaniah) dari ajaran atau hukum-hukum agama seperti shalat, puasa, zakat, haji, menuntut ilmu dan lain sebagainya. Tugasnya *syari'ah* itu itu ialah segala peraturan agama yang bersumber dari kitab suci Alquran dan hadist (Asmaran,2002:94).

Sebagaimana Allah befirman dalam surat Al-Maidah ayat 48 sebagai berikut:

وَأَنزَلۡنَآ إِلَيۡكَ ٱلۡكِتَٰبَ بِٱلۡحَقِّ مُصَدِّقٗا لِّمَا بَيۡنَ يَدَيۡهِ مِنَ ٱلۡكِتَٰبِ وَمُهَيۡمِنًا
عَلَيۡهِۖ فَٱحۡكُم بَيۡنَهُم بِمَآ أَنزَلَ ٱللَّهُۖ وَلَا تَتَّبِعۡ أَهۡوَآءَهُمۡ عَمَّا جَآءَكَ مِنَ ٱلۡحَقِّۚ
لِكُلّٖ جَعَلۡنَا مِنكُمۡ شِرۡعَةٗ وَمِنۡهَاجٗاۚ وَلَوۡ شَآءَ ٱللَّهُ لَجَعَلَكُمۡ أُمَّةٗ وَٰحِدَةٗ وَلَٰكِن
لِّيَبۡلُوَكُمۡ فِي مَآ ءَاتَىٰكُمۡۖ فَٱسۡتَبِقُواْ ٱلۡخَيۡرَٰتِۚ إِلَى ٱللَّهِ مَرۡجِعُكُمۡ جَمِيعٗا فَيُنَبِّئُكُم
بِمَا كُنتُمۡ فِيهِ تَخۡتَلِفُونَ ٤٨

"Dan kami Telah turunkan kepadamu Al Quran dengan membawa kebenaran, membenarkan apa yang sebelumnya, yaitu kitab-kitab (yang diturunkan sebelumnya) dan batu ujianterhadap kitab-kitab yang lain itu; Maka putuskanlah perkara mereka menurut apa yang Allah turunkan dan janganlah kamu mengikuti hawa nafsu mereka dengan meninggalkan kebenaran yang Telah datang kepadamu. untuk tiap-tiap umat diantara kamu, kami berikan aturan dan jalan yang terang. sekiranya Allah menghendaki, niscaya kamu dijadikan-Nya satu umat (saja), tetapi Allah hendak menguji kamu terhadap pemberian-Nya kepadamu, Maka berlomba-lombalah berbuat kebajikan. Hanya kepada Allah-lah kembali kamu semuanya, lalu diberitahukan-Nya kepadamu apa yang Telah kamu perselisihkan itu"

Kedua; thariqah, kata *thariqah* dapat dilihat dari dua sisi, yaitu sisi amaliah dan dari sisi organisasi (perkumpulan). Sisi amaliah ibadah merupakan latihan kejiwaan, baik yang dilakukan oleh seorang atau secara bersama-sama, dengan melalui dan mentaati aturan tertentu untuk mencapai tingkatan kerohanian yang disebut *maqomat* atau *al-ahwal*, yang mana latihan ini dilakukan secara berkala yang juga dikenal dengan istilah suluk. Sedangkan dari sisi organisasi maka *thariqah* berarti perkumpulan salik (orang yang melakukan suluk) yang sedang menjalani latihan kerohanian tertentu yang bertujuan untuk mencapai tingkat atau *maqam* tertentu yang dibimbing oleh seorang guru yang disebut *mursyid*.

Dalam melaksanakan *syari'ah* tersebut di atas haruslah berdasarkan tata cara yang telah digariskan dalam agama dan dilakukan hanya karena penghambaan diri kepada Allah SWT, karena kecintaan kepada Allah SWT dan karena ingin berjumpa dengan Allah SWT. Perjalanan menuju kepada Allah SWT itulah yang disebut dengan *thariqah*. Perjalanan ini sudah bersifat batiniah yaitu amalan lahir yang disertai amalan batin (Asmaran,2002:99).

Berikut ini profil beberapa *thariqah* yang tergolong masyhur dan banyak pengikutnya:

1. Thariqah Naqsabandiyah dan Khalidiyah

   Thariqah Naqsabandiyah didirikan oleh Muhammad bin Baba' al-Din al-'Uwaisi al-Bukhori al-Naqsabandi yang hidup di tahun 717-

791 H. Dia terkenal dengan keahliannya melukiskan kehidupan yang ghaib dan menyelam dalam lautan kesatuan dan kefanaan (Solihin & Rosyid, 2005:247).

2. Thariqah Qadiriyah

Thariqah qadiriyah didirikan oleh ‘Abd al-Qadr al-Jilani lahir 1077-1166 M. Dia terkenal dengan kekuatan *ma’rifatnya*. Dasar-dasar pokonya ialah tinggi cita-citanya, menjaga kehormatan, baik pelayanan, kuat pendirian, dan membesarkan ni’mat Tuhan (Solihin & Rosyid, 2005:248).

3. Thariqah Bektasyi

Thariqah Bektasyi diperkirakan telah ada di Mesir sejak abad ke-17 dan ke-18. Thariqah ini menghimpun para wali asal Turki dan Balkan menyusul masuknya kekuasaan Turki Usmani ke Mesir. Pada masa Sultan Mahmud II, thariqah Bektasyi dibubarkan, tetapi Mesir justru mendapatkan perlindungan dan mengalami perkembangan karena penguasa Mesir pada waktu itu berasal dari kalangan tentara Turki pengikut thariqah Bektasyi (Solihin & Rosyid, 2005:249).

4. Thariqah Syadziliyah

Pendiri thariqah Syadziliyah adalah Abu al-Hasan al-Sadzili yang terkenal denga kekuatan wirid dan kekuatan ilmunya (Solihin & Rosyid, 2005:249).

5. Thariqah Rifa'iyah

Pendiri thariqah Rifa'iyah adalah Ahmad bin Ali bin Abbas al-Rifa'i. Dia meninggal di Umm Abidah pada tanggal 22 Jumadil Awal 578 H. Thariqah Rifa'iyah banyak tersebar di daerah Aceh, Jawa, Sumatera Barat, Sulawesi dan di daerah yang lainnya (Solihin & Rosyid,2005:250).

6. Thariqah Tsamaniyah

Thariqah Tsamaniyah didirikan oleh Muhammad Tsaman yang meninggal tahun 1720 M di Madinah. Thariqah ini tersebar diwilayah Sumatera, khususnya Palembang. Thariqah Tsamaniyah mempunyai pengaruh dan penganut yang cukup luas (Solihin & Rosyid, 2005:250).

7. Thariqah Khalwatiyah

Thariqah Khalwatiyah didirikan oleh Zhahiruddin dan Syaikh Qasim al-Khalwati di Khurasan. Thariqah Khalwatiyah merupakan cabang dari thariqah Syuhrawardi yang didirikan oleh Abd. Al-Qadir Syuhrawardi (Solihin & Rosyid,2005:251).

8. Thariqah Al-Hadad

Tahriqah Al-Hadad didirikan oleh Sayyid Abdullah bin Alwi bin Muhammad al-Hadad. Dialah pencipta rotibul hadad dan dianggap salah seorang wali kutub dan 'arif dalam ilmu tasawuf (Solihin & Rosyid,2005:251).

Ketiga; Haqiqah, secara etimologi *haqiqah* berarti sesuatu puncak atau sumber asal dari sesuatu. Dalam dunia sufi *haqiqah* diartikan sebagai aspek lain dari *syari'ah* yang bersifat lahiriah yaitu aspek batiniah. Dengan demikian dapat diartikan sebagai rahasia yang paling dalam dari segala amal, inti dari *syari'ah* dan akhir dari dari perjalanan yang ditempuh oleh seorang sufi (Asmaran, 2002:101).

Menurut pendapat lain, perkataan *haqiqah* berasal dari kata pokok *haqq* yang berarti kepunyaan dan kebenaran. Sedang pengertian *haqiqah* yang dimaksudkan di sini adalah pengertian kedua yaitu benar atau kebenaran. Dengan demikian kalau disebut *haqiqah* maka maksudnya adalah ilmu untuk mencari kebenaran. Perkataan haqq itu bagi orang sufi dipakai sebagai nama Tuhan yang dipandang sebagai sumber segala kebenaran dan kadang-kadang disebut dengan *haqq al-haqaiq* (Asmaran, 2002:103).

Haqiqah yang didapatkan oleh seorang sufi setelah lama menempuh *thariqah* dengan melakukan *suluk*, menjadikan dirinya yakin terhadap apa yang dialami dan dihadapinya.

Keempat; Ma'rifat, secara etimologi, *ma'rifah* berarti pengetahuan atau pengenalan. Sedangkan dalam istilah sufi, ma'rifah itu diartikan sebagai pengetahuan mengenai Tuhan melalui hati (Asmaran, 2002:104).

Pada prinsipnya dalam ilmu tasawuf yang dimaksud dengan ma'rifah ialah mengenal Allah SWT (ma'rifatullah). Dan ini merupakan tujuan utama dalam ilmu tasawuf yakni mengenal Allah dengan sebenar-benarnya. Dalam hubungan ini Allah berfirman:

إِنَّنِيٓ أَنَا ٱللَّهُ لَآ إِلَٰهَ إِلَّآ أَنَا۠ فَٱعۡبُدۡنِي وَأَقِمِ ٱلصَّلَوٰةَ لِذِكۡرِيٓ ١٤

"Sesungguhnya Aku Ini adalah Allah, tidak ada Tuhan (yang hak) selain aku, Maka sembahlah Aku dan Dirikanlah shalat untuk mengingat Aku"

Menurut imam Ataillah, *ma'rifatullah* adalah melihat Allah dengan pandangan mata hati, dengan pandangan batin bukan dengan pandangan mata kepala. (Asmaran, 2002:105).

Dari sinilah kita dapat melihat bahwa seorang sufi tidak menginginkan kemewahan dalam hidupnya, kiranya kebutuhan duniawi sekedar untuk menunjuang ibadahnya dan tingkatan *ma'rifat* yang dimiliki cukup menjadikan bahagia dalam hidupnya karena merasa bersama-sama dengan Tuhannya.

BAB III
PEMBAHASAN

3.1 Pendahuluan Aljabar BCI p-semisimple

Aljabar BCI p-semisimple merupakan aljabar yang sangat penting karena merupakan bagian dari aljabar BCI. Kelas bagian dari aljabar BCI telah selesai diselidiki dengan luas oleh T. D. Lei. Kita akan mempelajari bagian-bagiannya pada pembahasan ini.

Definisi 3.1.1

Aljabar BCI $(X,*,0)$ dikatakan *Aljabar BCI p-semisimple* jika:

$M = \{x \in X: 0 * x = 0\}$, maka $M = \{0\}$ (Bhatti Shaban Ali,1991:2)

Contoh 3.1.2

Misal $X = \{0, a, b\}$ dengan operasi $"*"$ yang didefinisikan dengan tabel cayley sebagai berikut:

$*$	0	a	b
0	0	b	a
a	a	0	b
b	b	a	0

Tabel 3.1 Pendefinisian Himpunan X dengan Operasi "$*$"

Tunjukkan $(X,*,0)$ adalah *Aljabar BCI p-semisimple*

Jawab:

Pada contoh 2.9.9 telah terbukti bahwa $Y = \{0, a, b\}$ adalah Aljabar BCI. Setelah terbukti Aljabar BCI, berikutnya akan dibuktikan aljabar BCI p-semisimple.

i. Akan ditunjukkan $(X,*,0)$ adalah aljabar BCI p-semisimple sehingga ada $M = \{x \in |0 * x = 0, \forall\, x \in X\}$ dengan $M = \{0\}$

Akan ditunjukkan $\forall\, x \in X$, berlaku $0 * x = 0$

Untuk $x = 0$ maka $0 * 0 = 0$

Untuk $x = a$ maka $0 * a = b$

Untuk $x = b$ maka $0 * b = a$

Dari pengecekan satu persatu di atas maka ketika di operasikan menghasilkan 0, yang memenuhi elemennya hanya satu yaitu $\{0\}$. Maka terbukti $(X,*,0)$ adalah *aljabar BCI p-semisimple*.

Contoh 3.1.3

Tunjukkan bahwa $(\mathbb{R},-,0)$ merupakan *Aljabar BCI p-semisimple*.

Jawab:

Ambil sebarang $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ sehingga diperoleh:

i. Akan ditunjukkan $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ berlaku $\big((x-y)-(x-z)\big)-(z-y) = 0$

$$\big((x-y)-(x-z)\big)-(z-y) = \big((x-x)+(z-y)\big)-(z-y) = 0$$

ii. Akan ditunjukkan $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ berlaku$(x-(x-y))-y = 0$.

$\big(x-(x-y)\big)-y = x-x+y-y = 0$

iii. Akan ditunjukkan $\forall x \in \mathbb{R},$ berlaku $x - x = 0$.

$$x - x = 0$$

iv. Akan ditunjukkan $\forall x \in \mathbb{R}$, jika $x - y = 0,$ maka $x = y$

Jika $x - y = 0$ dan $y - x = 0$, maka $x = y$

Dari aksioma (i) sampai (iv) telah terbukti bahwa $(\mathbb{R},-,0)$ merupakan aljabar BCI.

v. Akan ditunjukkan $\forall x \in \mathbb{R}$, berlaku $0 - x = 0$

Jika $0 - x = 0$, hanya berlaku untuk bilangan $\{0\}$ saja, sehingga jelas bahwa $(\mathbb{R}, -, 0)$ merupakan *Aljabar BCI p-semisimple*

Dari contoh-contoh di atas maka dapat diketahui bahwa *Aljabar BCI p-semisimple* adalah bagian dari Aljabar BCI. Untuk penyebutan Aljabar BCI p-semisimple dalam kependekannya dapat disebut dengan *Aljabar p-semisimple*.

3.2 Sifat-Sifat Aljabar p - semisimple

Definisi 3.2.1

Suatu elemen a dalam aljabar BCI X dikatakan *minimal elemen* jika $x * a = 0$ sehingga $x = a,\ \forall x \in X$ (Huang, 2006:4).

Minimal element merupakan hukum yang sangat penting dalam meneliti Aljabar BCI terutama ketika membahas tentang aljabar p-semisimple. Dalam beberapa literatur minimal element disebut juga dengan *initial element*, dalam penelitian ini penulis akan menyebut minimal elemen.

Lemma 3.2.2

Diberikan $(X, *, 0)$ adalah Aljabar BCI maka pernyataan dibawah ini adalah ekivalen:

1. X adalah p-semisimple
2. $\big(0 * (0 * x)\big) = x$ (Tiande dan Changchang, 1985:513).

Bukti.

(1)⟹(2)

ambil sebarang $x \in X$, dari aksioma (iii) aljabar BCI diperoleh $(0 * x) * (0 * x) = 0$. Kemudian dari (*2.9.9*) didapatkan

$\big(0 * (0 * x)\big) * x = 0$ …………………(i)

Dari definisi (*2.9.3*) diperoleh $\big(0 * (0 * x)\big) \leq x$, dari (2.9.7) dengan mengoperasikan x pada kedua ruas diperoleh $x * x \leq x * (0 * (0 * x))$ menurut aksioma (iii) aljabar BCI maka $0 \leq x * (0 * (0 * x))$ dengan kata lain

$0 * \Big(x * \big(0 * (0 * x)\big)\Big) = 0$ …………..(ii)

Karena X adalah p-semisimple yang berarti $\forall y \in X, 0 * y = 0$ maka $y = 0$. Misal $y = 0 * \Big(x * \big(0 * (0 * x)\big)\Big)$ maka $x * \big(0 * (0 * x)\big) = 0$

Dari (i) dan (ii), berdasarkan aksioma (iv) aljabar BCI disimpulkan bahwa $0 * (0 * x) = x$

Lemma 3.2.3

Diberikan $(X,*,0)$ adalah aljabar BCI, maka pernyataan dibawah ini adalah ekivalen:

1. X adalah p-semisimple
2. $\forall x \in X$ adalah minimal
3. $x * (0 * y) = y * (0 * z), \forall x, y \in X$
4. $0 * x = 0$ sehingga $x = 0, \forall x \in X$ (Huang, 2006:34).

Bukti.

(1) $\Longrightarrow$ (2)

Akan ditunjukkan $x * y = 0$ maka $x = y$

Menurut aksioma (iv) aljabar BCI bahwa $x * y = 0$ dan $y = 0$ sehingga $x = y$ maka setiap elemen pada p-semisimple adalah minimal.

(2) $\Longrightarrow$ (3)

Ambil sebarang $x \in X$,

menurut teorema (3.2.2-2) maka $x * (0 * y) = \big(0 * (0 * x)\big) * (0 * y)$ dari teorema (2.9.9) diperoleh $\big(0 * (0 * y)\big) * (0 * x)$, karena $0 * (0 * y) = y$ maka diperoleh

$x * (0 * y) = y * (0 * y)$.

