ISOMORFISME SUBGRUP SIMETRI DARI BIDANG BERATURAN CABANG-n DENGAN GRUP DIHEDRAL

SKRIPSI

Oleh:
ZUHAIRINI TRIWULANDARI
NIM. 07610028

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2011

ISOMORFISME SUBGRUP SIMETRI DARI BIDANG BERATURAN CABANG-n DENGAN GRUP DIHEDRAL

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
ZUHAIRINI TRIWULANDARI
NIM. 07610028

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2011

ISOMORFISME SUBGRUP SIMETRI DARI BIDANG BERATURAN CABANG-n DENGAN GRUP DIHEDRAL

SKRIPSI

Oleh:
ZUHAIRINI TRIWULANDARI
NIM. 07610028

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji

Tanggal: 15 Juli 2011

Pembimbing I	Pembimbing II
Wahyu Henky Irawan, M. Pd	**Dr. H. Ahmad Barizi, M.A**
NIP. 19710420 200003 1 003	**NIP. 19731212 199803 1 001**

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

ISOMORFISME SUBGRUP SIMETRI DARI BIDANG BERATURAN CABANG-n DENGAN GRUP DIHEDRAL

SKRIPSI

Oleh:
ZUHAIRINI TRIWULANDARI
NIM. 07610028

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal: 22 Juli 2011

Susunan Dewan Penguji			Tanda Tangan
1. Penguji Utama	:	Usman Pagalay, M.Si NIP. 19650414 200312 1 001	______________
2. Ketua Penguji	:	Evawati Alisah, M.Pd NIP. 19720604 199903 2 001	______________
3. Sekretaris Penguji	:	Wahyu Henky Irawan, M.Pd NIP. 19710420 200003 1 003	______________
4. Anggota	:	Dr. H. Ahmad Barizi, MA NIP. 19731212 199803 1 001	______________

Mengetahui dan Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika,

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Zuhairini Triwulandari

NIM : 07610028

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambil-alihan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 15 Juli 2011

Yang membuat pernyataan,

Zuhairini Triwulandari
NIM. 07610028

MOTTO

إِنَّ مَعَ ٱلْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٦﴾

"Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan."

(Q.S. Al Insyirah : 6)

PERSEMBAHAN

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Dengan segenap rasa syukur alhamdulillah,

karya tulis ini penulis persembahkan kepada:

Ayahanda Hardjito

Ibunda Wartilah

Kholikul Ihsan

Rina Rahmawati

Wahyu Wijayanto

KATA PENGANTAR

بِسۡمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحۡمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

Alhamdulillah, puji syukur ke hadirat Allah SWT yang telah memberikan rahmat, taufik, dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik. Shalawat serta salam senantiasa terlantunkan kepada Nabi Muhammad SAW yang telah menunjukkan jalan yang lurus dan jalan yang diridhoi-Nya yakni agama Islam.

Skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik berkat bantuan, bimbingan, dan motivasi dari berbagai pihak. Penulis mengucapkan terima kasih dan hanya dapat memberikan ucapan dan doa, semoga Allah SWT membalas semua kebaikan dan menyinari jalan yang diridhoi-Nya, khususnya kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo selaku Rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Drs. Sutiman B. Sumitro, SU, DSc selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Saintek Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Wahyu Henky Irawan, M.Pd sebagai dosen wali dan dosen pembimbing matematika yang telah banyak memberikan tuntunan dan arahan sehingga penulisan skripsi ini dapat terselesaikan.
5. Dr.H.Ahmad Barizi, M.A selaku Dosen Pembimbing Integrasi Matematika dan Islam yang telah banyak memberi arahan kepada penulis.

6. Segenap dosen Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi yang telah banyak membantu dalam penyelesaian skripsi ini.
7. Kedua orang tua penulis Ayahanda Hardjito dan Bunda Wartilah yang dengan restunya, doanya, harapan-harapan serta pengorbanannya menjadikan penulis untuk tidak menyerah dalam keadaan bagaimanapun, termasuk dalam penyelesaian skripsi ini.
8. Saudara-saudara penulis Kholikul Ihsan, dan Rina Rahmawati yang dengan doa serta dukungannya menjadikan penulis semakin bersemangat dalam penulisan skripsi ini.
9. Teman-teman Jurusan Matematika yang telah banyak membantu dalam penyelesaian penulisan skripsi ini.
10. Semua pihak yang terlibat baik secara langsung maupun tidak langsung pada proses terselesaikannya penulisan skripsi ini.

Semoga Allah SWT membalas kebaikan semuanya. Amin.

Malang, 15 Juli 2011

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

ABSTRAK

Triwulandari, Zuhairini. 2011. **Isomorfisme Subgrup Simetri dari Bidang Beraturan Cabang-n dengan Grup Dihedral.** Skripsi. Jurusan Matematika. Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: (I) Wahyu Henky Irawan, M.Pd
(II) Dr. H. Ahmad Barizi, M.A

Kata kunci: Segitiga bercabang n-segitiga, segiempat bercabang n-segiempat, Isomorfisme, subgrup simetri, grup dihedral

Beberapa pokok bahasan dalam aljabar adalah isomorfisme. Isomorfisme adalah suatu pemetaan dari himpunan grup pertama ke himpunan grup kedua yang memenuhi homomorfisme dan bersifat bijektif. Himpunan bagian dari grup disebut subgrup. Subgrup dalam pembahasan ini adalah subgrup simetri dari bidang beraturan cabang-n yaitu segitiga bercabang n-segitiga dan segiempat bercabang n-segiempat dengan operasi komposisi. Bidang beraturan tersebut bukan bidang beraturan pada umumnya, melainkan bidang beraturan cabang-n yaitu perkembangan dari bidang beraturan pada umumnya. Bidang beraturan cabang-n ini mempunyai karakteristik tertentu seperti mempunyai pola banyaknya titik sudut terluar, banyaknya seluruh titik sudut, banyaknya bidang beraturan, banyaknya sikel dari rotasi dan refleksi pada bidang beraturan cabang-n. Subgrup simetri dari bidang beraturan cabang-n ini dimungkinkan akan isomorfik dengan grup dihedral. Penentuan pola–pola tersebut dilakukan dengan menentukan gambar bidang beraturan cabang-n, pelabelan, sikel dari rotasi dan refleksinya, menganalisa gambar, membuat pola-pola umumnya, membuktikan pola-pola tersebut, menentukan isomorfisme subgrup simetri dari bidang beraturan cabang-n. Penelitian tersebut menghasilkan pola-pola banyaknya titik sudut terluar, banyaknya seluruh titik sudut, banyaknya bidang beraturan, banyaknya sikel dari rotasi dan refleksi, serta isomorfisme subgrup simetri dari bidang beraturan cabang-n dengan grup dihedral.

ABSTRACT

Triwulandari, Zuhairini. 2011. **Isomorphism Subgroup of Symmetry from n-Branch Regular Sector with Dihedral Group**. Thesis. Mathematics Department. Science and Technology Faculty, Islamic State University of Maulana Malik Ibrahim Malang.
Advisors: (I) Wahyu Henky Irawan, M.Pd
(II) Dr. H. Ahmad Barizi, M.A

Key Words : n-Triangle triangle branches, n-four angle four angle branches, Isomorphism, symmetry subgroup, dihedral group.

Several of topics in algebra is isomorphism. Isomorphism is cartography from first compilation group to second compilation group filled homomorphism and has bijectif characteristic. Sub set from grup is subgrup. The subgroup in this discussion is symmetry subgroup from branch-n regular sector, they are n-triangle triangle branches and n-four angle four angle branch with composition operation. Regular section above is not regular section in common, but n-section regular section, that is the development from regular section in common. This branches-n regular section has specific characteristic. It has amount of outer part of corner point, amount of corner point, amount of regular section, amount of sikel from rotation and reflection in branch-n regular section. This symmetry subgroup from branch-n regular section is estimated will be isomorphic with dihedral group. The determination of those patterns is done with determinate section picture of n-regular picture section, labeling, sikel from rotation and its reflection, canalize the picture, make commonly patterns, proof those patterns, determinate isomorphism of symmetry subgroup from branch-n regular section. The research above produce account of patterns of outer part of corner point, account of all corner point, account of regular section, account of sikel from rotation and reflection, and also isomorphism symmetry subgroup from branch-n regular section and dihedral group.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Al-Qur'an adalah kitab suci yang diturunkan sebagai petunjuk dan pedoman bagi kehidupan manusia. Al-Qur'an telah memberikan kepada manusia kunci ilmu pengetahuan tentang dunia dan akhirat serta menyediakan peralatan untuk mencari dan meneliti segala sesuatu agar dapat mengungkapkan dan mengetahui keajaiban dari kedua dunia itu (Rahman, 1992:12). Hal itu karena luasnya ilmu Allah sangat tidak terbatas dan meliputi semua perkara. Dalam Al-Qur'an hal tersebut telah dijelaskan pada surat Al-Kahfi ayat 109 yang berbunyi:

قُل لَّوۡ كَانَ ٱلۡبَحۡرُ مِدَادٗا لِّكَلِمَٰتِ رَبِّي لَنَفِدَ ٱلۡبَحۡرُ قَبۡلَ أَن تَنفَدَ كَلِمَٰتُ رَبِّي وَلَوۡ جِئۡنَا بِمِثۡلِهِۦ مَدَدٗا ١٠٩

Artinya: "Katakanlah: Sekiranya lautan menjadi tinta untuk (menulis) kalimat-kalimat Tuhanku, sungguh habislah lautan itu sebelum habis (ditulis) kalimat-kalimat Tuhanku, meskipun Kami datangkan tambahan sebanyak itu (pula)"(Q.S. Al-Kahfi/18: 109).

Ayat tersebut menjelaskan bahwa kita sebagai umat muslim diwajibkan untuk mempelajari ilmu pengetahuan, karena dengan mempelajari ilmu pengetahuan diharapkan bisa menambah keyakinan terhadap kekuasaan-Nya serta mempertebal keimanan kita terhadap Allah.

Matematika termasuk salah satu ilmu pengetahuan yang banyak dikaji dan diterapkan pada berbagai bidang. Matematika dapat dikatakan "Queen of Science" karena matematika menempati posisi yang cukup penting dalam kajian-kajian ilmu yang lain. Matematika sebenarnya telah diciptakan sejak zaman dahulu, manusia hanya menyimbolkan fenomena-fenomena yang ada dalam kehidupan sehari-hari. Manusia dianugerahi Allah petunjuk dengan kedatangan sekian rasul untuk membimbing mereka. Allah juga menganugerahkan akal agar mereka berpikir tentang kebesaran Tuhan. Semua anugerah itu termasuk dalam sistem yang sangat tepat, teliti, dan rapi yang telah ditetapkan Allah SWT. Dalam Al-Quran surat Al-Furqaan ayat 2:

ٱلَّذِى لَهُۥ مُلْكُ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضِ وَلَمْ يَتَّخِذْ وَلَدًا وَلَمْ يَكُن لَّهُۥ شَرِيكٌ فِى ٱلْمُلْكِ وَخَلَقَ
كُلَّ شَىْءٍ فَقَدَّرَهُۥ تَقْدِيرًا ﴿٢﴾

Artinya: *"Yang kepunyaan-Nya-lah kerajaan langit dan bumi, dan dia tidak mempunyai anak, dan tidak ada sekutu baginya dalam kekuasaan(Nya), dan dia telah menciptakan segala sesuatu, dan dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya" "(Q.S. Al-Furqaan/25: 2).*

Dalam kehidupan sehari-hari, manusia tidak lepas dari berbagai masalah yang menyangkut berbagai aspek penyelesaiannya perlu pemahaman melalui suatu metode dan ilmu bantu tertentu. Matematika merupakan salah satu cabang ilmu yang mendasari berbagai macam ilmu lain. Matematika juga merupakan alat untuk menyederhanakan penyajian dan pemahaman masalah (Purwanto, 1998:1). Seiring dengan perkembangan zaman, keilmuan matematika juga berkembang dalam konsep dan penerapannya, baik penerapan dalam kehidupan sehari-hari maupun dalam hubungannya dengan disiplin ilmu lainnya. Matematika mempunyai beberapa cabang keilmuan yang masing-masing mempunyai penerapan dalam hubungannya dengan berbagai disiplin ilmu lain dan dalam kehidupan sehari-hari. Salah satu dari cabang-cabang ilmu tersebut adalah Aljabar abstrak. Aljabar abstrak merupakan bagian dari ilmu matematika yang berkembang dengan pesat karena berhubungan dengan himpunan, dan sifat struktur-struktur di dalamnya.

Salah satu yang dipelajari dalam ilmu aljabar abstrak adalah teori tentang grup. Grup adalah sebuah pasangan berurutan $(G,*)$ dimana G adalah sebuah himpunan dan " $*$ " adalah sebuah operasi biner pada G yang memenuhi aksioma-aksioma tertentu yaitu tertutup, bersifat assosiatif, memuat identitas, dan memuat invers dari setiap elemennya. Dalam aljabar abstrak juga dipelajari tentang *isomorfisme*, grup *simetri* dan grup *dihedral*. *Isomorfisme* adalah suatu pemetaan dari himpunan grup pertama ke himpunan grup kedua yang memenuhi homomorfisme dan bersifat bijektif. Grup *simetri* merupakan grup yang himpunannya terdiri dari simetri-simetri segi-n beraturan dengan operasi komposisi yang memenuhi grup. Sedangkan grup *dihedral* adalah himpunan simetri-simetri dari segi-*n* beraturan dengan operasi komposisi yang memenuhi aksioma-aksioma grup.

Pada grup terdapat beberapa sub himpunan yang merupakan grup yang disebut subgrup. Subgrup dalam penelitian ini adalah subgrup simetri dari bidang beraturan cabang-n. Bidang beraturan tersebut bukan bidang beraturan pada umumnya, melainkan perkembangan dari bidang beraturan pada umumnya. Dari bidang beraturan cabang-*n* tersebut apakah akan terbentuk suatu pola? Bagaimana pola yang terbentuk? Dan apakah subgrup simetri dari bidang beraturan cabang-*n* tersebut dimungkinkan akan isomorfik dengan grup dihedral?

Berdasarkan latar belakang tersebut maka penulis tertarik untuk mengkaji tentang **"isomorfisme subgrup simetri dari bidang beraturan cabang-*n* dengan grup dihedral"** dengan harapan dapat lebih memperdalam materi yang berhubungan dengan penelitian tersebut. Hasil dari penelitian ini dapat dijadikan teorema sebagai tambahan pustaka perkuliahan, khususnya bidang aljabar abstrak.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan di atas, rumusan masalah dalam penelitian ini adalah:

1. Bagaimana pola banyaknya titik sudut terluar pada bidang beraturan cabang-*n*?
2. Bagaimana pola banyaknya titik sudut pada bidang beraturan cabang-*n*?
3. Bagaimana pola banyaknya bidang beraturan cabang-n pada bidang beraturan cabang-*n*?
4. Bagaimana pola banyaknya sikel rotasi dan refleksi subgrup simetri dari bidang beraturan cabang-*n*?
5. Bagaimana *isomorfisme* subgrup simetri dari bidang beraturan cabang-*n* dengan grup *dihedral*.

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, tujuan dari penelitian ini adalah:

1. Mengetahui dan mendiskripsikan pola banyaknya titik sudut terluar pada bidang beraturan cabang-*n*.

2. Mengetahui dan mendiskripsikan pola banyaknya titik sudut pada bidang beraturan cabang-*n*.
3. Mengetahui dan mendiskripsikan banyaknya bidang beraturan cabang-n pada bidang beraturan cabang-*n*.
4. Mengetahui dan mendiskripsikan pola banyaknya sikel rotasi dan refleksi subgrup *simetri* dari bidang beraturan cabang-*n*.
5. Mengetahui dan mendiskripsikan *isomorfisme* subgrup *simetri* dari bidang beraturan cabang-*n* dengan grup *dihedral*.

1.4 Manfaat Penelitian

Hasil penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat bagi:

1. Peneliti

   Peneliti memperoleh tambahan pengetahuan tentang Aljabar abstrak, khususnya tentang *isomorfisme*, subgrup *simetri*, dan grup *dihedral*. Selain itu, peneliti juga memperoleh tambahan wawasan penelitian tentang *isomorfisme* subgrup simetri dari bidang beraturan cabang-*n* dengan grup *dihedral*.

2. Lembaga

   Bagi lembaga, sebagai tambahan pustaka untuk bahan perkuliahan tentang *isomorfisme*, subgrup *simetri*, dan tentang grup *dihedral*. Selain itu, juga sebagai tambahan pustaka untuk rujukan penelitian tentang *isomorfisme* subgrup simetri dari bidang beraturan cabang-*n* dengan grup *dihedral*.

3. Pembaca

Pembaca memperoleh pengetahuan tambahan mengenai salah satu materi disiplin ilmu matematika, yaitu bidang aljabar abstrak, khususnya tentang *isomorfisme* subgrup simetri dari bidang beraturan cabang-*n* dengan grup *dihedral*.

1.5 Batasan Masalah

Batasan masalah dalam penelitian ini diantaranya obyek penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah:

a. Obyek penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah bidang beraturan cabang-*n* untuk segitiga beraturan dan segiempat beraturan, grup *dihedral* yang digunakan adalah *dihedral-6* (D_6) dan *dihedral-8* (D_8) dan simetri yang digunakan adalah simetri putar (rotasi) dan simetri lipat (refleksi) yang dituliskan dalam bentuk permutasi.
b. Penelitian ini hanya difokuskan pada penentuan pola banyaknya titik sudut terluar, titik sudut, segitiga, segimpat, sikel rotasi, sikel refleksi, dari segitiga bercabang *n*-segitiga dan segiempat bercabang *n*-segiempat serta pembuktian pola tersebut.
c. Penelitian ini juga difokuskan pada *isomorfisme* subgrup simetri dari bidang beraturan cabang-*n* dengan grup *dihedral*.

1.6 Metode Penelitian

Dalam penelitian ini metode yang digunakan adalah metode penelitian kepustakaan (*library research*) atau kajian pustaka, yakni melakukan penelitian untuk memperoleh data-data dan informasi-informasi serta objek yang digunakan dalam pembahasan masalah tersebut. Studi kepustakaan merupakan penampilan argumentasi penalaran keilmuan untuk memaparkan hasil olah pikir mengenai suatu permasalahan atau topik kajian kepustakaan yang dibahas dalam penelitian ini.

Adapun langkah-langkah yang akan digunakan oleh penulis dalam membahas penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Merumuskan masalah
2. Mengumpulkan literatur atau informasi yang berkaitan dengan *isomorfisme*, grup *simetri*, bidang beraturan, grup *dihedral*.
3. Mengidentifikasi definisi, teorema, dan contoh-contoh yang terkait langsung maupun yang mendukung pengambilan kesimpulan pada penelitian ini dari berbagai literatur.
4. Menganalisa data yang meliputi langkah-langkah berikut:
   a. Menggambar bidang segitiga yang dikembangkan menjadi bercabang segitiga sampai *n*-cabang dan segiempat yang dikembangkan menjadi bercabang segiempat sampai *n*-cabang.
   b. Memberikan label pada segitiga bercabang *n*-segitiga dan segiempat bercabang *n*-segiempat.
   c. Mencari rotasi dan refleksi dari segitiga bercabang *n*-segitiga dan segiempat bercabang *n*-segiempat.
   d. Menyatakan permutasi dari rotasi dan refleksi segitiga bercabang *n*-segitiga dan segiempat bercabang *n*-segiempat dalam bentuk permutasi.

e. Mencari pola umum dari banyaknya titik sudut terluar, titik sudut, segitiga, segiempat, sikel rotasi dan sikel refleksi dari bentuk segitiga bercabang *n*-segitiga dan segiempat bercabang *n*-segiempat.
f. Mencari subgrup dari himpunan simetri tersebut.
g. Menentukan *isomorfisme* subgrup simetri dari segitiga bercabang *n*-segitiga dan segiempat bercabang *n*-segiempat dengan grup *dihedral-6* dan *dihedral-8.*
h. Membuat kesimpulan dan melaporkan.

1.7 Sistematika Penulisan

Agar penulisan penelitian ini sistematis dan mempermudah pembaca memahami tulisan ini, penulis membagi tulisan ini ke dalam empat bab sebagai berikut:

1. BAB I PENDAHULUAN

   Bab ini membahas tentang latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

2. BAB II KAJIAN PUSTAKA

   Bab ini membahas tentang teori-teori yang berhubungan dengan penelitian yaitu tentang segitiga bercabang *n*-segitiga, segiempat bercabang *n*-segiempat, rotasi, refleksi, subgrup simetri, *isomorfisme* dan grup *dihedral*.

3. BAB III PEMBAHASAN

Bab ini membahas tentang analisis penentuan pola diperoleh berupa banyaknya titik sudut terluar, titik sudut, segitiga, segiempat, sikel rotasi, sikel refleksi, pola-pola umum beserta buktinya dan *isomorfisme* subgrup simetri dari bidang beraturan cabang-n dengan grup *dihedral*.

4. BAB IV PENUTUP

Bab ini berisi kesimpulan dari materi yang dibahas dan saran peneliti untuk pembaca dan peneliti selanjutnya.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Kajian Isomorfisme Subgrup Simetri dari Bidang Beraturan Cabang-*n* dengan Grup Dihedral dalam Perspektif Islam

Secara umum beberapa konsep dari disiplin ilmu telah dijelaskan dalam Al-Qur'an, salah satunya adalah matematika. Konsep dari disiplin ilmu matematika yang ada dalam Al-Qur'an diantaranya adalah masalah statistik, logika, pemodelan, dan aljabar. Teori tentang grup, dimana definisi dari grup sendiri adalah suatu struktur aljabar yang dinyatakan sebagai $(G,\circ)$ dengan G tak-kosong dan " $\circ$ " adalah operasi biner pada G yang memenuhi sifat-sifat assosiatif, memuat identitas, dan memuat invers dari setiap elemen dalam grup tersebut. Himpunan-himpunan dalam grup mempunyai anggota yang juga merupakan makhluk dari ciptaan-Nya. Sedangkan operasi biner merupakan interaksi antara makhluk-makhluk-Nya, dan sifat-sifat yang harus dipenuhi merupakan aturan-aturan yang telah ditetapkan oleh Allah, artinya sekalipun makhluk-Nya berinteraksi dengan sesama makhluk ia harus tetap berada dalam koridor yang telah ditetapkan oleh Allah.

Kajian mengenai himpunan sudah ada dalam Al-Qur'an. Misalnya kehidupan manusia yang terdiri dari berbagai macam golongan. Dimana golongan juga merupakan himpunan karena himpunan sendiri merupakan kumpulan objek-objek yang terdefinisi.

Dalam Al-Qur’an surat Al-fatihah ayat 7 menyebutkan:

صِرَٰطَ ٱلَّذِينَ أَنۡعَمۡتَ عَلَيۡهِمۡ غَيۡرِ ٱلۡمَغۡضُوبِ عَلَيۡهِمۡ وَلَا ٱلضَّآلِّينَ ٧

Artinya: *“(yaitu) jalan orang-orang yang telah Engkau beri nikmat kepada mereka; bukan (jalan) mereka yang dimurkai dan bukan (pula jalan) mereka yang sesat” (Q. S. Al-Fatihah/1: 7).*

Ayat di atas menjelaskan bahwa manusia terbagi menjadi tiga kelompok, yaitu (1) kelompok yang mendapat nikmat dari Allah, (2) kelompok yang dimurkai, dan (3) kelompok yang sesat (Abdussakir, 2007: 79).

Ayat ini melukiskan permohonan manusia kepada Allah untuk membimbingnya ke jalan orang-orang yang diberi nikmat oleh-Nya, seperti nikmat berupa petunjuk, kesuksesan, kepemimpinan orang-orang yang benar, pengetahuan, amal yang baik, yaitu jalan lurus para nabi, orang-orang sholeh, dan semua orang yang mendapat nikmat, rahmat, dan kemurahan-Nya. Jalan yang lurus adalah ajaran tauhid, agama kebenaran, dan keimanan kepada perintah Allah. Ayat ini juga memperingatkan kepada manusia tentang adanya dua jalan yang menyimpang di hadapan manusia yaitu jalan orang-orang yang mendapatkan murka-Nya dan orang-orang yang tersesat.

Dalam aljabar abstrak juga dipelajari tentang isomorfime, yaitu suatu pemetaan dari himpunan grup pertama ke himpunan grup kedua yang memenuhi homomorfisme dan bersifat bijektif. Dalam perspektif islam, kajian isomorfisme dapat kita lihat dalam surat An-Nahl ayat 97 sebagai berikut:

مَنْ عَمِلَ صَٰلِحًا مِّن ذَكَرٍ أَوْ أُنثَىٰ وَهُوَ مُؤْمِنٌ فَلَنُحْيِيَنَّهُۥ حَيَوٰةً طَيِّبَةً ۖ وَلَنَجْزِيَنَّهُمْ أَجْرَهُم بِأَحْسَنِ مَا كَانُوا۟ يَعْمَلُونَ ﴿٩٧﴾

Artinya: "*Barangsiapa yang mengerjakan amal saleh, baik laki-laki maupun perempuan dalam keadaan beriman, maka sesungguhnya akan Kami berikan kepadanya kehidupan yang baik*[839] *dan sesungguhnya akan Kami beri balasan kepada mereka dengan pahala yang lebih baik dari apa yang telah mereka kerjakan" (Q.S. An-Nahl/16: 97).*

Dari ayat diatas dijelaskan bahwa ada 2 golongan yaitu laki-laki dan perempuan dimana dalam islam tidak ada perbedaan dalam mendapatkan pahala, dengan kata lain bahwa pahala yang didapat, baik laki-laki maupun perempuan adalah sama, selain itu hakekat dari penciptaannya pun juga sama yaitu diciptakan dari unsur sari pati tanah, dan sama-sama beribadah kepada Allah swt. Sedangkan yang membedakan dari kedua golongan tersebut yaitu faktor jenis kelaminnya.

Kembali pada grup, salah satu grup dari materi dalam aljabar abstrak adalah grup simetri, berkaitan dengan itu maka Purwanto (2007: 393) menjelaskan bahwa alam di sekitar kita menampakkan diri dalam bentuknya yang simetri. Aneka bunga dan dedaunan di kebun dan di taman-taman bunga, juga serangga-serangga seperti semut, lebah, dan kupu-kupu yang mengerumuninya. Kita akan mendapatkan bahwa bentuk dan pola warna sangat serasi dan simetri. Seperti halnya tubuh manusia juga dijadikan dalam keadaan setimbang antara bagian demi bagian sehingga memungkinkan manusia bergerak lincah. Tubuh manusia bagian kiri dan bagian kanan tampak setimbang atau tepatnya simetri. Dua mata manusia ada di kanan dan di kiri pada jarak yang sama dari garis yang membelah manusia menjadi dua bagian yang sama persis. Semua anggota tubuh yang berjumlah dua seperti telinga, lubang hidung, tangan, dan kaki berada dalam posisi simetri kanan-kiri (Purwanto, 2007: 393). Kesetimbangan dan kesimetrian ini juga telah ditegaskan dalam Al-Qur'an surat Al-Infithar ayat 7:

ٱلَّذِى خَلَقَكَ فَسَوَّىٰكَ فَعَدَلَكَ ۝٧

Artinya : *"Yang telah menciptakan kamu lalu menyempurnakan kejadianmu dan menjadikan (susunan tubuh)mu seimbang" (Q.S. Al-Infithar/82: 7).*

Ayat ini menjelaskan bahwa alam semesta beserta isinya diciptakan oleh Allah secara sempurna dan seimbang. Sehingga dari kandungan surat Al-Infithar ayat 7 terbukti ada hubungannya dengan grup simetri. Berkaitan dengan grup simetri, himpunan bagian dari grup simetri yang disebut subgrup simetri. Dalam hal ini subgrup simetri yang digunakan adalah subgrup simetri dari bidang beraturan cabang-n dimana bidang beraturan cabang-n tersebut merupakan suatu bidang yang setiap titik sudutnya membentuk bidang baru sesuai dengan bidang semula sebanyak n-cabang, sehingga bidang beraturan tersebut akan menghasilkan bentuk bidang beraturan yang sama dengan bidang semula. Semakin banyak cabangnya maka semakin besar bidang beraturan yang terbentuk, dan begitu juga sebaliknya semakin sedikit cabangnya maka semakin kecil bidang beraturan yang terbentuk, yang membedakan besar dan kecilnya bidang beraturan hanyalah jumlah cabangnya.

