

**MULTIPLISITAS SIKEL DARI GRAF TOTAL PADA GRAF
TANGGA L_n , GRAP STAR S_n DAN DOUBLE STAR $S_{n,n+1}$**

SKRIPSI

Oleh:
NAVIS NUR ILMIYAH
NIM. 07610030



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2011**

**MULTIPLISITAS SIKEL DARI GRAF TOTAL PADA GRAF
TANGGA L_n , GRAP STAR S_n DAN DOUBLE STAR $S_{n,n+1}$**

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
NAVIS NUR ILMIYAH
NIM. 07610030

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2011**

**MULTIPLISITAS SIKEL DARI GRAF TOTAL PADA GRAF
TANGGA L_n , GRAP STAR S_n DAN DOUBLE STAR $S_{n,n+1}$**

SKRIPSI

oleh:
NAVIS NUR ILMIYAH
NIM. 07610030

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji:

Tanggal: 16 Juli 2011

Pembimbing I,

Pembimbing II,

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

Abdul Aziz, M. Si
NIP. 19760318 200604 1 002

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

**MULTIPLISITAS SIKEL DARI GRAF TOTAL PADA GRAF
TANGGA L_n , GRAP STAR S_n DAN DOUBLE STAR $S_{n,n+1}$**

SKRIPSI

oleh:
NAVIS NUR ILMIYAH
NIM. 07610030

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal: 21 Juli 2011

Penguji Utama	: Usman Pagalay, M.Si	1.
	NIP. 19650414 200312 1 001	
Ketua	: Sri Harini, M.Si	2.
	NIP. 19731014 200112 2 002	
Sekretaris	: Abdussakir, M.Pd	3.
	NIP. 19751006 200312 1 001	
Anggota	: Abdul Aziz, M.Si	4.
	NIP. 19760318 200604 1 002	

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Navis Nur Ilmiah
NIM : 07610030
Jurusan : Matematika
Fakultas : Sains dan Teknologi

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri dan bukan merupakan pengambil alihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 25 Juli 2011
Yang membuat pernyataan,

Navis Nur Ilmiah
NIP. 07610030

MOTTO

“Engkau tidak pernah kalah, hingga Engkau menyerah”



HALAMAN PERSEMBAHAN

Bismillahirrahmanirrahim

Skripsi ini Penulis persembahkan:

Untuk Bapak penulis **H.Muhammad Sholihuddin**

Untuk Ibu Penulis **Hj. Lathifah**

Terimakasih atas tiap tetes keringatnya

Terimakasih atas doa ditiap detiknya

Terimakasih atas semua keajaiban yang diberikan kepada penulis

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Syukur alhamdulillah penulis haturkan ke hadirat Allah SWT yang telah melimpahkan Rahmat dan Hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan studi di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang sekaligus menyelesaikan skripsi ini dengan baik. Selanjutnya penulis haturkan ucapan terima kasih seiring do'a dan harapan *jazakumullah ahsanal jaza'* kepada semua pihak yang telah membantu terselesaikannya skripsi ini. Ucapan terima kasih ini penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku Rektor UIN Maulana Malik Ibrahim Malang, yang telah banyak memberikan pengetahuan dan pengalaman yang berharga.
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU., D.Sc selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang sekaligus sebagai pembimbing skripsi, yang telah banyak meluangkan waktu, tenaga dan pikiran.
4. Abdul Aziz, M.Si selaku dosen pembimbing skripsi, yang telah banyak memberikan pengarahan dan pengalaman yang berharga.

5. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, terutama seluruh dosen, terima kasih atas segenap ilmu dan bimbingannya.
6. Ayahanda dan Ibunda tercinta yang senantiasa memberikan doa dan restunya kepada penulis dalam menuntut ilmu.
7. Ahmad Fajar Fahruly, Vera Oktavianti, M. Abid Mubarak, dan Abdullah Hilmi yang menjadi penyemangat bagi penulis.
8. Ustad Marzuki Mustamar dan Umi Saidah yang telah membimbing penulis.
9. Sahabat-sahabatku senasib seperjuangan mahasiswa Matematika 2007,
10. Hermi Ismawati, Atiq Aqidatul I, Halum Tahsilin Kuntari, Nila Kulinatul, Silvia Falah, Ni'matul Ula dan teman-teman di pondok Sabilurrosyad yang telah mengisi hari-hari penulis dengan kebersamaan yang indah.

Penulis menyadari bahwa dalam penyusunan skripsi ini masih terdapat kekurangan dan penulis berharap semoga skripsi ini bisa memberikan manfaat kepada para pembaca khususnya bagi penulis secara pribadi. *Amin Ya Rabbal Alamin.*

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Malang, 15 juli 2011

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PERSETUJUAN	ii
HALAMAN PENGESAHAN	iii
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	iv
MOTTO	v
HALAMAN PERSEMBAHAN	vi
KATA PENGANTAR	vii
DAFTAR ISI	ix
DAFTAR GAMBAR	xii
DAFTAR TABEL	xiv
DAFTAR SIMBOL	xv
ABSTRAK	xvi
ABSTRACT	xvii
BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Tujuan	3
1.4 Manfaat Penelitian	4
1.5 Batasan Masalah	4
1.6 Metode Penelitian	5
1.7 Sistematika Penulisan	6

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Graf	7
2.1.1 Definisi Graf	7
2.1.2 <i>Adjacent</i> dan <i>Incident</i>	8
2.1.3 Derajat Titik	9
2.1 Graf Terhubung	11
2.3 Titik Sentral (Pusat)	12
2.4 Operasi-Operasi pada Graf.....	14
2.4.1 Gabungan (Union).....	14
2.4.2 Penjumlahan (Join)	15
2.4.3 Perkalian Cartesius.....	16
2.5 Graf-Graf dengan Nama Tertentu	18
2.5.1 Graf Garis	18
2.5.2 Graf Tangga	19
2.5.3 Graf Komplit	20
2.5.4 Graf Bipartisi Komplit	20
2.5.5 Graf <i>Star</i> dan <i>Double Star</i>	21
2.6 Graf Total	22
2.7 Multiplisitas Sikel	22
2.8 Kajian Teori Graf dalam Al-Qur'an	23

BAB III PEMBAHASAN

3.1 Multiplisitas Sikel dari Graf Total pada Graf Tangga.....	28
3.1.1 Graf Tangga L_1	28
3.1.2 Graf Tangga L_2	29
3.1.3 Graf Tangga L_3	30

3.1.4 Graf Tangga L_4	31
3.1.5 Graf Tangga L_5	33
3.1.6 Graf Tangga L_6	34
3.2 Multiplisitas Sikel dari Graf Total pada Graf <i>Star</i>	39
3.2.1 Graf <i>Star</i> S_1	39
3.2.2 Graf <i>Star</i> S_2	40
3.2.3 Graf <i>Star</i> S_3	41
3.2.4 Graf <i>Star</i> S_4	41
3.2.5 Graf <i>Star</i> S_5	42
3.2.6 Graf <i>Star</i> S_6	43
3.3 Multiplisitas Sikel dari Graf Total pada Graf <i>Double Star</i>	48
3.3.1 Graf <i>Double Star</i> dengan $n = 1$	48
3.3.2 Graf <i>Double Star</i> dengan $n = 2$	49
3.3.3 Graf <i>Double Star</i> dengan $n = 3$	50
3.3.4 Graf <i>Double Star</i> dengan $n = 4$	51
BAB IV PENUTUP	
4.1 Kesimpulan	56
4.2 Saran	56
DAFTAR PUSTAKA	57
LAMPIRAN	58

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Graf G Berorder 5.....	8
Gambar 2.2 Graf G dengan Titik <i>Adjacent</i> dan <i>Incident</i>	9
Gambar 2.3 Graf G Dengan Titik Berderajat 1,2 dan 0	10
Gambar 2.4 Graf Lintasan.....	11
Gambar 2.5 <i>Trail</i> , <i>Path</i> , dan Sikel pada Graf G	12
Gambar 2.6 Graf dengan Radius 3 dan diameter 3	13
Gambar 2.7 a) Graf $2K_1$ b) Graf $3K_2$ c) Graf K_4 d) Graf $2K_1 \cup 3K_2 \cup K_4$	14
Gambar 2.8 a) Graf K_1 b) Graf K_3 c) Graf $K_1 \cup K_3$	14
Gambar 2.9 G_1 Graf Komplit Berorder 2, G_2 Graf Komplit Berorder 3, $G_3 = G_1 + G_2$	15
Gambar 2.10 a) Graf K_2 , b) Graf K_4 c) Graf $K_2 + K_4$	16
Gambar 2.11 G_1 Graf Komplit Berorder 2, G_2 Graf Komplit Berorder 3, $G_3 = G_1 \times G_2$	17
Gambar 2.12 a) Graf K_2 , b) Graf K_4 c) Graf $K_2 \times K_4$	17
Gambar 2.13 a) Graf G b) Graf Garis L G	18
Gambar 2.14 a) Graf Lintasan P_1 b) Graf Lintasan P_2 c) Graf Tangga $L_4 = P_2 \times P_4$	19
Gambar 2.15 K_1 (Graf Komplit Berderajat 1), K_2 (Graf Komplit Berderajat 2), K_3 (Graf Komplit Berderajat 3)	20
Gambar 2.16 Graf <i>Star</i> K_4	21
Gambar 2.17 Graf <i>Double Star</i> $S_{2,3}$	21
Gambar 2.18 a) Graf P_3 b) Graf Total dari P_3	22
Gambar 2.19 a) Graf P_4 b) Graf Total dari P_4	23
Gambar 2.20 Graf yang Menggambarkan Hubungan Silaturrahi	24

Gambar 2.21 Graf yang Menggambarkan Sarang Lebah	25
Gambar 3.1.1 a) Graf Tangga L_1 b) Graf Total dari Graf Tangga L_1	28
Gambar 3.1.2 a) Graf Tangga L_2 b) Graf Total dari Graf Tangga L_2	29
Gambar 3.1.3 a) Graf Tangga L_3 b) Graf Total dari Graf Tangga L_3	30
Gambar 3.1.4 a) Graf Tangga L_4 b) Graf Total dari Graf Tangga L_4	32
Gambar 3.1.5 a) Graf Tangga L_5 b) Graf Total dari Graf Tangga L_5	33
Gambar 3.1.6 a) Graf Tangga L_6 b) Graf Total dari Graf Tangga L_6	34
Gambar 3.2.1 a) Graf <i>Star</i> S_1 b) Graf total dari Graf <i>Star</i> S_1	39
Gambar 3.2.2 a) Graf <i>Star</i> S_2 b) Graf total dari Graf <i>Star</i> S_2	40
Gambar 3.2.3 a) Graf <i>Star</i> S_3 b) Graf total dari Graf <i>Star</i> S_3	41
Gambar 3.2.4 a) Graf <i>Star</i> S_4 b) Graf total dari Graf <i>Star</i> S_4	42
Gambar 3.2.5 a) Graf <i>Star</i> S_5 b) Graf total dari Graf <i>Star</i> S_5	43
Gambar 3.2.6 a) Graf <i>Star</i> S_6 b) Graf total dari Graf <i>Star</i> S_6	44
Gambar 3.3.1 a)Graf <i>Double Star</i> $S_{1,2}$ b)Graf Total dari Graf <i>Double Star</i> $S_{1,2}$	48
Gambar 3.3.2 a)Graf <i>Double Star</i> $S_{2,3}$ b)Graf Total dari Graf <i>Double Star</i> $S_{2,3}$	49
Gambar 3.3.3 a)Graf <i>Double Star</i> $S_{3,4}$ b)Graf Total dari Graf <i>Double Star</i> $S_{3,4}$	50
Gambar 3.3.4 a)Graf <i>Double Star</i> $S_{4,5}$ b)Graf Total dari Graf <i>Double Star</i> $S_{4,5}$	52

DAFTAR TABEL

Tabel 3.1 Multiplisitas Sikel dari Graf Tangga L_n	36
Tabel 3.2 Multiplisitas Sikel dari Graf Star S_n	45
Tabel 3.3 Multiplisitas sikel dari Graf Double Star $S_{n,n+1}$	54



DAFTAR SIMBOL

SIMBOL	KETERANGAN
$CM(G)$	<i>Cycle multiplicity</i> (multiplisitas sikel) pada graf G
C_n	Graf sikel berorder n
$E G$	Himpunan sisi pada graf G
e_i	Sisi ke- i
G	Graf G
K_n	Graf komplit berorder n
$K_{n,m}$	Graf bipartisi komplit
L_n	Graf tangga (<i>Ladder</i>) $P_2 \times P_n$
$L G$	Graf gGaris dari graf G
P_n	Graf lintasan (<i>Path</i>) berorder n
S_n	Graf <i>star</i> dengan $m=1$
$S_{n,n+1}$	Graf <i>double star</i>
$T G$	Graf total dari graf G
$V G$	Himpunan titik dari garf G
v_i	Titik ke- i
n	Bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan n
C	Kardinalitas dari C

ABSTRAK

Ilmiyah, Navis Nur. 2011. *Multiplisitas Sikel dari Graf Total pada Graf Tangga L_n , Graf Star S_n , dan Graf Double Star $S_{n,n+1}$* . Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains Dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Pembimbing: 1. Abdussakir, M.Pd
2. Abdul Aziz, M.Si

Kata Kunci: multiplisitas sikel, graf total, graf tangga, graf star, graf double star.

Teori-teori baru yang berkenaan dengan teori graf terus bermunculan dan berkembang. Teorema yang baru ditemukan adalah berkenaan dengan *cycle multiplicity* dari graf total pada C_n, P_n , dan $K_{1,n}$. Hal ini dibahas oleh M.M. Akbar Ali dan S. Panayappan dalam *International Journal of Engineering, Science and technology* 2010. Oleh karena itu, penulisan skripsi ini ditujukan untuk mengembangkan pembahasan multiplisitas sikel dari graf total pada graf tangga L_n , graf star S_n , dan graf double star $S_{n,n+1}$.

Graf total yang dinotasikan dengan $T(G)$ didefinisikan sebagai berikut. $V T G = V G \cup E G$. Dua titik v_1 dan v_2 dalam $V T G$ adjacent dalam $T(G)$ jika dan hanya jika memenuhi salah satu dari syarat-syarat berikut: i) titik v_1, v_2 di dalam $V(G)$ dan v_1 adjacent dengan v_2 dalam G , ii) e_1, e_2 terdapat dalam $E(G)$ dan e_1, e_2 adjacent dalam G iii) v_1 dalam $V(G)$, dan v_2 dalam $E(G)$, dan v_1 dan v_2 incident dalam G . Sedangkan $CM(G)$ yang merupakan notasi dari multiplisitas sikel dari graf G adalah jumlah maksimal sisi sikel yang disjoint pada graf G .

Dengan menggambarkan graf totalnya, akan lebih mudah dicari multiplisitas sikel dari graf tersebut. Setelah ditemukan pola dari multiplisitas sikel, akan dilanjutkan dengan menformulasikannya dalam bentuk teorema dan juga membuktikannya.

Hasil dari penelitian ini adalah $CM T L_n = 4n - 3$, $CM T S_n = \frac{n^2+5n}{6}$ untuk n ganjil, $CM T S_n = \frac{n^2+4n}{6}$ untuk n genap,

$CM T S_{n,n+1} = \frac{n^2+5n-6}{6} + \frac{n^2+6n+5}{6}$ untuk n ganjil, dan

$CM T S_{n,n+1} = \frac{n^2+4n-6}{6} + \frac{n^2+7n+6}{6}$ untuk n genap. Penelitian ini

dapat dilanjutkan dengan menjelaskan multiplisitas sikel dari graf total pada graf yang berbeda.

ABSTRACT

Ilmiyah, Navis Nur. 2011. *Cycle Multiplicity of Total Graph of Ladder Graph L_n , Star S_n , and Double Star $S_{n,n+1}$* . Thesis. Mathematics Department Faculty of Science and Technology The State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang.

Advisor: 1. Abdussakir, M.Pd
2. Abdul Aziz, M.Si

Key Words: cycle multiplicity, total graph, ladder graph, star, double star.

Many new theories of graphs have continued and developed. And the last discovered theory is about cycle multiplicity of total graph of C_n, P_n , and $K_{1,n}$. This case is discussed by M.M. Akbar Ali and S. Panayappan in *International Journal of Engineering, Science and technology* 2010. So that, this thesis explains the cycle multiplicity of total graph of ladder graph L_n , Star S_n , and Double Star $S_{n,n+1}$.

The total graph of G denoted by TG is defined as follows. The vertex set of TG is $V(G) \cup E(G)$. Two vertices v_1 and v_2 in the vertex set of TG are adjacent in TG in case one of the following holds: (i) v_1, v_2 are in $V(G)$, and v_1 is adjacent to v_2 in G . (ii) v_1, v_2 are in $E(G)$ and v_1, v_2 are adjacent in G (iii) v_1 is in $V(G)$, v_2 is in $E(G)$, and v_1, v_2 are incident in G . While cycle multiplicity of total graph G is the maximum number of edge disjoint cycles in G .

By drawing the graph, the cycle multiplicity of the total graph will be easily found. Then formulate the theorem about it from the form of cycle multiplicity of the total graph, and also prove it.

The result of This research are $CM(TL_n) = 4n - 3$, $CM(TS_n) = \frac{n^2+5n}{6}$ if n is odd, $CM(TS_n) = \frac{n^2+4n}{6}$ if n is even, $CM(TS_{n,n+1}) = \frac{n^2+5n-6}{6} + \frac{n^2+6n+5}{6}$ if n is odd, and $CM(TS_{n,n+1}) = \frac{n^2+4n-6}{6} + \frac{n^2+7n+6}{6}$ if n is even. This research can be continued for cycle multiplicity of the total graph of another graph.

BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pada hakekatnya, seluruh yang ada pada alam semesta memuat konsep-konsep yang ada pada Matematika. Allah menciptakan alam semesta beserta isinya dengan ukuran yang cermat dan teliti. Penciptaan bumi, bulan dan seisi galaksi tentunya sudah dengan perhitungan yang sangat matang. Hal ini dapat dilihat dari tersusunnya benda-benda tersebut dengan rapi menurut orbitnya sehingga tidak saling bertabrakan. Semua yang ada di alam ini ada hitungannya, ada rumus atau teoremanya. Dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang. Allah berfirman dalam surat Al-Qamar (49) sebagai berikut:

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَاهُ بِقَدَرٍ ﴿٤٩﴾

Artinya: “*Sesungguhnya Kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran*”.