(3) $\Longrightarrow$ (4)

Ambil sebarang $x \in X$, menurut definisi p-semisimple bahwa $0 * x = 0$ dan menurut teorema (3.2.2-2) maka $x = (0 * (0 * x))$

Karena diketahui $0 * x = 0$ maka $x = 0 * 0$, sehingga kembali ke definisi aljabar p-semisimple maka $x = 0$

(4) $\Longrightarrow$ (1)

$\forall x \in X$ diketahui $x = 0$ maka mengikuti teorema (3.4.2)

diperoleh $0 = 0 * (0 * x)$ karena $0 * (0 * x)$ adalah elemen minimal di X maka X adalah aljabar p-semisimple.

Definisi 3.2.4

Misal $(X, *, 0)$ adalah aljabar BCI dikatakan *assosiatif* jika $\forall x, y, z \in X$ memenuhi:

$$(x * y) * z = x * (y * z)$$

(Jun & Xin, 1998:132).

Drfinisi 3.2.4

Misal $(X,*,0)$ adalah aljabar BCI dikatakan *non-assosiatif* jika $\forall x, y, z \in X$ memenuhi:

$$(x * y) * z \neq x * (y * z)$$

(Bhatti, 1991:2).

Contoh 3.2.5

Misal $X = \{0, a, b, c\}$ dengan operasi " $*$ " didefinisikan pada tabel berikut:

$*$	0	a	b	c
0	0	a	b	c
a	a	0	c	b
b	b	c	0	a
c	c	b	a	0

Tabel 3.2 Pendefinisian Himpunan X dengan Operasi " $*$ "

Buktikan $(X,*,0)$ adalah Aljabar BCI yang bersifat assosiatif.

Jawab:

Bukti aljabar BCI dengan metode pengecekan satu persatu disajikan pada *lampiran 4*. Berikut ini adalah bukti aljabar BCI tersebut bersifat *assosiatif* yaitu $\forall x, y, z \in X$ berlaku $(x * y) * z = x * (y * z)$.

Untuk $x = 0, y = 0$ maka diperoleh

$(0 * 0) * 0 = 0 * (0 * 0) = 0$

Untuk $x = 0, y = a$ maka diperoleh

$(0 * a) * 0 = 0 * (a * 0) = a$

$(0 * 0) * a = 0 * (0 * a) = a$

$(0 * 0) * b = 0 * (0 * b) = b$

$(0 * 0) * c = 0 * (0 * c) = c$

$(0 * a) * a = 0 * (a * a) = 0$

$(0 * a) * b = 0 * (a * b) = c$

$(0 * a) * c = 0 * (a * c) = b$

Untuk $x = 0, y = b$ maka diperoleh

$(0 *) * 0 = 0 * (b * 0) = b$

$(0 * b) * a = 0 * (b * a) = c$

$(0 * b) * b = 0 * (b * b) = 0$

$(0 * b) * c = 0 * (b * c) = a$

Untuk $x = 0, y = c$ maka diperoleh

$(0 * c) * 0 = 0 * (c * 0) = c$

$(0 * c) * a = 0 * (c * a) = b$

$(0 * c) * b = 0 * (c * b) = a$

$(0 * c) * c = 0 * (c * c) = 0$

Untuk $x = a, y = 0$ maka diperoleh

$(a * 0) * 0 = a * (0 * 0) = a$

$(a * 0) * a = a * (0 * a) = 0$

$(a * 0) * b = a * (0 * b) = c$

$(a * 0) * c = a * (0 * c) = b$

Untuk $x = a, y = a$ maka diperoleh

$(a * a) * 0 = a * (a * 0) = 0$

$(a * a) * a = a * (a * a) = a$

$(a * a) * b = a * (a * b) = b$

$(a * a) * c = a * (a * c) = c$

Untuk $x = a, y = b$ maka diperoleh

$(a * b) * 0 = a * (b * 0) = c$

$(a * b) * a = a * (b * a) = b$

$(a * b) * b = a * (b * b) = a$

$(a * b) * c = a * (b * c) = 0$

Untuk $x = a, y = c$ maka diperoleh

$(a * c) * 0 = a * (c * 0) = b$

$(a * c) * a = a * (c * a) = c$

$(a * c) * b = a * (c * b) = 0$

$(a * c) * c = a * (c * c) = a$

Untuk $x = b, y = 0$ maka diperoleh

$(b * 0) * 0 = b * (0 * 0) = b$

Untuk $x = b, y = a$ maka diperoleh

$(b * a) * 0 = b * (a * 0) = c$

$(b * 0) * a = b * (0 * a) = c$

$(b * 0) * b = b * (0 * b) = 0$

$(b * 0) * c = b * (0 * c) = a$

$(b * a) * a = b * (a * a) = b$

$(b * a) * b = b * (a * b) = a$

$(b * a) * c = b * (a * c) = 0$

Untuk $x = b, y = b$ maka diperoleh

$(b * b) * 0 = b * (b * 0) = 0$

$(b * b) * a = b * (b * a) = a$

$(b * b) * b = b * (b * b) = b$

$(b * b) * c = b * (b * c) = c$

Untuk $x = b, y = c$ maka diperoleh

$(b * c) * 0 = b * (c * 0) = a$

$(b * c) * a = b * (c * a) = 0$

$(b * c) * b = b * (c * b) = c$

$(b * c) * c = b * (c * c) = b$

Untuk $x = c, y = 0$ maka diperoleh

$(c * 0) * 0 = c * (0 * 0) = c$

$(c * 0) * a = c * (0 * a) = b$

$(c * 0) * b = c * (0 * b) = a$

$(c * 0) * c = c * (0 * c) = 0$

Untuk $x = c, y = a$ maka diperoleh

$(c * a) * 0 = c * (a * 0) = b$

$(c * a) * a = c * (a * a) = c$

$(c * a) * b = c * (a * b) = 0$

$(c * a) * c = c * (a * c) = a$

Untuk $x = c, y = b$ maka diperoleh

$(c * b) * 0 = c * (b * 0) = a$

$(c * b) * a = c * (b * a) = 0$

$(c * b) * b = c * (b * b) = c$

$(c * b) * c = c * (b * c) = b$

Untuk $x = c, y = c$ maka diperoleh

$(c * c) * 0 = c * (c * 0) = 0$

$(c * c) * a = c * (c * a) = a$

$(c * c) * b = c * (c * b) = b$

$(c * c) * c = c * (c * c) = c$

Pada tabel di atas telah terbukti $\forall x, y, z \in X$ berlaku:

$$(x * y) * z = x * (y * z)$$

Karena telah terbukti assosiatif maka $(X,*,0)$ adalah aljabar BCI yang memenuhi sifat *assosiatif.*

Pada *contoh 2.9.13* telah terbukti Aljabar BCI, melainkan tidak memenuhi sifat assosiatif. Berikut ini akan dibuktikan contoh 2.9.13 pada tabel 2.9 tidak memenuhi sifat assosiatif

Misal $x = 0, y = 0$ maka diperoleh:

$$(0 * 0) * 0 = 0 * (0 * 0)$$

$$(0 * 0) * a \neq 0 * (0 * a)$$

$$(0 * 0) * b \neq 0 * (0 * b)$$

$$(0 * 0) * c \neq 0 * (0 * c)$$

Karena telah terbukti tidak assosiatif, maka $(X,*,0)$ dengan operasi " $*$ " pada tabel 2.9 merupakan *Aljabar BCI non assosiatif.*

Lemma 3.2.6

Diberikan aljabar BCI $(X,*,0)$, maka pernyataan dibawah ini ekivalen:

$\forall x, y \in X$

(1). X adalah assosiatif

(2). $0 * x = x$

(3). $x * y = y * x$ (Huang, 2006:41).

Bukti:

(1) $\Longrightarrow$ (2)

X adalah aljabar BCI yang bersifat assosiatif sehingga $\forall x, y, z \in X$ berlaku $(x * y) * z = x * (y * z)$. Akan dibuktikan $0 * x = x$

Ambil sebarang $x \in X$, untuk menunjukkan $x * 0 = x$, dengan menggunakan aksioma (iv) Aljabar BCI, cukup ditunjukkan:

1. $(0 * x) * x = 0$
2. $x * (0 * x) = 0$

Sehingga $(0 * x) = x$

Kasus (1)

Berdasarkan aksioma (iii) dan (ii) Aljabar BCI, maka diperoleh :

$(0 * x) * x = 0 * (x * x)$ (sifat Assosiatif)

$= 0 * 0$ (aksioma (iii) aljabar BCI)

$(0 * x) * x = 0$ (aksioma (iii) aljabar BCI)

Kasus (2)

Berdasarkan aksioma (iv) Aljabar BCI, untuk menunjukkan $x * (0 * x) = 0$

$x * (0 * x) = (x * 0) * x$ (sifat assosiatif)

$= x * x$ (2.9.13)

$= 0$ (aksioma (iii) aljabar BCI)

Sehingga $(0 * x) * x = 0$ dan $x * (0 * x) = 0$ dari aksioma (iv) Aljabar BCI, jelas bahwa $(0 * x) = x$

(2)⇒(3)

Akan dibuktikan $x * y = y * x$.

Diketahui $0 * x = x$ maka $x * y = (0 * x) * y$ pada teorema 2.9.10 maka diperoleh $x * y = (0 * y) * x$, sehingga terbukti $x * y = y * x$

(3) ⇒ (1)

Akan dibuktikan $\forall x, y, z \in X$ berlaku $(x * y) * z = x * (y * z)$.

$x * (y * z) = (y * z) * x$ (sifat 3.2.6.3)

$= (y * x) * z$ (teorema 2.9.10)

$= (x * y) * z$ (sifat 3.2.6.3)

Sehingga terbukti assosiatif yaitu $\forall x, y, z \in X$ berlaku:

$$(x * y) * z = x * (y * z)$$

Teorema 3.2.7

Jika $(X,*,0)$ adalah Aljabar BCI yang bersifat assosiatif maka $(X,*,0)$ adalah *Aljabar p-semisimple*

Bukti:

Dari (3.2.2.ii) akan dibuktikan $(X,*,0)$ adalah Aljabar BCI p-semisimple dengan menunjukkan $\forall x \in X,\ 0 * (0 * x) = x$

$0 * (0 * x) = (0 * 0) * x$ (sifat assosiatif)

$= 0 * x$ (aksioma (*iii*) aljabar BCI)

$0 * (0 * x) = x$ (2.9.13)

Sehingga terbukti $(X,*,0)$ adalah *Aljabar p-semisimple*

Contoh 3.2.8

Jika $(X,*,0)$ adalah aljabar BCI yang bersifat assosiatif dengan operasi "$*$" didefinisikan pada tabel berikut:

$*$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

Tabel 3.3 Pendefinisian Himpunan X dengan Operasi “ $*$ ”

Maka buktikan $(X,*,0)$ adalah *Aljabar p-semisimple*.

Jawab:

Bukti $(X,*,0)$ aljabar BCI yang bersifat assosiatif disajikan pada *lampiran 6*.

Berikut ini akan dibuktikan bahwa $(X,*,0)$ adalah Aljabar p-semisimple.

Dari teorema (3.2.2) akan dibuktikan $(X,*,0)$ adalah *Aljabar p-semisimple* dengan menunjukkan $\forall x \in X, 0 * (0 * x) = x$.

Untuk $x = 0$ maka $0 * (0 * 0) = 0$

Untuk $x = 1$ maka $0 * (0 * 1) = 1$

Untuk $x = 2$ maka $0 * (0 * 2) = 2$

Untuk $x = 3$ maka $0 * (0 * 3) = 3$

Karena telah terbukti $\forall x \in X, 0 * (0 * x) = x$ sehingga terbukti $(X,*,0)$ adalah aljabar BCI yang bersifat assosiatif dengan operasi $*$ didefinisikan pada tabel 3.2 adalah *Aljabar p-semisimple*.

Sebagaimana struktur aljabar yang lain yaitu terdapat himpunan bagian atau subset himpunan bagian maka pada Aljabar BCI dan Aljabar p-semisimple, terdapat ideal pada Aljabar BCI dan ideal pada Aljabar p-semisimple. Ideal pada Aljabar BCI telah dijelaskan pada BAB sebelumnya, berikut ini akan dijelaskan ideal pada Aljabar p-semisimple.

Definisi 3.2.9

Diberikan $(X,*,0)$ adalah Aljabar p-semisimple, dengan $Y \subseteq X$. A dikatakan *ideal* jika :

(i) $0 \in Y$

(ii) $x \in Y$ dan $y * x \in Y$ sehingga $y \in Y$ $\forall x, y \in X$

(Zhan and Lin, 2005;1675).

Contoh 3.2.10

Diberikan $Y = \{0,1\}$ dan $X = \{0,1,2\}$ dengan operasi "$*$" didefinisikan sebagai berikut:

$*$	0	1	2
0	0	0	2
1	1	0	2
2	2	2	0

Tabel 3.4 Pendefinisian Himpunan X dengan Operasi "$*$"

Tunjukkan bahwa Y ideal di X.

Jawab:

Bukti $(X,*,0)$ adalah Aljabar BCI dengan metode pengecekan satu persatu disajikan pada *lampiran 7*.

Berdasarkan definisi ideal diatas, akan ditunjukkan:

(i) $0 \in Y$

(ii) $x \in Y$ dan $y * x \in Y$ sehingga $y \in Y\ \forall x, y \in X$

Kasus I

Pada tabel 3.3 jelas bahwa $0 \in X$

Kasus II

Untuk $x = 0 \implies 0 * 0 = 0 \in Y$

$1 * 0 = 1 \in Y$

$2 * 0 = 2 \notin Y$

sehingga $0,1 \in Y$

Untuk $x = 1 \implies 0 * 1 = 0 \in Y$

$1 * 1 = 0 \in Y$

$2 * 1 = 2 \notin Y$

sehingga $0,1 \in Y$

karena telah memenuhi aksioma (i) dan (ii) definisi ideal maka terbukti Y ideal di X.

Definisi 3.2.11

Diberikan $(X,*,0)$ adalah Aljabar BCI, jika ada $k \in N$ dan $0 * x^k = 0$, sehingga x dinamakan *Nilpotent* di X. Dan bilangan asli terkecil yang memenuhi $0 * x^k = 0$ dinamakan *Periode* di x. Periode dari setiap x di X dinotasikan dengan $o(x)$ (Huang, 2006:38).

Contoh 3.2.12

Misal $X = \{0, a, b\}$ dengan operasi " $*$ " yang didefinisikan dengan tabel 3.1. Tunjukkan bahwa $(X, *, 0)$ setiap elemnnya adalah *nilpotent* dan mempunyai *periode*

Jawab:

Misal $x = 0$ maka diperoleh $0 * (0 * 0) = 0$

$$\Leftrightarrow 0 * 0^2 = 0$$

Maka $o(0) = 2$

Misal $x = a$ maka diperoleh $0 * (a * a) = 0$

$$\Leftrightarrow 0 * a^2 = 0$$

Maka $o(a) = 2$

Misal $x = b$ maka diperoleh $0 * (b * b) = 0$

$$\Leftrightarrow 0 * b^2 = 0$$

Maka $o(b) = 2$

3.3 Hubungan Aljabar BCI p-semisimple dengan Grup Abelian

Aljabar BCI merupakan himpunan tak kosong yang mempunyai elemen khusus dengan operasi yang didefinisikan sehingga memenuhi empat aksioma. Begitu pula dengan Aljabar p-semisimple yang merupakan bagian dalam Aljabar BCI dengan aksioma tertentu. Grup juga merupakan himpunan tak kosong yang mempunyai satu operasi biner dengan aksioma-aksioma tertentu.

Berikut ini akan dijelaskan hubungan antara Aljabar p-semisimple dengan grup abelian. Pada penelitian sebelumnya telah dijelaskan hubungan p-semisimple dengan grup abelian, berikut penulis juga menambahkan hubungan tersebut.

Teorema 3.3.1

Jika $(X,*,0)$ adalah *Aljabar p-semisimple* yang bersifat assosiatif maka $(X,*)$ adalah grup abelian.

Bukti:

i. $\forall x, y \in X$ pada lemma 3.2.2 (ii) yaitu $\big(0*(0*x)\big) = x$ maka memenuhi sifat tertutup.

ii. Akan di tunjukkan $\forall x, y, z \in X$ berlaku $x*(y*z) = (x*y)*z$

Dari pernyataan diatas telah diketahui bahwa $(X,*,0)$ adalah *Aljabar p-semisimple* yang bersifat assosiatif, maka telah terbukti assosiatif.

iii. Akan ditunjukan $\forall x, y \in X$ berlaku $x*y = y*x$ (komutatif)

$x*y = (0*x)*y$ (Lemma 3.2.6)

$= (0*y)*x$ (Teorema 2.9.10)

$= y*x$ (Lemma 3.2.6)

Akan ditunjukkan $\forall x \in X$ terdapat $0 \in X$ sehingga $0*x = x*0 = x$

$x*0 = 0*x$ (sifat komutatif pada lemma 3.2.6 *(iii)*)

$= 0*(0*(0*x))$ (lemma 3.2.2)

$= (0*0)*(0*x)$ (assosiatif)

$= 0 * (0 * x)$ (aksioma Aljabar BCI (iii))

$= x$ (lemma 3.2.2)

iv. Akan ditunjukkan $\forall x \in X$ terdapat elemen invers x dinotasikan dengan $x^{-1} = 0 * x$, sedemikian sehingga $x * x^{-1} = 0$

$x * (0 * x) = (0 * x) * (0 * x)$ (definisi Aljabar p-semisimple)

$= 0$ (definisi Aljabar BCI aksioma *(iii)*)

Contoh 3.3.2

Misal $X = \{0, a, b, c\}$ dan $(X,* ,0)$ adalah *Aljabar p-semisimple* dengan operasi " $*$ " didefinisikan pada tabel 3.2. Tunjukkan bahwa $(X,*)$ adalah grup abelian!

