PELABELAN GRACEFUL DAN FELICITOUS PADA GRAF LINTASASN P_n, UNTUK n BILANGAN ASLI

SKRIPSI

Oleh:
RIZAL ABADI
NIM 02510006

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
MALANG
2008

PELABELAN GRACEFUL DAN FELICITOUS PADA GRAF LINTASASN P_n, UNTUK n BILANGAN ASLI

SKRIPSI

Diajukan Kepada :
Universitas Islam Negeri Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh :
RIZAL ABADI
NIM 02510006

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
MALANG
2008

PELABELAN GRACEFUL DAN FELICITOUS PADA GRAF LINTASAN P_n, UNTUK n BILANGAN ASLI

SKRIPSI

Oleh:
RIZAL ABADI
NIM 02510006

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji

Malang, 04 Agsutus 2008

Pembimbing

Abdussakir, M.Pd
NIP 150 327 247

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M. Si
NIP 150 318 321

PELABELAN GRACEFUL DAN FELICITOUS PADA GRAF LINTASAN P_n, UNTUK n BILANGAN ASLI

SKRIPSI

Oleh:
RIZAL ABADI
NIM 02510006

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Malang, 06 Juli 2008

Susunan Dewan Penguji		Tanda Tangan
1. **Penguji Utama**	**Wahyu H. Irawan, M.Pd** **NIP. 150 300 415**	( )
2. **Ketua**	**Usman Pagalay, M.Si** **NIP. 150 327 240**	( )
3. **Anggota**	**Abdussakir, M.Pd** **NIP. 150 327 247**	( )

Mengetahui dan Mengesahkan
Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M.Si
NIP. 150 318 321

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : RIZAL ABADI

NIM : 02510006

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri dan bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan, dan pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri.

Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 04 Agustus 2008

Rizal Abadi
NIM. 02510006

MOTTO

ۗ إِنَّ ٱللَّهَ لَا يُغَيِّرُ مَا بِقَوْمٍ حَتَّىٰ يُغَيِّرُوا مَا بِأَنفُسِهِمْ ۗ

... Sesungguhnya Allah

tidak merubah keadaan suatu kaum sehingga

mereka merubah keadaan yang ada pada diri mereka sendiri ...

(*QS. Ar-Ra' d: 11)*

"Saya Tidak Dapat Memastikan

Bahwa Perubahan Akan Memperbaiki Sesuatu,

Tetapi Saya Dapat Memastikan Bahwa Untuk Menjadi Lebih Baik

Sesuatu Harus Berubah" (*Jose George C. Lictnbeg*)

PERSEMBAHAN

Dengan segala kelapangan dada kupersembahkan karya ini

untuk orang-orang yang selalu menyayangi dan mendo'akan

serta orang-orang yang ada dalam hariku…

Kupersembahan karya ini kepada:
kedua orang tua (alm. M. Eksan dan ibunda Achyani)
yang senantiasa selalu mendo'akan dalam setiap nafas dan langkah dalam mengarungi
hidup dan kehidupan, kakakq Ruspandi dan adikq Annayani
denganmu saya banyak belajar dan mengerti tentang arti persaudaraan dan pengorbanan,
serta paman dan bibiq yang slalu memberi mtivasi dalam menjalani kehidupan.

Special Thanks To:.

Allah SWT yang senantiasa memberi hidayah dan ridhoserta kesehatan dalam setiap melangkahkan kaki tuk mengarungi kehidupan serta puji syukur yang tak henti2nya saya panjtakan kehadirat-Mu wahai raja di raja yang menguasai alam jagat raya atas segala anugerah yang engkau berikan ...

Nabi Muhammad SAW sebagai revolusioner dunia yang mampu merubah zaman jahiliyah menuju zaman yang penuh dengan rahmat dan hidayah yang selalu dilindungi oleh allah

Para Dosen dan guru yang dengan tabah dan sabar demi perkembangan ilmu pengetahuan dan kehidupan yang akan datang.

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahi Robbil 'Alamin, segala puji syukur bagi Allah SWT yang Maha Pengasih dan Maha Penyayang. Dengan izin-Mu, penulis dapat menyelesaikan tugas akhir perkuliahan (Skripsi) ini yang berjudul **"Pelabelan Graceful dan Felicitous pada Graf Lintasan P_n, untuk n Bilangan Asli".** Sholawat serta salam semoga tetap tercurahkan limpahkan kepada revolusioner dunia yaitu junjungan kita Nabi Muhammad SAW, yang telah mengantarkan umat manusia dari zaman jahiliyah menuju zaman yang terang benderang yang kaya akan ilmu pengetahuan dan hidayah ilahi.

Dalam penulisan skripsi ini, banyak pihak yang telah berjasa dan senantiasa memberikan dukungan, bimbingan, arahan serta motivasi sehingga skripsi ini dapat terselesaikan. Oleh karena itu penulis memberikan ucapan tarima kasih yang dalam kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo selaku Rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Malang
2. Prof. Dr. Sutiman Bambang Sumitro Selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang
3. Sri Harini, M.Si selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang
4. Abdussakir, M.Pd selaku pembimbing yang telah rela meluangkan waktunya dengan tanpa pamrih demi memberikan arahan, motivasi, bimbingan, dan masukan sehingga penulisan skripsi ini dapat tersesaikan.

5. Ibunda tercinta yang dengan tabah dan sabar membesarkan, membimbing serta ikhlas dalam membiayai dan memberi motivasi serta do'a mulai dari kecil hingga penulisan skripsi ini selesai.
6. Seluruh Dosen Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang
7. Teman-teman Mahasiswa Jurusan Matematika angkatan 2002/2003 UIN Malang Khususnya Toni, Sigit, Layla, H5, Alfi, Fatma, ko2k, Hkim, Ucup, Rohman, Fu, dan Kriting yang telah banyak memberikan dukungan dalam penelitian dan penyusunan skripsi ini
8. Sahabat-sahabat yang selalu memberi motivasi, gagasan dan pemikiran serta moral.
9. Semua pihak yang secara langsung maupun tidak langsung telah membantu dalam menyelesaikan skripsi ini.

Akhirnya, penulis berharap mudah-mudahan skripsi ini bisa bermanfaat dan menambah khazanah dalam pengembangan ilmu pengetahuan. Amin.

Malang, 04 Agustus 2008

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Abadi, Rizal. 2008**. Pelabelan Graceful dan Felicitous pada Graf Lintasan P_n, untuk n Bilangan Asli.** Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Malang. Pembimbing: Abdussakir, M.Pd.

Kata Kunci: Pelabelan, Graceful, Felicitous, dan Graf Lintasan

Pelabelan pada graf *G* adalah pemberian nilai pada setiap titik atau sisi atau titik dan sisi pada suatu graf *G*. Pelabelan graceful adalah fungsi injektif *f* yang memetakan *V*(*G*) ke {0, 1, 2, 3, ...*q*} sehingga seandainya sisi *xy* diberi label $|f(x) - f(y)|$ maka label sisinya berbeda. Pelabelan felicitous adalah fungsi injektif *f* memetakan *V*(*G*) ke {0, 1, 2, 3, ...*q*} sehingga seandinya sisi *xy* diberi label $f(x) + f(y)(\mathrm{mod}\, q)$ maka label sisinya berbeda.

Dalam skripsi ini penulis menjelaskan pelabelan graceful dan felicitous pada graf lintasan P_n, untuk n bilangan asli, dengan melabeli titik grap lintasan sehingga menjadi pelabelan graceful dan mencari pola pelabelannya sekaligus merumuskan pola pelabelan dan pembuktian secara umum. Berdasarkan hasil pembahasan didapat pola secara umum sebagaimaan berikut:

1. Untuk pelabelan graceful pada graf lintasan P_n, n bilangan asli adalah fungsi yang memetakan *V*(*G*) ke {0, 1, 2, 3, . . . *q*} dengan rumus sebagai berikut :

$$f(v_i) = \begin{cases} \dfrac{i-1}{2}, i \text{ ganjil} \\ n - \dfrac{i}{2}, i \text{ genap} \end{cases}$$

2. Untuk pelabelan felicitous pada graf lintasan P_n, n bilagan asli adalah fungsi *f* yang memetakan V(G) ke {0, 1, 2, 3, . . . *q*} dengan rumus sebagai berikut

   a). Untuk n ganjil adalah

$$f(v_i) = \begin{cases} \dfrac{i-1}{2}, i \text{ ganjil} \\ \dfrac{n+i+1}{2} - 1, i \text{ genap} \end{cases}$$

   b). Untuk n genap adalah

$$f(v_i) = \begin{cases} \dfrac{i-1}{2}, i \text{ ganjil} \\ n - \dfrac{i}{2}, i \text{ genap} \end{cases}$$

Penelitian selanjutnya dapat mengembangkan pelabelan pada graf lainnya, misal pelabelan pada graf bunga, graf gear, dan graf roda.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika lahir, setua dan seiring peradaban manusia. Perkembangan awal Matematika didorong oleh desakan alam kepada manusia untuk bertahan hidup dan upaya mengorganisir kehidupannya. Seseorang gembala primitive menandai satu ternak yang keluar dari kandang pada pagi hari dengan satu batu, sampai semua ternaknya keluar semua. Pada sore hari tiap ternak yang masuk kembali lagi ditandai dengan batu yang tadi pagi, sampai semua ternaknya masuk semua, kalau batu ditangannya ada yang tersisa berarti ada ternaknya yang hilang. Contoh lain adalah cabang matematika yang terkenal : berhitung. Pada awal perkembangannya cabang Matematika ini didorong okeh cobaan Sungai Nil yang selalu meluap. Manusia Mesir Kuno membuat bendungan dengan mengandalkan perhitungan tentang tinggi dan ketebalan bendungan yang baik. (Iswandi dan Liskurniati: 2).

