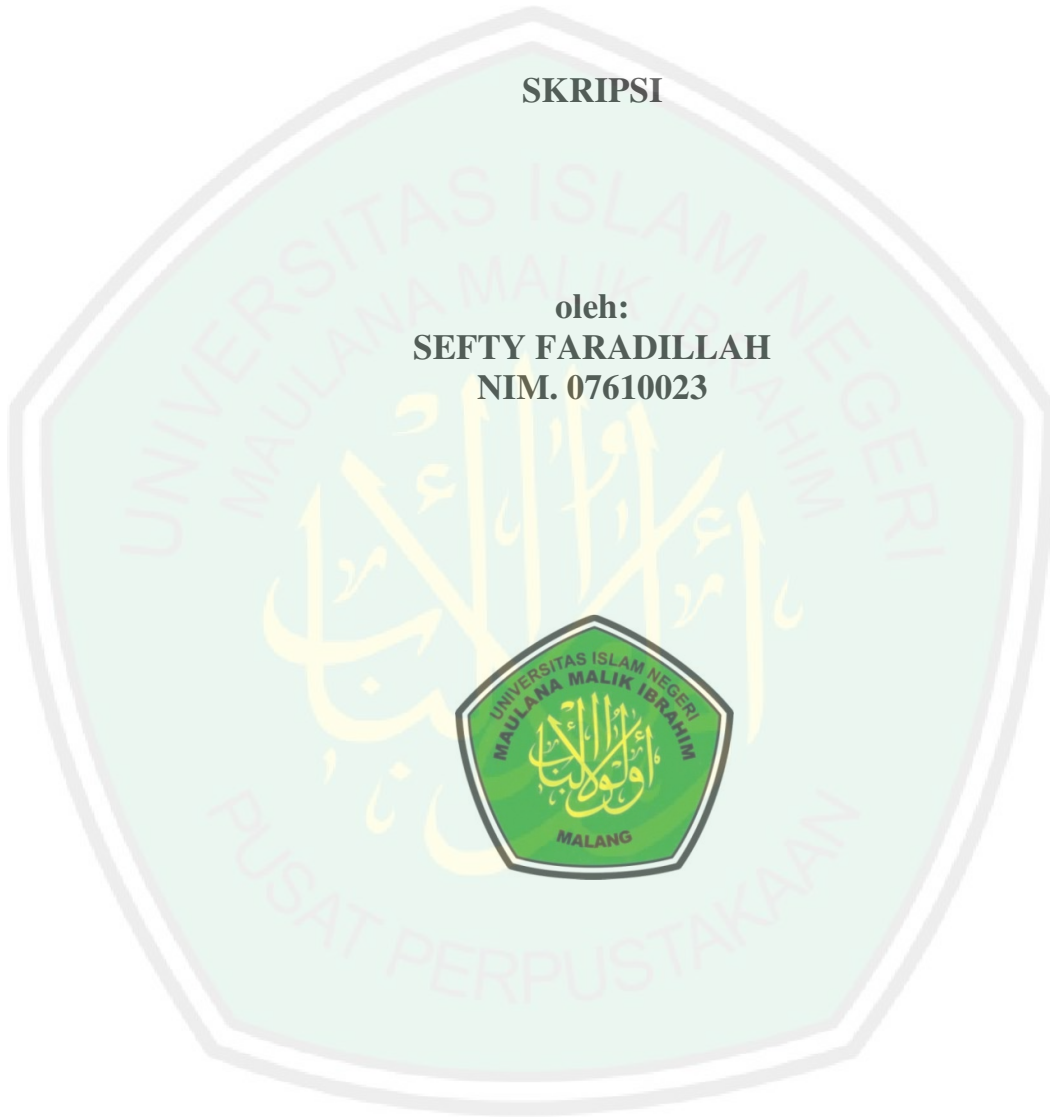


**ANALISIS PERSAMAAN HELMHOLTZ
PADA KOORDINAT KARTESIAN**

SKRIPSI

oleh:
SEFTY FARADILLAH
NIM. 07610023



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2011**

**ANALISIS PERSAMAAN HELMHOLTZ
PADA KOORDINAT KARTESIAN**

SKRIPSI

Diajukan kepada:
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

oleh:
SEFTY FARADILLAH
NIM. 07610023

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2011**

**ANALISIS PERSAMAAN HELMHOLTZ
PADA KOORDINAT KARTESIAN**

SKRIPSI

oleh:
SEFTY FARADILLAH
NIM. 07610023

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji:
Tanggal, 20 Agustus 2011

Dosen Pembimbing I

Dosen Pembimbing II

Ari Kusumastuti, S.Si., M.Pd
NIP.19770521 200501 2 004

Abdul Aziz, M.Si
NIP. 19760318 200604 1 002

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP.19751006 200312 1 001

ANALISIS PERSAMAAN HELMHOLTZ PADA KOORDINAT KARTESIAN

SKRIPSI

oleh:
SEFTY FARADILLAH
NIM. 07610023

Telah dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Telah Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal: 13 September 2011

Susunan Dewan Penguji		Tanda Tangan
Penguji Utama	: <u>Usman Pagalay, M.Si</u> NIP. 19650414 200312 1 001	()
Ketua Penguji	: <u>Hairur Rahman, S.Pd, M.Si</u> NIP. 19800429 200604 1 003	()
Sekretaris Penguji	: <u>Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd</u> NIP. 19770521 200501 2 004	()
Anggota Penguji	: <u>Abdul Aziz, M.Si</u> NIP. 19760318 200604 1 002	()

Mengetahui dan Mengesahkan
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertandatangan di bawah ini:

Nama : Sefty Faradillah

NIM : 07610023

Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika

Judul Penelitian : Analisis Persamaan Helmholtz pada Koordinat Kartesian

Menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa hasil penelitian saya ini tidak terdapat unsur-unsur penjiplakan karya penelitian atau karya ilmiah yang pernah dilakukan atau dibuat oleh orang lain, kecuali yang secara tertulis dikutip dalam naskah ini dan disebutkan dalam sumber kutipan dan daftar pustaka. Apabila ternyata hasil penelitian ini terbukti terdapat unsur-unsur jiplakan, maka saya bersedia untuk mempertanggung jawabkan, serta diproses sesuai peraturan yang berlaku.

Malang, 20 Agustus 2011
Yang Membuat Pernyataan

Sefty Faradillah
NIM. 07610023

MOTTO

Sebebas **ANGIN**,
Semanfaat **UDARA**,
Sejernih **AIR**.

Makna:

*Sebebas angin berbuat apapun tapi perbuatan itu harus
bermanfaat semanfaat udara bagi makhluk hidup tanpa
melupakan jernihnya air yaitu kejujuran*

PERSEMBAHAN



Untuk:

*Kedua orang tua, Bapak Mohammad Ali dan Ibu Juwairiyah
Serta Paman Nasrullah*

Adik-adik tersayang:

Iqbal Idhovi, Ainol Baziroh & Raiza Inziroh

KATA PENGANTAR



Allahumma Sholli 'ala Sayyidina Muhammad wa'ala Ali Sayyidina Muhammad. Walhamdulillahirrabil'amin, Demi Allah Tuhanku, yang jiwaku di dalam kekuasaan dan pemeliharaan-Nya. Hanya kepada Engkaulah segala puja dan puji syukur kami panjatkan. Atas ridha-Mu ya Allah, skripsi ini dapat terselesaikan. Tidak lupa pula, semoga shalawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada junjungan Nabi besar Muhammad SAW yang telah membimbing ummat ke jalan yang lurus dan jalan yang diridhoi-Nya yakni agama Islam.

Penulis menyadari bahwa tulisan ini masih memiliki banyak kekurangan, namun dari kekurangan itu tidaklah membuat penulis menjadi jera untuk terus berkarya. Berkarya merupakan bukti bahwa hidup tidaklah sia-sia dan berkarya akan menjadikan kita ada dalam goretan peradaban manusia. Tidak ada gading yang tidak retak, tapi retaknya gading tetap memiliki makna.

Selain itu, penulis juga menyadari bahwa terselesaikannya penyusunan skripsi ini yang disusun untuk memenuhi salah satu persyaratan guna memperoleh gelar strata satu Sarjana Sains (S.Si) adalah berkat bantuan dari berbagai pihak. Pada lembar istimewa ini, penulis menghaturkan terima kasih kepada :

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.

2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, S.U, D.Sc selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Ari Kusumastuti, M.Pd sebagai pembimbing I dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Atas bimbingan, arahan, saran, motivasi dan kesabarannya, sehingga penulis dapat menyelesaikan ini dengan baik, penulis sampaikan *Jazakumullah Ahsanal Jaza'*.
5. Abdul Aziz, M.Si sebagai pembimbing II dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Atas bimbingan, arahan, saran, motivasi dan kesabarannya, sehingga penulis dapat menyelesaikan ini dengan baik, penulis sampaikan *Jazakumullah Ahsanal Jaza'*.
6. Seluruh dosen Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang, yang telah mendidik, membimbing, mengajarkan dan mencurahkan ilmu-ilmunya kepada penulis. Semoga Allah membalas amal kebbaikannya.
7. Kedua orang tua tersayang, Mohammad Ali dan Juwairiyah yang telah mencurahkan cinta dan kasih-sayang do'a, motivasi dan materi, sehingga penulis selalu optimis dalam menggapai kesuksesan hidup.
8. Adik-adik Iqbal Idhovi, Ainol Baziroh dan Raiza Inziroh tersayang yang telah memberikan dukungan, doa dan motivasi bagi penulis.

9. Teman-teman Syarifudin Yakub Uar, Lutfiatul Aini, Binti Rofikoh, Novia Nur Rahma, Oyikz, Zuhairini dan seluruh teman-teman jurusan matematika khususnya angkatan 2007 yang berjuang bersama-sama untuk mencapai kesuksesan yang diimpikan. Terimakasih atas segala pengalaman berharga dan kenangan terindah yang telah terukir.
10. Teman-teman Ma'had 05, Kost Gapika, Kost 165 dan teman SMA yang selalu memberikan semangat dan motivasi serta pengalaman berharga dan kenangan terindah yang telah terukir.
11. Semua pihak yang telah membantu dalam penyelesaian skripsi ini, yang tidak dapat disebutkan satu per satu.

Semoga karya ilmiah yang berbentuk skripsi ini dapat bermanfaat dan berguna. Akhirul kalam semoga Allah berkenan membalas kebaikan kita semua.

Amin ya Robbal 'Alamiin....

Malang, 20 Agustus 2011

Penulis



DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PENGAJUAN	ii
HALAMAN PERSETUJUAN	iii
HALAMAN PENGESAHAN	iv
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	v
MOTTO	vi
HALAMAN PERSEMBAHAN	vii
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	xi
DAFTAR GAMBAR	xiii
DAFTAR TABEL	xiv
DAFTAR SIMBOL	xv
ABSTRAK	xvi
 BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	8
1.3 Tujuan Penelitian	8
1.4 Batasan Masalah	8
1.5 Manfaat Penelitian	9
1.6 Metode Penelitian	9
1.7 Sistematika Penulisan	11
 BAB II KAJIAN TEORI	
2.1 Persamaan Diferensial Parsial Helmholtz	12
2.1.1 Analisis Teoritik dan Konstruksi Helmholtz	12
2.1.2 Analisis Besaran-besaran Helmholtz	22

2.2	Klasifikasi Helmholtz Sebagai Kasus Persamaan Diferensial Parsial.....	23
2.2.1	Persamaan Helmholtz Sebagai Diferensial Parsial Linier	26
2.2.2	Orde Persamaan Diferensial Parsial Helmholtz	27
2.2.3	Persamaan Helmholtz Sebagai Persamaan Diferensial Parsial Eliptik	29
2.3	Kaidah Umum Penyelesaian Analitik Persamaan Diferensial Parsial	34
2.4	Kaidah Umum Penyelesaian Numerik Persamaan Diferensial Parsial	43
2.5	Kajian Petir Dan Kedudukan Benda Langit Dalam Al-Qur'an	50

BAB III PEMBAHASAN

3.1	Analisis Penyelesaian Analitik Persamaan Helmholtz Pada Koordinat Kartesian.....	58
3.2	Analisis Penyelesaian Numerik Persamaan Helmholtz Pada Koordinat Kartesian	79
3.3	Komparasi Hasil Penyelesaian Analitik Dan Penyelesaian Numerik	87

BAB IV PENUTUP

4.1	Kesimpulan	89
4.2	Saran	90

DAFTAR PUSTAKA

LAMPIRAN-LAMPIRAN

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1. Arah Arus Listrik Dan Arah Gerakan Elektron 12

Gambar 2.2. Kerapatan Arus Listrik 13

Gambar 2.3. Jaringan Titik Hitung Dalam Bidang $x - y$ 46

Gambar 2.4. Metode Beda Hingga Maju Ruang dengan $h = x_{i+1} - x_i$ dan $\Delta t = t^{n+1} - t^n$ 47

Gambar 2.5. Metode Beda Hingga Mundur 48

Gambar 2.6. Metode Beda Hingga Pusat 49

Gambar 3.1. Jaringan Titik Hitung Pada Daerah Tinjauan Persamaan Helmholtz 59

Gambar 3.2. Grafik Penyelesaian Analitik Dari Persamaan Helmholtz 79

Gambar 3.3. Pola Iterasi Tiga Dimensi 80

Gambar 3.4. Pola Perhitungan Iterasi Tiga Dimensi 81

Gambar 3.5. Grafik Penyelesaian Numerik Dari Persamaan Helmholtz 86

DAFTAR TABEL

Tabel 3.1. Galat Error	87
------------------------------	----



DAFTAR SIMBOL

∇^2	: operator Laplace
I	: kuat arus listrik yang mengalir (Ampere)
q	: besarnya muatan listrik (Coulumb)
t	: waktu (detik)
J	: rapat arus (A/mm ²)
A	: luas penampang kawat (mm ²)
ΔA_n	: ukuran luas n partisi penampang
ΔI	: kuat arus n partisi
v	: volume
ρ	: rapat muatan
σ	: konduktivitas medium isotropik (mhos/m)
E	: medan listrik (volt/m)
V	: potensial scalar listrik
$\vec{J}$	: vektor rapat arus (Amp/m ²)
$\vec{E}$	: vektor kuat medan listrik (volt/m)
S	: kerapatan muatan ruang
∇V	: gradien potensial listrik ganda
$u(x_i)$	: fungsi di titik (x_i)
$u(x_{i+1})$	: fungsi di titik (x_{i+1})
$u', u'', \dots, u^n$	: turunan pertama, kedua, ..., ke n dari fungsi
Δx	: langkah ruang yaitu jarak antara (x_i) dan (x_{i+1})
$!$	: operator faktorial

ABSTRAK

Faradillah, Sefty. 2011. **Solusi Persamaan Helmholtz pada koordinat Kartesian**. Skripsi Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: (I) Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd.
(II) Abdul Aziz, M.Si.

Kata Kunci: Helmholtz, analisa analitik, analisa numerik.

Helmholtz merupakan persamaan diferensial parsial tipe eliptik yang melibatkan variabel ruang dan mempertimbangkan masalah nilai batas. Persamaan ini dapat dikonstruksikan dari teori dasar kelistrikan bumi, yaitu arus listrik diinjeksikan ke dalam bumi dengan rapat arus $\vec{j}$ maka arus yang menembus suatu elemen seluas δA adalah $\vec{j} \cdot \delta A$. Rapat arus $\vec{j}$ diketahui sebanding dengan medan listrik. Mengingat medan listrik stasioner bersifat konservatif, maka $\vec{E} = -\nabla V$ dimana V adalah potensial skalar. Dengan menggunakan prinsip kekekalan muatan pada suatu volume tertentu, dan menetapkan prinsip kontinuitas maka diperoleh hubungan $\nabla \cdot \vec{j} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$ dimana ρ rapat muatan pada suatu titik ruang kartesian x , y , dan z dari titik sumber dimana arus diinjeksikan pada bidang tiga dimensi, maka dapat menghasilkan $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = S$ yaitu persamaan Helmholtz tiga dimensi.

Penelitian ini berupaya untuk mencari penyelesaian analitik dengan menggunakan metode pemisahan variabel (*Separation of Variables*) untuk memperoleh penyelesaian khusus dan umum dan penyelesaian numerik dengan menggunakan metode beda hingga (*finite difference*) untuk menghitung di setiap titik grid dari objek sehingga mendapatkan titik grid berikutnya pada persamaan Helmholtz tiga dimensi dengan batasan $0 \leq x \leq 2\pi$, $\pi \leq y \leq 3\pi$ dan $-\pi \leq z \leq \pi$. Software MATLAB untuk program yang menjelaskan penyelesaian pada fungsi $V(x, y, z)$.

penyelesaian analitik secara umum adalah:

$$\left[a_n \sin\left(\frac{nx}{2}\right) \right] \left[2b_n i \cos\left(\frac{(2n+1)\pi y}{2^n}\right) \right] \left[2c_n i \cos\left(\frac{(2n+1)\pi z}{2^n}\right) \right] = \frac{1}{2}.$$

Sedangkan hasil komparasi penelitian pada grafik analitik dan numerik tidak akan pernah tepat sama, dari hasil keduanya menunjukkan bahwa terdapat beberapa galat error antara -0,7 sampai -3,2 pada amplitudo gelombang tiap titik grid yang sama. Besaran skalar V ini sangat bermanfaat terhadap masalah potensial listrik.

ABSTRACT

Faradillah, Sefty. 2011. **Solution of Helmholtz Equation on the Cartesian coordinate.** Thesis of Mathematics Department, Faculty of Science and Technology, State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim of Malang.
Counselors: (I) Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd.
(II) Abdul Aziz, M.Si.

Key Words: Helmholtz, analytical analysis, and numerical analysis.

Helmholtz is the elliptical type differential equation involving space variable and considering the limit value problem. This equation can be constructed from earth electricity base theory, that is, electric current injected into earth with current density of $\vec{j}$ then the current penetrating an element of δA in width is $\vec{j} \cdot \delta A$. The current density $\vec{j}$ is known as proportional to the electrical field. Considering that the stationary electrical field is conservative in nature, then $\vec{E} = -\nabla V$, in which V is scalar potential. By using the principle of charge conservation in a given volume, and establish the continuity principle then obtained correlation of $\nabla \cdot \vec{j} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$, in which ρ is charge density in a Cartesian space point x , y , and z from the source point where current injected into three-dimension plane, then it can results in $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = S$ that is the three-dimension Helmholtz equation.

This research made effort to seek the analytical solution by using separation of variables method to obtain the specific and general solutions and the numerical solution by using the finite difference method to calculate in each grid point of object until obtain the next grid point in the three-dimension Helmholtz equation with the limits of $0 \leq x \leq 2\pi$, $\pi \leq y \leq 3\pi$ and $-\pi \leq z \leq \pi$. The MATLAB software for program explaining the solution in function $V(x, y, z)$.

The generally analytical solution was:

$$\left[a_n \sin\left(\frac{nx}{2}\right) \right] \left[2b_n i \cos\frac{(2n+1)\pi y}{2^n} \right] \left[2c_n i \cos\frac{(2n+1)\pi z}{2^n} \right] = \frac{1}{2}.$$

While, the comparison results of the research on the analytical and numerical graphics would be ever precisely equal, of the both results indicated that there were error *galat* between $-0,7$ through $-3,2$ on the wave amplitude of the each of points of the same grid. This scalar magnitude V is very useful to the electrical potential problem.

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Persamaan Helmholtz mengambil nama dari Hermann von Helmholtz (1821-1894), ilmuwan Jerman yang terkenal. Persamaan ini secara alami muncul dari hukum kekekalan umum fisika dan dapat diartikan sebagai suatu persamaan gelombang untuk gelombang monokromatik (persamaan gelombang dalam domain frekuensi). Persamaan Helmholtz juga dapat diturunkan dari persamaan konduksi panas, persamaan Schrödinger, persamaan telegraf, dan persamaan gelombang. Dari sudut pandang matematika muncul masalah eigenvalue untuk operator Laplace $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ pada masalah persamaan Helmholtz ini (Anonymous, 2011:1).

Persamaan Helmholtz merupakan persamaan diferensial parsial dari tipe eliptik yang melibatkan variabel ruang dan lazimnya untuk mempertimbangkan masalah nilai batas. Kondisi batas mengikuti hukum-hukum fisika tertentu (persamaan konservasi) dirumuskan pada batas-batas domain dimana solusi diperlukan. Domain ini dapat terbatas (masalah internal) atau tak terbatas (masalah eksternal). Untuk domain yang tak terbatas, solusi harus memenuhi beberapa kondisi di tak terbatas itu. Untuk persamaan Helmholtz yang timbul sebagai transformasi dari persamaan gelombang ke dalam domain frekuensi,

kondisi batas harus dipahami dalam konteks persamaan gelombang aslinya (Anonymous, 2011:15).

Adanya kondisi batas dalam sebuah permasalahan dalam kehidupan ini sangatlah lazim. Dalam al-Qur'an telah dijelaskan pada surat al-Baqarah ayat 286 sebagai berikut:

لَا يُكَلِّفُ اللَّهُ نَفْسًا إِلَّا وُسْعَهَا لَهَا مَا كَسَبَتْ وَعَلَيْهَا مَا اكْتَسَبَتْ رَبَّنَا لَا تُؤَاخِذْنَا
إِنْ نَسِينَا أَوْ أَخْطَأْنَا رَبَّنَا وَلَا تَحْمِلْ عَلَيْنَا إَصْرًا كَمَا حَمَلْتَهُ عَلَى الَّذِينَ مِنْ
قَبْلِنَا رَبَّنَا وَلَا تُحَمِّلْنَا مَا لَا طَاقَةَ لَنَا بِهِ وَاعْفُ عَنَّا وَارْحَمْنَا أَنْتَ
مَوْلَانَا فَانصُرْنَا عَلَى الْقَوْمِ الْكَافِرِينَ ﴿٢٨٦﴾

Artinya: "Allah tidak membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya. Ia mendapat pahala (dari kebajikan) yang diusahakannya dan ia mendapat siksa (dari kejahatan) yang dikerjakannya. (mereka berdoa): "Ya Tuhan kami, janganlah Engkau hukum kami jika kami lupa atau kami tersalah. Ya Tuhan kami, janganlah Engkau bebankan kepada kami beban yang berat sebagaimana Engkau bebankan kepada orang-orang sebelum kami. Ya Tuhan kami, janganlah Engkau pikulkan kepada kami apa yang tak sanggup kami memikulnya. Beri ma'aflah kami; ampunilah kami; dan rahmatilah kami. Engkaulah penolong kami, Maka tolonglah kami terhadap kaum yang kafir." (Q.S.al-Baqarah:286).

Allah S.W.T menciptakan manusia berbeda-beda. Perbedaan-perbedaan itu merupakan rahmat yang harus kita sukuri. Dalam tafsir al-Maragi kata *at-Takliif* التكاليف diartikan kewajiban yang mempunyai beban atau bobot dan kata *al-Wus'u* الوسع diartikan batas kekuatan manusia tanpa menyusahkan atau merepotkan dirinya. Oleh karena itu dalam ayat ini menerangkan bahwa Allah tidak membebani seorang melainkan hanya sebatas kemampuannya, yang mungkin dilakukan olehnya (Al-Maragi, 1974: 143-148), karena apabila kita

dibebani di luar dari batasan kesanggupan atau kemampuan kita, pastilah kita tidak akan sanggup menjalani beban itu. Agama Islam adalah agama yang tidak memberatkan manusia dengan beban yang berat dan sukar serta memberikan dispensasi (keringanan) hukum syari'at dengan tidak membuat kesempitan kepada mereka dalam agama. Mudah, ringan dan tidak sempit adalah asas pokok dari agama Islam.

Dengan menggunakan nilai batas dalam mencari penyelesaian persamaan Helmholtz dibutuhkan jaringan titik hitung pada daerah tinjau. dimana kondisi batas di sekeliling daerah tinjauan akan dibagi menjadi sejumlah titik grid (titik hitung) dengan jarak tertentu. Sedangkan variabel tidak bebas harus memenuhi di sekeliling daerah tinjauan yang telah dibatasi.

Persamaan Helmholtz mempunyai banyak manfaat. Menurut Yogi Ahmad, seorang dosen ITB, menjelaskan bahwa persamaan Helmholtz sangat berguna untuk mencari titik lokasi minyak bumi. Persamaan tersebut memuluskan jalan bagi perusahaan perminyakan untuk memperoleh keuntungan yang lebih besar dengan biaya lebih rendah. Selama ini, industri perminyakan sangat membutuhkan pemecahan rumus Helmholtz itu agar bisa lebih cepat dan efisien dalam melakukan pencarian minyak bumi. Selain untuk menemukan sumber minyak, keberhasilan persamaan Helmholtz ini juga bisa diaplikasikan dalam industri lainnya yang berhubungan dengan gelombang. Persamaan ini digunakan untuk mendeskripsikan perilaku gelombang secara umum (Anonymous, 2011).

Konsep dasar persamaan Helmholtz dari paparan di atas didasarkan pada teori dasar kelistrikan bumi. Menurut hukum Ohm, apabila arus listrik

diinjeksikan ke dalam bumi dengan rapat arus $\vec{J}$ maka arus yang menembus suatu elemen seluas δA adalah $\vec{J} \cdot \delta A$. Rapat arus $\vec{J}$ diketahui sebanding dengan medan listrik. Mengingat medan listrik stasioner bersifat konservatif, maka $\vec{E} = -\nabla V$ dimana V adalah potensial skalar. Dengan menggunakan prinsip kekekalan muatan pada suatu volume tertentu, dan menetapkan prinsip kontinuitas maka diperoleh hubungan $\nabla \cdot \vec{J} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$ dimana ρ rapat muatan pada suatu titik ruang kartesian x, y , dan z dari titik sumber dimana arus diinjeksikan pada bidang tiga dimensi, maka dapat menghasilkan sebuah persamaan $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = S$, yang dikenal sebagai persamaan Helmholtz tiga dimensi (Manurung, 2011:13-14), dimana V adalah gradien potensial listrik (variabel terikat). Dalam hal ini $S = \frac{-I \delta(x_s) \delta(y_s) \delta(z_s)}{\sigma}$ merupakan kerapatan muatan ruang dengan σ adalah konduktivitas medium isotropic (mhos/m).

Selanjutnya persamaan Helmholtz di atas dapat dinyatakan dalam bentuk sebagai berikut:

$$\Delta V + \sigma V = -I(x)$$

persamaan ini dikatakan homogen jika $I = 0$ dan non homogen jika $I \neq 0$. Nilai batas homogen merupakan masalah nilai batas persamaan homogen dengan syarat batas homogen, $V = 0$ adalah solusi khusus dari suatu masalah nilai batas homogen. Masalah nilai batas untuk persamaan Helmholtz tiga dimensi hanya terbatas pada domain D dalam semesta S . Asumsikan $k > 0$ untuk masalah nilai batas ketiga dengan syarat batas, yaitu:

$$\frac{\partial V}{\partial N} + kV = 0$$

dimana $\frac{\partial V}{\partial N}$ adalah turunan pada semua permukaan S dan $r = \{x, y, z\}$ untuk $r \in S$ (Polyanin, 2002).

Model Helmholtz di sini diterapkan pada koordinat kartesian. Koordinat kartesian dapat menggambarkan berbagai objek dalam dimensi yang digambarkan dalam koordinat sumbu x , y dan z , besarnya sampai tak terhingga (tergantung kebutuhan). Sumbu koordinatnya saling tegak lurus atau membentuk sudut 90° . Selain itu koordinat ini dapat juga digunakan untuk mencari luas dan volume suatu benda dengan cara di integralkan tapi sebelumnya dimasukkan terlebih dahulu batasnya (Rinto, 2011).

Penelitian ini berupaya menekankan analisis persamaan Helmholtz dan penyelesaian analitik serta numerik yang diterapkan pada koordinat kartesian. Dalam hal ini solusi analitik menghasilkan fungsi yang selanjutnya dengan menyertakan nilai awal atau nilai batas yang didefinisikan pada masalah dapat menghasilkan penyelesaian yang bersifat *exact* atau penyelesaian sejati. Sementara itu penyelesaian secara numerik bersifat hampiran atau hanya mendekati penyelesaian sejati. Selanjutnya disebut penyelesaian hampiran (*Approxomation solution*). Penyelesaian hampiran pada dasarnya tidak akan pernah tepat sama dengan solusi sejatinya, sehingga terdapat selisih antara keduanya. Selisih inilah yang disebut dengan galat (*error*) (Munir, 2006).

Pada saat menganalisa suatu persamaan, kita perlu menggambarkan suatu medium yang homogen di seluruh ruang analisa. Definisi dari medium homogen,

apabila dalam suatu ruang analisa pada satu titik, maka medium di sekeliling titik tersebut mempunyai tetapan medium yang sama di segala arah. Bila tetapan medium berbeda di setiap arah dari titik pengamatan, maka medium ini disebut sebagai medium tak homogen (Herbert, 2009:23). Syarat kehomogenan suatu sistem juga dapat dipertimbangkan pada asumsi-asumsi yang diterapkan. Sebagai contoh mengasumsikan gerakan fluida berkepekatan tertentu diasumsikan ekuivalen dengan air. Mengasumsikan bidang rambat gelombang yang menjalar pada medium dengan menganggap gerakan partikelnya tidak acak, dan lain sebagainya.

Beberapa pembahasan sebelumnya terkait masalah Helmholtz, seperti dalam *Handbook of Linear Partial Differential Equations*, oleh Polyanin, 2002 yang membahas tentang solusi Helmholtz pada koordinat kartesian, silinder dan bola. Disini yang dikembangkan adalah Helmholtz tiga dimensi yang pada umumnya mencari solusi pada domain dengan nilai batas dan sebuah modul *Solution the Helmholtz Equation with Periodic and Mixed Boundary Condition*, 2011 yang mencari solusi numerik persamaan Helmholtz tiga dimensi pada koordinat kartesian dengan nilai batas *Periodic* dan *Mixed*, serta pada sebuah jurnal *Helmholtz's and Laplace's Equations in Spherical Polar Coordinates: Spherical Harmonics and Spherical Bessel Functions* oleh Young Peter, 2009.