Jawab:

Berdasarkan pambahasan sebelumnya telah terbukti $(X,* ,0)$ dengan operasi " $*$ " didefinisikan pada tabel 3.2 terbukti *aljabar BCI.*

Berikut ini akan dibuktikan Aljabar p-semisimple sehingga ada

$M = \{x \in |0 * x = 0, \forall\, x \in X\}$ dengan $M = \{0\}$

Dari operasi " $*$ " akan ditunjukkan bahwa $0 * x = 0, \forall\, x \in X$ maka $x = 0$.

Untuk $x = 0$ maka diperoleh $0 * 0 = 0$

Untuk $x = a$ maka diperoleh $0 * a = a$

Untuk $x = b$ maka diperoleh $0 * b = b$

Untuk $x = c$ maka diperoleh $0 * c = c$

Karena hanya akan dipenuhi jika $x = 0$ maka $(X,* ,0)$ adalah Aljabar *p-semisimple.*

Akan ditunjukkan bahwa $(X,*)$ adalah grup abelian.

i. Tertutup, karena semua entri dari operasi " $*$ " pada table 3.2 adalah elemen dari X.

ii. Assosiatif, $\forall x, y, z \in X$ berlaku:

$$(x * y) * z = x * (y * z)$$

Untuk $x = 0, y = 0$ maka diperoleh

$(0 * 0) * 0 = 0 * (0 * 0) = 0$

$(0 * 0) * a = 0 * (0 * a) = a$

$(0 * 0) * b = 0 * (0 * b) = b$

$(0 * 0) * c = 0 * (0 * c) = c$

Untuk $x = 0, y = a$ maka diperoleh

$(0 * a) * 0 = 0 * (a * 0) = a$

$(0 * a) * a = 0 * (a * a) = 0$

$(0 * a) * b = 0 * (a * b) = c$

$(0 * a) * c = 0 * (a * c) = b$

Untuk $x = 0, y = b$ maka diperoleh

$(0 * b) * 0 = 0 * (b * 0) = b$

$(0 * b) * a = 0 * (b * a) = c$

$(0 * b) * b = 0 * (b * b) = 0$

$(0 * b) * c = 0 * (b * c) = a$

Untuk $x = 0, y = c$ maka diperoleh

$(0 * c) * 0 = 0 * (c * 0) = c$

$(0 * c) * a = 0 * (c * a) = b$

$(0 * c) * b = 0 * (c * b) = a$

$(0 * c) * c = 0 * (c * c) = 0$

Untuk $x = a, y = 0$ maka diperoleh

$(a * 0) * 0 = a * (0 * 0) = a$

$(a * 0) * a = a * (0 * a) = 0$

$(a * 0) * b = a * (0 * b) = c$

$(a * 0) * c = a * (0 * c) = b$

Untuk $x = a, y = a$ maka diperoleh

$(a * a) * 0 = a * (a * 0) = 0$

$(a * a) * a = a * (a * a) = a$

$(a * a) * b = a * (a * b) = b$

$(a * a) * c = a * (a * c) = c$

Untuk $x = a, y = b$ maka diperoleh

$(a * b) * 0 = a * (b * 0) = c$

$(a * b) * a = a * (b * a) = b$

$(a * b) * b = a * (b * b) = a$

$(a * v) * c = a * (b * c) = 0$

Untuk $x = b, y = 0$ maka diperoleh

$(b * 0) * 0 = b * (0 * 0) = b$

$(b * 0) * a = b * (0 * a) = c$

$(b * 0) * b = b * (0 * b) = 0$

$(b * 0) * c = b * (0 * c) = a$

Untuk $x = b, y = b$ maka diperoleh

$(b * b) * 0 = b * (b * 0) = 0$

$(b * b) * a = b * (b * a) = a$

$(b * b) * b = b * (b * b) = b$

$(b * b) * c = b * (b * c) = c$

Untuk $x = c, y = 0$ maka diperoleh

$(c * 0) * 0 = c * (0 * 0) = c$

$(c * 0) * a = c * (0 * a) = b$

$(c * 0) * b = c * (0 * b) = a$

$(c * 0) * c = c * (0 * c) = 0$

Untuk $x = a, y = c$ maka diperoleh

$(a * c) * 0 = a * (c * 0) = b$

$(a * c) * a = a * (c * a) = c$

$(a * c) * b = a * (c * b) = 0$

$(a * c) * c = a * (c * c) = a$

Untuk $x = b, y = a$ maka diperoleh

$(b * a) * 0 = b * (a * 0) = c$

$(b * a) * a = b * (a * a) = b$

$(b * a) * b = b * (a * b) = a$

$(b * a) * c = b * (a * c) = 0$

Untuk $x = b, y = c$ maka diperoleh

$(b * c) * 0 = b * (c * 0) = a$

$(b * c) * a = b * (c * a) = 0$

$(b * c) * b = b * (c * b) = c$

$(b * c) * c = b * (c * c) = b$

Untuk $x = c, y = a$ maka diperoleh

$(c * a) * 0 = c * (a * 0) = b$

$(c * a) * a = c * (a * a) = c$

$(c * a) * b = c * (a * b) = 0$

$(c * a) * c = c * (a * c) = a$

Untuk $x = c, y = b$ maka diperoleh	Untuk $x = c, y = c$ maka diperoleh
$(c * b) * 0 = c * (b * 0) = a$	$(c * c) * 0 = c * (c * 0) = 0$
$(c * b) * a = c * (b * a) = 0$	$(c * c) * a = c * (c * a) = a$
$(c * b) * b = c * (b * b) = c$	$(c * c) * b = c * (c * b) = b$
$(c * b) * c = c * (b * c) = b$	$(c * c) * c = c * (c * c) = c$

Jadi terbukti bahwa $\forall x, y, z \in X$ berlaku$(x * y) * z = x * (y * z)$ atau bersifat assosiatif.

iii. Ada identitas sedemikian sehingga $e * x = x * e = x,\ \forall x, e \in X$

iv. Untuk $x = 0$ maka diperoleh $0 * 0 = 0 * 0 = 0$

Untuk $x = a$ maka diperoleh $0 * a = a * 0 = a$

Untuk $x = b$ maka diperoleh $0 * b = b * 0 = b$

Untuk $x = c$ maka diperoleh $0 * c = c * 0 = c$

Jadi terbukti bahwa $e = 0$ adalah identitas dari X sehingga berlaku

$e * x = x * e = x,\ \forall x, e \in X$

v. Mempunyai invers, $x^{-1} * x = x * x^{-1} = e = 0$

Invers dari $0 = 0^{-1} = 0$

Invers dari $a = a^{-1} = a$

Invers dari $b = b^{-1} = b$

Invers dari $c = c^{-1} = c$

Untuk $x = 0$ maka diperoleh $0 * 0 = 0 * 0 = 0$

Untuk $x = a$ maka diperoleh $a * a = a * a = 0$

Untuk $x = b$ maka diperoleh $b * b = b * b = 0$

Untuk $x = c$ maka diperoleh $c * c = c * c = 0$

vi. Komutatif, ambil $\forall x, y \in X$ maka berlaku $x * y = y * x$

Untuk $x = 0$ maka diperoleh:

$$0 * 0 = 0 * 0 = 0$$
$$0 * a = a * 0 = a$$
$$0 * b = b * 0 = b$$
$$0 * c = c * 0 = c$$

Untuk $x = a$ maka diperoleh:

$$a * 0 = 0 * a = a$$
$$a * a = a * a = 0$$
$$a * b = b * a = c$$
$$a * c = c * a = b$$

Untuk $x = b$ maka diperoleh:

$$b * 0 = 0 * b = b$$
$$b * a = a * b = c$$
$$b * b = b * b = 0$$
$$b * c = c * b = a$$

Untuk $x = c$ maka diperoleh:

$$c * 0 = 0 * c = c$$
$$c * a = a * c = b$$
$$c * b = b * c = b$$
$$c * c = c * c = 0$$

Jadi terbukti bahwa $\forall x, y \in X$ maka berlaku $x * y = y * x$

Sehingga terbukti $(X,*)$ adalah grup abelian.

3.4 Menganalogkan antara Tasawuf dengan Aljabar BCI p-semisimple

Pada skripsi ini, penulis menjelaskan tentang Aljabar BCI p-semisimple yang terbentuk dari Aljabar BCI dengan dengan kondisi tertentu. Aljabar p-semisimple dengan Aljabar BCI merupakan rangkaian materi yang saling keterkaitan, karena empat dari aksioma Aljabar BCI memenuhi Aljabar p-semismple.

Demikian juga, penulis mengangkat hubungan antara Aljabar p-semisimple dengan grup abelian. Antara keduanya tidak mempunyai kesamaan yang signifikan, tetapi berangkat dari himpunan tak kosong yang mempunyai operasi biner dengan pendefisian tertentu. Dalam Aljabar p-semisimple tidak mengenal elemen identitas tetapi didalam grup mengenal elemen identitas.

Telah dibahas pada bab sebelumnya bahwa Aljabar p-semisimple terbentuk atas beberapa aksioma dari Aljabar BCI yaitu:

Suatu Struktur Aljabar $(X,*,0)$ kemudian diteliti sifat-sifat yang ada pada struktur tersebut, maka diperoleh:

$\forall a, b, c \in X$, berlaku

1. $\big((a*c)*(a*b)\big)*(b*c)=0,$
2. $\big(a*(a*b)\big)*b=0,$
3. $a*a=0,$
4. $a*b=0=b*a \rightarrow a=b$
5. Jika $M=\{x \in X: 0*x=0\}$, maka $M=\{0\}$

Dalam konteks Islam pun juga demikian, dilihat dari amalan serta jenis ilmu yang dipelajari dalam *tasawuf* ada dua macam hal yang disebut ilmu lahir dan ilmu batin yang terdiri dari empat kelompok yaitu:

1. Syari'ah
2. Tharikah
3. Haqiqah
4. Ma'rifah (Solihin & Rosyid, 2005:166).

pertama, syari'ah yaitu amalan lahir yang penting dalam agama dan biasa dikenal dengan rukun Islam dan segala hal yang berhubungan dengannya. Alquran bersumber dari Alqur'an dan As-sunnah.

Kedua, thariqah yaitu tata cara yang telah digariskan dalam agama dan dilakukan hanya karena penghambaan diri kepada diri kepada Allah dan karena ingin berjumpa dengan-Nya.

Ketiga, haqiqah yang bisa idartikan sebagai aspek batiniah. Hakikat merupakan rahasia yang paling dalam dari segala amal, inti dari syari'ah dan akhir dari perjalanan yang ditempuh oleh seoranh sufi.

Keempat, ma'rifah yaitu pengalaman, pemahaman dan penghayatan yang mendalam tentang Tuhan melalui hati sanubari yang sedemikian lengkap dan luas, sehingga jiwa seorang sufi menyatu dengan Tuhan.

Tujuan mempelajari ilmu tasawuf adalah menambah keilmuan tentang agama Islam lebih mendalam, karena setiap manusia diwajibkan selalu menuntut ilmu sebanyak-banyaknya seperti firman Allah dalam surat Ali-Imran ayat 190 dibawah ini:

إِنَّ فِي خَلْقِ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضِ وَٱخْتِلَٰفِ ٱلَّيْلِ وَٱلنَّهَارِ لَأَيَٰتٍ لِّأُو۟لِى ٱلْأَلْبَٰبِ

"Sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi, dan silih bergantinya malam dan siang terdapat tanda-tanda bagi orang-orang yang berakal"

Dalam skripsi ini penulis mengangkat pilar yang ke dua yaitu thariqah, karena banyak macam thariqah dimuka bumi ini tetapi dengan tujuan yang sama seperti :

1. Tharikat Naqsabandiyah dan Khalidiyah
2. Tharikat Qadiriyah
3. Tharikat Bektasyi

4. Tharikat Syadziliyah
5. Tharikat Rifa'iyah
6. Tharikat Tsamaniyah
7. Tharikat Khalwatiyah
8. Tharikat Al-Hadad (Solihin & Rosyid, 2005:243-253)

Dari beberapa tharikah tersebut masih banyak lagi thariqah-thariqah yang lain, semuanya mempunyai cara berdzikir yang berbeda-beda tetapi tetap bersumber dari Alquran dan Hadits dan juga tujuan tharikah-tharikah tersebut juga sama yaitu menuju pada ma'rifatullah.

Seperti halnya Aljabar p-semisimple, dari definisi telah dijelaskan terdapat himpunan tak kosong X yang mempunyai operasi biner " $*$ " dan mempunyai elemen khusus 0, dimisalkan X adalah himpunan manusia dan " $*$ " adalah hukum islam yang berdasarkan Alquran dan Hadits kemudian 0 adalah takwa dan ma'rifatullah. Pada aksioma Aljabar BCI maupun Aljabar p-semisimple setiap elemen yang dioperasikan dengan elemen yang lain dan mempunyai pola tertentu semua menghasilkan 0, maka itu berarti setiap manusia yang berdasarkan Alquran dan Hadits dengan cara mereka sendiri (masing-masing Tharikat) pada akhirnya mempunyai tujuan yang sama yaitu ma'rifatullah. Dalam Surat al-Ankabut ayat 69 berikut :

وَٱلَّذِينَ جَٰهَدُواْ فِينَا لَنَهۡدِيَنَّهُمۡ سُبُلَنَاۚ وَإِنَّ ٱللَّهَ لَمَعَ ٱلۡمُحۡسِنِينَ ٦٩

"Dan orang-orang yang berjihad untuk (mencari keridhaan) kami, benar- benar akan kami tunjukkan kepada mereka jalan-jalan kami. dan Sesungguhnya Allah benar-benar beserta orang-orang yang berbuat baik".

Dari ayat diatas dapat dijelaskan bahwa banyak bermacam-macam jalan dalam mencari ridho Allah agar lebih dekat dengan Allah. Sehingga dapat disimpulkan setiap anggota pada Aljabar p-semisimple jika dioperasikan sengan memenuhi empat aksioma Aljabar BCI akan menghasilkan 0.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Pembahasan dari skripsi menghasilkan sifat-sifat aljabar p-semismple diantaranya adalah sifat assosiatif, nilpotent maupun order. Begitu juga penulis membahas hubungan antara aljabar p-semisimple dengan grup abelian, sehingga dapat diperoleh kesimpulan sebagai berikut.

1. Jika $(X,*,0)$ adalah aljabar BCI yang bersifat assosiatif maka $(X,*,0)$ adalah *Aljabar p-semisimple*
2. Jika $(X,*,0)$ adalah *Aljabar p-semisimple* yang bersifat assosiatif maka $(X,*)$ adalah grup abelian.

4.2 Saran

Pada pembahasan ini penulis hanya fokus pada satu sifat p-semisimple yaitu sifat assosiatif, maka dari itu untuk penulis skripsi selanjutnya, penulis menyarankan supaya membahas sifat quasi assosiatif, p-semisimple part, ideal p-semisimple, homomorfisme, dan lain sebagainya. Sehingga menghasilkan teorema-teorema baru untuk memudahkan mempelajari struktur aljabar.

DAFTAR PUSTAKA

Akram M & Kim Hee Sik. 2007. *Forum matematika Internasional,* http://www.m-hikari.com/imf-password2007/9-12-2007/akramIMF9-12-2007-3.pdf. Diakses tanggal 06 November 2010.

Anjum M dan Aslam M. 2009. *A Note On f-Derivations Of BCI Algebras*. The Korean Mathematical Society. Volume 24 No.3 PP.321-331.

Asmaran. 2002. *Pengantar Studi Tasawuf.* Jakarta: PT. Rajagrafindo Persada.

Bae Jun Y, Long Xin X, dan Hwan Roh E. 1998. *A class of algebras Related To BCI Algebras And Semigroups*. Soochow journal of mathematics. Volume 24, No.4 PP.309-321.

Bhatti Shaban Ali. 1991. *Self-Maps And Categorical Aspects Of BCK or BCI Algebras.* Pakistan: University Multan

Ding Y dan Liu G. 2008. *Several Classes of BCI-algebra and Theirs Properties.* China : Qingdao University of science and Technology.

Hilal Ibrahim. 2002. *Tasawuf antara Agama dan Filsafat Sebuah Kritik Metodologis.* Bandung: Pustaka Hidayah.

Huang Y. S. 2006. *BCI Algebras*. China:Science Press.

Jun Y. B. & Xin. 1998. *On p-semisimple BCI Algebras And Pomonoids.* Soochow journal of mathematics. Volume 24, No.2 PP.131-140.

Kim Y. Hee. 2001.*Subtraction Algebras and BCK algebras.* Mathematica Bohemica.Seoul.No.1

Munir. 2009. *Matematika Diskrit*. Bandung: Penerbit Informatika

Rahman H. 2007. *Indahnya Matematika Dalam Al-qur'an*. Malang: UIN-Malang Press.

Raisinghania dan Aggarwal. 1980. Modern Algebra For N.A & M.Sc.Student Of All Indian Universities. Ram Nagar, New Dplhi: S. Chand & Company ltd.

