

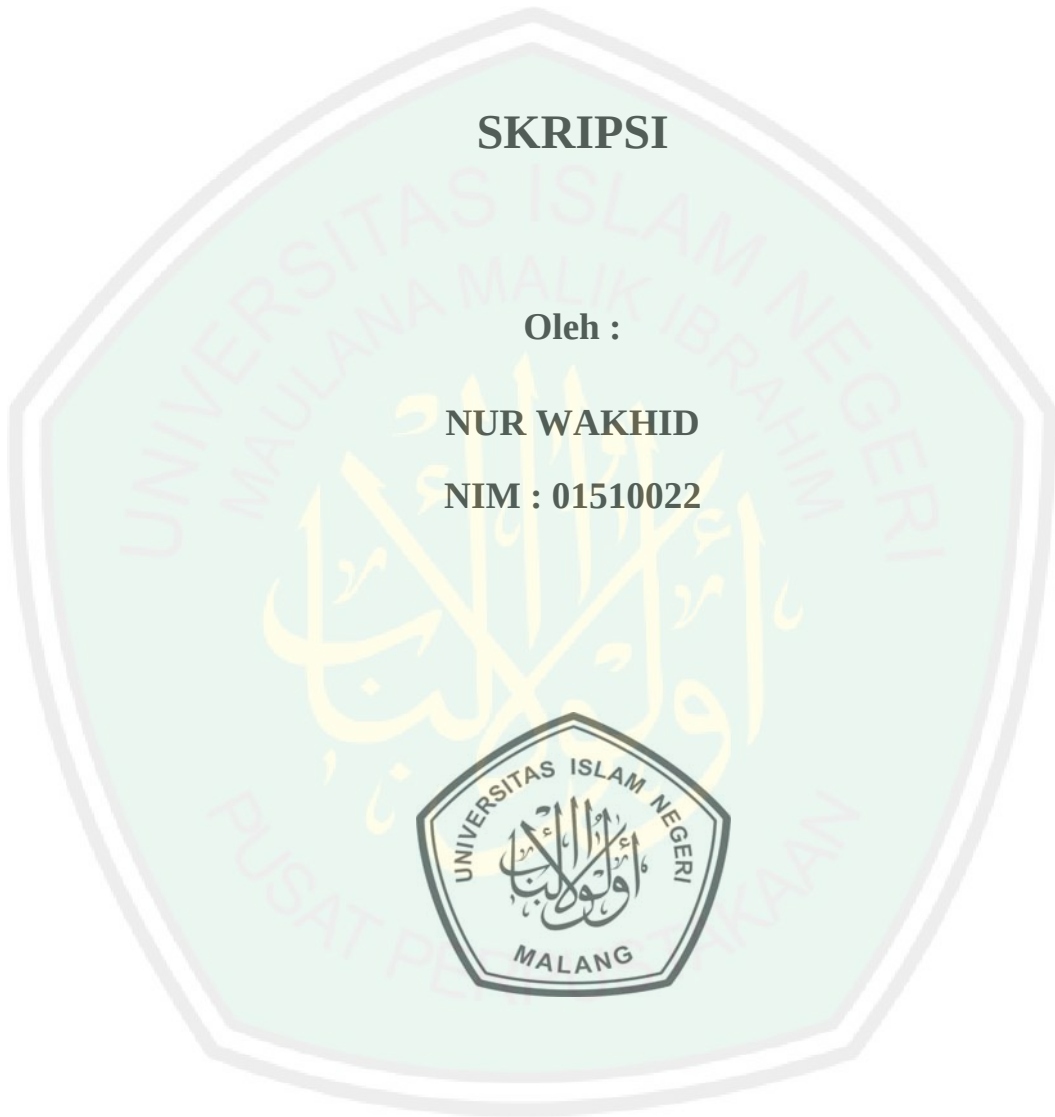
**METODE SPLINE KUBIK DAN POLINOMIAL NEWTON
UNTUK MEMULUSKAN KURVA**

SKRIPSI

Oleh :

NUR WAKHID

NIM : 01510022



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
MALANG
2008**

**METODE SPLINE KUBIK DAN POLINOMIAL NEWTON
UNTUK MEMULUSKAN KURVA**

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Universitas Islam Negeri (UIN) Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan Dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh :

NUR WAKHID
NIM : 01510022

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG
MALANG
2008**

**METODE SPLINE KUBIK DAN POLINOMIAL NEWTON
UNTUK MEMULUSKAN KURVA**

SKRIPSI

Oleh :

**NUR WAKHID
NIM: 01510022**

Telah disetujui oleh:
Dosen Pembimbing

**Sri Harini, M.Si
NIP. 150 318 321**

Tanggal, 30 Maret 2008

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

**Sri Harini, M.Si
NIP. 150 318 321**

**METODE SPLINE KUBIK DAN POLINOMIAL NEWTON
UNTUK MEMULUSKAN KURVA**

SKRIPSI

Oleh :

**NUR WAKHID
NIM. 01510022**

**Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji dan
Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)**

Tanggal : 11 April 2008

Susunan Dewan Penguji

Tanda Tangan

**1. Penguji Utama : Wahyu H Irawan, M.Pd
NIP. 150 300 415**

**2. Ketua : Abdussakir, M.Pd
NIP. 150 327 247**

**3. Sekretaris : Sri Harini, M.Si
NIP. 150 318 321**

**Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri (UIN) Malang**

**Sri Harini, M.Si
NIP. 150 318 321**

Motto

Hidup adalah
Perjuangan dan keikhhlasan
pengabdian menuju kebahagiaan yang
haqiqi



Persembahan

Ayahku di Sorga dan Ibunda di jantung hati
“Semoga ananda Bisa Berbhakti dan Berdo’a
untukmu”

Bapak & Ibu Semoga senantiasa dalam
lindungan Allah SWT
“Semoga ananda Bisa Berbhakti dan Selalu
Mencintaimu”

Saudara Tercinta Nur Hasanuddin & Arif
Cahyono
“Aku Ingin Kalian Lebih dari Aku”

Seluruh Family yang Telah Memberi
Motivasi dan Do’a
“Semoga senantiasa dalam Rahmat Allah SWT”

Dan Semua Makhluk Tuhan di Atas Bumi dan
Langit

KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Segala puji bagi Allah, Dzat yang menguasai semua makhluk dengan segala kebenaran-Nya. Dengan petunjuk dan pertolongan-Nya penulis dapat menyelesaikan penyusunan skripsi ini dengan judul *Metode Spline Kubik dan Polinomial Newton untuk Memuluskan Kurva*.

Shalawat serta salam semoga senantiasa Allah limpahkan kepada Revolusioner besar Muhammad SAW. Beliau adalah utusan Allah yang telah memberikan pelajaran, tuntunan dan suri tauladan kepada umat manusia, sehingga manusia dapat menuju jalan Islam yang lurus dan penuh Ridho-Nya.

Penulis menyadari bahwa banyak pihak yang telah berpartisipasi dan membantu dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Untuk itu iringan do'a dan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya penulis sampaikan, kepada :

1. Bapak Prof. Dr. Imam Suprayogo selaku Rektor UIN Malang beserta stafnya selalu memberikan kesempatan dan pelayanan kepada penulis.
2. Bapak. Prof. Sutiman Bambang Sumitro, SU, DSc selaku Dekan Fakultas Saintek Universitas Islam Negeri Malang.
3. Ibu Sri Harini, M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Saintek UIN Malang sekaligus pembimbing atas bimbingan, kesabaran dan motivasi beliaulah skripsi dapat terselesaikan
4. Seluruh Dosen Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang, Beliau adalah guru, inspirator dan juga motivator

5. Ayah dan ibu tercinta yang telah tulus ikhlas memberikan motivasi materiil maupun spiritual, telah membesarkan, membiayai dan mendoakan penulis dalam menyelesaikan studi hingga ke jenjang perguruan tinggi.
8. Adik Nur Hasanuddin dan Arif Cahyono, Azis CH, Isna RA, semoga kalian menjadi insan yang selalu mencintai dan dicintai Allah
9. Teman-teman seperjuangan di akademik dan organisasi : Sahabat-sahabat PMII “Pencerahan” Galileo, teman-teman Wisma Donald JS ’45, mahasiswa Matematika angkatan 2001, Keluarga besar PPRS dan MI Al Hidayat Pakis Malang
10. Semua pihak yang telah membantu terselesaikannya skripsi yang tidak dapat disebutkan satu persatu

Semoga Allah SWT membalas atas bantuan dan partisipasinya. Akhirnya Semoga Skripsi ini dapat bermanfaat dan menambah khasanah ilmu pengetahuan.

Malang, April 2008

Penulis

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR	i
DAFTAR ISI	iii
DAFTAR GAMBAR	v
DAFTAR TABEL	vi
ABSTRAK	vii

BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	4
1.3 Tujuan Penulisan	4
1.4 Batasan Masalah	4
1.5 Manfaat Penulisan	4
1.6 Metode Penelitian	5
1.7 Sistematika Penulisan	7

BAB II KAJIAN PUSTAKA

2.1 Fungsi Kontinu	9
2.1.1 Kontinuitas Fungsi di Satu Titik	9
2.1.2 Kontinuitas dalam Interval	10
2.1.3 Kontinuitas Sebagian-Sebagian	11
2.2 Kalkulus Diferensial	12
2.2.1 Keterdiferensialan Menunjukkan Kekontinuan	13
2.3 Kurva Mulus	13
2.4 Sistem Persamaan Linier	14
2.5 Solusi Iteratif untuk Sistem Persamaan Linear $Ax=b$	15
2.6 Interpolasi	17
2.6.1 Interpolasi Spline	17
2.6.2 Interpolasi Polinomial	19

2.6.2.1 Interpolasi Linear	20
2.6.2.2 Interpolasi Kuadratik.....	22
2.6.2.3 Interpolasi Kubik.....	23
2.6.2.4 Interpolasi Berderajat- k	23
2.7 Galat Interpolasi Polinomial	25

BAB III PEMBAHASAN

3.1 Metode Spline Kubik	26
3.1.1 Spline dengan Syarat Titik Ujung	34
3.1.1.1 Spline Alamiah.....	34
3.1.1.2 Spline Berujung Parabolik	37
3.1.1.3 Spline Berujung Kubik.....	40
3.1.1.4 Spline Terapit.....	44
3.1.1.5 Spline Periodik.....	47
3.2 Relasi Rekursif Polinomial Newton.....	50
3.3 Penerapan Polinomial Newton dan Spline Kubik.....	55
3.3.1 Pemulusan Kurva pada Data	55
3.3.2 Contoh Perbandingan Pada Fungsi Eksak	59

BAB IV PENUTUP

4.1 Kesimpulan	62
4.2 Saran.....	63

DAFTAR PUSTAKA

DAFTAR GAMBAR

2.1 Grafik Kekontinuan Fungsi.....	8
2.2 Grafik Fungsi $f(x) = x^2 - 3$	9
2.3 Kontinuitas Fungsi dalam Interval.....	11
2.4 Kontinuitas Sebagian-Sebagian	12
3.1 Kurva Spline Alami	37
3.2 Kurva Spline Parabolik <i>Run-Out</i>	40
3.3 Kurva Spline Kubik <i>Run-Out</i>	43
3.4 Kurva Spline Terapit.....	46
3.5 Kurva Spline Periodik.....	49
3.6 Kurva Interpolasi Newton.....	54
3.7 Kurva Mulus Polinomial Newton	55
3.8 Kurva Mulus Polinomial Newton	58
3.9 Kurva $y = 10e^{0.5x} \cos 2\pi x$	59
3.10 Kurva Mulus Polinomial Newton dengan Fungsi $y = 10e^{0.5x} \cos 2\pi x$	59
3.11 Kurva Mulus Polinomial Newton dengan Fungsi $y = 10e^{0.5x} \cos 2\pi x$	60

DAFTAR TABEL

3.1 Perhitungan Spline Alami	36
3.2 Perhitungan Spline Parabolik <i>Run-Out</i>	39
3.3 Perhitungan Spline Kubik Run-Out	43
3.4 Perhitungan Spline Terapit.....	44
3.5 Perhitungan Spline Periodik.....	49
3.6 Perhitungan Selisih Terbagi Newton	52
3.7 Perhitungan Selisih Terbagi	53
3.8 Data Jumlah Penduduk Miskin Tahun 1996-2005.....	50
3.9 Perhitungan Selisih Terbagi Newton	55
3.10 Perhitungan Spline Alami Pertumbuhan Penduduk Miskin	57

ABSTRAK

Wahid,Nur.2008. **Kajian metode Spline Kubik dan Polinomial Newton untuk Memuluskan Kurva**, Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Malang, Pembimbing : Sri Harini, M.Si.

Kata kunci : Interpolasi, Spline Kubik, Polinomial Newton, Kurva Mulus

Pemulusan kurva sangat penting dalam kajian statistik yang diterapkan untuk menganalisis suatu data. Di antara metode-metode yang sering digunakan oleh para rekayasawan atau para peneliti adalah dengan melakukan interpolasi. Tujuan dari penelitian ini adalah pendeskripsian metode spline kubik dan metode polinomial Newton dalam memuluskan kurva.

Pemulusan dengan spline kubik dapat memuluskan kurva jika memenuhi syarat-syarat dengan pendefinisian, Jika fungsi f terdefinisi pada interval $[x_i, x_{i+1}]$ $i = 1, 2, \dots, n$ terdapat himpunan titik-titik, $x_1, x_2, \dots, x_n$ yang ada pada $[x_i, x_{i+1}]$ dan $S(x)$ adalah polinomial berpangkat tiga, maka $S_i(x)$ adalah polinomial kubik yang terdefinisi dan kontinu pada setiap sub-interval $[x_i, x_{i+1}]$. Demikian pula turunan pertama dan keduanya terdefinisi dan kontinu pada sub-interval $[x_i, x_{i+1}]$ dan salah satu diantara syarat titik ujung berikut terpenuhi (1) spline alami, $M_1 = M_n = 0$. (2) Spline berujung parabolik, $M_1 = M_2, M_{n-1} = M_n$. (3) Spline berujung kubik $M_1 = 2M_2 - M_3, M_n = 2M_{n-1} - M_{n-2}$ (4) Spline terapat

$$2M_1 + M_2 = \frac{6}{h^2}(y_2 - y_1 + hy'_1) \quad (5)$$

Spline periodik, $y_1 = y_n, M_1 = M_n, 4M_1 + M_2 + M_{n-1} = \frac{6}{h^2}(y_{n-1} - 2y_1 + y_2)$ dan

$2M_n + M_{n-1} = \frac{6}{h^2}(y_{n-1} - y_n + hy'_n)$ untuk $M = S''(x)$

Polinomial Newton di dapat dengan menggerakkan persamaan linier yang melewati titik-titik yang di interpolasi. Polinomial Newton dapat di tentukan ke dalam bentuk selisih terbagi sedemikian sehingga menjadi persamaan rekursif. Semakin banyak titik yang dilewati maka semakin tinggi derajat polinomial yang terbentuk. Dan semakin tinggi derajat polinomial yang terbentuk maka semakin sulit dalam melakukan ekskusi perhitungan, akan tetapi semakin baik kurva yang terbentuk. Untuk kajian lebih lanjut pembaca dapat melakukan pemulusan kurva dengan menggunakan metode yang lain.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan pengetahuan yang bersifat rasional, yang pembuktian kebenarannya tidak bergantung pada pembuktian empiris, melainkan penalaran yang bersifat deduktif. Matematika dalam hubungannya dengan ilmu pengetahuan lain (komunikasi ilmiah) merupakan ratu dan sekaligus pelayan bagi ilmu pengetahuan, sebagai ratu karena perkembangan matematika tidak bergantung pada ilmu-ilmu yang lain dan sebagai pelayan karena matematika dapat menyatakan pernyataan-pernyataan pada model matematika.