Matematika merupakan salah satu cabang ilmu yang mendasari berbagai macam ilmu yang lain dan selalu menghadapi berbagai macam fenomena yang semakin kompleks. Hal ini disebabkan oleh kemajuan ilmu pengetahuan dan teknologi, serta matematika merupakan bahasa proses, teori dan aplikasi ilmu yang memberikan suatu bentuk dan kemanfaatan. Perhitungan matematika menjadi dasar bagi desain ilmu teknik, fisika, kimia maupun disiplin ilmu yang lainnya. Para ahli dari berbagai disiplin ilmu, menggunakan matematika untuk berbagai keperluan yang berkaitan dengan keilmuan mereka. Misalnya para ahli fisika menggunakan matematika untuk mengukur kuat arus listrik, merancang pesawat ruang angkasa, menganalisis gerak, mengukur kecepatan, dan lain-lain. (Nurhayati, 2007:4).

Teori Graf adalah ilmu yang berkembang sangat pesat saat ini, bahkan dalam perkembangannya dapat disejajarkan dengan ilmu Aljabar yang lebih dahulu berkembang. Keunikan Teori Graf adalah kesederhanaan pokok bahasan yang dipelajarinya, karena dapat disajikan sebagai titik (verteks) dan garis (edge). Meskipun pokok bahasan dari topik-topik. Teori Graf sangat sederhana tetapi isi di dalamnya belumlah tentu sesederhana itu. Kerumitan demi kerumitan masalah - masalah selalu pasti ada dan bahkan sampai saat ini masih ada masalah yang belum terpecahkan.

Graf $G=(V,E)$ adalah pasangan yang terdiri dari himpunan tak kosong dan berhingga V yang anggotanya disebut titik, dan himpunan pasangan tak berurut E (boleh kosong) dari unsure-unsur yang berbeda di V yang anggotanya disebut sisi. Pelabelan dari graf G adalah pemetaan yang memetakan unsur-unsur graf ke bilangan (umumnya bilangan bulat positif) yang disebut label. Pada umumnya domain dari pemetaan ini adalah himpunan titik (pelabelan titik), himpunan sisi saja (pelabelan sisi), atau himpunan titik dan himpunan sisi (sehingga pelabelan ini disebut *Pelabelan total).*

Misal G graf dengan q sisi. Pelabelan graceful pada G adalah fungsi injektif, f yang memetakan $V(G)$ ke $\{0,1,2,3,\cdots,q\}$sehingga, seandainya sisi xy diberi label

$$|f(x) - f(y)|$$

maka label semua sisi berbeda.

Misal G graf dengan q sisi. Pelabelan felilcitous pada G adalah fungsi injektif f yang memetakan $V(G)$ ke $\{0,1,2,3,\cdots,q\}$ sehingga, seandainya sisi xy diberi label

$$f(x) + f(y)(Mod\, q)$$

maka label semua sisi berbeda.

Beberapa kajian terdahulu tentang pelabelan graceful telah dibahas pada skripsi yang lain seperti pelabelan graceful pada graf super star. Penulis tertarik untuk melanjutkan meneliti tentang pelabelan graceful dan felicitous pada graf lintasan P_n, untuk n bilangan aslil. Oleh karena itu penulis merumuskan judul skripsi ini yaitu “Pelabelan Graceful dan Felicitous pada Graf Lintasan P_n, untuk n Bilangan Asli”.

1.2 Rumusan Masalah

Dari uraian diatas punulis merumuskan masalah dadalam skripsi ini adalah

1. Bagaimana pelabelan graceful pada graf P_n, dengan n bilangan asli?
2. Bagaimana pelabelan Felicitous pada graf P_n, dengan n bilangan asli?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah diatas, maka tujuan penulisan skripsi adalah:

1. Menjelaskan cara merumuskan pelabelan graceful pada graf P_n, untuk n bilangan asli.
2. Menjelaskan cara merumuskan pelabelan Felicitous pada graf P_n, untuk n bilangan asli.

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun penelitian skripsi ini bermanfaat untuk:

1 Jurusan Matematika

Dari hasil pembahasan ini dapat digunakan sebagai tembahan bahan dalam pengembangan ilmu pengetahuan pada umumnya dan pada khususnya matematika di kalangan mahasiswa jurusan matematika.

2 Peneliti

Melalui penelitian ini dapat menambah penguasaan materi, sebagai pengalaman dalam melakukan penelitian dan menyusun karya ilmiah dalam bentuk skripsi, serta media untuk mengaplikasikan ilmu matematika yang telah banyak diterima dalam ilmu pengetahuan.

3 Pengembangan ilmu pengetahuan

Menambah khasanah dan mempertegas keilmuan matematika dalam peranannya terhadap perkembangan teknologi dan disiplin ilmu lain.

1.5 Sistematika Penelitian

Supaya dalam penulisan ini lebih mengarah, mudah ditelaah dan dipahami, maka digunakan sistematika penulisan yang baik dan benar. Dan pada bab I penulis mengkaji tentang pandahuluan yang terdiri dari latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitin dan sistematika penulisan

Pada bab II membahas mengenai tinjauan pustaka yang mengkaji tentang konsep-konsep (teori-teori) yang mendukung bagian dari pembahasan. Konsep-konsep ini antara lain membahas tentang graf, graf terhubung dan tak terhubung, dan graf lintasan.

Dalam bab III penulis mengkaji tentang pembahasan yang terdiri dari bagaimana menentukan pola dari pelabelan graceful dan felicitous pada graf lintasan P_n, untuk n bilangan asli dengan menyajikan beberapa contoh sebelumnya, serta teorema dan pembuktiannya. Dan untuk bab terakhir yaitu bab IV yang membahas mengenai kesimpulan dan saran-saran yang diperoleh penulis dalam melakukan karya ilmiah.

BAB II

KAJIAN TEORI

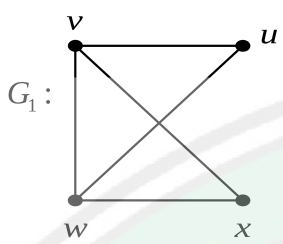
2.1 Graf

Definisi 1.

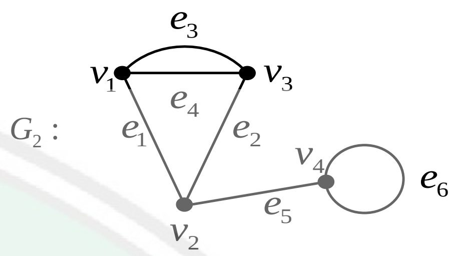
Graf G adalah pasangan himpunan (V,E) dengan V adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari obyek-obyek yang disebut sebagai titik dan E adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di G yang disebut sebagai sisi. Himpunan titik di G dinotasikan dengan $V(G)$ dan himpunan sisi dinotasikan dengan $E(G)$. Sedangkan banyaknya unsur di V disebut order dari G dan dilambangkan dengan $p(G)$ dan banyaknya unsur di E disebut ukuran dari G dan dilambangkan dengan $q(G)$. Jika graf yang dibicarakan hanya graf G, maka order dan ukuran dari G tersebut cukup ditulis dengan p dan q (Chartrand dan Lesniak., 1986: 4).

Dari uraian di atas, maka suatu graf tidak boleh mempunyai sisi rangkap dan loop. Sisi rangkap dari suatu graf adalah jika dua titik yang dihubungkan oleh lebih dari satu sisi. Sedangkan yang disebut dengan *loop* adalah suatu sisi yang menghubungkan suatu titik dengan dirinya sendiri (Suryanto dalam Fitria, 2007: 6). Graf yang mempunyai sisi rangkap dan loop disebut *multigraf*.