Soebagio A, dan Sukirman. 1994. *Metode Pokok Struktur Aljabar*. Jakarta: Departemen Pendidikan dan Kebudayaan Direktorat Jenderal Pendidikan Dasar Menengah Proyek Peningkatan Mutu Guru SLTP Setara D-III

Solihin M. & Anwar Rosyid. 2005. *Akhlak Tasawuf Manusia, Etika dan Makna Hidup*. Bandung: Penerbit Nuansa.

Tiande, Lei, dan Changchang, Xi. 1985. *P-Radical in BCI-Aljebras*. Math. Japonica 30, No. 4, 511-517.

Zhan J. and Lin Liu Yong. 2005.*On f-Derivation Of BCI algebras*.International Journal of Mathematics and Mathematical Science 2005: 11 (2005) 1675-1684.

Lampiran 1. Bukti $(X,*,0)$ adalah Aljabar BCI dengan metode pengecekan satu persatu menggunakan tabel 2.7.

Akan di buktikan bahwa $(X,*,0)$ adalah Aljabar BCI dengan syarat memenuhi 4 aksioma aljabar BCI, sebagaimana berikut:

i. Akan ditunjukkan $\forall x, y, z \in X$, berlaku $((x * y) * (x * z)) * (z * y) = 0$

Untuk $x = 0, y = 0$ maka diperoleh

$((0 * 0) * (0 * 0)) * (0 * 0) = 0$

$((0 * 0) * (0 * a)) * (a * 0) = 0$

$((0 * 0) * (0 * b)) * (b * 0) = 0$

$((0 * 0) * (0 * c)) * (c * 0) = 0$

$((0 * 0) * (0 * d)) * (d * 0) = 0$

$((0 * 0) * (0 * e)) * (e * 0) = 0$

Untuk $x = 0, y = a$ maka diperoleh

$((0 * a) * (0 * 0)) * (0 * a) = 0$

$((0 * a) * (0 * a)) * (a * a) = 0$

$((0 * a) * (0 * b)) * (b * a) = 0$

$((0 * a) * (0 * c)) * (c * a) = 0$

$((0 * a) * (0 * d)) * (d * a) = 0$

$((0 * a) * (0 * e)) * (e * a) = 0$

Untuk $x = 0, y = b$ maka diperoleh

$((0 * b) * (0 * 0)) * (0 * b) = 0$

$((0 * b) * (0 * a)) * (a * b) = 0$

Untuk $x = a, y = 0$ maka diperoleh

$((a * 0) * (a * 0)) * (0 * 0) = 0$

$((a * 0) * (a * a)) * (a * 0) = 0$

$((a * 0) * (a * b)) * (b * 0) = 0$

$((a * 0) * (a * c)) * (c * 0) = 0$

$((a * 0) * (a * d)) * (d * 0) = 0$

$((a * 0) * (a * e)) * (e * 0) = 0$

Untuk $x = a, y = a$ maka diperoleh

$((a * a) * (a * 0)) * (0 * a) = 0$

$((a * a) * (a * a)) * (a * a) = 0$

$((a * a) * (a * b)) * (b * a) = 0$

$((a * a) * (a * c)) * (c * a) = 0$

$((a * a) * (a * d)) * (d * a) = 0$

$((a * a) * (a * e)) * (e * a) = 0$

Untuk $x = a, y = b$ maka di peroleh

$((a * b) * (a * 0)) * (0 * b) = 0$

$((a * b) * (a * a)) * (a * b) = 0$

$((0 * b) * (0 * b)) * (b * b) = 0$

$((0 * b) * (0 * c)) * (c * b) = 0$

$((0 * b) * (0 * d)) * (d * b) = 0$

$((0 * b) * (0 * e)) * (e * b) = 0$

Untuk $x = 0, y = c$ maka diperoleh

$((0 * c) * (0 * 0)) * (0 * c) = 0$

$((0 * c) * (0 * a)) * (a * c) = 0$

$((0 * c) * (0 * b)) * (b * c) = 0$

$((0 * c) * (0 * c)) * (c * c) = 0$

$((0 * c) * (0 * d)) * (d * c) = 0$

$((0 * c) * (0 * e)) * (e * c) = 0$

Untuk $x = 0, y = d$ maka diperoleh

$((0 * d) * (0 * 0)) * (0 * d) = 0$

$((0 * d) * (0 * a)) * (a * d) = 0$

$((0 * d) * (0 * b)) * (b * d) = 0$

$((0 * d) * (0 * c)) * (c * d) = 0$

$((0 * d) * (0 * d)) * (d * d) = 0$

$((0 * d) * (0 * e)) * (e * d) = 0$

Untuk $x = 0, y = e$ maka diperoleh

$((0 * e) * (0 * 0)) * (0 * e) = 0$

$((0 * e) * (0 * a)) * (a * e) = 0$

$((0 * e) * (0 * b)) * (b * e) = 0$

$((a * b) * (a * b)) * (b * b) = 0$

$((a * b) * (a * c)) * (c * b) = 0$

$((a * b) * (a * d)) * (d * b) = 0$

$((a * b) * (a * e)) * (e * b) = 0$

Untuk $x = a, y = c$ maka diperoleh

$((a * c) * (a * 0)) * (0 * c) = 0$

$((a * c) * (a * a)) * (a * c) = 0$

$((a * c) * (a * b)) * (b * c) = 0$

$((a * c) * (a * c)) * (c * c) = 0$

$((a * c) * (a * d)) * (d * c) = 0$

$((a * c) * (a * e)) * (e * c) = 0$

Untuk $x = a, y = d$ maka diperoleh

$((a * d) * (a * 0)) * (0 * d) = 0$

$((a * d) * (a * a)) * (a * d) = 0$

$((a * d) * (a * b)) * (b * d) = 0$

$((a * d) * (a * c)) * (c * d) = 0$

$((a * d) * (a * d)) * (d * d) = 0$

$((a * d) * (a * e)) * (e * d) = 0$

Untuk $x = a, y = e$ maka diperoleh

$((a * e) * (a * 0)) * (0 * e) = 0$

$((a * e) * (a * a)) * (a * e) = 0$

$((a * e) * (a * b)) * (b * e) = 0$

$\left((0 * e) * (0 * c)\right) * (c * e) = 0$

$\left((0 * e) * (0 * d)\right) * (d * e) = 0$

$\left((0 * e) * (0 * e)\right) * (e * e) = 0$

Untuk $x = b, y = 0$ maka diperoleh

$\left((b * 0) * (b * 0)\right) * (0 * 0) = 0$

$\left((b * 0) * (b * a)\right) * (a * 0) = 0$

$\left((b * 0) * (b * b)\right) * (b * 0) = 0$

$\left((b * 0) * (b * c)\right) * (c * 0) = 0$

$\left((b * 0) * (b * d)\right) * (d * 0) = 0$

$\left((b * 0) * (b * e)\right) * (e * 0) = 0$

Untuk $x = b, y = a$ maka diperoleh

$\left((b * a) * (b * 0)\right) * (0 * a) = 0$

$\left((b * a) * (b * a)\right) * (a * a) = 0$

$\left((b * a) * (b * b)\right) * (b * a) = 0$

$\left((b * a) * (b * c)\right) * (c * a) = 0$

$\left((b * a) * (b * d)\right) * (d * a) = 0$

$\left((b * a) * (b * e)\right) * (e * a) = 0$

Untuk $x = b, y = b$ maka diperoleh

$\left((b * b) * (b * 0)\right) * (0 * b) = 0$

$\left((a * e) * (a * c)\right) * (c * e) = 0$

$\left((a * e) * (a * d)\right) * (d * e) = 0$

$\left((a * e) * (a * e)\right) * (e * e) = 0$

Untuk $x = c, y = 0$ maka diperoleh

$\left((c * 0) * (c * 0)\right) * (0 * 0) = 0$

$\left((c * 0) * (c * a)\right) * (a * 0) = 0$

$\left((c * 0) * (c * b)\right) * (b * 0) = 0$

$\left((c * 0) * (c * c)\right) * (c * 0) = 0$

$\left((c * 0) * (c * d)\right) * (d * 0) = 0$

$\left((c * 0) * (c * e)\right) * (e * 0) = 0$

Untuk $x = c, y = a$ maka diperoleh

$\left((c * a) * (c * 0)\right) * (0 * a) = 0$

$\left((c * a) * (c * a)\right) * (a * a) = 0$

$\left((c * a) * (c * b)\right) * (b * a) = 0$

$\left((c * a) * (c * c)\right) * (c * a) = 0$

$\left((c * a) * (c * d)\right) * (d * a) = 0$

$\left((c * a) * (c * e)\right) * (e * a) = 0$

Untuk $x = c, y = b$ maka diperoleh

$\left((c * b) * (c * 0)\right) * (0 * b) = 0$

$$((b*b)*(b*a))*(a*b)=0$$
$$((b*b)*(b*b))*(b*b)=0$$
$$((b*b)*(b*c))*(c*b)=0$$
$$((b*b)*(b*d))*(d*b)=0$$
$$((b*b)*(b*e))*(e*b)=0$$

Untuk $x=b, y=c$ maka diperoleh

$$((b*c)*(b*0))*(0*c)=0$$
$$((b*c)*(b*a))*(a*c)=0$$
$$((b*c)*(b*b))*(b*c)=0$$
$$((b*c)*(b*c))*(c*c)=0$$
$$((b*c)*(b*d))*(d*c)=0$$
$$((b*c)*(b*e))*(e*c)=0$$

Untuk $x=b, y=d$ maka diperoleh

$$((b*d)*(b*0))*(0*d)=0$$
$$((b*d)*(b*a))*(a*d)=0$$
$$((b*d)*(b*b))*(b*d)=0$$
$$((b*d)*(b*c))*(c*d)=0$$
$$((b*d)*(b*d))*(d*d)=0$$
$$((b*d)*(b*e))*(e*d)=0$$

Untuk $x=b, y=e$ maka diperoleh

$$((b*e)*(b*0))*(0*e)=0$$

$$((c*b)*(c*a))*(a*b)=0$$
$$((c*b)*(c*b))*(b*b)=0$$
$$((c*b)*(c*c))*(c*b)=0$$
$$((c*b)*(c*d))*(d*b)=0$$
$$((c*b)*(c*e))*(e*b)=0$$

Untuk $x=c, y=c$ maka diperoleh

$$((c*c)*(c*0))*(0*c)=0$$
$$((c*c)*(c*a))*(a*c)=0$$
$$((c*c)*(c*b))*(b*c)=0$$
$$((c*c)*(c*c))*(c*c)=0$$
$$((c*c)*(c*d))*(d*c)=0$$
$$((c*c)*(c*e))*(e*c)=0$$

Untuk $x=c, y=d$ maka diperoleh

$$((c*d)*(c*0))*(0*d)=0$$
$$((c*d)*(c*a))*(a*d)=0$$
$$((c*d)*(c*b))*(b*d)=0$$
$$((c*d)*(c*c))*(c*d)=0$$
$$((c*d)*(c*d))*(d*d)=0$$
$$((c*d)*(c*e))*(e*d)=0$$

Untuk $x=c, y=e$ maka diperoleh

$$((c*e)*(c*0))*(0*e)=0$$

$\left((b*e)*(b*a)\right)*(a*e)=0$

$\left((b*e)*(b*b)\right)*(b*e)=0$

$\left((b*e)*(b*c)\right)*(c*e)=0$

$\left((b*e)*(b*d)\right)*(d*e)=0$

$\left((b*e)*(b*e)\right)*(e*e)=0$

$\left((c*e)*(c*a)\right)*(a*e)=0$

$\left((c*e)*(c*b)\right)*(b*e)=0$

$\left((c*e)*(c*c)\right)*(c*e)=0$

$\left((c*e)*(c*d)\right)*(d*e)=0$

$\left((c*e)*(c*e)\right)*(e*e)=0$

Untuk $x=d, y=0$ maka diperoleh

$\left((d*0)*(d*0)\right)*(0*0)=0$

$\left((d*0)*(d*a)\right)*(a*0)=0$

$\left((d*0)*(d*b)\right)*(b*0)=0$

$\left((d*0)*(d*c)\right)*(c*0)=0$

$\left((d*0)*(d*d)\right)*(d*0)=0$

$\left((d*0)*(d*e)\right)*(e*0)=0$

Untuk $x=e, y=0$ maka diperoleh

$\left((e*0)*(e*0)\right)*(0*0)=0$

$\left((e*0)*(e*a)\right)*(a*0)=0$

$\left((e*0)*(e*b)\right)*(b*0)=0$

$\left((e*0)*(e*c)\right)*(c*0)=0$

$\left((e*0)*(e*d)\right)*(d*0)=0$

$\left((e*0)*(e*e)\right)*(e*0)=0$

Untuk $x=d, y=a$ maka diperoleh

$\left((d*a)*(d*0)\right)*(0*a)=0$

$\left((d*a)*(d*a)\right)*(a*a)=0$

$\left((d*a)*(d*b)\right)*(b*a)=0$

$\left((d*a)*(d*c)\right)*(c*a)=0$

$\left((d*a)*(d*d)\right)*(d*a)=0$

$\left((d*a)*(d*e)\right)*(e*a)=0$

Untuk $x=e, y=a$ maka diperoleh

$\left((e*a)*(e*0)\right)*(0*a)=0$

$\left((e*a)*(e*a)\right)*(a*a)=0$

$\left((e*a)*(e*b)\right)*(b*a)=0$

$\left((e*a)*(e*c)\right)*(c*a)=0$

$\left((e*a)*(e*d)\right)*(d*a)=0$

$\left((e*a)*(e*e)\right)*(e*a)=0$

Untuk $x=d, y=b$ maka diperoleh

$\left((d*b)*(d*0)\right)*(0*b)=0$

Untuk $x=e, y=b$ maka diperoleh

$\left((e*b)*(e*0)\right)*(0*b)=0$

$((d*b)*(d*a))*(a*b)=0$

$((d*b)*(d*b))*(b*b)=0$

$((d*b)*(d*c))*(c*b)=0$

$((d*b)*(d*d))*(d*b)=0$

$((d*b)*(d*e))*(e*b)=0$

Untuk $x=d, y=c$ maka diperoleh

$((d*c)*(d*0))*(0*c)=0$

$((d*c)*(d*a))*(a*c)=0$

$((d*c)*(d*b))*(b*c)=0$

$((d*c)*(d*c))*(c*c)=0$

$((d*c)*(d*d))*(d*c)=0$

$((d*c)*(d*e))*(e*c)=0$

Untuk $x=d, y=d$ maka diperoleh

$((d*d)*(d*0))*(0*d)=0$

$((d*d)*(d*a))*(a*d)=0$

$((d*d)*(d*b))*(b*d)=0$

$((d*d)*(d*c))*(c*d)=0$

$((d*d)*(d*d))*(d*d)=0$

$((d*d)*(d*e))*(e*d)=0$

Untuk $x=d, y=e$ maka diperoleh

$((d*e)*(d*0))*(0*e)=0$

$((e*b)*(e*a))*(a*b)=0$

$((e*b)*(e*b))*(b*b)=0$

$((e*b)*(e*c))*(c*b)=0$

$((e*b)*(e*d))*(d*b)=0$

$((e*b)*(e*e))*(e*b)=0$

Untuk $x=e, y=c$ maka diperoleh

$((e*c)*(e*0))*(0*c)=0$

$((e*c)*(e*a))*(a*c)=0$

$((e*c)*(e*b))*(b*c)=0$

$((e*c)*(e*c))*(c*c)=0$

$((e*c)*(e*d))*(d*c)=0$

$((e*c)*(e*e))*(e*c)=0$

Untuk $x=e, y=d$ maka diperoleh

$((e*d)*(e*0))*(0*d)=0$

$((e*d)*(e*a))*(a*d)=0$

$((e*d)*(e*b))*(b*d)=0$

$((e*d)*(e*c))*(c*d)=0$

$((e*d)*(e*d))*(d*d)=0$

$((e*d)*(e*e))*(e*d)=0$

Untuk $x=e, y=e$ maka diperoleh

$((e*e)*(e*0))*(0*e)=0$

$((d*e)*(d*a))*(a*e)=0$	$((e*e)*(e*a))*(a*e)=0$
$((d*e)*(d*b))*(b*e)=0$	$((e*e)*(e*b))*(b*e)=0$
$((d*e)*(d*c))*(c*e)=0$	$((e*e)*(e*c))*(c*e)=0$
$((d*e)*(d*d))*(d*e)=0$	$((e*e)*(e*d))*(d*e)=0$
$((d*e)*(d*e))*(e*e)=0$	$((e*e)*(e*e))*(e*e)=0$