Para rekayasawan dan ahli ilmu alam sering bekerja dengan menggunakan data diskrit yang umumnya disajikan dalam suatu tabel. Data dalam tabel dapat diperoleh dari hasil pengamatan di lapangan, hasil pengukuran di laboratorium atau tabel yang diambil dari buku-buku acuan dan lain sebagainya. Masalah yang sering muncul dengan data tabel adalah menentukan nilai di antara titik-titik diskrit tersebut tanpa harus melakukan pengukuran lagi.

Salah satu solusi untuk mengatasi permasalahan tersebut adalah dengan menyatakan data pada bentuk tabel dan membuat kurva mulus yang melalui titik-titik yang diberikan. Kurva yang melalui titik-titik yang diberikan disebut menginterpolasi titik-titik tersebut. Ada beberapa teknik yang dapat dilakukan untuk melakukan pemulusan terhadap kurva, di antaranya adalah interpolasi polinomial, spline dan kernel (Keele,2006). Di antara metode yang banyak

digunakan untuk memuluskan kurva adalah metode spline dan interpolasi polinomial.

Spline adalah potongan-potongan fungsi yang kontinu pada tiap-tiap titik potongnya. Aplikasi spline yang sering digunakan para analis adalah *Natural cubic B-spline* atau Kubik B-Spline Alami. Spline kubik digunakan untuk memuluskan pada titik-titik dengan menyatakan turunan pertama dan kedua pada titik-titik yang ditentukan. Kubik spline alami dinyatakan dengan melakukan linearisasi pada batas atas dan batas bawahnya. B-basis digunakan untuk perhitungan kestabilan. Pada kenyataannya batas atas dan batas bawah fungsi spline ada beberapa macam yang dapat digunakan sesuai kebutuhan dan keinginan para analisis di antaranya spline periodik, spline terapan, spline terekstrapolasi, spline parabolik dan spline alami itu sendiri.

Interpolasi polinomial digunakan untuk menginterpolasi n data yang diinginkan, jumlah titik yang tersedia mempengaruhi derajat dan persamaan polinomial yang terbentuk. Semakin banyak data maka semakin tinggi derajat polinomial. Para numerikawan mengenalkan beberapa teknik untuk melakukan perhitungan interpolasi polinomial, di antaranya adalah polinom Lagrange dan polinom Newton. Metode interpolasi Newton atau lebih dikenal dengan *Newton's interpolatory defided difference* merupakan metode interpolasi yang menggunakan metode selisih terbagi yang pembentukannya selalu melibatkan persamaan sebelumnya. (Munir, 2001)

Dalam kajian matematika, metode spline kubik dan metode interpolasi Newton sudah banyak dilakukan para ilmuwan. Akan tetapi Allah telah berfirman dalam Al Qur'an Surat Al Isra' ayat 36:

وَلَا تَقْفُ مَا لَيْسَ لَكَ بِهِ عِلْمٌ إِنَّ السَّمْعَ وَالْبَصَرَ وَالْفُؤَادَ كُلُّ أُولَٰئِكَ كَانَ عَنْهُ مَسْئُولًا ﴿٣٦﴾

Artinya : *"Dan janganlah kamu mengikuti apa yang kamu tidak mempunyai pengetahuan tentangnya. Sesungguhnya pendengaran, penglihatan dan hati, semuanya itu akan diminta pertanggungan jawabnya."*

Ayat di atas mengisyaratkan bahwa ilmu pengetahuan tidak boleh langsung diikuti tanpa melakukan penyelidikan atau riset terlebih dahulu. Karena manusia memiliki beberapa potensi yang harus digunakan untuk melakukan riset terhadap berbagai kejadian. Dan hal ini sangat relevan dengan karakteristik Al Qur'an yang senantiasa mengakhiri ayat-ayat sains dengan kalimat :.....*Tidakkah kamu mengingat.Tidakkah kamu berfikir.Tidakkah kamu berakal.* yang berarti sebuah tantangan dari Allah untuk terus berfikir dan melakukan riset terhadap ilmu pengetahuan.

Mendasar pada beberapa permasalahan di atas bahwa setiap muslim diwajibkan untuk terus menggali potensi ilmu pengetahuan dan tidak mengikuti begitu saja pengetahuan yang ada dan sebagai bagian dari pengembangan matematika maka penulis bermaksud untuk membahas tentang metode *fitting curve* yang tertuang dalam judul skripsi, ***"Metode Spline Kubik dan Polinomial Newton untuk Memuluskan Kurva"***

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah yang telah diuraikan diatas maka permasalahan yang akan dibahas adalah :

1. Bagaimana metode spline kubik untuk memuluskan kurva ?
2. Bagaimana metode polinomial Newton untuk memuluskan kurva ?

1.3 Tujuan Penulisan

Tujuan dari penulisan ini adalah :

1. Untuk mendeskripsikan metode spline kubik memuluskan kurva
2. Untuk mendeskripsikan metode polinomial Newton memuluskan kurva

1.4 Batasan Masalah

Untuk membatasi permasalahan agar sesuai dengan yang dimaksudkan dan tidak menimbulkan permasalahan yang baru, maka peneliti memberikan batasan pada pembentukan kurva mulus dengan spline kubik dan penentuan titik batasnya dan pembentukan relasi rekursif dari polinomial Newton. Adapun data yang digunakan adalah data pertumbuhan kemiskinan penduduk (BPS,2006) dan pembangkitan data dengan fungsi getaran teredam dengan menggunakan alat bantu software matlab.

1.5 Manfaat Penulisan

Penulisan skripsi ini dapat diharapkan bermanfaat bagi :

- a. Penulis, sebagai sarana belajar dalam mengkaji matematika teoritis sehingga dapat menambah wawasan dan penguasaan kajian dalam

pemulusan kurva dengan interpolasi menggunakan metode spline kubik dan polinomial Newton

- b. Pembaca, sebagai bahan literatur yang dapat dijadikan pertimbangan lebih lanjut bagi mahasiswa yang sedang menempuh mata kuliah metode numerik, pemodelan matematika serta kajian-kajian yang berhubungan dengan permasalahan yang ada disini.
- c. Lembaga, hasil penulisan skripsi ini diharapkan dapat menambah kepustakaan di Universitas Islam Negeri Malang khususnya Fakultas Sains dan Teknologi sehingga dapat dijadikan bahan pengembangan wawasan keilmuan terutama bidang matematika dan penerapannya

1.6 Metode Penelitian

Jenis penelitian skripsi ini adalah deskriptif kualitatif, yaitu pencarian fakta dengan interpretasi yang tepat untuk membuat gambaran secara sistematis dan akurat mengenai fakta, sifat antar fenomena yang diselidiki. Adapun pendekatan yang digunakan adalah pendekatan kualitatif dengan metode kajian kepustakaan atau *literatur study*.

Kajian kepustakaan merupakan penampilan argumentasi ilmiah yang mengemukakan hasil kajian kepustakaan berisi satu topik pembahasan yang di dalamnya memuat beberapa gagasan yang berkaitan dan harus didukung oleh data yang diperoleh dari berbagai sumber kepustakaan.

Adapun langkah-langkah umum yang dilakukan dalam penelitian ini sebagai berikut :

1. Perumusan masalah tentang pemulusan kurva dengan menggunakan metode spline kubik dan metode polinomial Newton
2. Melakukan hipotesis bahwa metode spline kubik dan polinomial Newton dapat memuluskan kurva
3. Mengumpulkan alat dan bahan yang digunakan dalam penelitian ini meliputi buku, jurnal dan referensi yang terkait dengan permasalahan di atas, serta software matlab dan microsoft excel sebagai alat bantu dalam penentuan perhitungan
4. Melakukan pembahasan dengan langkah-langkah kajian yang meliputi :
 - a. Menentukan pembentukan rumus spline kubik
 - b. Membuktikan sifat-sifat interpolasi pada spline kubik dimana $S(x)$ menginterpolasi titik-titik (x_i, y_i) , $i=1, 2, \dots, n$
 - c. Membuktikan sifat-sifat kekontinuan (penentuan pemulusan) pada spline kubik : $S(x)$ kontinu di interval $[x_i, x_n]$, $S'(x)$ kontinu di interval $[x_i, x_n]$, $S''(x)$ kontinu di interval $[x_i, x_n]$
 - d. Menentukan batas-batas pada spline kubik dan membentuk dalam *augmented matrik* (matrik yang diperluas), batas-batas tersebut terdiri dari Spline alami, Spline parabolik *run-out*, Spline kubik *run-out*, Spline terapan, dan Spline periodik
5. Mengkaji interpolasi Newton dalam memuluskan kurva
 - a. Pembentukan polinomial Newton
 - b. Menentukan bentuk polinomial Newton pada bentuk selisih terbagi dan hubungan rekursif

- c. Menentukan polinomial Newton dalam memuluskan kurva
- 6. Penarikan kesimpulan dari hasil pembahasan dan pendokumentasian

1.7 Sistematika Penulisan

Untuk mendapatkan gambaran yang jelas dan menyeluruh mengenai skripsi ini maka secara singkat dapat dilihat dalam sistematika penulisan di bawah ini. Dalam penulisan skripsi ini penulis susun dalam empat bab, adapun rinciannya sebagai berikut:

Bab pertama adalah bab pendahuluan, yang meliputi latar belakang berisi alasan tentang pengambilan permasalahan dalam penulisan skripsi, rumusan masalah berisi rumusan masalah dari penulisan skripsi, batasan masalah berisi batasan pembahasan dan data yang digunakan sebagai contoh penerapan, tujuan penulisan, manfaat penulisan, metode penelitian berisi langkah-langkah dalam melakukan penelitian, dan sistematika penulisan berisi gambaran umum dari skripsi.

Bab kedua adalah kajian teori yang berisi konsep dasar dan teorema yang mendukung pembahasan skripsi terdiri dari fungsi kontinu, kalkulus diferensial, sistem persamaan linear, iterasi matriks, teori interpolasi dan galat interpolasi

Bab ketiga adalah pembahasan yang meliputi pembentukan kurva mulus dengan spline kubik yang terdiri dari tentang syarat-syarat pemulusan pada spline kubik dan syarat-syarat titik ujung pada spline kubik, terdiri dari spline alami, spline berujung parabolik, spline berujung kubik, spline terapat dan spline

periodik. Dan pembentukan polinomial Newton dalam bentuk selisih terbagi. Contoh penerapan pemulusan kurva dengan spline kubik dan polinomial Newton pada data tingkat kemiskinan (data BPS tahun 2006) dan penerapan pemulusan pada fungsi eksak $y=10e^{0.5x}\cos 2\pi x$

Bab keempat adalah penutup, meliputi kesimpulan berisi kesimpulan dari hasil pembahasan dan saran tentang tindak lanjut terhadap pembahasan tentang pemulusan kurva dengan spline kubik dan polinomial Newton



BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Fungsi Kontinu

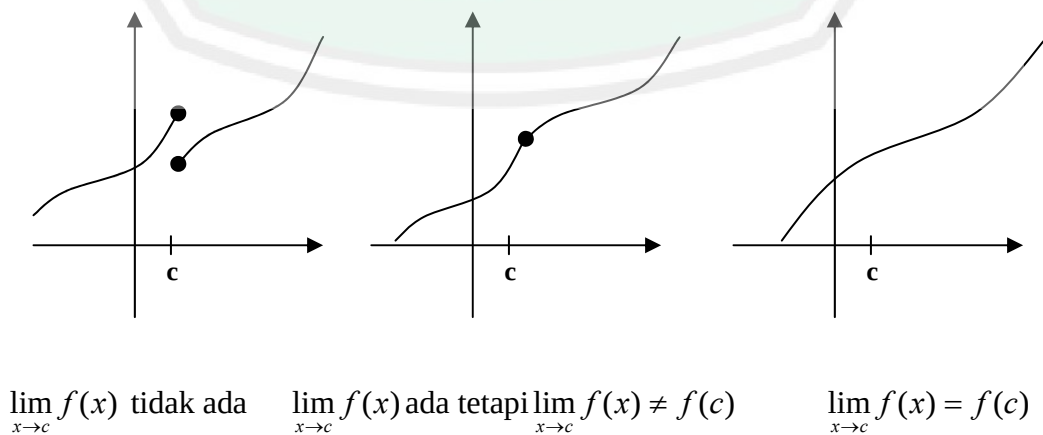
2.1.1 Kontinuitas Fungsi di Satu Titik

Definisi 2.1 Suatu fungsi f kontinu di c jika beberapa selang terbuka disekitar c ada dalam daerah asal f dan $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ (Purcell dan Verlberg, 1999: 95)

Dalam definisi tersebut mensyaratkan tiga hal yaitu :

1. $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ ada
2. $f(c)$ ada (yakni, c berada dalam daerah asal f)
3. $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$

Jika salah satu dari ketiga fungsi ini tidak terpenuhi, maka f tidak kontinu (diskontinu) di c . Jadi, fungsi yang diwakili oleh grafik pertama dan kedua pada gambar tidak kontinu di c . tetapi kontinu di titik-titik lain daerah asalnya



Gambar 2.1 Grafik Kekontinuan Fungsi

Contoh :

Andaikan $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - 3x + 6}{x - 2}, x \neq 2$,

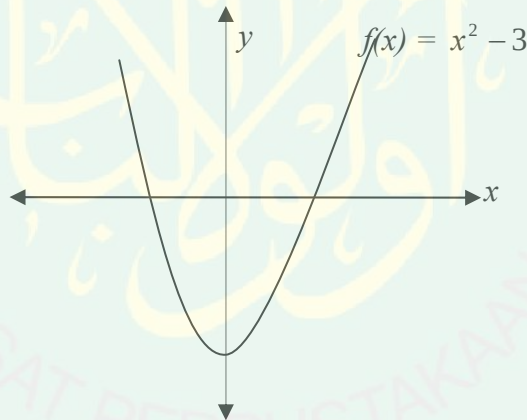
Tentukan f terdefinisi dan kontinu di $x = 2$

Jawab :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - 3x + 6}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 3)(x - 2)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3) = 1\end{aligned}$$

Karena itu di definisikan $f(2) = 1$, seperti terlihat pada gambar,

Kenyataanya, dapat dilihat bahwa $f(x) = x^2 - 3$ kontinu untuk semua x .



Gambar 2.2 Grafik Fungsi $f(x) = x^2 - 3$

2.1.2 Kontinuitas dalam Interval

Definisi 2.3 Suatu fungsi f dikatakan kontinu pada suatu selang terbuka (a,b) jika f kontinu di setiap titik selang tersebut. dan f kontinu pada selang tertutup $[a,b]$ jika kontinu pada (a,b) , kontinu kanan di a dan kontinu kiri di b . (Purcell dan Verlberg, 1999:98)

Jika $f(x)$ didefinisikan dalam interval tertutup $a \leq x \leq b$ atau selang $[a,b]$, maka $f(x)$ kontinu pada selang tersebut jika dan hanya jika $f(x)$ kontinu pada (a,b) , $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ dan $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = f(b)$. Untuk f agar kontinu pada $[a,b]$ berarti jika

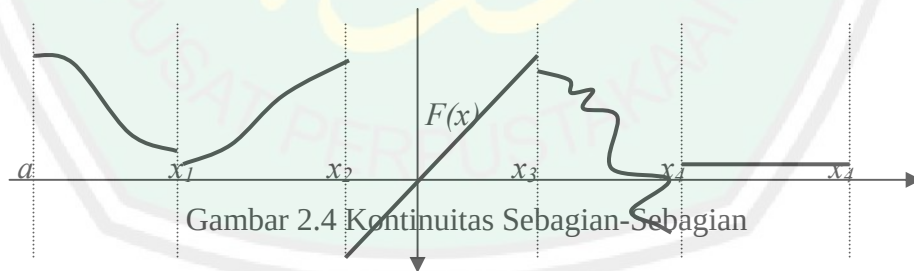
x_1 dan x_2 berdekatan satu sama lain sehingga tidak terdapat lompatan satu sama lain dan keduanya berada dalam $[a, b]$, maka $f(x_1)$ dan $f(x_2)$ juga berdekatan satu sama lain sehingga tidak terdapat lompatan atau perubahan mendadak dalam grafik tersebut.