Maka tidaklah salah jika dikatakan bahwa Allah adalah Mahamatematis (Abdussakir, 2007: 79-80). Alam semesta menyimpan atau mengandung semua ukuran-ukuran, dan perhitungan-perhitungan. Para matematikawan tidaklah menciptakan suatu rumus, tetapi mereka hanya menemukannya.

Salah satu cabang dari ilmu Matematika adalah Teori Graf. Cabang ilmu Matematika ini sangat penting karena erat sekali hubungannya dengan pemecahan berbagai persoalan dalam kehidupan sehari-hari

Graf G adalah himpunan tak-kosong yang berhinga dari objek-objek yang disebut titik (*vertex*) bersama dengan himpunan pasangan tak-terurut yaitu sisi

(*edge*). Himpunan titik dari G dinotasikan dengan $V G$, sedangkan himpunan sisi dinotasikan dengan $E G$ (Chartrand dan Lesniak, 1986: 4).

Menurut catatan sejarah, masalah jembatan Königsberg adalah masalah yang pertama kali menggunakan graf (1736), yang karenanya Euler (1707-1782) menjadi Bapak dari Teori Graf sebagaimana Topologi ketika dia merumuskan mengenai masalah terkenal yang tak terpecahkan di atas (Harary, 1969: 1). Peristiwa itulah yang menjadi tombak sejarah munculnya Teori Graf, dan terus berkembang sampai sekarang karena kajiannya berhubungan dengan pemecahan masalah sehari-hari.

Teori-teori baru yang berkenaan dengan teori graf terus bermunculan dan berkembang. Teorema yang baru ditemukan adalah berkenaan dengan multiplisitas siklus dari graf total. Hal ini dibahas oleh M.M. Akbar Ali dan S. Panayappan dalam *International Journal of Engineering, Science and Technology* 2010.

Adanya jurnal tersebut tentunya sangat berkontribusi positif bagi perkembangan Teori Graf, mengingat bahwa referensi mengenai Teori Graf relatif lebih sedikit dibanding dengan referensi-referensi untuk cabang Matematika yang lain.

Dalam jurnal tersebut Ali dan Panayappan hanya membahas multiplisitas siklus dari total graf pada graf C_n , P_n , dan $K_{1,n}$. Sedangkan Muslihatin dalam skripsinya membahas multiplisitas siklus dari graf total pada graf kipas F_n dan graf roda W_n . Hal ini masih memerlukan pengembangan lebih lanjut, mengingat banyaknya jenis-jenis graf bersiklus yang merupakan pengembangan dari graf-

graf tersebut. Seperti graf tangga L_n yang merupakan hasil kali kartesius graf lintasan $P_2 \times P_n$, dan graf *double star* $S_{n,n+1}$ yang terdiri dari dua graf *star* S_n dan S_{n+1} dimana titik sentralnya (pusat) dari kedua graf tersebut saling *adjacent*.

Oleh sebab itu, dalam penelitian ini penulis tertarik untuk mengembangkannya dan membahas lebih lanjut mengenai multiplisitas sikel dari graf total pada graf- graf yang memiliki sikel yang merupakan pengembangan dari graf P_n , dan $K_{1,n}$, yaitu dengan judul “**multiplisitas sikel dari graf total pada graf tangga L_n , star S_n , dan double star $S_{n,n+1}$** ”.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana mendapatkan rumus umum multiplisitas sikel dari graf total pada graf tangga L_n ?
2. Bagaimana mendapatkan rumus umum multiplisitas sikel dari graf total pada graf *star* S_n ?
3. Bagaimana mendapatkan rumus umum multiplisitas sikel dari graf total pada graf *double star* $S_{n,n+1}$?

1.3 Tujuan

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Untuk mendapatkan rumus umum multiplisitas sikel dari graf total pada graf tangga L_n .

2. Untuk mendapatkan rumus umum multiplisitas sikel dari graf total pada graf *star* S_n .
3. Untuk mendapatkan rumus umum multiplisitas sikel dari graf total pada graf *double star* $S_{n,n+1}$.

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Bagi peneliti, sebagai sarana memperdalam dan mengembangkan wawasan disiplin ilmu yang telah dipelajari, lebih lanjut untuk mengkaji permasalahan multiplisitas sikel dari graf total pada graf tangga L_n , *star* S_n , dan *double star* $S_{n,n+1}$.
2. Bagi pemerhati matematika, sebagai tambahan pengetahuan mengenai matematika, khususnya pada bidang Teori Graf
3. Bagi lembaga UIN Malang, untuk bahan kepustakaan yang dijadikan sarana pengembangan wawasan keilmuan khususnya di jurusan matematika untuk mata kuliah Teori Graf.

1.5 Batasan Masalah

Pada penelitian ini hanya akan dibahas tentang multiplisitas sikel dari graf total pada graf tangga L_n , *star* S_n , *double star* S_n dengan n adalah anggota bilangan asli.

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam skripsi ini adalah metode penelitian pustaka (*Library research*), yaitu dengan mengumpulkan data dan informasi dari berbagai sumber seperti buku, jurnal, atau makalah-makalah. Penelitian dilakukan dengan melakukan kajian terhadap buku-buku teori graf, jurnal-jurnal atau makalah-makalah yang memuat topik tentang multiplisitas sikel dari graf total. Langkah selanjutnya adalah menentukan rumus umum multiplisitas sikel dari graf total pada graf tangga L_n , *star* S_n , dan *double star* $S_{n,n+1}$.

Adapun langkah-langkah yang digunakan oleh peneliti dalam membahas penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menggambar graf tangga L_n , *star* S_n , dan *double star* $S_{n,n+1}$.
2. Menggambar graf total dari graf-graf tersebut.
3. Menganalisis multiplisitas sikel dari graf total pada graf tangga L_n , *star* S_n , dan *double star* $S_{n,n+1}$.
4. Menentukan pola dari multiplisitas sikel dari graf total pada graf tangga L_n , *star* S_n , dan *double star* $S_{n,n+1}$.
5. Merumuskan rumus umum dari multiplisitas sikel dari graf total pada graf tangga L_n , *star* S_n , dan *double star* $S_{n,n+1}$.
6. Melakukan pembuktian pada rumus umum yang dihasilkan.
7. Memberikan kesimpulan akhir dari hasil penelitian.

1.7 Sistematika Penulisan

Agar penulisan skripsi ini lebih terarah, mudah ditelaah dan dipahami, maka digunakan sistematika penulisan yang terdiri dari 4 bab. Masing-masing bab dibagi ke dalam beberapa subbab dengan rumusan sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN: Pendahuluan meliputi latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penyusunan.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA: Bagian ini terdiri atas konsep-konsep (teori-teori) yang mendukung bagian pembahasan. Konsep-konsep tersebut antara lain membahas tentang pengertian graf, *adjacent* dan *incident*, graf terhubung, graf total, multiplisitas sikel, graf tangga L_n , *star* S_n , dan *double star* $S_{n,n+1}$, serta teori-teori lain yang berkaitan.

BAB III PEMBAHASAN: Pembahasan berisi tentang bagaimana mendapatkan rumus umum dari multiplisitas sikel dari graf total pada graf tangga L_n , *star* S_n , dan *double star* $S_{n,n+1}$, serta bagaimana membuktikan rumus umum yang telah diperoleh.

BAB IV PENUTUP: Bab ini berisi kesimpulan dari penelitian yang telah dilakukan, dan juga saran yang diberikan sebagai pertimbangan bagi peneliti selanjutnya.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Graf

2.1.1 Definisi Graf

Teori graf merupakan pokok bahasan yang sudah tua usianya namun memiliki banyak terapan sampai saat ini. Graf digunakan untuk mempresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut. Representasi visual dari graf adalah dengan menyatakan objek dinyatakan sebagai noktah, bulatan, atau titik, sedangkan hubungan antar objek dinyatakan dengan garis (Munir, 2005: 353). Secara matematis, graf didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 1

Graf G adalah himpunan tak-kosong yang berhingga dari objek-objek yang disebut titik (*vertex*) bersama dengan himpunan pasangan tak-terurut (yang mungkin kosong) dari titik-titik berbeda di G yang disebut sisi (*edge*). Himpunan titik dari G dinotasikan dengan $V G$, sedangkan himpunan sisi dinotasikan dengan $E G$ (Chartrand dan Lesniak, 1986: 4).

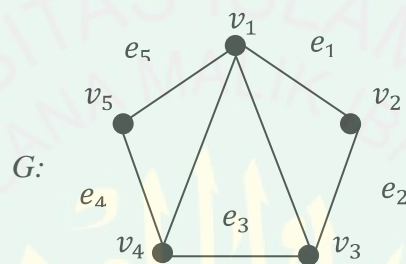
Banyaknya unsur di V disebut derajat (*order*) dari G dan dilambangkan dengan $p(G)$ dan banyaknya unsur di E disebut ukuran (*size*) dari G dan dilambangkan $q(G)$, jika graf yang dibicarakan hanya graf G , maka *order* dan *size* dari G tersebut cukup ditulis p dan q (Chartrand dan Lesniak, 1986:4). Dengan kata lain, Graf G adalah himpunan tak-kosong $V G$ yang berhingga dari objek-objek yaitu titik dengan himpunan pasangan tak-terurut $E G$ dari objek-objek yang disebut sisi.

Perhatikan graf G yang memuat titik $V G$ dan himpunan sisi $E G$ seperti berikut ini:

$$V G = v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$$

$$E G = e_1, e_2, e_3, e_4, e_5$$

Graf G tersebut secara lebih jelas dapat digambar sebagai berikut.



Gambar 2.1 Graf G berorder 5

Graf G mempunyai 5 titik sehingga order G adalah $p = 5$. Sedangkan sisinya berjumlah 7, sehingga ukuran graf G adalah $q = 7$.

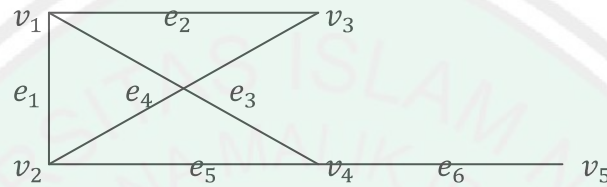
2.1.2 Adjacent dan Incident

Definisi 2

Sisi $e = u, v$ dikatakan menghubungkan titik u dan v . jika $e = u, v$ adalah sisi pada graf G , maka u dan v adalah titik yang terhubung langsung (*adjacent*), sementara itu u dan e , sama halnya dengan v dan e disebut terkait langsung (*incident*). Lebih jauh, jika e_1 dan e_2 berbeda pada G terkait langsung (*incident*) dengan sebuah titik bersama, maka e_1 dan e_2 disebut sisi adjacent (Chartrand dan Lesniak, 1986: 4).

Untuk mempermudah penulisan, selanjutnya titik u atau v akan disimbolkan dengan v_k , sedangkan sisi $e = u, v$ akan disimbolkan dengan e_l , dengan k adalah nomor dari titik dan l adalah nomor dari sisi.

Perhatikan graf berikut



Gambar 2.2 Graf G dengan titik *adjacent* dan *incident*

Berdasarkan gambar graf G tersebut, maka titik v_1 dan v_2 terhubung langsung (*adjacent*), demikian juga dengan v_1 dan v_3 , v_1 dan v_4 , serta v_4 dan v_5 . Titik v_1 dan v_5 tidak terhubung langsung, demikian juga dengan titik v_2 dan v_5 , serta titik v_3 dan v_5 .

Sisi e_1 terkait langsung (*incident*) dengan titik v_1 dan v_2 . Sisi e_2 terkait langsung dengan titik v_1 dan v_3 . Sisi e_1 tidak terkait langsung dengan titik v_3 dan v_4 . Perlu diperhatikan bahwa satu sisi hanya dapat terkait langsung dengan dua titik yang berbeda. Hal ini karena satu sisi hanya menghubungkan dua titik yang berbeda (Abdussakir, 2009: 7).

2.1.3 Derajat Titik

Definisi 3

Derajat dari suatu titik v pada graf G adalah banyak sisi pada graf G yang terkait langsung dengan titik v . Derajat suatu titik v di G dinotasikan dengan $deg_G v$. Suatu titik berderajat 0 disebut suatu titik terisolasi dan titik yang berderajat 1 disebut titik ujung (Chartrand dan Lesniak, 1986:7).

Teorema 1.

Misalkan G adalah sebuah graf dengan *order* p dan *size* q , dimana $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$. Maka

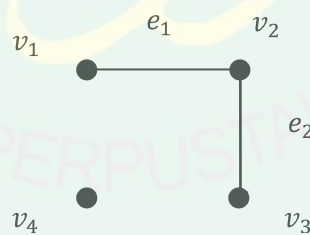
$$\sum_{i=1}^p d_G v_i = 2q$$

(Chartrand dan Lesniak, 1986: 7).

Bukti

Setiap menghitung derajat suatu titik di G , maka satu sisi dihitung 1 kali. Karena setiap sisi menghubungkan dua titik berbeda maka ketika menghitung derajat semua titik, sisi akan terhitung dua kali. Dengan demikian diperoleh bahwa jumlah semua derajat titik di G sama dengan 2 kali banyak sisi di G (Abdussakir dkk. 2009: 11).

Contoh.



Gambar 2.3 Graf G dengan titik berderajat 1, 2, dan 0

Titik v_1 mempunyai derajat 1, $deg_G(v_1) = 1$, titik v_2 mempunyai derajat 2, $deg_G(v_2) = 2$ dan titik v_4 mempunyai derajat 0, $deg_G(v_4) = 0$. Titik v_1 dan titik v_3 disebut titik ujung. Sedangkan titik v_4 disebut titik terisolasi.

2.2 Graf Terhubung

Definisi 4

Jalan (*walk*) dari sebuah graf G adalah rangkaian alternatif dari titik dan sisi $v_0, e_1, v_1, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n$, berawal dan berakhir pada titik yang mana masing-masing garis adalah *incident* dengan dua titik sebelum dan berikutnya. Jalan ini menghubungkan v_0 dan v_n (Chartrand dan Lesniak, 1986: 26).

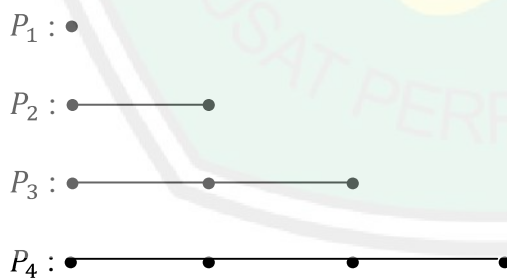
Definisi 5

Trail adalah jalan (*walk*) yang semua sisinya berbeda (Chartrand dan Lesniak, 1986: 26).

Definisi 6

Lintasan (*Path*) adalah jalan (*Walk*) yang semua titiknya berbeda. Dengan demikian, semua lintasan adalah *trail* (Chartrand dan Lesniak, 1986: 26).

Contoh



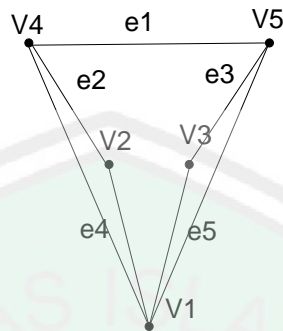
Gambar 2.4 Graf Lintasan

Definisi 7

Sikel (*cycle*) adalah *walk* yang tertutup dengan n titik berbeda dan $n \geq 3$

Harary, 1969: 13 .

Contoh

Gambar 2.5 *Trail, Path, dan Sikel pada Graf G*

Pada gambar 2.5 menunjukkan bahwa jalan yang melewati titik v_1, v_2, v_4, v_5, v_3 disebut lintasan karena melewati semua titik yang berbeda. Dengan demikian, jalan tersebut juga merupakan *trail*, karena melewati semua sisi yang berbeda. Sedangkan sikel ditunjukkan dengan lintasan yang melalui $v_1, v_2, v_4, v_5, v_3, v_1$.

2.3 Titik Sentral (Pusat)

Definisi 8

Untuk suatu graf terhubung G , maka jarak (*distance*) $d(v_1, v_2)$ antara dua titik v_1 dan v_2 di G adalah panjang dari lintasan terpendek yang menghubungkan v_1 dan v_2 di G (Chartrand dan Lesniak, 1986: 28).

Definisi 9

Eksentrisitas (*eccentricity*) $e(v)$ dari suatu titik v pada graf terhubung G merupakan maksimum $d(v, u) : u \in V(G)$ (Chartrand dan Lesniak, 1986: 29).

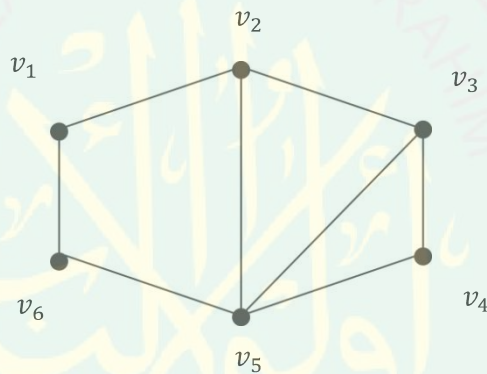
Definisi 10

Radius $rad G$ didefinisikan sebagai minimum dari $e v$ sedangkan *diameter* ($diam$) G adalah maksimum $e v$ (Chartrand dan Lesniak, 1986: 29).

Definisi 11

Suatu titik v dikatakan titik sentral jika $e v = rad G$ (Chartrand dan Lesniak, 1986: 29).

Contoh



Gambar 2.6 Graf dengan Radius 3 dan Diameter 3

Jarak pada graf G adalah:

$$d v_1, v_2 = 1, d v_1, v_3 = 2, d v_1, v_4 = 3, d v_1, v_5 = 2,$$

$$d v_1, v_6 = 1, d v_2, v_1 = 1, d v_2, v_3 = 1, d v_2, v_4 = 2,$$

$$d v_2, v_5 = 1, d v_2, v_6 = 2, d v_3, v_1 = 2, d v_3, v_2 = 1,$$

$$d v_3, v_4 = 1, d v_3, v_5 = 1, d v_3, v_6 = 2, d v_4, v_1 = 3,$$

$$d v_4, v_2 = 2, d v_4, v_3 = 1, d v_4, v_5 = 1, d v_4, v_6 = 1,$$

$$d v_5, v_1 = 2, d v_5, v_2 = 1, d v_5, v_3 = 1, d v_5, v_4 = 1,$$

$$d v_5, v_6 = 1, d v_6, v_1 = 1, d v_6, v_2 = 2, d v_6, v_3 = 2,$$

$$d v_6, v_4 = 2, d v_6, v_5 = 1.$$

Eksentrisitas pada graf G di atas adalah $e_{v_1} = 3, e_{v_2} = 2, e_{v_3} = 2, e_{v_4} = 3, e_{v_5} = 2$ dan $e_{v_6} = 2$.

