GENERALISASI FUNGSI AIRY SEBAGAI SOLUSI ANALITIK PERSAMAAN SCHRODINGER NONLINIER

SKRIPSI

Oleh:
LUKMAN HAKIM
NIM. 08610075

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2012

GENERALISASI FUNGSI AIRY SEBAGAI SOLUSI ANALITIK PERSAMAAN SCHRODINGER NONLINIER

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
LUKMAN HAKIM
NIM. 08610075

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2012

GENERALISASI FUNGSI AIRY SEBAGAI SOLUSI ANALITIK PERSAMAAN SCHRODINGER NONLINIER

SKRIPSI

Oleh:
LUKMAN HAKIM
NIM. 08610075

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji:
Tanggal: 3 April 2012

Pembimbing I	Pembimbing II
Ari Kusumastuti, S.Si., M.Pd	Fachrur Rozi, M.Si
NIP. 19770521 200501 2 004	NIP. 19800527 200801 1 012

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

GENERALISASI FUNGSI AIRY SEBAGAI SOLUSI ANALITIK PERSAMAAN SCHRODINGER NONLINIER

SKRIPSI

Oleh:
LUKMAN HAKIM
NIM. 08610075

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal: 3 April 2011

Susunan Dewan Penguji			Tanda Tangan
1. Penguji Utama	:	Usman Pagalay, M.Si NIP. 19650414 200312 1 001	( )
2. Ketua	:	Abdussakir, M.Pd NIP. 19751006 200312 1 001	( )
3. Sekretaris	:	Ari Kusumastuti, S.Si., M.Pd NIP. 19770521 200501 2 004	( )
4. Anggota	:	Fachrur Rozi, M.Si NIP. 19800527 200801 1 012	( )

Mengetahui dan Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	Lukman Hakim
NIM	:	08610075
Jurusan	:	Matematika
Fakultas	:	Sains dan Teknologi

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambil alihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 3 April 2012

Yang Membuat Pernyataan,

Lukman Hakim

NIM. 08610075

MOTTO

LIFE IS AN INSPIRATION

PERSEMBAHAN

Ayahanda H. Muhroni dan Ibunda Hj. Siti Alfiah

Kakak M. Ihsanul Huda dan Nur Fitriyani

Adik M. Aris Munandar dan M. Faqih Maulana

Inspirasi Fatihah Syaikhona Muhammad Kholil Bangkalan

Inspirasi Fatihah KH. Abdul Hamid Pasuruan

Khun Shon

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr.Wb.

Syukur alhamdulillah penulis hanturkan ke hadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya, sholawat serta salam selalu tercurah kepada junjungan Nabi Muhammad SAW, sehingga penulis dapat menyelesaikan studi di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang sekaligus penulisan skripsi ini dengan baik.

Selanjutnya penulis hanturkan ucapan terima kasih seiring do'a dan harapan memberikan barokah dan manfaat kepada semua pihak yang telah membantu dalam penyelesaian skripsi ini. Ucapan terima kasih ini penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Drs. Sutiman B. Sumitro, SU., DSc, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
4. Ari Kusumastuti, S.Si., M.Pd dan Fachrur Rozi, M.Si selaku dosen pembimbing skripsi, yang telah memberikan banyak pengarahan dan pengalaman yang berharga akan berbagi ilmu.
5. Segenap civitas akademika Jurusan Matematika, terutama seluruh dosen, terima kasih atas segenap ilmu dan bimbingan.