$f(a)$
 $f(x)$
 $f(b)$

Gambar 2.3 Kontinuitas Fungsi dalam Interval

2.1.3 Kontinuitas Sebagian-Sebagian

Kontinu sebagian-sebagian dalam sebuah interval $a \leq x \leq b$ jika interval tersebut terbagi atas sejumlah berhingga sub interval dan dalam setiap sub interval tersebut, fungsi itu mempunyai limit kanan dan limit kiri yang berhingga. Fungsi itu hanya mempunyai sejumlah berhingga diskontinuitas.



Gambar 2.4 Kontinuitas Sebagian-Sebagian

2.2 Kalkulus Deferensial

Definisi 2.3 Turunan fungsi f adalah fungsi lain f' yang nilainya pada sebarang

bilangan c adalah

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \quad (2.1)$$

asalkan limitnya ada (Purcell dan Verlberg, 1999:115)

Menurut Purcell (1999:187) diferensial dinyatakan sebagai, Jika $y=f(x)$ terdiferensialkan di x dan andaikan dx diferensial dari variabel bebas x , menyatakan pertambahan sebarang dari x , diferensial yang bersesuaian dengan dy dari variabel tak bebas y didefinisikan oleh $dy = f'(x)dx$

Contoh :

Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari a. $y = x^3 - 3x + 1$

b. $y = \sin(x^4 - 3x^2 + 11)$

Jawab :

a. $dy = (3x^2 - 3)dx$

b. $dy = \cos(x^4 - 3x^2 + 11) (4x^3 - 6x)dx$

2.1.1 Keterdiferensialan Menunjukkan Kekontinuan

Teorema 2.1 Jika $f'(c)$ ada, maka f kontinu di c (Purcell dan Verlberg, 1999:118)

Bukti 2.1

Akan ditunjukkan bahwa $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$

$$f(x) = f(c) + \frac{f(x) - f(c)}{x - c} (x - c), x \neq c$$

Karenanya

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow c} f(x) &= \lim_{x \rightarrow c} \left[f(c) + \frac{f(x) - f(c)}{x - c} (x - c) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow c} f(c) + \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \lim_{x \rightarrow c} (x - c) \\ &= f(c) + f'(c) \cdot 0 \\ &= f(c) \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$

2.3 Kurva Mulus

Definisi 2.5 Sebuah kurva rata disebut mulus apabila kurva itu ditentukan oleh persamaan-persamaan $x = f(t), y = g(t), a \leq t \leq b$ dengan ketentuan bahwa turunan-turunan f' dan g' adalah kontinu pada $[a, b]$ sedangkan $f'(t)$ dan $g'(t)$ tidak bersama-sama nol di selang (a, b) (Purcell dan Verlberg, 1999:336)

Istilah mulus digunakan untuk menunjukkan sifat bahwa apabila sebuah partikel atau titik-titik bergerak sepanjang kurva tersebut maka arahnya tidak akan berubah secara tiba-tiba, hal ini dijamin dengan kekontinuan f' dan g' . Dan partikel atau titik-titik tidak akan berhenti karena adanya $f'(t)$ dan $g'(t)$ tidak sama-sama nol.

2.4 Sistem Persamaan Linier

Sebuah garis pada bidang xy secara aljabar dapat dinyatakan oleh persamaan yang berbentuk

$$a_1x + a_2y = b$$

Persamaan diatas dinamakan persamaan linier dalam peubah x dan peubah y .

Definisi 2.6 Persamaan linier dalam n peubah $x_1, x_2, \dots, x_n$ adalah persamaan dalam bentuk

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b \quad (2.2)$$

dimana $a_1, a_2, \dots, a_n$ dan b adalah konstanta-konstanta riil (Anton, 1987:1)

dinyatakan dalam matriks adalah

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Perhatikan Sistem Perasamaan Linier berikut ini

Jika $\mathbf{A}$ merupakan matriks yang memuat koefisien variabel $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ maka sistem tersebut dapat direduksi dalam sistem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

$$\begin{aligned} A^{-1}Ax &= A^{-1}b \\ x &= A^{-1}b \end{aligned} \quad (2.5)$$

dimana A^{-1} adalah invers matriks A ada

1. Selesaikan sistem persmaan linier berikut

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Dalam bentuk matriks $Ax = b$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ -20 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Diselesaikan dengan $x = A^{-1}b$

$$x = \begin{bmatrix} -7.5 & 3.5 & 0.5 & 1 \\ 3 & -1.5 & 0.5 & -0.5 \\ 4 & -2 & 0 & -0.5 \\ -2 & 1 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 \\ -20 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} -7 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

2.6 Interpolasi

Interpolasi merupakan proses pencarian dan perhitungan nilai suatu fungsi yang grafiknya melewati suatu kumpulan titik yang diberikan. Titik-titik tersebut mungkin merupakan hasil eksperimen dari suatu percobaan ataupun dari suatu fungsi yang telah diketahui. Fungsi interpolasi dapat dipakai dari sekelompok fungsi tertentu, diantaranya adalah fungsi polinomial.

Jika yang digunakan untuk melakukan interpolasi adalah fungsi polinomial maka polinomial tersebut dinamakan polinomial interpolasi (Munir,2006:192). Polinom interpolasi bergantung pada nilai-nilai dan banyaknya nilai x dan y yang diberikan.

2.6.1 Interpolasi Spline

Interpolasi spline digunakan karena interpolasi polinomial sering memberikan hasil yang sulit untuk dijangkau, karena jika data yang diberikan banyak maka derajat polinomial yang terbentuk akan sangat tinggi, hal tersebut juga menyulitkan dalam perhitungan. Polinomial dengan derajat tinggi akan menghasilkan fluktuasi data yang sangat cepat. Perubahan data pada interval kecil dapat menyebabkan perubahan besar pada keseluruhan interval. Maka interpolasi biasanya menggunakan polinomial berderajat rendah.

Dengan melakukan pembatasan derajat maka dapat ditentukan alternatif lain untuk mendapatkan kurva mulus melalui sejumlah titik, yakni membagi suatu interval yang memuat data titik menjadi beberapa subinterval dan pada setiap subinterval disusun polinomial interpolasi. Hasilnya adalah sebuah kurva yang terdiri atas potongan-potongan kurva polinomial yang berderajat sama, fungsi tersebut disebut dengan fungsi spline.

Definisi 2.7 Fungsi spline adalah suatu fungsi yang terdiri atas beberapa bagian fungsi polinomial yang dirangkakan bersama dengan beberapa syarat kemulusan (Sahid,2005:248)

Definisi 2.9 Spline berderajat n

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x) & \text{untuk } x_1 \leq x \leq x_2 \\ S_2(x) & \text{untuk } x_2 \leq x \leq x_3 \\ \dots & \dots \\ S_{n-1}(x) & \text{untuk } x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{cases} \quad (2.6)$$

dengan $S_k(x) = a_k x^n + a_{k-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, $n = 1, 2, 3, \dots$ dan $k = 1, 2, 3, \dots (n-1)$ (2.7)

Sebuah fungsi spline S berderajat n pada interval $[a,b]$ jika memenuhi syarat-syarat :

1. S terdefinisi pada $[a,b]$
2. $S, S', S'', S''', \dots, S^{(n+1)}$ kontinu pada interval $[a,b]$
3. Terdapat titik-titik x_k (simpul-simpul spline $S(x)$ sedemikian sehingga $a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ dan $S(x)$ merupakan suatu polinomial berderajat $\leq n$ pada setiap subinterval $[x_k, x_{k+1}]$
(Sahid,2005:260)

2.6.2 Interpolasi polinomial

Andaikan diberikan n titik di bidang xy

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$$

yang akan di interplasikan dengan suatu kurva. Maka dapat diambil titik-titik berjarak sama dalam arah x , walaupun pada kasus lain nantinya dapat diperluas pada jarak yang tidak sama.

Jika ditetapkan jarak bersama antara koordinat-koordinat x itu sebagai h , maka didapatkan

$$x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \dots = x_n - x_{n-1} = h \quad (2.8)$$

Tetapkan $y_i = p_n(x_i)$ yang menyatakan kurva yang dicari, maka didapatkan nilai y_i berasal dari fungsi $f(x)$. Sedangkan $p_n(x_i)$ disebut sebagai fungsi hampiran terhadap $f(x)$.

Setelah polinomial interpolasi $p_n(x_i)$ ditemukan, maka $p_n(x_i)$ dapat dipergunakan untuk mengitung perkiraan nilai y di $x = a$ yaitu $p_n(a)$ bergantung

pada letaknya, nilai $x = a$ mungkin terletak antara rentang data ($x_0 < a < x_n$) atau terletak pada rentang luarnya ($a < x_0$ atau $a > x_n$). Penginterpolasian dapat dilakukan dengan polinom linier, polinom kuadratik atau polinom dengan derajat yang lebih tinggi sesuai dengan data yang tersedia.

Teorema 2.3 Jika (x_k, y_k) untuk $k=1, 2, 3, \dots, n+1$ adalah sebuah himpunan titik-titik yang mempunyai absis berlainan, maka terdapat tepat sebuah polinomial berderajat paling tinggi n yang melewati ke $n+1$ titik tersebut (Sahid, 2005:200)

Bukti 2.3

Misalkan $P_n(x)$ adalah polinomial berderajat paling tinggi n dan memenuhi

$$P_n(x_k) = y_k \quad \text{untuk } k = 1, 2, 3, \dots, (n+1) \quad (2.9)$$

Untuk menunjukkan bahwa P_n tunggal, maka dapat diandaikan, terdapat polinomial lain $Q_n(x)$ yang berderajat paling tinggi n , yang memenuhi

$$Q_n(x_k) = y_k \quad \text{untuk } k = 1, 2, 3, \dots, (n+1) \quad (2.10)$$

Kemudian didefinisikan

$$R(x) = P_n(x) - Q_n(x) \quad (2.11)$$

Karena derajat $P_n(x)$ dan $Q_n(x)$ adalah $\leq n$, maka derajat tertinggi $R(x)$ juga n

Selanjutnya berlaku

$$R(x) = P_n(x) - Q_n(x) = y_k - y_k = 0 \quad \text{untuk } k = 1, 2, 3, \dots, (n+1) \quad (2.13)$$

Maka dapat ditunjukkan bahwa $R(x)$ mempunyai $(n+1)$ akar yang berlainan, yakni $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n+1}$, padahal R berderajat $\leq n$. maka hal tersebut dapat terjadi jika $R(x) \equiv 0$, yakni R berupa polinomial nol.

$$\text{Jadi didapatkan } P_n(x) \equiv Q_n(x)$$

2.6.2.1 Interpolasi linear

Definisi 2.10 Interpolasi linear adalah interpolasi dari dua titik dengan sebuah garis lurus (Munir,2006:193)

Misal diberikan dua buah titik $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ maka polinom yang menginterpolasi dua titik tersebut adalah persamaan garis lurus berbentuk

$$P_1(x) = a_1 + a_2x \quad (2.14)$$

Sebuah garis lurus yang menginterpolasi titik (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) , maka koefisien a_1 dan a_2 dapat diperoleh dengan substitusi dan eliminasi. Dengan mensubstitusikan (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) diperoleh persamaan linear

$$\begin{aligned} Y_1 &= a_1 + a_2x_1 \\ Y_2 &= a_1 + a_2x_2 \end{aligned} \quad (2.15)$$

kedua persamaan ini diselesaikan dengan proses substitusi

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ a_1 &= \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2 - x_1} \\ p_1(x) &= \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2 - x_1} + \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}x \\ &= \frac{x_2y_1 - x_1y_2 + xy_2 - y_1x}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{x_2y_1 - x_1y_2 + xy_2 - xy_1 + x_1y_1 - x_1y_2}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{(x_2 - x_1)y_1 + (y_2 - y_1)(x - x_1)}{x_2 - x_1} \end{aligned}$$

$$= y_1 + \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}(x - x_1) \quad (2.16)$$

merupakan persamaan garis lurus yang melewati (x_1, y_1) dan (x_2, y_2)

2.6.2.2 Interpolasi Kuadratik

Definisi 2.13 Misalkan diberikan tiga buah data (x_1, y_1) , (x_2, y_2) dan (x_3, y_3) polinom yang menginterpolasi tiga buah titik tersebut berbentuk

$$P(x_i) = a_1 + a_2 x_i + a_3 x_i^2 \quad (2.17)$$

Jika digambar maka kurva polinom berbentuk parabola (Munir, 2006:196)

Polinom $P_n(x)$ ditentukan sebagai berikut

$$P(x_i) = a_1 + a_2 x_i + a_3 x_i^2$$

Substitusikan (x_i, y_i) ke dalam persamaan (2.17), $i = 1, 2, 3$. maka di dapatkan tiga buah persamaan dengan tiga buah parameter yang tidak diketahui a_1 , a_2 dan a_3 .

$$y_1 = a_1 + a_2 x_1 + a_3 x_1^2$$

$$y_2 = a_1 + a_2 x_2 + a_3 x_2^2$$

$$y_3 = a_1 + a_2 x_3 + a_3 x_3^2$$

persamaan dapat disebut sebagai sistem persamaan simultan, pembentukan matriksnya adalah

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

maka a_1 , a_2 dan a_3 dapat dihitung dengan proses iterasi dengan metode invers matriks

2.6.2.3 Interpolasi Kubik

Definisi 2.14 Misalkan diberikan empat buah data (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) dan (x_4, y_4) , polinom yang menginterpolasi tiga buah titik tersebut berbentuk

$$P(x_i) = a_1 + a_2 x_i + a_3 x_i^2 + a_4 x_i^3 \quad (2.19)$$

(Munir, 2000:197)

Polinom $P(x_i)$ ditentukan sebagai berikut

Substitusikan (x_i, y_i) ke dalam persamaan (2.19), $i=1,2,3$. maka di dapatkan tiga buah persamaan dengan tiga buah parameter yang tidak diketahui, a_1 , a_2 , a_3 , dan a_4

$$\begin{aligned} Y_1 &= a_1 + a_2 x_1 + a_3 x_1^2 + a_4 x_1^3 \\ Y_2 &= a_1 + a_2 x_2 + a_3 x_2^2 + a_4 x_2^3 \\ Y_3 &= a_1 + a_2 x_3 + a_3 x_3^2 + a_4 x_3^3 \\ Y_4 &= a_1 + a_2 x_4 + a_3 x_4^2 + a_4 x_4^3 \end{aligned} \quad (2.20)$$

persamaan dapat disebut sebagai sistem persamaan simultan, sebagaimana pada (2.4) maka matriks tersebut dapat diselesaikan dengan metode matrik invers ataupun OBE.