Setiap kerumitan pasti terdapat selesiannya. Allah S.W.T. menjelaskan dalam al-Qur'an bahwa setiap permasalahan atau ujian yang diberikan Allah selalu dilengkapi dengan penyelesaian atau solusinya, sebagaimana dalam surat al-Insyiroh ayat 5-6, yaitu:

فَإِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٥﴾ إِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٦﴾

Artinya: "Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan (5). Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan"(6) (Q.S Al-Insyiroh:5-6).

Dalam tafsir Juz Amma disebutkan bahwa ayat ini memberikan kekuatan pada manusia untuk terus berusaha mengembangkan dan berusaha belajar baik dalam keimanan, ibadah, beramal dan dalam bidang kecerdasan akal. Al-Qur'an menganjurkan untuk terus berkarya dan tidak boleh berputus asa dalam menghadapi dan mencari solusi (Misbah, 1998:110).

Salah satu hikmah yang dapat diambil dari ayat di atas, mendorong kita untuk mencari penyelesaian analitik dan numerik pada persamaan Helmholtz, dimana $V = V(x, y, z)$ adalah fungsi potensial yang dicari. Besaran skalar V ini terdapat dalam masalah-masalah potensial listrik yang merupakan penyelesaian dari persamaan Helmholtz dalam koordinat kartesian (Indrijatmaka, 2011). Selanjutnya penelitian ini menjadi penting untuk dilakukan karena akan sangat membantu pengamatan lebih lanjut terhadap persamaan Helmholtz. Oleh karena itu, peneliti menuangkan gagasan tersebut dalam skripsi ini dan memberi judul: "*Analisis Persamaan Helmholtz Pada Koordinat Kartesian*".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, dapat dirumuskan permasalahan sebagai berikut :

1. Bagaimana penyelesaian analitik persamaan Helmholtz pada koordinat kartesian?
2. Bagaimana penyelesaian numerik persamaan Helmholtz pada koordinat kartesian?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan penelitian ini adalah:

1. Mengetahui penyelesaian analitik persamaan Helmholtz pada koordinat kartesian.
2. Mengetahui penyelesaian numerik persamaan Helmholtz pada koordinat kartesian.

1.4 Batasan Masalah

Adapun batasan yang diberikan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Dalam penelitian ini menggunakan persamaan Helmholtz tiga dimensi.
2. Kondisi batas yang dipilih bersifat periodik, dimana gradien potensial listrik ganda sepanjang x, y dan z dengan batas $0 \leq x \leq 2\pi$, $\pi \leq y \leq 3\pi$ dan $-\pi \leq z \leq \pi$.

1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat yang dapat diberikan dari hasil penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menerapkan pemahaman tentang konsep persamaan diferensial parsial yang telah dipelajari ke dalam permasalahan yang lebih aktual.
2. Mendapat Analisis yang mendalam pada konsep persamaan Helmholtz.
3. Memahami prosedur-prosedur penyelesaian secara analitik dan numerik.

1.6 Metode Penelitian

Metode penelitian yang dilakukan adalah dengan melakukan teknik analisis secara kuantitatif. Dimana penelitian menggunakan model rujukan persamaan Helmholtz. Analisis persamaan ini pada koordinat kartesian untuk mendapatkan penyelesaian analitik dan numeriknya dengan menggunakan tahap-tahap sebagai berikut:

1. Menganalisis persamaan Helmholtz pada koordinat kartesian, analisis ini meliputi tahapan-tahapan:
 - a. Analisis teoritik dan konstruksi persamaan Helmholtz.
 - b. Analisis besaran-besaran yang terlibat dalam persamaan Helmholtz.
2. Menentukan solusi analitik dari model rujukan persamaan Helmholtz pada koordinat kartesian. Tahapan ini dilakukan dengan merumuskan penyelesaian analitik persamaan Helmholtz pada batas-batas yang telah didefinisikan

dengan menggunakan metode pemisahan variabel (*Separation of Variables*) dan selanjutnya menggambarkan dalam grafik.

3. Menentukan solusi numerik dari model rujukan persamaan Helmholtz pada koordinat kartesian. Analisis pada bagian ini meliputi tahapan-tahapan:
 - a. Mentransformasi persamaan Helmholtz pada koordinat kartesian ke dalam bentuk persamaan diskrit dengan menggunakan metode beda hingga terbagi.
 - b. Merancang model iterasi penyelesaian persamaan diferensial parsial pada model Helmholtz
 - c. Mendefinisikan kondisi batas pada grid-grid di batas sistem sebagai input iterasi.
 - d. Mengkonstruksi matrik-matrik untuk menyelesaikan persamaan dengan menggunakan *software* MATLAB.
 - e. Merancang algoritma program dari model iterasi yang telah dibuat untuk model gelombang.
 - f. Simulasi hasil numerik dan analitiknya.

1.7 Sistematika Penulisan

Untuk memudahkan pembahasan dalam skripsi ini, peneliti membagi ke dalam empat bab, yaitu:

Bab I : Bab I membahas latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II : Bab II membahas beberapa teori pendukung yaitu persamaan differensial parsial Helmholtz, klasifikasi Helmholtz sebagai kasus persamaan diferensial parsial, kaidah umum penyelesaian analitik persamaan diferensial parsial, kaidah umum penyelesaian numeric persamaan diferensial parsial dan kajian petir serta kedudukan benda langit dalam al-Qur'an.

Bab III : Bab III membahas tentang analisis penyelesaian Analitik persamaan Helmholtz pada koordinat kartesian, analisis penyelesaian numerik persamaan Helmholtz pada koordinat kartesian, dan komparasi hasil penyelesaian analitik dan numerik.

Bab IV : Bab IV (penutup) membahas kesimpulan dan saran.

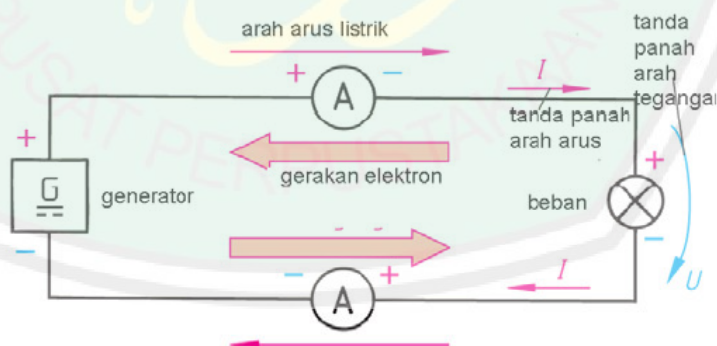
BAB II

KAJIAN TEORI

2.1 Persamaan Diferensial Parsial Helmholtz

2.1.1 Analisis Teoritik dan Konstruksi Helmholtz

Untuk mendapatkan penurunan persamaan Helmholtz digunakan konsep aliran listrik yang merambat di dalam bumi. Menurut Tim penyusun PLN (2011:3), Arus listrik adalah mengalirnya elektron secara kontinu pada konduktor akibat perbedaan jumlah elektron pada beberapa lokasi yang jumlah elektronnya tidak sama. Arus listrik bergerak dari terminal positif (+) ke terminal negatif (-), sedangkan aliran listrik dalam kawat logam merupakan aliran elektron. Sifat mengalirnya elektron adalah pergerakan dari terminal negatif (-) ke terminal positif (+). Sehingga secara umum arah arus listrik dianggap berlawanan dengan arah gerakan elektron. Untuk ilustrasi dapat dilihat gambar berikut:



Gambar 2.1. Arah Arus Listrik Dan Arah Gerakan Elektron (Simanjuntak, 2009).

Secara teori, satu ampere arus adalah mengalirnya elektron sebanyak $628,10^{16}$ atau sama dengan satu coulomb per detik melewati satu penampang konduktor.

Sehingga persamaan arus listrik dapat dinyatakan sebagai berikut (Simanjuntak, 2009):

$$I = \frac{q}{t} \quad (2.1)$$

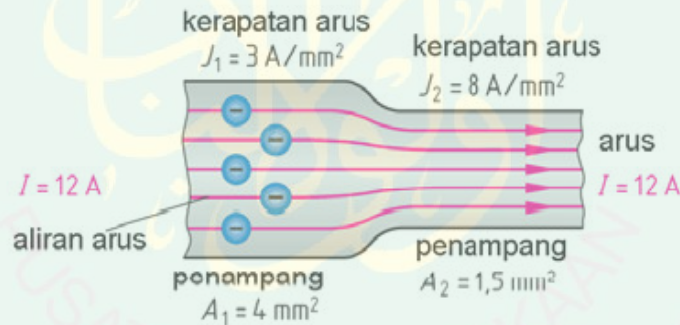
dimana :

I : kuat arus listrik yang mengalir (Ampere)

q : besarnya muatan listrik (Coulumb)

t : waktu (detik)

Selanjutnya rapat arus menurut Simanjuntak (2009) adalah besarnya arus listrik tiap – tiap mm^2 luas penampang kawat. Untuk ilustrasi dapat dilihat gambar berikut:



Gambar 2.2. Kerapatan Arus Listrik (Simanjuntak, 2009).

Arus listrik mengalir dalam kawat penghantar secara merata menurut luas penampangnya. Kerapatan arus berbanding terbalik dengan penampang penghantar, semakin besar penampang penghantar kerapatan arusnya mengecil (Simanjuntak, 2009).

Rumus-rumus di bawah ini merupakan formula dalam menentukan besarnya rapat arus, kuat arus dan penampang kawat (Simanjuntak, 2009):

$$J = \frac{I}{A} \quad (2.2)$$

dengan menstubsitusikan persamaan (2.1) ke dalam persamaan (2.2), maka:

$$J = \frac{q}{t A} \quad (2.3)$$

dimana:

J : rapat arus (A/mm^2)

I : kuat arus (Ampere)

A : luas penampang kawat (mm^2)

Secara umum arus tidak terdistribusi merata, baik rapatnya maupun arahnya. Untuk itu kita definisikan rapat arus setempat sebagai diferensial kuat arus terhadap luas yang ditembusnya tegak lurus atau dirumuskan (Soedoyo, 1995:12):

$$J = \lim_{\Delta A_n \rightarrow 0} \sum_{n=1}^i \frac{\Delta I}{\Delta A_n} = \frac{dI}{dA_n} \quad (2.4)$$

dimana:

$\Delta A_n = \delta A_n = dA_n$: ukuran luas n partisi penampang

ΔI : kuat arus n partisi

dengan arah vektornya $\vec{J}$, sama dengan arah mengalirnya arus. Dengan mendefinisikan vektor elemen luasan $\vec{dA}$ sebagai vektor yang arahnya tegak lurus

elemen luasan dA dan panjangnya sebanding dengan luas luasan itu, maka kita dapat menulis (Soedjo, 1995:12):

$$I = \int dI = \int J dA_n = \int \vec{J} \cdot \vec{dA} = \frac{dq}{dt} \quad (2.5)$$

Seandainya arus itu ialah arus partikel tidak terdistribusi merata maka, kerapatannya (ρ) bervariasi dari titik ke titik di dalam volume (v). Maka dalam hal ini, di sekitar suatu titik tertentu, kerapatannya boleh dianggap tetap sehingga dengan integral yang mencakup elemen volum (Δv) yang kecil, di sekitar titik itu, berlaku persamaan (Soedjo, 1995:12):

$$\lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{J} \cdot \vec{dA}}{\Delta v} = \frac{d(q/\Delta v)}{dt} = \frac{d\rho}{dt} \quad (2.6)$$

sehingga secara sistematis arus didefinisikan:

$$I = \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2.7)$$

Selanjutnya dibahas asumsi berlakunya persamaan kontinuitas dalam elektromagnetika. Dalam teori elektromagnetik, persamaan kontinuitas dapat dipandang sebagai hukum empiris yang mengungkapkan kekekalan muatan (lokal), atau dapat pula dipandang sebagai konsekuensi persamaan Maxwell, yaitu (Soedjo, 1999:198):

$$\nabla \cdot \vec{J} = \rho \quad (2.8)$$

dimana ρ ialah rapat muatan listrik, yakni:

$$\rho = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{q}{\Delta v} \quad (2.9)$$

maka persamaan (2.6) berlaku untuk $\frac{d(q/\Delta v)}{dt} = \frac{d\rho}{dt}$ (Soedjojo, 1999:160-161).

Sehingga persamaan tersebut menyatakan bahwa divergensi rapat arus listrik J adalah sama dengan negatif laju perubahan rapat muatan listrik:

$$\nabla \cdot J = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2.10)$$

dimana:

J : rapat arus (A/mm²)

ρ : rapat muatan

∇ : operator laplace

Persamaan ini dapat diinterpretasikan sebagai berikut. Rapat arus listrik adalah pergerakan rapat muatan listrik. Persamaan kontinuitas menyatakan bahwa apabila muatan listrik bergerak keluar dari suatu volume diferensial (divergensi rapat arus bernilai positif) maka jumlah muatan listrik di dalam volume tersebut berkurang, sehingga laju perubahan rapat muatan listrik di dalam volume itu bernilai negatif. Oleh karena itu, persamaan kontinuitas dalam elektromagnetika menyatakan adanya sifat kekekalan muatan listrik (Ikhsan, 2010:2).

Selanjutnya konsep konduktivitas dan resistivitas dipaparkan sebagai berikut. Kuat medan listrik yang dikenakan pada kawat konduktor umumnya disebabkan oleh adanya beda potensial antara kedua ujung konduktor. Misalkan ada dua jenis bahan (tembaga dan besi) yang mempunyai luas penampang dan panjang yang sama serta diberi beda potensial yang sama pada kedua ujung bahan tadi, maka kemungkinan kedua bahan tersebut mengalirkan arus listrik yang

berbeda besarnya. Hal ini disebabkan oleh karena kedua bahan tersebut mempunyai sifat penghantaran listrik yang tidak sama. Untuk membedakan sifat penghantar arus listrik dari bahan-bahan, didefinisikan pengertian konduktivitas listrik sebagai perbandingan antara rapat arus dengan kuat medan listrik yang menimbulkan arus, yaitu (Endarko dan Yudoyono, 2007:II.3):

$$\sigma = \frac{J}{E} \quad (2.11)$$

Karena

$$E = -\frac{dV}{dx} \quad (2.12)$$

Dengan mengingat persamaan (2.2), maka:

$$I = J A = A \sigma E = -A \sigma \frac{dV}{dx} \quad (2.13)$$

dimana:

σ : konduktivitas medium isotropik (mhos/m)

E : medan listrik (volt/m)

V : potensial skalar listrik

A : luas penampang kawat (mm^2)

Dari uraian di atas, maka model persamaan Helmholtz tiga dimensi pada koordinat kartesian dapat diperoleh dari hasil konstruksi persamaan kelistrikan di atas. Menurut hukum Ohm, apabila arus listrik diinjeksikan ke dalam bumi dengan rapat arus $\vec{j}$ maka arus yang menembus suatu elemen seluas δA adalah $\vec{j}$.

δA . Rapat arus $\vec{J}$ diketahui sebanding dengan medan listrik dan secara sistematis dapat dituliskan sebagai berikut (Manurung, 2011:13-14):

$$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E} \quad (2.14)$$

dimana :

$$\vec{J} = J_x \vec{i}, J_y \vec{j}, J_z \vec{k} \quad \in \mathbb{R}^3 \quad \text{vektor rapat arus (Amp/m}^2\text{)} \quad (2.15)$$

$$\vec{E} = E_x \vec{i}, E_y \vec{j}, E_z \vec{k} \quad \in \mathbb{R}^3 \quad \text{vektor kuat medan listrik (volt/m)} \quad (2.16)$$

σ : konduktivitas medium isotropik (mhos/m)

Gradien suatu besaran skalar menurut Soedjo (1995:11) adalah suatu vektor yang komponen-komponennya adalah diferensial besaran itu sepanjang sumbu-sumbu koordinat. Misalnya kuat medan listrik E dinyatakan sebagai gradien potensial listrik V serta mengingat medan listrik stasioner bersifat konservatif, maka dengan mengingat persamaan (2.16) dan karena berlaku persamaan (2.12), sehingga persamaan $\vec{E}$ dapat dinyatakan:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} - \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k} \\ &= -\left(\frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k} \right) \end{aligned}$$

atau disingkat:

$$\vec{E} = -\text{grad} \cdot V \quad \text{atau} \quad \vec{E} = -\nabla V \quad (2.17)$$

dimana V adalah potensial skalar.

Dalam hal ini grad adalah singkatan dari pada gradien yaitu laju variasi terhadap tempat atau koordinat, sedangkan ∇ adalah notasi singkat bagi grad dan

dinamakan operator diferensial nabla laplace, yang di dalam sistem koordinat kartesian ialah (Soedoyo, 1995:11):

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k$$

Dengan menggunakan prinsip kekekalan muatan pada suatu volume tertentu, dan menerapkan prinsip kontinuitas, serta mengingat persamaan (2.10), maka diperoleh hubungan sebagai berikut (Soedoyo, 1995:13):

$$\text{div} \cdot \vec{J} = \nabla \cdot \vec{J} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Persamaan tersebut dikenal dengan persamaan kontinuitas dari $q = \int \rho dV$.

Mengingat persamaan (2.3) maka diperoleh $J = \frac{\rho}{tA}$ sehingga:

$$\nabla \cdot \vec{J} = \frac{\partial \rho}{\partial t A} = I \delta(x) \delta(y) \delta(z) \quad (2.18)$$

dimana ρ adalah rapat muatan pada suatu titik pada ruang kartesian x-y-z, I adalah sumber arus dengan fungsi *delta Dirac* $A = \delta(x) \delta(y) \delta(z)$. Arus *Dirac* adalah arus searah yang mempunyai nilai tetap atau konstan terhadap satuan waktu, artinya di mana pun kita meninjau arus tersebut pada waktu berbeda akan mendapatkan nilai yang sama (Ramdhani, 2005:2):

Mengingat persamaan (2.14), (2.17) dan persamaan (2.18) dapat menghasilkan persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{J} &= \nabla \cdot (\sigma \cdot \vec{E}) \\
&= \nabla \cdot (\sigma \nabla V) \\
&= \nabla \cdot \sigma - \left(\sigma \frac{\partial V}{\partial x} + \sigma \frac{\partial V}{\partial y} + \sigma \frac{\partial V}{\partial z} \right) \\
&= \nabla \cdot \left(- \left(\sigma \frac{\partial V}{\partial x} + \sigma \frac{\partial V}{\partial y} + \sigma \frac{\partial V}{\partial z} \right) \right) \\
&= -\sigma \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \sigma \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \sigma \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \\
&= -\frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma \frac{\partial V}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\sigma \frac{\partial V}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\sigma \frac{\partial V}{\partial z} \right) \\
&= -I \delta(x) \delta(y) \delta(z)
\end{aligned}$$

sehingga dapat ditulis:

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla V) = -I \delta(x) \delta(y) \delta(z) \quad (2.19)$$

persamaan (2.19) dapat ditulis untuk bidang tiga dimensi umum sebagai berikut:

$$\nabla \cdot [\sigma(x, y, z) \nabla V(x, y, z)] = -I \delta(x_s) \delta(y_s) \delta(z_s) \quad (2.20)$$

dimana (x_s, y_s, z_s) menyatakan koordinat dari titik sumber dimana arus diinjeksikan pada bidang tiga-dimensi (Manurung, 2011:14).

Persamaan (2.20) dapat dituliskan dalam bentuk sebagai berikut (Manurung, 2011:16):

$$\nabla \cdot \sigma(x, y, z) \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} \right) = -I \delta(x_s) \delta(y_s) \delta(z_s) \quad (2.21)$$

Persamaan (2.21) di atas dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\nabla \cdot \left(\sigma \frac{\partial V}{\partial x} + \sigma \frac{\partial V}{\partial y} + \sigma \frac{\partial V}{\partial z} \right) = -I \delta(x_s) \delta(y_s) \delta(z_s) \quad (2.22)$$

persamaan (2.22) di atas dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\sigma \frac{\partial V}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\sigma \frac{\partial V}{\partial z} \right) = -I \delta(x_s) \delta(y_s) \delta(z_s) \quad (2.23)$$

Persamaan (2.23) di atas dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\sigma \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \sigma \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -I \delta(x_s) \delta(y_s) \delta(z_s) \quad (2.24)$$

sehingga dengan membagi persamaan (2.24) dengan σ menghasilkan persamaan:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{-I \delta(x_s) \delta(y_s) \delta(z_s)}{\sigma} \quad (2.25)$$

yaitu:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = S \quad (2.26)$$

dimana:

V : potensial skalar listrik (v)

σ : konduktivitas medium isotropic (mhos/m)

$S = \frac{-I \delta(x_s) \delta(y_s) \delta(z_s)}{\sigma}$ adalah kerapatan muatan ruang

$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ adalah gradien potensial listrik ganda sepanjang x, y dan z secara

berturut-turut

Persamaan (2.26) dikenal sebagai persamaan Helmholtz tiga dimensi (Manurung, 2011:16).

2.1.2 Analisis Besaran-besaran Helmholtz

Dengan merujuk persamaan (2.26), yakni:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = S$$

Maka dapat dinyatakan bahwa besaran-besaran yang terlibat dalam persamaan di atas ialah V yang merupakan gradien potensial listrik (merupakan variabel terikat). Selanjutnya potensial listrik menggambarkan intensitas medan listrik karena potensial listrik berkaitan erat dengan medan listrik. Sementara itu notasi σ menyatakan konduktivitas medium isotropic (mhos/m). Konduktitas ini sebagai perbandingan antara rapat arus dengan kuat medan listrik yang menimbulkan arus.

Sementara itu $S = \frac{-I \delta(x_s) \delta(y_s) \delta(z_s)}{\sigma}$ kerapatan muatan ruang. Selanjutnya suku-suku yang memuat $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ dan $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ gradien potensial listrik ganda sepanjang x, y dan z secara berturut-turut (Manurung, 2011:16).

Persamaan (2.26) merupakan Persamaan diferensial parsial (PDP) karena persamaan tersebut menyangkut turunan parsial dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu atau lebih variabel bebas, yaitu variabel x, y dan z adalah variabel bebasnya, sedangkan variabel V adalah variabel tak bebasnya (Ross, 1984:4).

2.2 Klasifikasi Helmholtz Sebagai Kasus Persamaan Diferensial Parsial

Persamaan (2.26) merupakan Persamaan diferensial parsial (PDP). Menurut Ross (1984:3), Persamaan diferensial adalah persamaan yang menyangkut turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu atau lebih variabel bebas.

Berdasarkan jumlah variabel bebasnya, persamaan diferensial dikelompokkan menjadi persamaan diferensial biasa (PDB) atau *Ordinary Differential Equation (ODE)* dan persamaan diferensial parsial (PDP) atau *Partial Differential Equation (PDE)* (Ross, 1984:3).

Sedangkan Persamaan diferensial parsial (PDP) menurut Ross (1984:4) adalah persamaan diferensial yang menyangkut turunan parsial dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu atau lebih variabel bebas. Sebagai contoh, jika diberikan persamaan $\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} = v$ Variabel bebas pada contoh ini adalah s dan t sedangkan variabel tak bebasnya adalah v yang dalam hal ini fungsi $v = v(s, t)$. Oleh karena itu persamaan di atas dapat diturunkan sebagian terhadap s (ialah suku pertama persamaan) yang menyatakan perubahan kecepatan persatuan waktu dan diturunkan sebagian terhadap t (ialah suku kedua persamaan) yang menyatakan perubahan posisi persatuan waktu.

Contoh berikutnya $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$. Variabel x , y dan z adalah variabel bebasnya, sedangkan variabel u adalah variabel tak bebasnya. Persamaan tersebut merupakan persamaan Laplacian dalam dimensi tiga. Dalam hal ini fungsi $u = u(x, y, z)$ dapat diturunkan sebagian terhadap x (ialah suku pertama

persamaan) menyatakan peluang kepadatan (*Probability density*), diturunkan sebagian terhadap y (ialah suku kedua persamaan) dan diturunkan sebagian terhadap z (ialah suku ketiga persamaan) (Ross, 1984:4).

Selanjutnya prosedur untuk mendapatkan turunan kedua, ketiga, keempat, dan seterusnya, adalah dengan mempertimbangkan sebuah fungsi $w = s(x, y)$ yang bergantung pada dua variabel bebas x dan y , maka turunan parsial terhadap x adalah menganggap y konstan atau tetap (tidak ada perubahan). Definisi ini dapat dinyatakan secara matematik sebagai berikut:

$$\begin{aligned} s_x(x, y) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{s(x + \Delta x, y) - s(x, y)}{\Delta x} \\ &= \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned} \quad (2.27)$$

Sebaliknya jika fungsi $w = s(x, y)$ diturunkan terhadap y yaitu menganggap tidak ada perubahan di x , maka dapat dinyatakan secara matematik sebagai berikut:

$$\begin{aligned} s_y(x_0, y_0) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{s(x, y + \Delta y) - s(x, y)}{\Delta y} \\ &= \frac{\partial s}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \quad (2.28)$$

Adapun notasi pelambangannya secara berturut – urut adalah $\frac{\partial w}{\partial x}$ dan $\frac{\partial w}{\partial y}$,

dengan simbol ∂ menunjukkan turunan parsialnya. Notasi itu dapat digunakan dalam penulisan turunan orde dua. Turunan terhadap x dari $\frac{\partial w}{\partial x}$ dilambangkan dengan $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ dan turunan kedua terhadap y dari $\frac{\partial w}{\partial y}$ adalah $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$. Untuk

selanjutnya penulisan turunan parsial fungsi $w = s(x, y)$ terhadap x dapat dituliskan berupa w_x (Levine, 1997:4).

Selanjutnya turunan yang lebih tinggi, jika s adalah fungsi dari dua variabel, maka turunan parsialnya s_x dan s_y juga fungsi dua variabel. Sehingga, kita dapat meninjau bahwa s_{xx} dan s_{xy} adalah turunan s_x terhadap x dan y berturut-turut. Sedangkan s_{yx} dan s_{yy} adalah turunan fungsi s_y terhadap x dan y berturut-turut. Turunan-turunan tersebut umumnya disebut turunan parsial dari s . Jika $w = s(x, y)$, dengan menggunakan notasi tersebut maka,

$$(s_x)_x = s_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.29)$$

$$(s_x)_y = s_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 s}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \quad (2.30)$$

$$(s_y)_x = s_{yx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial s}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 s}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.31)$$

$$(s_y)_y = s_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial s}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (2.32)$$

Dari notasi s_{xy} (atau $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$) berarti bahwa dideferensialkan terhadap x kemudian terhadap y . Sedangkan dalam menghitung s_{yx} urutannya dibalik (Stewart, 2003).

Dari uraian di atas diketahui bahwa persamaan Helmholtz (2.26) merupakan Persamaan diferensial parsial (PDP) Laplacian karena persamaan tersebut menyangkut turunan parsial dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu atau lebih variabel bebas, yaitu variabel x , y dan z adalah variabel

bebasnya, sedangkan variabel V adalah variabel tak bebasnya. Dimana $V = w$ yaitu merupakan fungsi peluang kepadatan (*probability density*), akan tetapi $V(x, y, z)$ kasus tiga dimensi sedangkan $w(x, y)$ kasus dua dimensi, sehingga turunan parsial kedua dari fungsi w otomatis akan berlaku juga pada turunan kedua dari fungsi V .

2.2.1 Persamaan Helmholtz Sebagai Diferensial Parsial Linier

Sebagian besar permasalahan dalam ilmu pengetahuan dan teknologi dapat dipresentasikan dalam bentuk persamaan diferensial parsial (PDP). Persamaan tersebut merupakan laju perubahan terhadap dua atau lebih variabel bebas yang umumnya adalah variabel waktu dan jarak. Bentuk umum PDP linier tingkat dua (orde dua) dengan dua variabel bebas adalah (Triatmodjo, 2002:199):

$$A(x, y)u_{xx}(x, y) + 2B(x, y)u_{xy}(x, y) + C(x, y)u_{yy}(x, y) + D(x, y)u_x(x, y) + E(x, y)u_y(x, y) + F(x, y)u(x, y) = G(x, y) \quad (2.33)$$

dengan A, B, C, D, E, F dan G bisa merupakan fungsi dari variabel x dan y dan variabel tidak bebas u .

Linieritas dari persamaan diferensial parsial ditentukan oleh fungsional dari koefisien $A(x, y), B(x, y), C(x, y), D(x, y), E(x, y), F(x, y)$, dan $G(x, y)$. Jika koefisien-koefisien tersebut konstanta atau hanya tergantung pada variabel bebas, $[F(x, y) = 0]$, maka PDP tersebut adalah linier. Jika koefisien-koefisien merupakan fungsi dari turunan pertama dan kedua $[F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}) = 0]$, maka PDP adalah non linier. Untuk lebih jelasnya perhatikan beberapa contoh PDP berikut (Zauderer, 2006:102):

a. $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (persamaan diferensial parsial linier)

b. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u = \sin x$ (persamaan diferensial parsial linier)

c. $\frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y + u = 1$ (persamaan diferensial parsial nonlinier)

d. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u^2 = 0$ (persamaan diferensial parsial nonlinier)

Dari penjabaran di atas diketahui bahwa Persamaan Helmholtz (2.26) merupakan persamaan diferensial linier karena koefisien-koefisien dari persamaan tersebut konstanta atau hanya tergantung pada variabel bebas, $[F(x, y) = 0]$.