Jadi terbukti bahwa $\forall x,y,z \in X,$ berlaku $((x*y)*(x*z))*(z*y)=0$

ii. Akan ditunjukkan $\forall x,y \in X,$ berlaku $(x*(x*y))*y=0$

Untuk $x=0, y=0$ maka diperoleh $(0*(0*0))*0=0$

Untuk $x=0, y=a$ maka diperoleh $(0*(0*a))*a=0$

Untuk $x=0, y=b$ maka diperoleh $(0*(0*b))*b=0$

Untuk $x=0, y=c$ maka diperoleh $(0*(0*c))*c=0$

Untuk $x=0, y=d$ maka diperoleh $(0*(0*d))*d=0$

Untuk $x=0, y=e$ maka diperoleh $(0*(0*e))*e=0$

Untuk $x=a, y=0$ maka diperoleh $(a*(a*0))*0=0$

Untuk $x=a, y=a$ maka diperoleh $(a*(a*a))*a=0$

Untuk $x=a, y=b$ maka diperoleh $(a*(a*b))*b=0$

Untuk $x=a, y=c$ maka diperoleh $(a*(a*c))*c=0$

Untuk $x=a, y=d$ maka diperoleh $(a*(a*d))*d=0$

Untuk $x=a, y=e$ maka diperoleh $(a*(a*e))*e=0$

Untuk $x=b, y=0$ maka diperoleh $(b*(b*0))*0=0$

Untuk $x=b, y=a$ maka diperoleh $(b*(b*a))*a=0$

Untuk $x=b, y=b$ maka diperoleh $(b*(b*b))*b=0$

Untuk $x=b, y=c$ maka diperoleh $(b*(b*c))*c=0$

Untuk $x=b, y=d$ maka diperoleh $(b*(b*d))*d=0$

Untuk $x = b, y = e$ maka diperoleh $(b * (b * e)) * e = 0$

Untuk $x = c, y = 0$ maka diperoleh $(c * (c * 0)) * 0 = 0$

Untuk $x = c, y = a$ maka diperoleh $(c * (c * a)) * a = 0$

Untuk $x = c, y = b$ maka diperoleh $(c * (c * b)) * b = 0$

Untuk $x = c, y = c$ maka diperoleh $\left(c * (c * c)\right) * c = 0$

Untuk $x = c, y = d$ maka diperoleh $\left(c * (c * d)\right) * d = 0$

Untuk $x = c, y = e$ maka diperoleh $(c * (c * e)) * e = 0$

Untuk $x = d, y = 0$ maka diperoleh $(d * (d * 0)) * 0 = 0$

Untuk $x = d, y = a$ maka diperoleh $(d * (d * a)) * a = 0$

Untuk $x = d, y = b$ maka diperoleh $(d * (d * b)) * b = 0$

Untuk $x = d, y = c$ maka diperoleh $\left(d * (d * c)\right) * c = 0$

Untuk $x = d, y = d$ maka diperoleh $\left(d * (d * d)\right) * d = 0$

Untuk $x = d, y = e$ maka diperoleh $(d * (d * e)) * e = 0$

Untuk $x = e, y = 0$ maka diperoleh $(e * (e * 0)) * 0 = 0$

Untuk $x = e, y = a$ maka diperoleh $(e * (e * a)) * a = 0$

Untuk $x = e, y = b$ maka diperoleh $(e * (e * b)) * b = 0$

Untuk $x = e, y = c$ maka diperoleh $\left(e * (e * c)\right) * c = 0$

Untuk $x = e, y = d$ maka diperoleh $\left(e * (e * d)\right) * d = 0$

Untuk $x = e, y = e$ maka diperoleh $(e * (e * e)) * e = 0$

Jadi terbukti bahwa $\forall x, y \in X,$ berlaku $(x * (x * y)) * y = 0$

iii. Dari tabel jelas bahwa $\forall x \in X,$ berlaku $x * x = 0$

iv. Dari tabel, jelas bahwa $\forall x \in X,$ jika $x * x = 0,$ maka $x = x$

Sehingga terbukti bahwa $(X, * ,0)$ adalah aljabar BCI

Lampiran 2. Bukti $(X,*,0)$ adalah Aljabar BCI dengan metode pengecekan satu persatu menggunakan tabel 2.9.

Akan di buktikan bahwa $(X,*,0)$ adalah Aljabar BCI dengan syarat memenuhi empat aksioma aljabar BCI, sebagaimana berikut:

i. Akan ditunjukkan $\forall x, y, z \in X$, berlaku $\big((x*y)*(x*z)\big)*(z*y) = 0$

Untuk $x = 0, y = 0$ maka diperoleh

$\big((0*0)*(0*0)\big)*(0*0) = 0$

$\big((0*0)*(0*a)\big)*(a*0) = 0$

$\big((0*0)*(0*b)\big)*(b*0) = 0$

$\big((0*0)*(0*c)\big)*(c*0) = 0$

$\big((0*0)*(0*d)\big)*(d*0) = 0$

Untuk $x = 0, y = a$ maka diperoleh

$\big((0*a)*(0*0)\big)*(0*a) = 0$

$\big((0*a)*(0*a)\big)*(a*a) = 0$

$\big((0*a)*(0*b)\big)*(b*a) = 0$

$\big((0*a)*(0*c)\big)*(c*a) = 0$

$\big((0*a)*(0*d)\big)*(d*a) = 0$

Untuk $x = 0, y = b$ maka diperoleh

$\big((0*b)*(0*0)\big)*(0*b) = 0$

$\big((0*b)*(0*a)\big)*(a*b) = 0$

$\big((0*b)*(0*b)\big)*(b*b) = 0$

$\big((0*b)*(0*c)\big)*(c*b) = 0$

Untuk $x = a, y = 0$ maka diperoleh

$\big((a*0)*(a*0)\big)*(0*0) = 0$

$\big((a*0)*(a*a)\big)*(a*0) = 0$

$\big((a*0)*(a*b)\big)*(b*0) = 0$

$\big((a*0)*(a*c)\big)*(c*0) = 0$

$\big((a*0)*(a*d)\big)*(d*0) = 0$

Untuk $x = a, y = a$ maka diperoleh

$\big((a*a)*(a*0)\big)*(0*a) = 0$

$\big((a*a)*(a*a)\big)*(a*a) = 0$

$\big((a*a)*(a*b)\big)*(b*a) = 0$

$\big((a*a)*(a*c)\big)*(c*a) = 0$

$\big((a*a)*(a*d)\big)*(d*a) = 0$

Untuk $x = a, y = b$ maka di peroleh

$\big((a*b)*(a*0)\big)*(0*b) = 0$

$\big((a*b)*(a*a)\big)*(a*b) = 0$

$\big((a*b)*(a*b)\big)*(b*b) = 0$

$\big((a*b)*(a*c)\big)*(c*b) = 0$

$$\big((0 * b) * (0 * d)\big) * (d * b) = 0$$

Untuk $x = 0, y = c$ maka diperoleh

$$\big((0 * c) * (0 * 0)\big) * (0 * c) = 0$$
$$\big((0 * c) * (0 * a)\big) * (a * c) = 0$$
$$\big((0 * c) * (0 * b)\big) * (b * c) = 0$$
$$\big((0 * c) * (0 * c)\big) * (c * c) = 0$$
$$\big((0 * c) * (0 * d)\big) * (d * c) = 0$$

Untuk $x = 0, y = d$ maka diperoleh

$$\big((0 * d) * (0 * 0)\big) * (0 * d) = 0$$
$$\big((0 * d) * (0 * a)\big) * (a * d) = 0$$
$$\big((0 * d) * (0 * b)\big) * (b * d) = 0$$
$$\big((0 * d) * (0 * c)\big) * (c * d) = 0$$
$$\big((0 * d) * (0 * d)\big) * (d * d) = 0$$

Untuk $x = b, y = 0$ maka diperoleh

$$\big((b * 0) * (b * 0)\big) * (0 * 0) = 0$$
$$\big((b * 0) * (b * a)\big) * (a * 0) = 0$$
$$\big((b * 0) * (b * b)\big) * (b * 0) = 0$$
$$\big((b * 0) * (b * c)\big) * (c * 0) = 0$$
$$\big((b * 0) * (b * d)\big) * (d * 0) = 0$$

Untuk $x = b, y = a$ maka diperoleh

$$\big((b * a) * (b * 0)\big) * (0 * a) = 0$$

$$\big((a * b) * (a * d)\big) * (d * b) = 0$$

Untuk $x = a, y = c$ maka diperoleh

$$\big((a * c) * (a * 0)\big) * (0 * c) = 0$$
$$\big((a * c) * (a * a)\big) * (a * c) = 0$$
$$\big((a * c) * (a * b)\big) * (b * c) = 0$$
$$\big((a * c) * (a * c)\big) * (c * c) = 0$$
$$\big((a * c) * (a * d)\big) * (d * c) = 0$$

Untuk $x = a, y = d$ maka diperoleh

$$\big((a * d) * (a * 0)\big) * (0 * d) = 0$$
$$\big((a * d) * (a * a)\big) * (a * d) = 0$$
$$\big((a * d) * (a * b)\big) * (b * d) = 0$$
$$\big((a * d) * (a * c)\big) * (c * d) = 0$$
$$\big((a * d) * (a * d)\big) * (d * d) = 0$$

Untuk $x = c, y = 0$ maka diperoleh

$$\big((c * 0) * (c * 0)\big) * (0 * 0) = 0$$
$$\big((c * 0) * (c * a)\big) * (a * 0) = 0$$
$$\big((c * 0) * (c * b)\big) * (b * 0) = 0$$
$$\big((c * 0) * (c * c)\big) * (c * 0) = 0$$
$$\big((c * 0) * (c * d)\big) * (d * 0) = 0$$

Untuk $x = c, y = a$ maka diperoleh

$$\big((c * a) * (c * 0)\big) * (0 * a) = 0$$

$((b*a)*(b*a))*(a*a)=0$

$((b*a)*(b*b))*(b*a)=0$

$((b*a)*(b*c))*(c*a)=0$

$((b*a)*(b*d))*(d*a)=0$

Untuk $x=b, y=b$ maka diperoleh

$((b*b)*(b*0))*(0*b)=0$

$((b*b)*(b*a))*(a*b)=0$

$((b*b)*(b*b))*(b*b)=0$

$((b*b)*(b*c))*(c*b)=0$

$((b*b)*(b*d))*(d*b)=0$

Untuk $x=b, y=c$ maka diperoleh

$((b*c)*(b*0))*(0*c)=0$

$((b*c)*(b*a))*(a*c)=0$

$((b*c)*(b*b))*(b*c)=0$

$((b*c)*(b*c))*(c*c)=0$

$((b*c)*(b*d))*(d*c)=0$

Untuk $x=b, y=d$ maka diperoleh

$((b*d)*(b*0))*(0*d)=0$

$((b*d)*(b*a))*(a*d)=0$

$((b*d)*(b*b))*(b*d)=0$

$((b*d)*(b*c))*(c*d)=0$

$((c*a)*(c*a))*(a*a)=0$

$((c*a)*(c*b))*(b*a)=0$

$((c*a)*(c*c))*(c*a)=0$

$((c*a)*(c*d))*(d*a)=0$

Untuk $x=c, y=b$ maka diperoleh

$((c*b)*(c*0))*(0*b)=0$

$((c*b)*(c*a))*(a*b)=0$

$((c*b)*(c*b))*(b*b)=0$

$((c*b)*(c*c))*(c*b)=0$

$((c*b)*(c*d))*(d*b)=0$

Untuk $x=c, y=c$ maka diperoleh

$((c*c)*(c*0))*(0*c)=0$

$((c*c)*(c*a))*(a*c)=0$

$((c*c)*(c*b))*(b*c)=0$

$((c*c)*(c*c))*(c*c)=0$

$((c*c)*(c*d))*(d*c)=0$

Untuk $x=c, y=d$ maka diperoleh

$((c*d)*(c*0))*(0*d)=0$

$((c*d)*(c*a))*(a*d)=0$

$((c*d)*(c*b))*(b*d)=0$

$((c*d)*(c*c))*(c*d)=0$

$((b*d)*(b*d))*(d*d)=0$

$((c*d)*(c*d))*(d*d)=0$

Untuk $x=d, y=0$ maka diperoleh

$((d*0)*(d*0))*(0*0)=0$

$((d*0)*(d*a))*(a*0)=0$

$((d*0)*(d*b))*(b*0)=0$

$((d*0)*(d*c))*(c*0)=0$

$((d*0)*(d*d))*(d*0)=0$

Untuk $x=d, y=c$ maka diperoleh

$((d*c)*(d*0))*(0*c)=0$

$((d*c)*(d*a))*(a*c)=0$

$((d*c)*(d*b))*(b*c)=0$

$((d*c)*(d*c))*(c*c)=0$

$((d*c)*(d*d))*(d*c)=0$

Untuk $x=d, y=a$ maka diperoleh

$((d*a)*(d*0))*(0*a)=0$

$((d*a)*(d*a))*(a*a)=0$

$((d*a)*(d*b))*(b*a)=0$

$((d*a)*(d*c))*(c*a)=0$

$((d*a)*(d*d))*(d*a)=0$

Untuk $x=d, y=d$ maka diperoleh

$((d*d)*(d*0))*(0*d)=0$

$((d*d)*(d*a))*(a*d)=0$

$((d*d)*(d*b))*(b*d)=0$

$((d*d)*(d*c))*(c*d)=0$

$((d*d)*(d*d))*(d*d)=0$

Untuk $x=d, y=b$ maka diperoleh

$((d*b)*(d*0))*(0*b)=0$

$((d*b)*(d*a))*(a*b)=0$

$((d*b)*(d*b))*(b*b)=0$

$((d*b)*(d*c))*(c*b)=0$

$((d*b)*(d*d))*(d*b)=0$

Jadi terbukti bahwa $\forall x,y,z \in X$, berlaku $((x*y)*(x*z))*(z*y)=0$

ii. Akan ditunjukkan $\forall x,y \in X$, berlaku $(x*(x*y))*y=0$

Untuk $x = 0, y = 0$ maka diperoleh $(0 * (0 * 0)) * 0 = 0$

Untuk $x = 0, y = a$ maka diperoleh $(0 * (0 * a)) * a = 0$

Untuk $x = 0, y = b$ maka diperoleh $(0 * (0 * b)) * b = 0$

Untuk $x = 0, y = c$ maka diperoleh $\big(0 * (0 * c)\big) * c = 0$

Untuk $x = 0, y = d$ maka diperoleh $\big(0 * (0 * d)\big) * d = 0$

Untuk $x = a, y = 0$ maka diperoleh $(a * (a * 0)) * 0 = 0$

Untuk $x = a, y = a$ maka diperoleh $(a * (a * a)) * a = 0$

Untuk $x = a, y = b$ maka diperoleh $(a * (a * b)) * b = 0$

Untuk $x = a, y = c$ maka diperoleh $\big(a * (a * c)\big) * c = 0$

Untuk $x = a, y = d$ maka diperoleh $\big(a * (a * d)\big) * d = 0$

Untuk $x = b, y = 0$ maka diperoleh $(b * (b * 0)) * 0 = 0$

Untuk $x = b, y = a$ maka diperoleh $(b * (b * a)) * a = 0$

Untuk $x = b, y = b$ maka diperoleh $(b * (b * b)) * b = 0$

Untuk $x = b, y = c$ maka diperoleh $\big(b * (b * c)\big) * c = 0$

Untuk $x = b, y = d$ maka diperoleh $\big(b * (b * d)\big) * d = 0$

Untuk $x = c, y = 0$ maka diperoleh $(c * (c * 0)) * 0 = 0$

Untuk $x = c, y = a$ maka diperoleh $(c * (c * a)) * a = 0$

Untuk $x = c, y = b$ maka diperoleh $(c * (c * b)) * b = 0$

Untuk $x = c, y = c$ maka diperoleh $\big(c * (c * c)\big) * c = 0$

Untuk $x = c, y = d$ maka diperoleh $\big(c * (c * d)\big) * d = 0$

Untuk $x = d, y = 0$ maka diperoleh $(d * (d * 0)) * 0 = 0$

Untuk $x = d, y = a$ maka diperoleh $(d * (d * a)) * a = 0$

Untuk $x = d, y = b$ maka diperoleh $(d * (d * b)) * b = 0$

Untuk $x = d, y = c$ maka diperoleh $\big(d * (d * c)\big) * c = 0$

Untuk $x = d, y = d$ maka diperoleh $\big(d * (d * d)\big) * d = 0$

Jadi terbukti bahwa $\forall x, y \in X,$ berlaku $(x * (x * y)) * y = 0$

iii. Dari tabel jelas bahwa $\forall x \in X,$ berlaku $x * x = 0$

iv. Dari tabel, jelas bahwa $\forall x \in X,$ jika $x * x = 0,$ maka $x = x$

Sehingga terbukti bahwa $(X, * ,0)$ adalah aljabar BCI

Lampiran 3. Bukti $(X,*,0)$ adalah Aljabar BCI dengan metode pengecekan satu persatu menggunakan tabel 2.9.