Contoh 2.1



a. Graf



b. Multigraf

Gambar 2.1 Graf dan Multigraf

Definisi 2 (Adjacent dan Incident)

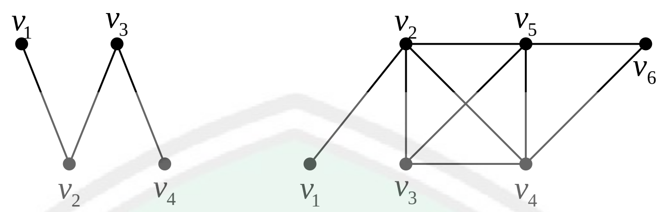
Sisi $e = (u,v)$ dikatakan menghubungkan titik u ke v. jika $e = (u,v)$ adalah sisi di G , maka u dan v disebut terhubung langsung (*adjacent*), u dan e serta v dan e disebut terkait langsung (*insident*). Untuk selanjutkan, sisi $e = (u,v)$ akan ditulis $e = uv$ (Chartrand dan Lesniak, 1984:4)

Dari Gambar 2.1 pada G_2, titik dan sisi e_1, e_2, dan e_5 adalah incident dengan titik v_2, sedangkan titik v_2 dan v_4 adalah *adjacent* tetapi v_1 dan v_4 tidak adjacent.

Definisi 3 (Derajat)

Derajat suatu titik v pada sebuah graf G, ditulis dengan $\mathrm{Deg}_G(v)$ adalah jumlah sisi yang terkait langsung (*insident*) pada v. dengan kata lain, jumlah sisi yang memuat v sebagai titik ujung. Titik v dikatakan genap atau ganjil tergantung dari jumlah $\deg_G(v)$ genap atau ganjil (Chantrand dan Lesniak, 1986:7)

Contoh 2.2



Gambar 2.2 Graf dengan derajat titik

Teorema 1

Jika G dengan (p, q) adalah sebuah graf, dimana $V(G) = \{v_1, v_2, \dots v_n\}$ maka $\sum_{i=1}^{p} \deg_G(v_i) = 2q$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:7-8)

Bukti:

Setiap sisi adalah terkait langsung dengan 2 titik, jika setiap derajat titik dijumlahkan, maka setiap sisi dihitung dua kali.

Teorema 2

Pada sebarang graf, jumlah derajat titik ganjil adalah genap.

Bukti:

Missal graf G dengan ukuran q, maka ambil W yang memuat himpunan titik ganjil pada graf G serta U yang memuat himpunan titik genap di G.

Dari teorema 1 maka diperoleh :

$$\sum_{v \in v(G)} \deg_G v = \sum_{v \in W} \deg_G v + \sum_{v \in U} \deg_G v = 2q$$

Dengan demikian karena $\sum_{v \in U} \deg_G v$ genap, maka $\sum_{v \in W} \deg_G v$ juga genap. Sehingga $|W|$ adalah genap.

2.2 Graf Terhubung (*Connected Graf*)

Definisi 4

Sebuah jalan (*walk*) $u - v$ di graf G adalah barisan berhingga (tak kosong). $W : u = u_0,\ e_1,\ u_1,\ e_2,\ \ldots,\ u_{n-1}, e_1,\ u_n\ = v$ yang berselang seling antara titik dan sisi, yang dimulai dari titik u dan diakhiri dengan titik v, dengan $e_i\ = u_{i-1}u_i$ untuk i = 1, 2, 3, …,n adalah sisi di G. u_0 disebut titik awal, u_n dikatakan titik akhir, $u_1, u_1,\ \ldots, u_{n-1}$ disebut tititk interval, dan n menyatakan panjang dari W (Chartrand dan Lesniak, 1986:26).

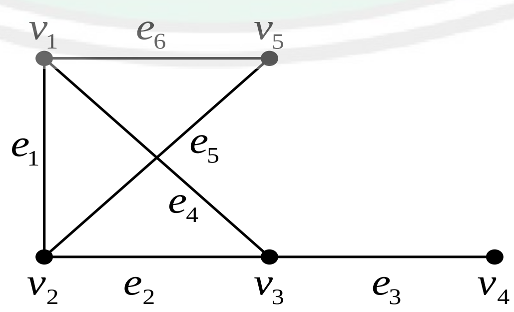
Definisi 5

Jalan $u - v$ yang semua sisinya berbeda disebut *trail* $u - v$ (Chartrand dan Lesniak, 1986: 26).

Definisi 6

Jalan $u - v$ yang semua titik dan sisinya berbeda disebut lintasan (*path*) $u - v$. Dengan demikian, semua lintasan adalah *trail* (Chartrand dan Lesniak, 1986: 26).

Contoh 2.3



Gambar 2.3. *Walk*, *Trail*, dan *Path*

Dari **Gambar 2.3** diatas W_1: v_1, v_2, v_5, v_1, v_3, v_4 merupakan jalan (*walk*) v_1 - v_4 tetapi bukan jalan kecil (*trail*), W_2: v_1, v_2, v_3, v_4 merupakan jalan kecil (*trail*) v_1 - v_4 tetapi bukan lintasan (*path*), dan W_3 : v_1, v_2, v_3, v_4 merupakan lintasan (*path*) v_1 - v_4.

Definisi 7

Sebuah jalan kecil tertutup (*closed trail*) pada Graf *G* disebut Sirkuit *G* (Chartrand dan Lesniak., 1986: 28).

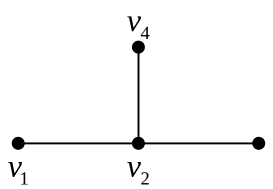
Definisi 8

Misalkan *u* dan *v* titik berbeda pada graf *G*. Maka titik *u* dan *v* dapat dikatakan terhubung (*connected*), jika terdapat lintasan $u-v$ di *G*. Sedangkan suatu graf *G* dapat dikatakan terhubung, jika untuk setiap 2 titik berbeda *u* dan *v* di *G* terhubung (Chartrand dan Lesniak, 1986:28)

Definisi 9

Sirkuit $v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n, v_1$ $(n \geq 3)$ memiliki titik dengan v_i adalah titik-titik berbeda untuk $1 \leq i \leq n$ disebut Sikel (*cycle*) (Chartrand dan Lesniak, 1986: 28).

Contoh 2.4:



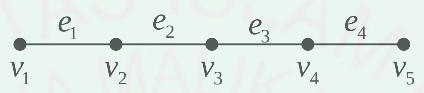
Gambar 2.4 Graf Terhubung (*connected*)

2.3 Graf Lintasan

Definisi 10

Graf lintasan adalah graf yang terdiri dari satu lintasan. Graf lintasan yang terdiri dari n titik dinotasikan sebagai P_n.

Contoh 2.5



Gambar 2.5. Graf Lintasan

2.4 Pelabelan Pada Graf

2.4.1. Pelabelan Graceful

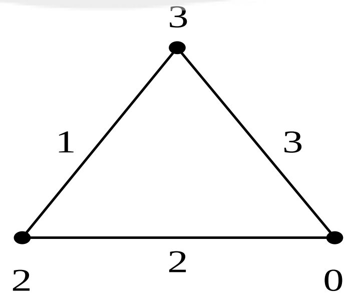
Definisi 11

Misal G graf dengan p titik dan q sisi, pelabelan graceful pada G adalah fungsi injektif yang memetakan $V(G)$ ke $\{0,1,2,3,\cdots,q\}$ sehingga, seandainya sisi xy diberi label

$$|f(x)-f(y)|$$

maka label semua sisinya berbeda.

Contoh 2.6



Gambar 2.6. Graf Graceful

2. Pelabelan Felicitous

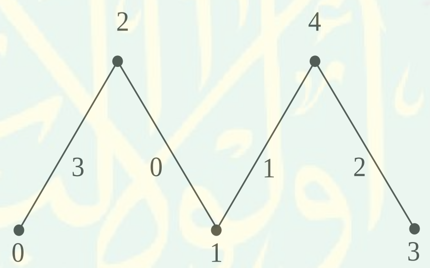
Definisi 12

Misal G graf dengan p titik dan q sisi, pelabelan graceful pada G adalah fungsi injektif yang memetakan $V(G)$ ke $\{0,1,2,3,\cdots,q\}$ sehingga, seandainya sisi xy diberi label

$$f(x)+f(y)(\mathrm{mod}\, q)$$

maka label semua sisinya berbeda

Contoh 2.7



Gambar 2.7. Graf Felicitous

BAB III

PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dibahas tentang pelabelan graceful dan felicitous pada graf lintasan P_n, untuk setiap *n* bilangan asli:

3.1 Pelabelan Graceful pada Graf Lintasan P_n, n Bilangan Asli

Adapun langkah–langkah dalam pelabelan graceful untuk graf lintasan P_n, untuk n bilangana asli adalah sebagai berikut:

1. Melabeli titik pada beberapa graf lintasan sehingga menjadi graf graceful dan mencari pola pelabelannya.
2. Merumuskan pola pelabelan sekaligus pembuktiannya secara umum.