6. Ayahanda (Muhroni) dan ibunda tercinta (Siti Alfiah) yang senantiasa memberikan do'a dan restunya dalam setiap sujudnya.
7. Kakak-kakak terbaik (M. Ihsanul Huda dan Nur Fitriyani), Adik-adik tersayang (M. Aris Munandar dan M. Faqih Maulana), terima kasih atas do'a dan motivasinya.
8. Abah Syaifuddin Zuhri dan Umi Ana Hamidah yang selalu memberikan do'a dan bimbingan akan arti kesabaran dalam menghadapi kehidupan.
9. Saudara seperjuangan MSAA.
10. Sahabat-sahabat seperjuangan mahasiswa Matematika 2008, terima kasih atas segala pengalaman berharga dan terutama teman seperjuangan PKLI.
11. Semua pihak yang tidak mungkin penulis sebut satu persatu.
12. Khun Shon dan Khun Nam

Penulis menyadari bahwa dalam penyusunan skripsi ini masih terdapat kekurangan, dan penulis berharap semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat kepada para pembaca, khususnya bagi penulis secara pribadi. Amin.

Wassalamu'alaikum Wr.Wb.

Malang, 3 April 2012

Penyusun

DAFTAR ISI

DAFTAR SIMBOL

Simbol-simbol yang digunakan dalam penelitian ini adalah:

t	:	Waktu
u	:	Penampang gelombang (fungsi kompleks)
z	:	Bilangan kompleks
$\|u\|$	:	Modulus dari u
$\bar{u}$	:	Konjugat dari u
$f(x)$	:	Fungsi dengan variebel$x$
Ai	:	Simbol dari fungsi Airy
$\partial_t u = \frac{\partial u}{\partial t}$	:	Turunan pertama fungsi u terhadap t
$\partial_x u = \frac{\partial u}{\partial x}$	:	Turunan pertama fungsi u terhadap x
$\partial_y u = \frac{\partial u}{\partial y}$	:	Turunan pertama fungsi u terhadap y
$\partial_z u = \frac{\partial u}{\partial z}$	:	Turunan pertama fungsi u terhadap z
$f_x' = \frac{df}{dx}$, $f_{xx}'' = \frac{d^2 f}{dx^2}$, $f_{xxx}''' = \frac{d^3 f}{dx^3}$, $f_x^{(n)} = \frac{d^n f}{dx^n}$	:	Turunan-turunan tinggi untuk $f = f(x)$ terhadap x
$\int_a^b f(x,y)dx$	:	Integral $f(x)$ terhadap x
$\int_a^b f(x,y)dy$	:	Integral $f(x)$ terhadap y
$\int_a^b \int_{x_1}^{x_2} f(x,y)\, dxdy$	:	Integral rangkap dua

ABSTRAK

Hakim, Lukman. 2012. **Generalisasi Fungsi Airy Sebagai Solusi Analitik Persamaan Schrodinger Nonlinier**. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: (I) Ari Kusumastuti, S.Si., M.Pd
(II) FachrurRozi, M.Si

Kata Kunci: Persamaan Schrodinger Nonlinier, Persamaan Airy, Fungsi Airy, Transformasi Fourier dan Invers Transformasi Fourier.

Persamaan Schrodinger adalah persamaan diferensial parsial nonlinier yang menginterpretasikan pergerakan suatu partikel atau atom. Penelitian ini berupaya untuk memperoleh analisis konstruksi bentuk umum solusi ananalitik persamaan Schrodinger nonlinier dengan fungsi Airy. Fungsi Airy adalah solusi persamaan diferensial Airy, adapun langkah pertama adalah manipulasi bentuk persamaan Schrodinger nonlinier menjadi bentuk persamaan Airy dengan menerapkan transformasi Fourier. Dengan demikian didapatkan solusia nanalitik persamaan Airy dengan generalisasi fungsi Airy. Dan langkah selanjutnya adalah menerapkan invers dari transformasi Fourier yang digunakan untuk memdapatkan solusi analitik bagi persamaan Schrodinger nonlinier, dalam hal ini diberikan kondisi awal bilangan kompleks pada invers transformasi Fourier, yaitu $U(\omega, t) = \omega^2 + it$.