Radius G adalah $rad G = 2$.

Diameter G adalah $diam G = 3$.

Titik sentral (pusat) G adalah v_2, v_3, v_5, v_6 .

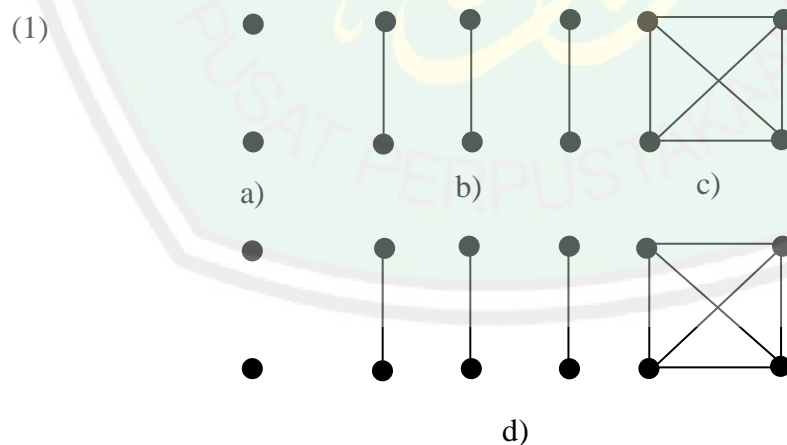
2.4 Operasi-operasi pada graf

2.4.1 Gabungan (Union)

Definisi 12

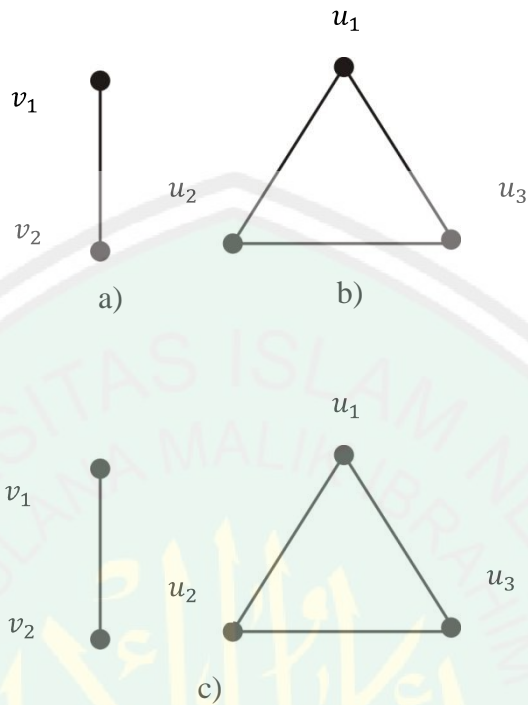
Gabungan (union) dari G_1 dan G_2 , ditulis $G = G_1 \cup G_2$, adalah graf dengan $V G = V G_1 \cup V G_2$ dan $E G = E G_1 \cup E G_2$. Jika graf G merupakan gabungan dari sebanyak n graf H , $n \geq 2$, maka ditulis $G = nH$ (Abdussakir, 2009: 33).

Contoh



Gambar 2.7 a) Graf $2K_1$ b) Graf $3K_2$ c) Graf K_4 d) Graf $2K_1 \cup 3K_2 \cup K_4$

(2)



Gambar 2.8 a) Graf K_1 b) Graf K_3 c) Graf $K_1 \cup K_3$

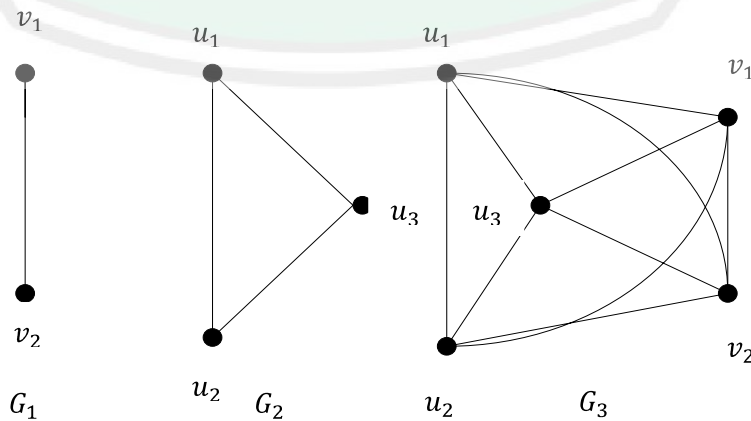
2.4.2 Penjumlahan (Join)

Definisi 13

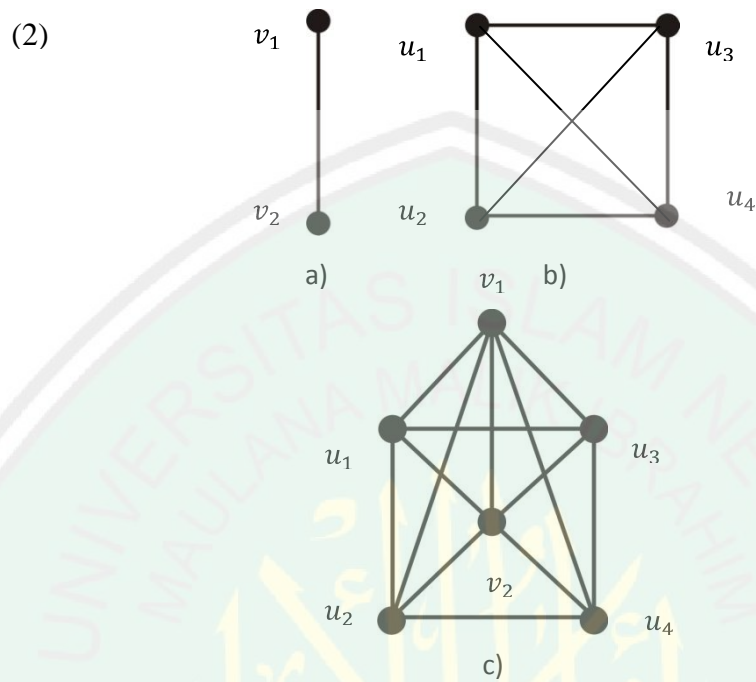
Penjumlahan (Join) dari G_1 dan G_2 , ditulis $G = G_1 + G_2$, adalah graf dengan $V G = V G_1 \cup V G_2$ dan $E G = E G_1 \cup E G_2 \cup uv | u \in V G_1 \text{ dan } v \in V G_2$ (Abdussakir, 2009: 33).

Contoh

(1)



Gambar 2.9 G_1 Graf Komplit Berorder 2, G_2 Graf Komplit Berorder 3, $G_3 = G_1 + G_2$



Gambar 2.10 a) Graf K_2 , b) Graf K_4 c) Graf $K_2 + K_4$

2.4.3 Perkalian Cartesius

Definisi 14.

Perkalian cartesius dari G_1 dan G_2 , ditulis $G = G_1 \times G_2$ adalah graf dengan $V G = V G_1 \times V G_2$ dan dua titik v_1, v_2 dan u_1, u_2 dari G terhubung langsung (*adjacent*) jika dan hanya jika

$$v_1 = u_1 \text{ dan } v_2 u_2 \in E G_2$$

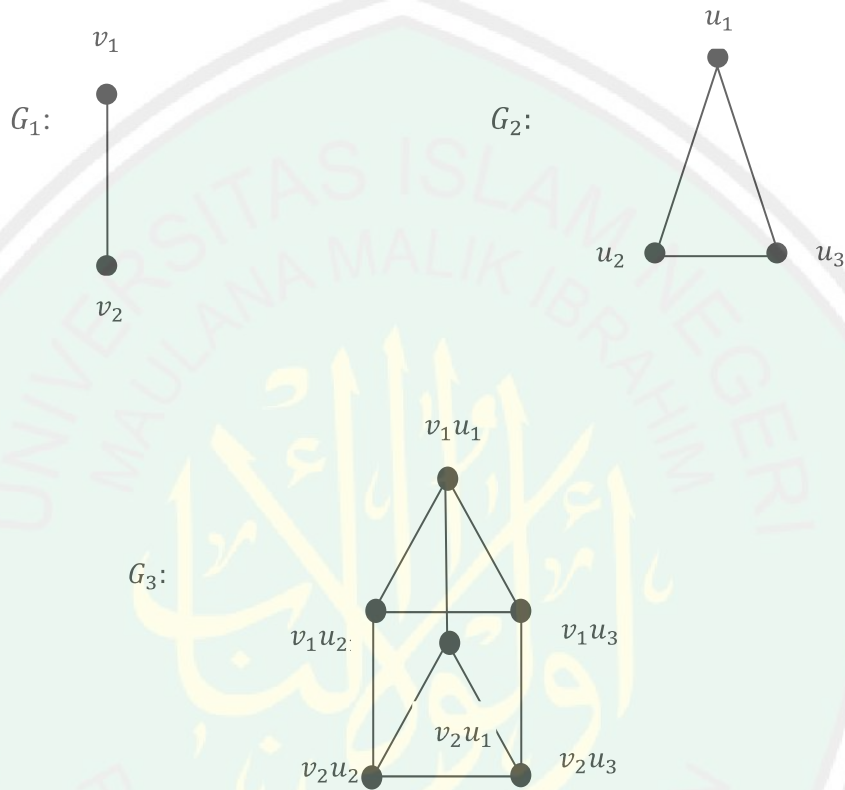
atau

$$v_2 = u_2 \text{ dan } v_1 u_1 \in E G_1$$

(Abdussakir, 2009: 34).

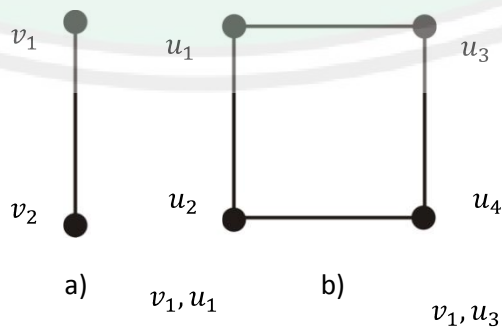
Contoh

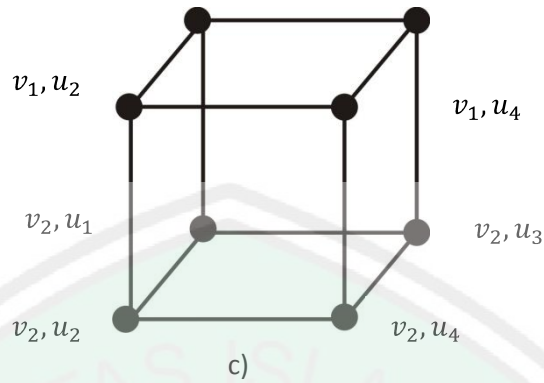
(1)



Gambar 2.11 G_1 Graf Komplit Berorder 2, G_2 Graf Komplit Berorder 3, $G_3 = G_1 \times G_2$

(2)





Gambar 2.12 a) Graf K_2 , b) Graf K_4 c) Graf $K_2 \times K_4$

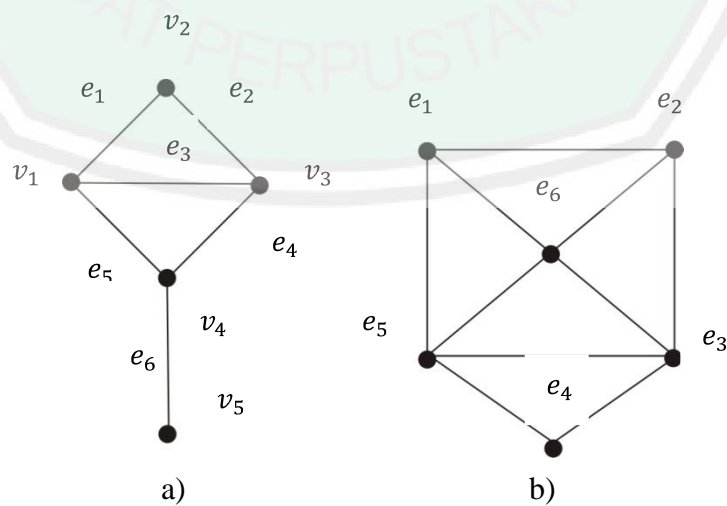
2.5 Graf-Graf dengan Nama Tertentu

2.5.1 Graf Garis

Definisi 15

Misal graf G dengan himpunan titik $V G$ dan himpunan sisi $E G$. Graf garis (*line graph*) dari G dinotasikan dengan $L(G)$ adalah graf dengan $V L G = E G$ dan titik di $L(G)$ akan terhubung langsung jika dan hanya jika sisi yang bersesuaian terhubung langsung di G (Abdussakir, 2009: 37).

Contoh



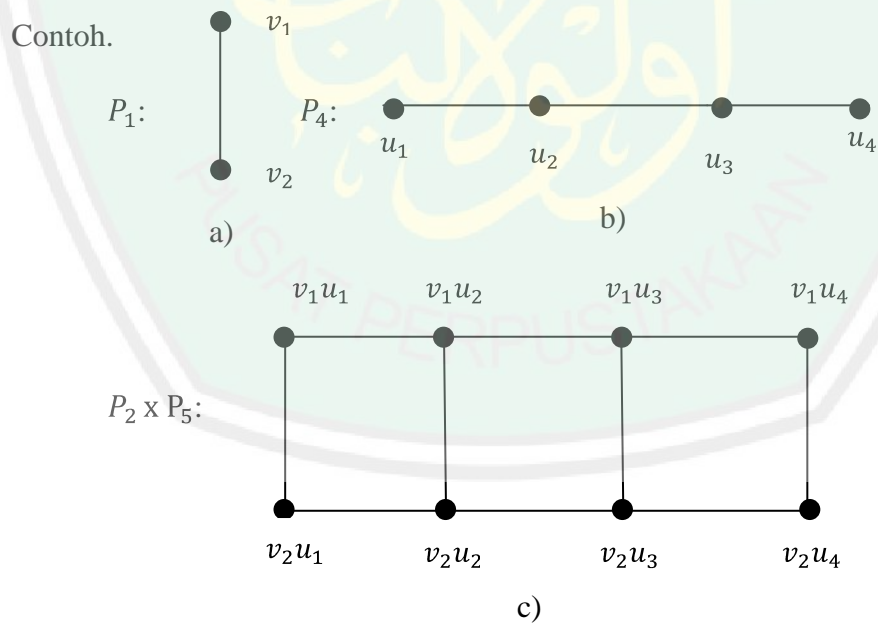
Gambar 2.13 a) Garf G b) Graf Garis $L G$

Graf G mempunyai himpunan titik $V G = v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$ dan himpunan sisi $E G = e_1, e_2, e_3, e_4, e_5$. Graf garis dari G , yakni $L(G)$ mempunyai himpunan titik $V L G = E G = e_1, e_2, e_3, e_4, e_5$. Titik e_1 dan e_2 terhubung langsung di $L(G)$ karena sisi e_1 dan e_2 terhubung langsung di G (Abdussakir, 2009: 38).

2.5.2 Graf Tangga

Definisi 16

Graf tangga (*ladder*) adalah graf yang dibangun dari hasil kali kartesius graf lintasan P_2 dan P_n , yaitu $P_2 \times P_n$. Graf tangga dinotasikan dengan L_n (Tsulutsy, 2009: 22).



Gambar 2.14 a) Graf Lintasan P_1 b) Graf Lintasan P_2 c) Graf Tangga $L_4 = P_2 \times P_4$

2.5.3 Graf Komplit

Definisi 17

Suatu graf G dinamakan graf komplit (*complete graph*) jika setiap dua titik diantara titik-titiknya terhubung langsung (*adjacent*). Graf komplit p, q sehingga suatu graf berderajat $p - 1$ mempunyai $q = \frac{p(p-1)}{2}$; graf ini didefinisikan dengan K_n (Chartrand dan Lesniak, 1986: 9).

Dengan demikian, maka graf K_n merupakan graf beraturan $n - 1$ dengan

$$\text{derajat } p = n \text{ dan ukuran } q = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n}{2}$$

Contoh



Gambar 2.15 K_1 (Graf Komplit Berderajat 1), K_2 (Graf Komplit Berderajat 2), K_3 (Graf Komplit Berderajat 3)

2.5.4 Graf Bipartisi Komplit

Definisi 18

Graf Bipartisi G adalah graf yang memiliki himpunan titik V yang dapat dipartisi menjadi dua himpunan bagian (*subset*) V_1 dan V_2 sehingga tiap sisi pada G menghubungkan V_1 dengan V_2 (Harary, 1969: 17).

Definisi 19

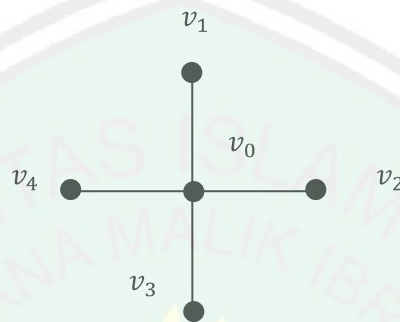
Graf bipartisi komplit (*complete bipartite graph*) adalah graf bipartisi yang tiap sisinya menghubungkan masing-masing titik di V_1 dan V_2 oleh tepat satu titik. Jika V_1 dan V_2 memiliki titik m dan n , maka dinyatakan dengan $K_{m,n}$ (Harary, 1969: 17)

2. 5.5 Graf *Star* dan *Double Star*

Definisi 20

Star (bintang) adalah graf bipartisi komplit dengan $K_{1,n}$ (Harary, 1969: 17-18).

Contoh.



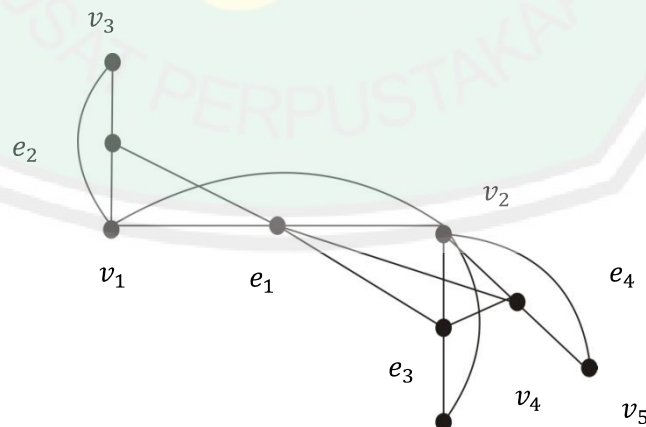
Gambar 2.16 Graf *Star* K_4

Untuk selanjutnya, graf *star* disimbolkan dengan S_n .