Hal ini dapat dianalogikan dengan kehidupan lebah. Sebagaimana firman Allah dalam surat An-Nahl ayat 68 dan 69:

وَأَوْحَىٰ رَبُّكَ إِلَى ٱلنَّحْلِ أَنِ ٱتَّخِذِى مِنَ ٱلْجِبَالِ بُيُوتًا وَمِنَ ٱلشَّجَرِ وَمِمَّا يَعْرِشُونَ ۝٦٨

ثُمَّ كُلِي مِن كُلِّ ٱلثَّمَرَٰتِ فَٱسۡلُكِي سُبُلَ رَبِّكِ ذُلُلٗاۚ يَخۡرُجُ مِنۢ بُطُونِهَا شَرَابٞ مُّخۡتَلِفٌ أَلۡوَٰنُهُۥ فِيهِ

شِفَآءٞ لِّلنَّاسِۚ إِنَّ فِي ذَٰلِكَ لَأٓيَةٗ لِّقَوۡمٖ يَتَفَكَّرُونَ ٦٩

Artinya: *"Dan Tuhanmu mewahyukan kepada lebah, "Buatlah sarang-sarang di bukit-bukit, di pohon-pohon kayu, dan di tempat-tempat yang dibikin manusia",'' kemudian makanlah dari tiap-tiap (macam) buah-buahan dan tempuhlah jalan Tuhanmu yang telah dimudahkan (bagimu). Dari perut lebah itu keluar minuman (madu) yang bermacam-macam warnanya, di dalamnya terdapat obat yang menyembuhkan bagi manusia. Sesungguhnya pada yang demikian itu benar-benar terdapat tanda (kebesaran Tuhan) bagi orang-orang yang memikirkan"(Q.S. An-Nahl/16: 68,69).*

Gambar 2.1 Kehidupan lebah

Ayat tersebut menjelaskan bahwa allah memerintahkan lebah untuk membuat sarang-sarang di bukit-bukit, di pohon-pohon kayu, dan di tempat-tempat yang di bikin manusia. Kemudian memerintahkan lebah memakan buah-buahan yang sudah disediakan Allah swt. Lalu lebah tersebut akan menghasilkan madu yang bermanfaat bagi manusia yaitu sebagai obat yang dapat menyembuhkan manusia.

Apabila kandungan yang terdapat dalam surat An-Nahl ayat 68 dan 69 tersebut kita analogikan dengan konsep matematika diatas maka terdapat hubungan yaitu dapat kita lihat dari bentuk sarang pada lebah yang berupa kantong-kantong berbentuk heksagonal atau segienam beraturan. Semakin besar sarang lebah, maka semakin banyak kantong-kantong berbentuk heksagonal yang dibangun lebah. Dan begitu juga sebaliknya semakin kecil sarang lebah, maka semakin sedikit kantong-kantong berbentuk heksagonal yang dibangun lebah, dimana baik yang sarangnya besar maupun kecil bentuk dan ukurannya sama, yang membedakan adalah jumlah kantong-kantong berbentuk heksagonal yang ada didalamnya. Dalam kandungan surat An-Nahl ayat 68 dan 69 juga dijelaskan bahwa lebah akan menghasilkan madu yang bermanfaat bagi manusia yaitu sebagai obat yang dapat menyembuhkan manusia, dimana lebah tersebut menghasilkan madu yang berasal dari sari pati bunga yang memberi manfaat bagi manusia yang berarti bahwa umat islam dianjurkan mencari sesuatu yang halal dan memberi manfaat bagi orang lain.

Adapun representasi dari korespondensi satu-satu pada subgrup simetri dengan grup dihedral, seperti halnya dengan kerjasama atau gotong royong antara lebah satu dengan lebah yang lain dalam membangun kantong-kantong berbentuk heksagonal yang digunakan untuk mengisi madu. Kumpulan kantong heksagonal yang dibuat oleh lebah itu ketika berkumpul sempurna maka akan saling berdempetan antara satu dengan yang lainnya, seperti halnya sebuah perumahan yang dibangun oleh manusia akan saling berdekatan satu dengan yang lainnya. Sehingga dari penjelasan diatas dapat kita ketahui bahwa terbukti adanya hubungan antara konsep matematika diatas dengan konsep isi kandungan surat An-Nahl ayat 68 dan 69.

2.2 Fungsi (Pemetaan)

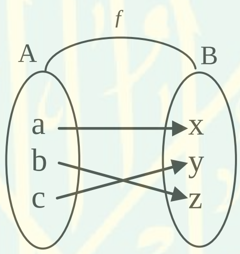
2.2.1 Definisi Fungsi

Diberikan himpunan tak kosong A dan B, $\theta: A \to B$ dikatakan suatu pemetaan (fungsi) dari A ke B jika semua a ∈ A mempunyai pasangan tepat satu di B. (Whitelaw, 1995:47)

Contoh:

Misalkan A = {a, b, c} dan B = {x, y, z}

Misalkan f : A → B didefinisikan seperti pada diagram berikut ini.



Gambar 2.2 Fungsi f dari himpunan A ke B

Pada pemetaan ini dapat dikatakan bahwa $f(a) = x, f(b) = z,$ dan $f(c) = y$. Pemetaan f ini dapat pula ditulis sebagai himpunan pasangan terurut:

$f = \{(a, x), (b, z), (c, y)\}$.

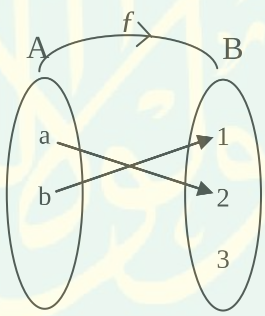
Misalkan diketahui dua himpunan S dan T yang keduanya tak hampa. Pemetaan f dari S ke dalam T, kita tulis f : S → T, adalah suatu cara yang mengaitkan setiap unsur $x \in$ S dengan satu unsur $y \in$ T. Pengaitan ini kita tandai dengan $f : x \longmapsto y$. (Arifin, 2000:6)

Pada hakekatnya setiap unsur di S dapat dikaitkan dengan paling sedikit satu unsur di Y. Misalkan unsur $x \in$ S dikaitkan dengan unsur y_1 dan y_2 di T yang berbeda. Hal seperti ini tidak dapat terjadi pada pemetaan f : S → T. Dengan demikian, pengaitan $f : x \longmapsto y$ untuk semua unsur $x \in$ S akan didefinisikan pemetaan f : S → T jika dan hanya jika setiap $x \in$ S dikaitkan dengan satu $y \in$ T. (Arifin, 2000:6-7)

2.2.2 Fungsi Injektif

Misalkan f adalah fungsi dari A ke B. Fungsi f disebut fungsi 1-1 jika untuk setiap $x, y \in A$ dengan f(x) = f(y), maka $x = y$. Dengan kata lain dapat dinyatakan bahwa fungsi f adalah 1-1 jika untuk setiap $x, y \in A$ dengan $x \neq y$, maka f(x) $\neq$ f(y). Fungsi 1-1 sering juga disebut dengan fungsi injektif (Bartle and Sherbert, 2000: 8).

Contoh:

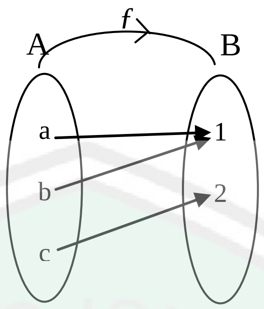


Gambar 2.3. Fungsi Injektif dari himpunan A ke B

2.2.3 Fungsi Surjektif

Misalkan A dan B adalah himpunan, dan f adalah fungsi dari A ke B. Fungsi f disebut *fungsi Onto* jika R(f) = B. Jadi, f: A → B disebut fungsi Onto jika untuk setiap $y \in$ B maka ada $x \in A$ sehingga f(x)= y. Fungsi Onto sering disebut juga fungsi surjektif atau fungsi Pada (Bartle and Sherbert, 2000: 8).

Contoh:

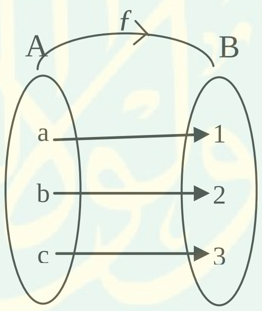


Gambar 2.4 Fungsi Surjektif dari himpunan A ke B

2.2.4 Fungsi Bijektif

Suatu fungsi yang sekaligus injektif dan surjektif disebut fungsi bijektif (Bartle and Sherbert, 2000: 8).

Contoh:



Gambar 2.5 Fungsi Bijektif dari himpunan A ke B

2.3 Grup

2.3.1 Operasi Biner

Dummit dan Foote (1980: 17) menyebutkan definisi dari operasi biner sebagai berikut:

1. Operasi biner " $*$ " pada suatu himpunan G adalah suatu fungsi $*: G \times G \to G$. Untuk setiap $a, b \in G$ dapat dituliskan $a * b$ untuk $*\,(a, b)$.
2. Suatu operasi biner " $*$ " pada suatu himpunan G adalah assosiatif jika untuk setiap $a, b, c \in G, a * (b * c) = (a * b) * c$.

3. Jika $" * "$ operasi biner pada suatu himpunan G, elemen-elemen $a, b \in G$ dikatakan komutatif jika $a * b = b * a$. Dikatakan $" * "$ (atau G) komutatif jika untuk setiap $a, b \in G, a * b = b * a$.

Contoh:

Misalkan B = himpunan bilangan bulat. Operasi + (penjumlahan) pada B merupakan operasi biner, sebab operasi + merupakan pemetaan dari $(B \times B) \rightarrow B$, yaitu $\forall(a, b) \in B \times B$ maka $(a + b) \in B$. Jumlah dua bilangan bulat adalah suatu bilangan bulat pula. Operasi ÷ (pembagian) pada B bukan merupakan operasi biner pada B sebab terdapat $(a, b) \in B \times B$ sedemikian sehingga $(a \div b) \notin B$, misalnya $(3,4) \in B \times B$ dan $(3{:}4) \notin B$.

2.3.2 Definisi Grup

Himpunan tak-kosong G dikatakan grup jika dalam G terdapat operasi biner yang dinyatakan dengan $" * "$, sedemikian sehingga menurut Herstein (1975:28) :

1. Untuk setiap $a, b, c \in G$ mengakibatkan $a * (b * c) = (a * b) * c$ (sifat assosiatif)
2. Terdapat suatu elemen $e \in G$ sedemikian sehingga $a * e = e * a = a$ untuk setiap $a \in G$ (e adalah elemen identitas di G)
3. Untuk setiap $a \in G$, terdapat suatu elemen $a^{-1} \in G$ sedemikian sehingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ (a^{-1} adalah invers dari a di G).

Contoh:

$\mathbb{Z}$ adalah himpunan bilangan bulat, $(\mathbb{Z}, +)$ adalah grup karena berlaku:

1. Untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$ maka $(a + b) \in \mathbb{Z}$. Jadi, operasi $+$ adalah operasi biner pada $\mathbb{Z}$ atau dengan kata lain, operasi + tertutup di $\mathbb{Z}$.
2. Untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}$ maka $a + (b + c) = (a + b) + c$. Jadi, $\mathbb{Z}$ dengan operasi + (penjumlahan) memenuhi sifat assosiatif.
3. Terdapat elemen identitas yaitu $0 \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $a + 0 = 0 + a = a$, untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$.
4. Untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$ terdapat a^{-1} yaitu $(-a) \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga

$$a + (-a) = (-a) + a = 0$$

Elemen $(-a)$ adalah invers dari a.

Karena himpunan $\mathbb{Z}$ dengan operasi + (penjumlahan) memenuhi aksioma-aksioma grup, maka $(\mathbb{Z}, +)$ adalah grup.

Grup $(G,*)$ dikatakan *abelian* (komutatif) jika untuk setiap $a, b \in G$ berlaku $a * b = b * a$ (Arifin, 2000: 36).

Contoh:

Selidiki apakah (**Z**,+) merupakan grup abelian.

Diketahui (**Z**,+) adalah grup, misal $m, n \in Z$,

maka $m + n = n + m$

Jadi (**Z**,+) adalah grup komutatif.

2.3.3 Tabel Cayley

Dalam sebuah grup senantiasa melibatkan hanya satu operasi tertentu. Pendefinisian dari operasi pada suatu himpunan tak kosong merupakan salah satu syarat cukup untuk dapat mengkontruksi suatu struktur grup. Pendefinisan operasi pada himpunan berhingga (*finite*) dapat dilakukan dengan cara yang mudah yaitu dengan membuat tabel yang berisi hasil operasi dari masing-masing dua elemen di himpunan tersebut. Tabel ini disebut tabel Cayley (Sulandra, 1996: 55).

Contoh:

Misalkan A grup dengan operasi pada himpunan tersebut adalah operasi biner "$*$". Himpunan $A = \{e, a\}$ didefinisikan operasi $*$ pada A adalah $a * a = e$; e adalah elemen identitas, sehingga dapat dibuat tabel Cayley sebagai berikut:

Tabel 2.1: Tabel Cayley Grup A

$*$	e	a
e	e	a
a	a	e

Dari tabel tersebut, e adalah elemen identitas, sehingga $e * a = a * e = a$ dan agar himpunan A merupakan suatu grup dengan operasi "$*$", maka elemen a harus mempunyai invers (balikan) a^{-1} sedemikian sehingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$. Sehingga diperoleh $a^{-1} = a$.

2.4 Subgrup

Sub himpunan tak-kosong H dari suatu grup G dikatakan subgrup dari G jika H membentuk grup terhadap operasi yang sama pada grup G (Herstein, 1975: 37).

Herstein (1975: 37) menyatakan dalam sebuah teorema bahwa suatu sub himpunan tak-kosong H dari grup G adalah subgrup dari grup G jika dan hanya jika menurut Herstein (1975: 38) berlaku:

1. $a, b \in H$ maka $a * b \in H$
2. $a \in H$ maka $a^{-1} \in H$

Bukti:

Untuk membuktikan teorema tersebut, perlu dibuktikan kondisi perlu dan cukup bagi subgrup. Kondisi perlu bagi subgrup adalah jika $(H,*) \leq (G,*)$ maka $\forall a, b \in H$ berlaku $a * b \in H$ dan $a^{-1} \in H$. Sedangkan kondisi cukup bagi subgrup adalah jika $H \subseteq G, H \neq \emptyset$ dan $a * b^{-1} \in H$ maka $(H,*) \leq (G,*)$.

Kondisi perlu:

$(H,*) \leq (G,*)$ maka $\forall a, b \in H$ berlaku $a * b \in H$ dan $a^{-1} \in H$

Diketahui $(H,*) \leq (G,*)$ maka H adalah sebuah grup, sehingga memenuhi aksioma-aksioma grup yaitu untuk setiap $a, b, c \in H$, maka berlaku sifat assosiatif, H memuat elemen identitas, dan H memuat invers dari setiap elemennya. Akan ditunjukkan bahwa untuk setiap $a, b, c \in H$ berlaku $a * b \in H$ dan $a^{-1} \in H$. Karena H adalah grup. Karena H grup maka berlaku sifat ketertutupan yaitu untuk setiap $a, b \in H$ maka $a * b \in H$ dan H juga memuat invers dari setiap elemennya yaitu $a^{-1}, b^{-1} \in H$. Karena $a^{-1}, b^{-1} \in H$ maka berlaku $a * b^{-1} \in H$ atau $a^{-1} * b \in H$ (sifat tertutup terhadap operasi " $*$ "). Jadi kondisi perlu bagi subgrup telah terpenuhi.

Kondisi cukup:

Diketahui $H \subseteq G, H \neq \emptyset$ dan $a * b^{-1} \in H$

Akan ditunjukkan bahwa $(H,*) \leq (G,*)$.

H adalah sub himpunan dari G yang memenuhi (1) dan (2). Untuk menunjukkan bahwa H subgrup perlu ditunjukkan bahwa $e \in H$ dan bahwa berlaku sifat assosiatif untuk semua elemen dari H. Karena sifat assosiatif berlaku di G, maka hal ini juga terpenuhi untuk sub himpunan dari G yaitu H. Jika $a \in H$, menurut (2), $a^{-1} \in H$ dan dengan (1), $e = a * a^{-1} \in H$. Sehingga kondisi cukup bagi subgrup terpenuhi. Sehingga teorema terbukti.

Contoh:

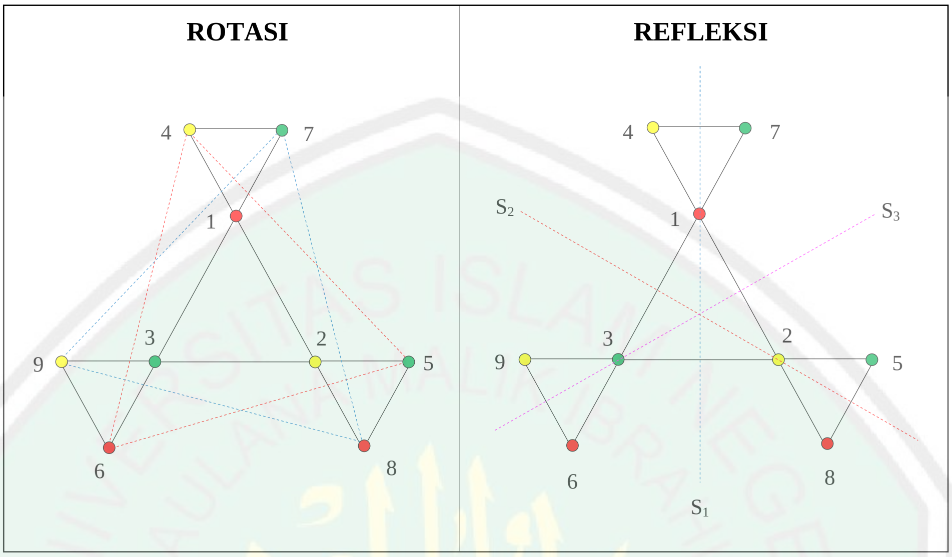
Misal G grup bilangan bulat terhadap operasi + (penjumlahan), H sub himpunan yang terdiri dari kelipatan 5. Maka H adalah subgrup dari grup G.

Subgrup yang terdiri dari identitas saja atau semua elemen suatu grup disebut subgrup *trivial*. Sedangkan subgrup selain identitas dan semua elemen suatu grup disebut subgrup sejati.

2.5 Rotasi dan Refleksi Pada Bidang

Rotasi adalah proses memutar bangun geometri yang ditentukan oleh arah dan besar sudut rotasi. Sedangkan refleksi adalah suatu pencerminan (menurut penulis).

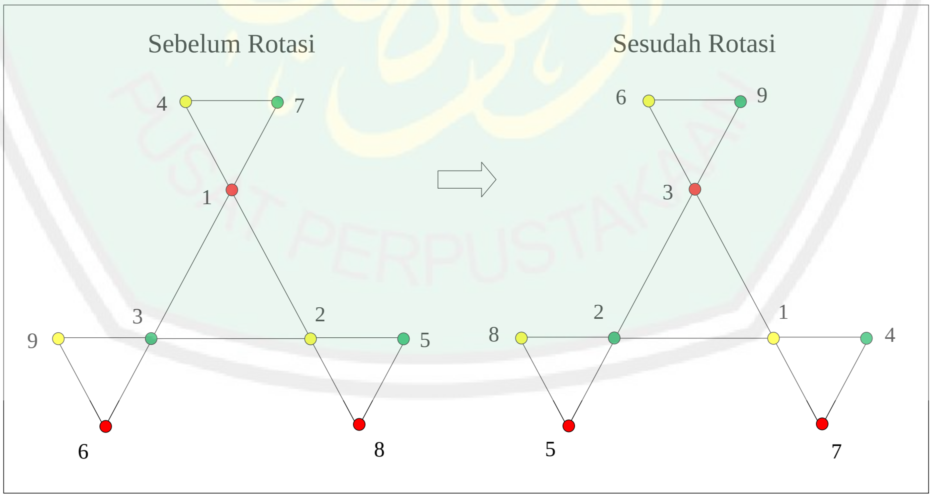
Contoh rotasi dan refleksi untuk segitiga bercabang 1-segitiga sebagai berikut:



Gambar 2.6 Rotasi dan Refleksi Segitiga Bercabang 1-Segitiga

Adapun rotasi dan rerfleksi dari segitiga bercabang 1-segitiga sebagai berikut:

1) α_1 = rotasi sejauh 120^0 (Searah Jarum Jam)



Gambar 2.7 Rotasi Sejauh 120^0 Segitiga Bercabang 1-Segitiga

Jika segitiga bercabang 1-segitiga diputar sejauh 120^0 maka:

Titik 1 akan menempati posisi titik 2

Titik 2 akan menempati posisi titik 3

Titik 3 akan menempati posisi titik 1

dan seterusnya hingga titik 9 akan menempati posisi titik 7

Ditulis:

$$\alpha_1 = 1 \to 2 \quad ; \quad 4 \to 5 \quad ; \quad 7 \to 8$$

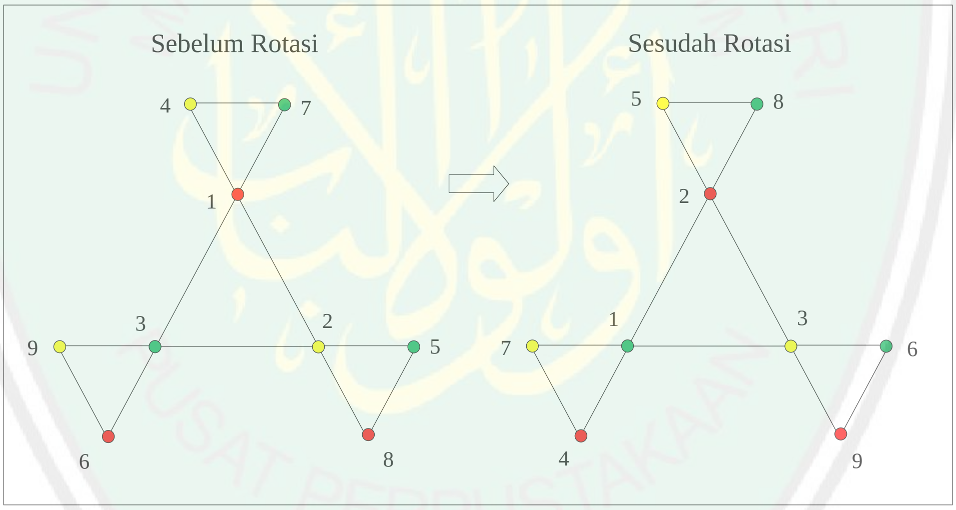
$$2 \to 3 \quad ; \quad 5 \to 6 \quad ; \quad 8 \to 9$$

$$3 \to 1 \quad ; \quad 6 \to 4 \quad ; \quad 9 \to 7$$

Penulisan diatas dapat juga dinyatakan dalam bentuk sikel yaitu:

$$\alpha_1 = (1\ 2\ 3)\ (4\ 5\ 6)\ (7\ 8\ 9)$$

2) α_2 = rotasi sejauh 240^0 (Searah Jarum Jam)



Gambar 2.8 Rotasi Sejauh 240^0 Segitiga Bercabang 1-Segitiga

Jika segitiga bercabang 1-segitiga diputar sejauh 240^0 maka:

Titik 1 akan menempati posisi titik 3

Titik 2 akan menempati posisi titik 1

Titik 3 akan menempati posisi titik 2

dan seterusnya hingga titik 9 akan menempati posisi titik 8

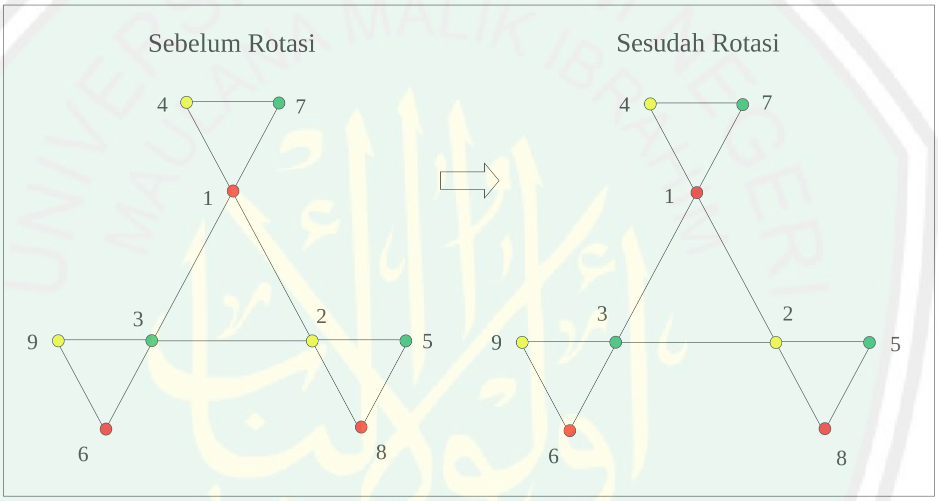
Ditulis:

$$\alpha_2 = \begin{array}{ccccc} 1 \to 3 & ; & 4 \to 6 & ; & 7 \to 9 \\ 2 \to 1 & ; & 5 \to 4 & ; & 8 \to 7 \\ 3 \to 2 & ; & 6 \to 5 & ; & 9 \to 8 \end{array}$$

Penulisan diatas dapat juga dinyatakan dalam bentuk sikel yaitu:

$$\alpha_2 = (1\ 3\ 2)\ (4\ 6\ 5)\ (7\ 9\ 8)$$

3) α_3 = rotasi sejauh 360^0 (Searah Jarum Jam)



Gambar 2.9. Rotasi Sejauh 360^0 Segitiga Bercabang 1-Segitiga

Jika segitiga bercabang 1-segitiga diputar sejauh 360^0 maka:

Titik 1 akan menempati posisi titik 1

Titik 2 akan menempati posisi titik 2

Titik 3 akan menempati posisi titik 3

dan seterusnya hingga titik 9 akan menempati posisi titik 9

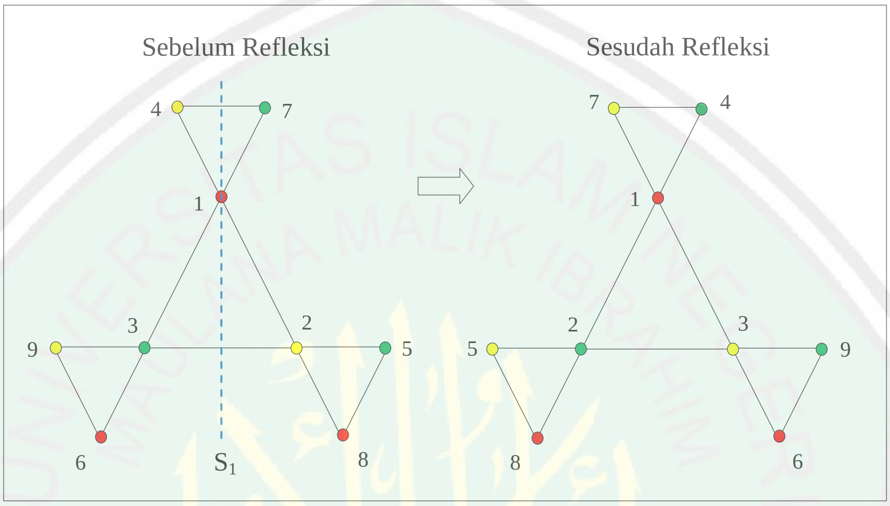
Ditulis:

$$\alpha_3 = \begin{array}{ccccc} 1 \to 1 & ; & 4 \to 4 & ; & 7 \to 7 \\ 2 \to 2 & ; & 5 \to 5 & ; & 8 \to 8 \\ 3 \to 3 & ; & 6 \to 6 & ; & 9 \to 9 \end{array}$$

Penulisan diatas dapat juga dinyatakan dalam bentuk sikel yaitu:

$$\alpha_3 = (1)\,(2)\,(3)\,(4)\,(5)\,(6)\,(7)\,(8)\,(9) = 1$$

4) β_1 = refleksi terhadap sumbu S_1



Gambar 2.10 Refleksi Terhadap Sumbu S_1 Segitiga Bercabang 1-Segitiga

Jika segitiga bercabang 1-segitiga direfleksi terhadap sumbu S_1 maka:

Titik 1 akan menempati posisi titik 1

Titik 2 akan menempati posisi titik 3

Titik 3 akan menempati posisi titik 2

dan seterusnya hingga titik 9 akan menempati posisi titik 5

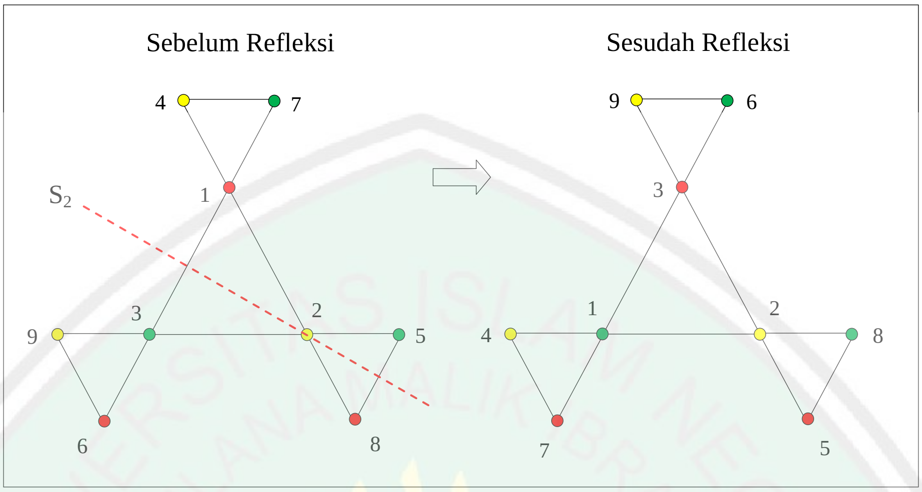
Ditulis:

$$\beta_1 = \begin{array}{ccccc} 1 \to 1 & ; & 4 \to 7 & ; & 7 \to 4 \\ 2 \to 3 & ; & 5 \to 9 & ; & 8 \to 6 \\ 3 \to 2 & ; & 6 \to 8 & ; & 9 \to 5 \end{array}$$

Penulisan diatas dapat juga dinyatakan dalam bentuk sikel yaitu:

$$\beta_1 = (2\ 3)\,(4\ 7)\,(5\ 9)\,(6\ 8)$$

5) β_2 = refleksi terhadap sumbu S_2



Gambar 2.11 Refleksi Terhadap Sumbu S_2 Segitiga Bercabang 1-Segitiga

Jika segitiga bercabang 1-segitiga direfleksi terhadap sumbu S_2 maka:

Titik 1 akan menempati posisi titik 3

Titik 2 akan menempati posisi titik 2

Titik 3 akan menempati posisi titik 1

dan seterusnya hingga titik 9 akan menempati posisi titik 4

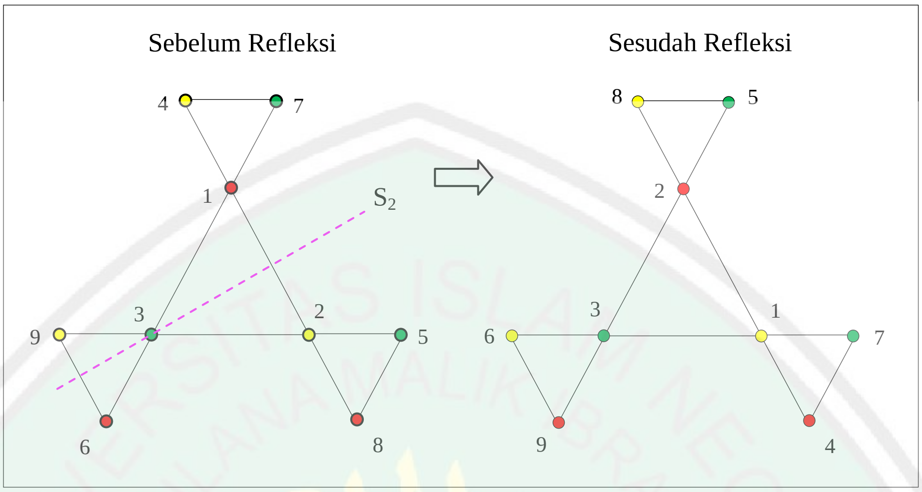
Ditulis:

$$\begin{aligned} \beta_2 = \quad & 1 \to 3 \quad ; \quad 4 \to 9 \quad ; \quad 7 \to 6 \\ & 2 \to 2 \quad ; \quad 5 \to 8 \quad ; \quad 8 \to 5 \\ & 3 \to 1 \quad ; \quad 6 \to 7 \quad ; \quad 9 \to 4 \end{aligned}$$

Penulisan diatas dapat juga dinyatakan dalam bentuk sikel yaitu:

$$\beta_2 = (1\ 3)\ (4\ 9)\ (5\ 8)\ (6\ 7)$$

6) β_3 = refleksi terhadap sumbu S_3



Gambar 2.12 Refleksi Terhadap Sumbu S_3 Segitiga Bercabang 1-Segitiga

Jika segitiga bercabang 1-segitiga direfleksi terhadap sumbu S_3 maka:

Titik 1 akan menempati posisi titik 2

Titik 2 akan menempati posisi titik 1

Titik 3 akan menempati posisi titik 3

dan seterusnya hingga titik 9 akan menempati posisi titik 6

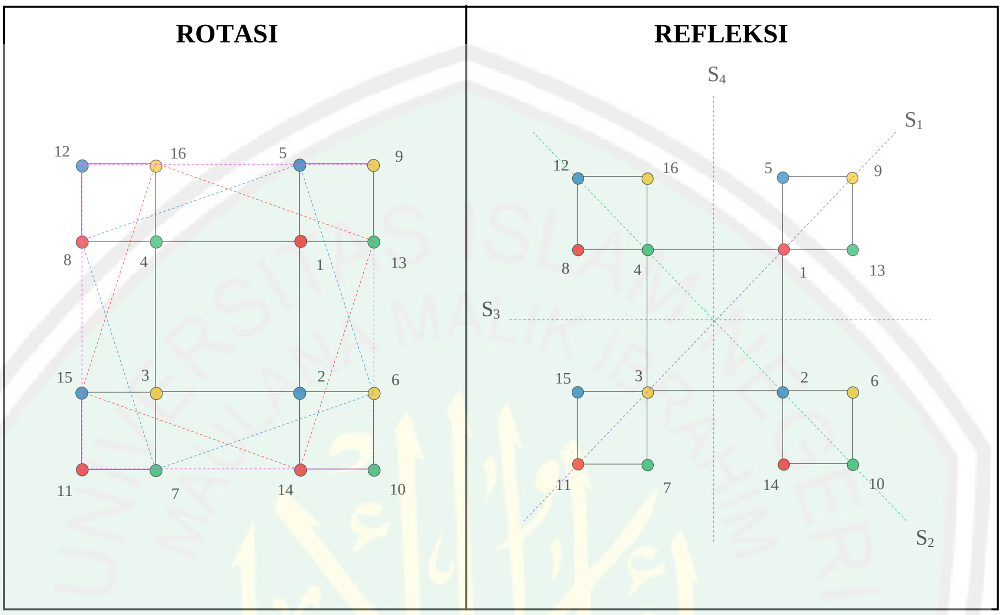
Ditulis:

$$\begin{aligned} \beta_3 \;=\; & 1 \rightarrow 2 \quad ; \quad 4 \rightarrow 8 \quad ; \quad 7 \rightarrow 5 \\ & 2 \rightarrow 1 \quad ; \quad 5 \rightarrow 7 \quad ; \quad 8 \rightarrow 4 \\ & 3 \rightarrow 3 \quad ; \quad 6 \rightarrow 9 \quad ; \quad 9 \rightarrow 6 \end{aligned}$$

Penulisan diatas dapat juga dinyatakan dalam bentuk sikel yaitu:

$$\beta_3 = (1\ 2)\ (4\ 8)\ (5\ 7)\ (6\ 9)$$

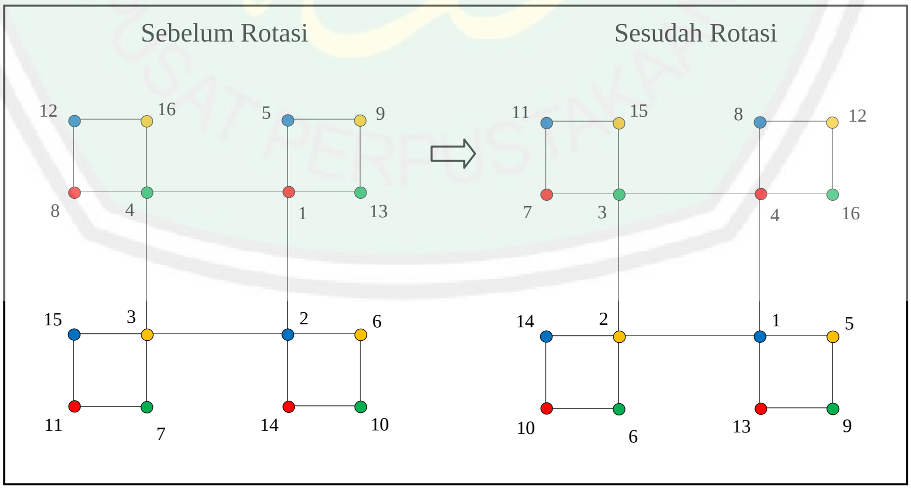
Sedangkan contoh rotasi dan refleksi segiempat bercabang 1-segiempat adalah sebagai berikut:



Gambar 2.13 Rotasi dan Refleksi Segiempat Bercabang 1-Segiempat

Adapun rotasi dari segiempat bercabang 1-segiempat sebagai berikut:

1) α_1 = rotasi sejauh 90^0



Gambar 2.14 Rotasi Sejauh 90^0 Segiempat Bercabang 1-Segiempat

Jika segiempat bercabang 1-segiempat diputar sejauh 90^0 maka:

Titik 1 akan menempati posisi titik 2

Titik 2 akan menempati posisi titik 3

Titik 3 akan menempati posisi titik 4

Titik 4 akan menempati posisi titik 1

dan seterusnya hingga titik 16 akan menempati posisi titik 13

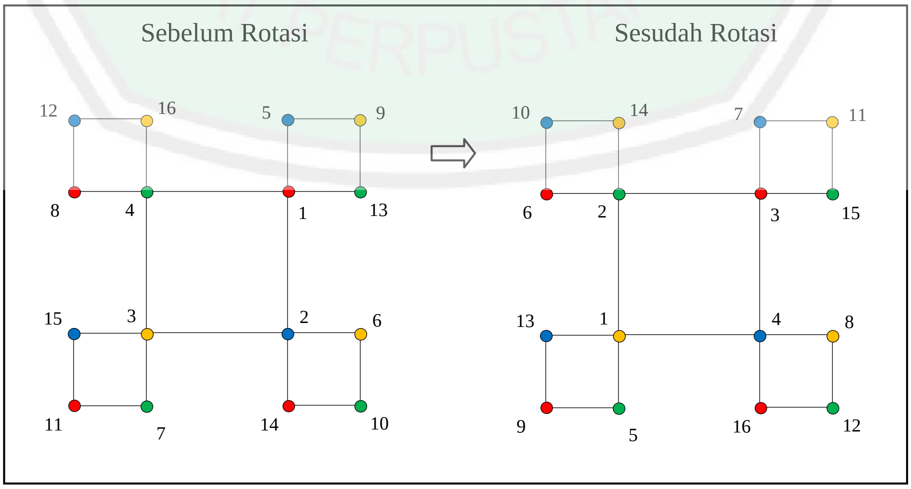
Ditulis:

$$\begin{array}{llllllll} \alpha_1 = & 1 \rightarrow 2 & ; & 5 \rightarrow 6 & ; & 9 \rightarrow 10 & ; & 13 \rightarrow 14 \\ & 2 \rightarrow 3 & ; & 6 \rightarrow 7 & ; & 10 \rightarrow 11 & ; & 14 \rightarrow 15 \\ & 3 \rightarrow 4 & ; & 7 \rightarrow 8 & ; & 11 \rightarrow 12 & ; & 15 \rightarrow 16 \\ & 4 \rightarrow 1 & ; & 8 \rightarrow 5 & ; & 12 \rightarrow 9 & ; & 16 \rightarrow 13 \end{array}$$

Penulisan di atas dapat juga dinyatakan dalam bentuk sikel yaitu:

α_1 = (1 2 3 4) (5 6 7 8) (9 10 11 12) (13 14 15 16)

2) α_2 = rotasi sejauh 180^0



Gambar 2.15 Rotasi Sejauh 180^0 Segiempat Bercabang 1-Segiempat

Jika segiempat bercabang 1-segiempat diputar sejauh 180^0 maka:

Titik 1 akan menempati posisi titik 3

Titik 2 akan menempati posisi titik 4

Titik 3 akan menempati posisi titik 1

Titik 4 akan menempati posisi titik 2

dan seterusnya hingga titik 16 akan menempati posisi titik 14

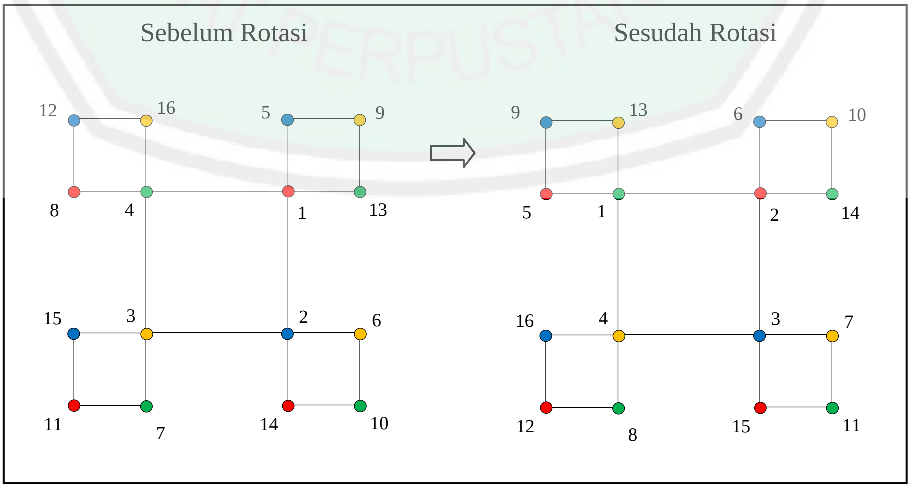
Ditulis:

$$\begin{array}{llllllll} \alpha_2 = & 1 \to 3 & ; & 5 \to 7 & ; & 9 \to 11 & ; & 13 \to 15 \\ & 2 \to 4 & ; & 6 \to 8 & ; & 10 \to 12 & ; & 14 \to 16 \\ & 3 \to 1 & ; & 7 \to 5 & ; & 11 \to 9 & ; & 15 \to 13 \\ & 4 \to 2 & ; & 8 \to 6 & ; & 12 \to 10 & ; & 16 \to 14 \end{array}$$

Penulisan di atas dapat juga dinyatakan dalam bentuk sikel yaitu:

$$\alpha_2 = (1\ 3)\ (2\ 4)\ (5\ 7)\ (6\ 8)\ (9\ 11)\ (10\ 12)\ (13\ 15)\ (14\ 16)$$

3) α_3 = rotasi sejauh 270^0



Gambar 2.16 Rotasi Sejauh 270^0 Segiempat Bercabang 1-Segiempat

Jika segiempat bercabang 1-segiempat diputar sejauh 270^0 maka:

Titik 1 akan menempati posisi titik 4

Titik 2 akan menempati posisi titik 1

Titik 3 akan menempati posisi titik 2

Titik 4 akan menempati posisi titik 3

dan seterusnya hingga titik 16 akan menempati posisi titik 15

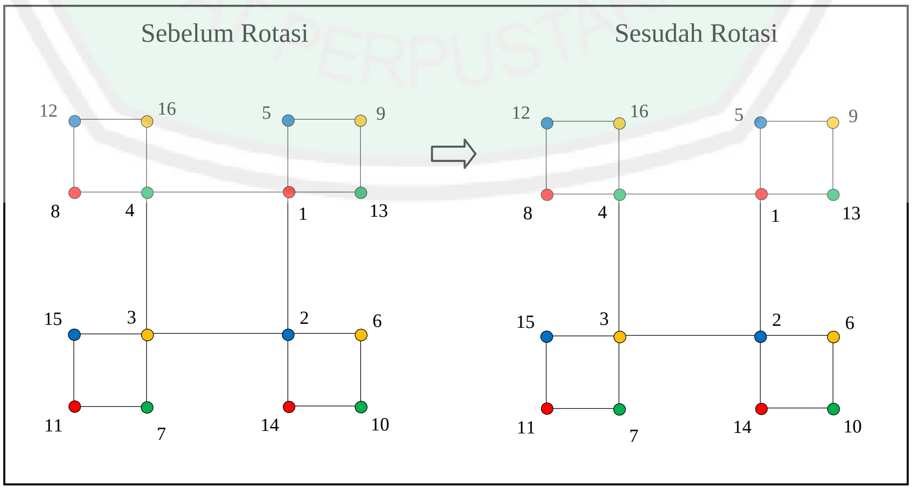
Ditulis:

$$\begin{array}{llllllll} \alpha_3 = & 1 \rightarrow 4 & ; & 5 \rightarrow 8 & ; & 9 \rightarrow 12 & ; & 13 \rightarrow 16 \\ & 2 \rightarrow 1 & ; & 6 \rightarrow 5 & ; & 10 \rightarrow 9 & ; & 14 \rightarrow 13 \\ & 3 \rightarrow 2 & ; & 7 \rightarrow 6 & ; & 11 \rightarrow 10 & ; & 15 \rightarrow 14 \\ & 4 \rightarrow 3 & ; & 8 \rightarrow 7 & ; & 12 \rightarrow 11 & ; & 16 \rightarrow 15 \end{array}$$

Penulisan di atas dapat juga dinyatakan dalam bentuk sikel yaitu:

$$\alpha_3 = (1\ 4\ 3\ 2)\ (5\ 8\ 7\ 6)\ (9\ 12\ 11\ 10)\ (13\ 16\ 15\ 14)$$

4) α_4 = rotasi sejauh 360^0



Gambar 2.17 Rotasi Sejauh 360^0 Segiempat Bercabang 1-Segiempat

Jika segiempat bercabang 1-segiempat diputar sejauh 360^0 maka:

Titik 1 akan menempati posisi titik 1

Titik 2 akan menempati posisi titik 2

Titik 3 akan menempati posisi titik 3

Titik 4 akan menempati posisi titik 4

dan seterusnya hingga titik 16 akan menempati posisi titik 16

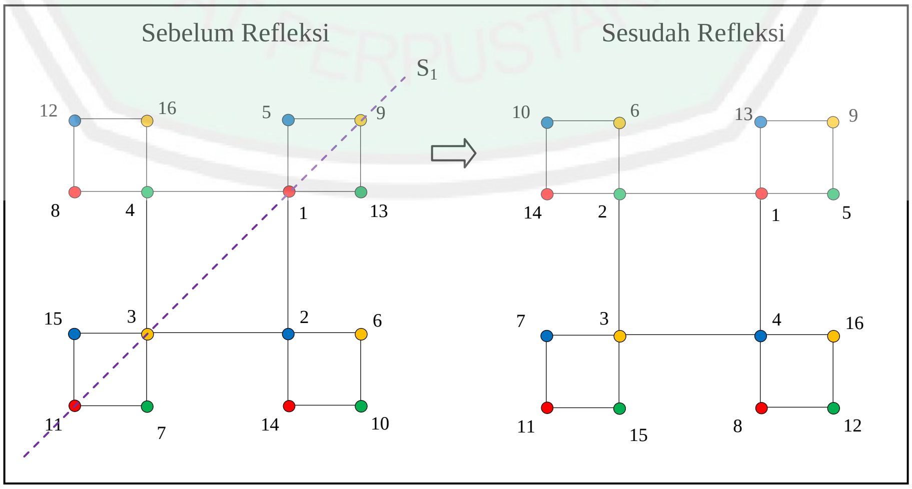
Ditulis:

$$\begin{array}{llllllll} \alpha_4 = & 1 \to 1 & ; & 5 \to 5 & ; & 9 \to 9 & ; & 13 \to 13 \\ & 2 \to 2 & ; & 6 \to 6 & ; & 10 \to 10 & ; & 14 \to 14 \\ & 3 \to 3 & ; & 7 \to 7 & ; & 11 \to 11 & ; & 15 \to 15 \\ & 4 \to 4 & ; & 8 \to 8 & ; & 12 \to 12 & ; & 16 \to 16 \end{array}$$

Penulisan di atas dapat juga dinyatakan dalam bentuk sikel yaitu:

$$\alpha_4 = (1)\,(2)\,(3)\,(4)\,(5)\,(6)\,(7)\,(8)\,(9)\,(10)\,(11)\,(12)\,(13)\,(14)\,(15)\,(16)$$

5) β_1 = refleksi terhadap sumbu S_1



Gambar 2.18 Refleksi Terhadap Sumbu S_1 Segiempat Bercabang 1-Segiempat

Jika segiempat bercabang 1-segiempat direfleksi terhadap sumbu S_1 maka:

Titik 1 akan menempati posisi titik 1

Titik 2 akan menempati posisi titik 4

Titik 3 akan menempati posisi titik 3

Titik 4 akan menempati posisi titik 2

dan seterusnya hingga titik 16 akan menempati posisi titik 6

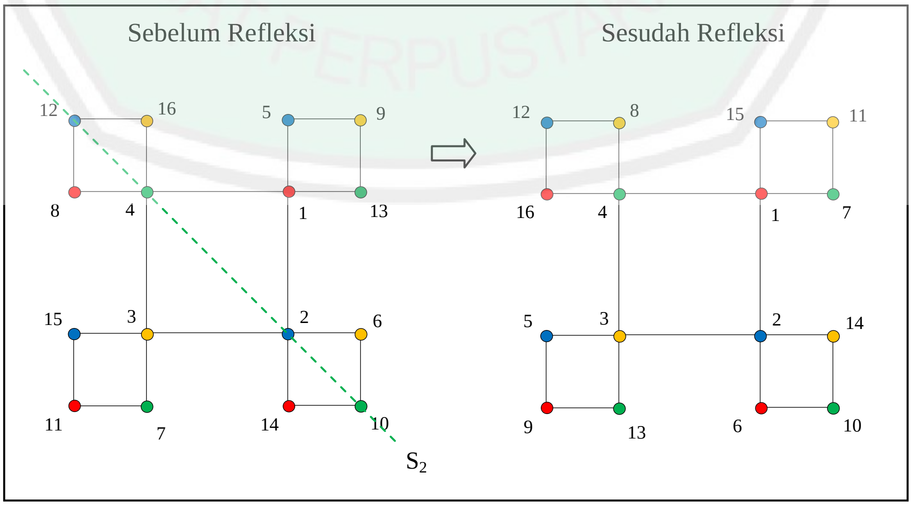
Ditulis:

$$\begin{array}{llllllll} \beta_1 = & 1 \to 1 & ; & 5 \to 13 & ; & 9 \to 9 & ; & 13 \to 5 \\ & 2 \to 4 & ; & 6 \to 16 & ; & 10 \to 12 & ; & 14 \to 8 \\ & 3 \to 3 & ; & 7 \to 15 & ; & 11 \to 11 & ; & 15 \to 7 \\ & 4 \to 2 & ; & 8 \to 14 & ; & 12 \to 10 & ; & 16 \to 6 \end{array}$$

Penulisan di atas dapat juga dinyatakan dalam bentuk sikel yaitu

$$\beta_1 = (1)\,(2\ 4)\,(3)\,(5\ 13)\,(6\ 16)\,(7\ 15\ )\,(8\ 14)\,(9)\,(10\ 12)\,(11)$$

6) β_2 = refleksi terhadap sumbu S_2



Gambar 2.19 Refleksi Terhadap Sumbu S_2 Segiempat Bercabang 1-Segiempat

Jika segiempat bercabang 1-segiempat direfleksi terhadap sumbu S_2 maka:

Titik 1 akan menempati posisi titik 3

Titik 2 akan menempati posisi titik 2

Titik 3 akan menempati posisi titik 1

Titik 4 akan menempati posisi titik 4

dan seterusnya hingga titik 16 akan menempati posisi titik 8

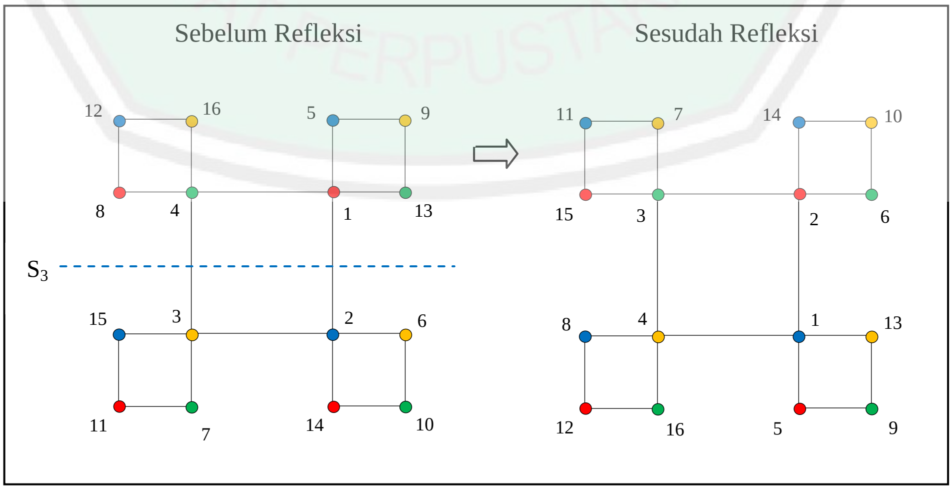
Ditulis:

$$\begin{array}{llllllll} \beta_2 = & 1 \to 3 & ; & 5 \to 15 & ; & 9 \to 11 & ; & 13 \to 7 \\ & 2 \to 2 & ; & 6 \to 14 & ; & 10 \to 10 & ; & 14 \to 6 \\ & 3 \to 1 & ; & 7 \to 13 & ; & 11 \to 9 & ; & 15 \to 5 \\ & 4 \to 4 & ; & 8 \to 16 & ; & 12 \to 12 & ; & 16 \to 8 \end{array}$$

Penulisan di atas dapat juga dinyatakan dalam bentuk sikel yaitu:

$$\beta_2 = (1\ 3)\ (2)\ (4)\ (5\ 15)\ (6\ 14)\ (7\ 13)\ (8\ 16)\ (9\ 11)\ (10)\ (12)$$

7) β_3 = refleksi terhadap sumbu S_3



Gambar 2.20 Refleksi Terhadap Sumbu S_3 Segiempat Bercabang 1-Segiempat

Jika segiempat bercabang 1-segiempat direfleksi terhadap sumbu S_3 maka:

Titik 1 akan menempati posisi titik 2

Titik 2 akan menempati posisi titik 1

Titik 3 akan menempati posisi titik 4

Titik 4 akan menempati posisi titik 3

dan seterusnya hingga titik 16 akan menempati posisi titik 7

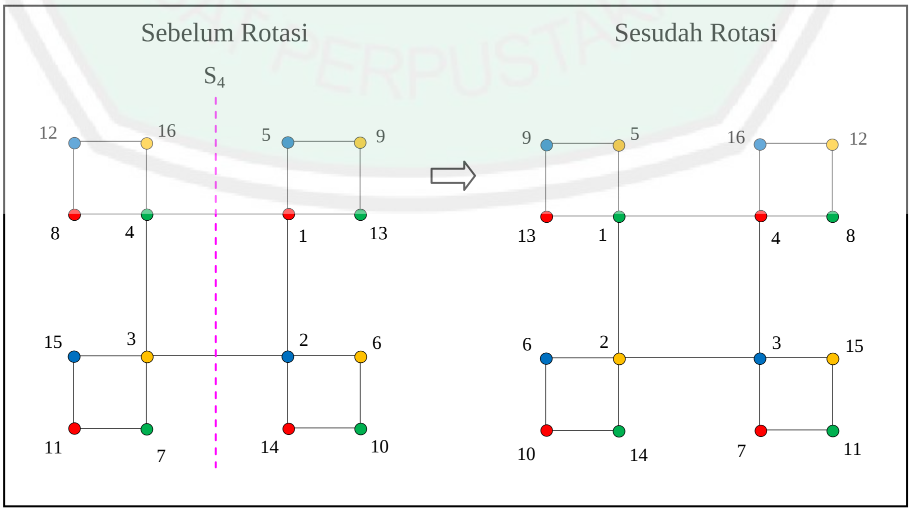
Ditulis:

$$\beta_3 = \begin{array}{lllllll} 1 \rightarrow 2 & ; & 5 \rightarrow 14 & ; & 9 \rightarrow 10 & ; & 13 \rightarrow 6 \\ 2 \rightarrow 1 & ; & 6 \rightarrow 13 & ; & 10 \rightarrow 9 & ; & 14 \rightarrow 5 \\ 3 \rightarrow 4 & ; & 7 \rightarrow 16 & ; & 11 \rightarrow 12 & ; & 15 \rightarrow 8 \\ 4 \rightarrow 3 & ; & 8 \rightarrow 15 & ; & 12 \rightarrow 11 & ; & 16 \rightarrow 7 \end{array}$$

Penulisan di atas dapat juga dinyatakan dalam bentuk sikel yaitu:

$$\beta_3 = (1\ 2)\ (3\ 4)\ (5\ 14)\ (6\ 13)\ (7\ 16)\ (8\ 15)\ (9\ 10)\ (11\ 12)$$

8) β_4 = refleksi terhadap sumbu S_4



Gambar 2.21 Refleksi Terhadap Sumbu S_4 Segiempat Bercabang 1-Segiempat

Jika segiempat bercabang 1-segiempat direfleksi terhadap sumbu S_4 maka:

Titik 1 akan menempati posisi titik 4

Titik 2 akan menempati posisi titik 3

Titik 3 akan menempati posisi titik 2

Titik 4 akan menempati posisi titik 1

dan seterusnya hingga titik 16 akan menempati posisi titik 5

Ditulis:

$$\beta_4 = \begin{array}{ccccccc} 1 \rightarrow 4 & ; & 5 \rightarrow 16 & ; & 9 \rightarrow 12 & ; & 13 \rightarrow 8 \\ 2 \rightarrow 3 & ; & 6 \rightarrow 15 & ; & 10 \rightarrow 11 & ; & 14 \rightarrow 7 \\ 3 \rightarrow 2 & ; & 7 \rightarrow 14 & ; & 11 \rightarrow 10 & ; & 15 \rightarrow 6 \\ 4 \rightarrow 1 & ; & 8 \rightarrow 13 & ; & 12 \rightarrow 9 & ; & 16 \rightarrow 5 \end{array}$$

Penulisan di atas dapat juga dinyatakan dalam bentuk sikel yaitu:

$$\beta_4 = (1\ \ 4)\,(2\ 3)\,(5\ 16)\,(6\ 15)\,(7\ 14)\,(8\ 13)\,(9\ 12)\,(10\ 11)$$

2.6 Grup Simetri-*n* dan Grup Permutasi-*n*

Fungsi satu-satu dari suatu himpunan berhingga ke himpunan tersebut disebut permutasi. Banyaknya elemen dari himpunan berhingga tersebut disebut derajat permutasi. Misalkan $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ adalah himpunan berhingga yang terdiri dari n elemen yang berbeda dan misalkan f adalah fungsi satu-satu dari S ke S, maka sesuai definisi f adalah permutasi berderajat n. Misalkan S adalah himpunan berhingga yang terdiri dari n elemen yang berbeda, maka terdapat sebanyak $n!$ cara menyusun elemen-elemen S. Dengan kata lain, banyaknya permutasi berderajat n yang berbeda yang terdefinisi pada S adalah $n!$. Himpunan yang terdiri dari $n!$ permutasi berderajat n yang berbeda disebut himpunan simetri dari permutasi berderajat n dan dinyatakan dengan S_n (Raisinghania dan Aggarwal, 1980: 115).