2.2.2 Orde Persamaan Diferensial Parsial Helmholtz

Ordo/orde suatu persamaan diferensial adalah orde turunan tertinggi yang muncul dalam persamaan tersebut (Stewart, 2003: 5).

Persamaan diferensial parsial dengan dua variabel bebas dikatakan berorde satu jika turunan tertinggi dari variabel terikatnya adalah satu. Bentuk umum persamaan diferensial parsial linear dan non linear berorde satu adalah (Zauderer, 2006: 63):

$$a(x, t) \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} + b(x, t) \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = c(x, t)v(x, t) + d(x, t) \quad (2.34)$$

di mana a, b, c , dan d adalah fungsi dan di setiap titik (x, t) merupakan vektor $[a(x, t), b(x, t)]$ yang terdefinisi dan tidak nol. Persamaan (2.34) dapat ditulis dalam bentuk:

$$F(x, t, v(x, t), v_x(x, t), v_t(x, t)) = 0 \quad (2.35)$$

di mana $v_x(x, t) = \frac{\partial v(x, t)}{\partial x}$ dan $v_t(x, t) = \frac{\partial v(x, t)}{\partial t}$ (Zauderer, 2006: 63).

Demikian halnya dengan persamaan diferensial parsial dengan dua variabel bebas dikatakan berorde dua, tiga, empat hingga berorde m jika turunan tertinggi dari variabel terikatnya adalah dua, tiga, empat atau m . Bentuk umum persamaan diferensial parsial linear dan non linear berorde dua, tiga, empat dan berorde n berturut-turut sebagai berikut (Zauderer, 2006:137):

- a. Persamaan diferensial parsial linier orde dua dengan variabel n

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu + d = 0 \quad (2.36)$$

- b. Persamaan diferensial parsial linier orde tiga dengan variabel n

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ijk} \frac{\partial^3 u}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n c_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + du + e = 0 \quad (2.37)$$

- c. Persamaan diferensial parsial linier orde empat dengan variabel n

$$\sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \sum_{i_3=1}^n \sum_{i_4=1}^n a_{i_1 i_2 i_3 i_4} \frac{\partial^4 u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \partial x_{i_3} \partial x_{i_4}} + \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \sum_{i_3=1}^n b_{i_1 i_2 i_3} \frac{\partial^3 u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \partial x_{i_3}} + \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n c_{i_1 i_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}} + \sum_{i_1=1}^n d_{i_1} \frac{\partial u}{\partial x_{i_1}} + eu + f = 0 \quad (2.38)$$

d. Persamaan diferensial parsial linier orde m dengan variabel n

$$\sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \dots \sum_{i_m=1}^n \sum_{i_4}^n a_{i_1, i_2, i_3, \dots, i_m} \frac{\partial^m u}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_m}} + \dots = 0 \quad (2.39)$$

Dari penjabaran di atas diketahui bahwa Persamaan Helmholtz (2.26) merupakan persamaan diferensial orde dua karena turunan tertinggi dari variabel terikatnya adalah dua, yaitu $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$.

2.2.3 Persamaan Helmholtz Sebagai Persamaan Diferensial Parsial Eliptik

Suatu klasifikasi penting dalam persamaan diferensial parsial adalah terdiri dari tiga tipe, yaitu parabolik, hiperbolik dan eliptik. Berdasarkan persamaan (2.33), maka persamaan diferensial parsial linier orde dua dapat diklasifikasikan berdasarkan aturan berikut ini (Triatmodjo, 2002:199):

a. Persamaan Parabolik

Suatu persamaan disebut persamaan parabolik apabila $B^2 - 4AC = 0$. Persamaan parabolik merupakan persamaan yang bergantung waktu (tidak permanen). Penyelesaian persamaan tersebut memerlukan kondisi awal dan batas, misalnya pada tipe parabolik, kita tentukan persamaan diferensial parsial sebagai berikut:

$$\rho(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + Lu(x, t) = 0; \quad x \in G, \quad t > 0$$

dengan kondisi batas dan kondisi awal adalah:

$$u(x, 0) = f(x); \quad x \in G$$

Dengan memisalkan $u(x, t) = M(x)N(t)$, maka persamaan diferensial parsial di atas akan menjadi bentuk $\frac{N'(t)}{N(t)} = -\frac{LM(x)}{\rho(x)M(x)}$. Selanjutnya dihasilkan $LM(x) = \lambda\rho(x)M(x)$ dan dihasilkan pemisahan variabel dalam persamaan diferensial di atas, yaitu $N'(t) + \lambda'(t) = 0$ (Zauderer, 2006:180-183).

Contoh persamaan diferensial parsial yang bertipe parabolik adalah persamaan perambatan panas yaitu:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

dimana pada persamaan tersebut T merupakan temperatur, K adalah koefisien konduktivitas, t adalah waktu dan x adalah jarak. penyelesaian persamaan ini adalah mencari temperatur T di lokasi (titik) x dan setiap waktu t (Triatmodjo, 2002:201).

b. Persamaan Hiperbolik

Suatu persamaan disebut persamaan hiperbolik apabila $B^2 - 4AC > 0$. Persamaan hiperbolik biasanya berhubungan dengan getaran, atau permasalahan dimana terjadi ketidak-kontinuan (*discontinue*) dalam waktu, seperti gelombang kejut yang terjadi ketidak-kontinuan dalam kecepatan, tekanan dan rapat massa. Sehingga penyelesaiannya dari persamaan hiperbolik mirip dengan penyelesaian persamaan parabolik yaitu memerlukan kondisi awal dan batas (Triatmodjo, 2002:200). Misalnya pada tipe hiperbolik, kita tentukan persamaan diferensial parsial homogen:

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + Lu(x, t) = 0; \quad x \in G, \quad t > 0$$

dengan kondisi batas:

$$\alpha(x)u(x,t) + \beta(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial n}\bigg|_{\partial G} = 0; \quad t > 0$$

$$\alpha_1 u(0,t) - \beta_1 u_x(0,t) = 0, \quad \alpha_2 u(l,t) + \beta_2 u_x(l,t) = 0; \quad t > 0$$

dan kondisi awal:

$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x); \quad x \in G$$

Dengan memisalkan $u(x,t) = M(x)N(t)$, maka persamaan diferensial parsial di atas akan menjadi bentuk $\frac{N''(t)}{N(t)} = -\frac{LM(x)}{\rho(x)M(x)}$. Selanjutnya dihasilkan $LM(x) = \lambda\rho(x)M(x)$ dan dihasilkan pemisahan variabel dalam persamaan diferensial di atas, yaitu $N''(t) + \lambda N(t) = 0$ (Zauderer, 2006:180-183).

Contoh persamaan diferensial yang bertipe hiperbolik adalah persamaan gelombang,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

dengan y adalah perpindahan vertikal (fluktuasi) pada jarak x pada ujung tali yang bergerak yang mempunyai panjang L sesudah waktu t . Oleh karena nilai y pada ujung-ujung tali biasanya diketahui untuk semua waktu (kondisi batas) dan bentuk serta kecepatan tali diketahui pada waktu nol (kondisi awal), maka penyelesaian persamaan adalah yaitu menghitung y pada x dan t tertentu (Triatmodjo, 2002:201-202).

c. Persamaan Eliptik

Suatu persamaan disebut persamaan eliptik apabila $B^2 - 4AC < 0$. Persamaan eliptik pada umumnya berhubungan dengan masalah keseimbangan atau kondisi permanen (tidak tergantung waktu), dan penyelesaian memerlukan kondisi batas disekeliling daerah tinjauan (Triatmodjo, 2002:200). Misalnya pada tipe eliptik, kita tentukan persamaan diferensial parsial sebagai berikut:

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} + Lu(x, y) = 0; \quad x \in G, \quad 0 < y < l$$

kondisi batas seperti pada tipe hiperbolik dan kondisi awal adalah:

$$u(x, 0) = f(x), \quad u(x, l) = g(x); \quad x \in G$$

dengan memisalkan $u(x, t) = M(x)N(t)$, maka persamaan diferensial parsial diatas akan menjadi bentuk $-\frac{N''(y)}{N(y)} = -\frac{LM(x)}{\rho(x)M(x)}$. Selanjutnya dihasilkan $LM(x) = \lambda\rho(x)M(x)$ dan dihasilkan pemisahan variabel dalam persamaan diferensial diatas, yaitu $N''(y) - \lambda N(y) = 0$ (Zauderer, 2006:180-183).

Contoh persamaan diferensial parsial yang bertipe eliptik adalah persamaan poisson,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + g = 0$$

dan persamaan Laplace,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

Persamaan ini umumnya berhubungan dengan masalah-masalah keseimbangan atau aliran permanen, seperti aliran air tanah di bawah bendungan karena adanya pemompaan, defleksi plat karena adanya pembenaan, dan sebagainya (Triatmojo, 2002:201).

Dari penjabaran di atas diketahui bahwa Persamaan Helmholtz (2.26) merupakan persamaan diferensial tipe eliptik karena $B^2 - 4AC < 0$. Untuk mengetahuinya yaitu dengan mensubstitusikan persamaan (2.26) ke persamaan (2.33), sehingga diperoleh:

misal:

$$B = B(x, y)u_{xy}(x, y) = 0$$

$$A = A(x, y)u_{xx}(x, y) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 1$$

$$C = C(x, y)u_{yy}(x, y) = \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 1$$

maka

$$B^2 - 4AC < 0$$

$$(0)^2 - 4(1)(1) < 0$$

$$-4 < 0$$

Jadi, persamaan Helmholtz (2.26) merupakan persamaan diferensial tipe eliptik yang pada umumnya berhubungan dengan masalah keseimbangan atau kondisi permanen (tidak tergantung waktu), dan penyelesaian memerlukan kondisi batas disekeliling daerah tinjauan (Triatmodjo, 2002:200).

2.3 Kaidah Umum Penyelesaian Analitik Persamaan Diferensial Parsial

Penyelesaian analitik model matematika adalah penyelesaian yang didapat dari prosedur aljabar terhadap persamaan dasar sehingga didapat suatu penyelesaian yang berlaku untuk setiap titik dalam domain yang menjadi perhatian (Anonymous, 2003).

Dalam penyelesaian persamaan diferensial parsial dikenal istilah penyelesaian umum dan penyelesaian khusus. Penyelesaian umum adalah suatu penyelesaian yang terdiri dari sejumlah fungsi bebas sembarang yang jumlahnya sesuai dengan orde persamaannya. Sedangkan penyelesaian khusus adalah penyelesaian yang bisa didapatkan dari penyelesaian umumnya dengan pilihan khusus dari fungsi sembarang (Spigel, 1983: 2). Sebagai contoh $u = x^2y - \frac{1}{2}xy^2 + F(x) + G(y)$ merupakan penyelesaian dari persamaan $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2x - y$. Penyelesaian ini disebut sebagai penyelesaian umum karena terdiri dari dua fungsi bebas sembarang yaitu $F(x)$ dan $G(y)$. secara khusus kalau $F(x) = 2 \sin x$, $G(y) = 3y^4 - 5$, akan ditemukan penyelesaian khususnya sebagai berikut $u = x^2y - \frac{1}{2}xy^2 + 2 \sin x + 3y^4 - 5$.

Untuk mendapatkan penyelesaian analitik dari persamaan diferensial parsial, maka yang harus menentukan penyelesaian masalah nilai batas dengan menggunakan metode pemisahan variabel. Masalah nilai batas (MNB) melibatkan suatu persamaan diferensial parsial dan semua penyelesaiannya yang memenuhi syarat yang dinamakan syarat batas (Spiegel, 1983: 276).

Misal persamaan diferensial linear orde dua:

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \quad (2.40)$$

dimana koefisien-koefisien $a_2(x), a_1(x), a_0(x)$ dan fungsi $f(x)$ merupakan fungsi-fungsi yang kontinu di dalam selang $a \leq x \leq b$ dengan $a_2(x) \neq 0$ di dalam selang ini. Menentukan penyelesaian $y(x)$ dari persamaan diferensial (2.40) pada sebuah titik $x = x_0$ di dalam selang $a \leq x \leq b$ dan memenuhi dua syarat awal yang diberikan

$$y(x_0) = y_0 \quad \text{dan} \quad y'(x_0) = y_1 \quad (2.41)$$

merupakan suatu *masalah nilai awal* (MNA). Dalam banyak MNA variabel bebas x dari persamaan diferensial pada umumnya menyatakan waktu, x_0 menyatakan waktu awal dan y_0 dan y_1 menyatakan syarat awal. Bila variabel x bebas merupakan variabel yang menyatakan tempat (*space variabel*), maka mencari suatu penyelesaian $y(x)$ dari persamaan diferensial yang memenuhi syarat pada titik akhir dari selang $a \leq x \leq b$

$$y(a) = A \quad \text{dan} \quad y(b) = B \quad (2.42)$$

dengan A dan B dua buah konstanta, disebut *syarat batas*. Persamaan diferensial (2.40), bersama-sama dengan syarat batas (2.42), merupakan suatu *masalah nilai batas* (MNB). Bentuk dari syarat batas pada titik akhir dapat sangat berbeda-beda (Finzio dan Ladas, 1982: 244).

Beberapa bentuk khusus syarat batas yang digunakan dalam aplikasi, yaitu (Nagle, 1996: 612):

1. Kondisi batas Separated

$$a_1y(a) + a_2y'(a) = c_1, \quad b_1y(b) + b_2y'(b) = c_2,$$

2. Kondisi batas Dirichlet

$$y'' + \lambda y = 0; \quad y(0) = y(L) = 0$$

Yang mana nilai eigennya $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$, dimana $n = 1, 2, 3, \dots$, dan fungsi eigennya adalah:

$$\phi_n(x) = a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

dimana a_n adalah konstanta tidak nol.

3. Kondisi batas Neumann

$$y'' + \lambda y = 0; \quad y'(0) = y'(L) = 0$$

Yang mana nilai eigennya $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$, dimana $n = 1, 2, 3, \dots$, dan fungsi eigennya adalah:

$$\phi_n(x) = c_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

dimana c_n adalah konstanta tidak nol.

4. Kondisi batas Periodik

$$y'' + \lambda y = 0; \quad y(-\pi) = y(\pi), \quad y'(-\pi) = y'(\pi).$$

Yang mana nilai eigennya $\lambda_n = n^2$, dimana $n = 1, 2, 3, \dots$, dan fungsi eigennya adalah:

$$\phi_0(x) = A_0, \quad \phi_n(x) = A_n \cos nx + B_n \sin nx; \quad n \geq 1,$$

dimana A_n dan B_n adalah konstanta tidak nol untuk keduanya.

bentuk Dirichlet dan Neumann adalah syarat batas yang khusus digunakan pada masalah nilai batas (Nagle, 1996: 612).

Solusi nontrivial dalam masalah nilai batas biasa disebut dengan nilai eigen (*eigen value*). Nilai eigen sangat penting dalam mencari solusi persamaan diferensial parsial dengan menggunakan metode pemisahan variabel (*separation of variables*) (Nagle, 1996: 615).

Dari penjabaran di atas diketahui bahwa nilai batas yang digunakan pada Persamaan Helmholtz (2.26) adalah menggunakan kondisi batas periodik, yaitu $0 \leq x \leq 2\pi$, $\pi \leq y \leq 3\pi$ dan $-\pi \leq z \leq \pi$ (Anonymous, 2011).

Berikut ini diberikan ilustrasi penerapan prosedur analitik untuk persamaan Laplace dua dimensi, yaitu (Nagle, 1993:589-590):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \quad (2.43)$$

dengan *boundary condition*:

$$u(x, 0) = f(x); \quad 0 < x < a \quad (2.44)$$

$$u(y, 0) = f(y); \quad 0 < y < b \quad (2.45)$$

misal:

$$u(x, y) = X(x)Y(y) \quad (2.46)$$

$$\text{maka } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x)Y(y) \text{ dan } \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = X(x)Y''(y). \quad (2.47)$$

Substitusi (2.47) ke persamaan (2.43), sehingga menghasilkan:

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0 \quad (2.48)$$

dan pemisahan variabel dari persamaan (2.48) adalah:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = K \quad (2.49)$$

atau

$$X''(x) - KX(x) = 0 \quad (2.50)$$

$$Y''(y) + KY(y) = 0 \quad (2.51)$$

dimana K adalah konstanta tidak nol.

Dengan mengombinasi *boundary condition* (2.44) dan persamaan (2.50) maka:

$$X''(x) - KX(x) = 0; \quad X(0) = X(a) = 0 \quad (2.52)$$

untuk menyelesaikan persamaan (2.52) maka kita bawa ke bentuk persamaan diferensial biasa $m^2 - K = 0$.

Untuk penyelesaiannya maka terdapat tiga kasus, yaitu:

1. Kasus 1: Jika $K > 0$, maka akar-akarnya adalah $\pm\sqrt{K}$. Maka solusi umum dari persamaan (2.52) adalah:

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{K}x} + C_2 e^{-\sqrt{K}x} \quad (2.53)$$

untuk menentukan C_1 dan C_2 maka kita kombinasikan dengan *boundary condition* nya sehingga:

$$X(0) = C_1 + C_2 = 0$$

$$C_2 = -C_1$$

Sehingga diperoleh:

$$C_2 = -C_1 \quad (2.54)$$

Sedangkan untuk $X(a)$, adalah:

$$X(a) = C_1 e^{\sqrt{k} a} + C_2 e^{-\sqrt{k} a} = 0 \quad (2.55)$$

Substitusikan persamaan (2.54) ke persamaan (2.55) maka didapatkan:

$$\begin{aligned} X(a) &= C_1 e^{\sqrt{k} a} - C_1 e^{-\sqrt{k} a} = 0 \\ &= C_1 (e^{\sqrt{k} a} - e^{-\sqrt{k} a}) = 0 \end{aligned} \quad (2.56)$$

Dari persamaan (2.56) diperoleh dua kesimpulan, yaitu:

$$C_1 = 0 \quad (2.57)$$

atau

$$e^{\sqrt{k} a} - e^{-\sqrt{k} a} = 0 \quad (2.58)$$

Dalam kasus ini dipilih $C_1 \neq 0$ dan $e^{\sqrt{k} a} - e^{-\sqrt{k} a} = 0$, maka:

$$e^{\sqrt{k} a} = e^{-\sqrt{k} a}$$

$$e^{\sqrt{k} a} = \frac{1}{e^{\sqrt{k} a}}$$

$$e^{\sqrt{k} a} e^{\sqrt{k} a} = 1$$

$$e^{2\sqrt{k}a} = 1$$

$$e^{2\sqrt{k}a} - 1 = 0$$

Karena $K > 0$ maka $(e^{2\sqrt{K}L} - 1) > 0$ sehingga $C_1 = C_2 = 0$ sehingga tidak ada solusi nontrivial untuk $K > 0$.

2. Kasus 2: Jika $K = 0$. Maka akar-akarnya adalah kembar, solusi umum dari persamaan (2.52) adalah:

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{k}x} + x C_2 e^{-\sqrt{k}x} \quad (2.59)$$

untuk menentukan C_1 dan C_2 maka kita kombinasikan dengan *boundary condition*-nya $0 \leq x \leq a$, sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} X(0) &= C_1 e^{\sqrt{k} \cdot 0} + (0) C_2 e^{-\sqrt{k} \cdot 0} = 0 \\ &= C_1 e^0 = 0 \\ &= C_1 = 0 \end{aligned}$$

maka didapatkan:

$$C_1 = 0 \quad (2.60)$$

Sedangkan untuk $X(a)$, adalah:

$$X(a) = C_1 e^{\sqrt{k}a} + (a) C_2 e^{-\sqrt{k}a} = 0 \quad (2.61)$$

Substitusikan persamaan (2.60) ke persamaan (2.61) maka didapatkan:

$$X(a) = (a) C_2 e^{-\sqrt{k}a} = 0 \quad (2.62)$$

sehingga

$$C_2 = 0 \quad (2.63)$$

Sehingga $C_1 = C_2 = 0$. Karena $K = 0$ maka tidak ada solusi nontrivial untuk persamaan (2.51).

3. Kasus 3: Jika $K < 0$. Maka akar-akarnya adalah $\pm i\sqrt{-K}$. Maka solusi umum dari persamaan (2.52) adalah:

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{-K}x + C_2 \sin \sqrt{-K}x \quad (2.64)$$

karena *boundary condition* pada persamaan (2.52) maka menghasilkan:

$$X(0) = C_1 \cos \sqrt{-k} 0 + C_2 \sin \sqrt{-k} 0 = 0$$

maka didapatkan:

$$C_1 = 0 \quad (2.65)$$

Sedangkan untuk $X(a)$, adalah:

$$X(a) = C_1 \cos \sqrt{-k} a + C_2 \sin \sqrt{-k} a = 0 \quad (2.66)$$

Substitusikan persamaan (2.65) ke persamaan (2.66) maka didapatkan:

$$X(a) = C_2 \sin \sqrt{-k} a = 0 \quad (2.67)$$

maka $C_2 = 0$ atau $\sin \sqrt{-K}x = 0$. $\sin \sqrt{-K}x = 0$ hanya ketika $\sqrt{-K}x = n\pi$

atau $K = -\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$, dengan $n = 1, 2, 3, \dots$

Maka solusi nontrivial nya adalah:

$$X_n(x) = a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \quad (2.68)$$

dimana a_n adalah konstan.

Karena kita punya $K = K_n = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ pada persamaan (3.56) maka penyelesaian untuk Y adalah:

$$Y_0(y) = A_0 + B_0 y \quad (2.69)$$

sehingga:

$$Y_n(y) = A_n \cosh\left(\frac{n\pi y}{a}\right) + B_n \sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right); \quad n = 1, 2, \dots$$

dimana (untuk fungsi trigonometri) dapat ditulis dalam bentuk:

$$Y_0(y) = A_0 + B_0 y, \quad Y_n(y) = C_n \sinh\left(\frac{n\pi}{a}(y + D_n)\right) \quad (2.70)$$

untuk $n = 1, 2, \dots$ dimana C_n dan D_n adalah konstanta.

Untuk kondisi batas $(x, b) = 0$, apabila $y = b$ maka persamaan (2.70) menjadi:

$$A_0 + B_0 b = 0, \quad \text{dan} \quad C_n \sinh\left(\frac{n\pi}{a}(b + D_n)\right) = 0 \quad (2.71)$$

untuk $n = 1, 2, \dots$

Dari persamaan (2.71) asumsikan $A_0 = -bB_0$ dan $D_n = -b$. Substitusikan asumsi tersebut ke persamaan (2.69) dan (2.70), maka akan menghasilkan solusi:

$$\begin{aligned}
u_0(x, y) &= X_0(x)Y_0(y) = a_0B_0(y - b) = E_0(y - b), \\
u_n(x, y) &= X_n(x)Y_n(y) = a_n \cos\left(\frac{n\pi}{a}\right) C_n \sinh\left[\frac{n\pi}{a}(y - b)\right] \\
&= E_n \cos\left(\frac{n\pi}{a}\right) \sinh\left[\frac{n\pi}{a}(y - b)\right]; \quad n = 1, 2, \dots
\end{aligned} \tag{2.72}$$

dimana E_n adalah konstanta. Sehingga didapatkan solusi umum persamaan (2.43), yaitu:

$$u(x, y) = E_0(y - b) + \sum_{n=1}^{\infty} E_n \cos\left(\frac{n\pi}{a}\right) \sinh\left[\frac{n\pi}{a}(y - b)\right] \tag{2.73}$$

Persamaan Helmholtz adalah persamaan dari tipe eliptik, yang lazimnya untuk mempertimbangkan masalah nilai batas. Kondisi batas mengikuti dari hukum-hukum fisika tertentu (persamaan konservasi) dirumuskan pada batas-batas domain di mana solusi diperlukan. Domain ini dapat hingga (masalah internal) atau tak terbatas (masalah eksternal). Untuk domain yang tak terbatas, solusi harus memenuhi beberapa kondisi di tak terhingga itu. Kondisi ini juga memiliki asal fisik (Anonymous, 2011:15).

2.4 Kaidah Umum Penyelesaian Numerik Persamaan Diferensial Parsial

Metode numerik Triatmodjo (2002:1) adalah teknik untuk menyelesaikan permasalahan-permasalahan yang diformulasikan secara matematis dengan cara operasi hitungan (*arithmetic*). Untuk menyelesaikan permasalahan ini biasanya digunakan penyelesaian numerik, di mana persamaan dasar diubah menjadi persamaan yang hanya berlaku pada titik-titik tertentu di dalam domain penyelesaian. Pengubahan persamaan tersebut dapat menggunakan metode

elemen hingga atau pun metode beda hingga. Untuk permasalahan satu dimensi, metode yang umum digunakan adalah metode beda hingga karena mudah digunakan dan lebih dahulu dikenal sehingga sifat-sifatnya sudah difahami (Anonymous, 2003)

Perbedaan utama antara metode numerik dengan metode analitik terletak pada dua hal. Pertama, solusi dengan menggunakan metode numerik selalu berbentuk angka. Bandingkan dengan metode analitik yang biasanya menghasilkan solusi dalam bentuk fungsi matematik yang selanjutnya fungsi matematik tersebut dapat dievaluasi untuk menghasilkan nilai dalam bentuk angka. Kedua, dengan metode numerik, hanya diperoleh solusi yang menghampiri atau mendekati solusi sejati sehingga solusi numerik dinamakan juga solusi hampiran atau solusi pendekatan, namun solusi hampiran dapat dibuat seteliti yang diinginkan. Solusi hampiran jelas tidak tepat sama dengan solusi sejati, sehingga ada selisih antara keduanya. Selisih inilah yang disebut dengan galat (*error*) (Munir, 2006).

Secara garis besar model matematis dapat dibagi menjadi dua bagian yaitu persamaan aljabar dan persamaan diferensial. Model matematis yang sering muncul adalah bentuk persamaan diferensial yang mana salah satu konsep penyelesaiannya menggunakan metode beda hingga (*finite difference*) (Sasongko, 2010:61).

Metode beda hingga adalah metode yang memanfaatkan deret Taylor untuk mendekati nilai turunannya. Contoh turunan kedua dari suatu fungsi:

$$u(x_{i+1}) + u(x_{i-1}) = 2u(x_i) + 2u''(x_i) \frac{\Delta x^2}{2!} + 2u''''(x_i) \frac{\Delta x^4}{4!} + \dots$$

atau:

$$u''(x_i) = \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))}{\Delta x^2} - u''''(x_i) \frac{\Delta x^2}{12} - \dots$$

atau:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u''(x_i) = \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))}{\Delta x^2} \quad (2.74)$$

dimana:

$u(x_i)$: fungsi di titik (x_i)

$u(x_{i+1})$: fungsi di titik (x_{i+1})

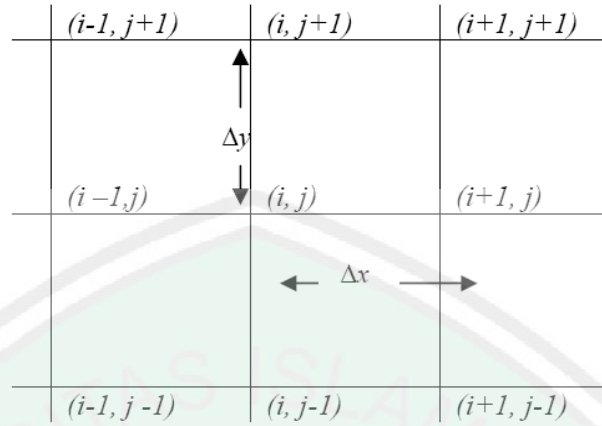
$u', u'', \dots, u^n$: turunan pertama, kedua, ..., ke n dari fungsi

Δx : langkah ruang yaitu jarak antara (x_i) dan (x_{i+1})

! : operator faktorial, misalkan bentuk $3! = 1 \times 2 \times 3$

Dari uraian di atas dapat disimpulkan bahwa bentuk diferensial (biasa ataupun parsial) dapat diubah dalam bentuk diferensial numerik (beda hingga) (Triatmodjo, 2002:11).

Metode beda hingga mempertimbangkan kondisi awal dan batas, untuk itu dibuat jaringan titik hitungan pada daerah tinjauan. Pada gambar 4 adalah jaringan titik hitung pada bidang x, y yang dapat dibagi menjadi sebuah pias segi empat dengan sisi Δx dan Δy . Panjang pias dalam arah x adalah Δx dan dalam arah y adalah Δy , seperti pada gambar berikut (Triatmodjo, 2002:202):



Gambar 2.3. Jaringan Titik Hitung Dalam Bidang $x - y$ (Triatmodjo, 2002:202).

Titik dalam ruang atau disebut titik grid (i, j) dan titik-titik grid terdekat digambarkan pada Gambar 5. Pengembangan deret Taylor di sekitar titik $u_{i,j}$ akan menghasilkan:

$$u_{i-1,j} = u_{i,j} - \Delta x u_x + \frac{(\Delta x)^2}{2!} u_{xx} - \frac{(\Delta x)^3}{3!} u_{xxx} + \frac{(\Delta x)^4}{4!} u_{xxxx} \quad (2.75)$$

$$u_{i+1,j} = u_{i,j} + \Delta x u_x + \frac{(\Delta x)^2}{2!} u_{xx} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} u_{xxx} + \frac{(\Delta x)^4}{4!} u_{xxxx} \quad (2.76)$$

Dalam hal ini, $u_x = \frac{\partial y}{\partial x}$ dan $u_{xx} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$. Semua turunan dievaluasi pada titik (i, j) (Widodo, 2011:1-2).