Berikut ini beberapa pelabelan graceful pada graf lintasan P_n, n = 1,2, ...7.

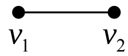
a. Graf P_n, untuk $n = 1$

Gambar 3.1 Pelabelan Graceful pada Graf P_1

Untuk P_1 belum bisa diambil polanya karena hanya memiliki satu titik. Dan untuk selanjutnya label v_1 dipertahankan 0.

b. Graf P_n, untuk $n = 2$

Pelabelan graceful pada Graf P_2 dapat dilihat pada gambar berikut:

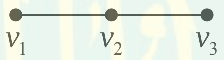


Gambar 3.2 Pelabelan Graceful pada Graf P_2

Dengan memberi label pada v_1 dengan label 0 dan v_2 dengan label 1, dan karena sisinya hanya satu belum bisa diambil polanya.

c. Graf P_n, untuk $n = 3$

Pelabelan graceful pada graf P_3 dapat dilihat pada gambar berikut:



Gambar 3.3 Pelabelan Graceful pada Graf P_3

Berdasarkan pada pelabelan di atas, maka jika *f* adalah fungsi injektif yang memetakan $V(G)$ ke $\{0,1,2\}$, diperoleh

$f(v_1) = 0$

$f(v_2) = 2$

$f(v_3) = 1$

Berdasarkan fakta di atas dengan melihat indeks titik, maka diperoleh

$1 \mapsto 0$

$2 \mapsto 2$

$3 \mapsto 1$

Jadi untuk titik diperoleh pola sebagai berikut

$$v_1 \longmapsto \quad = \frac{1-1}{2}$$

$$v_2 \longmapsto \quad = 3 - \frac{2}{2}$$

$$v_3 \longmapsto \quad = \frac{3-1}{2}$$

untuk indeks titik ganjil pada graf P_3 diperoleh

$$i \longmapsto \frac{i-1}{2}$$

0

dan untuk indeks titik genap pada graf P_3 adalah

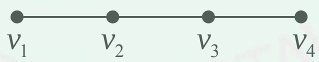
$$i \longmapsto 3 - \frac{i}{2}$$

2

d. Graf P_n, untuk $n = 4$

Pelabelan graceful pada graf P_4 dapat dilihat pada gambar berikut:

1



Gambar 3.4 Pelabelan Graceful pada Graf P_4

Berdasarkan pada pelabelan di atas, maka jika f adalah fungsi injektif yang memetakan $V(G)$ ke $\{0,1,2,3\}$, diperoleh

$f(v_1) \quad = 0$

$f(v_2) \quad = 3$

$f(v_3) \quad = 1$

$f(v_4) \quad = 2$

Berdasarkan fakta di atas dengan melihat indeks titik, maka diperoleh

$$1 \longmapsto 0$$

$$2 \longmapsto 3$$

$$3 \longmapsto 1$$

$$4 \longmapsto 4$$

Jadi untuk titik diperoleh pola sebagai berikut

$$v_1 \longmapsto 0 = \frac{1-1}{2}$$

$$v_2 \longmapsto 3 = 4-\frac{2}{2}$$

$$v_3 \longmapsto 1 = \frac{3-1}{2}$$

$$v_4 \longmapsto 2 = 4-\frac{4}{2}$$

Untuk indeks titik ganjil pada graf P_4 diperoleh

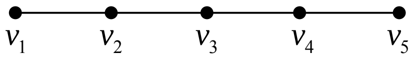
$$i \longmapsto \frac{i-1}{2}$$

Untuk indeks titik genap pada graf P_4 diperoleh

$$i \longmapsto 4-\frac{i}{2}$$

e. Graf P_n, untuk $n=5$

Pelabelan graceful pada graf P_5 dapat dilihat pada gambar berikut:



Gambar 3.5 Pelabelan Graceful pada Graf P_5

Berdasarkan pada pelabelan di atas, maka jika f adalah fungsi injektif yang memetakan $V(G)$ ke $\{0,1,2,3,4\}$, diperoleh

$$f(v_1) = 0$$

$$f(v_2) = 4$$

$$f(v_3) = 1$$

$$f(v_4) = 3$$

$$f(v_5) = 2$$

Berdasarkan fakta di atas dengan melihat indeks titik, maka diperoleh

$$1 \longmapsto 0$$

$$2 \longmapsto 4$$

$$3 \longmapsto 1$$

$$4 \longmapsto 3$$

$$5 \longmapsto 2$$

Jadi untuk titik diperoleh pola sebagai berikut

$$v_1 \longmapsto 0 = \frac{1-1}{2}$$

$$v_2 \longmapsto 5 = 5 - \frac{2}{2}$$

$$v_3 \longmapsto 1 = \frac{3-1}{2}$$

$$v_4 \longmapsto 4 = 5 - \frac{4}{2}$$

$$v_5 \longmapsto 2 = \frac{5-1}{2}$$

Untuk indeks titik ganjil pada graf P_5 diperoleh

$$i \longmapsto \frac{i-1}{2}$$

dan untuk indeks titik genap pada graf P_5 diperoleh

$$i \longmapsto 5 - \frac{i}{2}$$

f. Graf P_n, untuk $n = 6$

Pelabelan graceful pada graf P_6 dapat dilihat pada gambar berikut:

Gambar 3.6 Pelabelan Graceful pada Graf P_6

Berdasarkan pada pelabelan di atas, maka jika *f* adalah fungsi injektif yang memetakan $V(G)$ ke $\{0,1,2,\cdots,5\}$, diperoleh

$f(v_1) = 0$

$f(v_2) = 5$

$f(v_3) = 1$

$f(v_4) = 4$

$f(v_5) = 2$

$f(v_6) = 3$

Berdasarkan contoh di atas dengan melihat indeks titik, maka diperoleh

$$1 \longmapsto 0$$

$$2 \longmapsto 5$$

$$3 \longmapsto 1$$

$$4 \longmapsto 4$$

$$5 \longmapsto 2$$

$$6 \longmapsto 3$$

Jadi untuk titik diperoleh pola sebagai berikut

$$v_1 \longmapsto 0 = \frac{1-1}{2}$$

$$v_2 \longmapsto 5 = 6 - \frac{2}{2}$$

$$v_3 \longmapsto 1 = \frac{3-1}{2}$$

$$v_4 \longmapsto 4 = 6 - \frac{4}{2}$$

$$v_5 \longmapsto 2 = \frac{5-1}{2}$$

$$v_6 \longmapsto 3 = 6 - \frac{6}{2}$$

Untuk indeks titik ganjil graf P_6 diperoleh

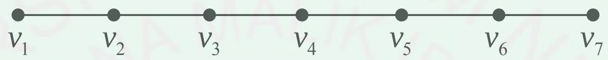
$$i \longmapsto \frac{i-1}{2}$$

Untuk indeks titik genap graf P_6 diperoleh

$$i \longmapsto 6 - \frac{i}{2}$$

g. Graf P_n, untuk $n = 7$

Pelabelan graceful pada graf P_7 dapat dilihat pada gamabar berikut:



Gambar 3.7 Pelabelan Graceful pada Graf P_7

Berdasarkan pada pelabelan di atas, maka jika f adalah fungsi fungsi injektif yang memetakan $V(G)$ ke $\{0,1,2,\cdots,6\}$, diperoleh

$f(v_1) = 0$

$f(v_2) = 6$

$f(v_3) = 1$

$f(v_4) = 5$

$f(v5) = 2$

$f(v_6) = 4$

$f(v_7) = 3$

0 6 6 5 1 4

Berdasarkan fakta di atas dengan melihat indeks titik, maka diperoleh

$$v_1 \longmapsto 0$$

$$v_2 \longmapsto 6$$

$$v_3 \longmapsto 1$$

$$v_4 \longmapsto 5$$

$$v_5 \longmapsto 2$$

$$v_6 \longmapsto 4$$

$$v_7 \longmapsto 3$$

Jadi untuk titik diperoleh pola sebagai berikut

$$v_1 \longmapsto 0 = \frac{1-1}{2}$$

$$v_2 \longmapsto 6 = 7-\frac{2}{2}$$

$$v_3 \longmapsto 1 = \frac{3-1}{2}$$

$$v_4 \longmapsto 5 = 7-\frac{4}{2}$$

$$v_5 \longmapsto 2 = \frac{5-1}{2}$$

$$v_6 \longmapsto 4 = 7-\frac{6}{2}$$

$$v_7 \longmapsto 3 = \frac{7-1}{2}$$

Untuk indeks titik ganjil pada graf P_7 diperoleh

$$i \longmapsto \frac{i-1}{2}$$

Untuk indeks titik genap pada graf P_7 diperoleh

$$i \longmapsto 7-\frac{i}{2}$$

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa pelabelan graceful pada graf lintasan P_n, untuk n bilangan asli memiliki pola secara umum sebagai berikut:

a. Untuk indeks titik ganjil adalah

$$i \longmapsto \frac{i-1}{2}$$

b. Untuk indeks titik genap adalah

$$i \longmapsto n-\frac{i}{2}$$

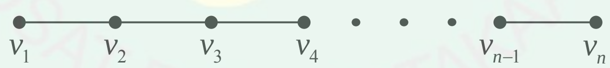
Berdasarkan beberapa contoh pelabelan graceful di atas, maka dapat dibuat rumusan pola sebagai berikut:

Rumusan Pola:

Graf lintasan P_n dengan n bilangan asli adalah graceful

Bukti:

Misal:

$P_n =$ 

$V(P_n) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, \cdots, v_n\}$

$E(P_n) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, \cdots, v_{n-1}v_n\}$

Jadi $p = n$ dan $q = n-1$

Buat fungsi f dari $V(P_n)$ ke $\{0,1,2,3,4,\cdots,n-1\}$

dengan aturan sebagai berikut:

$$f(v_i) = \begin{cases} \dfrac{i-1}{2}, i\ ganjil \\ n - \dfrac{i}{2}, genap \end{cases}$$

1. Akan dibuktikan bahwa f injektif yaitu $f(v_i) = f(v_j)$ maka $v_i = v_j$

   Ambil v_i dan v_j dengan $f(v_i) = f(v_j)$

   a. Jika i, j adalah genap, maka $f(v_i) = f(v_j)$

   $$n - \frac{i}{2} = n - \frac{j}{2}$$

   $$-\frac{i}{2} = -\frac{j}{2}$$

   $$i = j$$

   $$v_i = v_j$$

   Jadi jika $f(v_i) = f(v_j)$ maka $v_i = v_j$ untuk i dan j genap.

   b. Jika i, j adalah ganjil , maka $f(v_i) = f(v_j)$

   $$\frac{i-1}{2} = \frac{j-1}{2}$$

   $$-\frac{i}{2} = -\frac{j}{2}$$

   $$i = j$$

   $$v_i = v_j$$

   Jadi jika $f(v_i) = f(v_j)$ maka $v_i = v_j$, untuk i dan j ganjil.

   c. Jika i genap dan j ganjil

   Berarti $i \neq j$ atau $v_i \neq v_j$

Jika i genap dan j ganjil

Akan dibuktikan $f(v_i) = f(v_j)$

Andaikan $f(v_i) \neq f(v_j)$

$$n - \frac{i}{2} = \frac{j-1}{2}$$

$$2n - i = j - 1$$

$$2n = j + i - 1$$

Diketahui $1 \leq i \leq n$ dan

$$1 \leq j \leq n$$

Maka $j + i \leq 2n < 2n + 1$

$$i + j < 2n + 1$$

$$2n > j + i - 1$$

Jadi $2n > j + i - 1$

Terjadi kontradiksi antara $2n = j + i - 1$ dan $2n > j + i - 1$

Maka $f(v_i) \neq f(v_j)$

Jadi jika $i \neq j$ maka $f(v_i) \neq f(v_j)$, untuk i genap dan j ganjil

Dari a, b, dan c bahwa f adalah fungsi injektif.

2. Akan ditunjukkan bahwa $0 \leq f(v_i) \leq q$; atau $0 \leq f(v_i) \leq n - 1$

a. i genap, maka $f(v_i) = n - \frac{i}{2}$, dengan $0 \leq i \leq n$

karena $i \leq n$

$$\frac{i}{2} \leq n$$

$$0 \le n - \frac{i}{2}$$

Jadi $0 \le f(v_i)$

Karena i genap, maka

$$2 \le i$$

$$1 \le \frac{i}{2}$$

$$-\frac{i}{2} \le -1$$

$$n - \frac{i}{2} \le n - 1$$

Jadi $f(v_i) \le n - 1$

Jadi untuk i genap maka $0 \le f(v_i) \le n - 1$

b. Dan untuk i ganjil, maka $f(v_i) = \frac{i-1}{2}$, dengan $0 \le i \le n-1$

$$i \le n$$

$$i - 1 \le n - 1$$

$$\frac{i-1}{2} \le \frac{n-1}{2} \le n - 1$$

$$f(v_i) \le n - 1$$

Karena i ganjil, maka

$$1 \le i$$

$$\frac{1}{2} \le \frac{i}{2}$$

$$0 \le \frac{i-1}{2}$$

$$0 \le f(v_i)$$

Jadi untuk *i* ganjil maka $0 \le f(v_i) \le n-1$

3. Akan dibuktikan bahwa untuk $i = \{1,2,3,4 \cdots, n-1\}$

   maka $|f(v_i) - f(v_{i+1})|$ berbeda

   a. Jika *i* genap , maka *i* + 1 ganjil

   $$|f(v_i) - f(v_{i+1})| = \left|\left(n - \frac{i}{2}\right) - \frac{(i+1)-1}{2}\right|$$

   $$= \left|\left(n - \frac{i}{2}\right) - \frac{i}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right|$$

   $$= \left|n - \frac{i}{2} - \frac{i}{2}\right|$$

   $$= |n - i|$$

   Nilai $|n-i|$ akan selalu berbeda tergantung pada nilai *i*.

   Jadi $|f(v_i) - f(v_{i+1})|$ akan berbeda untuk setiap $i = \{1,2,3,4 \cdots, n-1\}$

   b. Jika *i* ganjil maka *i* + 1 genap

   $$|f(v_i) - f(v_i + 1)| = \left|\frac{i-1}{2} - \left(n - \frac{i+1}{2}\right)\right|$$

   $$= \left|\frac{i}{2} - \frac{1}{2} - n + \frac{i}{2} - \frac{1}{2}\right|$$

   $$= \left|\frac{2i}{2} - \frac{2}{2} - n\right|$$

   $$= |i - 1 - n|$$

Jadi untuk $i = j$, maka $|i-1-n| = |j-1-n|$

Dengan demikian, terbukti bahwa graf lintasan P_n, untuk n bilangan asli adalah graceful

3.2 Pelabelan Felicitous Pada Graf P_n, untuk *n* Bilangan Asli

Pelabelan felicitous pada graf lintasan P_n, untuk n bilangan asli. Dilakukan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Melabeli titik pada beberapa graf lintasan sehingga menjadi pelabelan graceful dan mencari pola pelabelannya.
2. Merumuskan pola pelabelan sekaligus pembuktiannya secara umum.

Pelabelan felicitous nantinya akan di bagi menjadi dua bagian yaitu:

a. Pelabelan felicitous pada graf lintasan P_n, untuk n bilangan asli ganjil.

b. Pelabelan felicitous pada graf lintasan P_n, untuk n bilangan asli genap.

a) Pelabelan felicitous pada graf lintasan P_n, n ganjil

Berikut ini beberapa pelabelan felicitous pada graf lintasan P_n, n = 1,3, …, 7

a. Graf P_n, Untuk $n=1$

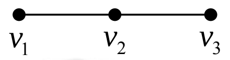
Pelabelan felicitous pada graf P_1 dapat dilihat pada gambar berikut

Gamabr 3.8 Pelabelan Felicitous pada Graf P_1

Dengan memberi label 0 pada titik v_1 dan karena hanya ada satu titik dan tidak memiliki sisi, maka graf P_1 belum bisa diambil polanya. Untuk selanjutnya label v_1 dipertahankan adalah 0.

b. Graf P_n, Untuk $n=3$

Pelabelan felicitous pada graf P_3 dapat dilihat pada gambar berikut



Gamabr 3.9 Pelabelan Felicitous pada Graf P_3

Berdasarkan pelabelan tersebut, maka jika f adalah fungsi yang memetakan $V(G)$ ke $\{0,1,2\}$, maka diperoleh:

$f(v_1) = 0$

$f(v_2) = 2$

$f(v_3) = 1$

Berdasar fakta di atas dengan melihat indeks titik, maka diperoleh

$$1 \longmapsto$$

$$2 \longmapsto$$

$$3 \longmapsto$$

Jadi untuk titik diperoleh pola sebagai berikut

$$v_1 \longmapsto 0 = \frac{1-1}{2}$$

$$v_2 \longmapsto 2 = \frac{3+2+1}{2} - 1$$

$$v_3 \longmapsto 1 = \frac{3-1}{2}$$

Untuk indeks titik ganjil pada graf P_3 diperoleh

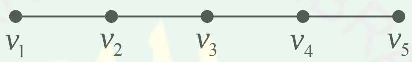
$$i \longmapsto \frac{i-1}{2}$$

Untuk indeks titik genap pada graf P_3 diperoleh

$$i \longmapsto \frac{3+i+1}{2}-1$$

c. Graf P_n, Untuk $n=5$

Pelabelan felicitous pada graf P_5 dapat dilihat pada gambar berikut



Gamabr 3.10 Pelabelan Felicitous pada Graf P_5

Berdasarkan pelabelan tersebut, maka jika f adalah fungsi yang memetakan $V(G)$ ke $\{0,1,2,\cdots 4\}$, maka diperoleh:

$f(v_1) \quad = 0$

$f(v_2) \quad = 3$

$f(v_3) \quad = 1$

$f(v_4) \quad = 4$

$f(v_5) \quad = 2$

Berdasar fakta tersebut dengan melihat indeks titik, diperoleh

$$1 \longmapsto 0$$

$$2 \longmapsto 3$$

$$3 \longmapsto 1$$

$$4 \longmapsto 4$$

$$5 \longmapsto 0$$

Jadi untuk titik diperoleh pola sebagai berikut

$$v_1 \longmapsto \quad = \frac{1-1}{2}$$

$$v_2 \longmapsto \quad = \frac{5+2+1}{2} - 1$$

$$v_3 \longmapsto \quad = \frac{3-1}{2}$$

$$v_4 \longmapsto \quad = \frac{5+4+1}{2} - 1$$

$$v_5 \longmapsto \quad = \frac{5-1}{2}$$

Untuk indeks titik ganjil pada graf P_5 diperoleh

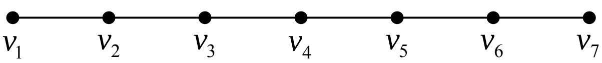
$$i \longmapsto \frac{i-1}{2}$$

Dan untuk indeks titik genap pada graf P_5 diperoleh

$$i \longmapsto \frac{5+i+1}{2} - 1$$

d. Graf P_n, Untuk $n = 7$

Pelabelan felicitous pada graf P_7 dapat dilihat pada gambar berikut



Gamabr 3.11 Pelabelan Felicitous pada Graf P_7

Berdasarkan pelabelan di atas yang akan dicari rumusnya adalah:

$f(v_1) \quad = 0$

$f(v_2) = 4$

$f(v_3) = 1$

$f(v_4) = 5$

$f(v_5) = 2$

$f(v_6) = 6$

$f(v_7) = 3$

Berdasar fakta tersebut, dengan melihat indeks titik, diperoleh

$$1 \longmapsto 0$$

$$2 \longmapsto 4$$

$$3 \longmapsto 1$$

$$4 \longmapsto 5$$

$$5 \longmapsto 2$$

$$6 \longmapsto 6$$

$$7 \longmapsto 3$$

Jadi untuk titik diperoleh pola sebagai berikut

$$v_1 \longmapsto 0 = \frac{1-1}{2}$$

$$v_2 \longmapsto 4 = \frac{7+2+1}{2} - 1$$

$$v_3 \longmapsto 1 = \frac{3-1}{2}$$

$$v_4 \longmapsto 5 \ = \frac{7+4+1}{2}-1$$

$$v_5 \longmapsto 2 \ = \frac{5-1}{2}$$

$$v_6 \longmapsto 6 \ = \frac{7+6+1}{2}-1$$

$$v_6 \longmapsto 3 \ = \frac{7-1}{2}$$

Untuk indeks titik ganjil pada graf P_7 diperoleh

$$i \longmapsto \frac{i-1}{2}$$

untuk indeks titik genap pada graf P_7 diperoleh

$$i \longmapsto \frac{7+i+1}{2}-1$$

Dari beberapa contoh pelabelan felicitous pada graf lintasan P_n, untuk n bilangan asli ganjil tersebut didapat pola sebagai berikut:

a. Untuk indeks titik ganjil diperoleh:

$$i \longmapsto \frac{i-1}{2}$$

Atau

$$f(v_i) = \frac{i-1}{2}$$

b. Untuk indeks titik genap diperoleh:

$$i \longmapsto \frac{n+i+1}{2}-1$$

Atau

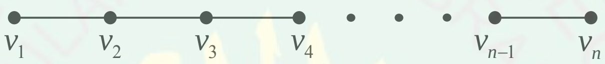
$$f(v_i) = \frac{n+i+1}{2} - 1$$

Berdasarkan beberapa contoh pelabelan titik di atas, maka dapat dibuat rumusan pola sebagai berikut:

Rumusan Pola:

Graf lintasan P_n dengan n bilangan asli ganjil adalah felicitous

Bukti:

$P_n =$ 

$V(G) = \{v_{1,} v_2, v_3, v_4, \cdots, v_n\}$ V(P$_n$)

$E(G) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, \cdots, v_{n-1}v_n\}$

Jadi $p = n$ dan $q = n-1$

Buat fungsi f yang memetakan dari $V(G)$ ke $\{1, 2, 3, 4, \cdots, n-1\}$ dengan aturan sebagai berikut:

$$f(v_i) = \begin{cases} \frac{i-1}{2}, i\ ganjil \\ \frac{n+i+1}{2} - 1, i\ genap \end{cases}$$

1. Akan dibuktikan bahwa f injektif yaitu jika $f(v_i) = f(v_j)$ maka $v_i = v_j$

   Ambil v_i dan v_j dengan $f(v_i) = f(v_j)$

   a). Jika i, j adalah genap, maka $f(v_i) = f(v_j)$

$$\frac{n+i+1}{2} - 1 = \frac{n+j+1}{2} - 1$$

$$\frac{n+i+1}{2}=\frac{n+j+1}{2}$$

$$\frac{n+i}{2}=\frac{n+j}{2}$$

$$i=j$$

$$v_i=v_j$$

Jadi jika $f(v_i)=f(v_j)$ maka $v_i=v_j$ untuk i dan j genap

b). Jika i, j adalah ganjil maka $f(v_i)=f(v_j)$

$$\frac{i-1}{2}=\frac{j-1}{2}$$

$$\frac{i}{2}=\frac{j}{2}$$

$$i=j$$

$$v_i=v_j$$

Jadi Jika $f(v_i)=f(v_j)$, maka $v_i=v_j$ untuk i dan j genap

c). jika i genap dan j ganjil

karena i ganjil dan j genap artinya $i\neq j$ atau $v_i\neq v_j$

akan dibuktikan $f(v_i)\neq f(v_j)$

Andaikan $f(v_i)=f(v_j)$

$$\frac{n+i+1}{2}-1=\frac{j-1}{2}$$

$$n+i+1-2=j-1$$

$$n+i-1=j-1$$

$$n+i=j$$

$$n=j-i$$

Diketahui bahwa

$1 \le i \le n$ dan

$1 \le j \le n$

Jadi $j-i \le n$

Terjadi kontradiksi antara $n=j-i$ dan $j-i \le n$

Maka $f(v_i) \ne f(v_j)$

Jadi $i \ne j$ maka $f(x) \ne f(y)$, untuk i genap dan j ganjil

Dari a, b, dan c disimpulkan bahwa *f* fungsi injektif.

2. Akan ditunjukkan bahwa $0 \le f(v_i) \le q$; atau $0 \le f(v_i) \le n-1$

   a). i genap, maka $f(v_i) = \frac{n+i+1}{2} - 1$, dengan $0 \le i \le n$

   karena $i \le n$

$$i+1 \le n+1$$

$$n+i+1 \le 2n+1$$

$$\frac{n+i+1}{2} \le n+\frac{1}{2}$$

$$\frac{n+i+1}{2} - 1 \le n-\frac{1}{2}$$

$$0 \le \frac{n+i+1}{2} - 1 \le n-\frac{1}{2} \le n$$

$$0 \le \frac{i+1+n}{2} - 1$$

Jadi $0 \le f(v_i)$

Karena i genap, maka

$$i \le n$$

$$i+1 \le n-1$$

$$\frac{i+1}{2} \le \frac{n-1}{2} \le n$$

$$\frac{i+1}{2} - 1 \le \frac{n-1}{2} - 1 \le n-1$$

$$\frac{i+1}{2} - 1 \le n-1$$

Jadi $f(v_i) \le n-1$

Jadi untuk i genap diperoleh $0 \le f(v_i) \le n-1$

b). i ganjil, maka $f(v_i) = \frac{i-1}{2}$, dengan $0 \le i \le n-1$

$$i \le n$$

$$i-1 \le n-1$$

$$\frac{i-1}{2} \le \frac{n-1}{2}$$

$$\frac{i-1}{2} \le \frac{n-1}{2} \le n-1$$

$$\frac{i-1}{2} \le n-1$$

Jadi $f(v_i) \le n-1$

Karena i ganjil, maka

$$1 \le i$$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{i}{2}$$

$$0 \leq \frac{i}{2} - \frac{1}{2}$$

$$0 \leq \frac{i-1}{2}$$

$$0 \leq f(v_i)$$

Jadi untuk i ganjil diperoleh $0 \leq f(v_i) \leq n-1$

3. Akan dibuktikan bahwa setiap sisi $v_i v_{i+1}$ maka $f(v_i) + f(v_{i+1}) (\bmod q)$ berbeda

a. Jika i genap , maka i + 1 ganjil

$$f(v_i) + f(v_{i+1}) = \left(\frac{n+i+1}{2} - 1\right) + \frac{(i+1)-1}{2} (\bmod\ q)$$