Misalkan Ω adalah sebarang himpunan tak kosong dan misal S_Ω adalah himpunan yang memuat semua fungsi-fungsi bijektif dari Ω ke Ω (atau himpunan yang memuat permutasi dari Ω). Himpunan S_Ω dengan operasi komposisi " $\circ$ " atau $(S_\Omega, \circ)$ adalah grup. Operasi komposisi " $\circ$ " adalah operasi biner pada S_Ω karena jika $\alpha: \Omega \to \Omega$ dan $\beta: \Omega \to \Omega$ adalah fungsi-fungsi bijektif maka $\alpha \circ \beta$ juga fungsi bijektif. Operasi " $\circ$ " yang merupakan komposisi fungsi adalah bersifat assosiatif. Identitas dari S_Ω adalah permutasi 1 yang didefinisikan oleh $1(a) = a, \forall a \in \Omega$. Untuk setiap $\alpha: \Omega \to \Omega$ maka terdapat fungsi invers yaitu $\alpha: \Omega \to \Omega$ yang memenuhi $\alpha \circ \alpha^{-1} = \alpha^{-1} \circ \alpha = 1$. Dengan demikian semua aksioma grup telah dipenuhi oleh S_Ω dengan operasi " $\circ$ ". Grup $(S_\Omega, \circ)$ disebut sebagai grup simetri pada himpunan Ω (Dummit dan Foote,1991: 28).

Himpunan simetri-n terdiri $n!$ elemen yang merupakan permutasi-permutasi yang berbeda. Sehingga dapat dikatakan bahwa permutasi berderajat n merupakan sub himpunan dari himpunan simetri-n. Himpunan permutasi-n dengan operasi " $\circ$ " dan memenuhi aksioma-aksioma grup disebut grup permutasi-n dan dinyatakan dengan $(P_n, \circ)$. Grup permutasi-n merupakan subgrup dari grup simetri-n. Himpunan permutasi-n merupakan himpunan simetri-n yang terdiri dari rotasi (perputaran) dan refleksi (pencerminan) suatu segi-n beraturan. Grup permutasi-n terdiri dari $2n$ elemen yaitu n elemen yang menunjukkan rotasi dan n elemen refleksi (Dummit dan Foote, 1991: 28).

2.7 Homomorfisme Grup

Misal (G, o) dan (G', *) adalah grup dan $\varphi : G \rightarrow G'$ maka, φ dikatakan homomorfisme jika $\varphi(a \text{ } o \text{ } b) = \varphi(a) * \varphi(b) \forall a, b \in G$. (Raisinghania dan Aggarwal, 1980: 252).

Bila diketahui bahwa struktur-struktur yang diberikan adalah grup, maka f secara singkat cukup disebut dengan homomorfisme, dan $(G,\circ)$ disebut homomorfik terhadap $(H,*)$ (Mushetyo, 1991:135).

Contoh:

Misalkan Z suatu grup dengan operasi tambah dan $n \in Z$.

Maka pengaitan $f(x) = nx$ untuk setiap $x \in Z$ akan mendefinisikan $f : Z \rightarrow Z$ yang sekaligus mengawetkan operasi grup, karena untuk semua x dan y di Z berlaku, $f(x + y) = n(x + y) = nx + ny = f(x) + f(y)$

Jadi pemetaan f suatu homomorfisme grup.

2.8 Isomorfisme

Definisi

Misalkan $(G,\circ)$ dan $(G',*)$ adalah grup, pemetaan $f : G \rightarrow G'$ memenuhi sifat $f(a \circ b) = f(a) * f(b), \forall a, b \in G$ maka grup $(G,\circ)$ isomorfik ke grup $(G',*)$, yang dinotasikan dengan $(G,\circ) \approx (G',*)$ (Raisinghania dan Aggarwal,1980: 141).

Contoh:

Misalkan B = {0, 1, 2} adalah himpunan bilangan bulat modulo 3. B terhadap penjumlahan modulo 3 merupakan suatu grup. G = {R, R^2, R^3 = 1} yaitu suatu grup operasi simetri dari segitiga samasisi dengan R adalah rotasi terhadap pusat segitiga dengan sudut putar 120^0.

Tabel 2.2: Tabel Operasi pada Himpunan Bilangan Bulat Modulo 3 dengan Rotasi pada Grup Simetri

$+_3$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Tabel $(B, +_3)$

$+_3$	I	R	R^2
I	I	R	R^2
R	R	R^2	I
R^2	R^2	I	R

Tabel $(G,\circ)$

Pemetaan $\varphi : B \rightarrow G$ didefinisikan oleh $\varphi(0) = I$, $\varphi(1) = R$, dan $\varphi(2) = R^2$

$\varphi(1+2) = \varphi(0) = I = R.R^2 = \varphi(1).\varphi(2)$

Jadi φ suatu homomorfisme, nampak bahwa φ adalah suatu pemetaan satu-satu dan onto, maka φ suatu isomorfisme. Jadi B isomorfik dengan G dapat dinotasikan $B \cong G$.

Teorema 1

Misalkan $(G,\circ)$ isomorfik pada grup $(G',*)$ dan $f : G \rightarrow G'$ adalah isomorfisme maka peta identitas di G adalah identitas di G'. (Raisinghania dan Aggarwal, 1980: 144).

Bukti:

Misal e adalah identitas di G maka *f(e)* adalah identitas di G', $\forall\, a' \in G'$ maka berlaku:

$$a' * f(e) = f(e) * a' = a'$$

Jika $a' \in G'$ maka f adalah fungsi satu-satu, sehingga $\exists\, a \in G$ maka $f(a) = a'$, a dan e elemen G. Jadi $a \circ e = e \circ a = a$.

$a \circ e = a \ \rightarrow f(a \circ e) = f(a)$

$\rightarrow f(a) * f(e) = f(a)$

$\rightarrow a' * f(e) = a'$ ...1)

$e \circ a = a \ \rightarrow f(e \circ a) = f(a)$

$\rightarrow f(e) * f(a) = f(a)$

$\rightarrow f(e) * a' = a'$ ...2)

Sehingga dari 1 dan 2 didapatkan $a' * f(e) = f(e) * a' = a', \forall\, a' \in G$

Teorema 2

Misalkan grup $(G, \circ)$ isomorfik pada grup $(G', *)$ dan $f : G \rightarrow G'$ maka peta invers pada elemen G adalah invers pada elemen f sehingga $f(a^{-1}) = [f(a)]^{-1}, \forall\, a \in G$ (Raisinghania dan Aggarwal, 1980: 145).

Bukti:

Misal $a \in G$ dan e identitas di G, maka

$a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$

$a \circ a^{-1} = e \rightarrow f(a \circ a^{-1}) = f(e)$

$\rightarrow f(a) * f(a^{-1}) = f(e)$ ...1)

$a^{-1} \circ a = e \rightarrow f(a^{-1} \circ a) = f(e)$

$\rightarrow f(a^{-1}) * f(a) = f(e)$ ...2)

Sehingga $f(a) * f(a^{-1}) = f(a^{-1}) * f(a) = f(e)$

Jadi *e* identitas G dan *f(e)* identitas G' sehingga $f(a^{-1}) = [f(a)]^{-1}$

2.8 Grup *Dihedral*

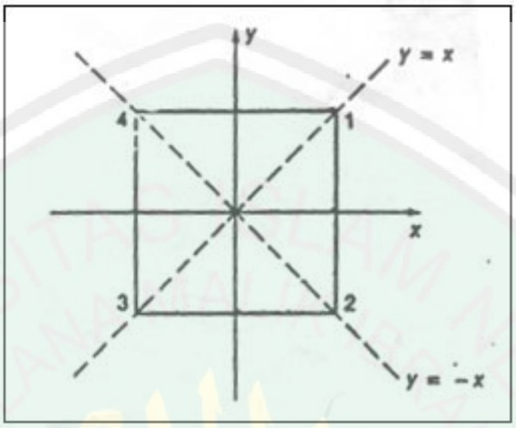
Grup *dihedral*-*2n* adalah himpunan simetri-simetri dari segi-*n* beraturan, dinotasikan dengan $\boldsymbol{D_{2n}}$, untuk setiap $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{n} \geq \boldsymbol{3}$ dengan operasi komposisi " $\circ$ " yang memenuhi aksioma-aksioma grup. Untuk setiap $\boldsymbol{n} \geq \boldsymbol{3}, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, misal $\boldsymbol{D_{2n}}$ adalah himpunan simetri-simetri dari segi-*n* beraturan dimana suatu simetri adalah sebarang gerakan segi-*n* yang dapat diakibatkan oleh pengambilan salinan segi-*n*, kemudian dipindahkan dalam sebarang model dalam ruang-3 sampai kembali ke posisi semula. Kemudian masing-masing simetri s dapat dideskripsikan dengan mengkorespondensikan permutasi $\boldsymbol{\sigma}$ dari $\{\boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}, \boldsymbol{3}, \dots, \boldsymbol{n}\}$ dimana jika simetri s sebuah rotasi $\frac{\boldsymbol{2\pi}}{\boldsymbol{n}}$ radian searah jarum jam, maka $\boldsymbol{\sigma}$ permutasi yang mengantarkan titik $\boldsymbol{i}$ ke $\boldsymbol{i+1}$, $\boldsymbol{1} \leq \boldsymbol{i} \leq \boldsymbol{n-1}$, dan $\boldsymbol{\sigma(n)} = \boldsymbol{1}$ (Dummit dan Foote, 1991: 25).

Poligon beraturan dengan $\boldsymbol{n}$ sisi mempunyai $\boldsymbol{2n}$ simetri yang berbeda yaitu $\boldsymbol{n}$ simetri rotasi dan $\boldsymbol{n}$ simetri refleksi. Jika $\boldsymbol{n}$ ganjil tiap-tiap sumbu simetri menghubungkan titik tengah suatu sisi ke titik sudut di hadapannya. Jika $\boldsymbol{n}$ genap, terdapat $\frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{2}}$ sumbu simetri yang menghubungkan titik tengah suatu sisi yang berhadapan dan $\frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{2}}$ sumbu simetri yang menghubungkan titik sudut yang berhadapan. Umumnya terdapat $\boldsymbol{n}$ sumbu simetri dan $\boldsymbol{2n}$ elemen dalam grup simetri tersebut.

Contoh:

Jika $n = 4$, digambarkan suatu persegi pada bidang x, y. Garis-garis simetrinya adalah garis $x = 0\ (\text{sumbu} - y), y = 0\ (\text{sumbu} - x), y = x, y = -x$. Sehingga

D_{2n} dengan $n = 4$ dapat dinyatakan dalam bentuk $D_{2n} = \{r, r^2, r^3, r^4 = 1, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4 = s\}$.



Gambar 2.22 : Simetri pada *dihedral*-8

Grup *dihedral-2n* adalah suatu grup yang elemennya adalah simetri-simetri dari segi-*n* beraturan (poligon-*n*). Simetri dari suatu poligon adalah rotasi dan refleksi. Artinya suatu poligon-*n* dapat menempati bingkainya kembali dengan Rotasi dan Refleksi. Grup *dihedral-2n* ini ditulis sebagai D_{2n}. Jika pada grup simetri, anggotanya mewakili rotasi dan refleksi, sedangkan anggota grup permutasi mewakili permutasi dari rotasi dan refleksi, maka anggota dari grup *dihedral-2n* atau D_{2n} merupakan rotasi dan komposisi dari rotasi dan refleksi. Komposisi dari rotasi dan refleksi ini menghasilkan suatu refleksi. Penulisan grup *dihedral-2n* adalah

$$D_{2n} = \{ 1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1} \}$$

dimana *r* menyatakan rotasi dan s menyatakan refleksi.

Karena grup dihedral akan digunakan secara ekstensif dalam seluruh teks maka perlu beberapa notasi dan beberapa hitungan yang dapat menyederhanakan perhitungan selanjutnya dan membantu mengamati D_{2n} sebagai grup abstrak, yaitu:

1. $1, r, r^2, \dots, r^{n-1}$ semua berbeda dan $r^n = 1$, sehingga $|r| = n, n \in \mathbb{N}$
2. |s|=2
3. $s \neq r^i$ untuk sebarang $i, \forall i \in \mathbb{Z}^+$
4. $sr^i \neq sr^j$, untuk semua $0 \leq i, j \leq n-1$ dengan $i \neq j$, sehingga

   $$D_{2n} = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, \dots, sr^{n-1}\}$$

   yaitu, tiap-tiap elemen dapat ditulis secara tunggal dalam bentuk $s^k r^i$ untuk beberapa $k = 0$ atau 1 dan $0 \leq i \leq n-1,\ \forall i, j, k \in \mathbb{Z}^+$
5. $sr = r^{-1}s$.

   Hal ini menunjukkan bahwa r dan s tidak saling komutatif, sehingga D_{2n} bukan grup abelian.
6. $sr^i = r^{-i}s$, untuk semua $0 \leq i \leq n$.

   Hal ini menunjukkan bagaimana s komutatif dengan pangkat dari r.

   Misal G suatu grup dan misalkan A subset dari G dengan A adalah himpunan berhingga $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ akan ditulis $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ dari pada ditulis $\langle\{ a_1, a_2, \dots, a_n \}\rangle$ untuk grup yang dibangkitkan oleh $a_1, a_2, \dots, a_n$, maka A disebut generator (pembangkit). (Dummit dan Foote, 1991: 61-62).

Contoh:

Diberikan S adalah generator dengan $S = \langle r, s \rangle$. S adalah subset dari D_6. Tunjukkan bahwa D_6 dapat dibangkitkan oleh S dengan operasi komposisi ∘ ?

Jawab

D_6 adalah himpunan simetri-simetri dari segitiga yaitu

$\{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$. akan ditunjukkan D_6 dapat dibangkitkan oleh

$S = \langle r, s \rangle$.

1. $r \circ r = r^2$
2. $r^2 \circ r = 1$
3. $1 \circ r = r$
4. $r \circ s = sr$
5. $r^2 \circ s = sr^2$
6. $1 \circ s = s$

Dari hasil generator $S = \langle$ r, s $\rangle$ yang dioperasikan dengan komposisi $\circ$ diperoleh $\{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$. Jadi D_6 dapat dibangkitkan oleh S.

BAB III

PEMBAHASAN

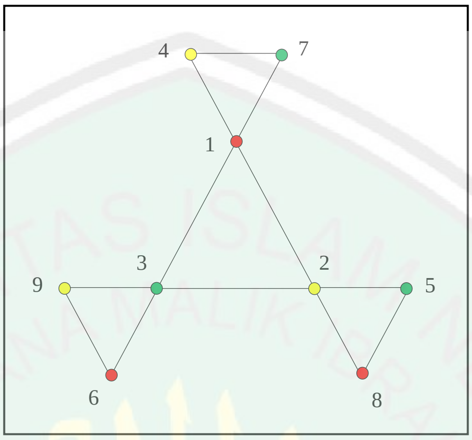
Dalam pembahasan ini, bidang beraturan yang digunakan adalah segitiga dan segiempat beraturan. Segitiga dan segiempat yang akan dibahas bukan segitiga dan segiempat beraturan pada umumnya melainkan segitiga beraturan tersebut bercabang segitiga beraturan sebanyak n-cabang, untuk n bilangan asli. Begitu juga segiempat beraturan tersebut bercabang segiempat beraturan sebanyak n-cabang, untuk n bilangan asli. Segitiga bercabang n-segitiga dan segiempat bercabang n-segiempat tersebut selanjutnya dirotasikan dan direfleksikan sehingga membentuk suatu grup yang menjadi subgrup simetri dari segitiga bercabang n-segitiga dan grup simetri dari segiempat bercabang n-segiempat. Subgrup simetri tersebut selanjutnya dimungkinkan akan isomorfik dengan grup dihedral yaitu grup dihedral-6 dan grup dihedral-8.

3.1 Subgrup Simetri dari Segitiga Bercabang *n*-Segitiga

Segitiga bercabang n-segitiga adalah suatu segitiga yang pada setiap titik sudut terluarnya membentuk segitiga baru sebanyak n-segitiga, dengan n bilangan asli (menurut penulis). Adapun subgrup dari himpunan simetri yang digunakan adalah rotasi dan refleksi yang ditulis dalam bentuk permutasi. Sebagai contoh segitiga bercabang n-segitiga yang digunakan adalah untuk cabang-1, cabang-2, dan cabang-3.

3.1.1 Subgrup Simetri dari Segitiga Bercabang 1-Segitiga

Bentuk segitiga bercabang 1-segitiga adalah sebagai berikut:



Gambar 3.1 Segitiga Bercabang 1-Segitiga

Berdasarkan gambar tersebut dapat diketahui bahwa pada segitiga bercabang 1-segitiga terdapat 6 titik sudut terluar, 9 titik sudut dan 4 buah segitiga yaitu 1 buah segitiga awal dan 3 buah segitiga baru pada setiap titik sudut segitiga awal.

Jika segitiga bercabang 1-segitiga dirotasikan sejauh $\frac{360^0 \cdot k}{3}$; $k = 1, 2,$ maka akan menghasilkan permutasi dalam bentuk sikel sebanyak 3 sikel yaitu: $\alpha_1 = (1\ 2\ 3)\ (4\ 5\ 6)\ (7\ 8\ 9)$, dimana α_1 merupakan rotasi sejauh 120^0 searah dengan jarum jam dan $\alpha_2 = (1\ 3\ 2)\ (4\ 6\ 5)\ (7\ 9\ 8)$ dimana α_2 merupakan rotasi sejauh 240^0 searah dengan jarum jam. Sedangkan untuk rotasi sejauh $\frac{360^0 \cdot k}{3}$; $k = 3$ atau rotasi sejauh 360^0 searah dengan jarum jam maka akan menghasilkan permutasi dalam bentuk sikel sebanyak 9 sikel atau sama dengan jumlah titik sudutnya yaitu: $\alpha_3 = (1)\ (2)\ (3)\ (4)\ (5)\ (6)\ (7)\ (8)\ (9)$.

Jika segitiga bercabang 1-segitiga direfleksikan terhadap garis S_1, S_2, S_3, maka akan menghasilkan permutasi dalam bentuk sikel sebanyak 4 sikel yaitu:

$\beta_1 = (2\ 3)(4\ 7)(5\ 9)(6\ 8)$ dimana β_1 merupakan refleksi terhadap sumbu S_1.

$\beta_2 = (1\ 3)(4\ 9)(5\ 8)(6\ 7)$ dimana $\beta_2$merupakan refleksi terhadap sumbu S_2.

dan $\beta_3 = (1\ 2)(4\ 8)(5\ 7)(6\ 9)$ dimana $\beta_3$merupakan refleksi terhadap sumbu S_3.

Sikel (1), (2) dan (3) tidak dihitung sebagai banyaknya sikel karena titik tersebut berefleksi ke dirinya sendiri. Untuk selanjutnya sikel yang berefleksi ke dirinya sendiri tidak dihitung sebagai banyaknya sikel.

Jadi subgrup simetri dari segitiga bercabang 1-segitiga yang ditulis dalam bentuk permutasi adalah sebagai berikut:

$\alpha_1 = (1\ 2\ 3)\ (4\ 5\ 6)\ (7\ 8\ 9)$

$\alpha_2 = (1\ 3\ 2)\ (4\ 6\ 5)\ (7\ 9\ 8)$

$\alpha_3 = (1)\ (2)\ (3)\ (4)\ (5)\ (6)\ (7)\ (8)\ (9)$

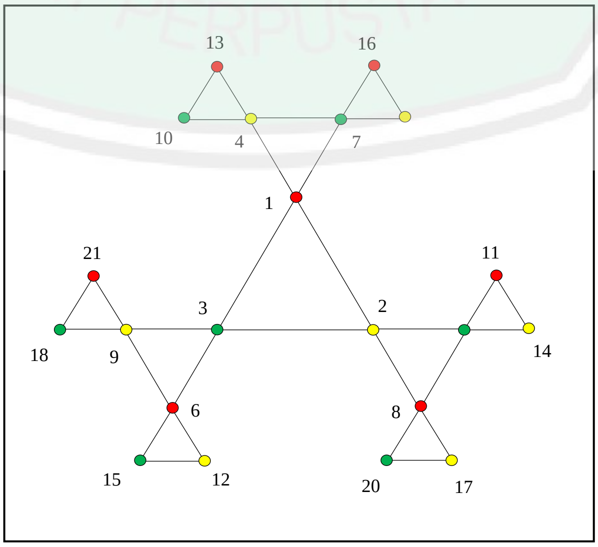
$\beta_1 = (2\ 3)(4\ 7)(5\ 9)(6\ 8)$

$\beta_2 = (1\ 3)(4\ 9)(5\ 8)(6\ 7)$

$\beta_3 = (1\ 2)(4\ 8)(5\ 7)(6\ 9)$

3.1.2 Subgrup Simetri dari Segitiga bercabang 2-segitiga

Bentuk segitiga bercabang 2-segitiga adalah sebagai berikut:



Gambar 3.2 Segitiga Bercabang 2-Segitiga

Berdasarkan gambar tersebut dapat diketahui bahwa pada segitiga bercabang 2-segitiga terdapat 12 titik sudut terluar, 21 titik sudut, dan 10 buah segitiga yaitu 1 buah segitiga awal, 3 buah segitiga sebagai cabang pertama, dan 6 buah segitiga sebagai cabang kedua.

Jika segitiga bercabang 2-segitiga dirotasikan sejauh $\frac{360^0 \cdot k}{3}$; $k = 1, 2$ maka akan menghasilkan permutasi dalam bentuk sikel sebanyak 7 sikel yaitu:

$\alpha_1 = (1\ 2\ 3)\ (4\ 5\ 6)\ (7\ 8\ 9)\ (10\ 11\ 12)\ (13\ 14\ 15)\ (16\ 17\ 18)\ (19\ 20\ 21)$

dimana α_1 merupakan rotasi sejauh 120^0 searah dengan jarum jam dan

$\alpha_2 = (1\ 3\ 2)(4\ 6\ 5)(7\ 9\ 8)(10\ 12\ 11)(13\ 15\ 14)(16\ 18\ 17)(19\ 21\ 20)$ dimana α_2 merupakan rotasi sejauh 240^0 searah dengan jarum jam. Sedangkan untuk rotasi sejauh $\frac{360^0 \cdot k}{3}$; $k = 3$ atau rotasi sejauh 360^0 searah dengan jarum jam maka akan menghasilkan permutasi dalam bentuk sikel sebanyak 21 sikel atau sama dengan jumlah titik sudutnya yaitu: $\alpha_3 = (1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)(9)(10)(11)(12)$ $(13)(14)(15)(16)(17)(18)(19)(20)(21)$.

Jika segitiga bercabang 2-segitiga direfleksikan terhadap garis S_1, S_2, S_3, maka akan menghasilkan permutasi dalam bentuk sikel sebanyak 10 sikel yaitu:

$\beta_1 = (2\ 3)\ (4\ 7)\ (5\ 9)\ (6\ 8)\ (10\ 19)\ (11\ 21)\ (12\ 20)\ (13\ 16)\ (14\ 18)\ (15\ 17)$

dimana β_1 merupakan refleksi terhadap sumbu S_1.

$\beta_2 = (1\ 3)\ (4\ 9)\ (5\ 8)\ (6\ 7)\ (10\ 21)\ (11\ 20)\ (12\ 19)\ (13\ 18)\ (14\ 17)\ (15\ 16)$

dimana β_2 merupakan refleksi terhadap sumbu S_2, dan

$\beta_3 = (1\ 2)\ (4\ 8)\ (5\ 7)\ (6\ 9)\ (10\ 20)\ (11\ 19)\ (12\ 21)\ (13\ 17)\ (14\ 16)\ (15\ 18)$

dimana β_3 merupakan refleksi terhadap sumbu S_3.

Jadi subgrup simetri dari segitiga bercabang 2-segitiga yang ditulis dalam bentuk permutasi adalah sebagai berikut:

$\alpha_1 = (1\ 2\ 3)\ (4\ 5\ 6)\ (7\ 8\ 9)\ (10\ 11\ 12)\ (13\ 14\ 15)\ (16\ 17\ 18)\ (19\ 20\ 21)$

$\alpha_2 = (1\ 3\ 2)\ (4\ 6\ 5)\ (7\ 9\ 8)\ (10\ 12\ 11)\ (13\ 15\ 14)\ (16\ 18\ 17)\ (19\ 21\ 20)$

$\alpha_3 = (1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)(9)(10)(11)(12)(13)(14)(15)(16)(17)$
$(18)(19)(20)(21)$

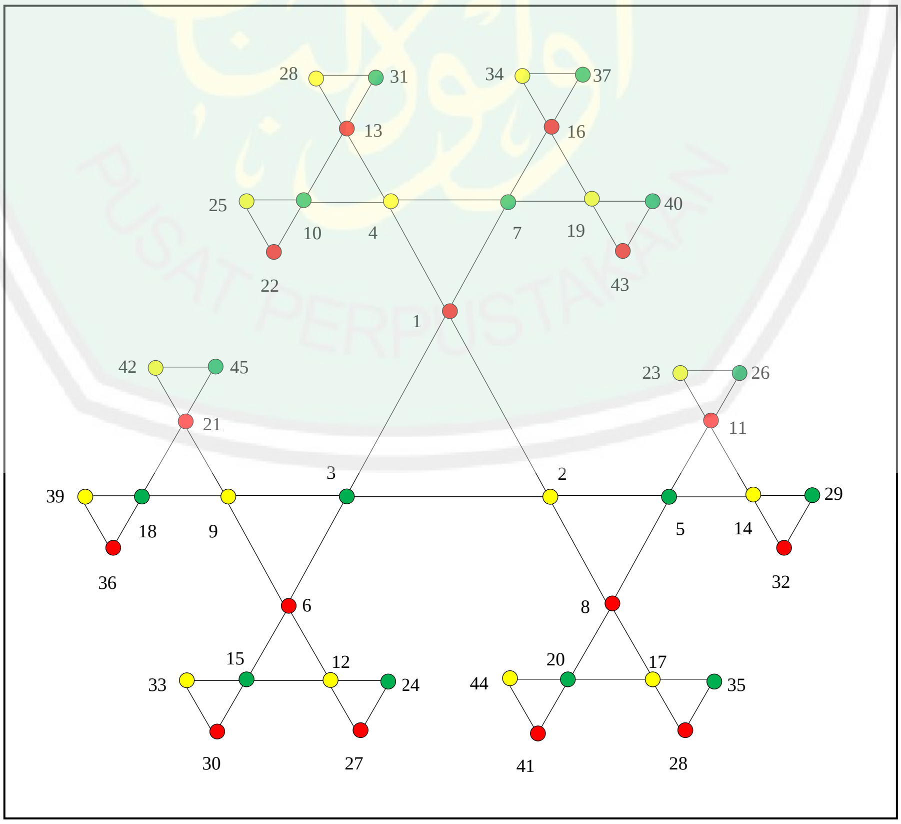
$\beta_1 =\ (2\ 3)\ (4\ 7)\ (5\ 9)\ (6\ 8)\ (10\ 19)\ (11\ 21)\ (12\ 20)\ (13\ 16)\ (14\ 18)\ (15\ 17)$

$\beta_2 =\ (1\ 3)\ (4\ 9)\ (5\ 8)\ (6\ 7)\ (10\ 21)\ (11\ 20)\ (12\ 19)\ (13\ 18)\ (14\ 17)\ (15\ 16)$

$\beta_3 =\ (1\ 2)\ (4\ 8)\ (5\ 7)\ (6\ 9)\ (10\ 20)\ (11\ 19)\ (12\ 21)\ (13\ 17)\ (14\ 16)\ (15\ 18)$

3.1.3 Subgrup Simetri dari Segitiga bercabang 3-segitiga

Bentuk segitiga bercabang 3-segitiga adalah sebagai berikut:



Gambar 3.3 Segitiga Bercabang 3-Segitiga

Berdasarkan gambar tersebut dapat diketahui bahwa pada segitiga bercabang 3-segitiga terdapat 24 titik sudut terluar, 45 titik sudut, dan 22 buah segitiga yaitu 1 buah segitiga awal, 3 buah segitiga sebagai cabang pertama, 6 buah segitiga sebagai cabang kedua, dan 12 buah segitiga sebagai cabang ketiga.

Jika segitiga bercabang 3-segitiga dirotasikan sejauh $\frac{360^0 \cdot k}{3}$; $k = 1, 2,$ maka akan menghasilkan permutasi dalam bentuk sikel sebanyak 15 sikel yaitu:

$\alpha_1 = (1\ 2\ 3)(4\ 5\ 6)(7\ 8\ 9)(10\ 11\ 12)(13\ 14\ 15)(16\ 17\ 18)(19\ 20\ 21)$
$(22\ 23\ 24)(25\ 26\ 27)(28\ 29\ 30)(31\ 32\ 33)(34\ 35\ 36)(37\ 38\ 39)$
$(40\ 41\ 42)(43\ 44\ 45)$ dimana α_1 merupakan rotasi sejauh 120^0 searah dengan jarum jam.

$\alpha_2 = (1\ 3\ 2)(4\ 6\ 5)(7\ 9\ 8)(10\ 12\ 11)(13\ 15\ 14)(16\ 18\ 17)(19\ 21\ 20)$
$(22\ 24\ 23)(25\ 27\ 26)(28\ 30\ 29)(31\ 33\ 32)(34\ 36\ 35)(37\ 39\ 38)$
$(40\ 42\ 41)(43\ 45\ 44)$ dimana α_2 merupakan rotasi sejauh 240^0 searah dengan jarum jam.