Definisi 21

Graf *Double Star* adalah graf yang terdiri dari dua graf *star* S_n dan S_{n+1} dimana titik sentralnya (pusat) dari kedua graf tersebut saling *adjacent* (Muis, 2008: 23).

Contoh



Gambar 2.17 Graf *Double Star* $S_{2,3}$

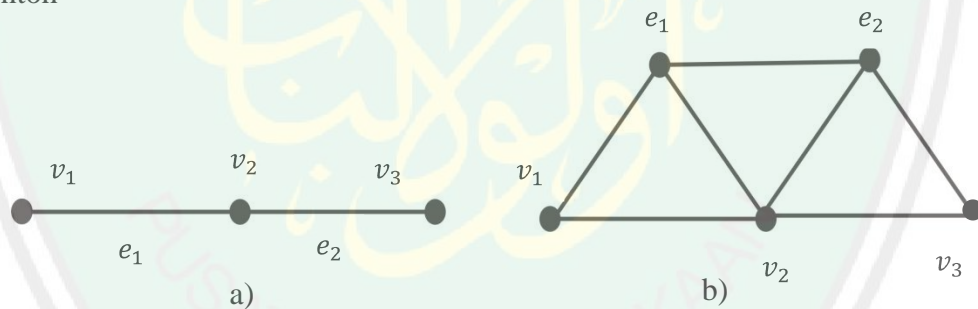
Gambar di atas adalah graf *double star* dengan titik sentralnya adalah v_1 dan v_2 .

2.6 Graf Total

Definisi 22.

Jika G adalah sembarang graf, $V(G)$ dan $E(G)$ adalah himpunan titik dan sisi dari graf G . Graf total yang dinotasikan dengan $T(G)$ didefinisikan sebagai berikut. $V(TG) = V(G) \cup E(G)$. Dua titik v_1 dan v_2 dalam $V(TG)$ *adjacent* dalam $T(G)$ jika dan hanya jika memenuhi salah satu dari syarat-syarat berikut: i) titik v_1, v_2 di dalam $V(G)$ dan v_1 *adjacent* dengan v_2 dalam G , ii) e_1, e_2 terdapat dalam $E(G)$ dan e_1, e_2 *adjacent* dalam G iii) v_1 dalam $V(G)$, dan v_2 dalam $E(G)$, dan v_1 dan v_2 *incident* dalam G (Ali dan Panayappan, 2010: 1).

Contoh



Gambar 2.18 a) Graf P_3 b) Graf Total dari P_3

2.7 Multiplisitas siklus

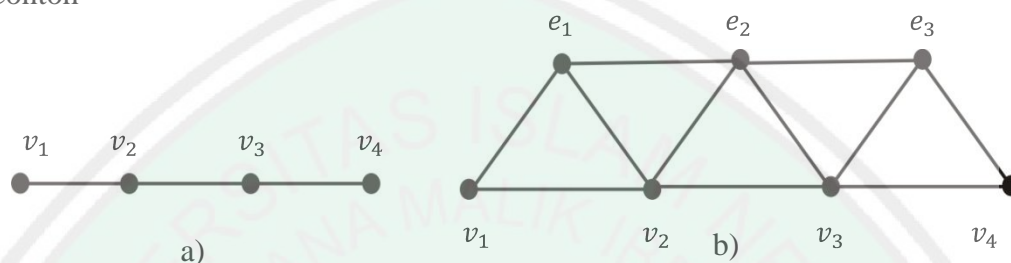
Definisi 23.

Jika G adalah sebuah graf, $V(G)$ dan $E(G)$ adalah himpunan titik dan sisi dari graf G . $CM(G)$ yang merupakan notasi dari multiplisitas siklus dari graf G adalah jumlah maksimal sisi siklus yang disjoint pada graf G (Ali dan Panayappan, 2010: 1).

Teorema 2.

Multiplisitas sikel dari graf total n -Cycle $CM T P_n = n - 1$ (Ali dan Panayappan, 2010: 1).

Contoh



Gambar 2.19 a) Graf P_4 b) Graf Total dari P_4

Dari gambar di atas, sikel yang disjoint sisi dari graf total pada graf P_4 adalah $v_1e_1v_2$, $v_2e_2v_3$, dan $v_3e_3v_4$ sehingga multiplisitas sikelnya adalah 3. Dapat ditulis sebagai berikut $CM T P_4 = 3$.

2.8 Kajian Teori Graf dalam Al-Qur'an

Teori Graf adalah salah satu cabang ilmu matematika, dimana dalam teori graf terdapat pasangan himpunan yang memuat elemen-elemen titik dan pasangan tak terurut dari titik yang disebut sisi, dimana himpunan titiknya merupakan himpunan tak kosong dan sisinya mungkin kosong. Sehingga bila suatu titik dihubungkan dengan titik yang lain dengan penghubungnya merupakan suatu sisi maka disebut *adjacent*.

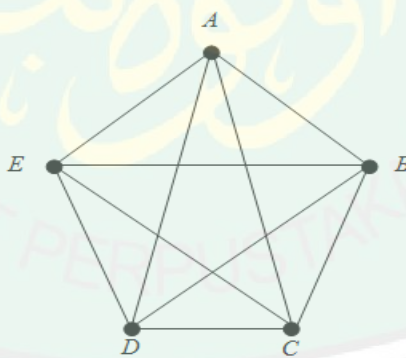
Sebagai contoh adalah hubungan antara manusia satu dengan manusia lainnya misalnya dalam sebuah proses pertemanan, dimana manusia sebagai himpunan titik dan hubungan silaturrami sebagai sisinya. Jika ingin mempunyai

banyak teman dalam hidup, maka harus menjalin hubungan silaturahmi dengan orang lain atau *adjacent*, yaitu istilah dalam teori graf yang berarti terhubung langsung. Menjalin hubungan dengan sesama manusia diperintahkan oleh Allah sebagaimana dalam Al-Qur'an surat Ar-Ra'd ayat 21 di bawah ini.

وَالَّذِينَ يَصِلُونَ مَا أَمَرَ اللَّهُ بِهِ أَنْ يُوصَلَ وَيَخْشَوْنَ رَبَّهُمْ وَيَخَافُونَ سُوءَ الْحِسَابِ ﴿٢١﴾

Artinya: “dan orang-orang yang menghubungkan apa-apa yang Allah perintahkan supaya dihubungkan, dan mereka takut kepada Tuhannya dan takut kepada hisab yang buruk”.

Kata “dihubungkan” dalam ayat di atas adalah mengadakan hubungan silaturahmi dan tali persaudaraan. Jika digambarkan dalam teori graf hubungan silaturahmi antara manusia satu dengan lainnya, katakanlah terdapat 5 orang (A, B, C, D, dan E), dapat diperlihatkan seperti pada gambar di bawah ini.



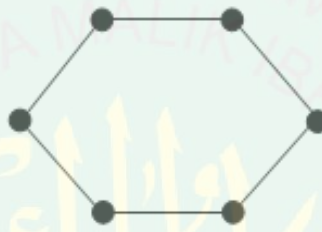
Gambar 2.20 Graf yang Menggambarkan Hubungan Silaturahmi

Representasi teori graf selain hubungan silaturahmi adalah sarang lebah, dimana lebah membangun sarangnya dari dulu hingga sekarang menggunakan struktur segi enam. Jika sarang lebah dipandang berdasar teori graf terdapat dalam Al-Qur'an sehubungan dengan lebah, yaitu surat An-Nahl ayat 68.

وَأَوْحَىٰ رَبُّكَ إِلَى النَّحْلِ أَنِ اتَّخِذِي مِنَ الْجِبَالِ بُيُوتًا وَمِنَ الشَّجَرِ وَمِمَّا يَعْرِشُونَ ﴿٦٨﴾

Artinya: “Dan Tuhanmu mewahyukan kepada lebah: "Buatlah sarang-sarang di bukit-bukit, di pohon-pohon kayu, dan di tempat-tempat yang dibikin manusia".

Sarang lebah dapat dilihat langsung dari bentuk sarangnya, dimana terdapat sisi-sisi dan titik-titik sebagai pengait sisi-sisinya. Seperti pada gambar di bawah ini.



Gambar 2.21 Graf yang Menggambarkan Sarang Lebah

Dari gambar di atas dapat kita lihat bahwa sarang lebah menyerupai graf sikel dengan 6 titik dan 6 sisi.

Dalam konsep Matematika serta rumus yang dihasilkan digunakan untuk mempermudah dalam penyelesaian suatu masalah. Begitu juga dalam Teori Graf, suatu rumus digunakan untuk memecahkan suatu masalah. Dan suatu pembuktian dari rumus itu sangatlah penting, karena digunakan untuk memperkuat kebenaran dari rumus tersebut.

Mukjizat Al-Qur'an, kitab suci umat Islam, tidak pernah diragukan. Sejak diturunkan kepada Nabi Muhammad SAW, hingga kini keasliannya masih terjaga dengan sangat baik. Al-Qur'an terpelihara dari kesalahan. Al-Qur'an sebagai petunjuk bagi manusia, dan Al-Qur'an adalah sumber dari segala sumber ilmu bagi manusia.

Senada dengan hal tersebut, menurut Basya (2005: 17), Al-Quran adalah postulat. Hal itu sejalan dengan apa yang dikatakan Nabi Muhammad SAW yang artinya “Aku tinggalkan untuk kalian dua urusan, tidaklah kamu akan tersesat selama berpegang kepada keduanya. Kitab Allah dan Sunnah Rasul Allah”. Dan sebagaimana dalam Al-Qur’an surat Al-Baqarah ayat 1 dan 2.

الْم ﴿١﴾ ذٰلِكَ الْكِتٰبُ لَا رَيْبَ فِيْهِ هُدًى لِّلْمُتَّقِيْنَ ﴿٢﴾

Artinya: “Alif laam miim. Kitab Al-Quran ini tidak ada keraguan padanya, petunjuk bagi mereka yang bertakwa” .

Sebab itu, suatu data yang datang dari Allah dan RasulNya tidak memerlukan pembuktian lebih lanjut, sekalipun nanti dalam perjalanannya, Matematika juga seolah dapat membuktikan kebenaran tersebut.

Jika Al-Qur’an merupakan suatu postulat yang tidak memerlukan adanya pembuktian, maka dalam Al-Qur’an juga dijelaskan mengenai pentingnya suatu pembuktian. Sebagaimana terdapat dalam surat Al-Baqarah ayat 111.

وَقَالُوا لَنْ يَدْخُلَ الْجَنَّةَ اِلَّا مَنْ كَانَ هُوْدًا اَوْ نَصْرٰى ﴿١١١﴾ تِلْكَ اٰمَانِيْهِمْ ﴿١١٢﴾ قُلْ هَاتُوْا بُرْهٰنَكُمْ اِنْ كُنْتُمْ صٰدِقِيْنَ ﴿١١٣﴾

Artinya: “dan mereka (Yahudi dan Nasrani) berkata: “Sekali-kali tidak akan masuk surga kecuali orang-orang (yang beragama) Yahudi atau Nasrani” . Demikian itu hanyalah angan-angan mereka yang kosong belaka. Katakanlah: “ Tunjukkanlah bukti kebenaranmu jika kamu adalah orang yang benar.”

Selain surat di atas, pentingnya suatu pembuktian terutama dalam matematika juga terdapat dalam surat Al-Hujarat ayat 6.

يَأَيُّهَا الَّذِينَ ءَامَنُوا إِن جَاءَكُمْ فَاسِقٌ بِنَبَأٍ فَتَبَيَّنُوا أَن تُصِيبُوا قَوْمًا بِجَهْلَةٍ فَتُصِبْحُوا

عَلَىٰ مَا فَعَلْتُمْ نَادِمِينَ ﴿٦﴾

Artinya: *“Hai orang-orang yang beriman, jika datang kepadamu orang Fasik membawa suatu berita, maka periksalah dengan teliti agar kamu tidak menimpakan suatu musibah kepada suatu kaum tanpa mengetahui keadaanya yang menyebabkan kamu menyesal atas perbuatanmu itu.”*

Dalam surat Al-Hujarat di atas, jika “berita” merupakan konjektur atau pernyataan yang belum diketahui kebenarannya, maka konjektur ini perlu dibuktikan secara matematis sehingga menghasilkan suatu teorema. Berdasarkan kedua ayat di atas, maka jelaslah bahwa pembuktian itu sangat penting terutama dalam pembuktian Matematika.

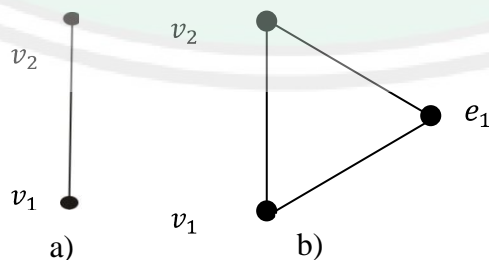
BAB III PEMBAHASAN

Jika G adalah sembarang graf, $V(G)$ dan $E(G)$ adalah himpunan titik dan sisi dari graf G . Graf total yang dinotasikan dengan $T(G)$ didefinisikan sebagai berikut. $V(TG) = V(G) \cup E(G)$. Dua titik v_1 dan v_2 dalam $V(TG)$ adjacent dalam $T(G)$ jika dan hanya jika memenuhi salah satu dari syarat-syarat berikut: i) titik v_1, v_2 di dalam $V(G)$ dan v_1 adjacent dengan v_2 dalam G , ii) e_1, e_2 terdapat dalam $E(G)$ dan e_1, e_2 adjacent dalam G iii) v_1 dalam $V(G)$, dan v_2 dalam $E(G)$, dan v_1 dan v_2 incident dalam G . Sehingga multiplisitas siklus dari graf total merupakan jumlah maksimal sisi siklus yang disjoint dari graf total pada graf G . Pada bab ini akan dibahas mengenai multiplisitas siklus dari graf total pada graf tangga L_n , graf Star S_n , dan graf double star $S_{n,n+1}$.

3.1 Multiplisitas Siklus dari Graf Total pada Graf Tangga L_n

3.1.1 Graf Tangga L_1

Graf tangga L_1 merupakan hasil kali kartesius graf lintasan P_2 dan P_1 , yaitu $P_2 \times P_1$. Graf tangga L_1 dapat digambarkan pada gambar 3.1.1 berikut.



Gambar 3.1.1 a) Graf Tangga L_1 b) Graf Total dari Graf Tangga L_1

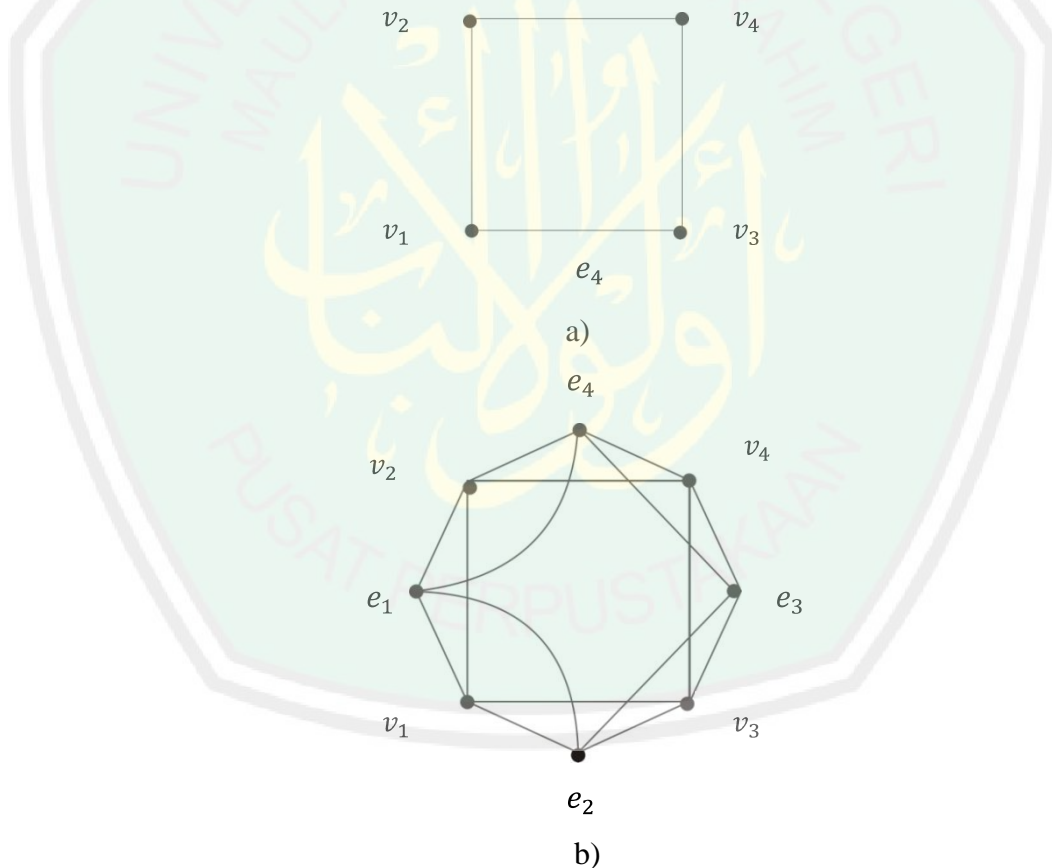
Siklus dari graf L_1 di atas adalah $v_1 e_1 v_2$.

Misal $V L_1 = v_1, v_2$ dan $E L_1 = e_1$, dari definisi graf total di atas, maka diperoleh $V T L_1 = V L_1 \cup E L_1$ dan $E T L_1 = v_i e_i \ i = 1 \cup e_i v_{i+1} \ i = 1 \cup v_i v_{i+1} \ i = 1$. Sikel yang disjoint sisi $C_1 = v_i e_{i-1} v_1 \ i = 2$.

$$\therefore CM T L_1 = 1.$$

3.1.2 Graf Tangga L_2

Graf tangga L_2 merupakan hasil kali kartesius graf lintasan P_2 dan P_1 , yaitu $P_2 \times P_2$. Graf tangga L_2 dapat digambarkan pada gambar 3.1.2 berikut.



Gambar 3.1.2 a) Graf Tangga L_2 b) Graf Total dari Graf Tangga L_2

Sikel yang disjoint sisi dari graf L_2 di atas adalah $v_1 e_1 v_2$; $v_1 e_2 v_3$; $v_3 e_3 v_4$; $v_2 e_4 v_4$ dan $e_1 e_2 e_3 e_4$.