$$= \frac{n}{2} + \frac{i}{2} + \frac{1}{2} - 1 + \frac{i}{2} (\bmod\ q)$$

$$= \frac{n}{2} + \frac{i}{2} + \frac{1}{2} - \frac{2}{2} + \frac{i}{2} (\bmod\ q)$$

$$= \frac{n-1+2i}{2} (\bmod\ q)$$

$$= \frac{(n-1)}{2} + i (\bmod n-1) \text{ karena } q = n-1$$

Nilai $\frac{n-1}{2} + i(\bmod n-1)$ akan berbeda sesuai dengan nilai *i*.

b. Jika *i* ganjil maka *i* + 1 genap

$$f(v_i) + f(v_i + 1) = \frac{i-1}{2} + \left(\frac{n+i+1+1}{2} - 1\right) (\bmod q)$$

$$= \frac{i}{2} - \frac{1}{2} + \frac{n}{2} + \frac{i}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 \pmod q$$

$$= \frac{2i + n - 1}{2} \pmod q$$

$$= i + \frac{n-1}{2} \pmod{n-1} \text{ karena } q = n - 1$$

Nilai $i + \frac{n-1}{2} \pmod{n-1}$ akan berbeda sesuai dengan nilai i.

Jadi untuk setiap $v_i v_{i+1}$ maka $f(v_i) + f(v_{i+1}) \pmod q$ berbeda untuk setiap i = 1, 2, 3, . . . , n – 1.

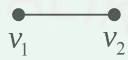
Dengan demikian, terbukti bahwa graf lintasan P_n, untuk setiap n bilangan asli ganjil adalah felicitous.

3.3 Pelabelan Felicitous pada Graf Lintasan P_n, n genap

Berikut ini beberapa contoh pelabelan felicitous pada graf lintasan P_n, untuk $n = \{2,4,6\}$,

a. Graf P_n, untuk $n = 2$

Pelabelan felicitous pada graf P_2 dapat dilihat pada gambar berikut



Gambar 3.12 Pelabelan Felicitous pada Graf P_2

Denggan memberi label pada v_1 dengan 0 dan v_2 dengan 1, maka jika f adalah fungsi yang memetakan $V(G)$ ke $\{0,1\}$, diperoleh

$f(v_1) = 0$

$f(v_2) = 1$

Berdasar fakta tersebut dengan melihat indeks titik, diperoleh

$1 \longmapsto$

$2 \longmapsto$

Jadi untuk indeks titik diperoleh pola sebagai berikut

$$v_1 \longmapsto \quad = \frac{1-1}{2}$$

$$v_2 \longmapsto \quad = \frac{2+2}{2} - 1$$

untuk indeks titik ganjil pada graf P_2 diperoleh pola

$$i \longmapsto \frac{i-1}{2}$$

untuk indeks titik genap pada graf P_2 diperoleh pola

$$i \longmapsto \frac{2+i}{2}-1$$

b. Graf Graf P_n, untuk $n=4$

Pelabelan felicitous pada graf P_4 dapat dilihat pada gambar berikut

Gambar 3.13 Pelabelan felicitous pada graf P_4

Berdasarkan pelabelan tersebut, maka jika f adalah fungsi yang memetakan $V(G)$ ke $\{0,1,3,4\}$, diperoleh

$f(v_1)=0$

$f(v_2)=2$

$f(v_3)=1$

$f(v_4)=3$

Berdasar fakta tersebut, dengan melihat indeks titik, diperoleh

$1 \longmapsto$

$2 \longmapsto$

$3 \longmapsto$

$4 \longmapsto$

Jadi untuk titik diperoleh pola sebagai berikut

$$v_1 \longmapsto 0 = \frac{1-1}{2}$$

$$v_2 \longmapsto 2 = \frac{4+2}{2} - 1$$

$$v_3 \longmapsto 1 = \frac{3-1}{2}$$

$$v_4 \longmapsto 3 = \frac{4+4}{2} - 1$$

Untuk indeks titik ganjil pada graf P_4 diperoleh

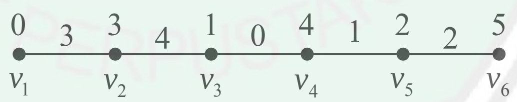
$$i \longmapsto \frac{i-1}{2}$$

Untuk indeks titik genap pada graf P_4 diperoleh

$$i \longmapsto \frac{4+i}{2} - 1$$

c. Graf P_n, untuk $n = 6$

Pelabelan felicitous pada graf P_6 dapat dilihat pada gambar berikut



Gambar 3.14 Pelabelan felicitous pada graf P_6

Berdasarkan pelabelan tersebut, maka jika f adalah fungsi yang memetakan memetakan $V(G)$ ke $\{0,1,3,\cdots,5\}$, diperoleh

$f(v_1) = 0$

$f(v_2) = 3$

$f(v_3) = 1$

$f(v_4) = 4$

$f(v_5) = 2$

$f(v_6) = 5$

Berdasar fakta tersebut, dengan melihat indeks titik, diperoleh

$$1 \longmapsto 0$$

$$2 \longmapsto 3$$

$$3 \longmapsto 1$$

$$4 \longmapsto 4$$

$$5 \longmapsto 2$$

$$6 \longmapsto 5$$

Jadi untuk titik diperoleh pola sebagai berikut

$$v_1 \longmapsto \quad = \frac{1-1}{2}$$

$$v_2 \longmapsto \quad = \frac{6+2}{2} - 1$$

$$v_3 \longmapsto \quad = \frac{3-1}{2}$$

$$v_4 \longmapsto \quad = \frac{6+4}{2} - 1$$

$$v_5 \longmapsto \quad = \frac{5-1}{2}$$

$$v_6 \longmapsto \quad = \frac{6+6}{2} - 1$$

Untuk indeks titik ganjil pada graf P_6 diperoleh

$$i \longmapsto \frac{i-1}{2}$$

Untuk indeks titik genap pada graf P_6 diperoleh

$$i \longmapsto \frac{6+i}{2}-1$$

Dari beberapa contoh pelabelan felicitous pada graf lintasan P_n, untuk n bilangan asli genap tersebut didapat pola sebagai berikut:

i. Untuk indeks titik ganjil polanya dengan:

$$i \longmapsto \frac{i-1}{2}$$

Atau

$$f(v_i)=\frac{i-1}{2}$$

ii. Untuk indeks titik genap polanya dengan:

$$i \longmapsto \frac{n+i}{2}-1$$

Atau

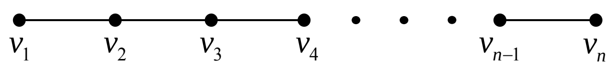
$$f(v_i)=\frac{n+i}{2}-1$$

Berdasarkan beberapa contoh pelabelan di atas, maka dapat dibuat rumusan pola sebagai berikut:

Rumusan Pola:

Graf lintasan P_n dengan n bilangan asli genap adalah felicitous

Bukti:

$P_n =$ 

$V(P_n) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, \ldots, v_n\}$

$E(P_n) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, \ldots, v_{n-1}v_n\}$

Jadi $p = n$ dan $q = n-1$

Buat fungsi f yang memetakan dari $V(P_n)$ ke $\{0,1,2,3,\cdots,n-1\}$

dengan aturan sebagai berikut:

$$f(v_i) = \begin{cases} \dfrac{i-1}{2}, i\ ganjil \\ \dfrac{n+i}{2} - 1, i\ genap \end{cases}$$