Akan di buktikan bahwa $(X,*,0)$ adalah Aljabar BCI dengan syarat memenuhi empat aksioma aljabar BCI, sebagaimana berikut:

i. Akan ditunjukkan $\forall x,y,z \in X,$ berlaku $\big((x*y)*(x*z)\big)*(z*y)=0$

Untuk $x=0, y=0$ maka diperoleh

$\big((0*0)*(0*0)\big)*(0*0)=0$

$\big((0*0)*(0*a)\big)*(a*0)=0$

$\big((0*0)*(0*b)\big)*(b*0)=0$

$\big((0*0)*(0*c)\big)*(c*0)=0$

Untuk $x=0, y=a$ maka diperoleh

$\big((0*a)*(0*0)\big)*(0*a)=0$

$\big((0*a)*(0*a)\big)*(a*a)=0$

$\big((0*a)*(0*b)\big)*(b*a)=0$

$\big((0*a)*(0*c)\big)*(c*a)=0$

Untuk $x=0, y=b$ maka diperoleh

$\big((0*b)*(0*0)\big)*(0*b)=0$

$\big((0*b)*(0*a)\big)*(a*b)=0$

$\big((0*b)*(0*b)\big)*(b*b)=0$

$\big((0*b)*(0*c)\big)*(c*b)=0$

Untuk $x=0, y=c$ maka diperoleh

$\big((0*c)*(0*0)\big)*(0*c)=0$

$\big((0*c)*(0*a)\big)*(a*c)=0$

$\big((0*c)*(0*b)\big)*(b*c)=0$

Untuk $x=a, y=0$ maka diperoleh

$\big((a*0)*(a*0)\big)*(0*0)=0$

$\big((a*0)*(a*a)\big)*(a*0)=0$

$\big((a*0)*(a*b)\big)*(b*0)=0$

$\big((a*0)*(a*c)\big)*(c*0)=0$

Untuk $x=a, y=a$ maka diperoleh

$\big((a*a)*(a*0)\big)*(0*a)=0$

$\big((a*a)*(a*a)\big)*(a*a)=0$

$\big((a*a)*(a*b)\big)*(b*a)=0$

$\big((a*a)*(a*c)\big)*(c*a)=0$

Untuk $x=a, y=b$ maka di peroleh

$\big((a*b)*(a*0)\big)*(0*b)=0$

$\big((a*b)*(a*a)\big)*(a*b)=0$

$\big((a*b)*(a*b)\big)*(b*b)=0$

$\big((a*b)*(a*c)\big)*(c*b)=0$

Untuk $x=a, y=c$ maka diperoleh

$\big((a*c)*(a*0)\big)*(0*c)=0$

$\big((a*c)*(a*a)\big)*(a*c)=0$

$\big((a*c)*(a*b)\big)*(b*c)=0$

$((0 * c) * (0 * c)) * (c * c) = 0$

$((a * c) * (a * c)) * (c * c) = 0$

Untuk $x = b, y = 0$ maka diperoleh

$((b * 0) * (b * 0)) * (0 * 0) = 0$

$((b * 0) * (b * a)) * (a * 0) = 0$

$((b * 0) * (b * b)) * (b * 0) = 0$

$((b * 0) * (b * c)) * (c * 0) = 0$

Untuk $x = c, y = 0$ maka diperoleh

$((c * 0) * (c * 0)) * (0 * 0) = 0$

$((c * 0) * (c * a)) * (a * 0) = 0$

$((c * 0) * (c * b)) * (b * 0) = 0$

$((c * 0) * (c * c)) * (c * 0) = 0$

Untuk $x = b, y = a$ maka diperoleh

$((b * a) * (b * 0)) * (0 * a) = 0$

$((b * a) * (b * a)) * (a * a) = 0$

$((b * a) * (b * b)) * (b * a) = 0$

$((b * a) * (b * c)) * (c * a) = 0$

Untuk $x = c, y = a$ maka diperoleh

$((c * a) * (c * 0)) * (0 * a) = 0$

$((c * a) * (c * a)) * (a * a) = 0$

$((c * a) * (c * b)) * (b * a) = 0$

$((c * a) * (c * c)) * (c * a) = 0$

Untuk $x = b, y = b$ maka diperoleh

$((b * b) * (b * 0)) * (0 * b) = 0$

$((b * b) * (b * a)) * (a * b) = 0$

$((b * b) * (b * b)) * (b * b) = 0$

$((b * b) * (b * c)) * (c * b) = 0$

Untuk $x = c, y = b$ maka diperoleh

$((c * b) * (c * 0)) * (0 * b) = 0$

$((c * b) * (c * a)) * (a * b) = 0$

$((c * b) * (c * b)) * (b * b) = 0$

$((c * b) * (c * c)) * (c * b) = 0$

Untuk $x = b, y = c$ maka diperoleh	Untuk $x = c, y = c$ maka diperoleh
$((b * c) * (b * 0)) * (0 * c) = 0$	$((c * c) * (c * 0)) * (0 * c) = 0$
$((b * c) * (b * a)) * (a * c) = 0$	$((c * c) * (c * a)) * (a * c) = 0$
$((b * c) * (b * b)) * (b * c) = 0$	$((c * c) * (c * b)) * (b * c) = 0$
$((b * c) * (b * c)) * (c * c) = 0$	$((c * c) * (c * c)) * (c * c) = 0$

Jadi terbukti bahwa $\forall x, y, z \in X$, berlaku $((x * y) * (x * z)) * (z * y) = 0$

ii. Akan ditunjukkan $\forall x, y \in X$, berlaku $(x * (x * y)) * y = 0$

Untuk $x = 0, y = 0$ maka diperoleh $(0 * (0 * 0)) * 0 = 0$

Untuk $x = 0, y = a$ maka diperoleh $(0 * (0 * a)) * a = 0$

Untuk $x = 0, y = b$ maka diperoleh $(0 * (0 * b)) * b = 0$

Untuk $x = 0, y = c$ maka diperoleh $(0 * (0 * c)) * c = 0$

Untuk $x = a, y = 0$ maka diperoleh $(a * (a * 0)) * 0 = 0$

Untuk $x = a, y = a$ maka diperoleh $(a * (a * a)) * a = 0$

Untuk $x = a, y = b$ maka diperoleh $(a * (a * b)) * b = 0$

Untuk $x = a, y = c$ maka diperoleh $(a * (a * c)) * c = 0$

Untuk $x = b, y = 0$ maka diperoleh $(b * (b * 0)) * 0 = 0$

Untuk $x = b, y = a$ maka diperoleh $(b * (b * a)) * a = 0$

Untuk $x = b, y = b$ maka diperoleh $(b * (b * b)) * b = 0$

Untuk $x = b, y = c$ maka diperoleh $(b * (b * c)) * c = 0$

Untuk $x = c, y = 0$ maka diperoleh $(c * (c * 0)) * 0 = 0$

Untuk $x = c, y = a$ maka diperoleh $(c * (c * a)) * a = 0$

Untuk $x = c, y = b$ maka diperoleh $(c * (c * b)) * b = 0$

Untuk $x = c, y = c$ maka diperoleh $(c * (c * c)) * c = 0$

Jadi terbukti bahwa $\forall x, y \in X$, berlaku $(x * (x * y)) * y = 0$

iii. Dari tabel jelas bahwa $\forall x \in X$, berlaku $x * x = 0$

iv. Dari tabel, jelas bahwa $\forall x \in X$, jika $x * x = 0$, maka $x = x$

Sehingga terbukti bahwa $(X, * ,0)$ adalah aljabar BCI

Lampiran 4. Bukti $(X,*,0)$ adalah Aljabar BCI dengan metode pengecekan satu persatu menggunakan tabel 3.2.

Akan di buktikan bahwa $(X,*,0)$ adalah Aljabar BCI dengan syarat memenuhi empat aksioma aljabar BCI, sebagaimana berikut:

i. Akan ditunjukkan $\forall x,y,z \in X,$ berlaku $\big((x*y)*(x*z)\big)*(z*y)=0$

Untuk $x=0, y=0$ maka diperoleh

$\big((0*0)*(0*0)\big)*(0*0)=0$

$\big((0*0)*(0*a)\big)*(a*0)=0$

$\big((0*0)*(0*b)\big)*(b*0)=0$

$\big((0*0)*(0*c)\big)*(c*0)=0$

Untuk $x=0, y=a$ maka diperoleh

$\big((0*a)*(0*0)\big)*(0*a)=0$

$\big((0*a)*(0*a)\big)*(a*a)=0$

$\big((0*a)*(0*b)\big)*(b*a)=0$

$\big((0*a)*(0*c)\big)*(c*a)=0$

Untuk $x=0, y=b$ maka diperoleh

$\big((0*b)*(0*0)\big)*(0*b)=0$

$\big((0*b)*(0*a)\big)*(a*b)=0$

$\big((0*b)*(0*b)\big)*(b*b)=0$

$\big((0*b)*(0*c)\big)*(c*b)=0$

Untuk $x=0, y=c$ maka diperoleh

$\big((0*c)*(0*0)\big)*(0*c)=0$

Untuk $x=a, y=0$ maka diperoleh

$\big((a*0)*(a*0)\big)*(0*0)=0$

$\big((a*0)*(a*a)\big)*(a*0)=0$

$\big((a*0)*(a*b)\big)*(b*0)=0$

$\big((a*0)*(a*c)\big)*(c*0)=0$

Untuk $x=a, y=a$ maka diperoleh

$\big((a*a)*(a*0)\big)*(0*a)=0$

$\big((a*a)*(a*a)\big)*(a*a)=0$

$\big((a*a)*(a*b)\big)*(b*a)=0$

$\big((a*a)*(a*c)\big)*(c*a)=0$

Untuk $x=a, y=b$ maka di peroleh

$\big((a*b)*(a*0)\big)*(0*b)=0$

$\big((a*b)*(a*a)\big)*(a*b)=0$

$\big((a*b)*(a*b)\big)*(b*b)=0$

$\big((a*b)*(a*c)\big)*(c*b)=0$

Untuk $x=a, y=c$ maka diperoleh

$\big((a*c)*(a*0)\big)*(0*c)=0$

$((0 * c) * (0 * a)) * (a * c) = 0$

$((0 * c) * (0 * b)) * (b * c) = 0$

$((0 * c) * (0 * c)) * (c * c) = 0$

$((a * c) * (a * a)) * (a * c) = 0$

$((a * c) * (a * b)) * (b * c) = 0$

$((a * c) * (a * c)) * (c * c) = 0$

Untuk $x = b, y = 0$ maka diperoleh

$((b * 0) * (b * 0)) * (0 * 0) = 0$

$((b * 0) * (b * a)) * (a * 0) = 0$

$((b * 0) * (b * b)) * (b * 0) = 0$

$((b * 0) * (b * c)) * (c * 0) = 0$

Untuk $x = c, y = 0$ maka diperoleh

$((c * 0) * (c * 0)) * (0 * 0) = 0$

$((c * 0) * (c * a)) * (a * 0) = 0$

$((c * 0) * (c * b)) * (b * 0) = 0$

$((c * 0) * (c * c)) * (c * 0) = 0$

Untuk $x = b, y = a$ maka diperoleh

$((b * a) * (b * 0)) * (0 * a) = 0$

$((b * a) * (b * a)) * (a * a) = 0$

$((b * a) * (b * b)) * (b * a) = 0$

$((b * a) * (b * c)) * (c * a) = 0$

Untuk $x = c, y = a$ maka diperoleh

$((c * a) * (c * 0)) * (0 * a) = 0$

$((c * a) * (c * a)) * (a * a) = 0$

$((c * a) * (c * b)) * (b * a) = 0$

$((c * a) * (c * c)) * (c * a) = 0$

Untuk $x = b, y = b$ maka diperoleh

$((b * b) * (b * 0)) * (0 * b) = 0$

$((b * b) * (b * a)) * (a * b) = 0$

$((b * b) * (b * b)) * (b * b) = 0$

$((b * b) * (b * c)) * (c * b) = 0$

Untuk $x = c, y = b$ maka diperoleh

$((c * b) * (c * 0)) * (0 * b) = 0$

$((c * b) * (c * a)) * (a * b) = 0$

$((c * b) * (c * b)) * (b * b) = 0$

$((c * b) * (c * c)) * (c * b) = 0$

Untuk $x = b, y = c$ maka diperoleh	Untuk $x = c, y = c$ maka diperoleh
$\big((b * c) * (b * 0)\big) * (0 * c) = 0$	$\big((c * c) * (c * 0)\big) * (0 * c) = 0$
$\big((b * c) * (b * a)\big) * (a * c) = 0$	$\big((c * c) * (c * a)\big) * (a * c) = 0$
$\big((b * c) * (b * b)\big) * (b * c) = 0$	$\big((c * c) * (c * b)\big) * (b * c) = 0$
$\big((b * c) * (b * c)\big) * (c * c) = 0$	$\big((c * c) * (c * c)\big) * (c * c) = 0$

Jadi terbukti bahwa $\forall x, y, z \in X$, berlaku $\big((x * y) * (x * z)\big) * (z * y) = 0$

ii. Akan ditunjukkan $\forall x, y \in X$, berlaku $(x * (x * y)) * y = 0$

Untuk $x = 0, y = 0$ maka diperoleh $(0 * (0 * 0)) * 0 = 0$

Untuk $x = 0, y = a$ maka diperoleh $(0 * (0 * a)) * a = 0$

Untuk $x = 0, y = b$ maka diperoleh $(0 * (0 * b)) * b = 0$

Untuk $x = 0, y = c$ maka diperoleh $\big(0 * (0 * c)\big) * c = 0$

Untuk $x = a, y = 0$ maka diperoleh $(a * (a * 0)) * 0 = 0$

Untuk $x = a, y = a$ maka diperoleh $(a * (a * a)) * a = 0$

Untuk $x = a, y = b$ maka diperoleh $(a * (a * b)) * b = 0$

Untuk $x = a, y = c$ maka diperoleh $\big(a * (a * c)\big) * c = 0$

Untuk $x = b, y = 0$ maka diperoleh $(b * (b * 0)) * 0 = 0$

Untuk $x = b, y = a$ maka diperoleh $(b * (b * a)) * a = 0$

Untuk $x = b, y = b$ maka diperoleh $(b * (b * b)) * b = 0$

Untuk $x = b, y = c$ maka diperoleh $\big(b * (b * c)\big) * c = 0$

Untuk $x = c, y = 0$ maka diperoleh $(c * (c * 0)) * 0 = 0$

Untuk $x = c, y = a$ maka diperoleh $(c * (c * a)) * a = 0$

Untuk $x = c, y = b$ maka diperoleh $(c * (c * b)) * b = 0$

Untuk $x = c, y = c$ maka diperoleh $\big(c * (c * c)\big) * c = 0$

Jadi terbukti bahwa $\forall x, y \in X$, berlaku $(x * (x * y)) * y = 0$

iii. Dari tabel jelas bahwa $\forall x \in X$, berlaku $x * x = 0$

iv. Dari tabel, jelas bahwa $\forall x \in X$, jika $x * x = 0$, maka $x = x$

Sehingga terbukti bahwa $(X, * ,0)$ adalah aljabar BCI

Lampiran 5. Bukti $(X,*,0)$ adalah Aljabar BCI dengan metode pengecekan satu persatu menggunakan tabel 2.8.

Akan di buktikan bahwa $(X,*,0)$ adalah Aljabar BCI dengan syarat memenuhi empat aksioma aljabar BCI, sebagaimana berikut:

i. Akan ditunjukkan $\forall x, y, z \in X$, berlaku $\big((x*y)*(x*z)\big)*(z*y)=0$