Misal $V L_2 = v_1, v_2, v_3, v_4$ dan $E L_2 = e_1, e_2, e_3, e_4$, dari definisi graf total di atas, maka diperoleh $V T L_2 = V L_2 \cup E L_2$ dan $E T L_2 =$

$$v_i e_i \quad i = 1, 3 \cup v_i e_{i+\frac{i+1}{2}} \quad i = 1 \cup e_i v_{i+1} \quad 1 \leq i \leq 3 \cup v_i e_{i+\frac{i-4}{2}} \quad i = 4 \cup$$

$$v_i e_{i+\frac{i}{2}+1} \quad i = 2 \cup v_i v_{i+1} \quad i = 1, 3 \cup v_i v_{i+2} \quad i = 1, 2 \cup e_i e_{i+1} \quad i = 1, 2, 3$$

$$\cup e_i e_{i+3} \quad i = 1 .$$

Sikel yang disjoint sisi adalah. $C_1 = v_i e_{i-1} v_1 \quad i = 2, 3$, $C_2 = v_i e_{i+\frac{i-3}{2}} v_{i+1} \quad i = 3$,

$C_3 = v_i e_{i+\frac{i+2}{2}} v_{i+2} \quad i = 2$, $C_4 = e_i, e_{i+1}, e_{i+2}, e_{i+3} \quad i = 1$. Terlihat bahwa C_i

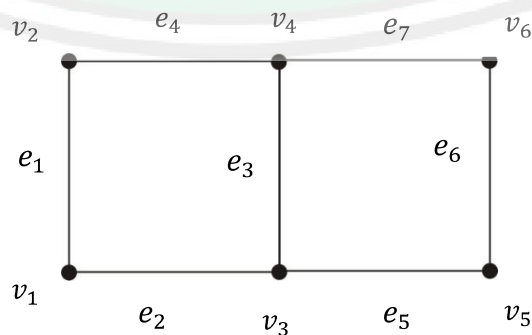
dengan $1 \leq i \leq 4$ adalah himpunan-himpunan yang beranggotakan sikel-sikel yang disjoint sisi dalam L_2 , dimana $C_1 = 2$, $C_2 = 1$, $C_3 = 1$, $C_4 = 1$.

Sehingga $CM T L_2 = C_i = 2 + 1 + 1 + 1 = 5$.

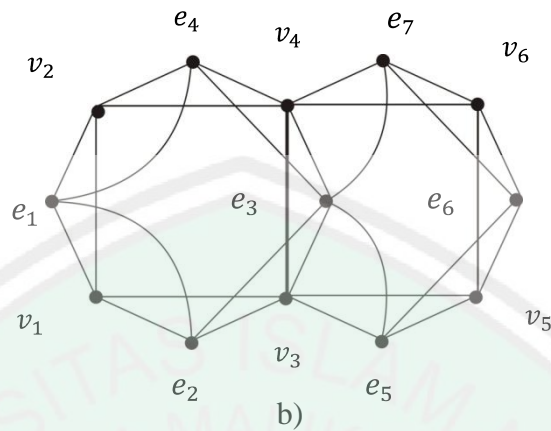
$$\therefore CM T L_2 = 5.$$

3.1.3 Graf Tangga L_3

Graf tangga L_3 merupakan hasil kali kartesius graf lintasan P_2 dan P_3 , yaitu $P_2 \times P_3$. Graf tangga L_3 dapat digambarkan pada gambar 3.1.3 berikut.



a)



Gambar 3.1.3 a) Graf Tangga L_3 b) Graf Total dari Graf Tangga L_3

Sikel yang disjoint sisi dari graf L_3 di atas adalah $v_1e_1v_2$; $v_1e_2v_3$; $v_3e_3v_4$; $v_2e_4v_4$; $v_3e_5v_5$; $v_5e_6v_6$; $v_4e_7v_6$; dan $e_1e_2e_3e_4$; $e_3e_5e_6e_7$.

atau

$$C_1 = v_i e_{i+\frac{i+2}{2}} v_{i+2} \quad i = 2,4$$

$$C_4 = v_i e_{i-1} v_1 \quad i = 2,3$$

$$C_2 = v_i e_{i+\frac{i-3}{2}} v_{i+1} \quad i = 3$$

$$C_5 = e_i, e_{i+2}, e_{i+3}, e_{i+4} \quad i = 3$$

$$C_3 = v_i e_{i+\frac{i-3}{2}} v_{i+1} \quad i = 3,5$$

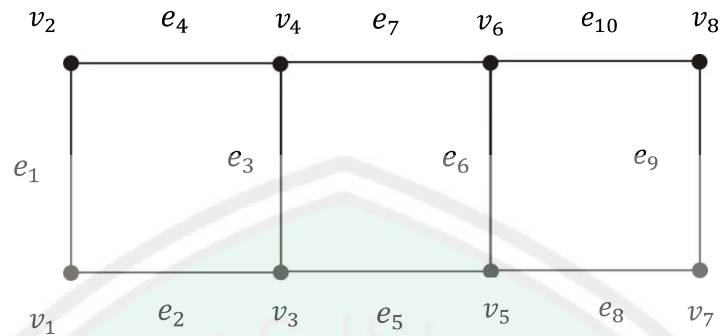
$$C_6 = e_i, e_{i+1}, e_{i+2}, e_i \quad i = 1$$

Terlihat bahwa C_i dengan $1 \leq i \leq 6$ adalah himpunan-himpunan yang beranggotakan sikel-sikel yang disjoint sisi dalam L_3 dimana jumlah anggota dari masing-masing himpunan C adalah $C_1 = 2$, $C_2 = 1$, $C_3 = 2$, $C_4 = 2$, $C_5 = 1$, $C_6 = 1$. Sehingga $CM T L_3 = C_i = 2 + 1 + 2 + 2 + 1 + 1 = 9$.

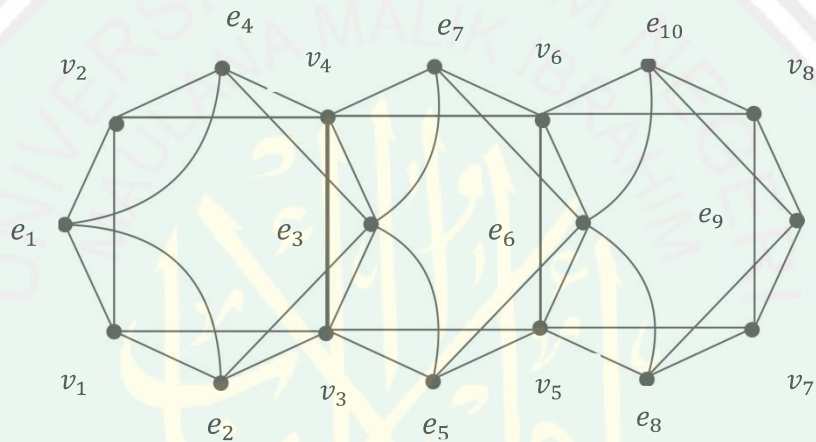
$$\therefore CM T L_3 = 9$$

3.1.4 Graf Tangga L_4

Graf tangga L_4 merupakan hasil kali kartesius graf lintasan P_2 dan P_4 , yaitu $P_2 \times P_4$. Graf tangga L_4 dapat digambarkan pada gambar 3.1.4 berikut.



a)



b)

Gambar 3.1.4 a) Graf Tangga L_4 b) Graf Total dari Graf Tangga L_4

Sikel yang disjoint sisi dari graf L_4 di atas adalah $v_1e_1v_2$; $v_1e_2v_3$; $v_3e_3v_4$; $v_2e_4v_4$; $v_3e_5v_5$; $v_5e_6v_6$; $v_4e_7v_6$; $v_5e_8v_7$; $v_7e_9v_8$; $v_6e_{10}v_8$ dan $e_1e_2e_3e_4$; $e_3e_5e_6e_7$; e_6e_8, e_9e_{10} .

atau

$$C_1 = v_i e_{i+\frac{i+2}{2}} v_{i+2} \quad i = 2, 4, 6$$

$$C_4 = v_i e_{i-1} v_1 \quad i = 2, 3$$

$$C_2 = v_i e_{i+\frac{i+1}{2}} v_{i+2} \quad i = 3, 5$$

$$C_5 = e_i, e_{i+2}, e_{i+3}, e_{i+4} \quad i = 3, 6,$$

$$C_3 = v_i e_{i+\frac{i-3}{2}} v_{i+1} \quad i = 3, 5, 7$$

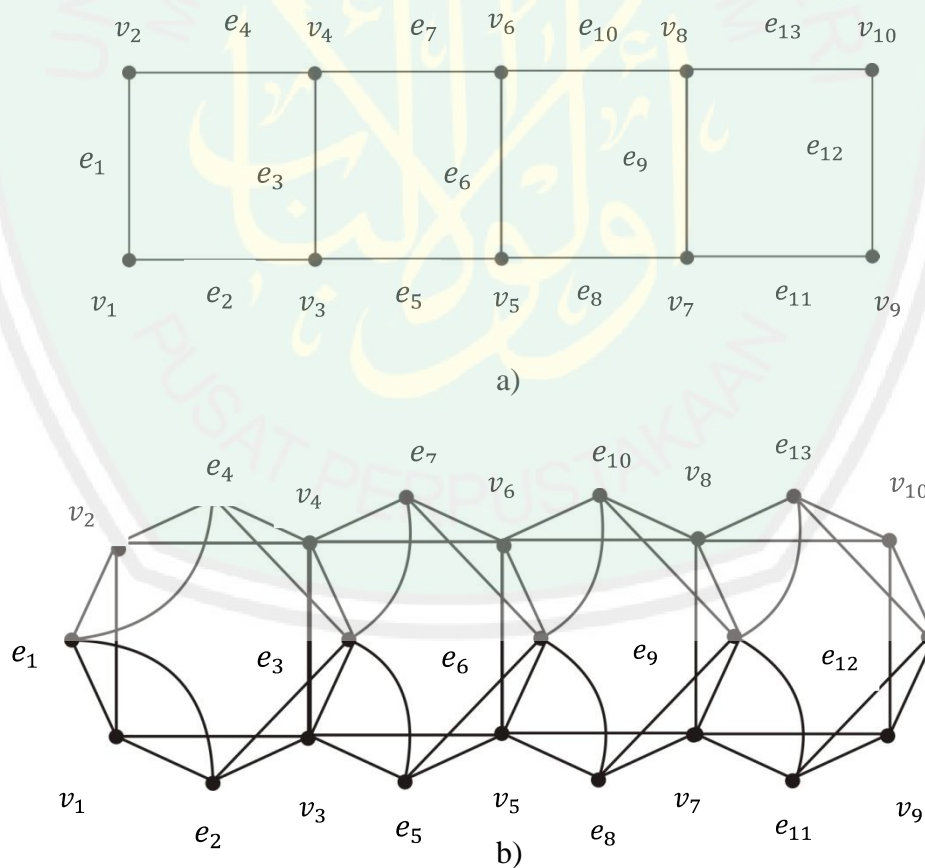
$$C_6 = e_i, e_{i+1}, e_{i+2}, e_3 \quad i = 1$$

Terlihat bahwa C_i dengan $1 \leq i \leq 6$ adalah himpunan-himpunan yang beranggotakan siklus-sikel yang disjoint sisi dalam L_4 dimana jumlah anggota dari masing-masing himpunan C adalah $C_1 = 3, C_2 = 2, C_3 = 3, C_4 = 2, C_5 = 2, C_6 = 1$. Sehingga $CM T L_6 = C_i = 3 + 2 + 3 + 2 + 2 + 1 = 13$.

$$\therefore CM T L_4 = 13.$$

3.1.5 Graf Tangga L_5

Graf tangga L_5 merupakan hasil kali kartesius graf lintasan P_2 dan P_5 , yaitu $P_2 \times P_5$. Graf tangga L_5 dapat digambarkan pada gambar 3.1.5 berikut.



Gambar 3.1.5 a) Graf Tangga L_5 b) Graf Total dari Graf Tangga L_5

Sikel yang disjoint sisi dari graf L_5 di atas adalah $v_1e_1v_2; v_1e_2v_3; v_3e_3v_4; v_2e_4v_4;$
 $v_3e_5v_5; v_5e_6v_6; v_4e_7v_6; v_5e_8v_7; v_7e_9v_8; v_6e_{10}v_8; v_7e_{11}v_9; v_9e_{12}v_{10}; v_8e_{13}v_{10}$ dan
 $e_1e_2e_3e_4; e_3e_5e_6e_7; e_6e_8, e_9e_{10}; e_9e_{11}e_{12}e_{13}.$

atau

$$C_1 = v_i e_{i+\frac{i+2}{2}} v_{i+2} \quad i = 2,4,6,8$$

$$C_4 = v_i e_{i-1} v_1 \quad i = 2,3$$

$$C_2 = v_i e_{i+\frac{i+1}{2}} v_{i+2} \quad i = 3,5,7$$

$$C_5 = e_i, e_{i+2}, e_{i+3}, i_{i+4} \quad i = 3,6,9$$

$$C_3 = v_i e_{i+\frac{i-3}{2}} v_{i+1} \quad i = 3,5,7,9$$

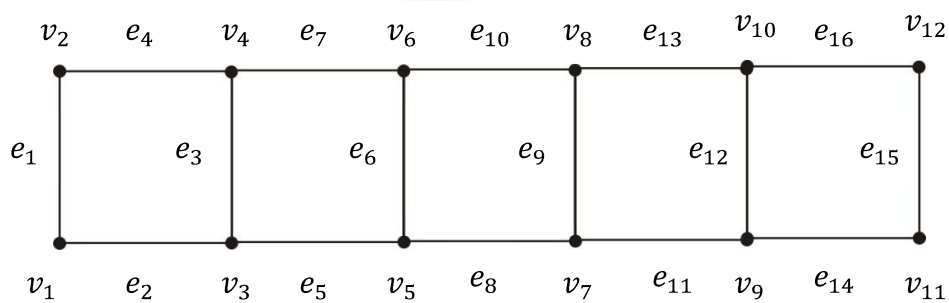
$$C_6 = e_i, e_{i+1}, e_{i+2}, i_3 \quad i = 1$$

Terlihat bahwa C_i dengan $1 \leq i \leq 6$ adalah himpunan-himpunan yang beranggotakan sikel-sikel yang disjoint sisi dalam L_4 dimana jumlah anggota dari masing-masing himpunan C adalah $C_1 = 4, C_2 = 3, C_3 = 4, C_4 = 2, C_5 = 3, C_6 = 1$. Sehingga $CM T L_5 = C_i = 4 + 3 + 4 + 2 + 3 + 1 = 17$.

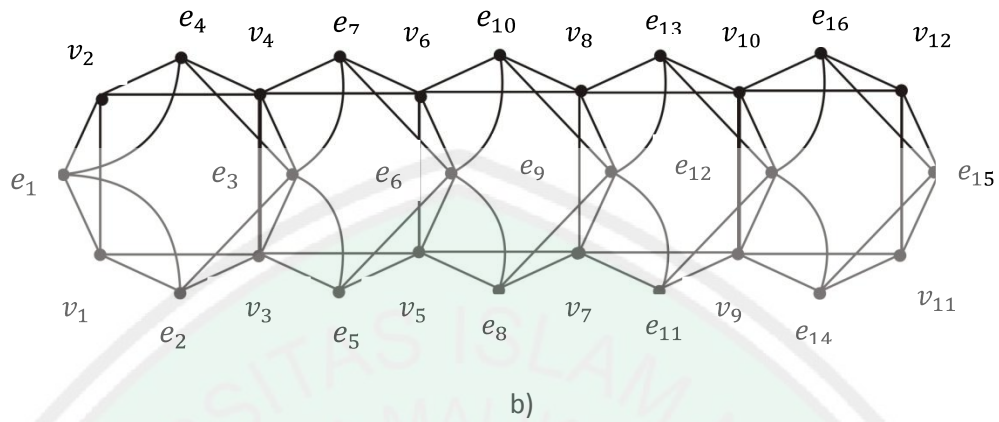
$$\therefore CM T L_5 = 17.$$

3.1.6 Graf Tangga L_6

Graf tangga L_6 merupakan hasil kali kartesius graf lintasan P_2 dan P_6 , yaitu $P_2 \times P_6$. Graf tangga L_6 dapat digambarkan pada gambar 3.1.6 berikut.



a)



Gambar 3.1.6 a) Graf Tangga L_6 b) Graf Total dari Graf Tangga L_6

Sikel yang disjoint sisi dari graf L_6 di atas adalah, $v_1e_1v_2$; $v_1e_2v_3$; $v_3e_3v_4$; $v_2e_4v_4$; $v_3e_5v_5$; $v_5e_6v_6$; $v_4e_7v_6$; $v_5e_8v_7$; $v_7e_9v_8$; $v_6e_{10}v_8$; $v_7e_{11}v_9$; $v_9e_{12}v_{10}$; $v_8e_{13}v_{10}$; $v_9e_{14}v_{11}$; $v_{11}e_{15}v_{12}$; $v_{10}e_{16}v_{12}$; dan $e_1e_2e_3e_4$; $e_3e_5e_6e_7$; e_6e_8, e_9e_{10} ; $e_9e_{11}e_{12}e_{13}$; $e_{12}e_{14}e_{15}e_{16}$.

atau

$$C_1 = v_1e_{i+\frac{i+2}{2}}v_{i+2} \quad 2 \leq i \leq 10, i \text{ genap} \quad C_4 = v_ie_{i-1}v_1 \quad i = 2,3$$

$$C_2 = v_iv_{i+\frac{i+1}{2}}e_{i+2} \quad 3 \leq i \leq 9, i \text{ ganjil} \quad C_5 = e_ie_{i+2}e_{i+3}e_{i+4} \quad 3 \leq i \leq 12, \\ i \text{ kelipatan } 3$$

$$C_3 = v_ie_{i+\frac{i-3}{2}}v_{i+1} \quad 3 \leq i \leq 11, i \text{ ganjil} \quad C_6 = e_ie_{i+1}e_{i+2}e_{i+3} \quad i = 1$$

Terlihat bahwa C_i dengan $1 \leq i \leq 6$ adalah himpunan-himpunan yang beranggotakan sikel-sikel yang disjoint sisi dalam L_6 dimana $C_1 = 5, C_2 = 4, C_3 = 5, C_4 = 2, C_5 = 4, C_6 = 1$. Sehingga $CM T L_6 = C_i = 5 + 4 + 5 + 2 + 4 + 1 = 21$.

$$\therefore CM T L_6 = 21$$

Berdasarkan perhitungan Multiplisitas sikel dari graf tangga di atas, maka diperoleh tabel sebagai berikut.