ABSTRACT

Hakim, Lukman. 2012. **Generalization of Airy functions as Analytical Solutions of Nonlinear Schrodinger Equation**. Thesis. Mathematics Department, Faculty of Science and Technology, The State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang.
Advisor: (I) Ari Kusumastuti, S.Si.,M.Pd
(II) Fachrur Rozi, M.Si

Schrodinger equation is a nonlinear partial differential equations which interpret the movement of a particle or atom. This research sought to obtain construction analysis general form of analytical solution of Nonlinear Schrodinger equation by using Airy function. Airy function is the solution of the Airy differential equation, while the first step is to manipulate nonlinear Schrodinger equation form into Airy equation by applying Fourier transform. Thus the analytical Airy equation is obtained by the generalization of Airy function. The next step is to apply the inverse of Fourier transform which is used to get analytic solution for the nonlinear Schrodinger equation and in this case given the initial conditions of complex function on the inverse Fourier transform, namely $U(\omega, t) = \omega^2 + it$.

Key words: Nonlinear Schrodinger Equation, Airy Equation, Airy Functions, Fourier Transform and Inverse Fourier Transform.

ملخص

حكيم,لقمان.2012 .**تعميم وظيفة أيري (AIRY) كحل لتحليلي من معادلة شرودنجر غيرالخطية. بحث الجامعي** .قسم الرياضيات. بكلية العلوم والتكنولوجي ،بجامعة مولانا مالك إبراهيم الحكمية لإسلامية مالانج

المشرف(1) : أري كوسومستوتي الماجستير
(2) : فخر الرازي الماجستير
الكلماتا لرئسية: اللاخطية شرودنجر المعادلة ،معادلة أيري،وظائف أيري،تحويل فوريه وتحويل فوريه العكسية.

التي تفسرحركة غير الخطية المعادلة التفاضلية الجزئية شرودنجر هي معادلة من التحليل العام نموذج بناء للحصول على هذا البحث ويسعى .أوالذرة الجسيم). AIRYأيري (باستخداموظيفة تحليلية لمعادلة شرودنجر غير الخطية حل)، وأماالخطوة AIRYأيري (التفاضلية لمعادلة هي الحل)AIRYأيري (وظيفة)AIRYأيري (في معادلة معادلة شرودنجر غير الخطية الأولى هي يتمثل شكل)AIRYأيري (تحليلية معادلة يتم الحصول على وهكذا .تحويل فوريه بتطبيق معكوس لتطبيق والخطوة التالية هي .)AIRYأيري (وظيفة من تعميم من قبل لمعادلة شرودنجر غير تحليلي حل للحصول على الذي يستخدم تحويل فوريه من معكوس على الأولية لمهمة معقدة نظرا للظروف الحالة هذه الخطية، وفي $U(\omega,t) = \omega^2 + it$،أي تحويل فوريه

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Persamaan diferensial parsial (PDP) adalah kajian ilmu matematika yang berkaitan langsung dengan kehidupan manusia karena persamaan diferensial parsial dapat digunakan untuk menterjemahkan fenomena alam menjadi suatu persamaan yang sistematis dan logis. Dari sifat logis dan sistematis ini menjadikan persamaan diferensial parsial dapat digunakan untuk memodelkan masalah yang akan diamati. Model yang demikian menyatakan gambaran fenomena atau masalah yang diteliti dengan variabel terbatas. Keterbatasan ini muncul karena sifat penggambaran fenomena alam yang tidak dapat dimodelkan secara keseluruhan, akan tetapi hanya mengasumsikan variabel-variabel yang berkaitan dengan fenomena yang diselidiki (Purwanto, 2003).

Secara definitif, persamaan diferensial adalah persamaan yang mengandung fungsi-fungsi turunan, baik turunan parsial maupun turunan biasa. Setiap fungsi tersebut mempunyai solusi yaitu solusi analitik dan solusi numerik. Analog dengan fungsi maka persamaan diferensial juga mempunyai solusi dan solusi persamaan diferensial adalah suatu fungsi yang memenuhi persamaan diferensial. Dalam menyelesaikan persamaan diferensial secara analitik, biasanya terbatas pada persamaan-persamaan diferensial dengan bentuk tertentu dan biasanya hanya digunakan untuk menyelesaikan persamaan-persamaan yang linier. Sedangkan persamaan diferensial nonlinier tidak mudah diselesaikan secara langsung, akan tetapi harus melalui transformasi-transformasi yang menjadikan persamaan nonlinier menjadi persamaan yang linier (Ross, 1984).