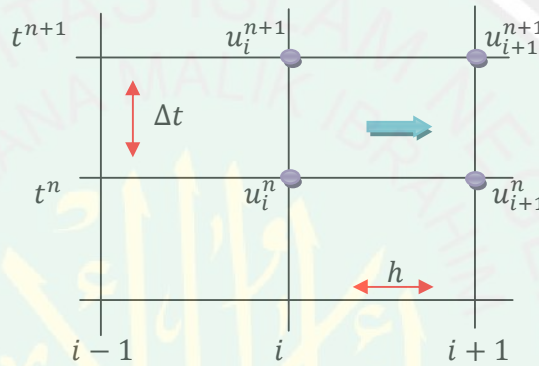
Pendekatan turunan menggunakan rumusan beda hingga dapat dilakukan dari kiri, kanan atau tengah yang akan digunakan untuk menentukan nilai fungsi pada titik tertentu yang dikenal dengan beda maju, beda mundur dan beda pusat (Anonymous, 2011).

a. Metode beda hingga maju (*forward finite differences*)

Beda hingga maju didefinisikan sebagai berikut:

$$\frac{du}{dx} = \frac{u(x_i + h) - u(x_i)}{h} \quad (2.77)$$

Pada metode beda hingga maju, informasi pada titik hitung i dihubungkan dengan titik hitung $i + 1$ yang berbeda di depannya, seperti gambar berikut ini:



Gambar 2.4. Metode Beda Hingga Maju Ruang dengan $h = x_{i+1} - x_i$ dan $\Delta t = t^{n+1} - t^n$ (universitas Sumatra utara).

Dengan menggunakan kisi beda hingga, maka metode beda hingga maju bisa ditulis sebagai berikut:

metode beda hingga maju ruang:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h} \quad \text{atau} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}}{h} \quad (2.78)$$

metode beda hingga maju waktu:

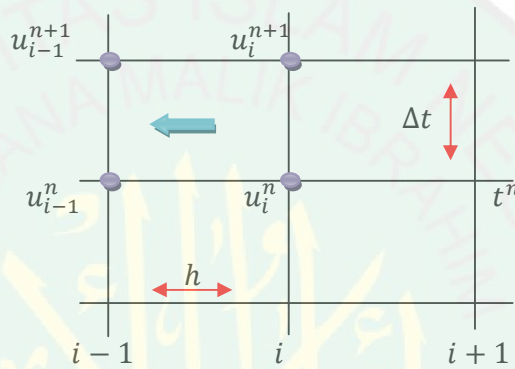
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i+1}^n}{\Delta t} \quad \text{atau} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} \quad (2.79)$$

b. Metode beda hingga mundur (*backward finite differences*)

Beda hingga mundur didefinisikan sebagai berikut:

$$\frac{du}{dx} = \frac{u(x_i) - u(x_i - h)}{h} \quad (2.80)$$

Pada metode beda hingga mundur, informasi pada titik hitung i dihubungkan dengan titik hitung $i - 1$ yang berbeda di belakangnya, seperti gambar berikut ini:



Gambar 2.5. Metode Beda Hingga Mundur (Universitas Sumatra Utara).

Dengan menggunakan kisi beda hingga, maka metode beda hingga mundur dapat ditulis sebagai berikut:

metode beda hingga mundur ruang:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h} \quad \text{atau} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{h} \quad (2.81)$$

metode beda hingga mundur waktu:

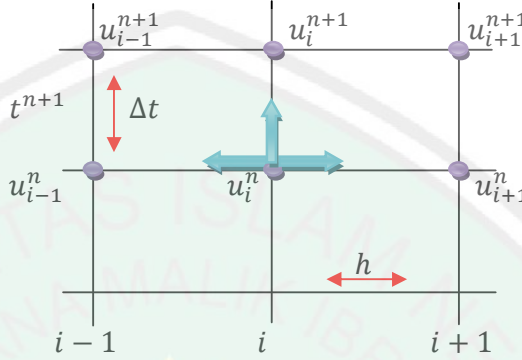
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_{i-1}^{n+1} - u_{i-1}^n}{\Delta t} \quad \text{atau} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} \quad (2.82)$$

c. Metode beda hingga pusat (*central finite differences*)

Beda hingga pusat didefinisikan sebagai berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2h} \quad \text{atau} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h} \quad (2.83)$$

Berikut gambar metode beda hingga pusat:



Gambar 2.6. Metode Beda Hingga Pusat (Universitas Sumatra Utara).

Beda hingga terhadap ruang derivasi kedua:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)}{\partial x} = \frac{\frac{u_{i+1} - u_i}{h} - \frac{u_i - u_{i-1}}{h}}{h} \\ &= \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} \end{aligned} \quad (2.84)$$

untuk t^n :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} \quad (2.85)$$

dan untuk t^{n+1} :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{h^2} \quad (2.86)$$

Sedangkan untuk beda hingga pusat terhadap waktu:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{i-1} = \frac{u_{i-1}^{n+1} - u_{i-1}^n}{\Delta t}, \quad (2.87 \text{ a})$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_i = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t}, \quad (2.87 \text{ b})$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i+1} = \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i+1}^n}{\Delta t}, \quad (2.87 \text{ c})$$

2.5 Kajian Petir Dan Kedudukan Benda Langit Dalam Al-Qur'an

Model persamaan Helmholtz tiga dimensi pada koordinat kartesian dapat diperoleh dari hasil konstruksi persamaan kelistrikan bumi. Listrik sudah ada sejak jagat raya ini ada. Bahkan saat kehidupan belum ada di planet bumi kita, Lebih dari 4 milyar tahun lalu, ledakan petir sudah menghantarkan listrik menerangi langit. Dalam al-Qur'an telah dijelaskan dalam surat an-Nûr ayat 43, yaitu:

...يَكَادُ سَنَا بَرْقِهِ يَذْهَبُ بِالْأَبْصَارِ ﴿٤٣﴾

Artinya: "... Kilat awan itu hampir-hampir menghilangkan penglihatan". (An-Nûr: 43).

Firman Allah: "*Hampir menghilangkan penglihatan*" pada surat an-Nur ayat 43 di atas maksudnya adalah kilat tersusun dari pembentukan cahaya-cahaya terang akibat pelepasan energi listrik di ruang atmosfer, yang sesungguhnya merupakan sumber energi yang menghasilkan listrik lebih besar dari pada ribuan pembangkit listrik. Satu kilatan petir dapat menyalakan 100 watt bola lampu selama lebih dari tiga bulan. Pada titik sentuh petir ke bumi, cuaca memanaskan hingga 25.000°C. Kecepatan kilatan petir 150.000 km/detik dan rata-rata ketebalannya 2,5 - 5 cm. Petir menghasilkan molekul nitrogen yang dibutuhkan

bagi tumbuh-tumbuhan di bumi untuk menunjang kehidupannya. Setiap petir rata-rata memiliki 20.000 amper daya listrik. Petir bergerak pada kecepatan 150.000 km/detik, hampir setengah kecepatan cahaya dan 100.000 kali lebih cepat dari kecepatan suara (Nainggolan, 2011).

Petir dihasilkan dari udara yang dipanaskan oleh cahaya matahari, sehingga naik membawa molekul-molekul air yang menguap di dalamnya. Ketika udara yang naik ini mencapai ketinggian 2-3 km, udara tersebut bersentuhan dengan lapisan udara dingin. Saat kenaikan udara, kristal-kristal es yang terbentuk di dalam awan melepaskan energi listrik statis yang terbentuk karena gesekan. Energi listrik ini mengandung unsur positif (+) pada lapisan atas awan dan unsur negatif (-) pada lapisan bawahnya. Ketika awan cukup terisi untuk mengionisasi udara, maka petir terbentuk (Nainggolan, 2011).

Perumpamaan awan yang mengandung kristal-kristal es telah dijelaskan dalam surat ar-Ra'd ayat 12, yaitu:

هُوَ الَّذِي يُرِيكُمُ الْبَرْقَ خَوْفًا وَطَمَعًا وَيُنْشِئُ السَّحَابَ الثِّقَالَ ﴿١٢﴾

Artinya: “Dia-lah Rabb yang memperlihatkan kilat kepadamu untuk menimbulkan ketakutan dan harapan, dan Dia mengadakan awan mendung”. (QS. Ar-Ra'd: 12).

Qatadah (Ghoffar, 2007: 484-485) mengatakan bahwa maksud dari *خَوْفًا وَطَمَعًا* yang artinya “*Menimbulkan ketakutan dan harapan.*” adalah Ketakutan untuk orang yang bepergian, karena takut tertimpa bahaya dari kilat itu, dan kesulitan yang ditimbulkannya karena setiap petir rata-rata memiliki 20.000 amper yang dapat mematikan. Sedang harapan untuk orang yang tinggal di rumah,

dengan mengharapkan berkahnya, manfaatnya, dan mengharapkan rizki dari Allah. Sedangkan kalimat وَيُنْشِئُ السَّحَابَ الثِّقَالَ yang artinya “Dan mengadakan awan yang berat (mendung).” yaitu karena awan itu mengandung banyak air yang disebabkan kristal-kristal es yang terbentuk di dalamnya, maka menjadi berat dan lebih dekat dari bumi (Ghoffar, 2007: 484-485).

Setelah proses kilat terjadi, selang beberapa detik kemudian terdengar suara gemuruh. Al-Qur'an menjelaskan dalam surat ar-Ra'd ayat 13, yaitu:

وَيُسَبِّحُ الرَّعْدُ بِحَمْدِهِ وَالْمَلَائِكَةُ مِنْ خِيفَتِهِ وَيُرْسِلُ الصَّوَاعِقَ
فَيُصِيبُ بِهَا مَنْ يَشَاءُ وَهُمْ يُجَادِلُونَ فِي اللَّهِ وَهُوَ شَدِيدُ الْمِحَالِ ﴿١٣﴾

Artinya: “Dan guruh itu bertasbih dengan memuji Allah, (demikian pula) para Malaikat karena takut kepada-Nya, dan Allah meepaskan halilintar, lalu menimpakannya kepada siapa yang Allah kehendaki, dan mereka berbantah-bantah tentang Allah, dan Allah-lah Rabb yang Mahakeras siksa-Nya.” (QS. Ar-Ra'd: 13).

Allah berfirman وَيُسَبِّحُ الرَّعْدُ بِحَمْدِهِ yang artinya “Dan guruh itu bertasbih dengan memuji Allah.” Seperti Firman Allah: وَإِنْ مِنْ شَيْءٍ إِلَّا يُسَبِّحُ بِحَمْدِهِ “Tak ada sesuatupun melainkan bertasbih dengan memuji-Nya.” Dalam surat al-Israa' ayat 44. Disini menjelaskan betapa kuasanya Allah, tidak ada daya upaya untuk menandingi kekuasaannya bahkan halilintar-pun tunduk pada-Nya. Allah juga melepaskannya sebagai kemurkaan untuk membalas orang yang dikehendaki. Qatadah mengatakan, disebutkan bahwa ada seorang laki-laki yang mengingkari Al-Qur'an dan mendustakan Nabi Muhammad, maka Allah mengutus halilintar dan menyambarnya sampai mati. Oleh karena itu petir banyak terjadi pada akhir zaman, sebagaimana diriwayatkan oleh Imam Ahmad dari Abu Sa'id al-Khudri

r.a, bahwasanya Rasulullah S.A.W bersabda: “Petir akan banyak terjadi menjelang datangnya hari kiamat, ...”. (Ghoffar, 2007: 485-486).

Salah satu pemicu terjadinya guruh adalah reaksi yang terjadi pada muatan listrik yang bernama elektron. Nilai muatan elektron ini akan kita bahas pada tulisan ini. Besar arus listrik yang mengalir sangat berpengaruh pada besarnya muatan listrik. Dengan memperhatikan nomor surat, ayat, juz dan jumlah ayat pada surat ar-Ra’ad tersebut, kita bisa mendapatkan nilai muatan elektron tersebut. Untuk menganalisa nilai muatan elektron yang ada di surat ar-Ra’d ayat 13, dijabarkan sebagai berikut:

- a. Nomor surah Ar-Ra’d (NS) = 13
- b. Nomor ayat (NAy) = 13
- c. Nomor juz (Jz) = 13
- d. Jumlah ayat surah Ar-Ra’d (JS) = 43

Rumus yang dipakai untuk menentukan nilai muatan elektron (q) menggunakan versi al-Quran, yaitu:

$$q = \frac{1}{(NS + NAy)^{Jz}} \left[\left(\frac{1}{JS^2} + \frac{NAy}{JS} + \frac{1}{Jz} \right) + \left(\frac{1}{Jz^2} + \frac{1}{NS^2} + \frac{1}{NAy^2} \right) \right]$$

Sehingga menjadi:

$$q = \frac{1}{(13 + 13)^{13}} \left[\left(\frac{1}{43^2} + \frac{13}{43} + \frac{1}{13} \right) + \left(\frac{1}{13^2} + \frac{1}{13^2} + \frac{1}{13^2} \right) \right]$$

$$= 1,6022 \times 10^{-19}$$

Inilah yang merupakan hasil dari muatan elektron (Misbah, 2008).

Saat ini, para ilmuwan sedikit demi sedikit mulai mengungkap misteri listrik. Kemajuan dalam pengungkapan ini berhubungan erat dengan kemajuan ilmu pengetahuan lain. Para penemu telah mengubah energi listrik yang sebelumnya tak terkontrol menjadi sesuatu yang sangat bermanfaat bagi kita. Dari pembahasan di atas kita ketahui betapa besar nikmat serta rahmat Allah S.W.T yang telah Ia berikan kepada kita. Hal ini merupakan bukti dari lemah-lembut serta kasih-sayang-Nya kepada makhluk-Nya.

Kasih sayang Allah kepada makhluk-Nya tidak hanya dalam kelistrikan saja, Allah S.W.T. juga menciptakan alam semesta ini dalam keadaan yang teratur rapi. Keteraturan gerakan bintang termasuk matahari, planet, satelit, komet dan benda langit lainnya dapat dipelajari dengan seksama. Dengan memahami gerakan benda-benda langit tersebut, manusia dapat memperkirakan peristiwa-peristiwa yang terjadi di masa depan dengan akurat. Kapan matahari terbenam, kapan terjadi bulan purnama, kapan terjadi gerhana matahari dapat dihitung dengan ketelitian tinggi. Untuk memudahkan pemahaman terhadap posisi benda-benda langit, diperkenalkan beberapa sistem koordinat. Setiap sistem koordinat memiliki koordinat masing-masing. Posisi benda langit seperti matahari dapat dinyatakan dalam sistem koordinat tertentu. Selanjutnya nilainya dapat diubah ke dalam sistem koordinat yang lain melalui suatu transformasi koordinat. Hal ini sesuai dengan firmanNya dalam al-Qur'an surat al-Furqaan ayat 2, yaitu:

الَّذِي لَهُ مُلْكُ السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضِ وَلَمْ يَتَّخِذْ وَلَدًا وَلَمْ يَكُنْ لَهُ شَرِيكٌ فِي الْمُلْكِ وَخَلَقَ كُلَّ

شَيْءٍ فَقَدَرَهُ تَقْدِيرًا ﴿٢﴾

Artinya: “Yang kepunyaan-Nya-lah kerajaan langit dan bumi, dan dia tidak mempunyai anak, dan tidak ada sekutu baginya dalam kekuasaan(Nya), dan dia telah menciptakan segala sesuatu, dan dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya” (Q.S. Al-Furqaan: 2).

Maksud dari surat al-Furqaan ayat 2 adalah alam semesta beserta isinya diciptakan Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti dengan sifat dan fungsinya masing-masing, sehingga adanya fenomena alam Allah juga melengkapinya dengan penyelesaian dalam bentuk suatu ilmu pengetahuan. Seperti kapan terjadi gerhana matahari, siang-malam atau gerhana bulan. Hal tersebut dapat dihitung dengan ketelitian tinggi dalam perhitungan-perhitungan yang mapan, rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi oleh manusia dengan memperhatikan letak matahari, bumi, bulan dan lainnya.

Untuk menyatakan posisi sebuah benda di dalam ruang, dibutuhkan suatu sistem koordinat yang memiliki pusat koordinat (*origin*) dan sumbu koordinat (*axis*). System koordinat yang paling dasar atau sederhana adalah kartesian (*cartesian*). Di dalam koordinat ini kita dapat mengetahui posisi sebuah benda sehingga kita mampu mempelajari benda tersebut dengan mudah. Hal ini juga merupakan kasih sayang serta nikmat dan rahmat Allah kepada makhluk-Nya (Anonymous, 2011).

Selain nikmat atau rahmat yang diberikan, Allah S.W.T juga memberikan ujian atau masalah pada kehidupan manusia. Setiap permasalahan yang diberikan kepada manusia tidak lain adalah untuk dihadapi dan dicari selesaianannya. Dimana

permasalahan tersebut adalah sebagai bentuk ujian Allah terhadap hambanya, sebagaimana dijelaskan di dalam surat al-Ankabuut ayat 2 – 3, yaitu:

أَحْسِبَ النَّاسُ أَنْ يُتْرَكُوا أَنْ يَقُولُوا ءَامَنَّا وَهُمْ لَا يُفْتَنُونَ ۖ وَلَقَدْ فَتَنَّا الَّذِينَ
مِنْ قَبْلِهِمْ فَلَيَعْلَمَنَّ اللَّهُ الَّذِينَ صَدَقُوا وَلَيَعْلَمَنَّ الْكَاذِبِينَ ۚ

Artinya: “ Apakah manusia itu mengira bahwa mereka dibiarkan (saja) mengatakan: “kami telah beriman”, sedang mereka tidak diuji lagi? (2). Dan sesungguhnya kami telah menguji orang-orang yang sebelum mereka, maka sesungguhnya Allah mengetahui orang-orang yang benar dan sesungguhnya Dia mengetahui orang-orang yang dusta” (3) (Q.S Al-Ankabuut: 2-3).

Dalam tafsir Ibnu Katsir dijelaskan bahwa Allah harus menguji hambanya yang beriman sesuai dengan keimanan yang mereka miliki. Sebagaimana dijelaskan dalam hadist shahih: “ manusia yang paling berat ujiannya adalah para Nabi, kemudian orang-orang shalih, kemudian yang semisal dan seterusnya”. Seseorang diuji sesuai tingkat keimanan yang mereka miliki. Pada ayat ketiga ke-3, Ibnu Katsir menjelaskan bahwa orang-orang yang jujur dalam pengakuan keimanannya dari orang-orang yang dusta dalam perkataan dan pengakuannya. Allah mengetahui apa yang telah ada, seandainya ada dan bagaimana adanya (Ghoffar, 2006: 310).

Ujian yang diberikan Allah kepada hambanya, sering disebut atau dianggap sebagai suatu permasalahan. Maka sebagaimana disebutkan dalam surat al-Baqaraah ayat 268 bahwa Allah tidak memberikan suatu ujian pada seseorang hamba melebihi batas kemampuannya.

Setiap permasalahan atau ujian yang diberikan Allah selalu dilengkapi dengan solusinya, sebagaimana dalam surat al-Insyiroh ayat 5-6), yaitu:

فَإِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ۖ إِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ۚ

Artinya: "Karena Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan (5). Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan"(6) (Q.S Al-Insyiroh:5-6).

Dalam tafsir Juz Amma disebutkan bahwa ayat ini memberikan kekuatan pada manusia untuk terus berusaha mengembangkan dan berusaha belajar baik dalam keimanan, ibadah, beramal dan dalam bidang kecerdasan akal. Al-Qur'an menganjurkan untuk terus berkarya dan tidak boleh berputus asa dalam menghadapi dan mencari solusi (Misbah, 1998:110).

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Analisis Penyelesaian Analitik Persamaan Helmholtz Pada Koordinat Kartesian

Persamaan Helmholtz merupakan persamaan tipe Eliptik yang biasanya berhubungan dengan masalah keseimbangan atau kondisi permanen (tidak bergantung waktu) dan penyelesaiannya memerlukan kondisi batas yang bersifat periodik di sekeliling daerah tinjauan. Pada gambar 3.1 merupakan daerah tinjau yang apabila dibagi menjadi sejumlah pias dengan jarak antara pias Δx , Δy dan Δz masing-masing adalah $\frac{\pi}{10}$. Perhatikan persamaan Helmholtz tiga dimensi pada koordinat kartesian berikut ini:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = S \quad (3.1)$$

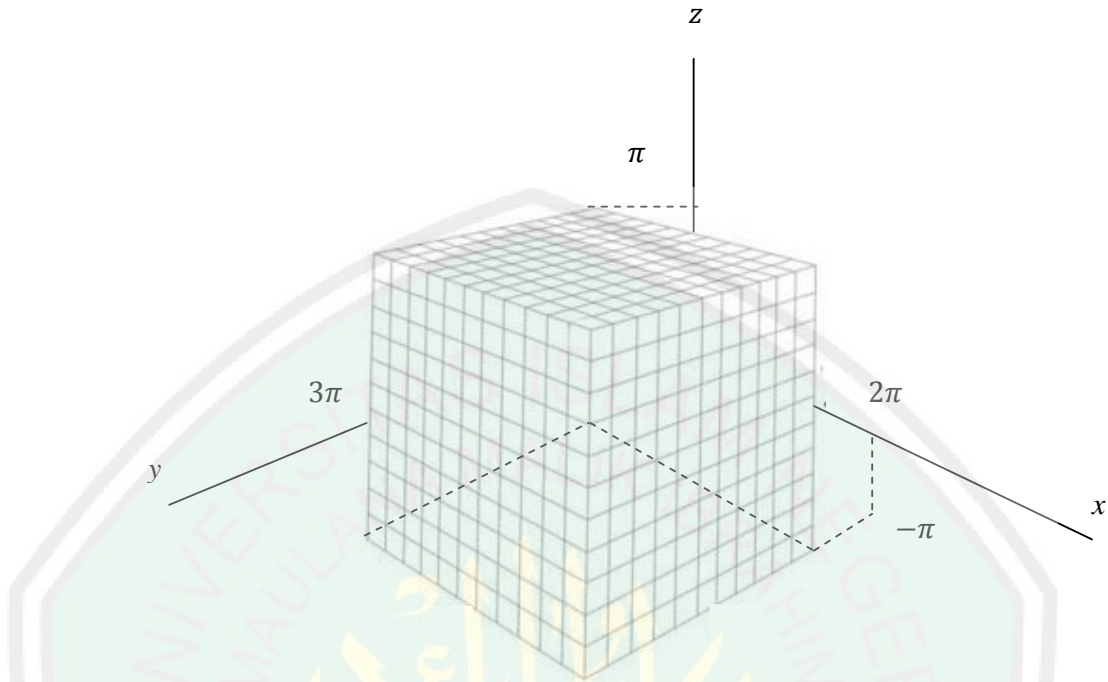
dengan memberikan syarat batas (*boundary condition*):

$$V(0, \pi, -\pi) = V(2\pi, 3\pi, \pi) = 0 \quad (3.2)$$

yaitu

$$0 \leq x \leq 2\pi, \quad \pi \leq y \leq 3\pi, \quad -\pi \leq z \leq \pi \quad (3.3)$$

Untuk mengetahui gambar daerah tinjauan pada persamaan (3.1), maka diasumsikan bahwa persamaan Helmholtz dikerjakan pada permukaan tanah tak berkontur. Selanjutnya daerah tinjauan dapat dilihat sebagai berikut:



Gambar 3.1: Jaringan Titik Hitung Pada Daerah Tinjauan Persamaan Helmholtz (Anonymous, 2011).

Selanjutnya prosedur penyelesaian secara analitik untuk persamaan (3.1) adalah dengan mendefinisikan bahwa:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = X''(x)Y(y)Z(z) \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = X(x)Y''(y)Z(z) \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = X(x)Y(y)Z''(z) \quad (3.6)$$

Substitusi persamaan (3.1) ke persamaan (3.4), (3.5), (3.6) sehingga menghasilkan:

$$X''(x)Y(y)Z(z) + X(x)Y''(y)Z(z) + X(x)Y(y)Z''(z) = S \quad (3.7)$$

Persamaan (3.8) dibagi dengan $V(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$, dan mengasumsikan

$S = \frac{1}{2}$, sehingga menjadi:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} = \frac{1}{2} \quad (3.8)$$

Selanjutnya pemisahan variabel dari persamaan (3.8), yaitu dipisah sebagai fungsi dalam x saja, y saja dan z saja, sehingga untuk fungsi x menjadi:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{2} - \frac{Y''(y)}{Y(y)} - \frac{Z''(z)}{Z(z)} \quad (3.9)$$

Dimisalkan ruas kanan dari persamaan (3.9) bernilai konstanta k tidak nol sehingga menjadi:

$$\frac{1}{2} - \frac{Y''(y)}{Y(y)} - \frac{Z''(z)}{Z(z)} = k \quad (3.10)$$

Sehingga mengakibatkan:

$$X''(x) - kX(x) = 0 \quad (3.11)$$

Persamaan (3.11) ekuivalen dengan bentuk:

$$m^2 - k = 0 \quad (3.12)$$

yaitu:

$$m^2 = k \quad (3.13)$$

Sehingga akar-akar karakteristik dari persamaan (3.13) yaitu:

$$m_{12} = \pm\sqrt{k} \quad (3.14)$$

Untuk penyelesaiannya terdapat tiga kasus yang harus ditinjau, yaitu:

1. Kasus 1: Jika $k > 0$, ketika akar-akarnya berbeda yaitu $\pm\sqrt{k}$, mengakibatkan solusi umum dari persamaan (3.14) adalah:

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{k}x} + C_2 e^{-\sqrt{k}x}. \quad (3.15)$$

Untuk menentukan C_1 dan C_2 maka kita kombinasikan dengan *boundary condition*-nya $0 \leq x \leq 2\pi$, sehingga diperoleh:

$$X(0) = C_1 e^{\sqrt{k}(0)} + C_2 e^{-\sqrt{k}(0)} = 0. \quad (3.16)$$

Bentuk di atas dapat dinyatakan kembali sebagai:

$$C_1 + C_2 = 0$$

maka didapatkan:

$$C_2 = -C_1. \quad (3.17)$$

Sedangkan untuk $X(2\pi)$ adalah:

$$X(2\pi) = C_1 e^{\sqrt{k}2\pi} + C_2 e^{-\sqrt{k}2\pi} = 0. \quad (3.18)$$

Substitusikan persamaan (3.17) ke persamaan (3.18) maka didapatkan:

$$C_1 e^{\sqrt{k}2\pi} - C_1 e^{-\sqrt{k}2\pi} = 0. \quad (3.19)$$

Persamaan di atas dapat dinyatakan kembali sebagai:

$$C_1 (e^{\sqrt{k}2\pi} - e^{-\sqrt{k}2\pi}) = 0 \quad (3.20)$$

dari persamaan (3.20) diperoleh dua kesimpulan, yaitu:

$$C_1 = 0 \quad \text{atau} \quad e^{\sqrt{k}2\pi} - e^{-\sqrt{k}2\pi} = 0. \quad (3.21)$$

Dalam kasus ini dipilih $C_1 \neq 0$ dan $e^{\sqrt{k}2\pi} - e^{-\sqrt{k}2\pi} = 0$, maka:

$$e^{\sqrt{k}2\pi} = e^{-\sqrt{k}2\pi}. \quad (3.22)$$

Sehingga persamaan (3.22) dapat dinyatakan kembali sebagai berikut:

$$e^{2\sqrt{k}4\pi} = 1 \quad (3.23)$$

sehingga didapatkan:

$$2\sqrt{k} \, 4\pi = 0. \quad (3.24)$$

Oleh karena itu dari persamaan (3.15) dan (3.16) dapat disimpulkan bahwa $C_1 = C_2 = 0$ sehingga tidak ada solusi nontrivial untuk kasus $k > 0$.

2. Kasus 2: Jika $k = 0$, maka akar-akarnya adalah kembar, mengakibatkan solusi umum dari persamaan (3.14) adalah:

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{k}x} + x C_2 e^{-\sqrt{k}x}. \quad (3.25)$$

Untuk menentukan C_1 dan C_2 maka kita kombinasikan dengan *boundary condition*-nya $0 \leq x \leq 2\pi$, sehingga diperoleh:

$$X(0) = C_1 e^{\sqrt{k}(0)} + (0) C_2 e^{-\sqrt{k}(0)} = 0. \quad (3.26)$$

Maka dapat dinyatakan kembali sebagai berikut:

$$C_1 e^0 + (0) C_2 e^0 = 0 \quad (3.27)$$

maka didapatkan:

$$C_1 = 0. \quad (3.28)$$

Sedangkan untuk $X(2\pi)$, adalah:

$$X(2\pi) = C_1 e^{\sqrt{k}2\pi} + 2\pi C_2 e^{-\sqrt{k}2\pi} = 0. \quad (3.29)$$

Substitusikan persamaan (3.28) ke persamaan (3.29) maka didapatkan:

$$2\pi C_2 e^{-\sqrt{k}2\pi} = 0 \quad (3.30)$$

sehingga:

$$C_2 = 0. \quad (3.31)$$

Oleh karena itu, dari persamaan (3.28) dan (3.31) maka dapat disimpulkan bahwa jika $k = 0$ maka $C_1 = C_2 = 0$, artinya $X(x)$ identik dengan 0 (nol). sehingga dapat disimpulkan bahwa tidak terdapat solusi *nontrivial* pada kasus $k = 0$.