Tabel 3.1 Multiplisitas Sikel dari Graf Tangga L_n

NO	Graf Tangga L_n	$CM T L_n$
1	L_1	$1=4.1-3$
2	L_2	$5=4.2-3$
3	L_3	$9=4.3-3$
4	L_4	$13=4.4-3$
5	L_5	$17=4.5-3$
6	L_6	$21=4.6-3$
...
n	L_n	$4n - 3$

Dari tabel di atas, terlihat bahwa pola dari multiplisitas sikel dari graf total pada graf tangga L_n adalah $CM T L_n = 4n - 3$

Theorema 1

$$CM T L_n = 4n - 3$$

Bukti.

Sikel-sikel yang disjoint sisi dari graf L_n adalah.

$$C_1 = v_1 e_{i+\frac{i+2}{2}} v_{i+2} \quad 2 \leq i \leq 2n-2 \quad i \text{ genap}$$

$$C_2 = v_i e_{i+\frac{i+1}{2}} v_{i+2} \quad 3 \leq i \leq 2n-3, i \text{ ganjil}$$

$$C_3 = v_i e_{i+\frac{i-3}{2}} v_{i+1} \quad 3 \leq i \leq 2n-1 \text{ . } i \text{ ganjil}$$

$$C_4 = v_i e_{i-1} v_1 \quad i = 2, 3$$

$$C_5 = e_i e_{i+2} e_{i+3} e_{i+4} \quad 3 \leq i \leq 3n-6, i \text{ kelipatan } 3$$

$$C_6 = e_i e_{i+1} e_{i+2} e_{i+3} \quad i = 1$$

Terlihat bahwa C_i dengan $1 \leq i \leq 6$ adalah himpunan-himpunan yang beranggotakan sikel- sikel yang disjoint sisi dalam L_n dimana jumlah anggota dari masing-masing himpunan C bisa dicari dengan menggunakan rumus barisan aritmatika.

Pada C_1 , i dapat dijabarkan dalam bentuk barisan aritmatika yaitu $2, 4, 6, \dots, (2n-2)$ sehingga didapatkan suku pertama adalah $a = 2$ dan beda $b = 2$ serta $U_m = 2n-2$ dimana m adalah batas terbesar dari C_1 , sehingga didapatkan jumlah anggota C_1 dengan perhitungan berikut.

$$U_m = a + m - 1 b$$

$$= 2 + m - 1 \cdot 2$$

$$2n - 2 = 2m$$

$$m = n - 1$$

Dapat ditulis $C_1 = n - 1$

Begitu pula pada C_2 , i dapat dijabarkan dalam bentuk barisan aritmatika yaitu $3, 5, \dots, (2n-3)$ sehingga didapatkan suku pertama adalah $a = 3$ dan beda $b = 2$ serta $U_m = 2n-3$ dimana m adalah batas terbesar dari C_2 , sehingga didapatkan jumlah anggota C_2 dengan perhitungan berikut.

$$U_m = a + m - 1 b$$

$$= 3 + m - 1 \cdot 2$$

$$2n - 3 = 2m + 1$$

$$m = n - 2$$

Dapat ditulis $C_2 = n - 2$

pada C_3 , i dapat dijabarkan dalam bentuk barisan aritmatika yaitu $3, 5, \dots, (2n - 1)$ sehingga didapatkan suku pertama adalah $a = 3$ dan beda $b = 2$ serta $U_m = 2n - 1$ dimana m adalah batas terbesar dari C_3 , sehingga didapatkan jumlah anggota C_3 dengan perhitungan berikut.

$$U_m = a + (m - 1)b$$

$$= 3 + (m - 1)2$$

$$2n - 1 = 2m + 1$$

$$m = n - 1$$

Dapat ditulis $C_3 = n - 1$

Pada C_4 , jumlah anggota sebanyak 2 anggota, yaitu 2 dan 3. Dapat ditulis $C_4 = 2$. Sedangkan pada C_5 , dengan i berada pada interval yang dimulai dari 3 dan dibatasi dengan $3n - 6$, dan hanya berlaku bagi kelipatan 3, maka i dapat dijabarkan dengan $3, 6, 9, \dots, 3n - 6$. Didapatkan $a = 3, b = 3$ dan $U_m = 3n - 6$. sehingga didapatkan jumlah anggota C_4 dengan perhitungan berikut.

$$U_m = a + (m - 1)b$$

$$= 3 + (m - 1)3$$

$$3n - 6 = 3m$$

$$m = n - 2$$

Dapat ditulis $C_5 = n - 2$

Pada C_6 , banyak anggotanya hanya 1, yaitu $e_i e_{i+1} e_{i+2} e_{i+3}$, $i = 1$. Dapat ditulis $C_6 = 1$.

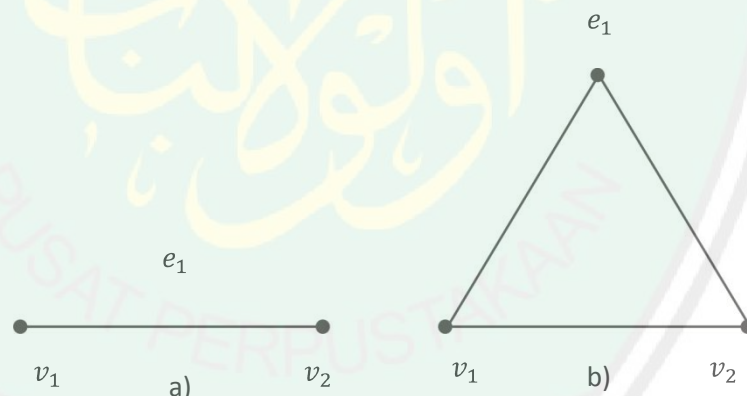
Jadi masing-masing multiplisitas sikel pada tiap himpunan multiplisitas sikel adalah $C_1 = n - 1$, $C_2 = n - 2$, $C_3 = n - 1$, $C_4 = 2$, $C_5 = n - 2$, $C_6 = 1$. Sehingga $CM T L_n = C_i = n - 1 + n - 2 + n - 1 + 2 + n - 2 + 1 = 4n - 3$.

Terbukti bahwa $CM T L_n = 4n - 3$.

3.2 Multiplisitas Sikel dari Graf Total pada Graf Star S_n

3.2.1 Graf Star S_1

Graf star S_n merupakan graf bipartisi komplit $K_{m,n}$ dengan $m = 1$ yaitu $K_{1,m}$. Graf star S_1 dapat digambarkan pada gambar 3.2.1 berikut.



Gambar 3.2.1 a) Graf Star S_1 b) Graf total dari Graf Star S_1

Sikel dari graf S_1 di atas adalah $v_1 e_1 v_2$.

Misal $V S_1 = v_1, v_2$ dan $E S_1 = e_1$. Berdasarkan definisi graf total, maka

$$V T S_1 = v_1 \cup e_i \quad i = 1 \cup v_i \quad i = 2$$

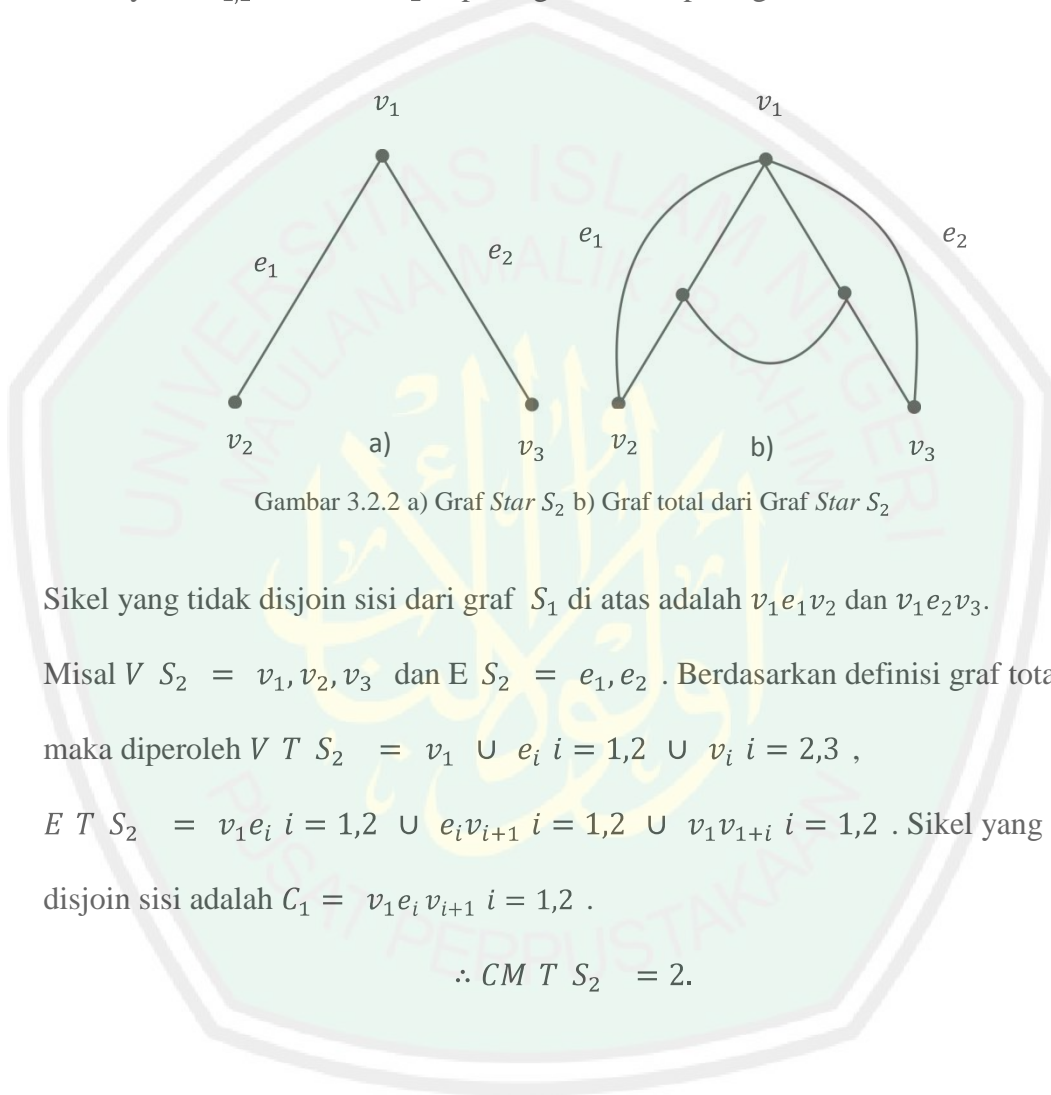
$$E T S_1 = v_1 e_i \quad i = 1 \cup e_i v_{i+1} \quad i = 1 \cup v_1 v_{1+i} \quad i = 1 .$$

Sikel yang disjoint sisi adalah $C_1 = v_1 e_i v_{i+1} \quad i = 1 .$

$$\therefore CM T S_1 = 1.$$

3.2.2 Graf Star S_2

Graf star S_2 merupakan graf bipartisi komplet $K_{m,n}$ dengan $m = 1$ dan $n = 2$ yaitu $K_{1,2}$. Graf star S_2 dapat digambarkan pada gambar 3.2.2 berikut.



Gambar 3.2.2 a) Graf Star S_2 b) Graf total dari Graf Star S_2

Sikel yang tidak disjoint sisi dari graf S_1 di atas adalah $v_1e_1v_2$ dan $v_1e_2v_3$.

Misal $V S_2 = v_1, v_2, v_3$ dan $E S_2 = e_1, e_2$. Berdasarkan definisi graf total,

maka diperoleh $V T S_2 = v_1 \cup e_i \ i = 1, 2 \cup v_i \ i = 2, 3$,

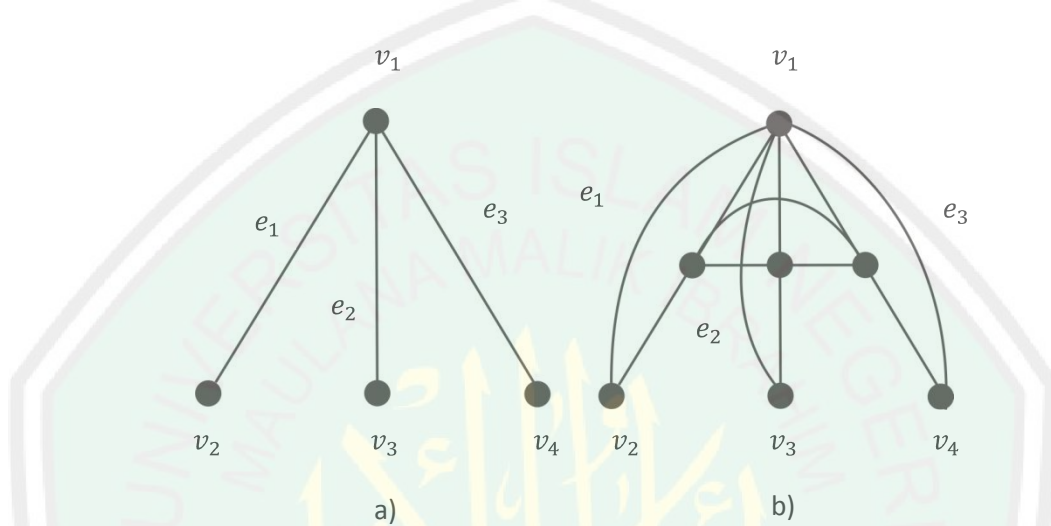
$E T S_2 = v_1e_i \ i = 1, 2 \cup e_iv_{i+1} \ i = 1, 2 \cup v_1v_{1+i} \ i = 1, 2$. Sikel yang

disjoin sisi adalah $C_1 = v_1e_iv_{i+1} \ i = 1, 2$.

$$\therefore CM T S_2 = 2.$$

3.2.2 Graf Star S_3

Graf star S_3 merupakan graf bipartisi komplet $K_{m,n}$ dengan $m = 1$ dan $n = 3$ yaitu $K_{1,3}$. Graf star S_3 dapat digambarkan pada gambar 3.2.3 berikut.



Gambar 3.2.3 a) Graf Star S_3 b) Graf total dari Graf Star S_3

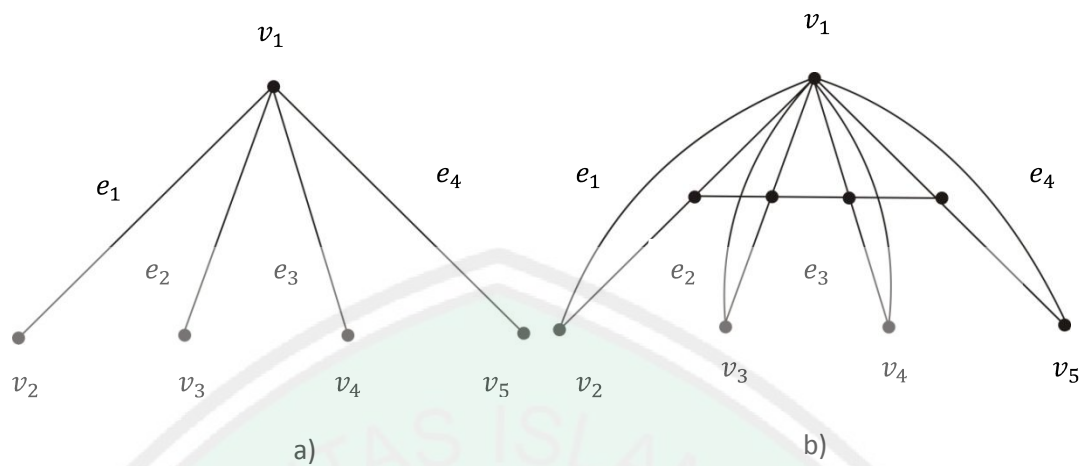
Sikel-sikel yang disjoint sisi dari graf S_3 di atas adalah $v_1e_1v_2$; $v_1e_2v_3$; $v_1e_3v_4$ dan $e_1e_2e_3$.

Misal $V S_3 = v_1, v_2, v_3, v_4$ dan $E S_3 = e_1, e_2, e_3$. Berdasarkan definisi graf total, maka diperoleh $V T S_3 = v_1 \cup e_i \ 1 \leq i \leq 3 \cup v_i \ 2 \leq i \leq 4$ dan $T S_3 = v_1e_i \ i = 1,2,3 \cup e_iv_{i+1} \ i = 1,2,3 \cup v_1v_{1+i} \ i = 1,2,3$. Sikel yang disjoint sisi adalah $C_1 = v_1e_iv_{i+1} \ i = 1,2,3$ dan $C_2 = e_ie_{i+1}e_{i+2} \ i = 1$.

$$\therefore CM T S_3 = 4.$$

3.2.4 Graf Star S_4

Graf star S_4 merupakan graf bipartisi komplet $K_{m,n}$ dengan $m = 1$ dan $n = 4$ yaitu $K_{1,4}$. Graf star S_4 dapat digambarkan pada gambar 3.2.4 berikut.



Gambar 3.2.4 a) Graf $Star S_4$ b) Graf total dari Graf $Star S_4$

Sikle-sikle yang disjoint sisi dari graf S_4 di atas adalah $v_1e_1v_2$; $v_1e_2v_3$; $v_1e_3v_4$; $v_1e_4v_5$ dan $e_1e_2e_3$.

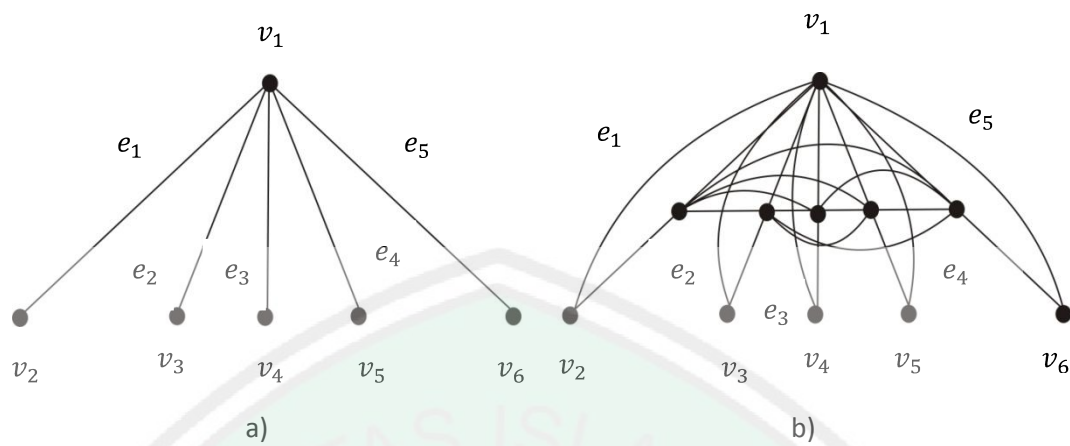
Misal $V S_4 = v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$ dan $E S_4 = e_1, e_2, e_3, e_4$. Berdasarkan definisi graf total, maka diperoleh $V T S_4 = v_1 \cup e_i \ 1 \leq i \leq 4 \cup v_i \ 2 \leq i \leq 5$ dan $E T S_4 = v_1e_i \ i = 1, 2, 3, 4 \cup e_i v_{i+1} \ i = 1, 2, 3, 4 \cup v_1v_{i+1} \ i = 1, 2, 3, 4$.