2.6.2.4 Interpolasi berderajat k

Misalkan $P_{k-1}(x)$ adalah polinomial yang menginterpolasi sebuah tabel (x, y) dengan k pasangan nilai

x	x_1	x_2	$\dots$	x_k
-----	-------	-------	---------	-------

y	y_1	y_2	$\dots$	y_k
-----	-------	-------	---------	-------

Maka berlaku $P_{k-1}(x_1)=y_1, P_{k-1}(x_2)=y_2, P_{k-1}(x_3)=y_3, \dots, P_{k-1}(x_k)=y_k$

Kemudian didefinisikan $P_k(x)$ sebagai berikut

$$P_k(x) = P_{k-1}(x) + a_{k+1} (x-x_1)(x-x_2) \dots (x-x_k) \quad (2.21)$$

Perhatikan bahwa $(x-x_i)$ untuk $1 \leq i \leq k$ adalah suatu faktor pada suku ke dua $P_k(x)$, sehingga suku ke dua akan hilang jika $x=x_i$ untuk $1 \leq i \leq k$

Perhatikan bahwa $P_k(x_1)=P_{k-1}(x_1)=y_1, P_k(x_2)=P_{k-1}(x_2)=y_2, \dots, P_k(x_k)=P_{k-1}(x_k)=y_k$ maka

$P_k(x)$ menginterpolasi semua titik-titik yang diinterpolasi $P_{k-1}(x)$

Misalkan diberikan sebuah tabel dengan $k+1$ nilai x :

x	x_1	x_2	$\dots$	x_k	x_{k+1}
y	y_1	y_2	$\dots$	y_k	y_{k+1}

Syarat agar $P_k(x)$ menginterpolasi semua titik maka $P_k(x)$ harus menginterpolasi sampai titik terakhir (x_{k+1}, y_{k+1})

Sehingga

$$P_{k+1}(x_{k+1}) = P_{k-1}(x_{k+1}) + a_{k+1} (x_{k+1} - x_1)(x_{k+1} - x_2) \dots (x_{k+1} - x_k) \quad (2.22)$$

atau

$$y_{k+1} = P_{k-1}(x_{k+1}) + a_{k+1} (x_{k+1} - x_1)(x_{k+1} - x_2) \dots (x_{k+1} - x_k) \quad (2.23)$$

atau

$$a_{k+1} = \frac{y_{k+1} - P_{k-1}(x_{k+1})}{(x_{k+1} - x_1)(x_{k+1} - x_2) \dots (x_{k+1} - x_k)} \quad (2.24)$$

Dengan demikian polinomial

$$P_{k+1}(x) = P_{k-1}(x) + a_{k+1} (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_k) \quad (2.25)$$

Dimana $Q_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_n)$

$$\text{Dan } R(x) = \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}, \quad x_0 < c < x_n \quad (2.31)$$

$$\text{Maka didapatkan } E(x) = Q_{n+1}(x) \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!} \quad (2.32)$$



BAB III PEMBAHASAN

3.1 Metode Spline Kubik

Menurut Lasijo (2001) Spline kubik adalah metode aproksimasi dengan melakukan interpolasi pada titik-titik x yang terletak diantara dua titik x_n dan x_{n+1} dengan mengasumsikan bahwa fungsinya berbentuk polinomial berpangkat tiga. Sehingga berdasarkan persamaan (2.6) dan (2.7) maka didapatkan persamaan spline kubik atau spline berderajat tiga yang berbentuk :

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x) & \text{untuk } x_1 \leq x \leq x_2 \\ S_2(x) & \text{untuk } x_2 \leq x \leq x_3 \\ \dots & \dots \\ S_{n-1}(x) & \text{untuk } x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\text{dimana } S(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (3.2)$$

dengan syarat-syarat :

1. $S(x) = S_i(x)$ terdefinisi pada subinterval $[x_i, x_{i+1}]$ $i = 1, 2, \dots, n$.
2. $S(x)$ kontinu pada $[x_1, x_n]$
3. $S'(x)$ kontinu pada $[x_1, x_n]$
4. $S''(x)$ kontinu pada $[x_1, x_n]$
5. Terdapat titik-titik x_k (simpul-simpul $S(x)$) sedemikian sehingga

$$x_n = x_{i-1} < x_{i-2} < \dots < x_i = x_1$$

Sebagaimana (3.1) dan (3.2) maka spline kubik dapat dituliskan sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 S_1(x) &= a_1(x-x_1)^3 + b_1(x-x_1)^2 + c_1(x-x_1) + d_1 & x_1 \leq x \leq x_2 \\
 S_2(x) &= a_2(x-x_2)^3 + b_2(x-x_2)^2 + c_2(x-x_2) + d_2 & x_2 \leq x \leq x_3 \\
 &\dots \\
 S_{n-1}(x) &= a_{n-1}(x-x_{n-1})^3 + b_{n-1}(x-x_{n-1})^2 + c_{n-1}(x-x_{n-1}) + d_{n-1} & x_{n-1} \leq x \leq x_n
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Koefisien-koefisien a_i , b_i , c_i dan d_i membentuk sebanyak $4n - 4$ koefisien, koefisien tersebut harus ditentukan untuk menetapkan $S(x)$ secara lengkap. Jika koefisien-koefisien ini di pilih sedemikian rupa sehingga $S(x)$ menginterpolasi n titik yang ditentukan pada bidang, maka $S(x)$, $S'(x)$, $S''(x)$ harus kontinu. Sehingga $S(x) = S(x_i)$ pada interval $x_1 \leq x \leq x_n$ dituliskan sebagai

$$\begin{aligned}
 S(x) &= S_1(x) = a_1(x-x_1)^3 + b_1(x-x_1)^2 + c_1(x-x_1) + d_1 & x_1 \leq x \leq x_2 \\
 S(x) &= S_2(x) = a_2(x-x_2)^3 + b_2(x-x_2)^2 + c_2(x-x_2) + d_2 & x_2 \leq x \leq x_3 \\
 &\dots \\
 S(x) &= S_{n-1}(x) = a_{n-1}(x-x_{n-1})^3 + b_{n-1}(x-x_{n-1})^2 + c_{n-1}(x-x_{n-1}) + d_{n-1} & x_{n-1} \leq x \leq x_n
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Sehingga

$$\begin{aligned}
 S'(x) &= S'_1(x) = 3a_1(x-x_1)^2 + 2b_1(x-x_1) + c_1 & x_1 \leq x \leq x_2 \\
 S'(x) &= S'_2(x) = 3a_2(x-x_2)^2 + 2b_2(x-x_2) + c_2 & x_2 \leq x \leq x_3 \\
 &\dots \\
 S'(x) &= S'_{n-1}(x) = 3a_{n-1}(x-x_{n-1})^2 + 2b_{n-1}(x-x_{n-1}) + c_{n-1} & x_{n-1} \leq x \leq x_n
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

dan

$$\begin{aligned}
 S''(x) &= S''_1(x) = 6a_1(x-x_1) + 2b_1 & x_1 \leq x \leq x_2 \\
 S''(x) &= S''_2(x) = 6a_2(x-x_2) + 2b_2 & x_2 \leq x \leq x_3 \\
 &\dots \\
 S''(x) &= S''_{n-1}(x) = 6a_{n-1}(x-x_{n-1}) + 2b_{n-1} & x_{n-1} \leq x \leq x_n
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Persamaan-persamaan tersebut dan sifat-sifat spline akan digunakan untuk menentukan koefisien-koefisien a_i , b_i , c_i , d_i , $i = 1, 2, \dots, n-1$ dalam bentuk koordinat-koordinat $y_1, y_2, \dots, y_n$, sebagaimana sifat-sifat fungsi spline pada

definisi (2.9) Karena dalam pernyataan ini $S(x)$ berupa pangkat tiga atau kubik, Sebagaimana pada pernyataan tentang spline, maka ada empat syarat yang akan dibuktikan untuk menentukan koefisien-koefisien $a_i, b_i, c_i, d_i, i = 1, 2, \dots, n-1$ dalam bentuk koordinat $y_1, y_2, \dots, y_n$, yaitu :

1. $S(x)$ menginterpolasi titik-titik $(x_i, y_i) i = 1, 2, \dots, n$.

Karena $S(x)$ menginterpolasi (melewati) titik-titik $(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, n$, di dapatkan

$$S(x_1) = y_1, S(x_2) = y_2, \dots, S(x_n) = y_n \quad (3.6)$$

Dari $n - 1$ persamaan yang pertama dari persamaan-persamaan ini dan (3.3) diperoleh

$$\begin{aligned} S_1(x) &= a_1(x-x_1)^3 + b_1(x-x_1)^2 + c_1(x-x_1) + d_1 & x_1 \leq x \leq x_2 \\ S_2(x) &= a_2(x-x_2)^3 + b_2(x-x_2)^2 + c_2(x-x_2) + d_2 & x_2 \leq x \leq x_3 \\ \dots & \\ S_{n-1}(x) &= a_{n-1}(x-x_{n-1})^3 + b_{n-1}(x-x_{n-1})^2 + c_{n-1}(x-x_{n-1}) + d_{n-1} & x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{aligned}$$

Karena

$$\begin{aligned} S_1(x) &= S(x_1) = a_1(x_1-x_1)^3 + b_1(x_1-x_1)^2 + c_1(x_1-x_1) + d_1 = y_1 & x_1 \leq x \leq x_2 \\ S_2(x) &= S(x_2) = a_2(x_2-x_2)^3 + b_2(x_2-x_2)^2 + c_2(x_2-x_2) + d_2 = y_2 & x_2 \leq x \leq x_3 \\ \dots & \\ S_{n-1}(x) &= S_{n-1}(x_{n-1}) = a_{n-1}(x_{n-1}-x_{n-1})^3 + b_{n-1}(x_{n-1}-x_{n-1})^2 + c_{n-1}(x_{n-1}-x_{n-1}) + d_{n-1} = y_{n-1} & x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{aligned}$$

Maka didapatkan

$$\begin{aligned} d_1 &= y_1 \\ d_2 &= y_2 \\ d_{n-1} &= y_{n-1} \end{aligned} \quad (3.7)$$

dari persamaan terakhir dalam (3.6), persamaan terakhir dalam (3.3)

$$y_n = S(x_n) = S_{n-1}(x) = a_{n-1}(x-x_{n-1})^3 + b_{n-1}(x-x_{n-1})^2 + c_{n-1}(x-x_{n-1}) + d_{n-1} \quad x_{n-1} \leq x \leq x_n$$

$$S_{n-1}(x) = a_{n-1}(x-x_{n-1})^3 + b_{n-1}(x-x_{n-1})^2 + c_{n-1}(x-x_{n-1}) + d_{n-1} = y_n \quad x_{n-1} \leq x \leq x_n$$

untuk $x_n - x_{n-1} = h$ dapat dituliskan

$$a_{n-1}h^3 + b_{n-1}h^2 + c_{n-1}h + d_{n-1} = y_n \quad (3.8)$$

2. $S(x)$ kontinu pada $[x_1, x_n]$

Karena $S(x)$ kontinu untuk $x_1 \leq x \leq x_n$, hal ini berarti bahwa pada masing-masing titik x_i dalam himpunan $x_2, x_3, \dots, x_n$ di dapatkan

$$S_{i-1}(x_i) = S_i(x_i), \quad i = 2, 3, \dots, n-1 \quad (3.9)$$

Jika $S_{i-1}(x_i) \neq S_i(x_i)$, grafik-grafik $S_{i-1}(x_i)$ dan $S_i(x)$ tidak bertemu untuk membentuk kurva kontinu pada x_i , dengan menggunakan sifat penginterpolasi $S_{i-1}(x_i) = y_i$, dari (3.9) maka didapatkan bahwa $S_{i-1}(x_i) = y_i$, $i = 2, 3, \dots, n-1$ atau dari (3.3) akan didapatkan

$$S_{i-1}(x_i) = S_i(x_i) = y_i \quad i = 2, 3, 4, \dots, n-1$$

$$S(x) = S_{n-1}(x) = a_{n-1}(x-x_{n-1})^3 + b_{n-1}(x-x_{n-1})^2 + c_{n-1}(x-x_{n-1}) + d_{n-1} = y_i \quad x_{n-1} \leq x \leq x_n$$

dengan menggunakan pernyataan sebagaimana pada persamaan (3.8) maka didapatkan

$$a_1h^3 + b_1h^2 + c_1h + d_1 = y_2$$

$$a_2h^3 + b_2h^2 + c_2h + d_2 = y_3$$

...

$$a_{n-2}h^3 + b_{n-2}h^2 + c_{n-2}h + d_{n-2} = y_{n-1} \quad (3.10)$$

3. $S'(x)$ kontinu pada $[x_1, x_n]$

Karena $S'(x)$ kontinu untuk $x_1 \leq x \leq x_n$, maka dapat ditentukan

$$S'_{i-1}(x_i) = S'_i(x_i), \quad i = 2, 3, \dots, n-1$$

Dengan menggunakan sifat interpolasi dari persamaan (3.4)

$$S'(x) = S'_{n-1}(x) = 3a_{n-1}(x - x_{n-1})^2 + b_{n-1}(x - x_{n-1}) + c_{n-1} = c_n \quad x_{n-1} \leq x \leq x_n$$

untuk $x_n - x_{n-1} = h$

$$\begin{aligned} 3a_1h^2 + 2b_1h + c_1 &= c_2 \\ 3a_2h^2 + 2b_2h + c_2 &= c_3 \\ &\dots \\ 3a_{n-2}h^2 + 2b_{n-2}h + c_{n-2} &= c_{n-1} \end{aligned} \quad (3.11)$$

4. $S''(x)$ kontinu pada $[x_1, x_2]$

Karena $S'(x)$ kontinu untuk $x_1 \leq x \leq x_n$, maka selanjutnya dapat ditentukan bahwa

$$S''_{i-1}(x_i) = S''_i(x_i) \quad i = 2, 3, \dots, n-1$$

Atau dari persamaan (3.5) untuk $x_n - x_{n-1} = h$ di dapatkan

$$\begin{aligned} 6a_1h + 2b_1 &= 2b_2 \\ 6a_2h + 2b_2 &= 2b_3 \\ 6a_{n-2}h + 2b_{n-2} &= 2b_{n-3} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Untuk dapat menentukan a_i , b_i , c_i , dan d_i dengan mudah, maka dapat dilakukan dengan membentuk suatu sistem persamaan linier dengan menentukan pernyataan tambahan dalam bentuk

$$M_1 = S''(x_1), M_2 = S''(x_2), \dots, M_n = S''(x_n) \quad (3.13)$$

dengan besaran-besaran yang diketahui $y_1, y_2, \dots, y_n$

Misalnya, dari (3.5) didapatkan bahwa

$$M_1 = 2b_1$$

$$M_2 = 2b_2$$

$$M_{n-1} = 2b_{n-1}$$

Sehingga

$$b_1 = \frac{1}{2}M_1, b_2 = \frac{1}{2}M_2, \dots, b_{n-1} = \frac{1}{2}M_{n-1} \quad (3.14)$$

Juga telah diketahui dari (3.7) bahwa $d_1 = y_1, d_2 = y_2, \dots, d_{n-1} = y_{n-1}$