3. Kasus 3: Jika $k < 0$, mengakibatkan solusi umum dari persamaan (3.14) adalah:

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{-k} x + C_2 \sin \sqrt{-k} x. \quad (3.32)$$

Untuk menentukan C_1 dan C_2 maka kita kombinasikan dengan *boundary condition*-nya $0 \leq x \leq 2\pi$, sehingga diperoleh:

$$X(0) = C_1 \cos \sqrt{-k} (0) + C_2 \sin \sqrt{-k} (0) = 0 \quad (3.33)$$

maka didapatkan:

$$C_1 = 0. \quad (3.34)$$

Sedangkan untuk $X(2\pi)$, adalah:

$$X(2\pi) = C_1 \cos \sqrt{-k} 2\pi + C_2 \sin \sqrt{-k} 2\pi = 0. \quad (3.35)$$

Substitusikan persamaan (3.34) ke persamaan (3.35) maka didapatkan:

$$C_2 \sin \sqrt{-k} 2\pi = 0. \quad (3.36)$$

Dari persamaan (3.36) diperoleh dua kesimpulan, yaitu:

$$C_2 = 0 \text{ atau } \sin \sqrt{-k} 2\pi = 0. \quad (3.37)$$

Persamaan (3.37) $\sin \sqrt{-k} 2\pi = 0$ hanya ketika $\sqrt{-k} 2\pi = n\pi$ atau:

$$k = -\left(\frac{n}{2}\right)^2 \quad (3.38)$$

dengan $n = 0, 1, 2, \dots$.

Sehingga solusi khusus untuk persamaan (3.14) adalah:

$$X_n(x) = a_n \sin\left(\frac{n}{2}\right)x \quad (3.39)$$

yang merupakan penyelesaian Laplacian terhadap x dimana a_n adalah konstan. Dan sedangkan jika $C_1 \neq 0$ maka tidak ada solusi nontrivial pada $X(x)$.

Mengingat persamaan (3.11) yaitu:

$$\frac{1}{2} - \frac{Y''(y)}{Y(y)} - \frac{Z''(z)}{Z(z)} = k$$

dengan mensubstitusikan persamaan (3.38) ke persamaan (3.12), maka akan mendapatkan:

$$\frac{1}{2} - \frac{Y''(y)}{Y(y)} - \frac{Z''(z)}{Z(z)} = -\left(\frac{n}{2}\right)^2 \quad (3.40)$$

atau:

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} = \frac{2 + n^2}{4}. \quad (3.41)$$

Selanjutnya pemisahan variabel dari persamaan (3.41), sehingga untuk fungsi y menjadi:

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \frac{2 + n^2}{4} - \frac{Z''(z)}{Z(z)} \quad (3.42)$$

Dengan memisalkan ruas kanan dari persamaan (3.42) bernilai konstanta k_1 tidak nol yakni:

$$\frac{2+n^2}{4} - \frac{Z''(z)}{Z(z)} = k_1. \quad (3.43)$$

Sehingga mengakibatkan:

$$\begin{aligned} Y''(y) &= k_1 Y(y) \\ Y''(y) - k_1 Y(y) &= 0. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Persamaan (3.44) ekuivalen dengan bentuk:

$$m^2 - k_1 = 0$$

yaitu

$$m^2 = k_1. \quad (3.45)$$

Sehingga akar-akar karakteristik dari persamaan (3.45) yaitu:

$$m_{12} = \pm\sqrt{k_1} \quad (3.46)$$

Untuk penyelesaiannya maka terdapat tiga kasus yang dapat ditinjau, yaitu:

1. Kasus 1: Jika $k_1 > 0$, ketika akar-akarnya berbeda yaitu $\pm\sqrt{k_1}$, mengakibatkan solusi umum dari persamaan (3.46) adalah:

$$Y(y) = C_3 e^{\sqrt{k_1} y} + C_4 e^{-\sqrt{k_1} y}. \quad (3.47)$$

Untuk menentukan C_3 dan C_4 maka kita kombinasikan dengan *boundary condition*-nya $\pi \leq y \leq 3\pi$, sehingga diperoleh:

$$Y(\pi) = C_3 e^{\sqrt{k_1} \pi} + C_4 e^{-\sqrt{k_1} \pi} = 0$$

maka didapatkan:

$$C_4 = -C_3 e^{2\sqrt{k_1} 2\pi}. \quad (3.48)$$

Sedangkan untuk $Y(3\pi)$, adalah:

$$Y(3\pi) = C_3 e^{\sqrt{k_1} 3\pi} + C_4 e^{-\sqrt{k_1} 3\pi} = 0. \quad (3.49)$$

Substitusikan persamaan (3.48) ke persamaan (3.49) maka didapatkan:

$$Y(3\pi) = C_3 e^{\sqrt{k_1} 3\pi} - (C_3 e^{2\sqrt{k_1} 2\pi}) e^{-\sqrt{k_1} 3\pi} = 0 \quad (3.50)$$

$$C_3 \left[e^{\sqrt{k_1} 3\pi} \left[1 - e^{2\sqrt{k_1} 2\pi} \right] \right] = 0 \quad (3.51)$$

Dari persamaan (3.51) diperoleh dua kesimpulan, yaitu:

$$C_3 = 0 \text{ atau } \left[e^{\sqrt{k_1} 3\pi} \left[1 - e^{2\sqrt{k_1} 2\pi} \right] \right]. \quad (3.52)$$

Dalam kasus ini dipilih $C_3 \neq 0$ maka $\left[e^{\sqrt{k_1} 3\pi} \left[1 - e^{2\sqrt{k_1} 2\pi} \right] \right] = 0$,

sehingga:

$$e^{\sqrt{k_1} 3\pi} = e^{\sqrt{k_1} 3\pi} e^{2\sqrt{k_1} 2\pi} \quad (3.53)$$

Persamaan (3.53) dapat dituliskan:

$$e^{2\sqrt{k_1} 2\pi} = 1 \quad (3.54)$$

sehingga didapatkan:

$$2\sqrt{k_1} 2\pi = 0. \quad (3.55)$$

Oleh karena itu dari persamaan (3.48) dan (3.51) dapat disimpulkan bahwa

$C_3 = C_4 = 0$ sehingga tidak ada solusi nontrivial untuk kasus $k_1 > 0$.

2. Kasus 2: Jika $k_1 = 0$, maka akar-akarnya adalah kembar, mengakibatkan solusi umum dari persamaan (3.46) adalah:

$$Y(y) = C_3 e^{\sqrt{k_1} y} + y C_4 e^{-\sqrt{k_1} y}. \quad (3.56)$$

Untuk menentukan C_3 dan C_4 maka kita kombinasikan dengan *boundary condition*-nya $\pi \leq y \leq 3\pi$, sehingga diperoleh:

$$Y(\pi) = C_3 e^{\sqrt{k_1} \pi} + (\pi) C_4 e^{-\sqrt{k_1} \pi} = 0.$$

Maka dapat dinyatakan:

$$C_4 = -\frac{C_3 e^{2(\sqrt{k_1} \pi)}}{\pi} \quad (3.57)$$

Sedangkan untuk $Y(3\pi)$, adalah:

$$Y(3\pi) = C_3 e^{\sqrt{k_1} 3\pi} + (3\pi) C_4 e^{-\sqrt{k_1} 3\pi} = 0. \quad (3.58)$$

Substitusikan persamaan (3.57) ke persamaan (3.58) maka didapatkan:

$$Y(3\pi) = C_3 e^{\sqrt{k_1} 3\pi} - (3\pi) \frac{C_3 e^{2(\sqrt{k_1} \pi)} e^{-\sqrt{k_1} 3\pi}}{\pi} = 0$$

yang dapat dinyatakan:

$$C_3 \left[e^{\sqrt{k_1} 3\pi} - 3e^{2(\sqrt{k_1} \pi)} e^{-\sqrt{k_1} 3\pi} \right] = 0 \quad (3.59)$$

Dari persamaan (3.59) diperoleh dua kesimpulan, yaitu:

$$C_3 = 0 \text{ atau } \left[e^{\sqrt{k_1} 3\pi} - 3e^{-\sqrt{k_1} \pi} \right] = 0. \quad (3.60)$$

Dalam kasus ini dipilih $C_3 \neq 0$ dan $\left[e^{\sqrt{k_1} 3\pi} - 3e^{-\sqrt{k_1} \pi} \right] = 0$, maka:

$$e^{4\sqrt{k_1} \pi} = 3. \quad (3.61)$$

Dari persamaan (3.61) sehingga didapatkan:

$$4\sqrt{k_1} \pi = 3. \quad (3.62)$$

Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa jika $k_1 = 0$ maka $C_1 = C_2 = 0$, artinya $Y(y)$ identik dengan 0 (nol), sehingga tidak terdapat solusi *nontrivial* pada kasus $k_1 = 0$.

3. Kasus 3: Jika $k_1 < 0$ mengakibatkan solusi umum dari persamaan (3.46) adalah:

$$Y(y) = C_3 \cos \sqrt{-k_1} y + C_4 \sin \sqrt{-k_1} y. \quad (3.63)$$

Untuk menentukan C_3 dan C_4 maka kita kombinasikan dengan *boundary condition*-nya $\pi \leq y \leq 3\pi$, sehingga diperoleh:

$$Y(\pi) = C_3 \cos \sqrt{-k_1} \pi + C_4 \sin \sqrt{-k_1} \pi = 0$$

maka didapatkan:

$$C_4 = -\frac{C_3 \cos \sqrt{-k_1} \pi}{\sin \sqrt{-k_1} \pi}. \quad (3.64)$$

Sedangkan untuk $Y(3\pi)$, adalah:

$$Y(3\pi) = C_3 \cos \sqrt{-k_1} 3\pi + C_4 \sin \sqrt{-k_1} 3\pi = 0. \quad (3.65)$$

Substitusikan persamaan (3.64) ke persamaan (3.65) maka didapatkan:

$$Y(3\pi) = C_3 \cos \sqrt{-k_1} 3\pi - \frac{C_3 \cos \sqrt{-k_1} \pi}{\sin \sqrt{-k_1} \pi} \sin \sqrt{-k_1} 3\pi = 0$$

artinya:

$$C_3 \left(\cos \sqrt{-k_1} 3\pi - \frac{\cos \sqrt{-k_1} \pi \sin \sqrt{-k_1} 3\pi}{\sin \sqrt{-k_1} \pi} \right) = 0. \quad (3.66)$$

Dari persamaan (3.66) diperoleh dua kesimpulan, yaitu:

$$C_3 = 0 \text{ atau } \cos \sqrt{-k_1} 3\pi - \frac{\cos \sqrt{-k_1} \pi \sin \sqrt{-k_1} 3\pi}{\sin \sqrt{-k_1} \pi} = 0. \quad (3.67)$$

Dalam kasus ini dipilih $C_3 \neq 0$ dan $\cos \sqrt{-k_1} 3\pi - \frac{\cos \sqrt{-k_1} \pi \sin \sqrt{-k_1} 3\pi}{\sin \sqrt{-k_1} \pi} =$

0, sehingga dapat dinyatakan kembali:

$$\frac{\sin \sqrt{-k_1} \pi \cos \sqrt{-k_1} 3\pi - \cos \sqrt{-k_1} \pi \sin \sqrt{-k_1} 3\pi}{\sin \sqrt{-k_1} \pi} = 0$$

artinya:

$$\frac{\sin(\sqrt{-k_1} \pi - \sqrt{-k_1} 3\pi)}{\sin \sqrt{-k_1} \pi} = 0. \quad (3.68)$$

Sehingga:

$$\frac{-2 \sin \sqrt{-k_1} \pi \cos \sqrt{-k_1} \pi}{\sin \sqrt{-k_1} \pi} = 0 \quad (3.69)$$

diperoleh:

$$-2 \cos \sqrt{-k_1} \pi \quad (3.70)$$

Dari persamaan (3.70) maka $\sqrt{-k_1} \pi = 0$ yakni $ik_1 \pi = 0$ dipenuhi pada saat:

$$k_1 = -\left(\frac{(2n+1)\pi}{2^n}\right)^2 \quad (3.71)$$

untuk setiap $n = 1, 2, \dots$

maka solusi khusus dari pemisahan variabel terhadap y saja adalah:

$$Y(y) = 2b_n i \cos \frac{(2n+1)\pi y}{2^n} \quad (3.72)$$

adalah penyelesaian *Laplacian* terhadap sumbu y dimana b_n adalah konstan

Mengingat persamaan (3.43), maka:

$$\frac{2+n^2}{4} - \frac{Z''(z)}{Z(z)} = -\left(\frac{(2n+1)\pi}{2^n}\right)^2 \quad (3.73)$$

Selanjutnya pemisahan variabel dari persamaan (3.73), sehingga untuk fungsi z menjadi:

$$\frac{Z''(z)}{Z(z)} = \frac{2+n^2}{4} + \left(\frac{(2n+1)\pi}{2^n}\right)^2 \quad (3.74)$$

Ruas kanan dari persamaan (3.74) bernilai konstanta k_2 tidak nol sehingga menjadi:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4}n^2 + \frac{(2n+1)^2\pi^2}{(2^n)^2} = k_2 \quad (3.75)$$

Sehingga mengakibatkan:

$$Z''(z) = k_2 Z(z)$$

$$Z''(z) - k_2 Z(z) = 0. \quad (3.76)$$

Persamaan (3.76) ekuivalen dengan bentuk:

$$m^2 - k_2 = 0$$

yaitu:

$$m^2 = k_2. \quad (3.77)$$

Sehingga akar-akar kerarakteristik dari persamaan (3.77) yaitu:

$$m_{12} = \pm\sqrt{k_2}. \quad (3.78)$$

Untuk penyelesaiannya maka terdapat tiga kasus yang dapat ditinjau, yaitu:

1. Kasus 1: Jika $k_2 > 0$, ketika akar-akarnya berbeda yaitu $\pm\sqrt{k_2}$, mengakibatkan solusi umum dari persamaan (3.78) adalah:

$$Z(z) = C_5 e^{\sqrt{k_2} z} + C_6 e^{-\sqrt{k_2} z}. \quad (3.79)$$

Untuk menentukan C_5 dan C_6 maka kita kombinasikan dengan *boundary condition*-nya $-\pi \leq z \leq \pi$, sehingga diperoleh:

$$Z(-\pi) = C_5 e^{\sqrt{k_2} -\pi} + C_6 e^{-\sqrt{k_2} -\pi} = 0. \quad (3.80)$$

Maka persamaan (3.80) dapat dinyatakan kembali sebagai berikut:

$$C_6 e^{-\sqrt{k_2} -\pi} = -C_5 e^{\sqrt{k_2} -\pi} \quad (3.81)$$

Dari persamaan (3.81) dapat disimpulkan bahwa:

$$C_6 = -C_5 e^{2\sqrt{k_2} -\pi}. \quad (3.82)$$

Sedangkan untuk $Z(\pi)$, adalah:

$$Z(\pi) = C_5 e^{\sqrt{k_2} \pi} + C_6 e^{-\sqrt{k_2} \pi} = 0. \quad (3.83)$$

Substitusikan persamaan (3.82) ke persamaan (3.83) maka didapatkan:

$$Z(\pi) = C_5 e^{\sqrt{k_2} \pi} - (C_5 e^{2\sqrt{k_2} -\pi}) e^{-\sqrt{k_2} \pi} = 0. \quad (3.84)$$

Persamaan (3.84) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$C_5 \left[e^{\sqrt{k_2} \pi} - (e^{2\sqrt{k_2} -\pi} e^{-\sqrt{k_2} \pi}) \right] = 0 \quad (3.85)$$

dari persamaan (3.85) diperoleh dua kesimpulan, yaitu:

$$C_5 = 0 \text{ atau } \left[e^{\sqrt{k_2} \pi} - \left(e^{2\sqrt{k_2} - \pi} e^{-\sqrt{k_2} \pi} \right) \right] = 0. \quad (3.86)$$

Dalam kasus ini dipilih $C_5 \neq 0$ dan $\left[e^{\sqrt{k_2} \pi} - \left(e^{2\sqrt{k_2} - \pi} e^{-\sqrt{k_2} \pi} \right) \right] = 0$, maka:

$$e^{\sqrt{k_2} \pi} = e^{-3\sqrt{k_2} \pi}, \quad \forall k_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}n^2 + \frac{(2n+1)^2 \pi^2}{(2^n)^2} \quad (3.87)$$

sehingga didapatkan:

$$4 \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}n^2 + \frac{(2n+1)^2 \pi^2}{(2^n)^2}} 4\pi = 0. \quad (3.88)$$

Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa $C_5 = C_6 = 0$ sehingga tidak ada solusi nontrivial untuk kasus $k_2 > 0$.

2. Kasus 2: Jika $k_2 = 0$, maka akar-akarnya adalah kembar, mengakibatkan solusi umum dari persamaan (3.78) adalah:

$$Z(z) = C_5 e^{\sqrt{k_2} z} + z C_6 e^{-\sqrt{k_2} z}. \quad (3.89)$$

Untuk menentukan C_5 dan C_6 maka kita kombinasikan dengan *boundary condition*-nya $-\pi \leq z \leq \pi$, sehingga diperoleh:

$$Z(-\pi) = C_5 e^{\sqrt{k_2} - \pi} + (-\pi) C_6 e^{-\sqrt{k_2} - \pi} = 0. \quad (3.90)$$

Persamaan (3.90) dapat dinyatakan kembali sebagai berikut:

$$(\pi) C_6 e^{-\sqrt{k_2} - \pi} = C_5 e^{\sqrt{k_2} - \pi} \quad (3.91)$$

yakni:

$$C_6 = \frac{C_5 e^{-2\sqrt{k_2} \pi}}{\pi}. \quad (3.92)$$

Sedangkan untuk $Z(\pi)$, adalah:

$$Z(\pi) = C_5 e^{\sqrt{k_2} \pi} + (\pi) C_6 e^{-\sqrt{k_2} \pi} = 0. \quad (3.93)$$

Substitusikan persamaan (3.92) ke persamaan (3.93) maka didapatkan:

$$Z(\pi) = C_5 e^{\sqrt{k_2} \pi} + (\pi) \frac{C_5 e^{-2\sqrt{k_2} 2\pi} e^{-\sqrt{k_2} \pi}}{\pi} = 0. \quad (3.94)$$

Persamaan (3.94) dapat dinyatakan kembali sebagai berikut:

$$C_5 \left(e^{\sqrt{k_2} \pi} + e^{-2\sqrt{k_2} 2\pi} e^{-\sqrt{k_2} \pi} \right) = 0 \quad (3.95)$$

dari persamaan (3.95) diperoleh dua kesimpulan, yaitu:

$$C_5 = 0 \text{ atau } e^{\sqrt{k_2} \pi} + e^{-3\sqrt{k_2} \pi} = 0. \quad (3.96)$$

Dalam kasus ini dipilih $C_5 \neq 0$ dan $e^{\sqrt{k_2} \pi} + e^{-3\sqrt{k_2} \pi} = 0$, maka:

$$e^{\sqrt{k_2} \pi} = -e^{-3\sqrt{k_2} \pi}, \quad \forall k_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}n^2 + \frac{(2n+1)^2 \pi^2}{(2^n)^2} \quad (3.97)$$

sehingga didapatkan:

$$4 \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{4}n^2 + \frac{(2n+1)^2 \pi^2}{(2^n)^2}} 2\pi = 0. \quad (3.98)$$

Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa jika $k_2 = 0$ maka $C_5 = C_6 = 0$, artinya $Z(z)$ identik dengan 0 (nol). sehingga tidak terdapat solusi *nontrivial* pada kasus $k_2 = 0$.

3. Kasus 3: Jika $k_2 < 0$, ketika akar-akarnya kompleks yaitu $\pm i \sqrt{-k_2}$, mengakibatkan solusi umum dari persamaan (3.78) adalah:

$$Z(z) = C_5 \cos \sqrt{-k_2} z + C_6 \sin \sqrt{-k_2} z. \quad (3.99)$$

Untuk menentukan C_5 dan C_6 maka kita kombinasikan dengan *boundary condition*-nya $-\pi \leq z \leq \pi$, sehingga diperoleh:

$$Z(-\pi) = C_5 \cos \sqrt{-k_2} - \pi + C_6 \sin \sqrt{-k_2} - \pi = 0. \quad (3.100)$$

Persamaan (3.100) dapat dinyatakan kembali sebagai berikut:

$$C_6 \sin -\sqrt{-k_2} \pi = -C_5 \cos -\sqrt{-k_2} \pi \quad (3.101)$$

maka didapatkan:

$$C_6 = \frac{C_5 \cos \sqrt{-k_2} \pi}{\sin \sqrt{-k_2} \pi}. \quad (3.102)$$

Sedangkan untuk $Z(\pi)$, adalah:

$$Z(\pi) = C_5 \cos \sqrt{-k_2} \pi + C_6 \sin \sqrt{-k_2} \pi = 0. \quad (3.103)$$

Substitusikan persamaan (3.102) ke persamaan (3.103) maka didapatkan:

$$Z(\pi) = C_5 \cos \sqrt{-k_2} \pi + \frac{C_5 \cos \sqrt{-k_2} \pi}{\sin \sqrt{-k_2} \pi} \sin \sqrt{-k_2} \pi = 0. \quad (3.104)$$

Persamaan (3.104) dapat dinyatakan kembali sebagai berikut:

$$C_5 \left(\cos \sqrt{-k_2} \pi + \frac{\cos \sqrt{-k_2} \pi \sin \sqrt{-k_2} \pi}{\sin \sqrt{-k_2} \pi} \right) = 0. \quad (3.105)$$

Dari persamaan (3.105) diperoleh dua kesimpulan, yaitu:

$$C_5 = 0 \text{ atau } \cos \sqrt{-k_2} \pi + \frac{\cos \sqrt{-k_2} \pi \sin \sqrt{-k_2} \pi}{\sin \sqrt{-k_2} \pi} = 0. \quad (3.106)$$

Dalam kasus ini dipilih $C_5 \neq 0$ dan $\cos \sqrt{-k_2} \pi + \frac{\cos \sqrt{-k_2} \pi \sin \sqrt{-k_2} \pi}{\sin \sqrt{-k_2} \pi} = 0$,

maka:

$$\frac{\sin \sqrt{-k_2} \pi \cos \sqrt{-k_2} \pi + \cos \sqrt{-k_2} \pi \sin \sqrt{-k_2} \pi}{\sin \sqrt{-k_2} \pi} = 0. \quad (3.107)$$

Dari persamaan (3.107) dapat disimpulkan:

$$2 \cos(\sqrt{-k_2} \pi) = 0. \quad (3.108)$$

Dari persamaan (3.108) maka $\sqrt{-k_2} \pi = 0$ yakni $ik_2 \pi = 0$ dipenuhi pada saat:

$$k_2 = -\left(\frac{(2n+1)\pi}{2^n}\right)^2 \quad (3.109)$$

untuk setiap $n = 1, 2, \dots$

$$Z(z) = 2c_n i \cos \frac{(2n+1)\pi z}{2^n} \quad (3.110)$$

adalah penyelesaian *Laplacian* terhadap sumbu z dimana c_n adalah konstan.

Sehingga diperoleh solusi umum:

$$\left[a_n \sin\left(\frac{nx}{2}\right) \right] \left[2b_n i \cos \frac{(2n+1)\pi y}{2^n} \right] \left[2c_n i \cos \frac{(2n+1)\pi z}{2^n} \right] = \frac{1}{2}. \quad (3.111)$$

Uji keabsahan solusi:

Penyelesaian untuk $X(x)$:

$$\begin{aligned}
 X(x) &= a_n \sin\left(\frac{nx}{2}\right) \\
 X'(x) &= \frac{a_n n \cos\left(\frac{nx}{2}\right)}{2} \\
 X''(x) &= \frac{-a_n n^2 \sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{4}
 \end{aligned} \tag{3.112}$$

Substitusikan persamaan (3.112) ke persamaan (3.11), menghasilkan:

$$\frac{-a_n n^2 \sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{4} + \left(\frac{n}{2}\right)^2 a_n \sin\left(\frac{nx}{2}\right) = 0$$

Penyelesaian untuk $Y(y)$:

$$\begin{aligned}
 Y(y) &= 2b_n i \cos\frac{(2n+1)\pi y}{2^n} \\
 Y'(y) &= -\frac{2b_n i \cos\left[\frac{(2n+1)\pi y}{2^n}\right] (2n+1)\pi}{2^n} \\
 Y''(y) &= -\frac{2b_n i \cos\left(\frac{(2n+1)\pi y}{2^n}\right)^2 (2n+1)^2 \pi^2}{(2^n)^2}
 \end{aligned} \tag{3.113}$$

Substitusikan (3.113) ke persamaan (3.44):

$$-\frac{2b_n i \cos\left(\frac{(2n+1)\pi y}{2^n}\right)^2 (2n+1)^2 \pi^2}{(2^n)^2} + \left(\frac{(2n+1)\pi}{2^n}\right)^2 2b_n i \cos\frac{(2n+1)\pi y}{2^n} = 0$$

Penyelesaian untuk $Z(z)$:

$$\begin{aligned}
 Z(z) &= 2c_n i \cos \frac{(2n+1)\pi z}{2^n} \\
 Z'(z) &= - \frac{2c_n i \cos \left[\frac{(2n+1)\pi z}{2^n} \right] (2n+1)\pi}{2^n} \\
 Z''(z) &= - \frac{2c_n i \cos \left(\frac{(2n+1)\pi z}{2^n} \right)^2 (2n+1)^2 \pi^2}{(2^n)^2}.
 \end{aligned} \tag{3.114}$$

Substitusikan (3.114) ke persamaan (3.76):

$$- \frac{2c_n i \cos \left(\frac{(2n+1)\pi z}{2^n} \right)^2 (2n+1)^2 \pi^2}{(2^n)^2} + \left(\frac{(2n+1)\pi}{2^n} \right)^2 2c_n i \cos \frac{(2n+1)\pi z}{2^n} = 0$$

maka solusi (3.111) adalah solusi umum untuk persamaan (3.7).

dimana:

untuk $X(x)$:

$$X(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \left(\frac{nx}{2} \right)$$

Dalam deret Fourier dengan periode $T = 2l$ didapatkan:

$$X(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \left(\frac{nx}{2} \right)$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l X(x) \sin \left(\frac{nx}{2} \right)$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_{-l}^l X(x) \sin \left(\frac{nx}{2} \right).$$

untuk $Y(y)$:

$$Y(y) = 2b_n i \cos \frac{(2n+1)\pi y}{2^n}$$

Dalam deret Fourier dengan periode $T = 2l$ didapatkan:

$$Y(y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2b_n i \cos \frac{(2n+1)\pi y}{2^n}$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l \frac{1}{2i} Y(y) \cos \frac{(2n+1)\pi y}{2^n}$$

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l \frac{1}{2i} Y(y) \cos \frac{(2n+1)\pi y}{2^n}$$

untuk $Z(z)$:

$$Z(z) = 2c_n i \cos \frac{(2n+1)\pi z}{2^n}$$

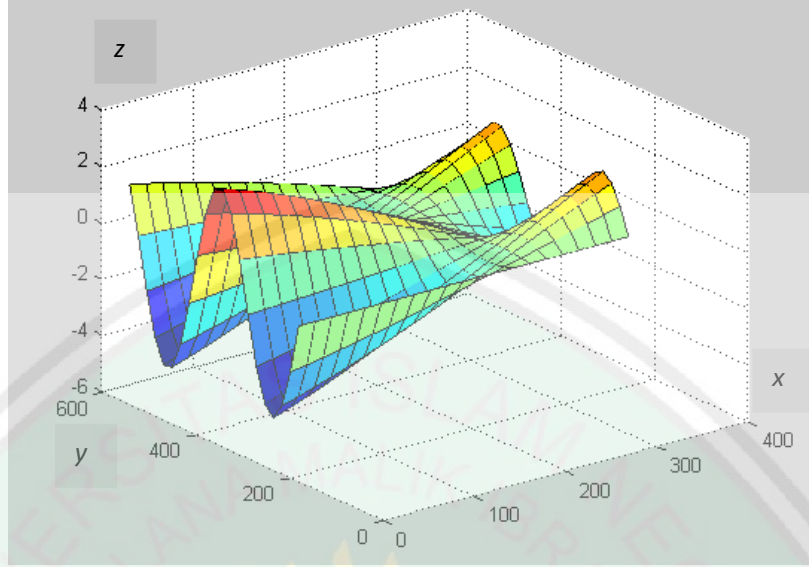
Dalam deret Fourier dengan periode $T = 2l$ didapatkan:

$$Z(z) = \sum_{n=1}^{\infty} 2c_n i \cos \frac{(2n+1)\pi z}{2^n}$$

$$c_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l \frac{1}{2i} Z(z) \cos \frac{(2n+1)\pi z}{2^n}$$

$$c_n = \frac{2}{l} \int_0^l \frac{1}{2i} Z(z) \cos \frac{(2n+1)\pi z}{2^n}$$

Untuk mengetahui gambar dari solusi analitik persamaan Helmholtz, maka diinputkan pada MATLAB. Sehingga menghasilkan gambar sebagai berikut:



Gambar 3.2 Grafik Penyelesaian Analitik dari Persamaan Helmholtz (*software Matlab*).