Sikel yang disjoint sisi adalah $C_1 = v_1e_i v_{i+1} \ i = 1, 2, 3, 4$ dan $C_2 = e_i e_{i+1} e_{i+2} \ i = 1$.

$$\therefore CM T S_4 = 5.$$

3.2.5 Graf $Star S_5$

Graf $star S_5$ merupakan graf bipartisi komplet $K_{m,n}$ dengan $m = 1$ dan $n = 5$ yaitu $K_{1,5}$. Graf $star S_5$ dapat digambarkan pada gambar 3.2.5 berikut.



Gambar 3.2.5 a) Graf Star S_5 b) Graf total dari Graf Star S_5

Sikel-sikel yang disjoint sisi dari graf S_5 di atas adalah $v_1e_1v_2$; $v_1e_2v_3$; $v_1e_3v_4$; $v_1e_4v_5$; $v_1e_5v_6$ dan $e_1e_2e_3$; $e_1e_4e_5$ dan $e_2e_4e_3e_5$.

Misal $V S_5 = v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ dan $E S_5 = e_1, e_2, e_3, e_4, e_5$. Berdasarkan definisi graf total, maka diperoleh $V T S_5 = v_1 \cup e_i \ 1 \leq i \leq 5 \cup v_i \ 2 \leq i \leq 6$ dan $E T S_5 = v_1e_i \ i = 1,2,3,4,5 \cup e_iv_{i+1} \ i = 1,2,3,4,5 \cup v_1v_{1+i} \ i = 1,2,3,4,5$.

Sikel yang disjoint sisi adalah

$$C_1 = v_1e_iv_{i+1} \ i = 1,2,3,4,5 ,$$

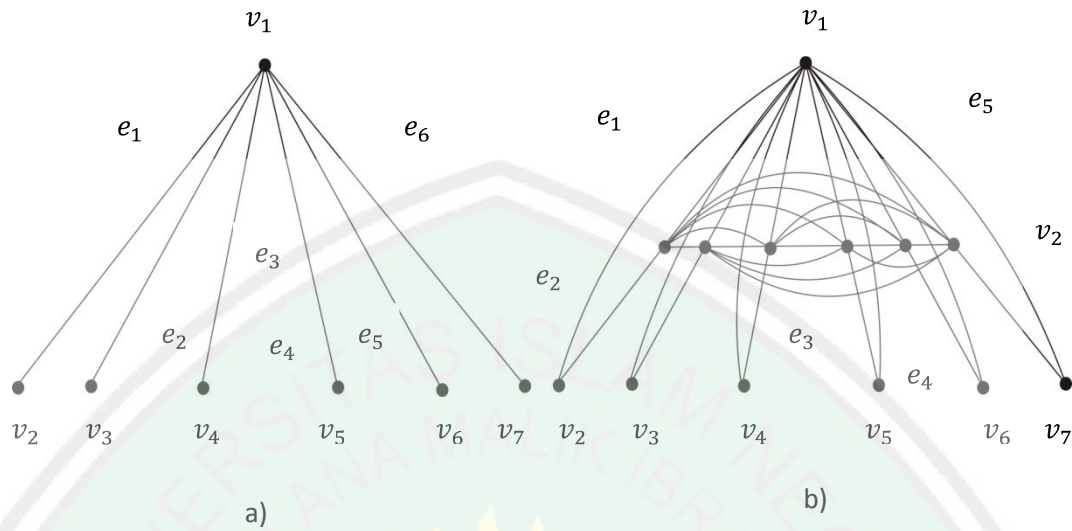
$$C_2 = e_1e_{i+1}e_{i+2} \ i = 1,3$$

$$C_2 = e_ie_{i+2}e_{i+1}e_{i+3} \ i = 2 .$$

$$\therefore CM T S_5 = 8.$$

3.2.6 Graf Star S_6

Graf star S_6 merupakan graf bipartisi komplet $K_{m,n}$ dengan $m = 1$ dan $n = 6$ yaitu $K_{1,6}$. Graf star S_6 dapat digambarkan pada gambar 3.2.6 berikut.



Gambar 3.2.6 a) Graf Star S_6 b) Graf total dari Graf Star S_6

Multiplisitas sikel dari graf S_6 di atas adalah $v_1e_1v_2$; $v_1e_2v_3$; $v_1e_3v_4$; $v_1e_4v_5$; $v_1e_5v_6$; $v_1e_6v_7$ dan $e_1e_2e_3$; $e_1e_4e_5$; $e_2e_4e_6$; $e_3e_5e_6$.

Misal $V S_6 = v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7$ dan $E S_6 = e_1, e_2, e_3, e_4, e_5$. Sikel yang disjoint sisi adalah

$$C_1 = v_1e_i v_{i+1} \quad i = 1,2,3,4,5,6$$

$$C_2 = e_1e_{i+1} e_{i+2} \quad i = 1,3$$

$$C_3 = e_i e_{i+2} e_{i+4} \quad i = 2$$

$$C_4 = e_i e_{i+2} e_{i+3} \quad i = 3$$

$$\therefore CM T S_6 = 10.$$

Berdasarkan perolehan multiplisitas sikel dari graf *star* di atas , maka diperoleh tabel sebagai berikut.

Tabel 3.2 Multiplisitas Sikel dari Graf *Star* S_n

NO	Graf Bipartisi Komplit $K_{1,n}$	$CM T K_{1,n}$
1	S_1	$1 = \frac{1^2+5.1}{6}$
2	S_2	$2 = \frac{2^2+4.2}{6}$
3	S_3	$4 = \frac{3^2+5.3}{6}$
4	S_4	$5 = \frac{4^2+4.4}{6}$
5	S_5	$8 = \frac{5^2+5.5}{6}$
6	S_6	$10 = \frac{6^2+4.6}{6}$
7
8	S_n	$\frac{n^2 + 5n}{6}$ untuk n ganjil $\frac{n^2 + 4n}{6}$ untuk n genap

Teorema 2.

$$CM T K_{1,n} = \begin{cases} \frac{n^2 + 5n}{6} & \text{untuk } n \text{ ganjil} \\ \frac{n^2 + 4n}{6} & \text{untuk } n \text{ genap} \end{cases}$$

Bukti:

Misal $V S_n = v_1, v_2, \dots, v_n$ dan $E S_n = e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$. Berdasarkan definisi graf total di atas, maka diperoleh $V T S_n = v_1 \cup e_i \ 1 \leq i \leq n \cup$

v_i $2 \leq i \leq n + 1$. untuk titik- titik e_1, e_2, \dots, e_n adalah sebuah *clique* berorder n (sebut S_n). Titik v_1 adjacen dengan v_i $2 \leq i \leq n$.

Kasus I: Jika n ganjil

Sikel yang disjoint sisi dari S_n adalah: $C_1 = \{ v_i v_{(i+3)} v_{(i+1)} v_i \mid 1 \leq i \leq n-3 \}$, $C_2 = \{ v_i v_{(i+2)} v_{(i+(n-1))} v_i \mid i \geq 1 \}$, $C_3 = \{ v_i v_{(i+4)} v_{(i+5)} v_i \mid i \geq 1 \}$, $C_4 = \{ v_i v_{(i+2)} v_{(i+3)} v_{(i+4)} v_i \mid i \geq 1 \}$, $C_5 = \{ v_i v_{(i+2)} v_{(i+1)} v_i \mid i \geq 1 \}$. C_1, C_2, C_3, C_4 dan $C_5 = C_i$. $|C_i| = \frac{n^2-n}{6}$, akan dibuktikan banyaknya sikel yang disjoint sisi di C_i

adalah $\frac{n^2-n}{6}$ jika n ganjil. Jika $n = 3$, maka banyaknya sikel yang disjoint sisi di

S_3 adalah 1 yaitu $\{ v_1 v_3 v_2 v_1 \}$ dan dapat ditulis $\frac{n^2-n}{6} = 1$. Samahalnya dengan n

$= 5$, banyaknya sikel yang disjoint sisi di S_5 adalah 3 yaitu

$\{ v_1 v_4 v_2 v_1, v_2 v_5 v_3 v_2, v_1 v_3 v_4 v_5 v_1 \}$ dan dapat ditulis $\frac{n^2-n}{6} = 3$. Perhatikan

bahwa $|C_i|$ dengan $i = 3, 5$ adalah benar.

Anggap $m = 2k-1$ benar, $|C_i| = \frac{n^2-n}{6} = \frac{(2k-1)^2-(2k-1)}{6} = \frac{2k^2-3k+1}{3}$ benar.

Untuk mengetahui apakah $n = 2k + 1$ benar, dapat diperiksa pada perhitungan berikut.

$$\begin{aligned} C_{2k-1} &= \frac{n^2-n}{6} \\ &= \frac{2k+1^2-2k+1}{6} \\ &= \frac{2k^2+k}{3} \end{aligned}$$

Jadi $n = 2k + 1$ benar. Berdasarkan prinsip induksi matematika, dapat disimpulkan

bahwa $|C_i| = \frac{n^2-n}{6}$ benar untuk n ganjil.

Kasus II: Untuk n genap

Sikel yang disjoint sisi dari S_n adalah: $C_1 = \{v_i v_{(i+3)} v_{(i+1)} v_i \mid 1 \leq i \leq n-3\}$, $C_2 = \{v_i v_{(i+5)} v_{(i+6)} v_i \mid i \geq 1\}$, $C_3 = \{v_i v_{(i+2)} v_{(i+(n-1))} v_i \mid i \geq 1\}$, $C_4 = \{v_i v_{(i+4)} v_{(i+(n-1))} v_i \mid i \geq 1\}$. $C_1, C_2, C_3, C_4 = C_i$. $|C_i| = \frac{n^2-2n}{6}$, jumlah maksimal sikel yang disjoint sisi di ambil dari S_n menggunakan langkah-langkah sebagai berikut:

Langkah 1

Ambil sikel yang disjoint sisi $C_1 = e_i e_{i+1} e_{i+2} e_i$, $i = 1, 3, 5, \dots, n-1$. Jelas bahwa C_1, C_2, \dots, C_{n-1} adalah sikel-sikel yang disjoint sisi, sehingga didapatkan $\frac{n}{2}$ sikel yang disjoint sisi.

Langkah 2

Hapus sisi $e_i e_{\frac{n}{2}-i}$, $i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}$ dari S_n .

Langkah 3

Ambil sejumlah $\frac{n^2-5n}{6}$ sikel yang disjoint sisi dari $S_n - \{e_i e_{\frac{n}{2}-i} \mid i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}\}$.

Karena itu $\frac{n}{2} + \frac{n^2-5n}{6} = \frac{n^2-2n}{6}$. Karena $e_i e_{\frac{n}{2}-i}$, $i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}$ adalah sisi yang tidak *adjacent* dalam S_n . Misal $C_5 = v_1 e_{i-1} e_i$ $2 \leq i \leq \frac{n}{2}$. Sikel- sikel dalam C_5 adalah disjoint sisi. Sikel- sikel dalam C_3 dan C_5 adalah disjoint sisi dan sikel- sikel dalam C_3 dan C_4 juga disjoint sisi. Karena $C_5 \leq C_4$. Oleh karena itu,

jumlah maksimum sisi yang disjoint sisi dalam $T S_n$, $CM T S_n = C_3 +$

$$C_4 = \frac{n^2 - 2n}{6} + n = \frac{n^2 + 4n}{6}.$$

jadi terbukti bahwa

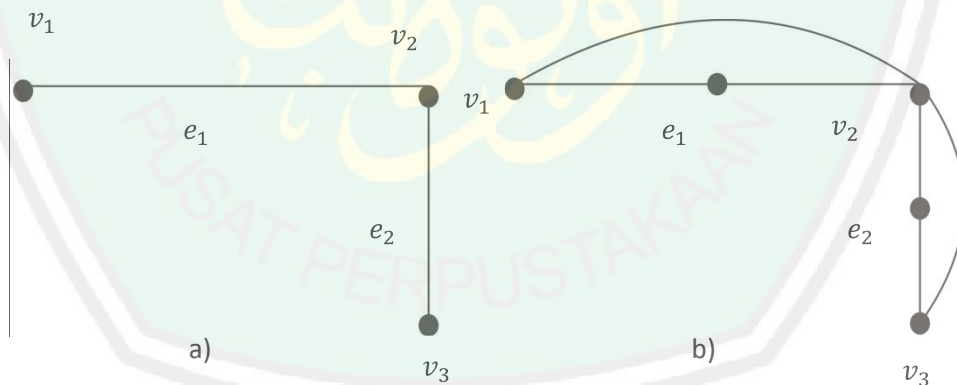
$$CM T S_n = \begin{cases} \frac{n^2 + 5n}{6} & \text{untuk } n \text{ ganjil} \\ \frac{n^2 + 4n}{6} & \text{untuk } n \text{ genap} \end{cases}$$

3.3 Graf Double Star $S_{n,n+1}$

3.3.1 Graf Double Star $S_{n,n+1}$ dengan $n = 1$

Graf double star $S_{n,n+1}$ dengan $n = 1$ adalah graf double star $S_{1,2}$. Graf

double star $S_{1,2}$ dapat digambarkan pada gambar 3.3.1 berikut.



Gambar 3.3.1 a) Graf Double Star $S_{1,2}$ b) Graf Total dari Graf Double Star $S_{1,2}$

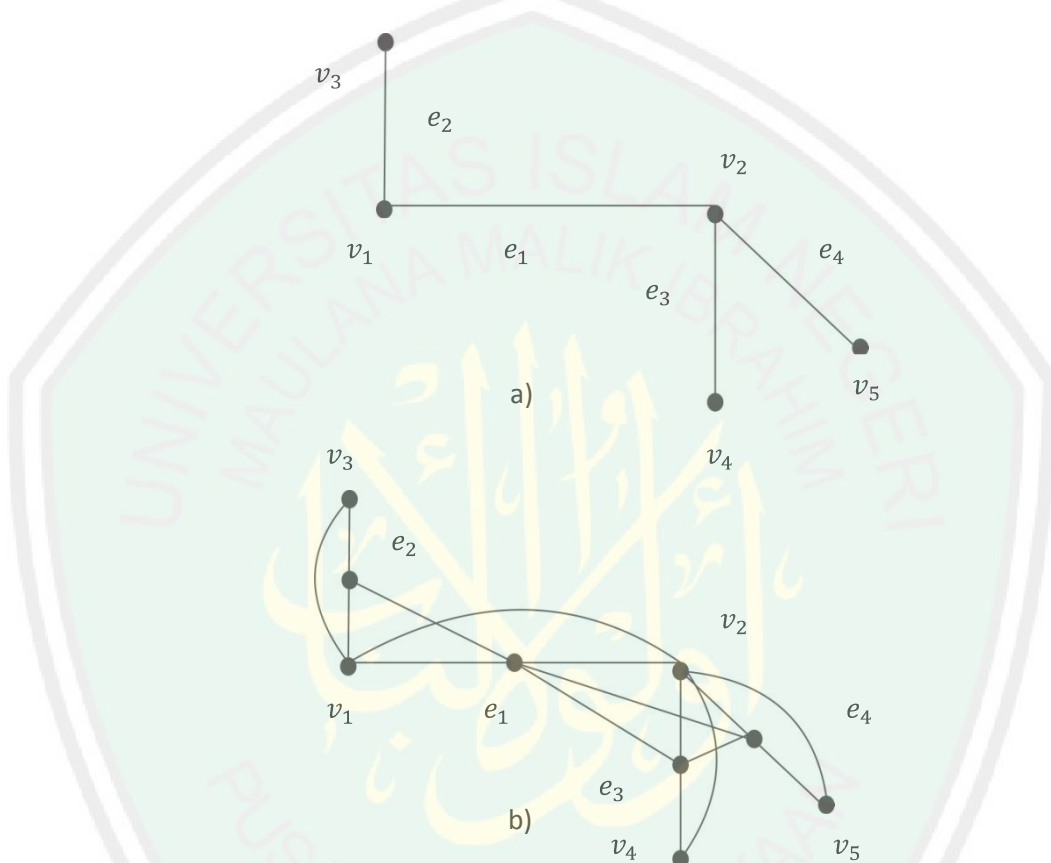
Sikel-sikel yang disjoint sisi dari graf $S_{1,2}$ di atas adalah, $v_1 e_1 v_2$ dan $v_2 e_2 v_3$.

Atau $v_i e_i v_{i+1}$ untuk $i = 1, 2$.

$$\therefore CM T S_{1,2} = 2.$$

3.3.2 Graf Double Star $S_{n,n+2}$ dengan $n = 2$

Graf double star $S_{n,n+2}$ dengan $n = 2$ adalah Graf double star $S_{2,3}$. Graf double star $S_{2,3}$ dapat digambarkan pada gambar 3.3.2 berikut.



Gambar 3.3.2 a) Graf Double Star $S_{2,3}$ b) Graf Total dari Graf Double Star $S_{2,3}$

Sikel-sikel yang disjoint sisi dari graf $S_{2,3}$ di atas adalah $v_1e_1v_2$; $v_1e_2v_3$; $v_2e_3v_4$; $v_2e_4v_5$ dan $e_1e_3e_4$.