Untuk menentukan nilai a_i maka ambil dari (3.12) sehingga didapatkan

$$6a_{n-2}h + 2b_{n-2} = 2b_{n-1}$$

$$6a_{n-2}h = 2b_{n-1} - 2b_{n-2}$$

$$a_{n-2} = \frac{M_{n-1} - M_{n-2}}{6h} \quad (3.15)$$

Sedangkan nilai c ditentukan dengan mensubstitusikan persamaan (3.7), (3.10), (3.14) dan (3.15) sebagai berikut

$$a_{n-2}h^3 + b_{n-2}h^2 + c_{n-2}h + d_{n-2} = y_{n-1}$$

$$c_{n-2}h = y_{n-1} - (a_{n-2}h^3 + b_{n-2}h^2 + d_{n-2})$$

$$c_{n-2}h = (y_{n-1} - d_{n-2}) - (a_{n-2}h^3 + b_{n-2}h^2)$$

$$c_{n-2}h = (y_{n-1} - y_{n-2}) - (a_{n-2}h^3 + b_{n-2}h^2)$$

$$c_{n-2} = \frac{(y_{n-1} - y_{n-2})}{h} - \frac{(M_{n-1} - M_{n-2})h^3}{6h} + b_{n-2}h^2$$

$$c_{n-2} = \frac{(y_{n-1} - y_{n-2})}{h} - \frac{(M_{n-1} - M_{n-2})h^3}{6h} + \frac{6b_{n-2}h^2}{6}$$

$$c_{n-2} = \frac{(y_{n-1} - y_{n-2})}{h} - \frac{(M_{n-1} - M_{n-2})h^3}{6h^2} + \frac{3M_{n-2}h^2}{6h}$$

$$\begin{aligned}
c_{n-2} &= \frac{(y_{n-1} - y_{n-2})}{h} - \frac{(M_{n-1} - M_{n-2})h^3}{6h^2} + \frac{3M_{n-2}h^2}{6h} \\
c_{n-2} &= \frac{(y_{n-1} - y_{n-2})}{h} - \frac{(M_{n-1} - M_{n-2})h}{6} + \frac{3M_{n-2}h}{6} \\
c_{n-2} &= \frac{(y_{n-1} - y_{n-2})}{h} - \frac{(M_{n-1} - M_{n-2})h}{6} + \frac{3M_{n-2}h}{6} \\
c_{n-2} &= \frac{(y_{n-1} - y_{n-2})}{h} - \frac{(M_{n-1} - M_{n-2})h + 3M_{n-2}h}{6} \\
c_{n-2} &= \frac{(y_{n-1} - y_{n-2})}{h} - \frac{(M_{n-1} + 2M_{n-2})h}{6}
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Dari persamaan- persamaan (3.1), (3.7), (3.10), (3.14), (3.15) dan (3.16) maka didapatkan

Teorema 3.1

Diberikan n titik $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ dengan $x_{i+1} - x_i = h, i = 1, 2, 3, \dots$

$, n-1$, spline kubik

$$S(x) = \begin{cases} a_1(x - x_1)^3 + b_1(x - x_1)^2 + c_1(x - x_1) + d_1 & x_1 \leq x \leq x_2 \\ a_2(x - x_2)^3 + b_2(x - x_2)^2 + c_2(x - x_2) + d_2 & x_2 \leq x \leq x_3 \\ \dots & \dots \\ a_{n-1}(x - x_{n-1})^3 + b_{n-1}(x - x_{n-1})^2 & \\ \quad + c_{n-1}(x - x_{n-1}) + d_{n-1} & x_1 \leq x \leq x_2 \end{cases}$$

yang menginterpolasi titik-titik ini mempunyai koefisien-koefisien yang diberikan oleh

$$\begin{aligned}
a_i &= (M_{i+1} - M_i) / 6h \\
b_i &= M_i / 2 \\
c_i &= (y_{i+1} - y_i) / h - [(M_{i+1} + 2M_i)h / 6] \\
d_i &= y_i
\end{aligned}$$

$$\text{untuk } i=1, 2, \dots, n-1, \text{ dimana } M_i = S''(x_i), i = 1, 2, \dots, n \tag{3.17}$$

(Anton, 1988:188)

Dari hasil ini, dapat di lihat bahwa besaran-besaran $M_1, M_2, \dots, M_n$ secara unik menentukan spline kubik. Untuk mencari besaran-besaran ini disubstitusikan bentuk a_i, b_i , dan c_i , yang diberikan dalam (3.17) ke dalam (3.11) yaitu

$$\begin{aligned}
 & \frac{3(M_{n+1}-M_n)h^2}{6h} + \frac{2M_nh}{2} + \left(\frac{y_{n+1}-y_n}{h} - \frac{(M_{n+1}-2M_n)h}{6} \right) = \left(\frac{y_{n+2}-y_{n+1}}{h} - \frac{(M_{n+2}-2M_{n+1})h}{6} \right) \\
 & \frac{3(M_{n+1}-M_n)h^2}{6h} + \frac{2M_nh}{2} + \left(-\frac{(M_{n+1}-2M_n)h}{6} \right) + \frac{(M_{n+2}-2M_{n+1})h}{6} = \left(\frac{y_{n+2}-y_{n+1}}{h} - \frac{y_{n+1}-y_n}{h} \right) \\
 & \frac{3(M_{n+1}-M_n)h^2}{6h} - \frac{(M_{n+1}-2M_n)h}{6} + \frac{(M_{n+2}-2M_{n+1})h}{6} + \frac{2M_nh}{2} = \left(\frac{y_{n+2}-y_{n+1}}{h} - \frac{y_{n+1}-y_n}{h} \right) \\
 & \frac{3(M_{n+1}-M_n)h^2}{6h} - \frac{(M_{n+1}-2M_n)h}{6} + \frac{(M_{n+2}-2M_{n+1})h}{6} + \frac{6M_nh}{6} = \frac{y_{n+2}-2y_{n+1}+y_n}{h} \\
 & \frac{3(M_{n+1}-M_n)h^2}{6h} - \frac{(M_{n+1}-2M_n+M_{n+2}-2M_{n+1}+6M_n)h}{6} = \frac{y_{n+2}-2y_{n+1}+y_n}{h} \\
 & \frac{3(M_{n+1}-M_n)h^2}{6h} - \frac{(-M_{n+1}+4M_n+M_{n+2})h}{6} = \frac{y_{n+2}-2y_{n+1}+y_n}{h} \\
 & \frac{(3M_{n+1}-3M_n)h^2}{6h} - \frac{(-M_{n+1}+4M_n+M_{n+2})h^2}{6h} = \frac{y_{n+2}-2y_{n+1}+y_n}{h} \\
 & \frac{(-3M_n+4M_n+3M_{n+1}+M_{n+1}+M_{n+2})h^2}{6h} = \frac{y_{n+2}-2y_{n+1}+y_n}{h} \\
 & \frac{(M_n+4M_{n+1}+M_{n+2})h^2}{6h} = \frac{y_{n+2}-2y_{n+1}+y_n}{h} \\
 & (M_n+4M_{n+1}+M_{n+2}) = \frac{(y_{n+2}-2y_{n+1}+y_n)6}{h^2} \tag{3.18}
 \end{aligned}$$

Jika digerakkan $M_1, M_2, \dots, M_n$ didapatkan

$$\begin{aligned}
 M_1 + 4M_2 + M_3 &= \frac{6}{h^2}(y_1 - 2y_2 + y_3) \\
 M_2 + 4M_3 + M_4 &= \frac{6}{h^2}(y_2 - 2y_3 + y_4) \\
 &\dots\dots\dots \\
 M_{n-2} + 4M_{n-1} + M_n &= \frac{6}{h^2}(y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n)
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

Atau dalam bentuk matriks $\mathbf{A}\mathbf{m} = \mathbf{y}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ \vdots \\ M_{n-3} \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{bmatrix} y_1 - 2y_2 + y_3 \\ y_2 - 2y_3 + y_4 \\ y_3 - 2y_4 + y_5 \\ \vdots \\ y_{n-4} - 2y_{n-3} + y_{n-2} \\ y_{n-3} - 2y_{n-2} + y_{n-1} \\ y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Matriks merupakan sistem linier dari $n-2$ persamaan, untuk n bilangan tertentu $M_1, M_2, \dots, M_n$. Agar didapatkan $M_1, M_2, \dots, M_n$ secara unik maka diperlukan dua persamaan tambahan. Alasannya adalah karena terdapat tak terhingga banyaknya spline-spline kubik yang menginterpolasikan titik-titik yang diberikan itu, sehingga belum mempunyai cukup syarat untuk menentukan spline kubik tunggal yang melalui titik-titik tersebut. Adapun syarat yang diinginkan juga disebut sebagai syarat titik ujung atau titik batas yang ditentukan sebagai berikut.

3.1.1 Syarat Titik Ujung Spline Kubik

3.1.1.1 Spline Alamiah

Secara fisis (kurva) Spline alamiah akan dapat dihasilkan jika kedua ujungnya bebas tanpa ada kendala di luar titik-titik interpolasi. Bagian ujung yang di luar titik-titik interpolasi akan ada pada garis lurus. Hal ini menyebabkan $S''(x)$ menjadi nol pada titik x_1 dan x_n . Sehingga menghasilkan syarat berupa :

$$M_1 = M_n = 0 \quad (3.21)$$

Jika di substitusikan pada persamaan (3.19) maka didapatkan

$$\begin{aligned}
 4M_2 + M_3 &= \frac{6}{h^2}(y_1 - 2y_2 + y_3) \\
 M_2 + 4M_3 + M_4 &= \frac{6}{h^2}(y_2 - 2y_3 + y_4) \\
 &\dots\dots\dots \\
 M_{n-2} + 4M_{n-1} &= \frac{6}{h^2}(y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n)
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Dalam bentuk matriks di tulis sebagai

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ \dots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{bmatrix} 0 \\ y_1 - 2y_2 + y_3 \\ y_2 - 2y_3 + y_4 \\ \dots\dots\dots \\ y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.23}$$

atau dapat juga di tulis sebagai

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ \dots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{bmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{bmatrix} y_1 - 2y_2 + y_3 \\ y_2 - 2y_3 + y_4 \\ y_3 - 2y_4 + y_5 \\ \dots\dots\dots \\ y_{n-3} - 2y_{n-2} + y_{n-1} \\ y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n \end{bmatrix} \tag{3.24}$$

Contoh 3.1

Diberikan sebuah data

x	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
y	0	$\frac{1}{4}$	1	-1	-1

Tentukan spline kubik alami yang menginterpolasi titik-titik tersebut !

Penyelesaian :

Berdasarkan persamaan (3.22) di dapat

$$4M_2 + M_3 = \frac{6}{h^2}(y_1 - 2y_2 + y_3)$$

$$M_2 + 4M_3 + M_4 = \frac{6}{h^2}(y_2 - 2y_3 + y_4)$$

$$M_3 + 4M_4 = \frac{6}{h^2}(y_3 - 2y_4 + y_5)$$

berdasarkan (3.24) maka

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{bmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{bmatrix} (y_1 - 2y_2 + y_3) \\ (y_2 - 2y_3 + y_4) \\ (y_3 - 2y_4 + y_5) \end{bmatrix}$$

untuk

$$\frac{6}{h^2}(y_1 - 2y_2 + y_3) = 12$$

$$\frac{6}{h^2}(y_2 - 2y_3 + y_4) = -66$$

$$\frac{6}{h^2}(y_3 - 2y_4 + y_5) = 12$$

maka didapatkan

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ -66 \\ 12 \end{bmatrix}$$

dengan eliminasi iterasi invers matriks menggunakan software matlab didapatkan

$$M_2 = 8$$

$$M_3 = -20$$

$$M_4 = 8$$

karena $M_1 = M_5 = 0$ maka, berdasarkan dari teorema 3.1 persamaan (3.17)

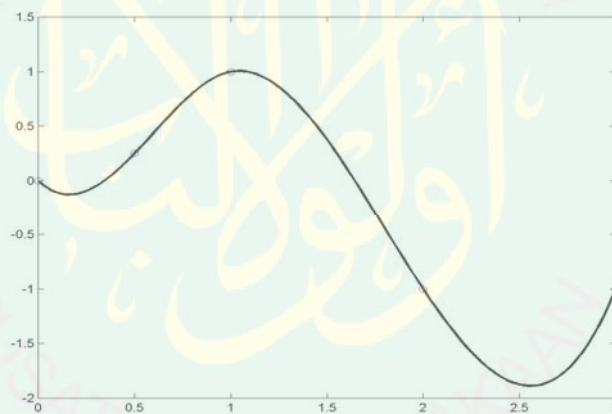
didapatkan nilai a_i , b_i , c_i dan d_i . Dengan perhitungan menggunakan program excel

didapatkan sebagai berikut

Tabel 3.1 Perhitungan Spline Alami

i	x	y	$h=x_2-x_1$	$\frac{6(y_1-2y_2+y_3)/h^2}{2}$	M	a	b	c	d
1	0	0	0.5	12.00	0.0	2.67	0.00	0.5	0.0
2	0.5	0.25	0.5	-66.00	8.0	-9.33	4.00	4.5	0.25
3	1	1	1	12.00	-20.0	4.67	-10.0	-2.0	1.0
4	2	-1	1	0	8.00	-1.33	4.00	-10.6	-1.0
5	3	-1	-3	0	0.00	0.0	0.00	-0.3	-1.0

$$S(x) = \begin{cases} 2.67x^3 + 0.5x & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -9.33(x - \frac{1}{2})^3 + 4(x - \frac{1}{2})^2 + 4.5(x - \frac{1}{2}) + 0.25 & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ 4.67(x - 1)^3 - 10(x - 1)^2 - 2(x - 1) + 1 & 1 \leq x \leq 2 \\ -1.33(x - 2)^3 + 4(x - 2)^2 - 10.6(x - 2) - 1 & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$



Gambar 3.1 Kurva Spline Alami

3.1.1.2 Spline Berujung Parabolik

Spline berujung parabolik akan berubah menjadi kurva berbentuk parabola disepanjang selang $[x_1, x_2]$ dan $[x_{n-1}, x_n]$ dengan syarat

$$M_1 = M_2$$

$$M_n = M_{n-1} \quad (3.25)$$

Setelah disubstitusikan pada persamaan (3.19)

$$M_2 + 4M_2 + M_3 = \frac{6}{h^2}(y_1 - 2y_2 + y_3)$$

$$M_2 + 4M_3 + M_4 = \frac{6}{h^2}(y_2 - 2y_3 + y_4)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$M_{n-2} + 4M_{n-1} + M_n = \frac{6}{h^2}(y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n)$$

maka didapatkan

$$\begin{aligned} 5M_2 + M_3 &= \frac{6}{h^2}(y_1 - 2y_2 + y_3) \\ M_2 + 4M_3 + M_4 &= \frac{6}{h^2}(y_2 - 2y_3 + y_4) \\ \dots\dots\dots \\ M_{n-2} + 5M_{n-1} &= \frac{6}{h^2}(y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n) \end{aligned} \quad (3.26)$$

Dalam bentuk matriks dituliskan sebagai

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ \dots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{bmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{bmatrix} y_1 - 2y_2 + y_3 \\ y_2 - 2y_3 + y_4 \\ y_3 - 2y_4 + y_5 \\ \dots\dots\dots \\ y_{n-3} - 2y_{n-2} + y_{n-1} \\ y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Contoh 3.2

Diberikan sebuah data

x	0	1	2	3	4
y	1	7	27	79	181

Tentukan spline kubik parabolik yang menginterpolasi titik-titik tersebut

Penyelesaian :