Selain sebagai alat untuk memodelkan masalah, maka persamaan diferensial parsial juga menjadi alat yang digunakan untuk menyelesaikan permasalahan matematika fisika, matematika kimia dan fenomena yang ada di alam (Purwanto, 2003). Misalnya, fenomena alam yang terjadi di laut yaitu adanya gerakan partikel di bawah laut yang menimbulkan gelombang yang disebut dengan gelombang internal. Gelombang ini terjadi karena terdapat perbedaan rapat massa pada setiap lapisan laut dan perbedaan rapat massa disebabkan oleh perbedaan kadar garam dan temperatur dari setiap lapisan laut, selain di laut pergerakan partikel dapat juga terjadi pada medan kuantum. Dalam hal ini persamaan diferensial parsial yang menggambarkan pergerakan elektron pada medan kuantum adalah model persamaan Schrodinger (Sudirham dan Utari, 2010).

Persamaan Schrodinger adalah persamaan diferensial parsial yang menggambarkan bagaimana pergerakan suatu partikel khususnya partikel elektron. Dalam ilmu fisika, persamaan Schrodinger diperkenalkan oleh fisikawan Erwin Schrodinger pada tahun 1925 dan dijelaskan juga bagaimana hubungan antara ruang dan waktu pada sistem mekanika kuantum. Persamaan ini sangat penting seperti halnya persamaan Newton yang menjadi dasar berkembangnya keilmuan Fisika, dan sedangkan persamaan Schrodinger menjadi dasar berkembangnya ilmu Fisika modern yang berkenaan dengan mekanika kuantum (Sudirham dan Utari, 2010).

Dengan demikian atom atau partikel sangat berpengaruh pada suatu sistem persamaan karena atom berfungsi menentukan karakteristik dari masing-masing persamaan tersebut, dengan kata lain atom mempunyai suatu energi dan muatan tertentu yang memberikan pengaruh pada partikel. Adapun persamaan yang digunakan untuk menaksirkan energi suatu atom adalah persamaan Schrodinger. Persamaan Schrodinger berfungsi sebagai penaksir energi yang digunakan elektron untuk berpindah dari atom yang satu terhadap atom yang lainnya. Dalam hal ini, dianalisis dengan persamaan Schrodinger yang telah ditransformasi menjadi persamaan Schrodinger pada koordinat bola karena dengan koordinat bola akan terlihat dengan jelas bagaimana jari-jari suatu elektron terhadap inti, sehingga mudah untuk diamati pergerakan elektron dari kulit yang satu terhadap kulit yang lainnya. Selanjutnya persamaan tersebut diselesaikan dan didapatkan solusi persamaan diferensial dan solusi ini yang dijadikan sebagai taksiran besar energi elektron dalam suatu atom tertentu.

Istilah elektron atau partikel sebenarnya telah ada meskipun hanya secara implisit dalam Al-Qur’an sebelum ditemukannya partikel itu sendiri. Dalam hal ini, telah jelas dalam Al-Qur’an Al-Karim surat Al-Zalzalah: 7-8.

فَمَن يَعْمَلْ مِثْقَالَ ذَرَّةٍ خَيْرًا يَرَهُۥ ﴿٧﴾ وَمَن يَعْمَلْ مِثْقَالَ ذَرَّةٍ شَرًّا يَرَهُۥ ﴿٨﴾

‘‘Barang siapa yang mengerjakan kebaikan seberat dzarrah pun, niscaya dia akan melihat (balasan) nya. Dan barang siapa yang mengerjakan kejahatan sebesar dzarrah pun, niscaya dia akan melihat (balasan) nya juga’’ (Al-Zalzalah 99:7-8).