Sedangkan rotasi sejauh $\frac{360^0 \cdot k}{3}$; $k = 3$ atau rotasi sejauh 360^0 searah dengan jarum jam maka akan menghasilkan permutasi dalam bentuk sikel sebanyak 45 sikel atau sama dengan jumlah titik sudutnya yaitu:

$\alpha_3 = (1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)(9)(10)(11)(12)(13)(14)(15)(16)(17)$
$(18)(19)(20)(21)(22)(23)(24)(25)(26)(27)(28)(29)(30)(31)$
$(32)(33)(34)(35)(36)(37)(38)(39)(40)(41)(42)(43)(44)(45).$

Jika segitiga bercabang 3-segitiga direfleksikan terhadap garis S_1, S_2, S_3, maka akan menghasilkan permutasi dalam bentuk sikel sebanyak 22 sikel yaitu:

$\beta_1 = (2\ 3)(4\ 7)(5\ 9)(6\ 8)(10\ 19)(11\ 21)(12\ 20)(13\ 16)(14\ 18)(15\ 17)$

$(22\ 43)(23\ 45)(24\ 44)(25\ 40)(26\ 42)(27\ 41)(28\ 37)(29\ 39)$

$(30\ 38)(31\ 34)(32\ 36)(33\ 35)$ dimana β_1 merupakan refleksi terhadap sumbu S_1.

$\beta_2 = (1\ 3)(4\ 9)(5\ 8)(6\ 7)(10\ 21)(11\ 20)(12\ 19)(13\ 18)(14\ 17)(15\ 16)$

$(22\ 45)(23\ 44)(24\ 43)(25\ 42)(26\ 41)(27\ 40)(28\ 39)(29\ 38)$

$(30\ 37)(31\ 36)(32\ 35)(33\ 34)$ dimana β_2 merupakan refleksi terhadap sumbu S_2.

$\beta_3 = (1\ 2)(4\ 8)(5\ 7)(6\ 9)(10\ 20)(11\ 19)(12\ 21)(13\ 17)(14\ 16)(15\ 18)$

$(22\ 44)(23\ 43)(24\ 45)(25\ 41)(26\ 40)(27\ 42)(28\ 38)(29\ 37)$

$(30\ 36)(31\ 35)(32\ 34)(33\ 36)$ dimana β_3 merupakan refleksi terhadap sumbu S_3.

Jadi subgrup simetri dari segitiga bercabang 3-segitiga yang ditulis dalam bentuk permutasi adalah sebagai berikut:

$\alpha_1 = (1\ 2\ 3)(4\ 5\ 6)(7\ 8\ 9)(10\ 11\ 12)(13\ 14\ 15)(16\ 17\ 18)(19\ 20\ 21)$

$(22\ 23\ 24)(25\ 26\ 27)(28\ 29\ 30)(31\ 32\ 33)(34\ 35\ 36)(37\ 38\ 39)$

$(40\ 41\ 42)(43\ 44\ 45)$

$\alpha_2 = (1\ 3\ 2)(4\ 6\ 5)(7\ 9\ 8)(10\ 12\ 11)(13\ 15\ 14)(16\ 18\ 17)(19\ 21\ 20)$

$(22\ 24\ 23)(25\ 27\ 26)(28\ 30\ 29)(31\ 33\ 32)(34\ 36\ 35)(37\ 39\ 38)$

$(40\ 42\ 41)(43\ 45\ 44)$

$\alpha_3 = (1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)(9)(10)(11)(12)(13)(14)(15)(16)(17)$

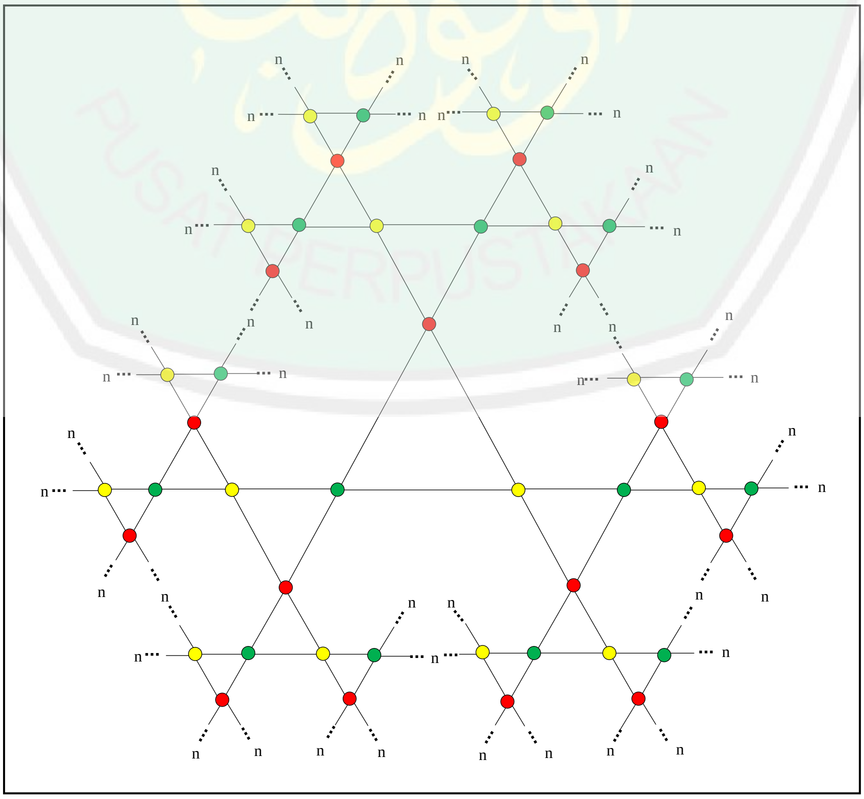
$(18)(19)(20)(21)(22)(23)(24)(25)(26)(27)(28)(29)(30)(31)$

$(32)(33)(34)(35)(36)(37)(38)(39)(40)(41)(42)(43)(44)(45)$

$$\beta_1 = (2\ 3)(4\ 7)(5\ 9)(6\ 8)(10\ 19)(11\ 21)(12\ 20)(13\ 16)(14\ 18)(15\ 17)$$
$$(22\ 43)(23\ 45)(24\ 44)(25\ 40)(26\ 42)(27\ 41)(28\ 37)(29\ 39)$$
$$(30\ 38)(31\ 34)(32\ 36)(33\ 35)$$
$$\beta_2 = (1\ 3)(4\ 9)(5\ 8)(6\ 7)(10\ 21)(11\ 20)(12\ 19)(13\ 18)(14\ 17)(15\ 16)$$
$$(22\ 45)(23\ 44)(24\ 43)(25\ 42)(26\ 41)(27\ 40)(28\ 39)(29\ 38)$$
$$(30\ 37)(31\ 36)(32\ 35)(33\ 34)$$
$$\beta_3 = (1\ 2)(4\ 8)(5\ 7)(6\ 9)(10\ 20)(11\ 19)(12\ 21)(13\ 17)(14\ 16)(15\ 18)$$
$$(22\ 44)(23\ 43)(24\ 45)(25\ 41)(26\ 40)(27\ 42)(28\ 38)(29\ 37)$$
$$(30\ 36)(31\ 35)(32\ 34)(33\ 36)$$

3.1.4 Sifat-sifat yang dibangun subgrup simetri dari segitiga bercabang n-segitiga

Bentuk segitiga bercabang n-segitiga adalah sebagai berikut:



Gambar 3.4 Segitiga Bercabang n-Segitiga

Pada uraian sebelumnya telah disebutkan bahwa pada segitiga bercabang n-segitiga dengan:

n = 1 terdapat 6 buah titik sudut terluar

n = 2 terdapat 12 buah titik sudut terluar

n = 3 terdapat 24 buah titik sudut terluar

sehingga banyaknya titik sudut terluar pada segitiga bercabang n-segitiga dapat ditentukan dengan menggunakan deret geometri dengan suku pertamanya adalah banyaknya titik sudut terluar saat bercabang 1-segitiga yaitu 6 dan rasionya adalah 2, sehingga diperoleh pola banyaknya titik sudut terluar untuk segitiga bercabang n-segitiga adalah $3 \cdot 2^n$ buah titik sudut terluar.

Sifat 1

Banyaknya titik sudut terluar dari segitiga bercabang n-segitiga, n bilangan asli adalah sebanyak $3 \cdot 2^n$ titik sudut terluar.

Bukti:

Diketahui:

$$i = 1 \rightarrow \ 6 = 6 \cdot 2^0$$

$$i = 2 \rightarrow 12 = 6 \cdot 2^1$$

$$i = 3 \rightarrow 24 = 6 \cdot 2^2$$

$$\vdots$$

$$i = n \rightarrow 6 \cdot 2^{n-1}$$

Akan dibuktikan bahwa:

$6 \cdot 2^{n-1} = 3 \cdot 2^n$, untuk setiap n bilangan asli.

Bukti dengan menggunakan induksi matematika, yaitu:

Untuk $n = 1 \longrightarrow 6 \cdot 2^0 = 3 \cdot 2^1$

$6 = 6$ benar

Anggap benar untuk $n = k$ yaitu:

$6 \cdot 2^{k-1} = 3 \cdot 2^k$ … (i)

Akan dibuktikan pernyataan benar untuk $n = k + 1$ yaitu:

$6 \cdot 2^{k+1-1} = 3 \cdot 2^{k+1}$

$6 \cdot 2^k = 3 \cdot 2^{k+1}$ … (ii)

Pernyataan (i):

$6 \cdot 2^{k-1} = 3 \cdot 2^k$; masing-masing ruas dikalikan 2

$6 \cdot 2^{k-1} \cdot 2 = 3 \cdot 2^k \cdot 2$

$6 \cdot 2^{k-1} \cdot 2^1 = 3 \cdot 2^k \cdot 2^1$

$6 \cdot 2^{k-1+1} = 3 \cdot 2^{k+1}$

$6 \cdot 2^k = 3 \cdot 2^{k+1}$

Pernyataan terakhir sama dengan pernyataan (ii). Jadi pernyataan (ii) terbukti kebenarannya.

Jadi, $6 \cdot 2^{n-1} = 3 \cdot 2^n$ benar untuk setiap n bilangan asli.

Sedangkan banyaknya seluruh titik sudutnya adalah:

untuk $n = 1$ terdapat 3 + 6 = 9 buah titik sudut

untuk $n = 2$ terdapat 3 + 6 + 12 = 21 buah titik sudut

untuk $n = 3$ terdapat 3 + 6 + 12 + 24 = 45 buah titik sudut

sehingga banyaknya titik sudut pada segitiga bercabang n-segitiga dapat ditentukan dengan menggunakan deret geometri dengan suku pertamanya adalah banyaknya titik sudut pada segitiga awal yaitu 3 dan rasionya adalah 2, sehingga diperoleh pola banyaknya titik untuk segitiga bercabang n-segitiga adalah $3(2^{n+1}-1)$ buah titik sudut.

Sifat 2

Banyaknya titik sudut dari segitiga bercabang n-segitiga, n bilangan asli adalah sebanyak $3(2^{n+1}-1)$ titik sudut.

Bukti:

Diketahui:

$$i = 1 \rightarrow \ 9 = 3 + 3(2^1)$$

$$i = 2 \rightarrow 21 = 3 + 3(2^1) + 3(2^2)$$

$$i = 3 \rightarrow 45 = 3 + 3(2^1) + 3(2^2) + 3(2^3)$$

$$\vdots$$

$$i = n \rightarrow 3 + 3\sum_{i=1}^{n} 2^i$$

Akan dibuktikan bahwa:

$$3 + 3\sum_{i=1}^{n} 2^i = 3(2^{n+1} - 1), \text{untuk setiap n bilangan asli.}$$

Bukti dengan menggunakan induksi matematika, yaitu:

Untuk $n = 1 \ \longrightarrow \ 3 + 3 \cdot 2^1 = 3(2^{1+1} - 1)$

$$9 = 9 \quad \text{benar}$$

Anggap benar untuk $n = k$ yaitu:

$$3 + 3\sum_{i=1}^{k} 2^i = 3(2^{k+1} - 1) \qquad \ldots(i)$$

Akan dibuktikan pernyataan benar untuk $n = k + 1$ yaitu:

$$3 + 3\sum_{i=1}^{k+1} 2^i = 3(2^{k+1+1} - 1)$$

$$3 + 3\sum_{i=1}^{k+1} 2^i = 3(2^{k+2} - 1) \qquad \dots(ii)$$

Pernyataan (i):

$$3 + 3\sum_{i=1}^{k} 2^i = 3(2^{k+1} - 1); masing - masing\ ruas\ ditambah\ 3(2^{k+1})$$

$$3 + 3\sum_{i=1}^{k} 2^i + 3(2^{k+1}) = 3(2^{k+1} - 1) + 3(2^{k+1})$$

$$3 + 3\sum_{i=1}^{k+1} 2^i = 3(2^{k+1} - 1 + 2^{k+1})$$

$$= 3(2 \cdot 2^{k+1} - 1)$$

$$= 3(2^1 \cdot 2^{k+1} - 1)$$

$$= 3(2^{k+1+1} - 1)$$

$$= 3(2^{k+2} - 1)$$

Pernyataan terakhir sama dengan pernyataan (ii). Jadi pernyataan (ii) terbukti kebenarannya.

$$3 + 3\sum_{i=1}^{n} 2^i = 3(2^{n+1} - 1), \text{benar untuk setiap n bilangan asli.}$$

Selanjutnya disebutkan pula banyaknya segitiga untuk:

n = 1 terdapat 4 buah segitiga

n = 2 terdapat 10 buah segitiga

n = 3 terdapat 22 buah segitiga

Secara umum, banyaknya segitiga pada segitiga bercabang n-segitiga adalah $\frac{banyak\ \ titik\ -1}{2}$ atau $3 \cdot 2^n - 2$ buah segitiga.

Sifat 3

Banyaknya segitiga dari segitiga bercabang n-segitiga, n bilangan asli adalah sebanyak $3 \cdot 2^n - 2$ segitiga.

Bukti:

Diketahui:

$$i = 1 \rightarrow \ 4 = 4$$

$$i = 2 \rightarrow 10 = 4 + 3(2^1)$$

$$i = 3 \rightarrow 22 = 4 + 3(2^1) + 3(2^2)$$

$$\vdots$$

$$i = n \rightarrow 4 + 3\sum_{i=2}^{n} 2^{i-1}$$

Akan dibuktikan bahwa:

$$4 + 3\sum_{i=2}^{n} 2^{i-1} = 3 \cdot 2^n - 2, untuk\ setiap\ n\ bilangan\ asli, n \geq 2$$

Bukti dengan menggunakan induksi matematika, yaitu:

Untuk $n = 1$, banyak segitiga adalah 4

$$3(2^n - 2) = 3 \cdot 2^1 - 2 = \ 6 - 2 = 4 \qquad \text{benar}$$

Untuk $n = 2$, dan seterusnya maka banyaknya segitiga adalah:

$$4 + 3\sum_{i=2}^{n} 2^{i-1}$$

Sehingga untuk $n = 2 \longrightarrow 4 + 3(2^{2-1}) = 3 \cdot 2^2 - 2$

$$10 = 10 \qquad \text{benar}$$

Anggap benar untuk $n = k$ yaitu:

$$4 + 3\sum_{i=2}^{k} 2^{i-1} = 3 \cdot 2^k - 2 \qquad \ldots (i)$$

Akan dibuktikan pernyataan benar untuk $n = k + 1$ yaitu:

$$4 + 3\sum_{i=2}^{k+1} 2^{i-1} = 3 \cdot 2^{k+1} - 2 \qquad \ldots (ii)$$

Pernyataan (i):

$$4 + 3\sum_{i=2}^{k} 2^{i-1} = 3 \cdot 2^k - 2; masing - masing\ ruas\ ditambah\ 3 \cdot 2^k$$

$$4 + 3\sum_{i=2}^{k} 2^{i-1} + 3 \cdot 2^k = 3 \cdot 2^k - 2 + 3 \cdot 2^k$$

$$4 + 3\sum_{i=2}^{k+1} 2^{i-1} = 2 \cdot 3 \cdot 2^k - 2)$$

$$= 3 \cdot 2^1 \cdot 2^k - 2$$

$$= 3 \cdot 2^{k+1} - 2$$

Pernyataan terakhir sama dengan pernyataan (ii). Jadi pernyataan (ii) terbukti kebenarannya.

$$4 + 3\sum_{i=2}^{n} 2^{i-1} = 3 \cdot 2^n - 2, benar\ untuk\ setiap\ n\ bilangan\ asli, n \geq 2$$

Rotasi segitiga bercabang n-segitiga sejauh $\frac{360^0 \cdot k}{3}$; $k = 1, 2$ menghasilkan permutasi dalam bentuk sikel yaitu untuk:

n = 1 banyaknya sikel adalah 3

n = 2 banyaknya sikel adalah 7

n = 3 banyaknya sikel adalah 15

Secara umum banyak sikel untuk rotasi segitiga bercabang n-segitiga sejauh $\frac{360^0 \cdot k}{3}$; $k = 1, 2$ adalah $\frac{banyak \;\; titik}{3}$ atau $2^{n+1} - 1$ buah sikel.

Sifat 4

Banyaknya sikel rotasi sejauh 90^0 dan 270^0 dari segitiga bercabang n-segitiga, n bilangan asli adalah sebanyak $2^{n+1} - 1$ sikel.

Bukti:

Diketahui:

$$i = 1 \rightarrow 3 = 3$$

$$i = 2 \rightarrow 7 = 3 + 2^2$$

$$i = 3 \rightarrow 15 = 3 + 2^2 + 2^3$$

$$\vdots$$

$$i = n \rightarrow 3 + \sum_{i=2}^{n} 2^i$$

Akan dibuktikan bahwa:

$$3 + \sum_{i=2}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1, untuk\ setiap\ n\ bilangan\ asli, n \geq 2$$

Bukti dengan menggunakan induksi matematika, yaitu:

Untuk $n = 1$ maka banyaknya sikel rotasi ada 3

$$2^{1+1} - 1 = 4 - 1 = 3 \qquad \text{benar}$$

Untuk $n = 2$ dan seterusnya maka banyaknya rotasi adalah:

$$3 + \sum_{i=2}^{n} 2^{i}$$

Sehingga untuk $n = 2 \longrightarrow 3 + 2^2 = 2^{2+1} - 1$

$$7 = 7 \qquad \text{benar}$$

Anggap benar untuk $n = k$ yaitu:

$$3 + \sum_{i=2}^{k} 2^{i} = 2^{k+1} - 1 \qquad \ldots (i)$$

Akan dibuktikan pernyataan benar untuk $n = k + 1$ yaitu:

$$3 + \sum_{i=2}^{k+1} 2^{i} = 2^{k+1+1} - 1$$

$$3 + \sum_{i=2}^{k+1} 2^{i} = 2^{k+2} - 1 \qquad \ldots (ii)$$

Pernyataan (i):

$$3 + \sum_{i=2}^{k} 2^{i} = 2^{k+1} - 1; masing - masing\ ruas\ ditambah\ 2^{k+1}$$

$$3 + \sum_{i=2}^{k} 2^{i} + 2^{k+1} = 2^{k+1} - 1 + 2^{k+1}$$

$$3 + \sum_{i=2}^{k+1} 2^{i} = 2 \cdot 2^{k+1} - 1$$

$$= 2^{1} \cdot 2^{k+1} - 1$$

$$= 2^{k+1+1} - 1$$

$$= 2^{k+2} - 1$$

Pernyataan terakhir sama dengan pernyataan (ii). Jadi pernyataan (ii) terbukti kebenarannya.

$$3 + \sum_{i=2}^{n} 2^{i} = 2^{n+1} - 1, \mathit{benar\ untuk\ setiap\ n\ bilangan\ asli}, n \geq 2$$

Sedangkan rotasi segitiga bercabang n-segitiga sejauh $\frac{360k}{3}$; $k = 3$ menghasilkan permutasi dalam bentuk sikel yaitu:

n = 1 banyaknya sikel adalah 9

n = 2 banyaknya sikel adalah 21

n = 3 banyaknya sikel adalah 45

Secara umum banyak sikel untuk rotasi segitiga bercabang n-segitiga sejauh $\frac{360^0 \cdot k}{3}$; $k =$ 3 adalah $3(2^{n+1} - 1)$ buah sikel.

Sifat 5

Banyaknya sikel rotasi sejauh 360^0 dari segitiga bercabang n-segitiga, n bilangan asli adalah sebanyak $3(2^{n+1} - 1)$ sikel atau sama dengan banyaknya jumlah titik sudut pada segitiga bercabang n-segitiga.

Bukti:

Dikeahui:

$$i = 1 \rightarrow \ \ 9 = 3 + 3(2^1)$$

$$i = 2 \rightarrow 21 = 3 + 3(2^1) + 3(2^2)$$

$$i = 3 \rightarrow 45 = 3 + 3(2^1) + 3(2^2) + 3(2^3)$$

$$\vdots$$

$$i = n \rightarrow 3 + 3\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} 2^{\mathrm{i}}$$

Akan dibuktikan bahwa:

$$3 + 3\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} 2^{\mathrm{i}} = 3(2^{n+1} - 1), \text{untuk setiap n bilangan asli.}$$

Bukti dengan menggunakan induksi matematika, yaitu:

Untuk $n = 1 \;\longrightarrow\; 3 + 3 \cdot 2^1 = 3(2^{1+1} - 1)$

$$9 = 9 \quad \text{benar}$$

Anggap benar untuk $n = k$ yaitu:

$$3 + 3\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{k}} 2^{\mathrm{i}} = 3(2^{k+1} - 1) \qquad \dots (i)$$

Akan dibuktikan pernyataan benar untuk $n = k + 1$ yaitu:

$$3 + 3\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{k+1}} 2^{\mathrm{i}} = 3(2^{k+1+1} - 1)$$

$$3 + 3\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{k+1}} 2^{\mathrm{i}} = 3(2^{k+2} - 1) \qquad \dots (ii)$$

Pernyataan (i):

$$3 + 3\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{k}} 2^{\mathrm{i}} = 3(2^{k+1} - 1); masing - masing\ ruas\ ditambah\ 3(2^{k+1})$$

$$3 + 3\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{k}} 2^{\mathrm{i}} + 3(2^{k+1}) = 3(2^{k+1} - 1) + 3(2^{k+1})$$

$$3 + 3\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{k+1}} 2^{\mathrm{i}} = 3(2^{k+1} - 1 + 2^{k+1})$$

$$= 3(2 \cdot 2^{k+1} - 1)$$

$$= 3(2^1 \cdot 2^{k+1} - 1)$$

$$= 3(2^{k+1+1} - 1)$$

$$= 3(2^{k+2} - 1)$$

Pernyataan terakhir sama dengan pernyataan (ii). Jadi pernyataan (ii) terbukti kebenarannya.

$$3 + 3\sum_{i=1}^{n} 2^i = 3(2^{n+1} - 1), \text{benar untuk setiap n bilangan asli.}$$

Refleksi segitiga bercabang n-segitiga terhadap garis S_1,S_2,S_3 menghasilkan permutasi dalam bentuk sikel untuk:

n = 1 sebanyak 4 sikel

n = 2 sebanyak 10 sikel

n = 3 sebanyak 22 sikel.

Secara umum banyak sikel untuk refleksi segitiga bercabang n-segitiga terhadap S_1, S_2, S_3 adalah $\frac{banyak\ \ titik\ \ -1}{2}$ atau $3 \cdot 2^n - 2$ buah sikel.

Sifat 6

Banyaknya sikel refleksi dari segitiga bercabang n-segitiga, n bilangan asli adalah sebanyak $3 \cdot 2^n - 2$ sikel.

Bukti:

Diketahui:

$$i = 1 \;\rightarrow\; 4 = 4$$

$$i = 2 \;\rightarrow 10 = 4 + 3(2^1)$$

$$i = 3 \;\rightarrow 22 = 4 + 3(2^1) + 3(2^2)$$

$\vdots$

$$i = n \rightarrow 4 + 3\sum_{\mathrm{i}=2}^{\mathrm{n}} 2^{\mathrm{i}-1}$$

Akan dibuktikan bahwa:

$$4 + 3\sum_{\mathrm{i}=2}^{\mathrm{n}} 2^{\mathrm{i}-1} = 3 \cdot 2^{n} - 2, untuk\ setiap\ n\ bilangan\ asli, n \geq 2$$

Bukti dengan menggunakan induksi matematika, yaitu:

Untuk $n = 1$, banyak sikel refleksi adalah 4

$$3(2^{n} - 2) = 3 \cdot 2^{1} - 2 = 6 - 2 = 4 \qquad \text{benar}$$

Untuk $n = 2$, dan seterusnya maka banyaknya sikel refleksi adalah

$$4 + 3\sum_{\mathrm{i}=2}^{\mathrm{n}} 2^{\mathrm{i}-1}$$

Sehingga untuk $n = 2 \longrightarrow 4 + 3(2^{2-1}) = 3 \cdot 2^{2} - 2$

$$10 = 10 \qquad \text{benar}$$

Anggap benar untuk $n = k$ yaitu:

$$4 + 3\sum_{\mathrm{i}=2}^{\mathrm{k}} 2^{\mathrm{i}-1} = 3 \cdot 2^{k} - 2 \qquad \dots (i)$$

Akan dibuktikan pernyataan benar untuk $n = k + 1$ yaitu:

$$4 + 3\sum_{\mathrm{i}=2}^{\mathrm{k+1}} 2^{\mathrm{i}-1} = 3 \cdot 2^{k+1} - 2 \qquad \dots (ii)$$

Pernyataan (i):

$$4+3\sum_{\mathrm{i}=2}^{\mathrm{k}} 2^{\mathrm{i}-1} = 3\cdot 2^k - 2\,; masing - masing\ ruas\ ditambah\ 3\cdot 2^k$$

$$4+3\sum_{\mathrm{i}=2}^{\mathrm{k}} 2^{\mathrm{i}-1} + 3\cdot 2^k = 3\cdot 2^k - 2 + 3\cdot 2^k$$

$$4+3\sum_{\mathrm{i}=2}^{\mathrm{k+1}} 2^{\mathrm{i}-1} = 2\cdot 3\cdot 2^k - 2$$

$$= 3\cdot 2^1\cdot 2^k - 2$$

$$= 3\cdot 2^{k+1} - 2$$

Pernyataan terakhir sama dengan pernyataan (ii). Jadi pernyataan (ii) terbukti kebenarannya.

$$4+3\sum_{\mathrm{i}=2}^{\mathrm{n}} 2^{\mathrm{i}-1} = 3\cdot 2^n - 2, benar\ untuk\ setiap\ n\ bilangan\ asli, n \geq 2$$

Pola umum rotasi segitiga bercabang n-segitiga adalah banyaknya $\frac{banyak\ \ titik}{3}$ dimana 3 menunjukkan bahwa suatu segitiga mempunyai 3 titik sudut, sedangkan permutasi dalam bentuk sikelnya dihasilkan dari perputaran posisi 3 titik sudut suatu segitiga. Jadi banyaknya sikel pada rotasi segitiga bercabang n-segitiga adalah $\frac{banyak\ \ titik}{3}$.

Pola umum refleksi segitiga bercabang n-segitiga adalah $\frac{banyak\ \ titi\,k\ -1}{2}$ dimana pada segitiga terdapat 3 refleksi yaitu refleksi terhadap garis S_1, S_2, dan S_3. Garis S_1 tersebut adalah suatu garis yang merupakan sumbu simetri lipat pada suatu segitiga yang membagi segitiga menjadi 2 bagian yang sama, yang melalui 1 titik sudut segitiga dan suatu titik tengah antara 2 titik sudut lainnya. Sehingga refleksi suatu segitiga adalah pencerminan antara 2 titik terhadap sumbu simetri tersebut. Sedangkan 1 titik lainnya posisinya tetap karena dilewati oleh sumbu utama. Jadi pola umum banyaknya sikel pada rotasi segitiga bercabang n-segitiga adalah $\frac{banyak\ \ titik\ -1}{2}$.

3.1.5 Isomorfisme Subgrup Simetri Dari Segitiga Bercabang n-Segitiga $(\mathbf{G_3}, \circ)$ Dengan Grup Dihedral-6 $(\mathbf{D_6}, \circ)$

Misalkan G_3 adalah subgrup dari himpunan simetri dari bidang segitiga beraturan bercabang n-segitiga beraturan. Ternyata anggota G_3 ini meliputi simetri putar (rotasi) dan simetri lipat (refleksi). Dan D_6 adalah grup dihedral-6 dengan operasi komposisi dimana $D_6 = \{r, r^2, 1, s, sr, sr^2\}$ dan $\mathrm{G}_3 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ dengan:

α_1 = rotasi sejauh 120^0 searah dengan jarum jam

α_2 = rotasi sejauh 240^0 searah dengan jarum jam

α_3 = rotasi sejauh 360^0 searah dengan jarum jam

β_1 = refleksi terhadap sumbu S_1

β_2 = refleksi terhadap sumbu S_2

β_3 = refleksi terhadap sumbu S_3

Dalam hal ini $(G_3, \circ)$ isomorfik dengan $(D_6, \circ)$ karena ada korespondensi satu-satu dari $G_3 \rightarrow D_6$ sehingga dapat dibuat teorema sebagai berikut:

Teorema 1

Misalkan G_3 adalah subgrup dari himpunan simetri dari bidang segitiga beraturan bercabang n-segitiga beraturan dan D_6 adalah grup dihedral-6 maka $(G_3, \circ) \cong (D_6, \circ)$.