1. Akan dibuktikan bahwa f injektif yaitu jika $f(v_i) = f(v_j)$ maka $v_i = v_j$

   Ambil v_i dan v_j dengan $f(v_i) = f(v_j)$

   a. Jika i, j adalah genap, maka $f(v_i) = f(v_j)$,

$$\frac{n+i}{2} - 1 = \frac{n+j}{2} - 1$$
$$n+i-2 = n+j-2$$
$$n+i = n+j$$
$$i = j$$
$$v_i = v_j$$

   jika $f(v_i) = f(v_j)$ maka $v_i = v_j$ untuk i dan j genap

   b. Jika i, j adalah ganjil, maka $f(v_i) = f(v_j)$

$$\frac{i-1}{2}=\frac{i-1}{2}$$

$$i-1=j-1$$

$$i=j$$

$$v_i=v_j$$

Jadi jika $f(v_i)=f(v_j)$ maka $v_i=v_j$, untuk i dan j ganjil

c. *i* genap dan *j* ganjil

karena *i* genap dan *j* ganjil artinya $i\neq j$ atau $v_i\neq v_j$

akan dibuktikan $f(v_i)\neq f(v_j)$

Andai $f(v_i)=f(v_j)$

$$\frac{n+i}{2}-1=\frac{j-1}{2}$$

$$n+i-2=j-1$$

$$n+i-1=j$$

$$n-1=j-i$$

Diketahui bahwa

$$1\leq i\leq n$$

$$1\leq j<n$$

maka $j-i<n-1$

Terjadi kontradiksi antara $n-1=j-i$ dan $j-i<n-1$

karena $(n-1=j-i)\neq(j-i<n-1)$

Maka $f(v_i)\neq f(v_j)$

jadi $i \neq j$ atau $f(v_i) \neq f(v_j)$

Dari a, b, dan c dapat disimpulkan bahwa *f* fungsi injektif.

2. Akan ditunjukkan bahwa $0 \le f(v_i) \le q$; atau $0 \le f(v_i) \le n-1$

a. *i* genap, maka $f(v_i) = \frac{n+i}{2} - 1$, dengan $0 \le i \le$ n

$$2 \le i$$

$$2 \le n+i$$

$$1 \le \frac{n+i}{2}$$

$$0 \le \frac{n+i}{2} - 1$$

Jadi $0 \le f(v_i)$

$$i \le n$$

$$n+i \le 2n$$

$$\frac{n+i}{2} \le n$$

$$\frac{n+i}{2} - 1 \le n-1$$

Jadi $f(v_i) \le n-1$

Jadi untuk *i* genap diperoleh $0 \le f(v_i) \le n-1$

b. Untuk *i* ganjil, maka $f(v_i) = \frac{i-1}{2}$, dengan $1 \le i \le n$

$$i \le n$$

$$i-1 \le n-1$$

$$\frac{i-1}{2} \leq \frac{n-1}{2} \leq n-1$$

$$\frac{i-1}{2} \leq n-1$$

$$f(v_i) \leq n-1$$

$0 \leq i \leq n-1$

$$1 \leq i$$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{i}{2}$$

$$0 \leq \frac{i}{2} - \frac{1}{2}$$

$$0 \leq \frac{i-1}{2}$$

$$0 \leq f(v_i)$$

Jadi untuk *i* ganjil diperoleh $0 \leq f(v_i) \leq n-1$

3. Akan dibuktikan bahwa setiap sisi (v_i, v_{i+1}) maka $f(v_i) + f(v_{i+1}) (\bmod q)$ berbeda

a. Jika *i* genap , maka *i* + 1 ganjil

$$f(v_i) + f(v_{i+1}) = \left(\frac{n+i}{2} - 1\right) + \frac{(i+1)-1}{2} (\bmod q)$$

$$= \left(\frac{n+i}{2} - 1\right) + \frac{i}{2} (\bmod q)$$

$$= \frac{n+2i}{2} - 1 (\bmod q)$$

$$= i + \frac{n}{2} - 1 (\bmod q)$$

$$= i+\frac{n}{2}-1(\bmod n-1) \text{ karena } q = \text{n - 1}$$

Nilai $i+\frac{n}{2}-1(\bmod n-1)$ akan berbeda sesuai dengan nilai *i*.

b. Jika *i* ganjil maka *i* + 1 genap

$$f(v_i)+f(v_i+1) = \frac{i-1}{2}+\left(\frac{n+i+1}{2}-1\right)(\bmod q)$$

$$= \frac{i}{2}-\frac{1}{2}+\frac{n}{2}+\frac{i}{2}+\frac{1}{2}-1(\bmod q)$$

$$= i+\frac{n}{2}-1(\bmod q)$$

$$= i+\frac{n}{2}-1(\bmod n-1) \text{ karena } q = \text{n - 1}$$

Nilai $i+\frac{n}{2}-1(\bmod n-1)$ akan berbeda sesuai dengan nilai i.

Dengan demikian, terbukti bahwa graf lintasan P_n adalah felicitous untuk semua n bilangan asli genap.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Dalam skripsi ini penulis menjelaskan pelabelan graceful dan felicitous pada graf lintasan P_n, untuk n bilangan asli, sekaligus pembuktiannya. Berdasarkan hasil pembahasan didapat rumus umum sebagaimaan berikut:

1. Untuk pelabelan graceful pada graf lintasan P_n, n bilangan asli adalah fungsi yang memetakan v(G) ke {0, 1, 2, 3, . . . q} dengan rumus sebagai berikut :

$$f(v_i) = \begin{cases} \frac{i-1}{2}, i\ ganjil \\ n - \frac{i}{2}, i\ genap \end{cases}$$

2. Untuk pelabelan felicitous pada graf lintasan P*n*, n bilagan asli adalah fungsi *f* yang memetakan V(G) ke {0, 1, 2, 3, . . . *q*} dengan rumus sebagai berikut

   a). Untuk n ganjil adalah

$$f(v_i) = \begin{cases} \frac{i-1}{2}, i\ ganjil \\ \frac{n+i+1}{2} - 1, i\ genap \end{cases}$$

   b). Untuk n genap adalah

$$f(v_i) = \begin{cases} \frac{i-1}{2}, i\ ganjil \\ n - \frac{i}{2}, i\ genap \end{cases}$$

4.2 Saran

Dalam pembahasan skripsi ini, penulis hanya membahas tentang pelabelan graceful dan felicitous pada graf lintasan P_n, untuk n bilangan asli. Dan untuk pembaca dan peneliti yang ingin mengembangkan pengetahuan tentang graf dapat mengembangkan penelitian selanjutnya dengan graf lain yang masih berkaitan dengan pelabelan, misalnya pelabelan pada graf bunga (*Flower*), pelabelan pada graf gear dan pelabelan pada graf roda.

DAFTAR PUSTAKA

Chartrand, G. dan Lesniak, L. 1986. *Graph and Digraph 2nd Editon*. California: Pasific Gove.

Fitria, Lala. 2007. *Pelabelan Super Sisi Ajaib (Super Edge Magic Labeling) pada Graph star $K_{1,n}$ (n bilangan asli).* UIN Malang: Skripsi, tidak diterbitkan.

Iswadi, Hazrul dan Liskurniati. 1996 "Aspek Keindahan Dalam Matematika" *Warta Ubaya* No 25. Kampus Tenggilis Ubaya.

Galian, Joseph A. 3 Januari 2007. *A Dynamic Survey Of Graph Labeling*. Duluth Minnesota. Departement of Mathematics and Statistics. (http://www.combinatoric.org/Survey/ds6.pdf) di akses pada tanggal 12 Januari 2008.

Purwanto, 1998. *Matematika Diskrit*. Malang: IKIP Malang.

Wilson, Robin J. dan Watkins, John J. 1992. *Graph Pengantar*. Terjemahan Dra. Theresia M.H. Tirta Surabaya: University Press IKIP.

DEPARTEMEN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang (0341)551345
Fax. (0341)572533

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : **Rizal Abadi**
Nim : **02510006**
Fakultas/ jurusan : **Sains Dan Teknologi/ Matematika**
Judul skripsi : **Pelabelan Graceful dan Felicitous pada Graf Lintasan P_n, Untuk n bilangan Asli.**
Pembimbing : **Abdussakir, M.Pd**

No	Tanggal	HAL	Tanda Tangan
1.	8 Pebruari 2008	Proposal	1.
2.	4 Maret 2008	Persetujuan Proposal	2.
3.	18 Maret 2008	BAB I dan II	3.
4.	2 April 2008	Revisi BAB I dan II	4.
5.	15 April 2008	BAB III	5.
6.	30 April 2008	Revisi III	6.
7.	16 April 2008	Revisi BAB III	7.
8.	3 Juni 2008	BAB IV dan Abstrak	8.
9.	17 Juni 2008	Revisi BAB IV dan Abstrak	9
10.	16 Juli 2008	Revisi Keseluruhan	12.
11.	30 Juli 2008	Acc Keseluruhan	13

Malang, 04 Agsutus 2008
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Sri Harini, M.Si
NIP. 150 318 321