Berdasarkan (3.26) maka di dapat

$$5M_2 + M_3 = \frac{6}{h^2}(y_1 - 2y_2 + y_3)$$

$$M_2 + 4M_3 + M_4 = \frac{6}{h^2}(y_2 - 2y_3 + y_4)$$

$$M_3 + 5M_4 = \frac{6}{h^2}(y_3 - 2y_4 + y_5)$$

berdasarkan 3.27 maka

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{bmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{bmatrix} (y_1 - 2y_2 + y_3) \\ (y_2 - 2y_3 + y_4) \\ (y_3 - 2y_4 + y_5) \end{bmatrix}$$

untuk

$$\frac{6}{h^2}(y_1 - 2y_2 + y_3) = 84$$

$$\frac{6}{h^2}(y_2 - 2y_3 + y_4) = 192$$

$$\frac{6}{h^2}(y_3 - 2y_4 + y_5) = 300$$

sehingga di dapatkan

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 84 \\ 192 \\ 300 \end{bmatrix}$$

dengan eliminasi iterasi invers matriks menggunakan software matlab didapatkan

$$M_2 = 10$$

$$M_3 = 32$$

$$M_4 = 53$$

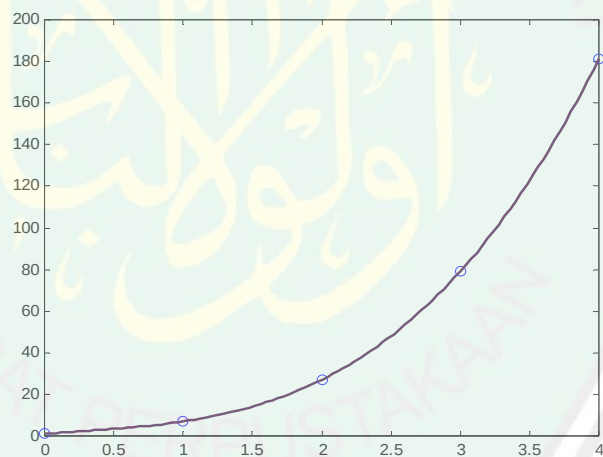
karena $M_1 = M_2$ dan $M_5 = M_4$ maka didapatkan persamaan dan dari teorema 3.1 persamaan(3.17) maka didapatkan

Tabel 3.2 Perhitungan Spline Parabolik *Run-Out*

i	x	y	$h=x_2-x_1$	$\frac{6(y_1-2*y_2+y_3)/h^2}{2}$	M	a	b	c	d
1	0	1	1	84.00	10.00	0.00	5.00	6.00	1.00
2	1	7	1	192.00	10.00	3.67	5.00	20.00	7.00
3	2	27	1	300.00	32.00	3.50	16.00	52.00	27.00
4	3	79	1		53.00	0.00	26.50	57.83	79.00
5	4	181	-4		53.00	2.21	26.50	115.92	181.00

Berdasarkan dari teorema 3.1 persamaan (3.19) maka didapatkan

$$S(x) = \begin{cases} 5(x)^2 + 6(x) + 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 3.6(x-1)^3 + 5(x-1)^2 + 20(x-1) + 7 & 1 \leq x \leq 2 \\ 3.5(x-2)^3 + 16(x-2)^2 + 52(x-2) + 27 & 2 \leq x \leq 3 \\ 26.5(x-3)^2 + 57(x-3) + 79 & 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

Gambar 3.2 Kurva Spline Parabolik *Run-Out*

3.1.1.3 Spline Berujung Kubik

Syarat batas untuk spline yang berujung kubik adalah

$$M_1 = 2M_2 - M_3$$

$$M_n = 2M_{n-1} - M_{n-2} \quad (3.28)$$

disubstitusikan ke persamaan (3.19) maka didapatkan menghasilkan sistem linier $(n-2) \times (n-2)$ untuk M_2, M_3 dan M_{n-1} yaitu

$$\begin{aligned}(2M_2 - M_3) + 4M_2 + M_3 &= \frac{6}{h^2}(y_1 - 2y_2 + y_3) \\ M_2 + 4M_3 + M_4 &= \frac{6}{h^2}(y_2 - 2y_3 + y_4) \\ &\dots\dots\dots \\ M_{n-2} + 4M_{n-1} + (2M_{n-1} - M_{n-1}) &= \frac{6}{h^2}(y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n)\end{aligned}$$

maka didapatkan

$$\begin{aligned}6M_2 + M_3 &= \frac{6}{h^2}(y_1 - 2y_2 + y_3) \\ M_2 + 4M_3 + M_4 &= \frac{6}{h^2}(y_2 - 2y_3 + y_4) \\ &\dots\dots\dots \\ 6M_{n-1} &= \frac{6}{h^2}(y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n)\end{aligned} \quad (3.29)$$

Dalam bentuk matriks dituliskan sebagai

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{bmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{bmatrix} y_1 - 2y_2 + y_3 \\ y_2 - 2y_3 + y_4 \\ y_3 - 2y_4 + y_5 \\ \vdots \\ y_{n-3} - 2y_{n-2} + y_{n-1} \\ y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

setelah menyelesaikan sistem persamaan linier ini untuk M_2, M_3 dan M_{n-1} maka untuk menentukan M_1 dan M_n dapat digunakan bentuk dari spline parabolik (3.25)

$$M_2 - M_1 = M_3 - M_2 \quad (3.31)$$

Maka dari (3.19) didapatkan bahwa $a_1 = a_2$, karena $S'''(x) = 6a_1$ adalah konstanta pada seluruh selang $[x_1, x_3]$. Akibatnya $S(x)$ terdiri dari kurva kubik tunggal sepanjang selang $[x_1, x_3]$, dari dua kurva kubik yang berlainan yang digabungkan

pada x_2 . Analisis serupa memperlihatkan bahwa $S(x)$ terdiri dari kurva kubik tunggal pada dua selang akhir.

Contoh 3.3

Diberikan sebuah data

x	0	1	2	3	4
y	1	7	27	79	181

Tentukan spline berujung kubik yang menginterpolasi titik-titik tersebut !

Penyelesaian :

Berdasarkan (3.29) maka di dapat

$$6M_2 + M_3 = \frac{6}{h^2}(y_1 - 2y_2 + y_3)$$

$$M_2 + 4M_3 + M_4 = \frac{6}{h^2}(y_2 - 2y_3 + y_4)$$

$$6M_4 = \frac{6}{h^2}(y_3 - 2y_4 + y_5)$$

berdasarkan 3.30 maka

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{bmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{bmatrix} (y_1 - 2y_2 + y_3) \\ (y_2 - 2y_3 + y_4) \\ (y_3 - 2y_4 + y_5) \end{bmatrix}$$

untuk

$$\frac{6}{h^2}(y_1 - 2y_2 + y_3) = 84$$

$$\frac{6}{h^2}(y_2 - 2y_3 + y_4) = 192$$

$$\frac{6}{h^2}(y_3 - 2y_4 + y_5) = 300$$

berdasarkan 3.30 maka

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 84 \\ 192 \\ 300 \end{bmatrix}$$

dengan eliminasi iterasi invers matriks menggunakan software matlab didapatkan

$$M_2 = 14$$

$$M_3 = 32$$

$$M_4 = 50$$

Dengan menggunakan persamaan (3.28) untuk menentukan M_1 dan M_n maka didapatkan

$$M_1 = 2M_2 - M_3$$

$$M_n = 2M_{n-1} - M_{n-2}$$

$$M_1 = -4$$

$$M_5 = 68$$

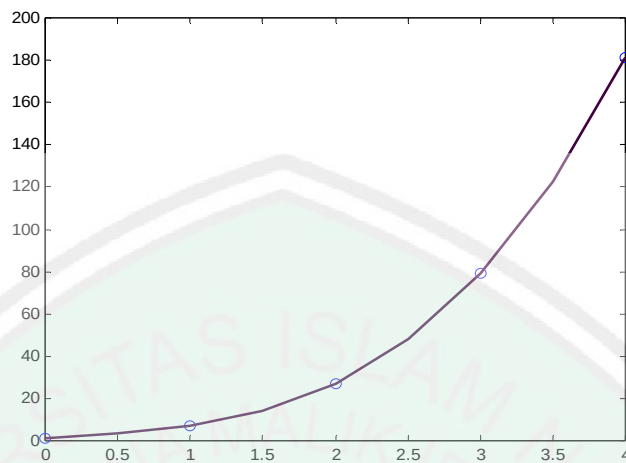
Berdasarkan dari teorema 2.2 persamaan(2.29) maka didapatkan

Tabel 3.3 Perhitungan Spline Kubik *Run-Out*

i	x	y	$h=x_2-x_1$	$\frac{6(y_1-2*y_2+y_3)/h^2}$	M	a	b	c	d
1	0	1	1	84.00	-4.00	3.00	-2.00	6.00	1.00
2	1	7	1	192.00	14.00	3.00	7.00	20.00	7.00
3	2	27	1	300.00	32.00	3.00	16.00	52.00	27.00
4	3	79	1		50.00	3.00	25.00	75.33	79.00
5	4	181	-4		68.00	2.83	34.00	135.92	181.00

Berdasarkan dari teorema 3.1 persamaan (3.19) maka didapatkan

$$S(x) = \begin{cases} 3(x)^3 - 7(x)^2 + 6(x) + 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 3(x-1)^3 + 7(x-1)^2 + 20(x-1) + 7 & 1 \leq x \leq 2 \\ 3(x-2)^3 + 16(x-2)^2 + 52(x-2) + 27 & 2 \leq x \leq 3 \\ 3(x-3)^3 + 25(x-3)^2 + 75(x-3) + 79 & 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$$



Gambar 3.3 Kurva Spline Kubik *Run-Out*

3.1.1.4 Spline Terapit

Syarat untuk titik ujung spline terapit adalah

$$\begin{aligned} 2M_1 + M_2 &= \frac{6}{h^2}(y_2 - y_1 + hy'_1) \\ 2M_n + M_{n-1} &= \frac{6}{h^2}(y_{n-1} - y_n + hy'_n) \end{aligned} \quad (3.32)$$

dengan menggunakan persamaan (3.19) maka didapatkan sistem persamaan

$$\begin{aligned} 2M_1 + M_2 &= \frac{6}{h^2}(y_2 - 2y_1 + hy'_1) \\ M_1 + 4M_2 + M_3 &= \frac{6}{h^2}(y_1 - 2y_2 + yh'_3) \\ &\dots\dots\dots \\ M_{n-3} + 4M_{n-2} + M_{n-1} &= \frac{6}{h^2}(y_{n-3} - 2y_{n-2} + h'y_{n-1}) \\ M_{n-1} + 2M_n &= \frac{6}{h^2}(y_{n-1} - 2y_n + h'y_n) \end{aligned} \quad (3.33)$$

Dalam bentuk matriks dituliskan sebagai

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{bmatrix} y_2 - 2y_1 + hy'_1 \\ y_1 - 2y_2 + y_3 \\ y_2 - 2y_3 + y_4 \\ \vdots \\ y_{n-3} - 2y_{n-2} + y_{n-1} \\ y_{n-1} - y_n + h'y_n \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

Contoh 3.4

Diberikan sebuah data

x	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
y	0	$\frac{1}{4}$	1	-1	-1

Tentukan spline kubik terapan di $y'_1 = 1$ dan $y'_n = 1$ yang menginterpolasi titik-titik tersebut !

Penyelesaian :

Berdasarkan (3.33) maka di dapat

$$2M_1 + M_2 = \frac{6}{h^2} (y_2 - 2y_1 + hy'_1)$$

$$M_1 + 4M_2 + M_3 = \frac{6}{h^2} (y_1 - 2y_2 + yh'_3)$$

$$M_2 + 4M_3 + M_4 = \frac{6}{h^2} (y_2 - 2y_3 + yh'_4)$$

$$M_3 + 4M_4 + M_5 = \frac{6}{h^2} (y_3 - 2y_4 + yh'_5)$$

$$M_4 + 2M_5 = \frac{6}{h^2} (y_4 - 2y_5 + h'y_5)$$

berdasarkan 3.34 maka

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \end{bmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{bmatrix} (y_2 - 2y_1 + hy'_1) \\ (y_1 - 2y_2 + hy'_3) \\ (y_2 - 2y_3 + hy'_4) \\ (y_3 - 2y_4 + hy'_5) \\ (y_4 - 2y_5 + hy'_5) \end{bmatrix}$$

untuk $6(y_2 - 2y_1 + hy_1')/h^2 = 3$

$$6(y_1 - 2y_2 + y_3)/h^2 = 12$$

$$6(y_2 - 2y_3 + y_4)/h^2 = -16$$

$$6(y_3 - 2y_4 + y_5)/h^2 = 12$$

$$6(y_4 - 2y_5 + hy_5')/h^2 = 6$$

berdasarkan 3.34 maka

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \\ -16 \\ 12 \\ 6 \end{bmatrix}$$

dengan eliminasi iterasi invers dengan software matlab maka didapatkan

$$M_1 = -0.898$$

$$M_2 = 4.796$$

$$M_3 = -6.291$$

$$M_4 = 4.369$$

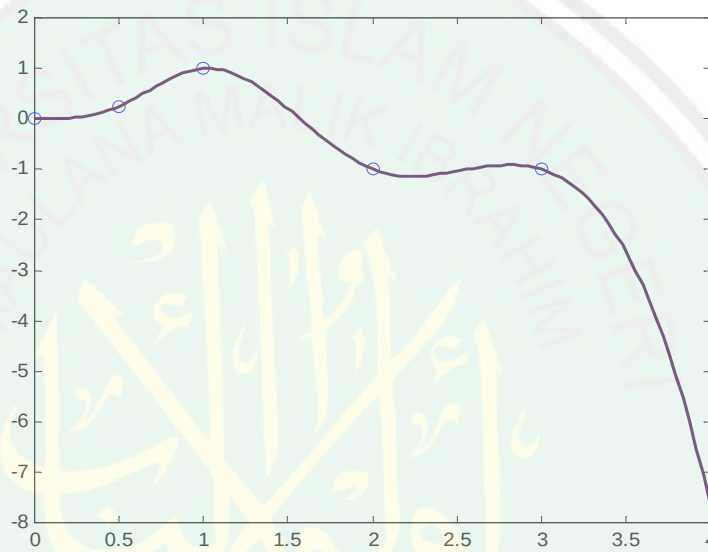
$$M_5 = 8.154$$

Tabel 3.4 Perhitungan Spline Kubik Terapit

i	x	y	$h=x_2-x_1$	$6(y_1-2*y_2+y_3)/h^2$	M	a	b	c	d
1	0	0	0.5	3.00	-0.90	1.90	-0.45	0.50	0.00
2	0.5	0.25	0.5	12.00	4.80	-3.70	2.40	2.82	0.25
3	1	1	1	-16.50	-6.29	1.78	-3.15	-2.00	1.00
4	2	-1	1	12.00	4.37	0.63	2.18	-0.19	-1.00
5	3	-1	-1	6.00	8.15	1.36	4.08	1.72	-1.00

Berdasarkan dari teorema 3.1 persamaan (3.19) maka didapatkan

$$S(x) = \begin{cases} 1.9x^3 - 0.45x^2 - 0.5x & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -3.7(x - \frac{1}{2})^3 + 2.4(x - \frac{1}{2})^2 + 2.82(x - \frac{1}{2}) + 0.25 & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ 1.78(x - 1)^3 - 3.15(x - 1)^2 - 2(x - 1)^3 + 1 & 1 \leq x \leq 2 \\ -0.63(x - 2)^3 + 2.18(x - 2)^2 - 0.19(x - 2)^3 - 1 & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$