Bukti:

G_3 adalah subgrup dari himpunan simetri dari bidang segitiga beraturan bercabang n-segitiga beraturan, dimana $G_3 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ dengan:

α_1 = rotasi sejauh 120^0 searah dengan jarum jam

$= (1\ 2\ 3)(4\ 5\ 6) \dots (\dots) = 2^{n+1} - 1$

α_2 = rotasi sejauh 240^0 searah dengan jarum jam

$= (1\ 3\ 2)(4\ 6\ 5) \dots (\dots) = 2^{n+1} - 1$

α_3 = rotasi sejauh 360^0 searah dengan jarum jam

$= (1)\ (2)\ (3) \dots (\dots) = 3(2^{n+1} - 1)$

β_1 = refleksi terhadap sumbu S_1

$= (1)(2\ 3)(4\ 7) \dots (\dots) = 3 \cdot 2^n - 1$

β_2 = refleksi terhadap sumbu S_2

$= (1\ 3)(2)(4\ 9) \dots (\dots) = 3 \cdot 2^n - 1$

β_3 = refleksi terhadap sumbu S_3

$= (1\ 2)(3)(4\ 8) \dots (\dots) = 3 \cdot 2^n - 1$

Himpunan permutasi dari rotasi dan refleksi diatas membentuk grup dengan operasi komposisi yang dinyatakan dalam bentuk tabel cayley berikut

Tabel 3.1.: Tabel Cayley Subgrup Simetri dari Segitiga Bercabang n-Segitiga

$\circ$	α_1	α_2	α_3	β_1	β_2	β_3
α_1	α_2	α_3	α_1	β_3	β_1	β_2
α_2	α_3	α_1	α_2	β_2	β_3	β_1
α_3	α_1	α_2	α_3	β_1	β_2	β_3
β_1	β_2	β_3	β_1	α_3	α_1	α_2
β_2	β_3	β_1	β_2	α_2	α_3	α_1
β_3	β_1	β_2	β_3	α_1	α_2	α_3

Dari tabel cayley diatas dapat kita ketahui bahwa:

1. Operasi $\circ$ bersifat tertutup
2. Operasi $\circ$ bersifat assosiatif
3. G punya identitas terhadap operasi $\circ$ yaitu α_3
4. Setiap unsur di G punya invers terhadap operasi $\circ$ yaitu

$\alpha_3{}^{-1} = \alpha_3$ $\quad\quad$ $\beta_1{}^{-1} = \beta_1$

$\alpha_1{}^{-1} = \alpha_2$ $\quad\quad$ $\beta_2{}^{-1} = \beta_2$

$\alpha_2{}^{-1} = \alpha_1$ $\quad\quad$ $\beta_3{}^{-1} = \beta_3$

$D_6 = \{r, r^2, 1, s, sr, sr^2\}$, dan $(D_6, \circ)$ juga merupakan grup

Grup dihedral-6 dapat disajikan dalam bentuk tabel sebagai berikut:

Tabel 3.2.: Tabel Cayley Dihedral-6

$\circ$	r	r^2	1	s	sr	sr^2
r	r^2	1	r	sr^2	s	sr
r^2	1	r	r^2	sr	sr^2	s
1	r	r^2	1	s	sr	sr^2
s	sr	sr^2	s	1	r	r^2
sr	sr^2	s	sr	$r2$	1	r
sr^2	s	sr	sr^2	r	r^2	1

Untuk menentukan isomorfisme, maka dibentuk pemetaan $\varphi : (\mathrm{G}_3,\circ) \to (\mathrm{D}_6,\circ)$ dengan didefinisikan sebagai berikut:

$\varphi(\alpha_1) = r$ atau dapat dikatakan bahwa α_1 pada grup permutasi segitiga bercabang 1-segitiga berkorespondensi satu-satu dengan r pada grup dihedral-6. Untuk selanjutnya pernyataan tersebut dinyatakan dengan:

$$(\mathrm{G}_3,\circ) \approx (\mathrm{D}_6,\circ)$$

$\varphi(\alpha_1) = r$	atau	$\alpha_1 \leftrightarrow r$
$\varphi(\alpha_2) = r^2$		$\alpha_2 \leftrightarrow r^2$
$\varphi(\alpha_3) = 1$		$\alpha_3 \leftrightarrow 1$
$\varphi(\beta_1) = s$		$\beta_1 \leftrightarrow s$
$\varphi(\beta_2) = sr$		$\beta_2 \leftrightarrow sr$
$\varphi(\beta_3) = sr^2$		$\beta_3 \leftrightarrow sr^2$

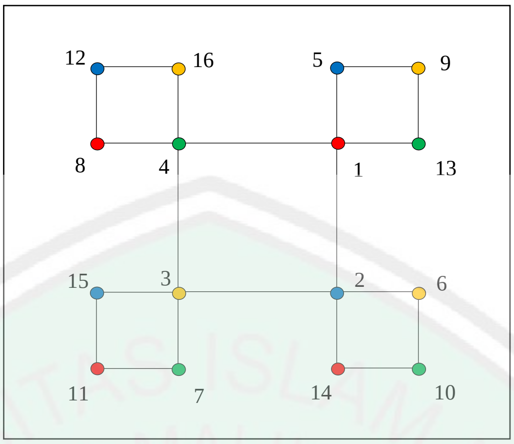
Jadi terbukti bahwa grup G_3 isomorfik dengan grup D_6, karena ada isomorfisme dari G_3 ke D_6.

3.2 Subgrup Simetri dari Segiempat bercabang n-segiempat

Segiempat bercabang n-segiempat adalah suatu segiempat yang setiap titik sudut terluarnya membentuk segiempat baru sebanyak n-segiempat, dengan n bilangan asli (menurut penulis). Adapun subgrup dari himpunan simetri yang digunakan adalah rotasi dan refleksi yang ditulis dalam bentuk permutasi. Dan sebagai contoh segiempat bercabang n-segiempat yang digunakan adalah untuk cabang-1, cabang-2, dan cabang-3.

3.2.1 Subgrup Simetri dari Segiempat bercabang 1-segiempat

Bentuk segiempat bercabang 1-segiempat adalah sebagai berikut:



Gambar 3.5 Segiempat Bercabang 1-Segiempat

Berdasarkan gambar tersebut dapat diketahui bahwa pada segiempat bercabang 1-segiempat terdapat 12 titik sudut terluar, 16 buah titik sudut dan 5 buah segiempat yaitu 1 buah segiempat awal dan 4 buah segiempat baru pada setiap titik sudut segiempat awal.

Jika segiempat bercabang 1-segiempat dirotasikan sejauh $\frac{360^0 \cdot k}{4}$; $k = 1, 3$ maka akan menghasilkan permutasi dalam bentuk sikel sebanyak 4 sikel yaitu: $\alpha_1 =$ (1 2 3 4) (5 6 7 8) (9 10 11 12) (13 14 15 16) dimana α_1 merupakan rotasi sejauh 90^0 searah dengan jarum jam dan $\alpha_3 = (1\ 4\ 3\ 2)(5\ 8\ 7\ 8)(9\ 12\ 11\ 10)$ $(13\ 16\ 15\ 14)$ dimana α_3 merupakan rotasi sejauh 270^0 searah dengan jarum jam. Untuk rotasi sejauh $\frac{360^0 \cdot k}{4}$; $k = 2$ maka akan menghasilkan permutasi dalam bentuk sikel sebanyak 8 sikel yaitu: $\alpha_2 = (1\ 3)(2\ 4)(5\ 7)(6\ 8)(9\ 11)(10\ 12)$ $(13\ 15)(14\ 16)$ dimana α_2 merupakan rotasi sejauh 180^0 searah dengan jarum jam. Sedangkan untuk rotasi sejauh $\frac{360^0 \cdot k}{4}$; $k = 4$ atau rotasi sejauh 360^0 maka akan menghasilkan permutasi dalam bentuk sikel sebanyak 16 sikel yaitu:

$\alpha_4 = (1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)(9)(10)(11)(12)(13)(14)(15)(16)$.

Jika segiempat bercabang 1-segiempat direfleksikan terhadap garis S_1, S_2, maka akan menghasilkan permutasi dalam bentuk sikel sebanyak 6 sikel yaitu $\beta_1 = (2\ 4)(5\ 13)(6\ 16)(7\ 15\ )(8\ 14)(10\ 12)$ dimana β_1 merupakan refleksi terhadap S_1 dan $\beta_2 = (1\ 3)(5\ 15)(6\ 14)(7\ 13)(8\ 16)(9\ 11)$ dimana β_2 merupakan refleksi terhadap S_2. Sikel (1) dan (2) tidak dihitung sebagai banyaknya sikel karena titik tersebut berefleksi ke dirinya sendiri. Untuk selanjutnya sikel yang berefleksi ke dirinya sendiri tidak dihitung sebagai banyaknya sikel.

Sedangkan jika segiempat bercabang 1-segiempat direfleksikan terhadap garis S_3, S_4, maka akan menghasilkan permutasi dalam bentuk sikel sebanyak 8 sikel yaitu $\beta_3 = (1\ 4)\ (2\ 3)\ (5\ 16)\ (6\ 15)\ (7\ 14)\ (8\ 13)\ (9\ 12)\ (10\ 11)$ dimana β_3 merupakan refleksi terhadap S_3.

$\beta_4 = (1\ 2)\ (3\ 4)\ (5\ 14)\ (6\ 13)\ (7\ 16)\ \ (8\ 15)\ (9\ 10)\ (11\ 12)$ dimana β_4 merupakan refleksi terhadap S_4.

Jadi subgrup simetri dari segiempat bercabang 1-segiempat yang ditulis dalam bentuk permutasi adalah sebagai berikut:

$\alpha_1 =\ (1\ 2\ 3\ 4)\ (5\ 6\ 7\ 8)\ (9\ 10\ 11\ 12)\ (13\ 14\ 15\ 16)$

$\alpha_2 =\ (1\ 3)(2\ 4)(5\ 7)(6\ 8)(9\ 11)(10\ 12)(13\ 15)(14\ 16)$

$\alpha_3 = (1\ 4\ 3\ 2)(5\ 8\ 7\ 8)(9\ 12\ 11\ 10)(13\ 16\ 15\ 14)$

$\alpha_4 = (1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)(9)(10)(11)(12)(13)(14)\ (15)\ (16).$

$\beta_1 = (2\ 4)(5\ 13)(6\ 16)(7\ 15\ )(8\ 14)(10\ 12)$

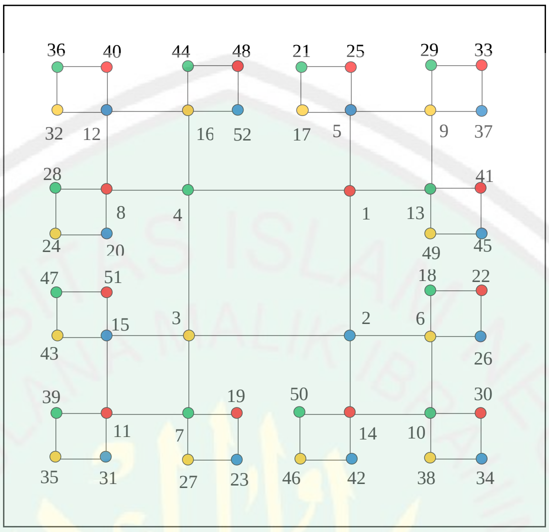
$\beta_2 = (1\ 3)(5\ 15)(6\ 14)(7\ 13)\ (8\ 16)(9\ 11)$

$\beta_3 = (1\ 4)(2\ 3)(5\ 16)(6\ 15)(7\ 14)\ (8\ 13)(9\ 12)(10\ 11)$

$\beta_4 = (1\ 2)(3\ 4)(5\ 14)(6\ 13)(7\ 16)(8\ 15)(9\ 10)(11\ 12)$

3.2.2 Subgrup Simetri dari Segiempat bercabang 2-segiempat

Bentuk segiempat bercabang 2-segiempat adalah sebagai berikut:



Gambar 3.6 Segiempat Bercabang 2-Segiempat

Berdasarkan gambar tersebut dapat diketahui bahwa pada segiempat bercabang 2-segiempat terdapat 36 titik sudut terluar, 52 buah titik sudut dan 17 buah segiempat yaitu 1 buah segiempat awal dan 4 buah segiempat sebagai cabang pertama, dan 12 buah segiempat sebagai cabang kedua.

Jika segiempat bercabang 2-segiempat dirotasikan sejauh $\frac{360^0 \cdot k}{4}$; $k = 1, 3$ maka akan menghasilkan permutasi dalam bentuk sikel sebanyak 13 sikel yaitu:

$\alpha_1 = (1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6\ 7\ 8)(9\ 10\ 11\ 12)(13\ 14\ 15\ 16)(17\ 18\ 19\ 20)(21\ 22\ 23\ 24)$
$(25\ 26\ 27\ 28)(29\ 30\ 31\ 32)(33\ 34\ 35\ 36)(37\ 38\ 39\ 40)(41\ 42\ 43\ 44)$
$(45\ 46\ 47\ 48)(49\ 50\ 51\ 52)$ dimana α_1 merupakan rotasi sejauh 90^0 searah dengan jarum jam.

$\alpha_3 = (1\ 4\ 3\ 2)(5\ 8\ 7\ 6)(9\ 12\ 11\ 10)(13\ 16\ 15\ 14)(17\ 20\ 19\ 18)(21\ 24\ 23\ 22)$
$(25\ 28\ 27\ 26)(29\ 32\ 31\ 30)(33\ 36\ 35\ 34)(37\ 40\ 39\ 38)(41\ 44\ 43\ 42)$
$(45\ 48\ 47\ 46)(49\ 52\ 51\ 50)$ dimana α_3 merupakan rotasi sejauh 270^0

searah dengan jarum jam. Sedangkan untuk rotasi sejauh $\frac{360^0 \cdot k}{4}$, $k = 2$ maka akan menghasilkan permutasi dalam bentuk sikel sebanyak 26 sikel yaitu:

$\alpha_2 =$ (1 3)(2 4)(5 7)(6 8)(9 11)(10 12)(13 15)(14 16)(17 19)(18 20)

(21 23)(22 24)(25 27)(26 28)(29 31)(30 32)(33 35)(34 36)

(37 39)(38 40)(41 43)(42 44)(45 47)(46 48)(49 51)(50 52)

dimana α_2 merupakan rotasi sejauh 180^0 searah dengan jarum jam.

Sedangkan untuk rotasi sejauh $\frac{360^0 \cdot k}{4}$; $k = 4$ atau rotasi sejauh 360^0 searah dengan jarum jam maka akan menghasilkan permutasi dalam bentuk sikel sebanyak 52 sikel atau sama dengan jumlah titik sudutnya yaitu:

$\alpha_4 =$ (1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)(9)(10)(11)(12)(13)(14)(15)(16)(17)(18)(19)(20)(21)(22)(23)(24)(25)(26)(27)(28)(29)(30)(31)(32)(33)(34)(35)(36)(37)(38)(39)(40)(41)(42)(43)(44)(45)(46)(47)(48)(49)(50)(51)(52).

Jika segiempat bercabang 2-segiempat direfleksikan terhadap garis S_1, S_2, maka akan menghasilkan permutasi dalam bentuk sikel sebanyak 23 sikel yaitu:

$\beta_1 =$ (2 4)(5 13)(6 16)(7 15)(8 14)(10 12)(17 49)(18 52)(19 51)(20 50)

(21 45)(22 48)(23 47)(24 46)(25 41)(26 44)(27 43)(28 42)(29 37)

(30 40) (31 39) (32 38) (34 36) dimana β_1 merupakan refleksi terhadap S_1.

$\beta_2 =$ (1 3)(5 15)(6 14)(7 13)(8 16)(9 11)(17 51)(18 50)(19 49)(20 52)

(21 47)(22 46)(23 45)(24 48)(25 43)(26 42)(27 41)(28 44)(29 39)

(39 38)(31 37)(32 40)(33 35) dimana β_2 merupakan refleksi terhadap S_2.

Sedangkan jika segiempat bercabang 2-segiempat direfleksikan terhadap garis S_3, S_4, maka akan menghasilkan permutasi dalam bentuk sikel sebanyak 26 sikel yaitu:

$\beta_3 =$ (1 4) (2 3) (5 16) (6 15) (7 14) (8 13) (9 12) (10 11) (17 52) (18 51) (19 50) (20 45) (21 48) (22 47) (23 46) (24 49) (25 44) (26 43) (27 42) (28 41) (29 40) (30 39) (31 34) (32 37) (33 36) (38 35)

dimana β_3 merupakan refleksi terhadap S_3.

$\beta_4 =$ (1 2) (3 4) (5 14) (6 13) (7 16) (8 15) (9 10) (11 12) (17 50) (18 49) (19 52) (20 51) (21 46) (22 45) (23 48) (24 47) (25 42) (26 41) (27 44) (28 43) (29 38) (30 37) (31 40) (32 39) (33 34) (35 36)

dimana β_4 merupakan refleksi terhadap S_4.

Jadi subgrup simetri dari segiempat bercabang 2-segiempat yang ditulis dalam bentuk permutasi adalah sebagai berikut:

$\alpha_1 =$ (1 2 3 4)(5 6 7 8)(9 10 11 12)(13 14 15 16)(17 18 19 20)(21 22 23 24)(25 26 27 28)(29 30 31 32)(33 34 35 36)(37 38 39 40)(41 42 43 44)(45 46 47 48)(49 50 51 52)

$\alpha_2 =$ (1 3)(2 4)(5 7)(6 8)(9 11)(10 12)(13 15)(14 16)(17 19)(18 20)(21 23)(22 24)(25 27)(26 28)(29 31)(30 32)(33 35)(34 36)(37 39)(38 40)(41 43)(42 44)(45 47)(46 48)(49 51)(50 52).

$\alpha_3 =$ (1 4 3 2)(5 8 7 6)(9 12 11 10)(13 16 15 14)(17 20 19 18)(21 24 23 22)(25 28 27 26)(29 32 31 30)(33 36 35 34)(37 40 39 38)(41 44 43 42)(45 48 47 46)(49 52 51 50).

$\alpha_4 =$ (1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)(9)(10)(11)(12)(13)(14)(15)(16)(17)

$(18)(19)(20)(21)(22)(23)(24)(25)(26)(27)(28)(29)(30)(31)(32)(33)(34)$

$(35)(36)(37)(38)(39)(40)(41)(42)(43)(44)(45)(46)(47)(48)(49)(50)$

$(51)(52)$..

$\beta_1 = (2\ 4)(5\ 13)(6\ 16)(7\ 15\ )(8\ 14)(\ 10\ 12)(17\ 49)(18\ 52)(19\ 51)(20\ 50)$

$(21\ 45)(22\ 48)(23\ 47)(24\ 46)(25\ 41)(26\ 44)(27\ 43)(28\ 42)(29\ 37)$

$(30\ 40)\ (31\ 39)\ (32\ 38)\ (34\ 36)$

$\beta_2 = (1\ 3)(5\ 15)(6\ 14)(7\ 13)(8\ 16)(9\ 11)(17\ 51)(18\ 50)(19\ 49)(20\ 52)$

$(21\ 47)(22\ 46)(23\ 45)(24\ 48)(25\ 43)(26\ 42)(27\ 41)(28\ 44)(29\ 39)$

$(39\ 38)(31\ 37)(32\ 40)(33\ 35)$

$\beta_3 = (1\ 4)\ (2\ 3)\ (5\ 16)\ (6\ 15)\ (7\ 14)\ (8\ 13)\ (9\ 12)\ (10\ 11)\ (17\ 52)\ (18\ 51)$

$(19\ 50)\ (20\ 45)\ (21\ 48)\ (22\ 47)\ (23\ 46)\ (24\ 49)\ (25\ 44)\ (26\ 43)$

$(27\ 42)\ (28\ 41)\ (29\ 40)\ (30\ 39)\ (31\ 34)\ (32\ 37)\ (33\ 36)\ (38\ 35)$

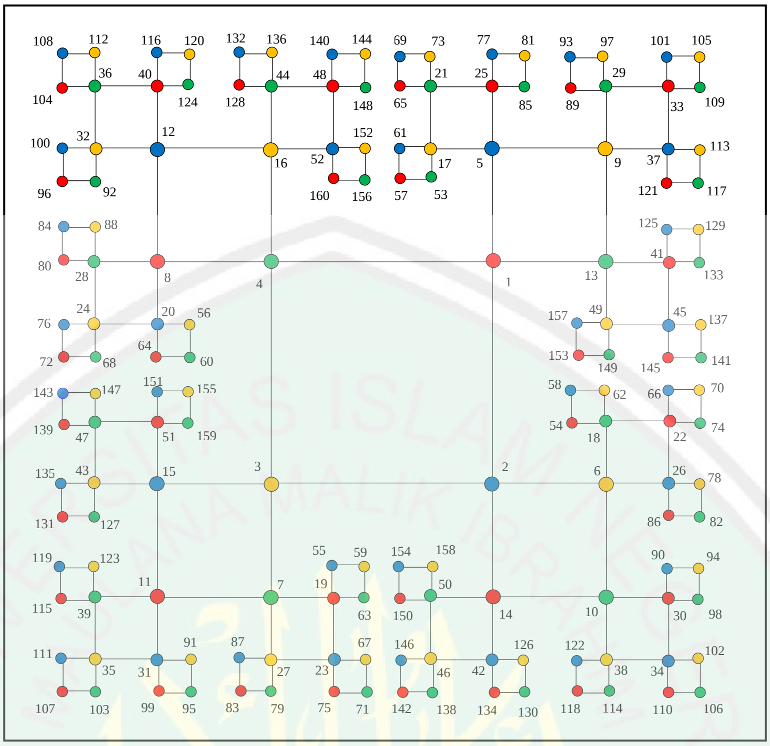
$\beta_4 = (1\ 2)\ (3\ 4)\ (5\ 14)\ (6\ 13)\ (7\ 16)\ (8\ 15)\ (9\ 10)\ (11\ 12)\ (17\ 50)\ (18\ 49)$

$(19\ 52)\ (20\ 51)\ (21\ 46)\ (22\ 45)\ (23\ 48)\ (24\ 47)\ (25\ 42)\ (26\ 41)$

$(27\ 44)\ (28\ 43)\ (29\ 38)\ (30\ 37)\ (31\ 40)\ (32\ 39)\ (33\ 34)\ (35\ 36)$

3.2.3 Subgrup Simetri dari Segiempat bercabang 3-segiempat

Bentuk segiempat bercabang 3-segiempat adalah sebagai berikut:



Gambar 3.7 Segiempat Bercabang 3-Segiempat

Berdasarkan gambar tersebut dapat diketahui bahwa pada segiempat bercabang 2-segiempat terdapat 108 titik sudut terluar, 160 buah titik sudut dan 53 buah segiempat yaitu 1 buah segiempat awal dan 4 buah segiempat sebagai cabang pertama, 12 buah segiempat sebagai cabang kedua dan 36 buah segiempat sebagai cabang ketiga.

Jika segiempat bercabang 3-segiempat dirotasikan sejauh $\frac{360^0 \cdot k}{4}$; $k = 1, 3$ maka akan menghasilkan permutasi dalam bentuk sikel sebanyak 40 sikel yaitu:

$\alpha_1 = (1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6\ 7\ 8)(9\ 10\ 11\ 12)(13\ 14\ 15\ 16)(17\ 18\ 19\ 20)(21\ 22\ 23\ 24)$

$(25\ 26\ 27\ 28)(29\ 30\ 31\ 32)(33\ 34\ 35\ 36)(37\ 38\ 39\ 40)(41\ 42\ 43\ 44)$

$(45\ 46\ 47\ 48)(49\ 50\ 51\ 52)(53\ 54\ 55\ 56)(57\ 58\ 59\ 60)$

$(61\ 62\ 63\ 64)(65\ 66\ 67\ 68)(69\ 70\ 71\ 72)(73\ 74\ 75\ 76)$

$(77\ 78\ 79\ 80)(81\ 82\ 83\ 84)(85\ 86\ 87\ 88)(89\ 90\ 91\ 92)$

$(93\ 94\ 95\ 96)(97\ 98\ 99\ 100)(101\ 102\ 103\ 104)$

$(105\ 106\ 107\ 108)(109\ 110\ 111\ 112)(113\ 114\ 115\ 116)$

$(117\ 118\ 119\ 120)(121\ 122\ 123\ 124)(125\ 126\ 127\ 128)$

$(129\ 130\ 131\ 132)(133\ 134\ 135\ 136)(137\ 138\ 139\ 140)$

$(141\ 142\ 143\ 144)(145\ 146\ 147\ 148)(149\ 150\ 151\ 152)$

$(153\ 154\ 155\ 156)(157\ 158\ 159\ 160)$ dimana α_1 merupakan rotasi sejauh 90^0 searah dengan jarum jam.

$\alpha_3 =$ $(1\ 4\ 3\ 2)\ (5\ 8\ 7\ 6)\ (9\ 12\ 11\ 10)\ (13\ 16\ 15\ 14)\ (17\ 20\ 19\ 18)$

$(21\ 24\ 23\ 22)\ (25\ 28\ 27\ 26)\ (29\ 32\ 31\ 30)\ (33\ 36\ 35\ 34)$

$(37\ 40\ 39\ 38)\ (41\ 44\ 43\ 42)\ (45\ 48\ 47\ 46)\ (49\ 52\ 51\ 50)$

$(53\ 56\ 55\ 54)\ (57\ 60\ 59\ 58)\ (61\ 64\ 63\ 62)\ (65\ 68\ 67\ 66)$

$(69\ 72\ 71\ 70)\ (73\ 76\ 75\ 74)\ (77\ 80\ 79\ 78)\ (81\ 84\ 83\ 82)$

$(85\ 88\ 87\ 86)\ (89\ 92\ 91\ 90)\ (93\ 96\ 95\ 94)\ (97\ 100\ 99\ 98)$

$(101\ 104\ 103\ 102)\ (105\ 108\ 107\ 106)\ (109\ 112\ 111\ 110)$

$(113\ 116\ 115\ 114)\ (117\ 120\ 119\ 118)\ (121\ 124\ 123\ 122)$

$(125\ 128\ 127\ 126)\ (129\ 132\ 131\ 130)\ (133\ 136\ 135\ 134)$

$(137\ 140\ 139\ 138)\ (141\ 144\ 143\ 142)\ (145\ 148\ 147\ 146)$

$(149\ 152\ 151\ 150)(153\ 156\ 155\ 154)(157\ 160\ 169\ 158)$

dimana α_3 merupakan rotasi sejauh 270^0 searah dengan jarum jam.

Sedangkan untuk rotasi sejauh $\frac{360^0 \cdot k}{4}$; $k = 2$ maka akan menghasilkan permutasi dalam bentuk sikel sebanyak 80 sikel yaitu:

$\alpha_2 =$ $(1\ 3)\ (2\ 4)\ (5\ 7)\ (6\ 8)\ (9\ 11)\ (10\ 12)\ (13\ 15)\ (14\ 16)\ (17\ 19)\ (18\ 20)$

$(21\ 23)\ (22\ 24)\ (25\ 27)\ (26\ 28)\ (29\ 31)\ (30\ 32)\ (33\ 35)\ (34\ 36)$

$(37\ 39)\ (38\ 40)\ (41\ 43)\ (42\ 44)\ (45\ 47)\ (46\ 48)\ (49\ 51)\ (50\ 52)$

$(53\ 55)\ (54\ 56)\ (57\ 59)\ (58\ 60)\ (61\ 63)\ (62\ 64)\ (65\ 67)\ (66\ 68)$

$(69\ 71)\ (70\ 72)\ (73\ 75)\ (74\ 76)\ (77\ 79)\ (78\ 80)\ (81\ 83)\ (82\ 84)$

$(85\ 87)\ (86\ 88)\ (89\ 91)\ (90\ 92)\ (93\ 95)\ (94\ 96)\ (97\ 99)\ (98\ 100)$

$(101\ 103)\ (102\ 104)\ (105\ 107)\ (106\ 108)\ (109\ 111)\ (110\ 112)$

$(113\ 115)\ (114\ 116)\ (117\ 119)\ (118\ 120)\ (121\ 123)\ (122\ 124)$

$(125\ 127)\ (126\ 128)\ (129\ 131)\ (130\ 132)\ (133\ 135)\ (134\ 136)$

$(137\ 139)\ (138\ 140)\ (141\ 143)\ (142\ 144)\ (145\ 147)\ (146\ 148)$

$(149\ 151)\ (150\ 152)\ (153\ 155)\ (154\ 156)\ (157\ 159)\ (158\ 160)$

dimana α_2 merupakan rotasi sejauh 180^0 searah dengan jarum jam.