Untuk $x = 0, y = 0$ maka diperoleh

$\big((0*0)*(0*0)\big)*(0*0)=0$

$\big((0*0)*(0*l)\big)*(l*0)=0$

$\big((0*0)*(0*m)\big)*(m*0)=0$

$\big((0*0)*(0*n)\big)*(n*0)=0$

$\big((0*0)*(0*p)\big)*(p*0)=0$

$\big((0*0)*(0*q)\big)*(q*0)=0$

Untuk $x = 0, y = l$ maka diperoleh

$\big((0*l)*(0*0)\big)*(0*l)=0$

$\big((0*l)*(0*l)\big)*(l*l)=0$

$\big((0*l)*(0*m)\big)*(m*l)=0$

$\big((0*l)*(0*n)\big)*(n*l)=0$

$\big((0*l)*(0*p)\big)*(p*l)=0$

$\big((0*l)*(0*q)\big)*(q*l)=0$

Untuk $x = 0, y = m$ maka diperoleh

$\big((0*m)*(0*0)\big)*(0*m)=0$

$\big((0*m)*(0*l)\big)*(l*m)=0$

$\big((0*m)*(0*m)\big)*(m*m)=0$

$\big((0*m)*(0*n)\big)*(n*m)=0$

$\big((0*m)*(0*p)\big)*(p*m)=0$

$\big((0*m)*(0*q)\big)*(q*m)=0$

Untuk $x = 0, y = n$ maka diperoleh

$\big((0*n)*(0*0)\big)*(0*n)=0$

$\big((0*n)*(0*l)\big)*(l*n)=0$

$\big((0*n)*(0*m)\big)*(m*n)=0$

$\big((0*n)*(0*n)\big)*(n*n)=0$

$\big((0*n)*(0*p)\big)*(p*n)=0$

$\big((0*n)*(0*q)\big)*(q*n)=0$

Untuk $x = 0, y = p$ maka diperoleh

$\big((0*p)*(0*0)\big)*(0*p)=0$

Untuk $x = 0, y = q$ maka diperoleh

$\big((0*q)*(0*0)\big)*(0*q)=0$

$((0 * p) * (0 * l)) * (l * p) = 0$

$((0 * p) * (0 * m)) * (m * p) = 0$

$((0 * p) * (0 * n)) * (n * p) = 0$

$((0 * p) * (0 * p)) * (p * p) = 0$

$((0 * p) * (0 * q)) * (q * p) = 0$

$((0 * q) * (0 * l)) * (l * q) = 0$

$((0 * q) * (0 * m)) * (m * q) = 0$

$((0 * q) * (0 * n)) * (n * q) = 0$

$((0 * q) * (0 * p)) * (p * q) = 0$

$((0 * q) * (0 * q)) * (q * q) = 0$

Untuk $x = l, y = 0$ maka diperoleh

$((l * 0) * (l * 0)) * (0 * 0) = 0$

$((l * 0) * (l * l)) * (l * 0) = 0$

$((l * 0) * (l * m)) * (m * 0) = 0$

$((l * 0) * (l * n)) * (n * 0) = 0$

$((l * 0) * (l * p)) * (p * 0) = 0$

$((l * 0) * (l * q)) * (q * 0) = 0$

Untuk $x = l, y = l$ maka diperoleh

$((l * l) * (l * 0)) * (0 * l) = 0$

$((l * l) * (l * l)) * (l * l) = 0$

$((l * l) * (l * m)) * (m * l) = 0$

$((l * l) * (l * n)) * (n * l) = 0$

$((l * l) * (l * p)) * (p * l) = 0$

$((l * l) * (l * q)) * (q * l) = 0$

Untuk $x = l, y = m$ maka diperoleh

$((l * m) * (l * 0)) * (0 * m) = 0$

$((l * m) * (l * l)) * (l * m) = 0$

$((l * m) * (l * m)) * (m * m) = 0$

$((l * m) * (l * n)) * (n * m) = 0$

$((l * m) * (l * p)) * (p * m) = 0$

$((l * m) * (l * q)) * (q * m) = 0$

Untuk $x = l, y = n$ maka diperoleh

$((l * n) * (l * 0)) * (0 * n) = 0$

$((l * n) * (l * l)) * (l * n) = 0$

$((l * n) * (l * m)) * (m * n) = 0$

$((l * n) * (l * n)) * (n * n) = 0$

$((l * n) * (l * p)) * (p * n) = 0$

$((l * n) * (l * q)) * (q * n) = 0$

Untuk $x = l, y = p$ maka diperoleh

$((l * p) * (l * 0)) * (0 * p) = 0$

Untuk $x = l, y = q$ maka diperoleh

$((l * q) * (l * 0)) * (0 * q) = 0$

$\big((l*p)*(l*l)\big)*(l*p)=0$

$\big((l*p)*(l*m)\big)*(m*p)=0$

$\big((l*p)*(l*n)\big)*(n*p)=0$

$\big((l*p)*(l*p)\big)*(p*p)=0$

$\big((l*p)*(l*q)\big)*(q*p)=0$

Untuk $x=m, y=0$ maka diperoleh

$\big((m*0)*(m*0)\big)*(0*0)=0$

$\big((m*0)*(m*l)\big)*(l*0)=0$

$\big((m*0)*(m*m)\big)*(m*0)=0$

$\big((m*0)*(m*n)\big)*(n*0)=0$

$\big((m*0)*(m*p)\big)*(p*0)=0$

$\big((m*0)*(m*q)\big)*(q*0)=0$

Untuk $x=m, y=m$ maka :

$\big((m*m)*(m*0)\big)*(0*m)=0$

$\big((m*m)*(m*l)\big)*(l*m)=0$

$\big((m*m)*(m*m)\big)*(m*m)=0$

$\big((m*m)*(m*n)\big)*(n*m)=0$

$\big((m*m)*(m*p)\big)*(p*m)=0$

$\big((m*m)*(m*q)\big)*(q*m)=0$

Untuk $x=m, y=p$ maka diperoleh

$\big((m*p)*(m*0)\big)*(0*p)=0$

$\big((m*p)*(m*l)\big)*(l*p)=0$

$\big((l*q)*(l*l)\big)*(l*q)=0$

$\big((l*q)*(l*m)\big)*(m*q)=0$

$\big((l*q)*(l*n)\big)*(n*q)=0$

$\big((l*q)*(l*p)\big)*(p*q)=0$

$\big((l*q)*(l*q)\big)*(q*q)=0$

Untuk $x=m, y=l$ maka diperoleh

$\big((m*l)*(m*0)\big)*(0*l)=0$

$\big((m*l)*(m*l)\big)*(l*l)=0$

$\big((m*l)*(m*m)\big)*(m*l)=0$

$\big((m*l)*(m*n)\big)*(n*l)=0$

$\big((m*l)*(m*p)\big)*(p*l)=0$

$\big((m*l)*(m*q)\big)*(q*l)=0$

Untuk $x=m, y=n$ maka :

$\big((m*n)*(m*0)\big)*(0*n)=0$

$\big((m*n)*(m*l)\big)*(l*n)=0$

$\big((m*n)*(m*m)\big)*(m*n)=0$

$\big((m*n)*(m*n)\big)*(n*n)=0$

$\big((m*n)*(m*p)\big)*(p*n)=0$

$\big((m*n)*(m*q)\big)*(q*n)=0$

Untuk $x=m, y=q$ maka diperoleh

$\big((m*q)*(m*0)\big)*(0*q)=0$

$\big((m*q)*(m*l)\big)*(l*q)=0$

$((m*p)*(m*m))*(m*p)=0$

$((m*p)*(m*n))*(n*p)=0$

$((m*p)*(m*p))*(p*p)=0$

$((m*p)*(m*q))*(q*p)=0$

$((m*q)*(m*m))*(m*q)=0$

$((m*q)*(m*n))*(n*q)=0$

$((m*q)*(m*p))*(p*q)=0$

$((m*q)*(m*q))*(q*q)=0$

Untuk $x=n, y=0$ maka diperoleh

$((n*0)*(n*0))*(0*0)=0$

$((n*0)*(n*l))*(l*0)=0$

$((n*0)*(n*m))*(m*0)=0$

$((n*0)*(n*n))*(n*0)=0$

$((n*0)*(n*p))*(p*0)=0$

$((n*0)*(n*q))*(q*0)=0$

Untuk $x=n, y=l$ maka diperoleh

$((n*l)*(n*0))*(0*l)=0$

$((n*l)*(n*l))*(l*l)=0$

$((n*l)*(n*m))*(m*l)=0$

$((n*l)*(n*n))*(n*l)=0$

$((n*l)*(n*p))*(p*l)=0$

$((n*l)*(n*q))*(q*l)=0$

Untuk $x=n, y=m$ maka diperoleh

$((n*m)*(n*0))*(0*m)=0$

$((n*m)*(n*l))*(l*m)=0$

$((n*m)*(n*m))*(m*m)=0$

$((n*m)*(n*n))*(n*m)=0$

$((n*m)*(n*p))*(p*m)=0$

$((n*m)*(n*q))*(q*m)=0$

Untuk $x=n, y=n$ maka diperoleh

$((n*n)*(n*0))*(0*n)=0$

$((n*n)*(n*l))*(l*n)=0$

$((n*n)*(n*m))*(m*n)=0$

$((n*n)*(n*n))*(n*n)=0$

$((n*n)*(n*p))*(p*n)=0$

$((n*n)*(n*q))*(q*n)=0$

Untuk $x=n, y=p$ maka diperoleh

$((n*p)*(n*0))*(0*p)=0$

$((n*p)*(n*l))*(l*p)=0$

$((n*p)*(n*m))*(m*p)=0$

Untuk $x=n, y=q$ maka diperoleh

$((n*q)*(n*0))*(0*q)=0$

$((n*q)*(n*l))*(l*q)=0$

$((n*q)*(n*m))*(m*q)=0$

$((n*p)*(n*n))*(n*p)=0$

$((n*p)*(n*p))*(p*p)=0$

$((n*p)*(n*q))*(q*p)=0$

$((n*q)*(n*n))*(n*q)=0$

$((n*q)*(n*p))*(p*q)=0$

$((n*q)*(n*q))*(q*q)=0$

Untuk $x=p, y=0$ maka diperoleh

$((p*0)*(p*0))*(0*0)=0$

$((p*0)*(p*l))*(l*0)=0$

$((p*0)*(p*m))*(m*0)=0$

$((p*0)*(p*n))*(n*0)=0$

$((p*0)*(p*p))*(p*0)=0$

$((p*0)*(p*q))*(q*0)=0$

Untuk $x=p, y=l$ maka diperoleh

$((p*l)*(p*0))*(0*l)=0$

$((p*l)*(p*l))*(l*l)=0$

$((p*l)*(p*m))*(m*l)=0$

$((p*l)*(p*n))*(n*l)=0$

$((p*l)*(p*p))*(p*l)=0$

$((p*l)*(p*q))*(q*l)=0$

Untuk $x=p, y=m$ maka diperoleh

$((p*m)*(p*0))*(0*m)=0$

$((p*m)*(p*l))*(l*m)=0$

$((p*m)*(p*m))*(m*m)=0$

$((p*m)*(p*n))*(n*m)=0$

$((p*m)*(p*p))*(p*m)=0$

$((p*m)*(p*q))*(q*m)=0$

Untuk $x=p, y=n$ maka diperoleh

$((p*n)*(p*0))*(0*n)=0$

$((p*n)*(p*l))*(l*n)=0$

$((p*n)*(p*m))*(m*n)=0$

$((p*n)*(p*n))*(n*n)=0$

$((p*n)*(p*p))*(p*n)=0$

$((p*n)*(p*q))*(q*n)=0$

Untuk $x=p, y=p$ maka diperoleh

$((p*p)*(p*0))*(0*p)=0$

$((p*p)*(p*l))*(l*p)=0$

$((p*p)*(p*m))*(m*p)=0$

$((p*p)*(p*n))*(n*p)=0$

Untuk $x=p, y=q$ maka diperoleh

$((p*q)*(p*0))*(0*q)=0$

$((p*q)*(p*l))*(l*q)=0$

$((p*q)*(p*m))*(m*q)=0$

$((p*q)*(p*n))*(n*q)=0$

$((p*p)*(p*p))*(p*p)=0$

$((p*p)*(p*q))*(q*p)=0$

$((p*q)*(p*p))*(p*q)=0$

$((p*q)*(p*q))*(q*q)=0$

Untuk $x=q, y=0$ maka diperoleh

$((q*0)*(q*0))*(0*0)=0$

$((q*0)*(q*l))*(l*0)=0$

$((q*0)*(q*m))*(m*0)=0$

$((q*0)*(q*n))*(n*0)=0$

$((q*0)*(q*p))*(p*0)=0$

$((q*0)*(q*q))*(q*0)=0$

Untuk $x=q, y=l$ maka diperoleh

$((q*l)*(q*0))*(0*l)=0$

$((q*l)*(q*l))*(l*l)=0$

$((q*l)*(q*m))*(m*l)=0$

$((q*l)*(q*n))*(n*l)=0$

$((q*l)*(q*p))*(p*l)=0$

$((q*l)*(q*q))*(q*l)=0$

Untuk $x=q, y=m$ maka diperoleh

$((q*m)*(q*0))*(0*m)=0$

$((q*m)*(q*l))*(l*m)=0$

$((q*m)*(q*m))*(m*m)=0$

$((q*m)*(q*n))*(n*m)=0$

$((q*m)*(q*p))*(p*m)=0$

$((q*m)*(q*q))*(q*m)=0$

Untuk $x=q, y=n$ maka diperoleh

$((q*n)*(q*0))*(0*n)=0$

$((q*n)*(q*l))*(l*n)=0$

$((q*n)*(q*m))*(m*n)=0$

$((q*n)*(q*n))*(n*n)=0$

$((q*n)*(q*p))*(p*n)=0$

$((q*n)*(q*q))*(q*n)=0$

Untuk $x=q, y=p$ maka diperoleh

$((q*p)*(q*0))*(0*p)=0$

$((q*p)*(q*l))*(l*p)=0$

$((q*p)*(q*m))*(m*p)=0$

$((q*p)*(q*n))*(n*p)=0$

$((q*p)*(q*p))*(p*p)=0$

Untuk $x=q, y=q$ maka diperoleh

$((q*q)*(q*0))*(0*q)=0$

$((q*q)*(q*l))*(l*q)=0$

$((q*q)*(q*m))*(m*q)=0$

$((q*q)*(q*n))*(n*q)=0$

$((q*q)*(q*p))*(p*q)=0$

$\big((q*p)*(q*q)\big)*(q*p)=0$	$\big((q*q)*(q*q)\big)*(q*q)=0$

Jadi terbukti bahwa $\forall x,y,z \in X$, berlaku $\big((x*y)*(x*z)\big)*(z*y)=0$

ii. Akan ditunjukkan $\forall x,y \in X$, berlaku $(x*(x*y))*y=0$

Untuk $x=0, y=0$ maka diperoleh $(0*(0*0))*0=0$

Untuk $x=0, y=l$ maka diperoleh $(0*(0*l))*l=0$

Untuk $x=0, y=m$ maka diperoleh $(0*(0*m))*m=0$

Untuk $x=0, y=n$ maka diperoleh $\big(0*(0*n)\big)*n=0$

Untuk $x=0, y=p$ maka diperoleh $\big(0*(0*p)\big)*p=0$

Untuk $x=0, y=q$ maka diperoleh $\big(0*(0*q)\big)*q=0$

Untuk $x=l, y=0$ maka diperoleh $(l*(l*0))*0=0$

Untuk $x=l, y=l$ maka diperoleh $(l*(l*l))*l=0$

Untuk $x=l, y=m$ maka diperoleh $(l*(l*m))*m=0$

Untuk $x=l, y=n$ maka diperoleh $\big(l*(l*n)\big)*n=0$

Untuk $x=l, y=p$ maka diperoleh $\big(l*(l*p)\big)*p=0$

Untuk $x=l, y=q$ maka diperoleh $\big(l*(l*q)\big)*q=0$

Untuk $x=m, y=0$ maka diperoleh $(m*(m*0))*0=0$

Untuk $x=m, y=l$ maka diperoleh $(m*(m*l))*l=0$

Untuk $x=m, y=m$ maka diperoleh $(m*(m*m))*m=0$

Untuk $x=m, y=n$ maka diperoleh $\big(m*(m*n)\big)*n=0$

Untuk $x=m, y=p$ maka diperoleh $\big(m*(m*p)\big)*p=0$

Untuk $x=m, y=q$ maka diperoleh $\big(m*(m*q)\big)*q=0$

Untuk $x=n, y=0$ maka diperoleh $(n*(n*0))*0=0$

Untuk $x = n, y = l$ maka diperoleh $(n * (n * l)) * l = 0$

Untuk $x = n, y = m$ maka diperoleh $(n * (n * m)) * m = 0$

Untuk $x = n, y = n$ maka diperoleh $\left(n * (n * n)\right) * n = 0$

Untuk $x = n, y = p$ maka diperoleh $\left(n * (n * p)\right) * p = 0$

Untuk $x = n, y = q$ maka diperoleh $\left(n * (n * q)\right) * q = 0$

Untuk $x = p, y = 0$ maka diperoleh $(p * (p * 0)) * 0 = 0$

Untuk $x = p, y = l$ maka diperoleh $(p * (p * l)) * l = 0$

Untuk $x = p, y = m$ maka diperoleh $(p * (p * m)) * m = 0$

Untuk $x = p, y = n$ maka diperoleh $\left(p * (p * n)\right) * n = 0$

Untuk $x = p, y = p$ maka diperoleh $\left(p * (p * p)\right) * p = 0$

Untuk $x = p, y = q$ maka diperoleh $\left(p * (p * q)\right) * q = 0$

Untuk $x = q, y = 0$ maka diperoleh $(q * (q * 0)) * 0 = 0$

Untuk $x = q, y = l$ maka diperoleh $(q * (q * l)) * l = 0$

Untuk $x = q, y = m$ maka diperoleh $(q * (q * m)) * m = 0$

Untuk $x = q, y = n$ maka diperoleh $\left(q * (q * n)\right) * n = 0$

Untuk $x = q, y = p$ maka diperoleh $\left(q * (q * p)\right) * p = 0$

Untuk $x = q, y = q$ maka diperoleh $\left(q * (q * q)\right) * q = 0$

Jadi terbukti bahwa $\forall x, y \in X,$ berlaku $(x * (x * y)) * y = 0$

iii. Dari tabel jelas bahwa $\forall x \in X,$ berlaku $x * x = 0$

iv. Dari tabel, jelas bahwa $\forall x \in X,$ jika $x * x = 0,$ maka $x = x$

Sehingga terbukti bahwa $(X,*,0)$ adalah aljabar BCI

Lampiran 6. Bukti $(X,*,0)$ adalah Aljabar BCI yang bersifat assosiatif dengan metode pengecekan satu persatu menggunakan tabel 3.3.