Gambar 3.4 Kurva Spline Terapit

3.1.1.5 Spline Periodik

Syarat keperiodikan diperlukan bahwa

$$y_1 = y_n$$

$$M_1 = M_n$$

$$4M_1 + M_2 + M_{n-1} = \frac{6}{h^2}(y_{n-1} - 2y_1 + y_2) \quad (3.35)$$

dengan menggunakan persamaan pada (3.19) maka didapatkan

$$\begin{aligned} 4M_1 + M_2 + M_{n-1} &= \frac{6}{h^2}(y_{n-1} - 2y_1 + y_2) \\ M_1 + 4M_2 + M_3 &= \frac{6}{h^2}(y_{n-2} - 2y_2 + y_3) \\ &\dots\dots\dots \\ M_{n-3} + 4M_{n-2} + M_{n-1} &= \frac{6}{h^2}(y_{n-2} - 2y_2 + y_3) \\ 4M_{n-1} + M_{n-2} + M_{n-1} &= \frac{6}{h^2}(y_{n-1} - 2y_3 + y_2) \end{aligned} \tag{3.36}$$

berdasarkan 3.37

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{bmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{bmatrix} y_4 - 2y_1 + y_2 \\ y_3 - 2y_2 + y_3 \\ y_3 - 2y_2 + y_3 \\ y_4 - 2y_1 + y_2 \end{bmatrix}$$

untuk $6(y_4 - 2y_1 + y_2) / h^2 = 504$

$$6(y_3 - 2y_2 + y_3) / h^2 = 40$$

$$6(y_3 - 2y_2 + y_3) / h^2 = 40$$

$$6(y_4 - 2y_1 + y_2) / h^2 = 504$$

berdasarkan 3.37 maka

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 504 \\ 40 \\ 40 \\ 40 \end{bmatrix}$$

dengan eliminasi iterasi invers berbantuan program software matlab didapatkan

$$M_1 = 135$$

$$M_2 = -19$$

$$M_3 = -19$$

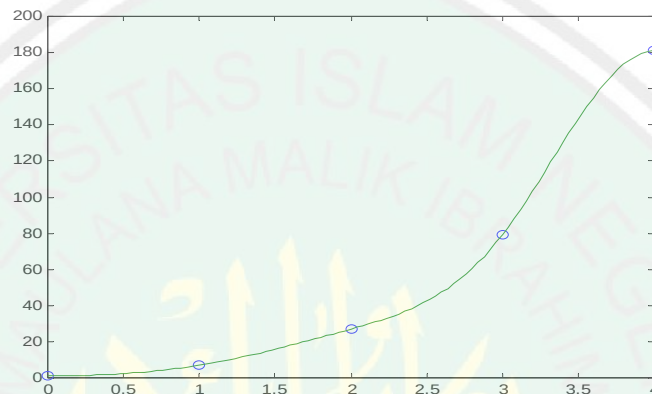
$$M_4 = 135$$

Tabel 3.5 Perhitungan Spline Kubik Periodik

i	x	y	$h=x_2-x_1$	$6(y_1-2*y_2+y_3)/h^2$	M	a	b	c	d
1	0	1	1	504.00	135.00	-25.67	67.50	6.00	1.00
2	1	7	1	40.00	-19.00	0.00	-9.50	20.00	7.00
3	2	27	1	40.00	-19.00	25.67	-9.50	52.00	27.00
4	3	79	1	504.00	135.00	-22.50	67.50	-123.00	79.00
5	4	181	-4		0.00	0.00	0.00	45.25	181.00

Berdasarkan dari teorema 3.1 persamaan (3.19) maka didapatkan

$$S(x) = \begin{cases} -25.67x^3 + 67.5x^2 + 6x + 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ -9.5(x-1)^2 + 20(x-1) + 7 & 1 \leq x \leq 2 \\ 25.67(x-2)^3 - 9.5(x-2)^2 + 52(x-2) + 27 & 2 \leq x \leq 3 \\ -22.5(x-3)^3 + 67.5(x-3)^2 - 123(x-3) + 79 & 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$$



Gambar 3.5 Kurva Spline Periodik

3.2 Relasi Rekursif Polinomial Newton

Definisi 3.1

Secara umum interpolasi Newton dapat dituliskan sesuai didefinisikan sebagai

$$P_i(x) = P_{i-1}(x) + \sum_{j=2}^{k+1} a_i \prod_{j=1}^{i-1} (x - x_j) \quad \text{untuk } k = 2, 3, \dots$$

(3.38)

(Sahid, 2005:206)

dalam bentuk polinomialnya dapat dituliskan sebagaimana (2.23)

$$P_{k+1}(x) = P_{k-1}(x) + a_{k+1}(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_k)$$

dengan

$$a_{k+1} = \frac{y_{k+1} - P_{k-1}(x_{k+1})}{(x_{k+1} - x_1)(x_{k+1} - x_2) \dots (x_{k+1} - x_k)}$$

Persamaan tersebut didapatkan dari (2.14)

$$p_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0),$$

dimana $a_0 = y_0 = f(x_0)$ dan $a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$

persamaan ini merupakan bentuk selisih terbagi dan dapat disingkat menjadi

$$a_1 = f[x_1, x_0] \quad (3.39)$$

dalam bentuk kuadratiknya (2.17)

$$p_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

Jadi, tahapan pembentukan polinom Newton adalah

$$p_1(x) = p_0(x) + a_1(x - x_0)$$

$$= a_0 + a_1(x - x_0)$$

$$p_2(x) = p_1(x) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

$$= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1)$$

$$p_3(x) = p_2(x) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

$$= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

.....

$$p_{n-1}(x) = p_{n-2}(x) + a_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-2})$$

$$= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) +$$

$$\dots + a_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

$$p_n(x) = p_{n-1}(x) + a_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

$$= a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \quad (3.40)$$

$$\dots + a_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

nilai konstanta $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ merupakan nilai selisih terbagi, dengan nilai

masing-masing

$$\begin{aligned}
a_0 &= f(x_0) \\
a_1 &= f[x_1, x_0] \\
a_2 &= f[x_2, x_1, x_0] \\
&\dots \\
a_n &= f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0]
\end{aligned} \tag{3.41}$$

dimana

$$\begin{aligned}
f[x_i, x_j] &= \frac{f(x_i) - f(x_j)}{x_i - x_j} \\
f[x_i, x_j, x_k] &= \frac{f[x_i, x_j] - f[x_j, x_k]}{x_i - x_k} \\
&\dots \\
f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0] &= \frac{f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_1] - f[x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_0]}{x_n - x_0}
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Jadi dalam bentuk yang lengkap polinomial Newton dituliskan sebagai

$$\begin{aligned}
p_n(x) &= f(x_0) + f[x_1, x_0](x - x_0) + (x - x_0)(x - x_1)f[x_2, x_1, x_0] + \dots + \\
&\quad (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0]
\end{aligned} \tag{3.43}$$

karena tetapan $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ merupakan nilai selisih terbagi, maka polinomial newton disebut juga polinom interpolasi selisih terbagi Newton.

Dengan demikian interpolasi polinomial Newton dapat ditulis sebagai hubungan rekursif sebagai :

- (i) Rekurs : $p_n(x) = p_{n-1}(x) + a_n(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})$
- (ii) Basis : $p_0(x) = a_0 = f(x_0)$

Adapun nilai selisih terbagi dapat di hitung dengan menggunakan tabel yang di sebut Tabel selisih terbagi, sebagai berikut :

Tabel 3.6 Perhitungan Selisih Terbagi Newton

i	0	1	2	...	$n-1$	n
x_i	x_0	x_1	x_2	...	x_{n-1}	x_n
$y_i = f(x_i)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	...	$f(x_{n-1})$	$f(x_n)$
ST-1	$f[x_1, x_0]$	$f[x_2, x_1]$	$f[x_3, x_2]$	...	$f[x_{n-1}, x_{n-2}]$	$f[x_n, x_{n-1}]$
ST-2	$f[x_2, x_1, x_0]$	$f[x_3, x_2, x_1]$	$f[x_4, x_3, x_2]$	...	$f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}]$	$f[x_{n+1}, x_n, x_{n-1}]$
...	...	...	...	...	...	...
ST-n	$f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_0]$					

Contoh 3.6

Dengan menggunakan metode interpolasi Newton, tunjukkan kurva dari data percobaan berikut !

x	-1.0	0.0	0.5	1.0	2.5	3.0
$y=f(x)$	3.0	-2.0	-0.375	3.0	16.125	19.0

Jawab :

Hitung selisih terbagi tingkat satu, kedua dan ketiga

Selisih terbagi pertama adalah

$$\begin{aligned}
 f(x_2, x_1) &= \frac{f(x)_5 - f(x)_4}{x_5 - x_4} = \frac{-200 - 3.000}{0 - (-1.0)} = -500 \\
 f(x_3, x_2) &= \frac{f(x)_5 - f(x)_4}{x_5 - x_4} = \frac{0.375 - (2.000)}{0.5 - 0.0} = 3.250 \\
 f(x_4, x_3) &= \frac{f(x)_5 - f(x)_4}{x_5 - x_4} = \frac{16.25 - 3.000}{1.0 - 0.5} = 6.750 \\
 f(x_5, x_4) &= \frac{f(x)_5 - f(x)_4}{x_5 - x_4} = \frac{16.25 - 3.000}{2.5 - 1.00} = 8.750 \\
 f(x_6, x_5) &= \frac{f(x)_6 - f(x)_5}{x_6 - x_5} = \frac{19.000 - 16.125}{3.0 - 2.5} = 5.750
 \end{aligned}$$

Selisih terbagi kedua adalah

$$f(x_3, x_2, x_1) = \frac{f(x_3, x_2) - f(x_2, x_1)}{x_3 - x_1} = \frac{3.250 - (-5.000)}{0.5 - (-1.0)} = 5.500$$

$$f(x_4, x_3, x_2) = \frac{f(x_4, x_3) - f(x_3, x_2)}{x_4 - x_2} = \frac{6.750 - 3.250}{0.1 - 0.0} = 3.500$$

$$f(x_5, x_4, x_3) = \frac{f(x_5, x_4) - f(x_4, x_3)}{x_5 - x_3} = \frac{8.750 - 6.750}{2.5 - 0.5} = 1.000$$

$$f(x_6, x_5, x_4) = \frac{f(x_6, x_5) - f(x_5, x_4)}{x_6 - x_4} = \frac{5.750 - 8.750}{3.0 - 1.0} = -1.500$$

Selisih terbagi ketiga adalah

$$f(x_4, x_3, x_2, x_1) = \frac{f(x_4, x_3, x_2) - f(x_3, x_2, x_1)}{x_4 - x_1} = \frac{3.500 - 5.500}{1.0 - (-1.0)} = -1.000$$

$$f(x_5, x_4, x_3, x_2) = \frac{f(x_5, x_4, x_3) - f(x_4, x_3, x_2)}{x_5 - x_2} = \frac{1.000 - 3.500}{2.5 - 0.0} = -1.000$$

$$f(x_6, x_5, x_4, x_3) = \frac{f(x_6, x_5, x_4) - f(x_5, x_4, x_3)}{x_6 - x_3} = \frac{-1.500 - 1.000}{3.0 - 0.5} = -1.000$$

Dapat dibentuk dalam tabel

Tabel 3.7 Perhitungan Selisih Terbagi

3.0	-2.0	-0.375	3.0	16.125	19
-5.0	3.25	6.75	8.75	5.75	0
5.5	3.5	1.0	-1.5	0	0
-1.0	-1.0	-1.0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

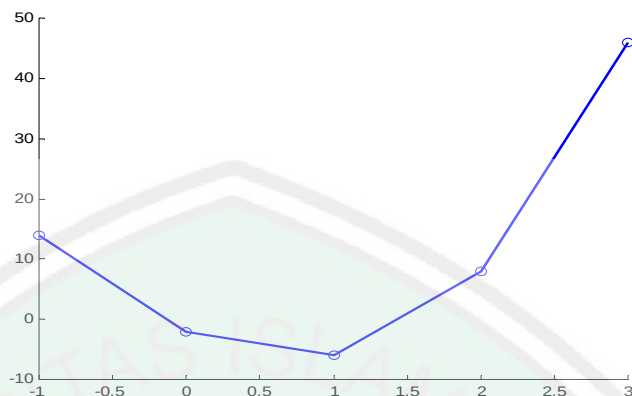
Untuk menemukan $f(x)$ dapat dimulai sebagaimana dalam 3.19 maka digunakan

$$F(x) = 3 + (x-1)(-5) + (x-1)(x-0)(5.5) + (x+1)(x-0)(x-0.5)(-1)$$

$$= -3 + 5x - 5 + 5.5x^2 - 5.5x + x^3 - 0.5x^2 + 0.5x$$

$$= x^3 + 6x^2 - 11x - 2$$

untuk $-1 \leq x \leq 3$



Gambar 3.8 Kurva Interpolasi Newton

3.3 Penerapan Polinomial Newton dan Spline Kubik

3.3.1 Pemulusan Kurva pada Data

Tabel 3.8 Data Jumlah Penduduk Miskin Tahun 1996 S/D 2005

Tahun	Jumlah Penduduk Miskin (Juta)			Persentase Penduduk Miskin		
	Kota	Desa	Kota + Desa	Kota	Desa	Kota + Desa
1996	9,42	24,59	34,01	13,39	19,78	17,47
1998	17,60	31,90	49,50	21,92	25,72	24,23
1999	15,64	32,33	47,97	19,41	26,03	23,43
2000	12,30	26,40	38,70	14,60	22,38	19,14
2001	8,60	29,30	37,90	9,76	24,84	18,41
2002	13,30	25,10	38,40	14,46	21,10	18,20
2003	12,20	25,10	37,30	13,57	20,23	17,42
2004	11,40	24,80	36,10	12,37	20,11	16,66
2005	12,40	22,70	35,10	11,37	19,51	15,97

Sumber BPS, 2006

Dari data maka didapatkan jumlah penduduk miskin kota dan desa adalah

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	34,01	49,50	47,97	38,70	37,90	38,40	37,30	36,10	35,10

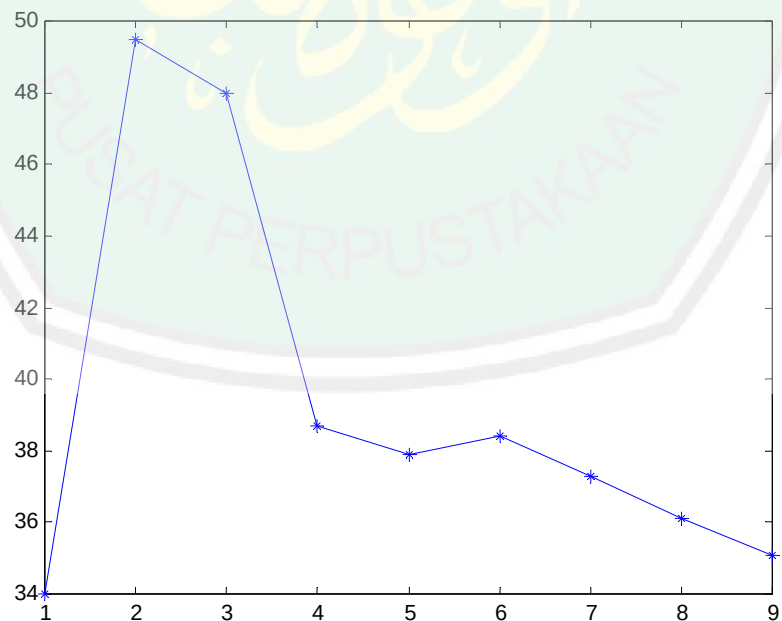
Dengan menggunakan software matlab nilai selisih terbagi didapatkan sebagai berikut