Sedangkan untuk rotasi sejauh $\frac{360^0 \cdot k}{4}$; $k = 4$ atau rotasi sejauh 360^0 saerah dengan jarum jam maka akan menghasilkan permutasi dalam bentuk sikel sebanyak 160 atau sama dengan jumlah titik sudutnya yaitu:

$\alpha_4 = (1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)(9)(10)(11)(12)(13)(14)(15)(16)(17)(18)$

$(19)(20)(21)(22)(23)(24)(25)(26)(27)(28)(29)(30)(31)(32)(33)(34)$

$(35)(36)(37)(38)(39)(40)(41)(42)(43)(44)(45)(46)(47)(48)(49)(50)$

$(51)(52)(53)(54)(55)(56)(57)(58)(59)(60)(61)(62)(63)(64)(65)(66)$

$(67)(68)(69)(70)(71)(72)(73)(74)(75)(76)(77)(78)(79)(80)(81)(82)$

$(83)(84)(85)(86)(87)(88)(89)(90)(91)(92)(93)(94)(95)(96)(97)(98)$

$(99)(100)(101)(102)(103)(104)(105)(106)(107)(108)(109)(110)$

$(111)(112)(113)(114)(115)(116)(117)(118)(119)(120)(121)(122)$

$(123)(124)(125)(126)(127)(128)(129)(130)(131)(132)(133)(134)$

$(135)(136)(137)(138)(139)(140)(141)(142)(143)(144)(145)(146)$

$(147)(148)(149)(150)(151)(152)(153)(154)(155)(156)(157)(158)$

$(159)\ (160)$.

Jika segiempat bercabang 3-segiempat direfleksikan terhadap garis S_1, S_2, maka akan menghasilkan permutasi dalam bentuk sikel sebanyak 76 sikel yaitu:

$\beta_1 =$ $(2\ 4)\ (5\ 13)\ (6\ 16)\ (7\ 15\ )\ (8\ 14)\ (10\ 12)\ (17\ 49)\ (18\ 52)$
$(19\ 51)\ (20\ 50)\ (21\ 45)\ (22\ 48)\ (23\ 47)\ (24\ 46)\ (25\ 41)\ (26\ 44)$
$(27\ 43)\ (28\ 42)\ (29\ 37)\ (30\ 40)\ (31\ 39)\ (32\ 38)\ (34\ 36)\ (53\ 157)$
$(54\ 160)\ (55\ 159)\ (56\ 158)\ (57\ 153)\ (58\ 156)\ (59\ 155)\ (60\ 154)$
$(61\ 149)\ (62\ 152)\ (63\ 151)\ (64\ 150)\ (65\ 145)\ (66\ 148)\ (67\ 147)$
$(68\ 146)\ (69\ 141)\ (70\ 144)\ (71\ 143)\ (72\ 142)\ (73\ 137)\ (74\ 140)$
$(75\ 139)\ (76\ 138)\ (77\ 133)\ (78\ 136)\ (79\ 135)\ (80\ 134)\ (81\ 129)$
$(82\ 132)\ (83\ 131)\ (84\ 130)\ (85\ 125)\ (86\ 128)\ (87\ 127)\ (88\ 126)$
$(89\ 121)\ (90\ 124)\ (91\ 123)\ (92\ 122)\ (93\ 117)\ (94\ 120)\ (95\ 119)$
$(96\ 118)\ (97\ 113)\ (98\ 116)\ (99\ 115)\ (100\ 114)\ (101\ 109)$
$(102\ 112)\ (103\ 111)\ (104\ 110)\ (106\ 108)$ dimana β_1 merupakan refleksi terhadap sumbu S_1.

$\beta_2 =$ $(1\ 3)\ (5\ 15)\ (6\ 14)\ (7\ 13)\ (8\ 16)\ (9\ 11)\ (17\ 51)\ (18\ 50)$
$(19\ 49)\ (20\ 52)\ (21\ 47)\ (22\ 46)\ (23\ 45)\ (24\ 48)\ (25\ 43)\ (26\ 42)$
$(27\ 41)\ (28\ 44)\ (29\ 39)\ (39\ 38)\ (31\ 37)\ (32\ 40)\ (33\ 35)\ (53\ 159)$
$(54\ 158)\ (55\ 157)\ (56\ 160)\ (57\ 155)\ (58\ 154)\ (59\ 153)\ (60\ 156)$
$(61\ 151)\ (62\ 150)\ (63\ 149)\ (64\ 152)\ (65\ 147)\ (66\ 146)\ (67\ 145)$
$(68\ 148)\ (69\ 143)\ (70\ 142)\ (71\ 141)\ (72\ 144)\ (73\ 139)\ (74\ 138)$
$(75\ 137)\ (76\ 140)\ (77\ 135)\ (78\ 134)\ (79\ 133)\ (80\ 136)\ (81\ 131)$

(82 130) (83 129) (84 132) (85 127) (86 126) (87 125) (88 128) (89 123) (90 122) (91 121) (92 124) (93 119) (94 118) (95 117) (96 120) (97 115) (98 114) (99 113) (100 116) (101 111) (102 110) (103 109) (104 112) (105 107) dimana β_2 merupakan refleksi terhadap sumbu S_2.

Sedangkan jika segiempat bercabang 3-segiempat direfleksikan terhadap garis S_3, S_4, maka akan menghasilkan permutasi dalam bentuk sikel sebanyak 80 sikel yaitu:

$\beta_3 =$ (1 4) (2 3) (5 16) (6 15) (7 14) (8 13) (9 12) (10 11) (17 52) (18 51) (19 50) (20 45) (21 48) (22 47) (23 46) (24 49) (25 44) (26 43) (27 42) (28 41) (29 40) (30 39) (31 34) (32 37) (33 36) (38 35) (53 160) (54 159) (55 158) (56 157) (57 156) (58 155) (59 154) (60 153) (61 152) (62 151) (63 150) (64 149) (65 148) (66 147) (67 146) (68 145) (69 144) (70 143) (71 142) (72 141) (73 140) (74 139)(75 138) (76 137) (77 136) (78 135) (79 134) (80 133) (81 132) (82 131) (83 130) (84 129) (85 128) (86 127) (87 126) (88 125) (89 124) (90 123) (91 122) (92 121) (93 120) (94 119) (95 118)(96 117) (97 116) (98 115) (99 114) (100 113) (101 112) (102 111) (103 110) (104 109) (105 108) (106 107) dimana β_3 merupakan refleksi terhadap sumbu S_3.

$\beta_4 =$ (1 2) (3 4) (5 14) (6 13) (7 16) (8 15) (9 10) (11 12) (17 50) (18 49) (19 52) (20 51) (21 46) (22 45) (23 48) (24 47) (25 42) (26 41) (27 44) (28 43) (29 38) (30 37) (31 40) (32 39) (33 34) (35 36)

$(53\ 158)\ (54\ 157)\ (55\ 160)\ (56\ 159)\ (57\ 154)\ (58\ 153)\ (59\ 156)$

$(60\ 155)\ (61\ 150)\ (62\ 149)\ (63\ 152)\ (64\ 151)\ (65\ 146)\ (66\ 145)$

$(67\ 148)\ (68\ 147)\ (69\ 142)\ (70\ 141)\ (71\ 144)\ (72\ 143)\ (73\ 138)$

$(74\ 137)\ (75\ 140)\ (76\ 139)\ (77\ 134)\ (78\ 133)\ (79\ 136)\ (80\ 135)$

$(81\ 130)\ (82\ 129)\ (83\ 132)\ (84\ 131)\ (85\ 126)\ (86\ 125)\ (87\ 128)$

$(88\ 127)\ (89\ 122)\ (90\ 121)\ (91\ 124)\ (92\ 123)\ (93\ 118)\ (94\ 117)$

$(95\ 120)\ (96\ 119)\ (97\ 114)\ (98\ 113)\ (99\ 116)\ (100\ 115)\ (101\ 110)$

$(102\ 109)(103\ 112)(104\ 111)(105\ 106)(107\ 108)$ dimana

β_4 merupakan refleksi terhadap sumbu S_4.

Jadi subgrup simetri dari segiempat bercabang 3-segiempat yang ditulis dalam bentuk permutasi adalah sebagai berikut:

$\alpha_1 =\ (1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6\ 7\ 8)(9\ 10\ 11\ 12)(13\ 14\ 15\ 16)(17\ 18\ 19\ 20)$

$(21\ 22\ 23\ 24)(25\ 26\ 27\ 28)(29\ 30\ 31\ 32)(33\ 34\ 35\ 36)$

$(37\ 38\ 39\ 40)(41\ 42\ 43\ 44)(45\ 46\ 47\ 48)(49\ 50\ 51\ 52)$

$(53\ 54\ 55\ 56)(57\ 58\ 59\ 60)(61\ 62\ 63\ 64)(65\ 66\ 67\ 68)$

$(69\ 70\ 71\ 72)(73\ 74\ 75\ 76)(77\ 78\ 79\ 80)(81\ 82\ 83\ 84)$

$(85\ 86\ 87\ 88)(89\ 90\ 91\ 92)(93\ 94\ 95\ 96)(97\ 98\ 99\ 100)$

$(101\ 102\ 103\ 104)(105\ 106\ 107\ 108)(109\ 110\ 111\ 112)$

$(113\ 114\ 115\ 116)(117\ 118\ 119\ 120)(121\ 122\ 123\ 124)$

$(125\ 126\ 127\ 128)(129\ 130\ 131\ 132)(133\ 134\ 135\ 136)$

$(137\ 138\ 139\ 140)(141\ 142\ 143\ 144)(145\ 146\ 147\ 148)$

$(149\ 150\ 151\ 152)(153\ 154\ 155\ 156)(157\ 158\ 159\ 160)$

$\alpha_2 =\ (1\ 3)\ (2\ 4)\ (5\ 7)\ (6\ 8)\ (9\ 11)\ (10\ 12)\ (13\ 15)\ (14\ 16)\ (17\ 19)\ (18\ 20)$

(21 23) (22 24) (25 27) (26 28) (29 31) (30 32) (33 35) (34 36)

(37 39) (38 40) (41 43) (42 44) (45 47) (46 48) (49 51) (50 52)

(53 55) (54 56) (57 59) (58 60) (61 63) (62 64) (65 67) (66 68)

(69 71) (70 72) (73 75) (74 76) (77 79) (78 80) (81 83) (82 84)

(85 87) (86 88) (89 91) (90 92) (93 95) (94 96) (97 99) (98 100)

(101 103) (102 104) (105 107) (106 108) (109 111) (110 112)

(113 115) (114 116) (117 119) (118 120) (121 123) (122 124)

(125 127) (126 128) (129 131) (130 132) (133 135) (134 136)

(137 139) (138 140) (141 143) (142 144) (145 147) (146 148)

(149 151) (150 152) (153 155) (154 156) (157 159) (158 160).

$\alpha_3 =$ (1 4 3 2) (5 8 7 6) (9 12 11 10) (13 16 15 14) (17 20 19 18)

(21 24 23 22) (25 28 27 26) (29 32 31 30) (33 36 35 34)

(37 40 39 38) (41 44 43 42) (45 48 47 46) (49 52 51 50)

(53 56 55 54) (57 60 59 58) (61 64 63 62) (65 68 67 66)

(69 72 71 70) (73 76 75 74) (77 80 79 78) (81 84 83 82)

(85 88 87 86) (89 92 91 90) (93 96 95 94) (97 100 99 98)

(101 104 103 102) (105 108 107 106) (109 112 111 110)

(113 116 115 114) (117 120 119 118) (121 124 123 122)

(125 128 127 126) (129 132 131 130) (133 136 135 134)

(137 140 139 138) (141 144 143 142) (145 148 147 146)

(149 152 151 150) (153 156 155 154) (157 160 169 158)

$\alpha_4 =$ (1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)(9)(10)(11)(12)(13)(14)(15)(16)(17)(18)

(19)(20)(21)(22)(23)(24)(25)(26)(27)(28)(29)(30)(31)(32)(33)(34)

(35)(36)(37)(38)(39)(40)(41)(42)(43)(44)(45)(46)(47)(48)(49)(50)

(51)(52)(53)(54)(55)(56)(57)(58)(59)(60)(61)(62)(63)(64)(65)(66)

(67)(68)(69)(70)(71)(72)(73)(74)(75)(76)(77)(78)(79)(80)(81)(82)

(83)(84)(85)(86)(87)(88)(89)(90)(91)(92)(93)(94)(95)(96)(97)(98)

(99)(100)(101)(102)(103)(104)(105)(106)(107)(108)(109)(110)

(111)(112)(113)(114)(115)(116)(117)(118)(119)(120)(121)(122)

(123)(124)(125)(126)(127)(128)(129)(130)(131)(132)(133)(134)

(135)(136)(137)(138)(139)(140)(141)(142)(143)(144)(145)(146)

(147)(148)(149)(150)(151)(152)(153)(154)(155)(156)(157)(158)

(159) (160)

$\beta_1 =$ (2 4) (5 13) (6 16) (7 15) (8 14) (10 12) (17 49) (18 52)

(19 51) (20 50) (21 45) (22 48) (23 47) (24 46) (25 41) (26 44)

(27 43) (28 42) (29 37) (30 40) (31 39) (32 38) (34 36) (53 157)

(54 160) (55 159) (56 158) (57 153) (58 156) (59 155) (60 154)

(61 149) (62 152) (63 151) (64 150) (65 145) (66 148) (67 147)

(68 146) (69 141) (70 144) (71 143) (72 142) (73 137) (74 140)

(75 139) (76 138) (77 133) (78 136) (79 135) (80 134) (81 129)

(82 132) (83 131) (84 130) (85 125) (86 128) (87 127) (88 126)

(89 121) (90 124) (91 123) (92 122) (93 117) (94 120) (95 119)

(96 118) (97 113) (98 116) (99 115) (100 114) (101 109)

(102 112) (103 111) (104 110) (106 108)

$\beta_2 =$ (1 3) (5 15) (6 14) (7 13) (8 16) (9 11) (17 51) (18 50)

(19 49) (20 52) (21 47) (22 46) (23 45) (24 48) (25 43) (26 42)

(27 41) (28 44) (29 39) (39 38) (31 37) (32 40) (33 35) (53 159)
(54 158) (55 157) (56 160) (57 155) (58 154) (59 153) (60 156)
(61 151) (62 150) (63 149) (64 152) (65 147) (66 146) (67 145)
(68 148) (69 143) (70 142) (71 141) (72 144) (73 139) (74 138)
(75 137) (76 140) (77 135) (78 134) (79 133) (80 136) (81 131)
(82 130) (83 129) (84 132) (85 127) (86 126) (87 125) (88 128)
(89 123) (90 122) (91 121) (92 124) (93 119) (94 118) (95 117)
(96 120) (97 115) (98 114) (99 113) (100 116) (101 111)
(102 110) (103 109) (104 112) (105 107)

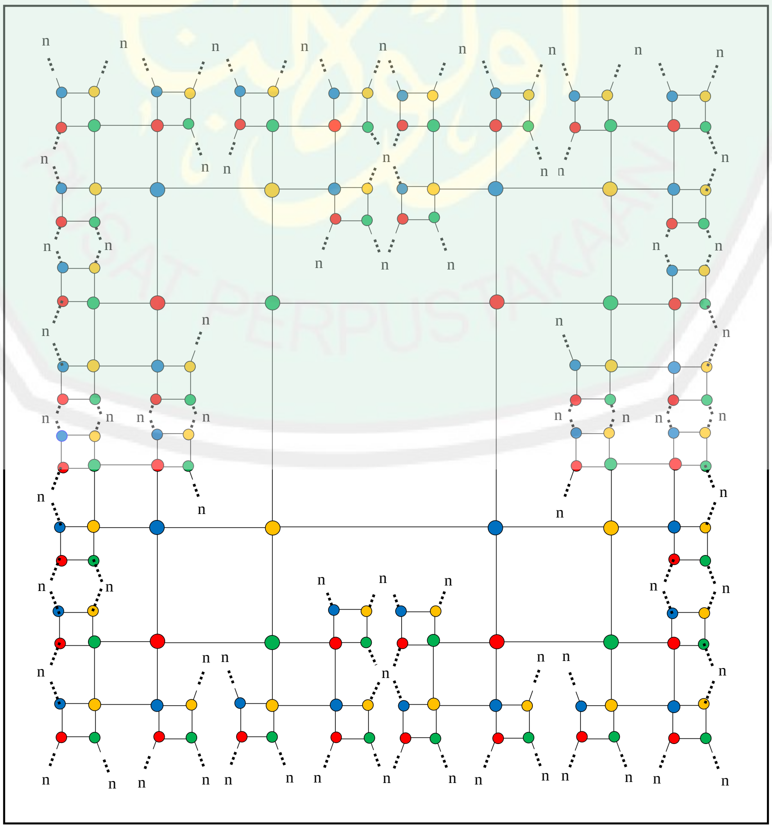
$\beta_3 =$ (1 4) (2 3) (5 16) (6 15) (7 14) (8 13) (9 12) (10 11) (17 52) (18 51)
(19 50) (20 45) (21 48) (22 47) (23 46) (24 49) (25 44) (26 43)
(27 42) (28 41) (29 40) (30 39) (31 34) (32 37) (33 36) (38 35)
(53 160) (54 159) (55 158) (56 157) (57 156) (58 155) (59 154)
(60 153) (61 152) (62 151) (63 150) (64 149) (65 148) (66 147)
(67 146) (68 145) (69 144) (70 143) (71 142) (72 141) (73 140)
(74 139)(75 138) (76 137) (77 136) (78 135) (79 134) (80 133)
(81 132) (82 131) (83 130) (84 129) (85 128) (86 127) (87 126)
(88 125) (89 124) (90 123) (91 122) (92 121) (93 120) (94 119)
(95 118)(96 117) (97 116) (98 115) (99 114) (100 113) (101 112)
(102 111) (103 110) (104 109) (105 108) (106 107)

$\beta_4 =$ (1 2) (3 4) (5 14) (6 13) (7 16) (8 15) (9 10) (11 12) (17 50) (18 49)
(19 52) (20 51) (21 46) (22 45) (23 48) (24 47) (25 42) (26 41)
(27 44) (28 43) (29 38) (30 37) (31 40) (32 39) (33 34) (35 36)

(53 158) (54 157) (55 160) (56 159) (57 154) (58 153) (59 156) (60 155) (61 150) (62 149) (63 152) (64 151) (65 146) (66 145) (67 148) (68 147) (69 142) (70 141) (71 144) (72 143) (73 138) (74 137) (75 140) (76 139) (77 134) (78 133) (79 136) (80 135) (81 130) (82 129) (83 132) (84 131) (85 126) (86 125) (87 128) (88 127) (89 122) (90 121) (91 124) (92 123) (93 118) (94 117) (95 120) (96 119) (97 114) (98 113) (99 116) (100 115) (101 110) (102 109) (103 112) (104 111) (105 106) (107 108)

3.2.4 Sifat-sifat yang dibangun subgrup Simetri dari Segiempat bercabang n-segiempat

Bentuk segiempat bercabang n-segiempat adalah sebagai berikut:



Gambar 3.8 Segiempat Bercabang n-Segiempat

Pada uraian sebelumnya telah disebutkan bahwa pada segiempat bercabang n-segiempat dengan:

$n = 1$ terdapat 12 buah titik sudut terluar

$n = 2$ terdapat 36 buah titik sudut terluar

$n = 3$ terdapat 108 buah titik sudut terluar

sehingga banyaknya titik sudut terluar pada segiempat bercabang n-segiempat dapat ditentukan dengan menggunakan deret geometri dengan suku pertamanya adalah 12 titik sudut terluar dan rasionya adalah 3, sehingga diperoleh pola banyaknya titik sudut terluar untuk segiempat bercabang n-segitiga adalah $4 \cdot 3^n$ buah titik sudut terluar.

Sifat 7

Banyaknya titik sudut terluar dari segiempat bercabang n-segiempat, n bilangan asli adalah sebanyak $4 \cdot 3^n$ titik sudut terluar.

Bukti:

Diketahui:

$$i = 1 \rightarrow 12 = 12 \cdot 3^0$$

$$i = 2 \rightarrow 36 = 12 \cdot 3^1$$

$$i = 3 \rightarrow 108 = 12 \cdot 3^2$$

$$\vdots$$

$$i = n \rightarrow 12 \cdot 3^{n-1}$$

Akan dibuktikan bahwa:

$12 \cdot 3^{n-1} = 4 \cdot 3^n$, untuk n bilangan asli.

Bukti dengan menggunakan induksi matematika, yaitu:

Untuk $n = 1 \longrightarrow 12 \cdot 3^0 = 4 \cdot 3^1$

$12 = 12$ benar

Anggap benar untuk $n = k$ yaitu:

$12 \cdot 3^{k-1} = 4 \cdot 3^k$ … (i)

Akan dibuktikan pernyataan benar untuk $n = k + 1$ yaitu:

$12 \cdot 3^{k+1-1} = 4 \cdot 3^{k+1}$

$12 \cdot 3^k = 4 \cdot 3^{k+1}$ … (ii)

Pernyataan (i):

$12 \cdot 3^{k-1} = 4 \cdot 3^k$; masing-masing ruas dikalikan 3

$12 \cdot 3^{k-1} \cdot 3 = 4 \cdot 3^k \cdot 3$

$12 \cdot 3^{k-1} \cdot 3^1 = 4 \cdot 3^k \cdot 3^1$

$12 \cdot 3^{k-1+1} = 4 \cdot 3^{k+1}$

$12 \cdot 3^k = 4 \cdot 3^{k+1}$

Pernyataan terakhir sama dengan pernyataan (ii). Jadi pernyataan (ii) terbukti kebenarannya.

Jadi, $12 \cdot 3^{n-1} = 4 \cdot 3^n$ benar untuk setiap n bilangan asli.

Kemudian untuk titik sudutnya sebagai berikut:

$n = 1$ terdapat 4 + 12 = 16 buah titik sudut

$n = 2$ terdapat 4 + 12 + 36 = 52 buah titik sudut

$n = 3$ terdapat 4 + 12 + 36 + 108 = 160 buah titik sudut

sehingga banyaknya titik sudut pada segiempat bercabang n-segiempat dapat ditentukan dengan menggunakan deret geometri dengan suku pertamanya adalah 4 titik sudut pada segiempat awal dan rasionya adalah 3, sehingga diperoleh pola banyaknya titik untuk segiempat bercabang n-segitiga adalah $2(3^{n+1} - 1)$ buah titik sudut.

Sifat 8

Banyaknya titik sudut dari segiempat bercabang n-segiempat, n bilangan asli adalah sebanyak $2(3^{n+1} - 1)$ titik sudut.

Bukti:

Diketahui:

$$i = 1 \rightarrow 16 = 4 + 4(3^1)$$

$$i = 2 \rightarrow 52 = 4 + 4(3^1) + 4(3^2)$$

$$i = 3 \rightarrow 160 = 4 + 4(3^1) + 4(3^2) + 4(3^3)$$

$$\vdots$$

$$i = n \rightarrow 4 + 4\sum_{i=1}^{n} 3^i$$

Akan dibuktikan bahwa:

$$4 + 4\sum_{i=1}^{n} 3^i = 2(3^{n+1} - 1), untuk\ setiap\ n\ bilangan\ asli.$$

Bukti dengan menggunakan induksi matematika, yaitu:

Untuk $n = 1 \longrightarrow 4 + 4 \cdot 3^1 = 2(3^{1+1} - 1)$

$$16 = 16 \text{ benar}$$

Anggap benar untuk $n = k$ yaitu:

$$4 + 4\sum_{i=1}^{k} 3^i = 2(3^{k+1} - 1) \qquad \dots (i)$$

Akan dibuktikan pernyataan benar untuk $p = k + 1$ yaitu:

$$4+4\sum_{i=1}^{k+1} 3^{i} = 2(3^{k+1+1}-1)$$

$$4+4\sum_{i=1}^{k+1} 3^{i} = 2(3^{k+2}-1) \qquad \ldots(ii)$$

Pernyataan (i):

$$4+4\sum_{i=1}^{k} 3^{i} = 2(3^{k+1}-1), masing-masing\ ruas\ ditambah\ 4(3^{k+1})$$

$$4+4\sum_{i=1}^{k} 3^{i} + 4(3^{k+1}) = 2(3^{k+1}-1)+4(3^{k+1})$$

$$4+4\sum_{i=1}^{k+1} 3^{i} = 2(3^{k+1}-1+2\cdot 3^{k+1})$$

$$= 2(2\cdot 3^{k+1}-1$$

$$= 2(2^{1}\cdot 3^{k+1}-1)$$

$$= 2(3^{k+1+1}-1)$$

$$= 2(3^{k+2}-1)$$

Pernyataan terakhir sama dengan pernyataan (ii). Jadi pernyataan (ii) terbukti kebenarannya.

$$4+4\sum_{i=1}^{n} 3^{i} = 2(3^{n+1}-1), benar\ untuk\ setiap\ n\ bilangan\ asli.$$

Selanjutnya disebutkan pula untuk

$n=1$ terdapat 5 buah segiempat

$n=2$ terdapat 17 buah segiempat

$n=3$ terdapat 53 buah segiempat

Secara umum, banyaknya segiempat pada segiempat bercabang n- segiempat adalah $\frac{banyak\ \ titik\ -1}{3}$ atau $2 \cdot 3^n - 1$ buah segiempat.

Sifat 9

Banyaknya segiempat dari segiempat bercabang n-segiempat, n bilangan asli adalah sebanyak $2 \cdot 3^n - 1$ segitiga.

Bukti:

Diketahui:

$$i = 1 \ \rightarrow \ \ 5 \ = 1 + 4(3^0)$$

$$i = 2 \ \rightarrow \ 17 \ = 1 + 4(3^0) + 4(3^1)$$

$$i = 3 \ \rightarrow 161 = 1 + 4(3^0) + 4(3^1) + 4(3^2)$$

$$\vdots$$

$$i = n \rightarrow 1 + 4 \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} 3^{\mathrm{i}-1}$$

Akan dibuktikan bahwa:

$$1 + 4 \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} 3^{\mathrm{i}-1} = 2 \cdot 3^n - 1, untuk\ setiap\ n\ bilangan\ asli, n > 1$$

Bukti dengan menggunakan induksi matematika, yaitu:

Untuk $n = 1 \rightarrow 1 + 4(3^{1-1}) = 2 \cdot 3^1 - 1$

$$1 + 4(3^0) = 2 \cdot 3^1 - 1$$

$$5 = 5 \qquad \text{benar}$$

Anggap benar untuk $n = k$ yaitu:

$$1 + 4 \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{k}} 3^{\mathrm{i}-1} = 2 \cdot 3^k - 1 \qquad \ldots (i)$$

Akan dibuktikan pernyataan benar untuk $n = k + 1$ yaitu:

$$1 + 4\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{k}+1} 3^{\mathrm{i}-1} = 2 \cdot 3^{k+1} - 1 \qquad \dots (ii)$$

Pernyataan (i):

$$1 + 4\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{k}} 3^{\mathrm{i}-1} = 2 \cdot 3^{k} - 1; masing - masing\ ruas\ ditambah\ 4 \cdot 3^{k}$$

$$1 + 4\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{k}} 3^{\mathrm{i}-1} + 4 \cdot 3^{k} = 2 \cdot 3^{k} - 1 + 4 \cdot 3^{k}$$

$$1 + 4\sum_{\mathrm{i}=2}^{\mathrm{k}+1} 3^{\mathrm{i}-1} = 6 \cdot 3^{k} - 1)$$

$$= 2 \cdot 3 \cdot 3^{k} - 1$$

$$= 2 \cdot 3^{1} \cdot 3^{k} - 1$$

$$= 2 \cdot 3^{k+1} - 1$$

Pernyataan terakhir sama dengan pernyataan (ii). Jadi pernyataan (ii) terbukti kebenarannya.

$$1 + 4\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} 3^{\mathrm{i}-1} = 2 \cdot 3^{n} - 1, benar\ untuk\ setiap\ n\ bilangan\ asli, n \geq 2$$

Rotasi segiempat bercabang n-segiempat sejauh $\frac{360^{0} \cdot k}{4}$; $k = 1, 3$ menghasilkan permutasi dalam bentuk sikel yaitu untuk:

$n = 1$ banyaknya sikel adalah 4

$n = 2$ banyaknya sikel adalah 13

$n = 3$ banyaknya sikel adalah 40

Secara umum banyak sikel untuk rotasi sejauh 90^0 dan 270^0 dari segiempat bercabang n-segiempat sejauh $\frac{360^0 \cdot k}{4}$, $k = 1, 3$ adalah $\frac{banyak\ \ titik}{4}$ atau $\frac{1}{2}(3^{n+1} - 1)$sikel.

Sifat 10

Banyaknya sikel rotasi 90^0 dan 270^0 dari segiempat bercabang n-segiempat, n bilangan asli adalah sebanyak $\frac{1}{2}(3^{n+1} - 1)$ sikel.