3.2 Analisis Penyelesaian Numerik Persamaan Helmholtz Pada Koordinat Kartesian

Penyelesaian persamaan diferensial parsial dengan kondisi batas dapat diselesaikan dengan metode beda hingga. Pandang persamaan Helmholtz (3.1) dengan syarat batas periodik yaitu $0 \leq x \leq 2\pi$, $\pi \leq y \leq 3\pi$, dan $-\pi \leq z \leq \pi$. Dengan menggunakan bentuk beda hingga pusat seperti yang diberikan dalam persamaan (2.74), maka persamaan (3.1) dapat ditulis dalam bentuk berikut ini:

$$\frac{V_{i-1,j,k} - 2V_{i,j,k} + V_{i+1,j,k}}{\Delta x^2} + \frac{V_{i,j-1,k} - 2V_{i,j,k} + V_{i,j+1,k}}{\Delta y^2} + \frac{V_{i,j,k-1} - 2V_{i,j,k} + V_{i,j,k+1}}{\Delta z^2} = S. \quad (3.115)$$

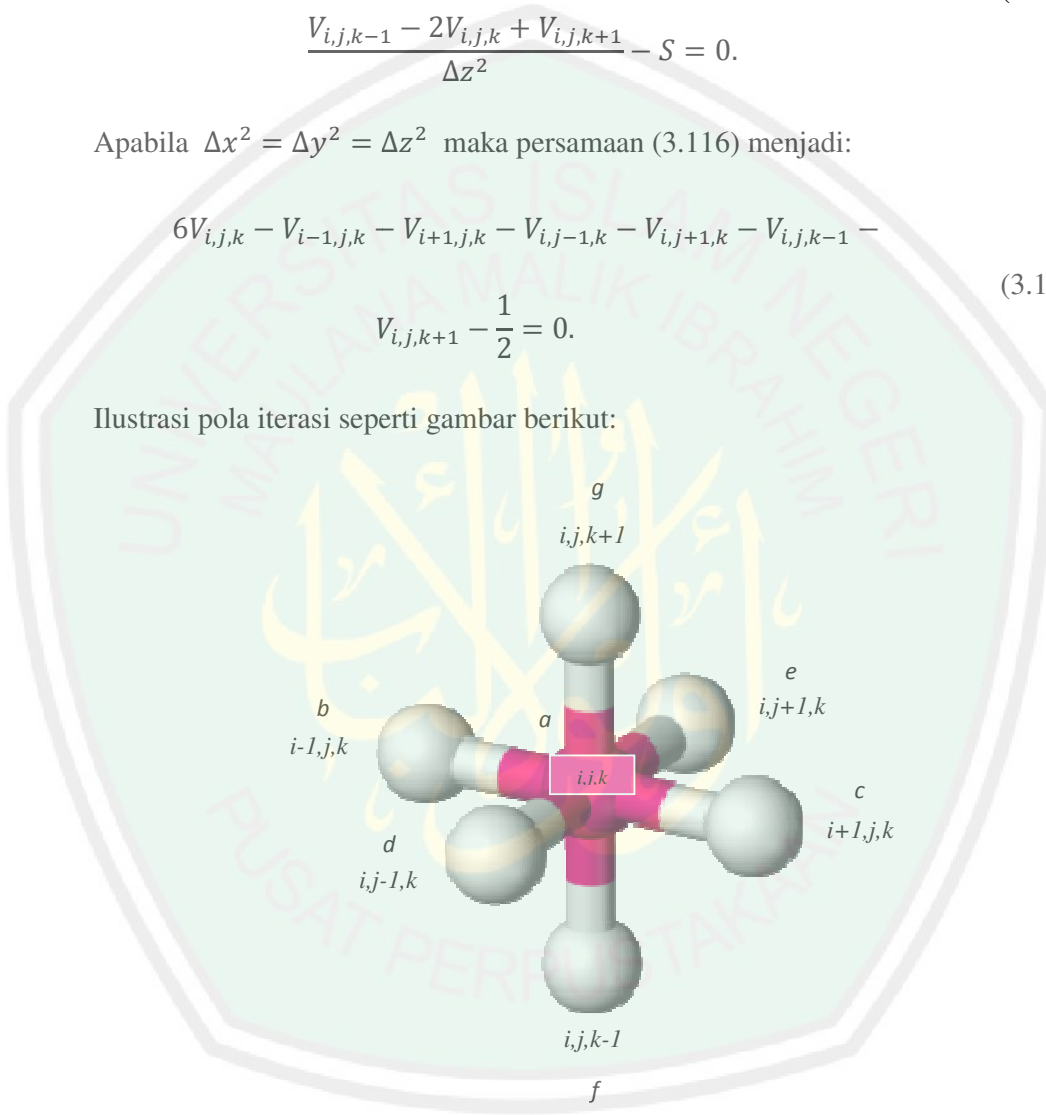
Persamaan (3.115) dapat ditulis kembali:

$$\begin{aligned} & \frac{V_{i-1,j,k} - 2V_{i,j,k} + V_{i+1,j,k}}{\Delta x^2} + \frac{V_{i,j-1,k} - 2V_{i,j,k} + V_{i,j+1,k}}{\Delta y^2} + \\ & \frac{V_{i,j,k-1} - 2V_{i,j,k} + V_{i,j,k+1}}{\Delta z^2} - S = 0. \end{aligned} \quad (3.116)$$

Apabila $\Delta x^2 = \Delta y^2 = \Delta z^2$ maka persamaan (3.116) menjadi:

$$\begin{aligned} & 6V_{i,j,k} - V_{i-1,j,k} - V_{i+1,j,k} - V_{i,j-1,k} - V_{i,j+1,k} - V_{i,j,k-1} - \\ & V_{i,j,k+1} - \frac{1}{2} = 0. \end{aligned} \quad (3.117)$$

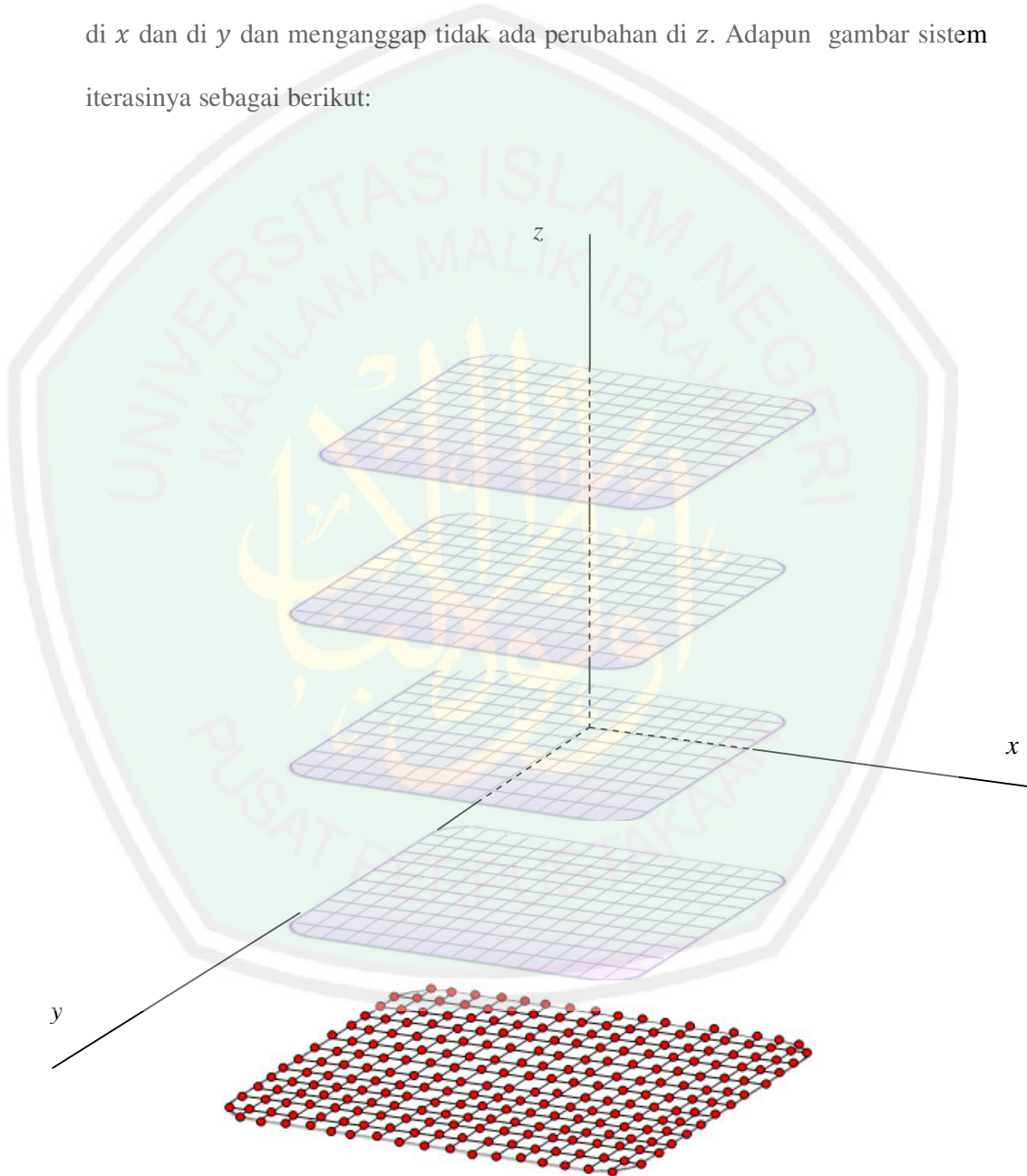
Ilustrasi pola iterasi seperti gambar berikut:



Gambar 3.3 Pola Iterasi Tiga Dimensi (Anonymous, 2011).

Sebagai ilustrasi prosedur iterasi, maka pola iterasi pada gambar 3.2 di atas dikerjakan untuk mendapatkan semua penyelesaian untuk titik-titik grid di level $z = k + 1$ dan $z = k - 1$ dengan menjalankan pola di sistem yang memuat

semua perubahan di x dan di y . Sehingga untuk mendapatkan penyelesaian secara numerik dengan memperhatikan gambar 3.1 dan gambar 3.2, maka sistem persamaan (3.108) ditulis dalam bentuk (dengan menganggap adanya perubahan di x dan di y dan menganggap tidak ada perubahan di z). Adapun gambar sistem iterasinya sebagai berikut:



Gambar 3.4 Pola Perhitungan Iterasi Tiga Dimensi

Hasil perhitungan tiap titik-titik grid pada gambar 3.3 adalah sebagai berikut:

$$(0, \pi, -\pi) = 6V_{(0, \pi, -\pi)} - V_{(-\frac{\pi}{10}, \pi, -\pi)} - V_{(\frac{\pi}{10}, \pi, -\pi)} - V_{(0, \frac{9\pi}{10}, -\pi)} - V_{(0, \frac{11\pi}{10}, -\pi)} -$$

$$V_{(0, \pi, -\frac{11\pi}{10})} - V_{(0, \pi, -\frac{9\pi}{10})} - \frac{1}{2} = 0$$

$$= 6V_{i,j}^n - V_{i-1,j}^n - V_{i+1,j}^n - V_{i,j-1}^n - V_{i,j+1}^n - S - V^{n-1} -$$

$$V^{n+1} = 0$$

$$\left(\frac{\pi}{10}, \pi, -\pi\right) = 6V_{(\frac{\pi}{10}, \pi, -\pi)} - V_{(0, \pi, -\pi)} - V_{(\frac{2\pi}{10}, \pi, -\pi)} - V_{(\frac{\pi}{10}, \frac{9\pi}{10}, -\pi)} - V_{(\frac{\pi}{10}, \frac{11\pi}{10}, -\pi)} -$$

$$V_{(\frac{\pi}{10}, \pi, -\frac{11\pi}{10})} - V_{(\frac{\pi}{10}, \pi, -\frac{9\pi}{10})} - \frac{1}{2} = 0$$

$$= 6V_{i,j}^n - V_{i-1,j}^n - V_{i+1,j}^n - V_{i,j-1}^n - V_{i,j+1}^n - S - V^{n-1} -$$

$$V^{n+1} = 0$$

$$\left(\frac{2\pi}{10}, \pi, -\pi\right) = 6V_{(\frac{2\pi}{10}, \pi, -\pi)} - V_{(\frac{\pi}{10}, \pi, -\pi)} - V_{(\frac{3\pi}{10}, \pi, -\pi)} - V_{(\frac{2\pi}{10}, \frac{9\pi}{10}, -\pi)} - V_{(\frac{2\pi}{10}, \frac{11\pi}{10}, -\pi)} -$$

$$V_{(\frac{2\pi}{10}, \pi, -\frac{11\pi}{10})} - V_{(\frac{2\pi}{10}, \pi, -\frac{9\pi}{10})} - \frac{1}{2} = 0$$

$$= 6V_{i,j}^n - V_{i-1,j}^n - V_{i+1,j}^n - V_{i,j-1}^n - V_{i,j+1}^n - S - V^{n-1} -$$

$$V^{n+1} = 0$$

$$\left(\frac{3\pi}{10}, \pi, -\pi\right) = 6V_{(\frac{3\pi}{10}, \pi, -\pi)} - V_{(\frac{2\pi}{10}, \pi, -\pi)} - V_{(\frac{4\pi}{10}, \pi, -\pi)} - V_{(\frac{3\pi}{10}, \frac{9\pi}{10}, -\pi)} - V_{(\frac{3\pi}{10}, \frac{11\pi}{10}, -\pi)} -$$

$$V_{(\frac{3\pi}{10}, \pi, -\frac{11\pi}{10})} - V_{(\frac{3\pi}{10}, \pi, -\frac{9\pi}{10})} - \frac{1}{2} = 0$$

$$= 6V_{i,j}^n - V_{i-1,j}^n - V_{i+1,j}^n - V_{i,j-1}^n - V_{i,j+1}^n - S - V^{n-1} - V^{n+1} = 0$$

$$\left(\frac{4\pi}{10}, \pi, -\pi\right) = 6V_{\left(\frac{4\pi}{10}, \pi, -\pi\right)} - V_{\left(\frac{3\pi}{10}, \pi, -\pi\right)} - V_{\left(\frac{5\pi}{10}, \pi, -\pi\right)} - V_{\left(\frac{4\pi}{10}, \frac{9\pi}{10}, -\pi\right)} - V_{\left(\frac{4\pi}{10}, \frac{11\pi}{10}, -\pi\right)} -$$

$$V_{\left(\frac{4\pi}{10}, \pi, -\frac{11\pi}{10}\right)} - V_{\left(\frac{4\pi}{10}, \pi, -\frac{9\pi}{10}\right)} - \frac{1}{2} = 0$$

$$= 6V_{i,j}^n - V_{i-1,j}^n - V_{i+1,j}^n - V_{i,j-1}^n - V_{i,j+1}^n - S - V^{n-1} -$$

$$V^{n+1} = 0$$

$$\left(\frac{5\pi}{10}, \pi, -\pi\right) = 6V_{\left(\frac{5\pi}{10}, \pi, -\pi\right)} - V_{\left(\frac{4\pi}{10}, \pi, -\pi\right)} - V_{\left(\frac{6\pi}{10}, \pi, -\pi\right)} - V_{\left(\frac{5\pi}{10}, \frac{9\pi}{10}, -\pi\right)} - V_{\left(\frac{5\pi}{10}, \frac{11\pi}{10}, -\pi\right)} -$$

$$V_{\left(\frac{5\pi}{10}, \pi, -\frac{11\pi}{10}\right)} - V_{\left(\frac{5\pi}{10}, \pi, -\frac{9\pi}{10}\right)} - \frac{1}{2} = 0$$

$$= 6V_{i,j}^n - V_{i-1,j}^n - V_{i+1,j}^n - V_{i,j-1}^n - V_{i,j+1}^n - S - V^{n-1} -$$

$$V^{n+1} = 0$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\left(0, \frac{11\pi}{10}, -\pi\right) = 6V_{\left(0, \frac{11\pi}{10}, -\pi\right)} - V_{\left(-\frac{\pi}{10}, \frac{11\pi}{10}, -\pi\right)} - V_{\left(\frac{\pi}{10}, \frac{11\pi}{10}, -\pi\right)} - V_{\left(0, \pi, -\pi\right)} -$$

$$V_{\left(0, \frac{12\pi}{10}, -\pi\right)} - V_{\left(0, \frac{11\pi}{10}, -\frac{11\pi}{10}\right)} - V_{\left(0, \frac{11\pi}{10}, -\frac{9\pi}{10}\right)} - \frac{1}{2} = 0$$

$$= 6V_{i,j}^n - V_{i-1,j}^n - V_{i+1,j}^n - V_{i,j-1}^n - V_{i,j+1}^n - S - V^{n-1} -$$

$$V^{n+1} = 0$$

$$\left(\frac{\pi}{10}, \frac{11\pi}{10}, -\pi\right) = 6V_{\left(\frac{\pi}{10}, \frac{11\pi}{10}, -\pi\right)} - V_{\left(0, \frac{11\pi}{10}, -\pi\right)} - V_{\left(\frac{2\pi}{10}, \frac{11\pi}{10}, -\pi\right)} - V_{\left(\frac{\pi}{10}, \pi, -\pi\right)} -$$

$$V_{\left(\frac{\pi}{10}, \frac{12\pi}{10}, -\pi\right)} - V_{\left(\frac{\pi}{10}, \frac{11\pi}{10}, -\frac{11\pi}{10}\right)} - V_{\left(\frac{\pi}{10}, \frac{11\pi}{10}, -\frac{9\pi}{10}\right)} - \frac{1}{2} = 0$$

$$= 6V_{i,j}^n - V_{i-1,j}^n - V_{i+1,j}^n - V_{i,j-1}^n - V_{i,j+1}^n - S - V^{n-1} -$$

$$V^{n+1} = 0$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{2\pi}{10}, \frac{11\pi}{10}, -\pi\right) &= 6V_{\left(\frac{2\pi}{10}, \frac{11\pi}{10}, -\pi\right)} - V_{\left(\frac{\pi}{10}, \frac{11\pi}{10}, -\pi\right)} - V_{\left(\frac{3\pi}{10}, \frac{11\pi}{10}, -\pi\right)} - V_{\left(\frac{2\pi}{10}, \pi, -\pi\right)} - \\
&\quad V_{\left(\frac{2\pi}{10}, \frac{12\pi}{10}, -\pi\right)} - V_{\left(\frac{2\pi}{10}, \frac{11\pi}{10}, -\frac{11\pi}{10}\right)} - V_{\left(\frac{2\pi}{10}, \frac{11\pi}{10}, -\frac{9\pi}{10}\right)} - \frac{1}{2} = 0 \\
&= 6V_{i,j}^n - V_{i-1,j}^n - V_{i+1,j}^n - V_{i,j-1}^n - V_{i,j+1}^n - S - V^{n-1} - \\
&\quad V^{n+1} = 0 \\
\left(\frac{3\pi}{10}, \frac{11\pi}{10}, -\pi\right) &= 6V_{\left(\frac{3\pi}{10}, \frac{11\pi}{10}, -\pi\right)} - V_{\left(\frac{2\pi}{10}, \frac{11\pi}{10}, -\pi\right)} - V_{\left(\frac{4\pi}{10}, \frac{11\pi}{10}, -\pi\right)} - V_{\left(\frac{3\pi}{10}, \pi, -\pi\right)} - \\
&\quad V_{\left(\frac{3\pi}{10}, \frac{12\pi}{10}, -\pi\right)} - V_{\left(\frac{3\pi}{10}, \frac{11\pi}{10}, -\frac{11\pi}{10}\right)} - V_{\left(\frac{3\pi}{10}, \frac{11\pi}{10}, -\frac{9\pi}{10}\right)} - \frac{1}{2} = 0 \\
&= 6V_{i,j}^n - V_{i-1,j}^n - V_{i+1,j}^n - V_{i,j-1}^n - V_{i,j+1}^n - S - V^{n-1} - \\
&\quad V^{n+1} = 0 \\
&\quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\
\left(\frac{3\pi}{10}, \frac{15\pi}{10}, -\pi\right) &= 6V_{\left(\frac{3\pi}{10}, \frac{15\pi}{10}, -\pi\right)} - V_{\left(\frac{2\pi}{10}, \frac{15\pi}{10}, -\pi\right)} - V_{\left(\frac{4\pi}{10}, \frac{15\pi}{10}, -\pi\right)} - V_{\left(\frac{3\pi}{10}, \frac{14\pi}{10}, -\pi\right)} - \\
&\quad V_{\left(\frac{3\pi}{10}, \frac{16\pi}{10}, -\pi\right)} - V_{\left(\frac{3\pi}{10}, \frac{15\pi}{10}, -\frac{11\pi}{10}\right)} - V_{\left(\frac{3\pi}{10}, \frac{15\pi}{10}, -\frac{9\pi}{10}\right)} - \frac{1}{2} = 0 \\
&= 6V_{i,j}^n - V_{i-1,j}^n - V_{i+1,j}^n - V_{i,j-1}^n - V_{i,j+1}^n - S - V^{n-1} - \\
&\quad V^{n+1} = 0 \\
&\quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\
\left(\frac{4\pi}{10}, \frac{15\pi}{10}, -\pi\right) &= 6V_{\left(\frac{4\pi}{10}, \frac{15\pi}{10}, -\pi\right)} - V_{\left(\frac{3\pi}{10}, \frac{15\pi}{10}, -\pi\right)} - V_{\left(\frac{5\pi}{10}, \frac{15\pi}{10}, -\pi\right)} - V_{\left(\frac{4\pi}{10}, \frac{14\pi}{10}, -\pi\right)} - \\
&\quad V_{\left(\frac{4\pi}{10}, \frac{16\pi}{10}, -\pi\right)} - V_{\left(\frac{4\pi}{10}, \frac{15\pi}{10}, -\frac{11\pi}{10}\right)} - V_{\left(\frac{4\pi}{10}, \frac{15\pi}{10}, -\frac{9\pi}{10}\right)} - \frac{1}{2} = 0 \\
&= 6V_{i,j}^n - V_{i-1,j}^n - V_{i+1,j}^n - V_{i,j-1}^n - V_{i,j+1}^n - S - V^{n-1} - \\
&\quad V^{n+1} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{5\pi}{10}, \frac{15\pi}{10}, -\pi\right) &= 6V_{\left(\frac{5\pi}{10}, \frac{15\pi}{10}, -\pi\right)} - V_{\left(\frac{4\pi}{10}, \frac{15\pi}{10}, -\pi\right)} - V_{\left(\frac{6\pi}{10}, \frac{15\pi}{10}, -\pi\right)} - V_{\left(\frac{5\pi}{10}, \frac{14\pi}{10}, -\pi\right)} - \\
&V_{\left(\frac{5\pi}{10}, \frac{16\pi}{10}, -\pi\right)} - V_{\left(\frac{5\pi}{10}, \frac{15\pi}{10}, -\frac{11\pi}{10}\right)} - V_{\left(\frac{5\pi}{10}, \frac{15\pi}{10}, -\frac{9\pi}{10}\right)} - \frac{1}{2} = 0 \\
&= 6V_{i,j}^n - V_{i-1,j}^n - V_{i+1,j}^n - V_{i,j-1}^n - V_{i,j+1}^n - S - V^{n-1} - \\
&V^{n+1} = 0
\end{aligned}$$

$\vdots$
 $\vdots$
 $\vdots$

$$\begin{aligned}
(2\pi, 3\pi, \pi) &= 6V_{(2\pi, 3\pi, \pi)} - V_{\left(\frac{19\pi}{10}, \pi, \pi\right)} - V_{\left(\frac{21\pi}{10}, \pi, \pi\right)} - V_{\left(2\pi, \frac{29\pi}{10}, \pi\right)} - V_{\left(2\pi, \frac{31\pi}{10}, \pi\right)} - \\
&V_{\left(2\pi, 3\pi, \frac{9\pi}{10}\right)} - V_{\left(2\pi, 3\pi, \frac{11\pi}{10}\right)} - \frac{1}{2} = 0 \\
&= 6V_{i,j}^n - V_{i-1,j}^n - V_{i+1,j}^n - V_{i,j-1}^n - V_{i,j+1}^n - S - V^{n-1} - \\
&V^{n+1} = 0
\end{aligned}$$

Dari iterasi di atas dapat ditulis dalam bentuk matrik tridiagonal sebagai berikut:

$$AB = X + Y$$

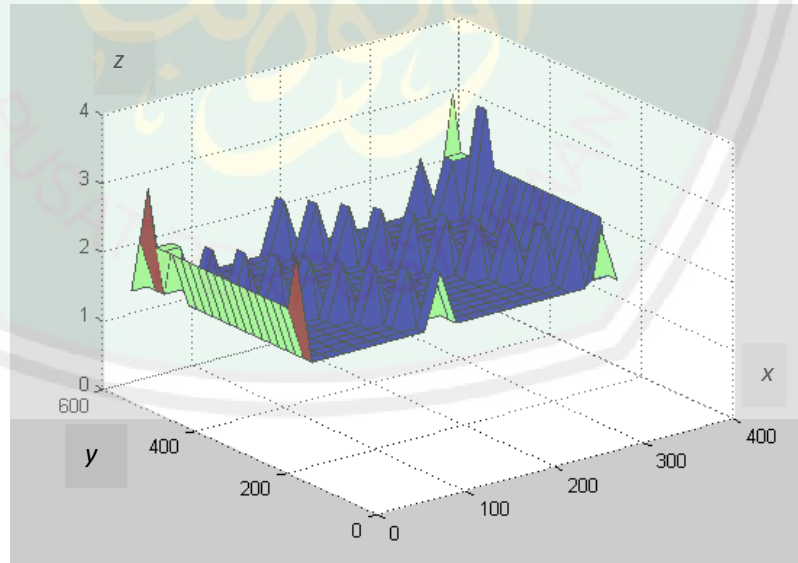
dengan:

$$A = \begin{bmatrix}
6 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 6 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 6 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 6 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 6 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 6 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 6 & -1 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & V_{i,j-1}^n & 0 & 0 & 0 & 0 & V_{i-1,j}^n & 6V_{i,j}^n
\end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} V_{(0,\pi,-\pi)} \\ V_{(\frac{\pi}{10},\pi,-\pi)} \\ V_{(\frac{2\pi}{10},\pi,-\pi)} \\ V_{(\frac{3\pi}{10},\pi,-\pi)} \\ V_{(\frac{4\pi}{10},\pi,-\pi)} \\ V_{(\frac{5\pi}{10},\pi,-\pi)} \\ \vdots \\ V_{(\frac{\pi}{10},\frac{11\pi}{10},-\pi)} \\ V_{(\frac{2\pi}{10},\frac{11\pi}{10},-\pi)} \\ V_{(\frac{3\pi}{10},\frac{11\pi}{10},-\pi)} \\ \vdots \\ V_{(2\pi,3\pi,\pi)} \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} V_{(0,\pi,-\frac{9\pi}{10})} \\ V_{(\frac{\pi}{10},\pi,-\frac{9\pi}{10})} \\ V_{(\frac{2\pi}{10},\pi,-\frac{9\pi}{10})} \\ V_{(\frac{3\pi}{10},\pi,-\frac{9\pi}{10})} \\ V_{(\frac{4\pi}{10},\pi,-\frac{9\pi}{10})} \\ V_{(\frac{5\pi}{10},\pi,-\frac{9\pi}{10})} \\ \vdots \\ V_{(\frac{\pi}{10},\frac{11\pi}{10},-\frac{9\pi}{10})} \\ V_{(\frac{2\pi}{10},\frac{11\pi}{10},-\frac{9\pi}{10})} \\ V_{(\frac{3\pi}{10},\frac{11\pi}{10},-\frac{9\pi}{10})} \\ \vdots \\ V_{(\frac{19\pi}{10},\frac{29\pi}{10},\frac{9\pi}{10})} + V_{(2\pi,3\pi,\pi)} \end{bmatrix}$$

$$Y = \frac{1}{2}$$

Untuk mengetahui gambar dari solusi analitik persamaan Helmholtz, maka diinputkan pada MATLAB. Sehingga menghasilkan gambar sebagai berikut:



Gambar 3.5 Grafik Penyelesaian Numerik Dari Persamaan Helmholtz (*software Matlab*).

3.3 Komparasi Hasil Penyelesaian Analitik Dan Penyelesaian Numerik

Dari gambar 3.2 dan gambar 3.4 untuk penampang persamaan Helmholtz secara analitik dan numerik dapat dilihat pada tabel berikut:

Tabel 3.1 Galat error

Δx	Δy	Analitik (A) $ V_{k-1} + V_{k+1} $	Numerik (B) $ V_{k-1} + V_{k+1} $	Error $ A - B $
0	0	-	-	-
40	60	-	-	-
80	120	-	-	-
120	180	-	-	-
160	240	-	-	-
200	300	-1,0	1,5	-2,5
240	360	0,3	2,0	-1,7
280	420	-0,7	2,5	-3,2
320	480	-1,2	1,5	-2,7
360	540	1,5	2,2	-0,7
400	600	2	3	-1,0

Berdasarkan tabel 3.1 di atas didapatkan, tidak terdapat penyelesaian analitik dan numerik (artinya bahwa amplitudo gelombang pada analisa analitik dan numerik adalah 0) pada titik $(\Delta x, \Delta y) = (0,0)$ sampai $(160,240)$. Selanjutnya pada titik $(200,300)$ penyelesaian analitik bergerak ke bawah sejauh -1,0, sedangkan numerik bergerak ke atas sejauh 1,5 sehingga galat error untuk penyelesaian ini adalah -2,5. Pada titik $(240,360)$ penyelesaian analitik bergerak ke bawah sejauh -0,7, sedangkan penyelesaian numerik juga bergerak ke atas sejauh 2,5, sehingga galat error untuk penyelesaian ini adalah -3,2. Pada titik

(320,480) penyelesaian analitik bergerak ke bawah sejauh -1,2, sedangkan penyelesaian numerik juga bergerak ke bawah sejauh 1,5 sehingga galat error untuk penyelesaian ini adalah -2,7 dan seterusnya. Dari hasil kedua metode menunjukkan bahwa terdapat beberapa galat error antara -0,7 sampai -3,2 pada amplitudo gelombang tiap titik grid yang sama.



BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

1. Analisis analitik persamaan Helmholtz pada koordinat kartesian

Berdasarkan paparan pada pembahasan di atas didapatkan persamaan Helmholtz tiga dimensi pada koordinat kartesian melalui penurunan persamaan aliran listrik yang merambat di dalam bumi, yaitu:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = S$$

Selanjutnya, dengan menggunakan metode pemisahan variabel dapat diselesaikan model persamaan Helmholtz tiga dimensi pada koordinat kartesian menggunakan nilai batas periodik dengan prosedur sebagai berikut:

- Didefinisikan nilai batas pada persamaan Helmholtz.
- Substitusi $V = X(x)Y(y)Z(z)$ ke dalam bentuk umum Helmholtz.
- Pemisahan variabel untuk memperoleh penyelesaian khusus fungsi

dalam $X_n(x) = a_n \sin\left(\frac{nx}{2}\right)$, $\forall n = 0, 1, 2, \dots$ sedangkan dalam

$Y_n(y) = 2b_n i \cos\frac{(2n+1)\pi y}{2^n}$, $\forall n = 1, 2, 3, \dots$ dan dalam $Z_n(z) =$

$2c_n i \cos\frac{(2n+1)\pi z}{2^n}$, $\forall n = 1, 2, 3, \dots$

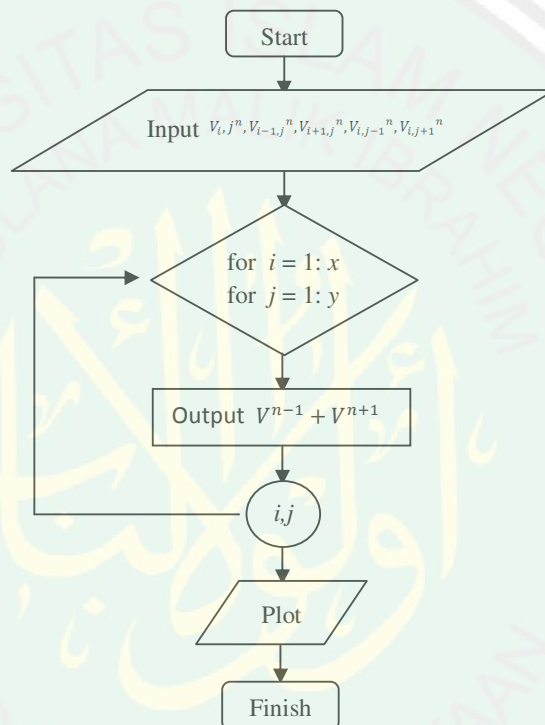
- Penyelesaian umum persamaan Helmholtz:

$$\left[a_n \sin\left(\frac{nx}{2}\right) \right] \left[2b_n i \cos\frac{(2n+1)\pi y}{2^n} \right] \left[2c_n i \cos\frac{(2n+1)\pi z}{2^n} \right] = \frac{1}{2}$$

$$\forall S = \frac{-I \delta(x_s) \delta(y_s) \delta(z_s)}{\sigma} \text{ adalah kerapatan muatan ruang}$$

2. Analisis numerik persamaan Helmholtz pada koordinat kartesian

Flow chart secara umumnya adalah sebagai berikut:



4.2 Saran

Konstruksi persamaan Helmholtz tidak hanya dapat dihasilkan dari persamaan kelistrikan di bumi tetapi juga dapat dikonstruksikan dari persamaan konduksi panas, persamaan Schrödinger, persamaan telegraf dan lain sebagainya. Penelitian ini bisa dilanjutkan pada justifikasi analisis pada koordinat polar dan bola.

DAFTAR PUSTAKA

- Al Maragi, A. M. 1974. *Tafsir Al Maragi*. Terjemahan Bahrn Abubakar, Lc., K. Anshori Umar Sitanggal dan Drs. Hery Noer Aly. 1993. Semarang: CV. Toha Putra Semarang.
- Anonymous. 2011. *Arus Listrik*. Universitas Sumatra Utara.
- Anonymous. 2011. *Helmholtz Equation*. Module 13.1: nag-pde-helm.
- Anonymous. 2011. *Introduction of Helmholtz Equation*. <http://eqworld.ipmnet.ru/en/solutions/lpde/lpde303.pdf>.
- Anonymous. 2011. *Molekul*. <http://google.image.molekul.com>
- Anonymous. 2011. Persamaan Helmholtz Pecah di Tangan Dosen ITB. <http://www.crcpress.com>.
- Endarko dan Yudoyono. 2007. *Listrik Statis*. Modul fisika.
- Finizio, N dan Ladaz G. 1982. *Ordinary Differential Equations, with Modern Applications*. Terjemahan Widiarti Santoso ITB. 1988. Erlangga: Jakarta.
- Ghoffar, M Abdul. 2006. *Tafsir Ibnu Katsir jilid 6*. Jakarta: Pustaka Imam Asy-Syafi'i.
- Ghoffar, M Abdul. 2007. *Tafsir Ibnu Katsir jilid 4*. Jakarta: Pustaka Imam Asy-Syafi'i.
- Ikhsan. 2010. *Persamaan Kontinyuitas*. <http://ikhsan-s.yolasite.com>.
- Indrijatmaka, sangadji. 2011. *Penyelesaian Numerik Persamaan Laplace Dalam Tiga Dimensi Dengan Syarat-Syarat Batas*. Jurnal Matematika. Komputasi Dalam Sains Dan Teknologi Nuklir X.
- Jatmiko, Budi. 2004. *Listrik Statis*. Modul Fisika. FIS.20.
- Manurung, Nelson Tulus. 2011. *Studi Dasar Pemodelan Dua Dimensi Data Sintetik Polarisasi Terimbas (IP) Dengan Metode Elemen Hingga*. Jurnal Fisika Indonesia: FMIPA-UGM.
- Misbah. 1998. *Tafsir Juz Amma*. Semarang: Toha Putra.
- Misbah. 2008. *Nilai Muatan Elektron Di Al-Qur'an*. <http://kapulu.wordpress.com>.
- Munir, Rinaldi. 2006. *Metode Numerik*. Bandung: Informatika.

- Nagle, K. R dan Saff, E.B. 1996. *Fundamentals of differential equations and boundary value problems*. University of South Florida.
- Nainggolan, Fansuri. 2011. *Guruh Bertasbih memuji-Nya ~ Keajaiban Al-Qur'an*. <http://id-id.facebook.com>.
- Polyanin , A. D. 2002. *Handbook of linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists* Chapman & Hall/CRC Press.
- Ramdhani. 2005. *Arus Dirac*. <http://www.geocis.net>.
- Rinto. 2011. *Sistem Koordinat Kartesian/Kartesius*. <http://barpiom.blogdetik.com/koordinat>.
- Ross, Shepley L. 1984. *Differential Equations*. Third Edition. New York: John Wiley&Sons. Inc.
- Sasongko, Seti Budi. 2010. *Metode Numerik Dengan Scilab*. Yogyakarta: Andi.
- Simanjuntak. 2009. <http://listrikstatis.com>.
- Soedjo, Peter. 1995. *Asas-Asas Matematika Fisika Dan Teknik*. Yogyakarta: Gadjah Mada University Press.
- Spiegel, Murray R. 1983. *Advanced Mathematics for Engineer and Scientists*. Terjemahan oleh Koko Martono. 1994. Jakarta: Erlangga.
- Stewart, James. 2003. *Kalkulus jilid 2*. Terjemahan oleh I Nyoman Susila, Hendra Gunawan. 2003. Jakarta: Erlangga.
- Tim Penyusun. 2011. *Teori Dasar Listrik*. Jawa Bali: PT PLN (Persero) Penyaluran dan Pusat Pengatur Beban.
- Triatmodjo, Bambang. 2002. *Metode Numerik Dilengkapi Dengan Program Komputer*. Yogyakarta: Beta Offset.
- Widodo, Lilik Eko. 2011. *Solusi Persamaan Diferensial Parsial Dengan Metode Beda Hingga*. Catatan Kuliah.
- Zauderer, E.2006. *Partial Differential Equations of Applied Mathematics*. New Jersey: John Willey & Sons, Inc.

LAMPIRAN-LAMPIRAN

Listing Program Penyelesaian Analitik

```
clc, clear  
pi = 180;  
dx = 18; dy = 18; dz = 18;
```

```
x=0:dx:2*pi;  
y=pi:dy:3*pi;  
z=-pi:dz:pi;
```

```
x=zeros(1,21);  
x(1)=0;  
x(2)=pi/10;  
x(3)=2*pi/10;  
x(4)=3*pi/10;  
x(5)=4*pi/10;  
x(6)=5*pi/10;  
x(7)=6*pi/10;  
x(8)=7*pi/10;  
x(9)=8*pi/10;  
x(10)=9*pi/10;  
x(11)=pi;  
x(12)=11*pi/10;  
x(13)=12*pi/10;  
x(14)=13*pi/10;  
x(15)=14*pi/10;  
x(16)=15*pi/10;  
x(17)=16*pi/10;  
x(18)=17*pi/10;  
x(19)=18*pi/10;  
x(20)=19*pi/10;  
x(21)=2*pi;
```

```
y=zeros(1,21);  
y(1)=pi;  
y(2)=11*pi/10;  
y(3)=12*pi/10;  
y(4)=13*pi/10;  
y(5)=14*pi/10;  
y(6)=15*pi/10;  
y(7)=16*pi/10;  
y(8)=17*pi/10;  
y(9)=18*pi/10;
```

```
y(10)=19*pi/10;  
y(11)=2*pi;  
y(12)=21*pi/10;  
y(13)=22*pi/10;  
y(14)=23*pi/10;  
y(15)=24*pi/10;  
y(16)=25*pi/10;  
y(17)=26*pi/10;  
y(18)=27*pi/10;  
y(19)=28*pi/10;  
y(20)=29*pi/10;  
y(21)=3*pi;
```

```
z=zeros(1,21);  
z(1)=-pi;  
z(2)=-9*pi/10;  
z(3)=-8*pi/10;  
z(4)=-7*pi/10;  
z(5)=-6*pi/10;  
z(6)=-5*pi/10;  
z(7)=-4*pi/10;  
z(8)=-3*pi/10;  
z(9)=-2*pi/10;  
z(10)=-pi/10;  
z(11)=0;  
z(12)=pi/10;  
z(13)=2*pi/10;  
z(14)=3*pi/10;  
z(15)=4*pi/10;  
z(16)=5*pi/10;  
z(17)=6*pi/10;  
z(18)=7*pi/10;  
z(19)=8*pi/10;  
z(20)=9*pi/10;  
z(21)=pi;
```

```
an=zeros(1,21);  
an(1)=.2;  
an(2)=.3;  
an(3)=.4;  
an(4)=.5;  
an(5)=.6;  
an(6)=.7;  
an(7)=.8;  
an(8)=.9;  
an(9)=.10;
```

```
an(10)=.11;  
an(11)=.12;  
an(12)=.13;  
an(13)=.14;  
an(14)=.15;  
an(15)=.16;  
an(16)=.17;  
an(17)=.18;  
an(18)=.19;  
an(19)=.20;  
an(20)=.21;  
an(21)=.22;
```

```
bn=zeros(1,21);  
bn(1)=.11;  
bn(2)=.12;  
bn(3)=.13;  
bn(4)=.14;  
bn(5)=.15;  
bn(6)=.16;  
bn(7)=.17;  
bn(8)=.16;  
bn(9)=.19;  
bn(10)=.20;  
bn(11)=.21;  
bn(12)=.22;  
bn(13)=.23;  
bn(14)=.24;  
bn(15)=.25;  
bn(16)=.26;  
bn(17)=.27;  
bn(18)=.28;  
bn(19)=.29;  
bn(20)=.31;  
bn(21)=.32;
```

```
cn=zeros(1,21);  
cn(1)=1;  
cn(2)=2;  
cn(3)=3;  
cn(4)=4;  
cn(5)=5;  
cn(6)=6;  
cn(7)=7;  
cn(8)=8;  
cn(9)=9;
```

```

cn(10)=10;
cn(11)=11;
cn(12)=12;
cn(13)=13;
cn(14)=14;
cn(15)=15;
cn(16)=16;
cn(17)=17;
cn(18)=18;
cn(19)=19;
cn(20)=20;
cn(21)=21;

v=zeros(x,y,z);
for j=1:21
    for i=1 : 21
        v(i,j,1)=0.3;
    end
end
v(:, :, 1);

for i=1:21
    for j=1:21
        for k=1:21
            for n=1:21

v(i,j,k)=(an(n)*sin((n*x(i))/2))*(2*bn(n)*sqrt(1)*cos(((2*n+1)*pi*y(j))/2^n))*(2*
cn(n)*sqrt(-1)*cos(((2*n+1)*pi*z(k))/2^n))-(1/2);%((1/4)*n^2)-
((2*n+1)^2*pi^2)/(2^n)^2);
            end
        end
    end
end

[x,y]=meshgrid(x,y);
% axis auto
axis([200 600 100 400 -4 2])
hsl=sum(v);
for j = 1:21
    surf(x,y,v(:, :, j));
end
%% iterasi
for j=1:21
    disp 'v',j
    v(:, :, 1)
end

```

Listing Program Penyelesaian Numerik

```
clc,clear;

pi=180;
dx=18;dy=18;dz=18;

X=0:dx:2*pi;
Y=pi:dy:3*pi;
Z=-pi:dz:pi;

UkuranX=size(X),UkuranX=UkuranX(1,2);
UkuranY=size(Y),UkuranY=UkuranY(1,2);
UkuranZ=size(Z),UkuranZ=UkuranZ(1,2);

BanyakData=UkuranX*UkuranY

%% v awal
v=zeros(UkuranX,UkuranY,UkuranZ);
for j=1:UkuranZ
    for i=1 : UkuranX
        v(i,j,1)=0.3;
    end
end
v(:, :, 1)

%% matrik S
S=zeros(BanyakData,BanyakData);
for i=1:BanyakData
    j=1:BanyakData
    S(i,j)=0.5;
end

%% buat matrik besar
Mtrx=zeros(BanyakData,BanyakData);
for i= 1 : BanyakData
    for j=1 : BanyakData
        if j==i
            Mtrx(j,i)=6;
        end
        if j==i+1
            Mtrx(j,i)=-1;
            if mod(i,(UkuranX-2))==0
                Mtrx(j,i)=0;
            end
        end
    end
end
```

```

        if i==j+1
            Mtrx(j,i)=-1;
            if mod(j,(UkuranX-2))==0
                Mtrx(j,i)=0;
            end
        end
    end
    if j==i+(UkuranY-2)
        Mtrx(j,i)=-1;
    end
    if i==j+(UkuranX-2)
        Mtrx(j,i)=-1;
    end
end
end

%% v baru
for k=2:UkuranZ
    v_Baru=zeros(BanyakData,1);v_cadangan=zeros(BanyakData,1);
    aa=1;
    for j=1 : UkuranY
        for i=1 : UkuranX
            v_cadangan(aa,1)=v(i,j,k-1);
            aa=aa+1;
        end
    end
    v_Baru=Mtrx*v_cadangan;
    aa=1;
    for j=1 : UkuranY
        for i=1 : UkuranX
            v(i,j,k)=v_Baru(aa,1); % ini v barunya;
            aa=aa+1;
        end
    end
end

% hasil simulasi dalam 3D
[X,Y]=meshgrid(X,Y);
% axis auto
axis([0 400 0 600 0.2 1])
set(gca,'nextplot','replacechildren');

for j = 1:UkuranZ
    surf(X,Y,v(:, :,j));
    F(j) = getframe;
end

```

```
movie(F,1,3)

%% iterasi
for i=1:UkuranZ
    disp 'v',i
    v(:,i)
end
```



Hasil Iterasi Analitik

j = 1 : 21

ans =

Columns 1 through 11

-0.5000	-0.5000	-0.5000	-0.5000	-0.5000	-0.5000	-0.5000	-0.5000	-0.5000	-0.5000	-0.5000
-2.2717	-2.1757	-2.0723	-1.9620	-1.8452	-1.7225	-1.5944	-1.4614	-1.3242	-1.1834	-1.0396
-3.6021	-3.4340	-3.2530	-3.0598	-2.8553	-2.6404	-2.4161	-2.1833	-1.9431	-1.6966	-1.4447
-4.1597	-3.9614	-3.7478	-3.5199	-3.2787	-3.0252	-2.7605	-2.4859	-2.2025	-1.9117	-1.6146
-3.8057	-3.6265	-3.4336	-3.2277	-3.0098	-2.7809	-2.5418	-2.2938	-2.0378	-1.7751	-1.5067
-2.6281	-2.5128	-2.3886	-2.2561	-2.1158	-1.9684	-1.8145	-1.6548	-1.4900	-1.3209	-1.1481
-0.9204	-0.8977	-0.8731	-0.8469	-0.8192	-0.7901	-0.7597	-0.7282	-0.6956	-0.6622	-0.6280
0.8920	0.8165	0.7353	0.6486	0.5569	0.4604	0.3598	0.2553	0.1476	0.0369	-0.0761
2.3576	2.2028	2.0360	1.8580	1.6697	1.4717	1.2651	1.0507	0.8294	0.6023	0.3703
3.1114	2.9157	2.7050	2.4800	2.2420	1.9918	1.7307	1.4597	1.1801	0.8930	0.5998
2.9656	2.7778	2.5755	2.3597	2.1313	1.8912	1.6406	1.3806	1.1122	0.8368	0.5554
1.9564	1.8233	1.6799	1.5270	1.3650	1.1949	1.0173	0.8330	0.6428	0.4475	0.2481
0.3353	0.2901	0.2413	0.1893	0.1342	0.0764	0.0160	-0.0467	-0.1114	-0.1778	-0.2456
-1.4938	-1.4400	-1.3820	-1.3201	-1.2546	-1.1857	-1.1139	-1.0393	-0.9623	-0.8833	-0.8027
-3.0754	-2.9359	-2.7856	-2.6252	-2.4554	-2.2770	-2.0908	-1.8975	-1.6981	-1.4934	-1.2843
-4.0155	-3.8250	-3.6198	-3.4009	-3.1691	-2.9256	-2.6714	-2.4076	-2.1354	-1.8560	-1.5706
-4.0797	-3.8858	-3.6768	-3.4539	-3.2179	-2.9700	-2.7111	-2.4425	-2.1653	-1.8808	-1.5902
-3.2523	-3.1032	-2.9425	-2.7711	-2.5897	-2.3991	-2.2000	-1.9935	-1.7804	-1.5616	-1.3382
-1.7392	-1.6721	-1.5997	-1.5226	-1.4409	-1.3550	-1.2654	-1.1724	-1.0765	-0.9780	-0.8774
0.0826	0.0510	0.0170	-0.0193	-0.0577	-0.0980	-0.1402	-0.1839	-0.2290	-0.2753	-0.3226
1.7592	1.6368	1.5049	1.3642	1.2153	1.0588	0.8955	0.7259	0.5510	0.3714	0.1880

Columns 12 through 21

-0.5000	-0.5000	-0.5000	-0.5000	-0.5000	-0.5000	-0.5000	-0.5000	-0.5000	-0.5000
-0.8934	-0.7454	-0.5964	-0.4469	-0.2977	-0.1494	-0.0026	0.1420	0.2838	0.4221
-1.1887	-0.9297	-0.6687	-0.4070	-0.1458	0.1139	0.3710	0.6241	0.8723	1.1145
-1.3125	-1.0069	-0.6991	-0.3903	-0.0821	0.2243	0.5275	0.8262	1.1190	1.4047
-1.2339	-0.9579	-0.6798	-0.4009	-0.1225	0.1542	0.4281	0.6979	0.9624	1.2204
-0.9725	-0.7948	-0.6158	-0.4362	-0.2570	-0.0788	0.0975	0.2712	0.4414	0.6076
-0.5933	-0.5582	-0.5229	-0.4874	-0.4520	-0.4168	-0.3820	-0.3476	-0.3140	-0.2812
-0.1910	-0.3072	-0.4243	-0.5417	-0.6589	-0.7755	-0.8908	-1.0044	-1.1158	-1.2244
0.1344	-0.1042	-0.3446	-0.5856	-0.8263	-1.0656	-1.3023	-1.5355	-1.7642	-1.9872
0.3018	0.0002	-0.3036	-0.6082	-0.9124	-1.2147	-1.5139	-1.8087	-2.0976	-2.3795
0.2694	-0.0200	-0.3115	-0.6038	-0.8957	-1.1859	-1.4730	-1.7558	-2.0331	-2.3036
0.0454	-0.1598	-0.3664	-0.5736	-0.7805	-0.9862	-1.1897	-1.3901	-1.5867	-1.7784
-0.3145	-0.3843	-0.4546	-0.5250	-0.5954	-0.6653	-0.7345	-0.8027	-0.8695	-0.9347
-0.7206	-0.6377	-0.5541	-0.4702	-0.3865	-0.3033	-0.2210	-0.1399	-0.0603	0.0172
-1.0718	-0.8567	-0.6401	-0.4228	-0.2059	0.0097	0.2231	0.4333	0.6393	0.8404
-1.2805	-0.9869	-0.6912	-0.3947	-0.0986	0.1958	0.4870	0.7739	1.0552	1.3296
-1.2948	-0.9958	-0.6947	-0.3927	-0.0912	0.2085	0.5051	0.7972	1.0836	1.3631
-1.1111	-0.8812	-0.6497	-0.4175	-0.1857	0.0447	0.2727	0.4974	0.7176	0.9324
-0.7751	-0.6716	-0.5674	-0.4629	-0.3585	-0.2547	-0.1521	-0.0509	0.0482	0.1449
-0.3707	-0.4193	-0.4683	-0.5175	-0.5665	-0.6153	-0.6636	-0.7111	-0.7577	-0.8032
0.0016	-0.1871	-0.3771	-0.5677	-0.7580	-0.9471	-1.1343	-1.3187	-1.4994	-1.6758

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

ans =

[illegible][illegible]

ans =

ans =

Columns 1 through 11

[illegible]

Columns 12 through 21

[illegible]

ans =

5.4000	0.9000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	3.0000	0.9000
2.7000	0.9000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	0.9000	3.0000	1.2000
3.0000	0.9000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	3.0000	0.9000	1.2000
3.0000	0.9000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	0.9000	3.0000	1.2000	1.2000
3.0000	0.9000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	3.0000	0.9000	1.2000	1.2000
3.0000	0.9000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	0.9000	3.0000	1.2000	1.2000	1.2000
3.0000	0.9000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	3.0000	0.9000	1.2000	1.2000	1.2000
3.0000	0.9000	1.2000	1.2000	1.2000	0.9000	3.0000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000
3.0000	0.9000	1.2000	1.2000	1.2000	3.0000	0.9000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000
3.0000	0.9000	1.2000	1.2000	1.2000	0.9000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000
3.0000	0.9000	1.2000	1.2000	3.0000	0.9000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000
3.0000	0.9000	1.2000	0.9000	3.0000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000
3.0000	0.9000	1.2000	3.0000	0.9000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000
3.0000	0.9000	0.9000	3.0000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000
3.0000	0.9000	3.0000	0.9000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000
3.0000	0.6000	3.0000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000
3.0000	2.7000	0.9000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	0.9000
2.7000	3.0000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	3.0000
5.4000	0.9000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	0.9000	3.0000
2.7000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	3.0000	0.9000
0.6000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	0.9000	3.0000	1.2000

1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	0.9000	3.0000	0.9000
1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	3.0000	0.9000	0.3000
1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	0.9000	3.0000	1.2000	3.3000
1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	3.0000	0.9000	1.2000	3.0000
1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	0.9000	3.0000	1.2000	0.9000	3.0000
1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	3.0000	0.9000	1.2000	0.9000	3.0000
1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	0.9000	3.0000	1.2000	1.2000	0.9000	3.0000
1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	3.0000	0.9000	1.2000	1.2000	0.9000	3.0000
1.2000	1.2000	1.2000	0.9000	3.0000	1.2000	1.2000	1.2000	0.9000	3.0000
1.2000	1.2000	1.2000	3.0000	0.9000	1.2000	1.2000	1.2000	0.9000	3.0000
1.2000	1.2000	0.9000	3.0000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	0.9000	3.0000
1.2000	1.2000	3.0000	0.9000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	0.9000	3.0000
1.2000	0.9000	3.0000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	0.9000	3.0000
1.2000	3.0000	0.9000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	0.9000	3.0000
0.9000	3.0000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	0.9000	3.0000
3.0000	0.9000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	0.9000	2.7000
3.0000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	0.9000	5.4000
0.9000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	0.6000	5.4000
1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	2.7000	2.7000
1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	0.9000	2.7000	2.7000
1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	1.2000	3.0000	0.6000	5.7000

⋮

...

i = 6

ans = 1.0e+003 *

Columns 1 through 11

0.8688	-0.0837	0.0480	0.0042	0.0099	0.0096	0.0096	0.0099	0.0477	0.1962	-0.1188
-0.1122	-0.1242	0.0477	0.0042	0.0099	0.0096	0.0096	0.0042	-0.1188	0.1962	0.0477
0.2613	-0.1185	0.0477	0.0042	0.0099	0.0096	0.0099	0.0477	0.1962	-0.1188	0.0042
0.1893	-0.1188	0.0477	0.0042	0.0099	0.0096	0.0042	-0.1188	0.1962	0.0477	0.0099
0.1965	-0.1188	0.0477	0.0042	0.0099	0.0099	0.0477	0.1962	-0.1188	0.0042	0.0096
0.1962	-0.1188	0.0477	0.0042	0.0099	0.0042	-0.1188	0.1962	0.0477	0.0099	0.0096
0.1962	-0.1188	0.0477	0.0042	0.0102	0.0477	0.1962	-0.1188	0.0042	0.0096	0.0096
0.1962	-0.1188	0.0477	0.0042	0.0045	-0.1188	0.1962	0.0477	0.0099	0.0096	0.0096
0.1962	-0.1188	0.0477	0.0045	0.0480	0.1962	-0.1188	0.0042	0.0096	0.0096	0.0096
0.1962	-0.1188	0.0477	-0.0012	-0.1185	0.1962	0.0477	0.0099	0.0096	0.0096	0.0096
0.1962	-0.1188	0.0480	0.0423	0.1965	-0.1188	0.0042	0.0096	0.0096	0.0096	0.0096
0.1962	-0.1188	0.0423	-0.1242	0.1962	0.0477	0.0099	0.0096	0.0096	0.0096	0.0096
0.1962	-0.1185	0.0858	0.1893	-0.1188	0.0042	0.0096	0.0096	0.0096	0.0096	0.0096
0.1962	-0.1242	-0.0837	0.1965	0.0477	0.0099	0.0096	0.0096	0.0096	0.0096	0.0099
0.1965	-0.0837	0.2613	-0.1185	0.0042	0.0096	0.0096	0.0096	0.0096	0.0096	0.0042
0.1893	-0.2052	0.1893	0.0480	0.0099	0.0096	0.0096	0.0096	0.0096	0.0099	0.0477
0.2613	-0.1122	-0.1242	0.0045	0.0096	0.0096	0.0096	0.0096	0.0096	0.0042	-0.1188
-0.1122	0.2613	0.0423	0.0102	0.0096	0.0096	0.0096	0.0096	0.0099	0.0477	0.1962
0.8688	-0.0837	-0.0012	0.0099	0.0096	0.0096	0.0096	0.0096	0.0042	-0.1188	0.1962
-0.1122	0.0858	0.0045	0.0099	0.0096	0.0096	0.0096	0.0099	0.0477	0.1962	-0.1188
-0.2052	0.0423	0.0042	0.0099	0.0096	0.0096	0.0096	0.0042	-0.1188	0.1962	0.0477

Columns 12 through 21

0.0042	0.0096	0.0096	0.0096	0.0096	0.0096	0.0045	-0.1242	0.2613	0.1695
0.0099	0.0096	0.0096	0.0096	0.0096	0.0099	0.0480	0.1893	-0.0807	-0.9570
0.0096	0.0096	0.0096	0.0096	0.0096	0.0042	-0.1185	0.1893	0.0384	0.6564
0.0096	0.0096	0.0096	0.0096	0.0099	0.0477	0.1965	-0.1242	0.2811	0.1089
0.0096	0.0096	0.0096	0.0096	0.0042	-0.1188	0.1965	0.0453	-0.2856	0.2043
0.0096	0.0096	0.0096	0.0099	0.0477	0.1962	-0.1185	-0.0318	-0.0948	0.1959
0.0096	0.0096	0.0096	0.0042	-0.1188	0.1962	0.0480	0.0714	-0.1200	0.1962
0.0096	0.0096	0.0099	0.0477	0.1962	-0.1188	0.0060	0.0459	-0.1188	0.1962
0.0096	0.0096	0.0042	-0.1188	0.1962	0.0477	0.0033	0.0477	-0.1188	0.1962
0.0096	0.0099	0.0477	0.1962	-0.1188	0.0042	0.0042	0.0477	-0.1188	0.1962
0.0096	0.0042	-0.1188	0.1962	0.0477	0.0102	0.0042	0.0477	-0.1188	0.1962
0.0099	0.0477	0.1962	-0.1188	0.0042	0.0099	0.0042	0.0477	-0.1188	0.1962
0.0042	-0.1188	0.1962	0.0477	0.0099	0.0099	0.0042	0.0477	-0.1188	0.1965
0.0477	0.1962	-0.1188	0.0042	0.0096	0.0099	0.0042	0.0477	-0.1188	0.1893
-0.1188	0.1962	0.0477	0.0099	0.0096	0.0099	0.0042	0.0477	-0.1185	0.2613
0.1962	-0.1188	0.0042	0.0096	0.0096	0.0099	0.0042	0.0477	-0.1242	-0.1122
0.1962	0.0477	0.0099	0.0096	0.0096	0.0099	0.0042	0.0480	-0.0837	0.8688
-0.1188	0.0042	0.0096	0.0096	0.0096	0.0099	0.0042	0.0423	-0.2052	0.8607
0.0477	0.0099	0.0096	0.0096	0.0096	0.0099	0.0045	0.0858	-0.1122	-0.0246
0.0042	0.0096	0.0096	0.0096	0.0096	0.0099	-0.0012	-0.0837	-0.1107	-0.1983
0.0099	0.0096	0.0096	0.0096	0.0096	0.0102	0.0423	0.2613	-0.2373	1.2423

i = 7

ans = 1.0e+003 *

Columns 1 through 11

5.4372	-0.5199	0.3120	-0.0408	0.0258	0.0189	0.0192	0.0258	0.3054	0.9036	-0.7191
-1.5981	-0.7746	0.3051	-0.0408	0.0258	0.0189	0.0189	-0.0408	-0.7191	0.9036	0.3054
1.5744	-0.7125	0.3054	-0.0408	0.0258	0.0189	0.0258	0.3054	0.9036	-0.7191	-0.0408
0.8022	-0.7194	0.3054	-0.0408	0.0258	0.0186	-0.0408	-0.7191	0.9036	0.3054	0.0258
0.9120	-0.7191	0.3054	-0.0408	0.0258	0.0255	0.3054	0.9036	-0.7191	-0.0408	0.0189
0.9033	-0.7191	0.3054	-0.0408	0.0255	-0.0411	-0.7191	0.9036	0.3054	0.0258	0.0192
0.9036	-0.7191	0.3054	-0.0408	0.0324	0.3051	0.9036	-0.7191	-0.0408	0.0189	0.0192
0.9036	-0.7191	0.3054	-0.0411	-0.0342	-0.7194	0.9036	0.3054	0.0258	0.0192	0.0192
0.9036	-0.7191	0.3054	-0.0342	0.3120	0.9033	-0.7191	-0.0408	0.0189	0.0192	0.0192
0.9036	-0.7191	0.3051	-0.1008	-0.7125	0.9036	0.3054	0.0258	0.0192	0.0192	0.0192
0.9036	-0.7191	0.3120	0.2454	0.9120	-0.7191	-0.0408	0.0189	0.0192	0.0192	0.0192
0.9036	-0.7194	0.2454	-0.7746	0.9033	0.3054	0.0258	0.0192	0.0192	0.0192	0.0192
0.9036	-0.7125	0.5976	0.8022	-0.7194	-0.0408	0.0189	0.0192	0.0192	0.0192	0.0189
0.9033	-0.7746	-0.5199	0.9120	0.3051	0.0258	0.0192	0.0192	0.0192	0.0192	0.0258
0.9120	-0.5199	1.5744	-0.7125	-0.0411	0.0189	0.0192	0.0192	0.0192	0.0189	-0.0408
0.8022	-0.8394	0.8022	0.3120	0.0255	0.0192	0.0192	0.0192	0.0192	0.0258	0.3054
1.5744	-1.5981	-0.7746	-0.0342	0.0186	0.0192	0.0192	0.0192	0.0189	-0.0408	-0.7191
-1.5981	1.5744	0.2454	0.0324	0.0189	0.0192	0.0192	0.0192	0.0258	0.3054	0.9036
5.4372	-0.5199	-0.1008	0.0255	0.0189	0.0192	0.0192	0.0189	-0.0408	-0.7191	0.9036
-1.5981	0.5976	-0.0342	0.0258	0.0189	0.0192	0.0192	0.0258	0.3054	0.9036	-0.7191
-0.8394	0.2454	-0.0411	0.0258	0.0189	0.0192	0.0189	-0.0408	-0.7191	0.9036	0.3054