Misal $V S_{2,3} = v_1, v_2, \dots, v_5$ dan $E S_{2,3} = e_1, e_2, \dots, e_4$, dari definisi graf

total di atas, maka diperoleh $V T S_{2,3} = V S_{2,3} \cup E S_{2,3}$ dan $E T S_{2,3} =$

$$v_i e_i \quad i = 1 \cup v_i e_{i+2} \quad i = 1 \cup v_i e_{i+1} \quad i = 1, 2 \cup v_i e_{i+2} \quad i = 2 \cup$$

$$e_i v_{i+1} \quad i = 1, 2, 3, 4 \cup e_i e_{i+2} \quad i = 1 \cup e_i e_{i+1} \quad i = 3 .$$

Sikel yang disjoint sisi adalah.

$$C_1 = v_i e_i v_{i+1} \quad i = 1, 2, \quad C_2 = v_i e_{i+1} v_{i+2} \quad i = 1, 2, \quad C_3 = v_i e_{i+2} v_{i+3} \quad i = 1, 2,$$

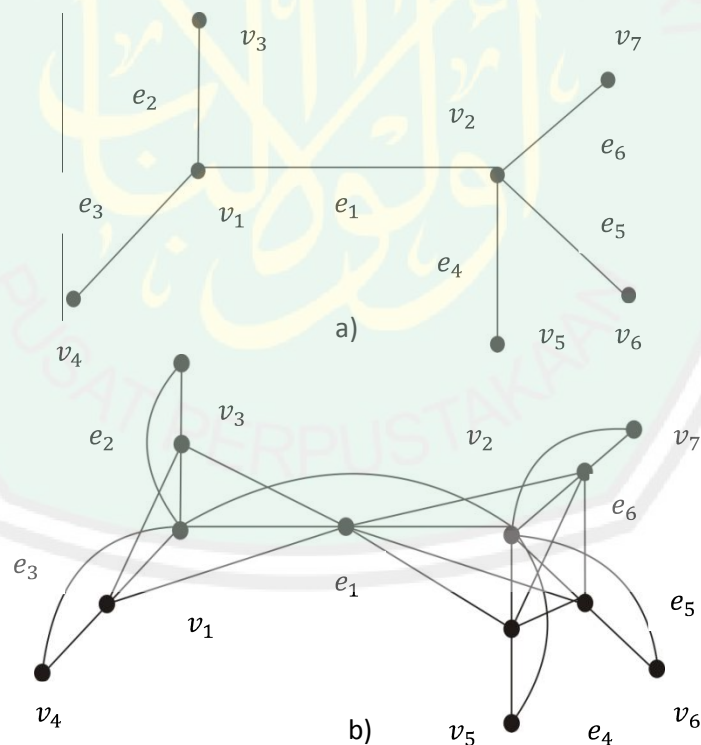
$$C_4 = e_i e_{i+2} e_{i+3} \quad i = 1, 2. \quad \text{Terlihat bahwa } C_i \text{ dengan } 1 \leq i \leq 4 \text{ adalah himpunan-}$$

himpunan yang beranggotakan sikel-sikel yang disjoint sisi dalam $S_{2,3}$.

$$\therefore CM T S_{2,3} = 5.$$

3.3.3 Graf Double Star $S_{n,n+2}$ dengan $n = 3$

Graf double star $S_{n,n+2}$ dengan $n = 3$ adalah Graf double star $S_{3,4}$. Graf double star $S_{3,4}$ dapat digambarkan pada gambar 3.3.3 berikut.



Gambar 3.3.3 a) Graf Double Star $S_{3,4}$ b) Graf total dari Graf Double Star $S_{3,4}$

Sikel-sikel yang disjoint sisi dari graf $S_{3,4}$ di atas adalah $v_1 e_1 v_2$; $v_1 e_2 v_3$; $v_1 e_3 v_4$;

$v_2 e_4 v_5$; $v_2 e_5 v_6$; $v_2 e_6 v_7$ dan $e_1 e_2 e_3$; $e_1 e_4 e_5$.

Misal $V S_{3,4} = v_1, v_2, \dots, v_7$ dan $E S_{3,4} = e_1, e_2, \dots, e_6$, dari definisi

graf total di atas, maka diperoleh:

$$V T S_{3,4} = V S_{3,4} \cup E S_{3,4}$$

$$E T S_{2,3} =$$

$$v_i e_i \ i = 1 \cup v_i e_{i+1} \ i = 1 \cup v_i e_{i+2} \ i = 3,5 \cup v_i e_{i+3} \ i = 2 \cup$$

$$v_i e_{i+4} \ i = 2 \cup e_i v_{i+1} \ i = 1,2,3,4,5,6 \cup e_i e_{i+1} \ i = 1,2,4,5 \cup$$

$$e_i e_{i+2} \ i = 1 \cup e_i e_{i+3} \ i = 1 \cup e_i e_{i+4} \ i = 1 \cup e_i e_{i+5} \ i = 1 .$$

Sikel yang disjoint sisi adalah

$$C_1 = v_i e_i v_{i+1} \ i = 1$$

$$C_5 = v_i e_{i+4} v_{i+5} \ i = 2$$

$$C_2 = v_i e_{i+1} v_{i+2} \ i = 1$$

$$C_6 = e_i e_{i+1} e_{i+2} \ i = 1$$

$$C_3 = v_i e_{i+2} v_{i+3} \ i = 1,2$$

$$C_7 = e_i e_{i+3} e_{i+4} \ i = 1$$

$$C_4 = v_i e_{i+3} v_{i+4} \ i = 2$$

Terlihat bahwa C_i dengan $1 \leq i \leq 7$ adalah himpunan-himpunan yang

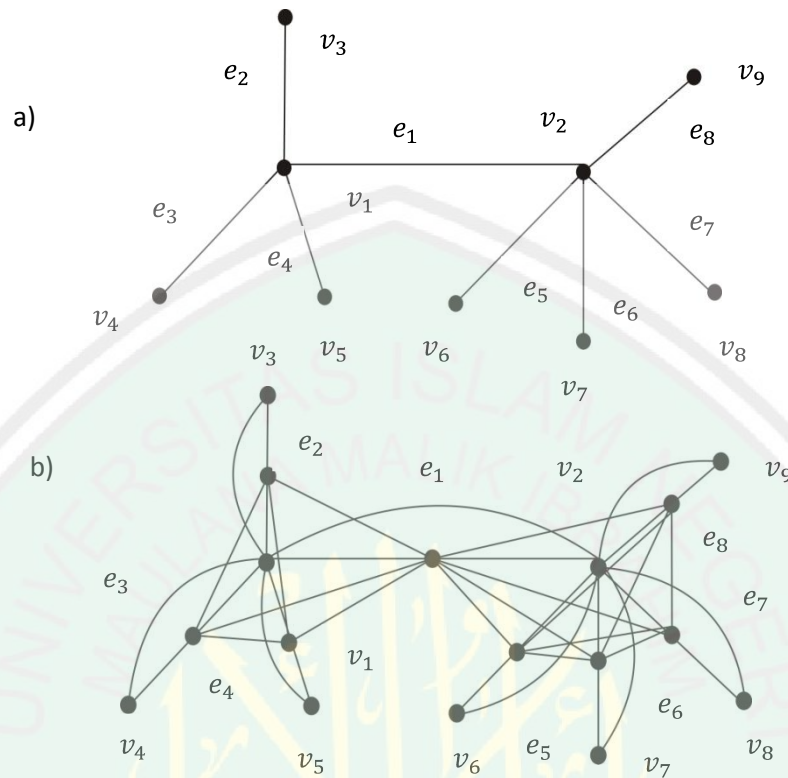
beranggotakan sikel-sikel yang disjoint sisi dalam $S_{3,4}$.

$$\therefore CM T S_{3,4} = 8.$$

3.3.4 Graf Double Star $S_{n,n+2}$ dengan $n = 4$

Graf double star $S_{n,n+2}$ dengan $n = 3$ adalah Graf double star $S_{4,5}$. Graf double

star $S_{4,5}$ dapat digambarkan pada gambar 3.3.4 berikut.



Gambar 3.3.4 a) Graf *Double Star* $S_{4,5}$ b) Graf Total dari Graf *Double Star* $S_{4,5}$

Sikel-sikel yang disjoint sisi dari graf $S_{4,5}$ di atas adalah $v_1e_1v_2$; $v_1e_2v_3$; $v_1e_3v_4$; $v_1e_4v_5$; $v_2e_5v_6$; $v_2e_6v_7$; $v_2e_7v_8$; $v_2e_8v_9$ dan $e_1e_2e_3$; $e_1e_5e_6$; $e_1e_7e_8$; $e_5e_7e_6e_8$.

Misal $V S_{4,5} = v_1, v_2, \dots, v_9$ dan $E S_{4,5} = e_1, e_2, \dots, e_8$, dari definisi graf total di atas, maka diperoleh $VT S_{4,5} = V S_{4,5} \cup E S_{4,5}$ dan

$$E T S_{4,5} = v_i e_i \quad i = 1 \cup v_i e_{i+1} \quad i = 1 \cup v_i e_{i+2} \quad i = 1$$

$$\cup v_i e_{i+3} \quad i = 1, 2 \cup v_i e_{i+4} \quad i = 2$$

$$\cup v_i e_{i+5} \quad i = 2 \cup v_i e_{i+6} \quad i = 2 \cup e_i v_{i+1} \quad 1 \leq i \leq 8$$

$$\cup e_i e_{i+1} \quad i = 1, 2, 5, 6, 7 \cup e_i e_{i+2} \quad i = 5, 6 \cup e_i e_{i+4} \quad i = 1$$

$$\cup e_i e_{i+6} \quad i = 1 .$$

Sikel yang disjoint sisi adalah

$$C_1 = v_i e_i v_{i+1} \quad i = 1$$

$$C_7 = v_i e_{i+6} v_{i+7} \quad i = 2$$

$$C_2 = v_i e_{i+1} v_{i+2} \quad i = 1$$

$$C_8 = e_i e_{i+1} e_{i+2} \quad i = 1$$

$$C_3 = v_i e_{i+2} v_{i+3} \quad i = 1$$

$$C_9 = e_i e_{i+4} e_{i+5} \quad i = 1$$

$$C_4 = v_i e_{i+3} v_{i+4} \quad i = 1, 2$$

$$C_{10} = e_i e_{i+6} e_{i+7} \quad i = 1$$

$$C_5 = v_i e_{i+4} v_{i+5} \quad i = 2$$

$$C_{11} = e_i e_{i+2} e_{i+1} e_{i+3} \quad i = 5$$

$$C_6 = v_i e_{i+5} v_{i+6} \quad i = 2$$

Terlihat bahwa C_i dengan $1 \leq i \leq 7$ adalah himpunan-himpunan yang

beranggotakan Sikel-sikel yang disjoint sisi dalam $S_{4,5}$, dimana $C_1 = 1$, $C_2 = 1$,

$C_3 = 1$, $C_4 = 2$, $C_5 = 1$, $C_6 = 1$, $C_7 = 1$, $C_8 = 1$, $C_9 = 1$, $C_{10} = 1$, $C_{11} = 1$, sehingga

$C_i = 1 + 1 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 = 8$.

$$\therefore CM T S_{4,5} = 12.$$

Berdasarkan perolehan multiplisitas sikel dari graf *double star* di atas, maka diperoleh tabel sebagai berikut.

Tabel 3.3 Multiplisitas sikel dari Graf *Double Star* $S_{n,n+1}$

NO	$S_{n,n+1}$	$CM T S_{n,n+1}$
1	$S_{1,2}$	$2 = CM T S_1 + CM T S_2 - 1$
2	$S_{2,3}$	$5 = CM T S_2 + CM T S_3 - 1$
3	$S_{3,4}$	$8 = CM T S_3 + CM T S_4 - 1$
4	$S_{4,5}$	$12 = CM T S_3 + CM T S_5 - 1$
...
n	$S_{n,n+1}$	$\frac{n^2 + 5n - 6}{6} + \frac{n^2 + 6n + 5}{6}$ untuk n ganjil $\frac{n^2 + 4n - 6}{6} + \frac{n^2 + 7n + 6}{6}$ untuk n genap

Theorema 3

$$CM T S_{n,n+1} = \begin{cases} \frac{n^2 + 5n - 6}{6} + \frac{n^2 + 6n + 5}{6} & \text{untuk } n \text{ ganjil} \\ \frac{n^2 + 4n - 6}{6} + \frac{n^2 + 7n + 6}{6} & \text{untuk } n \text{ genap} \end{cases}$$

Bukti

Graf *Double star* $S_{n,n+1}$ adalah gabungan antara Graf *star* S_n dan S_{n+1} dimana ada sisi bersama yang mengaitkan kedua titik sentralnya. Sehingga jumlah maksimal sikel yang disjoint sisi adalah hasil penjumlahan jumlah maksimal sikel yang disjoint sisi dari kedua graf sebagai berikut

Untuk n ganjil

$$\begin{aligned} S_n + S_{n+1} &= \frac{n^2 + 5n}{6} + \frac{(n+1)^2 + 4(n+1)}{6} \\ &= \frac{n^2 + 5n}{6} + \frac{n^2 + 6n + 5}{6} \end{aligned}$$

dan karena ada satu sisi yang dipakai bersama oleh kedua graf, maka harus dikurangkan dengan 1. Sehingga kita dapatkan

$$\begin{aligned} S_n + S_{n+1} - 1 &= \frac{n^2 + 5n}{6} + \frac{n^2 + 6n + 5}{6} - 1 \\ &= \frac{n^2 + 5n}{6} + \frac{n^2 + 6n + 5}{6} - \frac{6}{6} \\ &= \frac{n^2 + 5n - 6}{6} + \frac{n^2 + 6n + 5}{6} \end{aligned}$$

Untuk n genap

$$\begin{aligned} S_n + S_{n+1} &= \frac{n^2 + 4n}{6} + \frac{(n+1)^2 + 5(n+1)}{6} \\ &= \frac{n^2 + 4n}{6} + \frac{n^2 + 7n + 6}{6} \end{aligned}$$

dan karena ada satu sisi yang dipakai bersama oleh kedua graf, maka harus dikurangkan dengan 1. Sehingga kita dapatkan

$$\begin{aligned} S_n + S_{n+1} - 1 &= \frac{n^2 + 4n}{6} + \frac{n^2 + 7n + 6}{6} - 1 \\ &= \frac{n^2 + 4n}{6} + \frac{n^2 + 7n + 6}{6} - \frac{6}{6} \\ &= \frac{n^2 + 4n - 6}{6} + \frac{n^2 + 7n + 6}{6} \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $CM T S_{n,n+1} = \begin{cases} \frac{n^2 + 5n - 6}{6} + \frac{n^2 + 6n + 5}{6} & \text{untuk } n \text{ ganjil} \\ \frac{n^2 + 4n - 6}{6} + \frac{n^2 + 7n + 6}{6} & \text{untuk } n \text{ genap} \end{cases}$

BAB IV PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Dari pembahasan tentang multiplisitas sikel dari graf total pada graf tangga L_n , graf *Star* S_n , dan graf *double star* $S_{n,n+1}$, dapat disimpulkan sebagai berikut.

$$1. \text{CM } T L_n = 4n - 3$$

$$2. \text{CM } T S_n = \begin{cases} \frac{n^2+5n}{6} & \text{untuk } n \text{ ganjil} \\ \frac{n^2+4n}{6} & \text{untuk } n \text{ genap} \end{cases}$$

$$3. \text{CM } T S_{n,n+1} = \begin{cases} \frac{n^2+5n-6}{6} + \frac{n^2+6n+5}{6} & \text{untuk } n \text{ ganjil} \\ \frac{n^2+4n-6}{6} + \frac{n^2+7n+6}{6} & \text{untuk } n \text{ genap} \end{cases}$$

4.2 Saran

Karena penelitian ini masih membahas tentang multiplisitas sikel dari total graf tangga L_n , graf *star* S_n , dan graf *double star* $S_{n,n+1}$, maka penelitian ini dapat dilanjutkan dengan mencari multiplisitas sikel dari graf total pada graf lain, misalnya penelitian terhadap multiplisitas sikel dari graf total pada graf *double star* $S_{n,m}$, graf bipartisi komplit, atau n-partisi, ataupun yang lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

- Depag. RI. 2005. *Al-Qur'an dan Terjemahnya*. Jakarta: PT Syaamil Cipta Media.
- Abdussakir. 2007. *Ketika Kiai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press.
- Abdussakir. dkk. 2009. *Teori Graf*. Malang: UI N Malang Press.
- Ali, Yusuf. 2006. *The Holly Quran (Yusuf Ali Translation)*. Diakses tanggal 25 Juni 2009
http://www.harunyahya.com/Quran_translation/Quran_translation_index.php.
- Ali, Akbar. dan Panayappan, S. 2010. *Cycle Multiplicity of Total Graph of C_n , P_n , and $K_{1,n}$* . *International Journal of Engineering and Technology* Vol. 2, No. 2, 2010, pp. 54-58. <http://www.ijest-ng.com/ijest-ng-vol2-no2-pp54-58.pdf>
- Basya, Fahmi. 2005. *Matematika Islam*. Jakarta: Republika.
- Chartrand, Gary dan Linda Lesniak. 1986. *Graphs and Diagraphs 2nd Edition*. California: Wadsworth, Inc.
- Harary, Frank. 1969. *Graph Theory*. Ontario: Addison-Wesley Publishing Company Inc.
- Muis, Abdul. 2008. *Pelabelan Konsektif (Consecutive Labeling) pada Graf Star S_n dan graf double star $S_{n,n+1}$ (n bilangan asli)*. Skripsi Tidak Diterbitkan. Malang. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang.
- Munir, Rinaldi. 2005. *Matematika Diskrit Edisi Ketiga*. Bandung: Informatika.
- Tsulutsy, Fatanur B. 2009. *Menentukan Bilangan Pewarnaan λ - Backbone pada Graf Split*. Skripsi Tidak Diterbitkan. Malang. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang.



KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN)
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang (0341)551345
Fax. (0341)572533

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Navis Nur Ilmiyah
NIM : 07610030
Fakultas/ Jurusan : Sains Dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Multiplisitas sikel dari graf total pada graf tangga L_n ,
graf *star* S_n dan graf *double star* $S_{n,n+1}$
Pembimbing I : Abdussakir, M.Pd
Pembimbing II : Abdul Aziz, M. Si

No	Tanggal	HAL	Tanda Tangan	
1	5 Mei 2011	Konsultasi masalah	1.	
2	20 Mei 2011	Konsultasi BAB I		2.
3	20 Mei 2011	ACC BAB I dan konsultasi BAB II	3.	
4	16 Juni 2011	ACC BAB II		4.
5	17 Juni 2011	Konsultasi kajian agama BAB I	5.	
6	17 Juni 2011	Konsultasi kajian agama BAB II		6.
7	11 Juli 2011	Konsultasi BAB III	7.	
8	12 Juli 2011	Revisi kajian agama BAB II		8.
9	14 Juli 2011	Revisi BAB III	9.	
10	15 Juli 2011	Konsultasi BAB IV		10.
11	15 Juli 2011	ACC kajian agama	11.	
12	16 Juli 2011	ACC BAB III		12
13	16 Juli 2011	ACC BAB IV	13.	
14	16 Juli 2011	ACC keseluruhan		14.

Malang, 16 Juli 2011
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001