Tabel 3.9 Perhitungan Selisih Terbagi Newton

34.01	47.97	38.7	37.9	38.7	38.4	37.3	36.1	0
15.49	-1.53	-9.27	0.8	0.5	-1.1	-1.2	35.1	0
-8.51	-3.87	4.235	0.65	-0.8	-0.05	0.1	-1.0	0
1.54	2.701	-1.195	0.48	0.25	0.05	0	0	0
0.288	-0.974	0.177	0.18	-0.05	0	0	0	0
0.256	0.230	0.001	0.046	0	0	0	0	0
0.08	0.038	0.008	0	0	0	0	0	0
-0.017	0.0043	0	0	0	0	0	0	0
0.0027	0	0	0	0	0	0	0	0

Dengan bentuk persamaan nya kurva untuk $1 \leq x \leq 9$

$$F(x) = 34.01 + 49.5(x-1) - 8.51(x-1)(x-2) + 1.5467(x-1)(x-2)(x-3) + 0.28(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) - 0.256(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5) + 0.08(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6) - 0.0170(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)(x-7) + 0.0027(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)(x-8)$$



Gambar 3.9 Kurva Mulus Polinomial Newton

Dengan menggunakan metode spline alamiah maka didapatkan

Berdasarkan (3.22) di dapat

$$4M_2 + M_3 = 6(y_1 - 2y_2 + y_3) / h^2$$

$$M_2 + 4M_3 + M_4 = 6(y_2 - 2y_3 + y_4) / h^2$$

$$M_3 + 4M_4 + M_5 = 6(y_3 - 2y_4 + y_5) / h^2$$

$$M_4 + 4M_5 + M_6 = 6(y_4 - 2y_5 + y_6) / h^2$$

$$M_5 + 4M_6 + M_7 = 6(y_5 - 2y_6 + y_7) / h^2$$

$$M_7 + 4M_8 = 6(y_7 - 2y_8 + y_9) / h^2$$

berdasarkan (3.24) maka

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \\ M_6 \\ M_7 \\ M_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6(y_1 - 2y_2 + y_3) / h^2 \\ 6(y_2 - 2y_3 + y_4) / h^2 \\ 6(y_3 - 2y_4 + y_5) / h^2 \\ 6(y_4 - 2y_5 + y_6) / h^2 \\ 6(y_5 - 2y_6 + y_7) / h^2 \\ 6(y_6 - 2y_7 + y_8) / h^2 \\ 6(y_7 - 2y_8 + y_9) / h^2 \end{bmatrix}$$

Untuk

$$6(y_1 - 2y_2 + y_3) / h^2 = -102.16$$

$$6(y_2 - 2y_3 + y_4) / h^2 = -46.44$$

$$6(y_3 - 2y_4 + y_5) / h^2 = 50.82$$

$$6(y_4 - 2y_5 + y_6) / h^2 = 7.80$$

$$6(y_5 - 2y_6 + y_7) / h^2 = -9.60$$

$$6(y_6 - 2y_7 + y_8) / h^2 = -0.6$$

$$6(y_7 - 2y_8 + y_9) / h^2 = 7.20$$

maka didapatkan

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \\ M_6 \\ M_7 \\ M_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -102.16 \\ -46.44 \\ 50.82 \\ 7.80 \\ -9.60 \\ -0.6 \\ 7.20 \end{bmatrix}$$

dengan eliminasi iterasi invers matriks menggunakan software matlab didapatkan

$$M_2 = -23.109$$

$$M_3 = -9.70$$

$$M_4 = 15.49$$

$$M_5 = -1.42$$

$$M_6 = 2.02$$

$$M_7 = -0.10$$

$$M_8 = -1.83$$

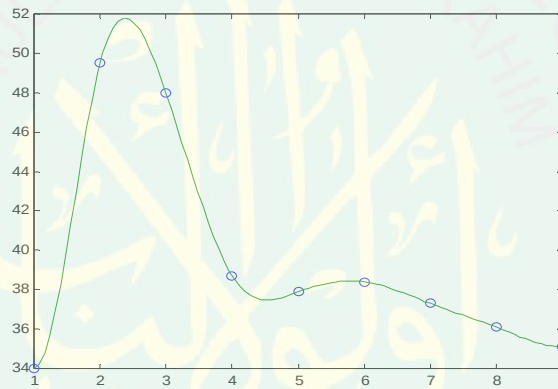
Karena $M_1 = M_5 = 0$ maka, berdasarkan dari teorema 3.1 persamaan (3.17) didapatkan nilai a_i , b_i , c_i dan d_i . Dengan perhitungan menggunakan program excel didapatkan sebagai berikut

Tabel 3.7 Perhitungan Spline Alami Pertumbuhan Penduduk Miskin

i	x	y	$h=x2-x1$	$6(y1-2*y2+y3)/h^2$	M	a	b	c	d
1	1	34.01	1	-102.12	0.00	-1.62	0.00	15.49	34.01
2	2	49.5	1	-46.44	-23.109	6.43	-11.55	-1.53	49.50
3	3	47.97	1	50.82	-9.70	1.38	-4.85	-9.27	47.97
4	4	38.7	1	7.80	15.49	-2.92	7.74	-0.80	38.70
5	5	37.9	1	-9.60	-1.42	0.22	-0.71	0.50	37.90
6	6	38.4	1	-0.60	-2.02	0.64	-1.01	-1.10	38.40
7	7	37.3	1	7.20	-0.10	0.02	-0.05	-1.20	37.30
8	8	36.1	1	-216.60	1.83	-0.30	0.91	-6.08	36.10
9	9	36.1	-9	2.67	0.00	0.00	0.00	4.01	36.10

$$S(x) = \begin{cases} -1.62(x-1)^3 + 15.49(x-1) + 34.01 & 1 \leq x \leq 2 \\ 6.43(x-2)^3 - 11.55(x-2)^2 - 1.53(x-2) + 49.5 & 2 \leq x \leq 3 \\ 1.38(x-3)^3 - 4.85(x-3)^2 - 9.27(x-3) + 47.9 & 3 \leq x \leq 4 \\ -2.92(x-4)^3 - 7.74(x-4)^2 - 0.8(x-4) + 38.7 & 4 \leq x \leq 5 \\ 0.22(x-5)^3 - 0.71(x-5)^2 - 0.5(x-5) + 37.9 & 5 \leq x \leq 6 \\ 0.64(x-6)^3 - 1.01(x-6)^2 - 1.1(x-6) + 38.4 & 6 \leq x \leq 7 \\ 0.02(x-7)^3 - 0.05(x-7)^2 - 1.2(x-7) + 37.3 & 7 \leq x \leq 8 \\ -0.30(x-8)^3 + 0.91(x-8)^2 - 6.08(x-7) + 36.10 & 8 \leq x \leq 9 \end{cases}$$

Dengan bentuk kurva



Gambar 3.8 Kurva Mulus Polinomial Newton

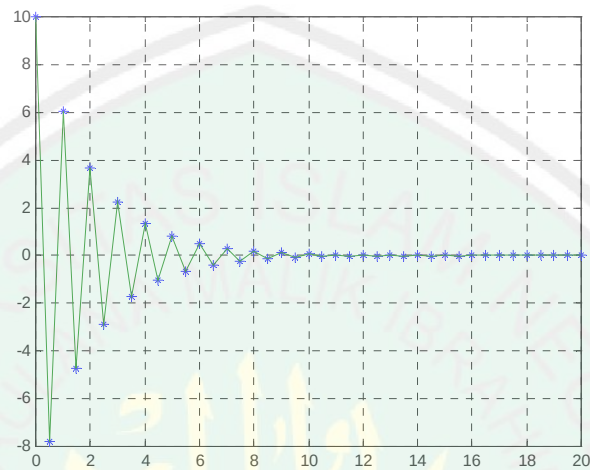
3.3.2 Contoh Perbandingan dengan Fungsi Eksak

Contoh yang digunakan untuk membangkitkan data suatu fungsi yang didefinisikan sebagai

$$y = 10e^{0.5x} \cos 2\pi x, \quad 0 \leq x \leq 10$$

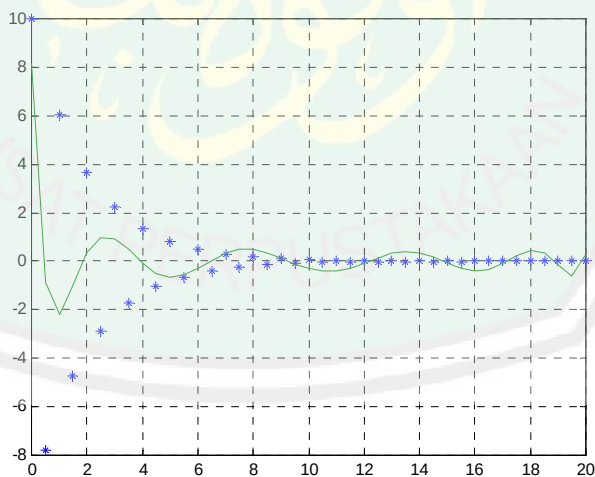
Dengan menggunakan program matlab, berikut akan diberikan beberapa bentuk kurva, dari fungsi eksak $y = 10e^{0.5x} \cos 2\pi x$, polinomial Newton dan spline kubik.

Bentuk kurva fungsi eksaknya jika diambil titik sejumlah 40 titik pada interval $[1,10]$ adalah



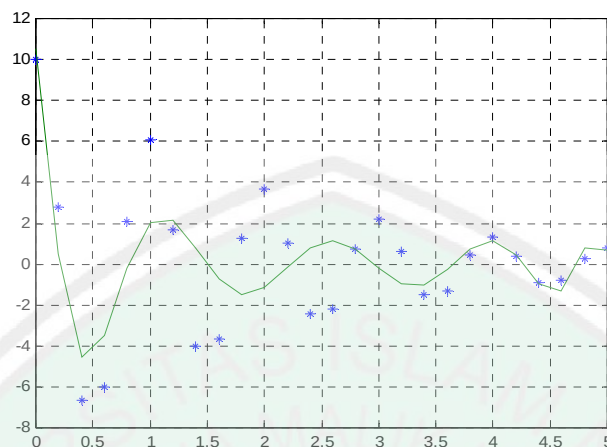
Gambar 3.9 Kurva $y=10e^{0.5x}\cos 2\pi x$

Gambar kurva dengan polinomial Newton tingkat 10



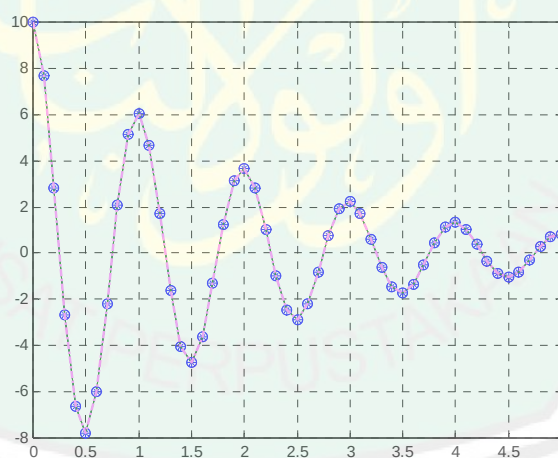
Gambar 3.9 Kurva Mulus Polinomial Newton dengan Fungsi $y=10e^{0.5x}\cos 2\pi x$

Agar terlihat lebih jelas galatnya, akan ditunjukkan pada interval $[0,5]$ dengan titik yang diambil sebanyak 20 titik



Gambar 3.10 Kurva Mulus Polinomial
Newton dengan Fungsi $y=10e^{0.5x}\cos 2\pi x$

Gambar kurva dengan spline kubik



Gambar 3.11 Kurva Mulus Spline Kubik
 $y=10e^{0.5x}\cos 2\pi x$

Dari gambar diatas maka dapat di ketahui bahwa fungsi spline kubik melewati seluruh titik-titik yang di inginkan, sedangkan untuk kurva polinomial Newton diperlukan polinomial dengan pangkat lebih tinggi agar kurva pencocokannya dapat mendekati data dari suatu fungsi yang di inginkan.

BAB IV PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Dari kajian yang telah dilakukan, maka didapatkan beberapa kesimpulan yaitu:

1. Untuk memuluskan kurva fungsi spline kubik diperlukan syarat-syarat sebagai berikut :

- a. $S(x) = S_i(x)$ terdefinisi pada subinterval (x_i, y_i) $i = 1, 2, \dots, n$.
- b. $S(x)$ kontinu pada $[x_1, x_n]$
- c. $S'(x)$ kontinu pada $[x_1, x_n]$
- d. $S''(x)$ kontinu pada $[x_1, x_n]$
- e. Terdapat titik-titik x_k (simpul-simpul $S(x)$) sedemikian sehingga $x_n = x_{i-1} < x_{i-2} < \dots < x_i = x_1$ yang merupakan syarat batas, adapun syarat batas spline kubik adalah :
 - i. Spline alami, jika $M_1 = M_n = 0$
 - ii. Spline berujung parabolik, jika $M_1 = M_2$ dan $M_n = M_{n-1}$
 - iii. Spline berujung kubik, jika $M_1 = 2M_2 - M_3$ dan $M_n = 2M_{n-1} - M_{n-2}$
 - iv. Spline kubik terapan, jika $2M_1 + M_2 = \frac{6}{h^2}(y_2 - y_1 + hy'_1)$ dan

$$2M_n + M_{n-1} = \frac{6}{h^2}(y_{n-1} - y_n + hy'_n)$$

- v. Spline kubik periodik, jika $y_1 = y_n$, $M_1 = M_n$ dan

$$4M_1 + M_2 + M_{n-1} = \frac{6}{h^2}(y_{n-1} - 2y_1 + y_2)$$

2. Untuk memuluskan kurva, polinomial Newton dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan sebagai berikut

$$P_{k+1}(x) = P_{k-1}(x) + a_{k+1}(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_k)$$

$$a_{k+1} = \frac{y_{k+1} - P_{k-1}(x_{k+1})}{(x_{k+1} - x_1)(x_{k+1} - x_2) \dots (x_{k+1} - x_k)}$$

sehingga persamaan tersebut membentuk persamaan rekursif dari bentuk selisih terbagi. Menurut teorema nilai rata-rata maka didapatkan jika $f(x)$ dapat didiferensialkan pada suatu interval maka terdapat suatu bilangan c di antara interval tersebut yang menunjukkan $f(x)$ kontinu pada interval tersebut.

4.2 Saran

Skripsi ini mengkaji tentang metode spline kubik dan polinomial Newton dalam memuluskan kurva. Kajian ini merupakan bagian dari kajian interpolasi. Sebagai tindak lanjut pembaca dapat mengembangkan perbandingan metode pemulusan kurva dengan metode yang lain. Di antaranya membentuk interpolasi pada perhitungan Lagrange dan metode Smoothing Spline untuk memuluskan kurva.

DAFTAR PUSTAKA

- Anton, Howard dan Rorres, Chris, 1988. Terj. Silaban, P. *Penerapan Aljabar Linier*. Jakarta : Erlangga
- Arhamni, Muhammad. 2005. *Pemrograman Matlab*. Yogyakarta : Andi
- Sahid, 2005. *Pengantar Komputasi Numerik dengan MATLAB*. Yogyakarta : C.V Andi Offset
- Lethold, Louis. 1991. *Kalkulus dan Ilmu Ukur Analitis*. Jakarta : Erlangga
- Munir, Rinaldi. 2006. *Metode Numerik*. Bandung : Informatika Bandung
- Purcell, Edwin J. 1999. *Kalkulus dan Ilmu Ukur Analitis*. Jakarta : Erlangga
- Pranoto, Iwan. 2004. *Pengenalan Geometri Deferensial*. Bandung : Penerbit ITB