Bukti:

Diketahui:

$$i = 1 \ \rightarrow 4 = 4$$

$$i = 2 \ \rightarrow 13 = 4 + 3^2$$

$$i = 3 \ \rightarrow 40 = 4 + 3^2 + 3^3$$

$$\vdots$$

$$i = n \ \rightarrow \ 4 + 3^2 + 3^3 + \cdots 3^n$$

$$\rightarrow 4 + \sum_{i=2}^{n} 3^i$$

Akan dibuktikan bahwa:

$$4 + \sum_{i=2}^{n} 3^i = \frac{1}{2}(3^{n+1} - 1), untuk\ setiap\ n\ bilangan\ asli, n \geq 2$$

Bukti dengan menggunakan induksi matematika, yaitu:

Untuk $n = 1$ maka banyaknya rotasi = 4

$$\frac{1}{2}(3^{1+1} - 1) = \frac{1}{2}(9 - 1) = 4 \qquad \text{benar}$$

Untuk $n = 2$ dan seterusnya maka banyaknya sikel rotasi adalah:

$$4+\sum_{i=2}^{n} 3^{i}$$

Sehingga untuk $n = 2 \longrightarrow 4 + 3^2 = \frac{1}{2}(3^{2+1} - 1)$

$13 = 13$ benar

Anggap benar untuk $n = k$ yaitu:

$$4+\sum_{i=2}^{k} 3^{i} = \frac{1}{2}(3^{k+1} - 1) \quad \ldots (i)$$

Akan dibuktikan pernyataan benar untuk $n = k + 1$ yaitu:

$$4+\sum_{i=2}^{k+1} 3^{i} = \frac{1}{2}(3^{k+1+1} - 1)$$

$$4+\sum_{i=2}^{k+1} 3^{i} = \frac{1}{2}(3^{k+2} - 1) \quad \ldots (ii)$$

Pernyataan (i):

$$4+\sum_{i=2}^{k} 3^{i} = \frac{1}{2}(3^{k+1} - 1); masing - masing\ ruas\ ditambah\ 3^{k+1}$$

$$4+\sum_{i=2}^{k} 3^{i} + 3^{k+1} = \frac{1}{2}(3^{k+1} - 1) + 3^{k+1}$$

$$4+\sum_{i=2}^{k+1} 3^{i} = \frac{1}{2}(3^{k+1} + 2 \cdot 3^{k+1} - 1)$$

$$= \frac{1}{2}(3 \cdot 3^{k+1} - 1)$$

$$= \frac{1}{2}(3^{1} \cdot 3^{k+1} - 1)$$

$$= \frac{1}{2}(3^{k+2} - 1)$$

Pernyataan terakhir sama dengan pernyataan (ii). Jadi pernyataan (ii) terbukti kebenarannya.

$$4 + \sum_{i=2}^{n} 3^i = \frac{1}{2}(3^{n+1} - 1), benar\ untuk\ setiap\ n\ bilangan\ asli, n \geq 2$$

Untuk rotasi segiempat bercabang n-segiempat sejauh $\frac{360^0 \cdot k}{4}$; $k = 2$ menghasilkan permutasi dalam bentuk sikel yaitu untuk:

$n = 1$ banyaknya sikel adalah 8

$n = 2$ banyaknya sikel adalah 26

$n = 3$ banyaknya sikel adalah 80

Secara umum banyak sikel untuk rotasi segiempat bercabang n-segiempat sejauh $\frac{360^0 \cdot k}{4}$, $k = 2$ adalah $\frac{ban\, yak\ \ titik}{2}$ atau $3^{n+1} - 1$ sikel.

Sifat 11

Banyaknya sikel rotasi 180^0 dari segiempat bercabang n-segiempat, n bilangan asli adalah sebanyak $3^{n+1} - 1$ sikel.

Bukti:

Diketahui:

$$i = 1 \rightarrow \ 8 = 2 + \ 2 \cdot 3^1$$

$$i = 2 \rightarrow 26 = 2 + \ 2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^2$$

$$i = 3 \rightarrow 80 = 2 + \ 2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^3$$

$$\vdots$$

$$i = n \rightarrow 2 + 2 \sum_{i=1}^{n} 3^i$$

Akan dibuktikan bahwa:

$$2+2\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} 3^{\mathrm{i}} = 3^{n+1}-1, untuk\ n\ bilangan\ asli$$

Bukti dengan menggunakan induksi matematika, yaitu:

Untuk $n = 1 \rightarrow 2 + 2 \cdot 3^1 = 3^{1+1} - 1$

$$8 = 8 \qquad \text{benar}$$

Anggap benar untuk $n = k$ yaitu

$$2+2\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{k}} 3^{\mathrm{i}} = 3^{k+1}-1 \qquad \dots(i)$$

Akan dibuktikan pernyataan benar untuk $n = k + 1$ yaitu:

$$2+2\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{k+1}} 3^{\mathrm{i}} = 3^{k+1+1}-1$$

$$2+2\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{k+1}} 3^{\mathrm{i}} = 3^{k+2}-1 \qquad \dots(ii)$$

Pernyataan (i):

$$2+2\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{k}} 3^{\mathrm{i}} = 3^{k+1}-1, masing-masing\ ruas\ ditambah\ 2\cdot 3^{k+1}$$

$$2+2\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{k}} 3^{\mathrm{i}} + 2\cdot 3^{k+1} = 3^{k+1}-1+2\cdot 3^{k+1}$$

$$2+2\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{k+1}} 3^{\mathrm{i}} = 3\cdot 3^{k+1}-1$$

$$= 3^1\cdot 3^{k+1}-1$$

$$= 3^{k+2}-1$$

Pernyataan terakhir sama dengan pernyataan (ii). Jadi pernyataan (ii) terbukti kebenarannya.

$$2 + 2\sum_{i=1}^{n} 3^{i} = 3^{n+1} - 1, benar\ untuk\ n\ bilangan\ asli$$

Sedangkan untuk rotasi segiempat bercabang n-segiempat sejauh $\frac{360^{0} \cdot k}{4}$; $k = 4$ menghasilkan permutasi dalam bentuk sikel yaitu untuk:

$n = 1$ banyaknya sikel adalah 16

$n = 2$ banyaknya sikel adalah 52

$n = 3$ banyaknya sikel adalah 160

Secara umum banyak sikel untuk rotasi segiempat bercabang n-segiempat sejauh $\frac{360^{0} \cdot k}{4}$, $k = 4$ adalah $2(3^{n+1} - 1)$ sikel.

Sifat 12

Banyaknya titik sudut dari segiempat bercabang n-segiempat, n bilangan asli adalah sebanyak $2(3^{n+1} - 1)$ titik sudut.

Bukti:

Diketahui:

$$i = 1 \rightarrow 16 = 4 + 4(3^{1})$$

$$i = 2 \rightarrow 52 = 4 + 4(3^{1}) + 4(3^{2})$$

$$i = 3 \rightarrow 160 = 4 + 4(3^{1}) + 4(3^{2}) + 4(3^{3})$$

$$\vdots$$

$$i = n \rightarrow 4 + 4\sum_{i=1}^{n} 3^{i}$$

Akan dibuktikan bahwa:

$$4+4\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} 3^{\mathrm{i}} = 2(3^{n+1}-1), untuk\ setiap\ n\ bilangan\ asli.$$

Bukti dengan menggunakan induksi matematika, yaitu:

Untuk $n = 1 \ \longrightarrow\ 4+4\cdot\ 3^1 = 2(3^{1+1}-1)$

$$16 = 16 \quad \text{benar}$$

Anggap benar untuk $n = k$ yaitu:

$$4+4\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{k}} 3^{\mathrm{i}} = 2(3^{k+1}-1) \qquad \dots(i)$$

Akan dibuktikan pernyataan benar untuk $n = k+1$ yaitu:

$$4+4\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{k+1}} 3^{\mathrm{i}} = 2(3^{k+1+1}-1)$$

$$4+4\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{k+1}} 3^{\mathrm{i}} = 2(3^{k+2}-1) \qquad \dots(ii)$$

Pernyataan (i):

$$4+4\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{k}} 3^{\mathrm{i}} = 2(3^{k+1}-1), masing-masing\ ruas\ ditambah\ 4(3^{k+1})$$

$$4+4\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{k}} 3^{\mathrm{i}} + 4(3^{k+1}) = 2(3^{k+1}-1)+4(3^{k+1})$$

$$4+4\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{k+1}} 3^{\mathrm{i}} \ = 2(3^{k+1}-1+2\cdot 3^{k+1})$$

$$= 2(2\cdot 3^{k+1}-1$$

$$= 2(2^1\cdot 3^{k+1}-1)$$

$$= 2(3^{k+1+1} - 1)$$

$$= 2(3^{k+2} - 1)$$

Pernyataan terakhir sama dengan pernyataan (ii). Jadi pernyataan (ii) terbukti kebenarannya.

$$4 + 4\sum_{i=1}^{n} 3^{i} = 2(3^{n+1} - 1), benar\ untuk\ setiap\ n\ bilangan\ asli.$$

Refleksi segiempat bercabang n-segiempat terhadap garis S_1 dan S_2 menghasilkan permutasi dalam bentuk sikel untuk:

$n = 1$ sebanyak 6 sikel

$n = 2$ sebanyak 23 sikel

$n = 3$ sebanyak 76 sikel.

Secara umum banyak sikel untuk refleksi segiempat bercabang n-segiempat terhadap S_1 dan S_2 adalah $\frac{banyak\ \ titik\ -(2n+2)}{2}$ atau $3^{n+1} - n - 2$ sikel.

Sifat 13

Banyaknya sikel refleksi terhadap sumbu S_1 dan S_2 dari segiempat bercabang n-segiempat, n bilangan asli adalah sebanyak $3^{n+1} - n - 2$ sikel.

Bukti:

Diketahui:

$$i = 1 \rightarrow \ \ 6 = 6$$

$$i = 2 \ \rightarrow 23 = 6 + (2 \cdot 3^2 - 1)$$

$$i = 3 \ \rightarrow 76 = 6 + (2 \cdot 3^2 - 1) + (2 \cdot 3^3 - 1)$$

$$\vdots$$

$$i = n \rightarrow 6 + \sum_{\mathrm{i}=2}^{\mathrm{n}} (2 \cdot 3^{\mathrm{i}} - 1)$$

Akan dibuktikan bahwa:

$$6 + \sum_{\mathrm{i}=2}^{\mathrm{n}} (2 \cdot 3^{\mathrm{i}} - 1) = 3^{n+1} - n - 2, benar\ untuk\ setiap\ n\ bilangan\ asli, n \geq 2$$

Bukti dengan menggunakan induksi matematika, yaitu:

Untuk $n = 1$, banyak sikel refleksi terhadap sumbu S_1 dan S_2 adalah 6

$$3^{1+1} - 1 - 2 = 3^2 - 3 = 9 - 3 = 6 \qquad \text{benar}$$

Untuk $n = 2$, dan seterusnya maka banyaknya sikel refleksi terhadap sumbu S_1 dan S_2 pada segiempat bercabang n-segiempat adalah

$$6 + \sum_{\mathrm{i}=2}^{\mathrm{n}} (2 \cdot 3^{\mathrm{i}} - 1)$$

Sehingga untuk $n = 2 \rightarrow 6 + (2 \cdot 3^2 - 1) = 3^3 - 2 - 2$

$$23 = 23 \qquad \text{benar}$$

Anggap benar untuk $n = k$ yaitu

$$6 + \sum_{\mathrm{i}=2}^{\mathrm{k}} (2 \cdot 3^{\mathrm{i}} - 1) = 3^{k+1} - k - 2 \qquad \ldots (i)$$

Akan dibuktikan pernyataan benar untuk $n = k + 1$ yaitu:

$$6 + \sum_{\mathrm{i}=2}^{\mathrm{k+1}} (2 \cdot 3^{\mathrm{i}} - 1) = 3^{k+1+1} - (k + 1) - 2$$

$$6 + \sum_{\mathrm{i}=2}^{\mathrm{k+1}} (2 \cdot 3^{\mathrm{i}} - 1) = 3^{k+2} - k - 3 \qquad \ldots (ii)$$

Pernyataan (i):

$$6+\sum_{i=2}^{k}(2\cdot 3^{i}-1)=3^{k+1}-n-2\,; masing-masing\ ruas\ ditambah\ (2\cdot 3^{k+1}-1)$$

$$6+\sum_{i=2}^{k}(2\cdot 3^{i}-1)+(2\cdot 3^{k+1}-1)=3^{k+1}-k-2+(2\cdot 3^{k+1}-1)$$

$$6+\sum_{i=2}^{k+1}(2\cdot 3^{i}-1)\ =3\cdot 3^{k+1}-k-3$$

$$=3^{1}\cdot 3^{k+1}-k-3$$

$$=3^{k+2}-k-3$$

Pernyataan terakhir sama dengan pernyataan (ii). Jadi pernyataan (ii) terbukti kebenarannya.

$$6+\sum_{i=2}^{n}(2\cdot 3^{i}-1)=3^{n+1}-n-2, benar\ untuk\ setiap\ n\ bilangan\ asli, n\geq 2$$

Refleksi segiempat bercabang n-segiempat terhadap garis S_3 dan S_4 menghasilkan permutasi dalam bentuk sikel untuk:

$n=1$ sebanyak 8 sikel

$n=2$ sebanyak 26 sikel

$n=3$ sebanyak 80 sikel.

Secara umum banyak sikel untuk refleksi segiempat bercabang n-segiempat terhadap S_3 dan S_4 adalah $\frac{banyak\ \ titik}{2}$ atau $3^{n+1}-1$ sikel.

Sifat 14

Banyaknya sikel refleksi terhadap sumbu S_3 dan S_4 dari segiempat bercabang n-segiempat, n bilangan asli adalah sebanyak $3^{n+1}-1$ sikel.

Bukti:

Diketahui:

$$i = 1 \;\rightarrow\; 8 = 2 + \; 2 \cdot 3^1$$

$$i = 2 \;\rightarrow 26 = 2 + \; 2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^2$$

$$i = 3 \;\rightarrow 80 = 2 + \; 2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^3$$

$$\vdots$$

$$i = n \;\rightarrow 2 + 2 \sum_{i=1}^{n} 3^i$$

Akan dibuktikan bahwa:

$$2 + 2 \sum_{i=1}^{n} 3^i = 3^{n+1} - 1, \mathit{untuk\ setiap\ n\ bilangan\ asli}$$

Bukti dengan menggunakan induksi matematika, yaitu:

Untuk $n = 1 \rightarrow 2 + 2 \cdot 3^1 = 3^{1+1} - 1$

$8 = 8$ benar

Anggap benar untuk $n = k$ yaitu

$$2 + 2 \sum_{i=1}^{k} 3^i = 3^{k+1} - 1 \qquad \ldots (i)$$

Akan dibuktikan pernyataan benar untuk $n = k + 1$ yaitu:

$$2 + 2 \sum_{i=1}^{k+1} 3^i = 3^{k+1+1} - 1$$

$$2 + 2 \sum_{i=1}^{k+1} 3^i = 3^{k+2} - 1 \qquad \ldots (ii)$$

Pernyataan (i):

$$2 + 2\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{k}} 3^{\mathrm{i}} = 3^{k+1} - 1, masing - masing\ ruas\ ditambah\ 2 \cdot 3^{k+1}$$

$$2 + 2\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{k}} 3^{\mathrm{i}} + 2 \cdot 3^{k+1} = 3^{k+1} - 1 + 2 \cdot 3^{k+1}$$

$$2 + 2\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{k}+1} 3^{\mathrm{i}} = 3 \cdot 3^{k+1} - 1$$

$$= 3^1 \cdot 3^{k+1} - 1$$

$$= 3^{k+2} - 1$$

Pernyataan terakhir sama dengan pernyataan (ii). Jadi pernyataan (ii) terbukti kebenarannya.

$$2 + 2\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} 3^{\mathrm{i}} = 3^{n+1} - 1, benar\ untuk\ n\ bilangan\ asli$$

Pola umum rotasi sejauh 90^0 dan 270^0 dari segiempat bercabang n-segiempat adalah banyaknya $\frac{banyak\ \ titik}{4}$ dimana 4 menunjukkan bahwa suatu segiempat mempunyai 4 titik sudut, sedangkan permutasi dalam bentuk sikelnya dihasilkan dari perputaran posisi 4 titik sudut suatu segiempat. Jadi banyaknya sikel pada rotasi segiempat bercabang n-segiempat adalah $\frac{banyak\ \ titik}{4}$. Untuk pola umum rotasi sejauh 180^0 dari segiempat bercabang n-segiempat adalah banyaknya $\frac{banyak\ \ titik}{2}$. Sedangkan untuk pola umum rotasi sejauh 360^0 dari segiempat bercabang n-segiempat adalah banyaknya $2(3^{\mathrm{n}+1} - 1)$.

Pola umum refleksi segiempat bercabang n-segiempat dimana pada segiempat terdapat 4 refleksi yaitu refleksi terhadap garis S_1, S_2, S_3 dan S_4. Untuk refleksi terhadap garis S_1 dan S_2 pola umumnya adalah $\frac{banyak\ \ titik\ -(2n+2)}{2}$ dimana 2n menunjukkan bahwa pada setiap satu cabang, sumbu simetri akan melalui 2 titik sudut cabang dari segiempat. Sedangkan 2 menunjukkan bahwa titik yang dilalui sumbu simetri pada segiempat. Jadi pola umum banyaknya sikel pada refleksi terhadap garis S_1 dan S_2 segiempat bercabang n-segiempat adalah $\frac{banyak\ \ titik\ -(2n+2)}{2}$.

Dan untuk refleksi terhadap garis S3 dan S4 pola umumnya adalah $\frac{banyak\ \ titik}{2}$ dimana S_3 dan S_4 tersebut merupakan sumbu simetri lipat pada segiempat yang membagi segiempat menjadi 2 bagian yang sama yang melalui suatu titik tengah antara 2 titik sudut. Jadi pola umum banyaknya sikel pada refleksi terhadap garis S_1 dan S_2 segiempat bercabang n-segiempat adalah $\frac{banyak\ \ titik}{2}$.

3.2.5 Isomorfisme Subgrup Simetri dari Segiempat Bercabang n-Segiempat $(\mathbf{G_4},\circ)$ dengan Grup Dihedral-8 $(\mathbf{D_8},\circ)$

Misalkan G_4 adalah subgrup dari himpunan simetri dari bidang segiempat beraturan bercabang n-segiempat beraturan. Ternyata anggota G_4 ini meliputi simetri putar (rotasi) dan simetri lipat (refleksi). D_8 adalah grup dihedral-6 dengan operasi komposisi. $(D_8,\circ)$ dan $(G_4,\circ)$ merupakan grup dimana

$D_8 = \{r, r^2, r^3, 1, s, sr, sr^2, sr^3\}$ dan $G_4 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}$ dengan:

$\alpha_1 =$ rotasi sejauh 90^0 searah dengan jarum jam

$\alpha_2 =$ rotasi sejauh 180^0 searah dengan jarum jam

$\alpha_3 =$ rotasi sejauh 270^0 searah dengan jarum jam

$\alpha_4 =$ rotasi sejauh 360^0 searah dengan jarum jam

β_1 = refleksi terhadap sumbu S_1

β_2 = refleksi terhadap sumbu S_2

β_3 = refleksi terhadap sumbu S_3

β_4 = refleksi terhadap sumbu S_4

Dalam hal ini $(G_4,\circ)$ isomorfik dengan $(D_8,\circ)$ karena ada korespondensi satu-satu dari $G_4 \rightarrow D_8$ sehingga dapat dibuat teorema sebagai berikut:

Teorema 2

Misalkan G_4 adalah subgrup dari himpunan simetri dari bidang segiempat beraturan bercabang n-segiempat beraturan dan D_8 adalah grup dihedral-8 maka $(G_4,\circ) \cong (D_8,\circ)$.

Bukti:

G_4 adalah subgrup dari himpunan simetri dari bidang segitiga beraturan bercabang n-segitiga beraturan, dimana $\mathrm{G}_4 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ dengan:

α_1 = rotasi sejauh 90^0 searah dengan jarum jam

$= (1234)\ (5678) \ldots (\ldots) = 3^{n+1} - 1$

α_2 = rotasi sejauh 180^0 searah dengan jarum jam

$= (1\ 3)(2\ 4) \ldots (\ldots) = \frac{1}{2}(3^{n+1} - 1)$

α_3 = rotasi sejauh 270^0 searah dengan jarum jam

$= (1\ 4\ 3\ 2)(5\ 8\ 7\ 6) \ldots (\ldots) = 3^{n+1} - 1$

α_4 = rotasi sejauh 360^0 searah dengan jarum jam

$= (1)\ (2)\ (3)\ (4) \ldots (\ldots) = 2(3^{n+1} - 1)$

β_1 = refleksi terhadap sumbu S_1

$= (1)(2\ 4) \ldots (\ldots) = 3^{n+1} - n - 2$

β_2 = refleksi terhadap sumbu S_2

$= (1\ 3)(2) \dots (\dots) = 3^{n+1} - n - 2$

β_3 = refleksi terhadap sumbu S_3

$= (1\ 4)(2\ 3) \dots (\dots) = 3^{n+1} - 1$

β_4 = refleksi terhadap sumbu S_4

$= (1\ 2)(3\ 4) \dots (\dots) = 3^{n+1} - 1$

Himpunan permutasi dari rotasi dan refleksi diatas membentuk grup dengan operasi komposisi yang dinyatakan dalam bentuk tabel cayley berikut:

Tabel 3.3: Tabel Cayley Grup Permutasi dari Segiempat Bercabang n-Segiempat

$\circ$	α_1	α_2	α_3	α_4	β_1	β_2	β_3	β_4
α_1	α_2	α_3	α_4	α_1	β_4	β_3	β_1	β_2
α_2	α_3	α_4	α_1	α_2	β_3	β_4	β_2	β_1
α_3	α_4	α_1	α_2	α_3	β_2	β_1	β_4	β_3
α_4	α_1	α_2	α_3	α_4	β_1	β_2	β_3	β_4
β_1	β_3	β_2	β_4	β_1	α_4	α_2	α_1	α_3
β_2	β_4	β_1	β_3	β_2	α_2	α_4	α_3	α_1
β_3	β_2	β_4	β_1	β_3	α_3	α_1	α_4	α_2
β_4	β_1	β_3	β_2	β_4	α_1	α_3	α_2	α_4

Dari tabel cayley diatas dapat kita ketahui bahwa:

1. Operasi $\circ$ bersifat tertutup
2. Operasi $\circ$ bersifat assosiatif
3. G punya identitas terhadap operasi $\circ$ yaitu α_4
4. Setiap unsur di G punya invers terhadap operasi $\circ$ yaitu:

$\alpha_4^{-1} = \alpha_4$ $\alpha_2^{-1} = \alpha_2$ $\beta_1^{-1} = \beta_1$ $\beta_3^{-1} = \beta_3$

$\alpha_1^{-1} = \alpha_3$ $\alpha_3^{-1} = \alpha_1$ $\beta_2^{-1} = \beta_2$ $\beta_4^{-1} = \beta_4$

$D_8 = \{r, r^2, r^3, 1, s, sr, sr^2, sr^3\}$, dan ($D_8$,$\circ$) juga merupakan grup

Grup dihedral-6 dapat disajikan dalam bentuk tabel sebagai berikut:

Tabel 3.4: Tabel Cayley Grup Dihedral-8

$\circ$	r	r^2	r^3	1	s	sr	sr^2	sr^3
r	r^2	r^3	1	r	s	sr	sr^2	sr^3
r^2	r^3	1	r	r^2	sr^3	s	sr	sr^2
r^3	1	r	r^2	r^3	sr^2	sr^3	s	sr
1	r	r^2	r^2	r^3	sr	sr^2	sr^3	s
s	sr	sr^2	sr^3	s	1	r	r^2	r^3
sr	sr^2	sr^3	s	sr	r^3	1	r	r^2
sr^2	sr^3	s	sr	sr^2	r^2	r^3	1	r
sr^3	s	sr	sr^2	sr^3	r	r^2	r^3	1

Untuk menentukan isomorfisme, maka dibentuk pemetaan $\varphi : (G_4,\circ) \rightarrow (D_8,\circ)$ dengan didefinisikan sebagai berikut:

$\varphi(\alpha_1) = r$ atau dapat dikatakan bahwa α_1 pada grup permutasi segiempat bercabang 1-segiempat berkorespondensi satu-satu dengan r pada grup dihedral-8. Untuk selanjutnya pernyataan tersebut dinyatakan dengan:

$$(G_4,\circ) \approx (D_8,\circ)$$

$\varphi(\alpha_1) = r$	atau	$\alpha_1 \leftrightarrow r$
$\varphi(\alpha_2) = r^2$	atau	$\alpha_2 \leftrightarrow r^2$
$\varphi(\alpha_3) = r^3$	atau	$\alpha_3 \leftrightarrow r^3$
$\varphi(\alpha_4) = 1$	atau	$\alpha_4 \leftrightarrow 1$
$\varphi(\beta_1) = s$	atau	$\beta_1 \leftrightarrow s$
$\varphi(\beta_2) = sr$	atau	$\beta_2 \leftrightarrow sr$
$\varphi(\beta_3) = sr^2$	atau	$\beta_3 \leftrightarrow sr^2$
$\varphi(\beta_4) = sr^2$	atau	$\beta_4 \leftrightarrow sr^2$

Jadi terbukti bahwa grup G_4 isomorfik dengan grup D_8, karena ada isomorfisme dari G_4 ke D_8.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasar pembahasan pada bab sebelumnya, maka dapat disimpulkan :

1. Pola banyaknya titik sudut terluar pada bidang beraturan cabang-n:
   a). Untuk himpunan simetri dari segitiga bercabang n-segitiga adalah $3 \cdot 2^n$ titik sudut, untuk n bilangan asli
   b). Untuk himpunan simetri dari segiempat bercabang n-segiempat adalah $4 \cdot 3^n$ titik sudut, untuk n bilangan asli
2. Pola banyaknya titik sudut pada bidang beraturan cabang-n:
   a). Untuk himpunan simetri dari segitiga bercabang n-segitiga adalah $3(2^{n+1} - 1)$ titik sudut, untuk n bilangan asli
   b). Untuk himpunan simetri dari segiempat bercabang n-segiempat adalah $2(3^{n+1} - 1)$ titik sudut, untuk n bilangan asli
3. Pola banyaknya bidang beraturan (segitiga dan segiempat) pada bidang beraturan cabang-n:
   a). Untuk himpunan simetri dari segitiga bercabang n-segitiga adalah $3 \cdot 2^n - 2$ segitiga untuk n bilangan asli
   b). Untuk himpunan simetri dari segiempat bercabang n-segiempat adalah $2 \cdot 3^n - 1$ segiempat, untuk n bilangan asli
4. Pola banyaknya sikel rotasi dan refleksi grup simetri dari bidang beraturan cabang-n:

a). Untuk himpunan simetri dari segitiga bercabang n-segitiga dengan rotasi sejauh 120^0 dan 240^0 adalah $2^{n+1}-1$ sikel, untuk n bilangan asli, sedangkan dengan rotasi sejauh 360^0 adalah $3(2^{n+1}-1)$ sikel, untuk n bilangan asli. Sedangkan untuk refleksi terhadap sumbu S_1, S_2, dan S_3 adalah $3 \cdot 2^n - 2$ sikel, untuk n bilangan asli.

b). Untuk himpunan simetri dari segiempat bercabang n-segiempat dengan rotasi sejauh 90^0 dan 270^0 adalah $\frac{1}{2}(3^{n+1}-1)$ sikel, untuk n bilangan asli, dengan rotasi sejauh 180^0 adalah $3^{n+1}-1$ sikel, untuk n bilangan asli, dan dengan rotasi sejauh 360^0 adalah $2(3^{n+1}-1)$ sikel, untuk n bilangan asli. Sedangkan untuk refleksi terhadap sumbu S_1 dan S_2 adalah $3^{n+1}-n-2$ sikel, untuk n bilangan asli dan untuk refleksi terhadap sumbu S_3 dan S_4 adalah $3^{n+1}-1$ sikel, untuk n bilangan asli.

5. Isomorfisme subgrup simetri dari bidang beraturan cabang-n dengan grup dihedral adalah adanya korespondensi satu-satu dari anggota himpunan subgrup simetri ke anggota grup dihedral, yaitu:

a). Untuk subgrup simetri segitiga bercabang n-segitiga adalah α_1(rotasi sejauh 120^0) berkorespondensi dengan r, α_2 (rotasi sejauh 240^0) berkorespondensi dengan r^2, α_3 (rotasi sejauh 360^0) berkorespondensi dengan r^3, sehingga subgrup simetri dari segitiga bercabang n-segitiga isomorfik dengan grup dihedral-6 ($G_3 \cong D_6$).

b). Untuk subgrup simetri segiempat bercabang n-segiempat adalah α_1 (rotasi sejauh 90^0) berkorespondensi dengan r, α_2 (rotasi sejauh 180^0) berkorespondensi dengan r^2, α_3 (rotasi sejauh 270^0) berkorespondensi dengan r^3, α_4 (rotasi sejauh 360^0) berkorespondensi dengan r^4 sehingga subgrup simetri dari segiempat bercabang n-segiempat isomorfik dengan grup dihedral-8 ($G_4 \cong D_8$).

4.2 Saran

Dari penelitian ini, masih perlu adanya pengembangan keilmuan, sehingga peneliti selanjutnya diharapkan dapat lebih mengembangkan pada bidang beraturan selain pada segitiga dan segiempat serta membuatkan programnya baik gambar maupun perhitungannya.

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir. 2007. *Ketika Kiai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press

Arifin, Achmad. 2000. *Aljabar*. Bandung : ITB Bandung

Bartle, Robert G. and Sherbert, Donald R. 2000. *Introduction to Real Analysis (third edition)*. USA: John Wiley and Sons.

Dummit, David S. dan Foote, Richard M. 1991. *Abstract Algebra*. New Jersey: Prentice-Hall, Inc

Herstein, I. N. 1975. *Topiccs in Algebra*. New york: John Wiley & Sons.

Muhsetyo, Gatot. 1991. *Pengantar Struktur Aljabar*. Malang: IKIP Malang

Purwanto, Agus. 2008. *Ayat-ayat Semesta*. Bandung: Mizan

Rahman, Afzalur. 1992. *Al-Qur'an Sumber Ilmu Pengetahuan*. Jakarta: Rineka Cipta.

Raisinghania, M. D dan Aggarwal, R. S. 1980. *Modern Algebra*. New Delhi: Ram Nagar

Sulandra, I Made. 1996. *Struktur Aljabar I (Edisi Revisi)*. Malang: IKIP Malang

Whitelaw, Thomas A., 1995. *Introduction to Abstract Algebra*. London: Blackie Academic And Profesional