Columns 12 through 21

-0.0408	0.0189	0.0192	0.0192	0.0192	0.0186	-0.0342	-0.7746	1.5699	2.3712
0.0258	0.0192	0.0192	0.0192	0.0192	0.0255	0.3120	0.8022	-0.4224	-8.0913
0.0189	0.0192	0.0192	0.0192	0.0189	-0.0411	-0.7125	0.8022	-0.1848	5.0721
0.0192	0.0192	0.0192	0.0192	0.0258	0.3051	0.9120	-0.7806	2.9226	-0.1125
0.0192	0.0192	0.0192	0.0189	-0.0408	-0.7194	0.9120	0.3414	-2.6277	1.0410
0.0192	0.0192	0.0192	0.0258	0.3054	0.9033	-0.7125	-0.5946	-0.3180	0.8937
0.0192	0.0192	0.0189	-0.0408	-0.7191	0.9033	0.3075	0.6966	-0.7584	0.9039
0.0192	0.0192	0.0258	0.3054	0.9036	-0.7194	0.0123	0.2469	-0.7176	0.9036
0.0192	0.0189	-0.0408	-0.7191	0.9036	0.3051	-0.0720	0.3084	-0.7191	0.9036
0.0192	0.0258	0.3054	0.9036	-0.7191	-0.0429	-0.0381	0.3054	-0.7191	0.9036
0.0189	-0.0408	-0.7191	0.9036	0.3054	0.0339	-0.0408	0.3054	-0.7191	0.9036
0.0258	0.3054	0.9036	-0.7191	-0.0408	0.0255	-0.0408	0.3054	-0.7191	0.9033
-0.0408	-0.7191	0.9036	0.3054	0.0255	0.0258	-0.0408	0.3054	-0.7191	0.9120
0.3054	0.9036	-0.7191	-0.0408	0.0186	0.0258	-0.0408	0.3054	-0.7194	0.8022
-0.7191	0.9036	0.3054	0.0258	0.0189	0.0258	-0.0408	0.3054	-0.7125	1.5744
0.9036	-0.7191	-0.0408	0.0189	0.0189	0.0258	-0.0408	0.3051	-0.7746	-1.5981
0.9036	0.3054	0.0258	0.0192	0.0189	0.0258	-0.0408	0.3120	-0.5199	5.4372
-0.7191	-0.0408	0.0189	0.0192	0.0189	0.0258	-0.0411	0.2454	-0.8394	5.2995
0.3054	0.0258	0.0192	0.0192	0.0189	0.0258	-0.0342	0.5976	-1.5981	-0.5727
-0.0408	0.0189	0.0192	0.0192	0.0189	0.0255	-0.1008	-0.5199	-1.5489	-2.5770
0.0258	0.0192	0.0192	0.0192	0.0189	0.0324	0.2454	1.5744	-1.3773	8.6091

:

:

:

:

:

:

i = 16

ans = 1.0e+012 *

Columns 1 through 11

1.1450	-0.8739	0.0638	-0.0060	0.0030	-0.0011	0.0007	0.0029	0.0095	0.0073	-0.0107
-1.2963	0.3408	-0.0019	-0.0061	0.0029	-0.0012	-0.0008	-0.0061	-0.0107	0.0073	0.0094
0.8401	-0.1138	0.0113	-0.0060	0.0030	-0.0008	0.0033	0.0092	0.0074	-0.0107	-0.0060
-0.3560	0.0118	0.0092	-0.0060	0.0029	-0.0022	-0.0060	-0.0102	0.0073	0.0094	0.0030
0.1243	-0.0143	0.0095	-0.0060	0.0033	0.0013	0.0113	0.0065	-0.0106	-0.0060	-0.0011
-0.0216	-0.0102	0.0094	-0.0061	0.0013	-0.0044	-0.0143	0.0074	0.0094	0.0030	0.0003
0.0129	-0.0107	0.0095	-0.0060	0.0092	-0.0019	0.0129	-0.0107	-0.0060	-0.0011	-0.0001
0.0065	-0.0106	0.0092	-0.0044	-0.0190	0.0118	0.0065	0.0095	0.0029	0.0003	0.0000
0.0074	-0.0107	0.0113	-0.0190	0.0638	-0.0216	-0.0102	-0.0060	-0.0011	-0.0001	-0.0000
0.0073	-0.0102	-0.0019	0.0537	-0.1138	0.0129	0.0092	0.0030	0.0003	0.0000	0.0000
0.0074	-0.0143	0.0638	-0.1868	0.1243	-0.0143	-0.0061	-0.0011	-0.0001	-0.0000	-0.0001
0.0065	0.0118	-0.1868	0.3408	-0.0216	0.0113	0.0029	0.0004	0.0000	0.0000	0.0003
0.0129	-0.1138	0.5194	-0.3560	0.0118	-0.0060	-0.0012	-0.0001	-0.0000	-0.0001	-0.0011
-0.0216	0.3408	-0.8739	0.1243	-0.0019	0.0033	0.0003	0.0000	0.0000	0.0003	0.0030
0.1243	-0.8739	0.8401	-0.1138	-0.0044	-0.0008	-0.0002	0.0000	-0.0001	-0.0011	-0.0060
-0.3560	1.4115	-0.3560	0.0638	0.0013	0.0007	-0.0001	0.0000	0.0003	0.0030	0.0094
0.8401	-1.2963	0.3408	-0.0190	-0.0022	0.0003	-0.0001	-0.0001	-0.0011	-0.0060	-0.0107
-1.2963	0.8401	-0.1868	0.0092	-0.0008	0.0004	-0.0001	0.0004	0.0029	0.0094	0.0073
1.1450	-0.8739	0.0537	0.0013	-0.0012	0.0003	-0.0002	-0.0011	-0.0060	-0.0107	0.0073
-1.2963	0.5194	-0.0190	0.0033	-0.0011	0.0004	0.0003	0.0030	0.0094	0.0073	-0.0107
1.4115	-0.1868	-0.0044	0.0029	-0.0011	0.0003	-0.0012	-0.0060	-0.0106	0.0073	0.0094

Columns 12 through 21

-0.0060	-0.0011	-0.0001	-0.0001	0.0003	-0.0022	-0.0190	0.3408	0.1103	4.3321
0.0030	0.0003	0.0000	-0.0001	0.0007	0.0013	0.0638	-0.3560	1.1907	-5.7291
-0.0011	-0.0001	0.0000	-0.0002	-0.0008	-0.0044	-0.1138	-0.0371	-3.4211	3.9631
0.0003	0.0000	0.0000	0.0003	0.0033	-0.0019	0.1243	-0.6270	4.8507	-2.1243
-0.0001	-0.0000	-0.0001	-0.0012	-0.0060	0.0118	0.0265	1.7948	-3.9932	0.8792
0.0000	0.0000	0.0004	0.0029	0.0113	-0.0216	0.2089	-2.6549	2.2367	-0.2655
-0.0000	-0.0001	-0.0011	-0.0061	-0.0143	0.0001	-0.6498	2.3111	-0.9289	0.0735
0.0000	0.0003	0.0030	0.0092	0.0129	-0.0674	1.0186	-1.2971	0.2695	-0.0053
-0.0001	-0.0011	-0.0060	-0.0102	0.0094	0.1895	-0.9159	0.5297	-0.0758	0.0093
0.0003	0.0029	0.0095	0.0065	0.0002	-0.3015	0.5029	-0.1418	0.0010	0.0062
-0.0011	-0.0060	-0.0107	0.0069	-0.0278	0.2729	-0.1997	0.0422	-0.0123	0.0130
0.0030	0.0094	0.0074	-0.0122	0.0593	-0.1424	0.0465	0.0040	-0.0100	-0.0216
-0.0060	-0.0106	0.0074	0.0153	-0.0577	0.0547	-0.0164	0.0101	-0.0143	0.1243
0.0094	0.0073	-0.0105	-0.0173	0.0283	-0.0098	-0.0045	0.0091	0.0118	-0.3560
-0.0107	0.0073	0.0087	0.0136	-0.0108	0.0052	-0.0062	0.0113	-0.1138	0.8401
0.0073	-0.0107	-0.0045	-0.0057	0.0010	0.0027	-0.0061	-0.0019	0.3408	-1.2963
0.0073	0.0095	0.0015	0.0021	-0.0014	0.0030	-0.0060	0.0638	-0.8739	1.1450
-0.0106	-0.0062	-0.0006	-0.0000	-0.0011	0.0029	-0.0044	-0.1868	1.4115	0.2535
0.0094	0.0031	0.0001	0.0004	-0.0011	0.0033	-0.0190	0.5194	-1.2963	0.9742
-0.0060	-0.0012	-0.0001	0.0003	-0.0012	0.0013	0.0537	-0.8739	-0.2020	-2.9249
0.0029	0.0004	-0.0001	0.0004	-0.0008	0.0092	-0.1868	0.8401	-1.5086	3.2916

i = 17

ans = 1.0e+013 *

Columns 1 through 11

0.9463	-0.8355	0.0704	-0.0040	0.0019	-0.0008	0.0005	0.0018	0.0055	0.0040	-0.0059
-1.1174	0.3575	-0.0094	-0.0036	0.0019	-0.0008	-0.0005	-0.0036	-0.0060	0.0040	0.0054
0.7567	-0.1223	0.0081	-0.0036	0.0019	-0.0005	0.0023	0.0051	0.0041	-0.0059	-0.0037
-0.3441	0.0223	0.0051	-0.0037	0.0018	-0.0014	-0.0040	-0.0052	0.0040	0.0054	0.0019
0.1237	-0.0112	0.0055	-0.0036	0.0023	0.0002	0.0081	0.0029	-0.0059	-0.0037	-0.0008
-0.0279	-0.0052	0.0054	-0.0036	0.0002	-0.0001	-0.0112	0.0041	0.0054	0.0019	0.0003
0.0107	-0.0060	0.0055	-0.0040	0.0091	-0.0094	0.0107	-0.0060	-0.0037	-0.0008	-0.0001
0.0029	-0.0059	0.0051	-0.0001	-0.0236	0.0223	0.0029	0.0055	0.0019	0.0003	0.0000
0.0042	-0.0060	0.0081	-0.0236	0.0704	-0.0279	-0.0052	-0.0036	-0.0008	-0.0001	-0.0000
0.0040	-0.0052	-0.0094	0.0734	-0.1223	0.0107	0.0051	0.0019	0.0003	0.0000	0.0000
0.0042	-0.0112	0.0704	-0.2098	0.1237	-0.0112	-0.0036	-0.0008	-0.0001	-0.0000	-0.0001
0.0029	0.0223	-0.2098	0.3575	-0.0279	0.0081	0.0018	0.0003	0.0000	0.0000	0.0003
0.0107	-0.1223	0.5238	-0.3441	0.0223	-0.0040	-0.0008	-0.0001	-0.0000	-0.0001	-0.0008
-0.0279	0.3575	-0.8355	0.1237	-0.0094	0.0023	0.0002	0.0000	0.0000	0.0003	0.0019
0.1237	-0.8355	0.7567	-0.1223	-0.0001	-0.0005	-0.0001	0.0000	-0.0001	-0.0008	-0.0037
-0.3441	1.2809	-0.3441	0.0704	0.0002	0.0005	-0.0001	0.0000	0.0003	0.0019	0.0054
0.7567	-1.1174	0.3575	-0.0236	-0.0014	0.0002	-0.0001	-0.0001	-0.0008	-0.0037	-0.0059
-1.1174	0.7567	-0.2098	0.0091	-0.0005	0.0003	-0.0001	0.0003	0.0019	0.0054	0.0040
0.9463	-0.8355	0.0734	0.0002	-0.0008	0.0003	-0.0001	-0.0008	-0.0037	-0.0059	0.0040
-1.1174	0.5238	-0.0236	0.0023	-0.0008	0.0003	0.0002	0.0019	0.0054	0.0040	-0.0059
1.2809	-0.2098	-0.0001	0.0018	-0.0008	0.0002	-0.0008	-0.0036	-0.0059	0.0040	0.0054

Columns 12 through 21

-0.0037	-0.0008	-0.0001	-0.0001	0.0002	-0.0014	-0.0236	0.3575	-0.0290	3.9576
0.0019	0.0003	0.0000	-0.0001	0.0005	0.0002	0.0704	-0.3441	1.2591	-5.0812
-0.0008	-0.0001	0.0000	-0.0001	-0.0005	-0.0001	-0.1223	0.0268	-3.2695	3.5625
0.0003	0.0000	0.0000	0.0002	0.0023	-0.0094	0.1237	-0.6919	4.4902	-1.9825
-0.0001	-0.0000	-0.0001	-0.0008	-0.0040	0.0223	-0.0013	1.8121	-3.7321	0.8594
0.0000	0.0000	0.0003	0.0018	0.0081	-0.0279	0.2571	-2.5905	2.1763	-0.2815
-0.0000	-0.0001	-0.0008	-0.0036	-0.0112	0.0032	-0.7111	2.2728	-0.9488	0.0788
0.0000	0.0003	0.0019	0.0051	0.0107	-0.0803	1.0634	-1.3363	0.3029	-0.0116
-0.0001	-0.0008	-0.0036	-0.0052	0.0049	0.2183	-0.9601	0.5746	-0.0841	0.0067
0.0003	0.0019	0.0055	0.0029	0.0099	-0.3349	0.5573	-0.1738	0.0095	0.0025
-0.0008	-0.0037	-0.0060	0.0037	-0.0431	0.3055	-0.2332	0.0483	-0.0084	0.0107
0.0019	0.0054	0.0041	-0.0085	0.0760	-0.1713	0.0647	-0.0025	-0.0049	-0.0279
-0.0037	-0.0059	0.0041	0.0140	-0.0720	0.0691	-0.0188	0.0066	-0.0112	0.1237
0.0054	0.0040	-0.0056	-0.0187	0.0386	-0.0166	-0.0011	0.0049	0.0223	-0.3441
-0.0059	0.0040	0.0043	0.0161	-0.0151	0.0056	-0.0040	0.0081	-0.1223	0.7567
0.0040	-0.0060	-0.0014	-0.0078	0.0028	0.0013	-0.0036	-0.0094	0.3575	-1.1174
0.0040	0.0056	-0.0003	0.0029	-0.0014	0.0020	-0.0040	0.0704	-0.8355	0.9463
-0.0059	-0.0039	0.0002	-0.0003	-0.0007	0.0018	-0.0001	-0.2098	1.2809	0.0749
0.0054	0.0022	-0.0001	0.0004	-0.0008	0.0023	-0.0236	0.5238	-1.1174	1.0025
-0.0036	-0.0009	-0.0001	0.0002	-0.0008	0.0002	0.0734	-0.8355	-0.0067	-2.6147
0.0019	0.0003	-0.0001	0.0003	-0.0005	0.0091	-0.2098	0.7567	-1.5346	2.8403

:

:

:

:

:

:

i = 20

ans = 1.0e+016 *

Columns 1 through 11

0.5701	-0.7048	0.0965	-0.0031	0.0005	-0.0002	0.0002	0.0003	0.0012	0.0006	-0.0010
-0.7404	0.3652	-0.0267	-0.0004	0.0005	-0.0002	-0.0003	-0.0004	-0.0014	0.0007	0.0010
0.5626	-0.1446	0.0074	-0.0008	0.0005	-0.0003	0.0012	-0.0001	0.0010	-0.0010	-0.0008
-0.3004	0.0429	-0.0001	-0.0008	0.0003	0.0003	-0.0031	0.0011	0.0006	0.0010	0.0005
0.1231	-0.0118	0.0012	-0.0008	0.0012	-0.0032	0.0074	-0.0015	-0.0010	-0.0008	-0.0002
-0.0386	0.0011	0.0010	-0.0004	-0.0032	0.0105	-0.0118	0.0010	0.0010	0.0005	0.0001
0.0108	-0.0014	0.0012	-0.0031	0.0149	-0.0267	0.0108	-0.0014	-0.0008	-0.0002	-0.0000
-0.0015	-0.0010	-0.0001	0.0105	-0.0429	0.0429	-0.0015	0.0012	0.0005	0.0001	0.0000
0.0011	-0.0014	0.0074	-0.0429	0.0965	-0.0386	0.0011	-0.0008	-0.0002	-0.0000	-0.0000
0.0006	0.0011	-0.0267	0.1194	-0.1446	0.0108	-0.0001	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000
0.0011	-0.0118	0.0965	-0.2537	0.1231	-0.0118	-0.0004	-0.0002	-0.0000	-0.0000	-0.0000
-0.0015	0.0429	-0.2537	0.3652	-0.0386	0.0074	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0001
0.0108	-0.1446	0.5094	-0.3004	0.0429	-0.0031	-0.0002	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0002
-0.0386	0.3652	-0.7048	0.1231	-0.0267	0.0012	0.0001	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005
0.1231	-0.7048	0.5626	-0.1446	0.0105	-0.0003	-0.0001	0.0000	-0.0000	-0.0002	-0.0008
-0.3004	0.9475	-0.3004	0.0965	-0.0032	0.0002	-0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0010
0.5626	-0.7404	0.3652	-0.0429	0.0003	0.0001	-0.0000	-0.0000	-0.0002	-0.0008	-0.0010
-0.7404	0.5626	-0.2537	0.0149	-0.0003	0.0001	-0.0000	0.0001	0.0005	0.0010	0.0007
0.5701	-0.7048	0.1194	-0.0032	-0.0002	0.0001	-0.0001	-0.0002	-0.0008	-0.0010	0.0007
-0.7404	0.5094	-0.0429	0.0012	-0.0002	0.0001	0.0001	0.0005	0.0010	0.0007	-0.0010
0.9475	-0.2537	0.0105	0.0003	-0.0002	0.0001	-0.0002	-0.0008	-0.0010	0.0007	0.0010

Columns 12 through 21

-0.0008	-0.0002	-0.0001	-0.0000	0.0001	0.0003	-0.0429	0.3652	-0.3194	3.0652
0.0005	0.0001	0.0000	-0.0000	0.0002	-0.0032	0.0965	-0.3004	1.3575	-3.6689
-0.0002	-0.0000	0.0000	-0.0001	-0.0003	0.0105	-0.1446	0.1974	-2.8087	2.6563
0.0001	0.0000	0.0000	0.0001	0.0012	-0.0267	0.1231	-0.8443	3.5907	-1.6113
-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0002	-0.0031	0.0429	-0.0856	1.7820	-3.0569	0.7866
0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0074	-0.0386	0.3852	-2.3604	1.9502	-0.3064
-0.0000	-0.0000	-0.0002	-0.0004	-0.0118	0.0286	-0.8368	2.1130	-0.9633	0.0975
0.0000	0.0001	0.0005	-0.0001	0.0108	-0.1365	1.1404	-1.3719	0.3723	-0.0243
-0.0000	-0.0002	-0.0008	0.0011	-0.0061	0.3052	-1.0451	0.6749	-0.1167	0.0063
0.0001	0.0005	0.0012	-0.0015	0.0362	-0.4263	0.6790	-0.2552	0.0280	-0.0024
-0.0002	-0.0008	-0.0014	0.0019	-0.0863	0.3955	-0.3287	0.0779	-0.0073	0.0110
0.0005	0.0010	0.0010	-0.0092	0.1251	-0.2541	0.1199	-0.0174	0.0021	-0.0386
-0.0008	-0.0010	0.0005	0.0212	-0.1173	0.1198	-0.0354	0.0048	-0.0119	0.1231
0.0010	0.0006	0.0004	-0.0308	0.0740	-0.0416	0.0071	-0.0007	0.0429	-0.3004
-0.0010	0.0007	-0.0027	0.0288	-0.0337	0.0118	-0.0022	0.0075	-0.1446	0.5626
0.0007	-0.0012	0.0051	-0.0175	0.0109	-0.0019	-0.0002	-0.0267	0.3652	-0.7404
0.0007	0.0016	-0.0051	0.0076	-0.0030	0.0009	-0.0031	0.0965	-0.7048	0.5701
-0.0010	-0.0017	0.0030	-0.0023	0.0003	0.0003	0.0105	-0.2537	0.9475	-0.2150
0.0010	0.0014	-0.0013	0.0006	-0.0003	0.0012	-0.0429	0.5094	-0.7404	0.9802
-0.0007	-0.0007	0.0003	-0.0000	-0.0002	-0.0032	0.1194	-0.7048	0.3490	-1.9221
0.0003	0.0003	-0.0001	0.0001	-0.0003	0.0149	-0.2537	0.5626	-1.5133	1.9223

i = 21

ans = 1.0e+017 *

Columns 1 through 11

0.4901	-0.6614	0.1047	-0.0037	0.0003	-0.0001	0.0002	0.0001	0.0009	0.0003	-0.0006
-0.6523	0.3595	-0.0318	0.0001	0.0003	-0.0001	-0.0003	0.0001	-0.0011	0.0004	0.0006
0.5121	-0.1495	0.0086	-0.0005	0.0003	-0.0003	0.0014	-0.0010	0.0009	-0.0006	-0.0005
-0.2853	0.0479	-0.0010	-0.0004	0.0001	0.0009	-0.0037	0.0021	0.0003	0.0006	0.0003
0.1222	-0.0133	0.0009	-0.0005	0.0014	-0.0046	0.0086	-0.0022	-0.0005	-0.0005	-0.0001
-0.0408	0.0021	0.0005	0.0001	-0.0046	0.0139	-0.0133	0.0009	0.0006	0.0003	0.0001
0.0117	-0.0011	0.0009	-0.0037	0.0182	-0.0318	0.0117	-0.0011	-0.0005	-0.0001	-0.0000
-0.0022	-0.0005	-0.0010	0.0139	-0.0499	0.0479	-0.0022	0.0009	0.0003	0.0001	0.0000
0.0009	-0.0011	0.0086	-0.0499	0.1047	-0.0408	0.0021	-0.0005	-0.0001	-0.0000	-0.0000
0.0002	0.0021	-0.0318	0.1310	-0.1495	0.0117	-0.0010	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000
0.0009	-0.0133	0.1047	-0.2613	0.1222	-0.0133	0.0001	-0.0001	-0.0000	-0.0000	-0.0000
-0.0022	0.0479	-0.2613	0.3595	-0.0408	0.0086	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0001
0.0117	-0.1495	0.4973	-0.2853	0.0479	-0.0037	-0.0001	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0001
-0.0408	0.3595	-0.6614	0.1222	-0.0318	0.0014	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003
0.1222	-0.6614	0.5121	-0.1495	0.0139	-0.0003	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0001	-0.0005
-0.2853	0.8575	-0.2853	0.1047	-0.0046	0.0002	-0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0006
0.5121	-0.6523	0.3595	-0.0499	0.0009	0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0001	-0.0005	-0.0006
-0.6523	0.5121	-0.2613	0.0182	-0.0003	0.0001	-0.0000	0.0001	0.0003	0.0006	0.0004
0.4901	-0.6614	0.1310	-0.0046	-0.0001	0.0001	-0.0000	-0.0001	-0.0005	-0.0006	0.0004
-0.6523	0.4973	-0.0499	0.0014	-0.0001	0.0001	0.0000	0.0003	0.0006	0.0004	-0.0006
0.8575	-0.2613	0.0139	0.0001	-0.0002	0.0000	-0.0001	-0.0005	-0.0005	0.0004	0.0006

Columns 12 through 21

-0.0005	-0.0000	-0.0001	-0.0000	0.0000	0.0009	-0.0499	0.3595	-0.3820	2.8304
0.0003	0.0000	0.0000	-0.0000	0.0002	-0.0046	0.1047	-0.2853	1.3631	-3.3248
-0.0002	-0.0000	0.0000	-0.0000	-0.0003	0.0139	-0.1495	0.2434	-2.6648	2.4275
0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0014	-0.0318	0.1222	-0.8788	3.3439	-1.5061
-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0001	-0.0037	0.0479	-0.1125	1.7542	-2.8652	0.7601
0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0086	-0.0408	0.4214	-2.2788	1.8705	-0.3095
-0.0000	-0.0000	-0.0001	0.0001	-0.0133	0.0400	-0.8633	2.0512	-0.9564	0.1033
0.0000	0.0001	0.0003	-0.0010	0.0117	-0.1574	1.1511	-1.3648	0.3875	-0.0278
-0.0000	-0.0001	-0.0005	0.0021	-0.0103	0.3317	-1.0599	0.6969	-0.1276	0.0072
0.0001	0.0003	0.0009	-0.0022	0.0455	-0.4524	0.7074	-0.2776	0.0334	-0.0034
-0.0001	-0.0005	-0.0011	0.0026	-0.1005	0.4216	-0.3566	0.0892	-0.0085	0.0119
0.0003	0.0006	0.0009	-0.0115	0.1411	-0.2793	0.1380	-0.0222	0.0035	-0.0409
-0.0005	-0.0005	0.0000	0.0256	-0.1327	0.1377	-0.0429	0.0056	-0.0135	0.1222
0.0006	0.0003	0.0015	-0.0365	0.0866	-0.0512	0.0099	-0.0018	0.0480	-0.2853
-0.0006	0.0004	-0.0045	0.0343	-0.0414	0.0153	-0.0026	0.0088	-0.1495	0.5121
0.0004	-0.0009	0.0071	-0.0219	0.0146	-0.0032	0.0005	-0.0318	0.3595	-0.6523
0.0004	0.0014	-0.0069	0.0101	-0.0042	0.0009	-0.0038	0.1047	-0.6614	0.4901
-0.0005	-0.0018	0.0043	-0.0033	0.0007	0.0000	0.0139	-0.2613	0.8575	-0.2619
0.0005	0.0015	-0.0019	0.0009	-0.0003	0.0014	-0.0499	0.4973	-0.6523	0.9531
-0.0003	-0.0009	0.0006	-0.0001	-0.0001	-0.0046	0.1310	-0.6614	0.4142	-1.7501
0.0001	0.0004	-0.0002	0.0001	-0.0003	0.0182	-0.2613	0.5121	-1.4832	1.7125



**KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang (0341) 551345
Fax. (0341) 572533**

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Sefty Faradillah
NIM : 07610023
Fakultas/ Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Analisis Persamaan Helmholtz Pada koordinat Kartesian
Pembimbing I : Ari kusumastuti, S.Si.,M.Pd
Pembimbing II : Abdul Aziz, M.Si

No.	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	12 Juli 2011	Konsultasi Bab I dan Bab II	1.
2.	16 Juli 2011	Revisi Bab I dan Bab II	2.
3.	20 Juli 2011	ACC Bab I dan Bab II	3.
4.	22 Juli 2011	Konsultasi Bab III	4.
5.	28 Juli 2011	Revisi Bab III	5.
6.	01 Agustus 2011	Konsultasi Kajian Agama Bab I dan Bab II	6.
7.	04 Agustus 2011	Revisi Bab III dan Konsultasi Bab IV	7.
8.	15 Agustus 2011	Revisi Kajian Agama Bab I dan Bab II	8.
9.	16 Agustus 2011	ACC Kajian Agama	9.
10.	18 Agustus 2011	ACC Bab III dan Bab IV	10.
11.	19 Agustus 2011	ACC Keseuruhan	11.

Malang, 20 Agustus 2011

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001