Akan di buktikan bahwa $(X,*,0)$ adalah Aljabar BCI dengan syarat memenuhi empat aksioma aljabar BCI, sebagaimana berikut:

i. Akan ditunjukkan $\forall x, y, z \in X$, berlaku $\big((x*y)*(x*z)\big)*(z*y)=0$

Untuk $x=0$, $y=0$ maka diperoleh

$\big((0*0)*(0*0)\big)*(0*0)=0$

$\big((0*0)*(0*1)\big)*(1*0)=0$

$\big((0*0)*(0*2)\big)*(2*0)=0$

$\big((0*0)*(0*3)\big)*(3*0)=0$

Untuk $x=1$, $y=0$ maka diperoleh

$\big((1*0)*(1*0)\big)*(0*0)=0$

$\big((1*0)*(1*1)\big)*(1*0)=0$

$\big((1*0)*(1*2)\big)*(2*0)=0$

$\big((1*0)*(1*3)\big)*(3*0)=0$

Untuk $x=0$, $y=1$ maka diperoleh

$\big((0*1)*(0*0)\big)*(0*1)=0$

$\big((0*1)*(0*1)\big)*(1*1)=0$

$\big((0*1)*(0*2)\big)*(2*1)=0$

$\big((0*1)*(0*3)\big)*(3*1)=0$

Untuk $x=1, y=1$ maka diperoleh

$\big((1*1)*(1*0)\big)*(0*1)=0$

$\big((1*1)*(1*1)\big)*(1*1)=0$

$\big((1*1)*(1*2)\big)*(2*1)=0$

$\big((1*1)*(1*3)\big)*(3*1)=0$

Untuk $x = 0, \quad y = 2$ maka diperoleh

$((0 * 2) * (0 * 0)) * (0 * 2) = 0$

$((0 * 2) * (0 * 1)) * (1 * 2) = 0$

$((0 * 2) * (0 * 2)) * (2 * 2) = 0$

$((0 * 2) * (0 * 3)) * (3 * 2) = 0$

Untuk $x = 1, y = 2$ maka di peroleh

$((1 * 2) * (1 * 0)) * (0 * 2) = 0$

$((1 * 2) * (1 * 1)) * (1 * 2) = 0$

$((1 * 2) * (1 * 2)) * (2 * 2) = 0$

$((1 * 2) * (1 * 3)) * (3 * 2) = 0$

Untuk $x = 0, \quad y = 3$ maka diperoleh

$((0 * 3) * (0 * 0)) * (0 * 3) = 0$

$((0 * 3) * (0 * 1)) * (1 * 3) = 0$

$((0 * 3) * (0 * 2)) * (2 * 3) = 0$

$((0 * 3) * (0 * 3)) * (3 * 3) = 0$

Untuk $x = 1, y = 3$ maka diperoleh

$((1 * 3) * (1 * 0)) * (0 * 3) = 0$

$((1 * 3) * (1 * 1)) * (1 * 3) = 0$

$((1 * 3) * (1 * 2)) * (2 * 3) = 0$

$((1 * 3) * (1 * 3)) * (3 * 3) = 0$

Untuk $x = 2, y = 0$ maka diperoleh

$((2 * 0) * (2 * 0)) * (0 * 0) = 0$

$((2 * 0) * (2 * 1)) * (1 * 0) = 0$

$((2 * 0) * (2 * 2)) * (2 * 0) = 0$

$((2 * 0) * (2 * 3)) * (3 * 0) = 0$

Untuk $x = 3, y = 0$ maka diperoleh

$((3 * 0) * (3 * 0)) * (0 * 0) = 0$

$((3 * 0) * (3 * 1)) * (1 * 0) = 0$

$((3 * 0) * (3 * 2)) * (2 * 0) = 0$

$((3 * 0) * (3 * 3)) * (3 * 0) = 0$

Untuk $x = 2, y = 1$ maka diperoleh

$((2 * 1) * (2 * 0)) * (0 * 1) = 0$

Untuk $x = 3, y = 1$ maka diperoleh

$((3 * 1) * (3 * 0)) * (0 * 1) = 0$

$((3 * 1) * (3 * 1)) * (1 * 1) = 0$

$((2*1)*(2*1))*(1*1)=0$

$((2*1)*(2*2))*(2*1)=0$

$((2*1)*(2*3))*(3*1)=0$

$((3*1)*(3*2))*(2*1)=0$

$((3*1)*(3*3))*(3*1)=0$

Untuk $x=2, y=2$ maka diperoleh

$((2*2)*(2*0))*(0*2)=0$

$((2*2)*(2*1))*(1*2)=0$

$((2*2)*(2*2))*(2*2)=0$

$((2*2)*(2*3))*(3*2)=0$

Untuk $x=3, y=2$ maka diperoleh

$((3*2)*(3*0))*(0*2)=0$

$((3*2)*(3*1))*(1*2)=0$

$((3*2)*(3*2))*(2*2)=0$

$((3*2)*(3*3))*(3*2)=0$

Untuk $x=2, y=3$ maka diperoleh

$((2*3)*(2*0))*(0*3)=0$

$((2*3)*(2*1))*(1*3)=0$

$((2*3)*(2*2))*(2*3)=0$

$((2*3)*(2*3))*(3*3)=0$

Untuk $x=3, y=3$ maka diperoleh

$((3*3)*(3*0))*(0*3)=0$

$((3*3)*(3*1))*(1*3)=0$

$((3*3)*(3*2))*(2*3)=0$

$((3*3)*(3*3))*(3*3)=0$

Jadi terbukti bahwa $\forall x,y,z \in X$, berlaku $((x*y)*(x*z))*(z*y)=0$

ii. Akan ditunjukkan $\forall x,y \in X$, berlaku $(x*(x*y))*y=0$

Untuk $x=0, y=0$ maka diperoleh $(0*(0*0))*0=0$

Untuk $x=0, y=1$ maka diperoleh $(0*(0*1))*1=0$

Untuk $x=0, y=2$ maka diperoleh $(0*(0*2))*2=0$

Untuk $x=0, y=3$ maka diperoleh $(0*(0*3))*3=0$

Untuk $x=1, y=0$ maka diperoleh $(1*(1*0))*0=0$

Untuk $x = 1, y = 1$ maka diperoleh $(1 * (1 * 1)) * 1 = 0$

Untuk $x = 1, y = 2$ maka diperoleh $(1 * (1 * 2)) * 2 = 0$

Untuk $x = 1, y = 3$ maka diperoleh $\left(1 * (1 * 3)\right) * 3 = 0$

Untuk $x = 2, y = 0$ maka diperoleh $(2 * (2 * 0)) * 0 = 0$

Untuk $x = 2, y = 1$ maka diperoleh $(2 * (2 * 1)) * 1 = 0$

Untuk $x = 2, y = 2$ maka diperoleh $(2 * (2 * 2)) * 2 = 0$

Untuk $x = 2, y = 3$ maka diperoleh $\left(2 * (2 * 3)\right) * 3 = 0$

Untuk $x = 1, y = 0$ maka diperoleh $(1 * (3 * 0)) * 0 = 0$

Untuk $x = 1, y = 1$ maka diperoleh $(1 * (3 * 1)) * 1 = 0$

Untuk $x = 1, y = 2$ maka diperoleh $(1 * (3 * 2)) * 2 = 0$

Untuk $x = 1, y = 3$ maka diperoleh $\left(1 * (3 * 3)\right) * 3 = 0$

Jadi terbukti bahwa $\forall x, y \in X$, berlaku $(x * (x * y)) * y = 0$

iii. Dari tabel jelas bahwa $\forall x \in X$, berlaku $x * x = 0$

iv. Dari tabel, jelas bahwa $\forall x \in X$, jika $x * x = 0$, maka $x = x$

Sehingga terbukti bahwa $(X, * , 0)$ adalah aljabar BCI

v. Berikut ini akan dibuktikan $(X, * , 0)$ bersifat assosiatif,yaitu $\forall\ x, y, z \in X$ berlaku

$x * (y * z) = (x * y) * z$

Untuk $x = 0, y = 0$ maka diperoleh

$(0 * 0) * 0 = 0 * (0 * 0) = 0$

$(0 * 0) * 1 = 0 * (0 * 1) = 1$

$(0 * 0) * 2 = 0 * (0 * 2) = 2$

$(0 * 0) * 3 = 0 * (0 * 3) = 3$

Untuk $x = 0, y = a$ maka diperoleh

$(0 * 1) * 0 = 0 * (1 * 0) = 1$

$(0 * 1) * 1 = 0 * (1 * 1) = 0$

$(0 * 1) * 2 = 0 * (1 * 2) = 3$

$(0 * 1) * 3 = 0 * (1 * 3) = 2$

Untuk $x = 0, y = 2$ maka diperoleh

$(0 * 2) * 0 = 0 * (2 * 0) = 2$

$(0 * 2) * 1 = 0 * (2 * 1) = 3$

$(0 * 2) * 2 = 0 * (2 * 2) = 0$

$(0 * 2) * 3 = 0 * (2 * 3) = 1$

Untuk $x = 0, y = 3$ maka diperoleh

$(0 * 3) * 0 = 0 * (3 * 0) = 3$

$(0 * 3) * 1 = 0 * (3 * 1) = 2$

$(0 * 3) * 2 = 0 * (3 * 2) = 1$

$(0 * 3) * 3 = 0 * (3 * 3) = 0$

Untuk $x = 1, y = 0$ maka diperoleh

$(1 * 0) * 0 = 1 * (0 * 0) = 1$

$(1 * 0) * 1 = 1 * (0 * 1) = 0$

$(1 * 0) * 2 = 1 * (0 * 2) = 3$

$(1 * 0) * 3 = 1 * (0 * 3) = 2$

Untuk $x = 1, y = 1$ maka diperoleh

$(1 * 1) * 0 = 1 * (1 * 0) = 0$

$(1 * 1) * 1 = 1 * (1 * 1) = 1$

$(1 * 1) * 2 = 1 * (1 * 2) = 2$

$(1 * 1) * 3 = 1 * (1 * 3) = 3$

Untuk $x = 1, y = 2$ maka diperoleh

$(1 * 2) * 0 = 1 * (2 * 0) = 3$

$(1 * 2) * 1 = 1 * (2 * 1) = 2$

$(1 * 2) * 2 = 1 * (2 * 2) = 1$

$(1 * 2) * 3 = 1 * (2 * 3) = 0$

Untuk $x = 1, y = 3$ maka diperoleh

$(1 * 3) * 0 = 1 * (3 * 0) = 2$

$(1 * 3) * 1 = 1 * (3 * 1) = 3$

$(1 * 3) * 2 = 1 * (3 * 2) = 0$

$(1 * 3) * 3 = 1 * (3 * 3) = 1$

Untuk $x = 2, y = 0$ maka diperoleh

$(1 * 0) * 0 = 2 * (0 * 0) = 2$

$(1 * 0) * 1 = 2 * (0 * 1) = 3$

$(1 * 0) * 2 = 2 * (0 * 2) = 0$

$(1 * 0) * 3 = 2 * (0 * 3) = 1$

Untuk $x = 2, y = 1$ maka diperoleh

$(2 * 1) * 0 = 2 * (1 * 0) = 3$

$(2 * 1) * 1 = 2 * (1 * 1) = 2$

$(2 * 1) * 2 = 2 * (1 * 2) = 1$

$(2 * 1) * 3 = 2 * (1 * 3) = 0$

Untuk $x = 2, y = 2$ maka diperoleh	Untuk $x = 2, y = 3$ maka diperoleh
$(2 * 2) * 0 = 2 * (2 * 0) = 0$	$(2 * 3) * 0 = 2 * (3 * 0) = 1$
$(2 * 2) * 1 = 2 * (2 * 1) = 1$	$(2 * 3) * 2 = 2 * (3 * 2) = 0$
$(2 * 2) * 2 = 2 * (2 * 2) = 2$	$(2 * 3) * 2 = 2 * (3 * 3) = 3$
$(2 * 2) * 3 = 2 * (2 * 3) = 3$	$(2 * 3) * 3 = 2 * (3 * 3) = 2$

Untuk $x = 3, y = 0$ maka diperoleh	Untuk $x = 3, y = 1$ maka diperoleh
$(3 * 0) * 0 = 3 * (0 * 0) = 3$	$(3 * 1) * 0 = 3 * (1 * 0) = 2$
$(3 * 0) * 1 = 3 * (0 * 1) = 2$	$(3 * 1) * 1 = 3 * (1 * 1) = 3$
$(3 * 0) * 2 = 3 * (0 * 2) = 1$	$(3 * 1) * 2 = 3 * (1 * 2) = 0$
$(3 * 0) * 3 = 3 * (0 * 3) = 0$	$(3 * 1) * 3 = 3 * (1 * 3) = 1$

Untuk $x = 3, y = 2$ maka diperoleh	Untuk $x = 3, y = 3$ maka diperoleh
$(3 * 2) * 0 = 3 * (2 * 0) = 1$	$(3 * 3) * 0 = 3 * (3 * 0) = 0$
$(3 * 2) * 1 = 3 * (2 * 1) = 0$	$(3 * 3) * 1 = 3 * (3 * 1) = 1$
$(3 * 2) * 2 = 3 * (2 * 2) = 3$	$(3 * 3) * 2 = 3 * (3 * 2) = 2$
$(3 * 2) * 3 = 3 * (2 * 3) = 2$	$(3 * 3) * 3 = 3 * (3 * 3) = 3$

Jadi terbukti $\forall\, x, y, z \in X$ berlaku $x * (y * z) = (x * y) * z$ sehingga assosiatif.

Lampiran 7. Bukti $(X,*,0)$ adalah Aljabar BCI dengan metode pengecekan satu persatu menggunakan tabel 3.4.

Akan di buktikan bahwa $(X,*,0)$ adalah Aljabar BCI dengan syarat memenuhi empat aksioma aljabar BCI, sebagaimana berikut:

i. Akan ditunjukkan $\forall x,y,z \in X$, berlaku $\big((x*y)*(x*z)\big)*(z*y)=0$

Untuk $x=0$, $y=0$ maka diperoleh

$\big((0*0)*(0*0)\big)*(0*0)=0$

$\big((0*0)*(0*1)\big)*(1*0)=0$

$\big((0*0)*(0*2)\big)*(2*0)=0$

Untuk $x=0$, $y=1$ maka diperoleh

$\big((0*1)*(0*0)\big)*(0*1)=0$

$\big((0*1)*(0*1)\big)*(1*1)=0$

$\big((0*1)*(0*2)\big)*(2*1)=0$

Untuk $x=0$, $y=2$ maka diperoleh

$\big((0*2)*(0*0)\big)*(0*2)=0$

$\big((0*2)*(0*1)\big)*(1*2)=0$

$\big((0*2)*(0*2)\big)*(2*2)=0$

Untuk $x=1$, $y=0$ maka diperoleh

$\big((1*0)*(1*0)\big)*(0*0)=0$

$\big((1*0)*(1*1)\big)*(1*0)=0$

$\big((1*0)*(1*2)\big)*(2*0)=0$

Untuk $x=1$, $y=1$ maka diperoleh

$\big((1*1)*(1*0)\big)*(0*1)=0$

$\big((1*1)*(1*1)\big)*(1*1)=0$

$\big((1*1)*(1*2)\big)*(2*1)=0$

Untuk $x=1$, $y=2$ maka diperoleh

$\big((1*2)*(1*0)\big)*(0*2)=0$

$\big((1*2)*(1*1)\big)*(1*2)=0$

$\big((1*2)*(1*2)\big)*(2*2)=0$

Untuk $x = 2, \quad y = 0$ maka diperoleh

$((2 * 0) * (2 * 0)) * (0 * 0) = 0$

$((2 * 0) * (2 * 1)) * (1 * 0) = 0$

$((2 * 0) * (2 * 2)) * (2 * 0) = 0$

Untuk $x = 2, \quad y = 1$ maka diperoleh

$((2 * 1) * (2 * 0)) * (0 * 1) = 0$

$((2 * 1) * (2 * 1)) * (1 * 1) = 0$

$((2 * 1) * (2 * 2)) * (2 * 1) = 0$

Untuk $x = 2, y = 2$ maka diperoleh

$((2 * 2) * (2 * 0)) * (0 * 2) = 0$

$((2 * 2) * (2 * 1)) * (1 * 2) = 0$

$((2 * 2) * (2 * 2)) * (2 * 2) = 0$

Jadi terbukti bahwa $\forall x, y, z \in X$, berlaku $((x * y) * (x * z)) * (z * y) = 0$

ii. Akan ditunjukkan $\forall x, y \in X$, berlaku $(x * (x * y)) * y = 0$

Untuk $x = 0, y = 0$ maka diperoleh $(0 * (0 * 0)) * 0 = 0$

Untuk $x = 0, y = 1$ maka diperoleh $(0 * (0 * 1)) * 1 = 0$

Untuk $x = 0, y = 2$ maka diperoleh $(0 * (0 * 2)) * 2 = 0$

Untuk $x = 1, y = 0$ maka diperoleh $(1 * (1 * 0)) * 0 = 0$

Untuk $x = 1, y = 1$ maka diperoleh $(1 * (1 * 1)) * 1 = 0$

Untuk $x = 1, y = 2$ maka diperoleh $(1 * (1 * 2)) * 2 = 0$

Untuk $x = 2, y = 0$ maka diperoleh $(2 * (2 * 0)) * 0 = 0$

Untuk $x = 2, y = 1$ maka diperoleh $(2 * (2 * 1)) * 1 = 0$

Untuk $x = 2, y = 2$ maka diperoleh $(2 * (2 * 2)) * 2 = 0$

Jadi terbukti bahwa $\forall x, y \in X$, berlaku $(x * (x * y)) * y = 0$

iii. Dari tabel jelas bahwa $\forall x \in X$, berlaku $x * x = 0$

iv. Dari tabel, jelas bahwa $\forall x \in X$, jika $x * x = 0$, maka $x = x$

Sehingga terbukti bahwa $(X, * ,0)$ adalah aljabar BCI