Ayat di atas memotivasi kepada umat manusia bahwa segala perbuatan manusia akan ada balasannya dan sesuai dengan kadar perbuatannya. Nabi Muhammad SAW selalu memberikan peringatan bahwa ancaman bagi manusia adalah perbuatannya, jika perbuatannya baik maka baik dirinya dan jika perbuatannya buruk maka buruk padanya. Selain itu Nabi Muhammad SAW bersabda: "Barang siapa yang hari ini lebih baik dari hari sebelumnya maka beruntunglah orang tersebut dan jika hari ini sama dengan hari sebelumnya maka rugilah orang tersebut dan apabila hari ini lebih buruk dari hari sebelumnya maka celakalah orang tersebut". Hal ini memberikan pengajaran kepada manusia bahwa manusia harus memperhatikan segala sesuatu yang menjadikan lebih baik atau lebih buruk pada dirinya dan selain itu sabda Nabi Muhammad SAW memberikan motivasi akan fungsi dari segala perbuatan manusia dalam menjalani kehidupan.

Fungsi Airy (Gorge Biddle Airy) adalah suatu fungsi yang menjadi solusi bagi persamaan diferensial Airy. Adapun bntuk persamaan Airy adalah $y'' - xy = 0$ dan solusinya disebut dengan fungsi Airy. Selanjutnya diberikan penjelasan bahwa fungsi Airy adalah salah satu bentuk model penyelesaian persamaan diferensial Schrodinger. Dengan demikian asumsi-asumsi yang harus dipenuhi persamaan Schrodinger agar dapat diselesaikan dengan fungsi Airy adalah persamaan Schrodinger harus dikontruks menjadi model persamaan Airy, kemudian diselesaikan dan didapatkan fungsi Airy (Valle dan Manuael, 2004),

Masalah adalah suatu hal yang harus diselesaikan dan selesaiannya harus sesuai dengan apa yang dicari sehingga akan didapatkan hasil yang valid terhadap masalah yang dihadapi. Setiap masalah atau fenomena harus dicari selesaiannya, dan metode yang digunakan mungkin bermacam-macam, akan tetapi semua metode harus sesuai dengan kaidah dan harus dikembalikan pada jalan yang benar. Hal ini telah tersirat dalam Al-Qur’an surat Ali-Imran: 159, yaitu:

فَبِمَا رَحۡمَةٖ مِّنَ ٱللَّهِ لِنتَ لَهُمۡۖ وَلَوۡ كُنتَ فَظًّا غَلِيظَ ٱلۡقَلۡبِ لَٱنفَضُّواْ مِنۡ حَوۡلِكَۖ
فَٱعۡفُ عَنۡهُمۡ وَٱسۡتَغۡفِرۡ لَهُمۡ وَشَاوِرۡهُمۡ فِي ٱلۡأَمۡرِۖ فَإِذَا عَزَمۡتَ فَتَوَكَّلۡ عَلَى ٱللَّهِۚ إِنَّ ٱللَّهَ
يُحِبُّ ٱلۡمُتَوَكِّلِينَ ١٥٩

“Maka disebabkan rahmat dari Allah-lah kamu berlaku lemah lembut terhadap mereka. Sekiranya kamu bersikap keras lagi berhati kasar, tentulah mereka menjauhkan diri dari sekelilingmu. Karena itu ma’afkanlah mereka, mohonkanlah ampun bagi mereka, dan bermusyawaratlah dengan mereka dalam urusan itu. Kemudian apabila kamu telah membulatkan tekad, maka bertawakkallah kepada Allah. Sesungguhnya Allah menyukai orang-orang yang bertawakkal kepada-Nya” (Qs. Ali Imran 3:159).

Ayat di atas menyiratkan bahwa Allah SWT menjelaskan kepada setiap manusia bahwa hidup di dunia tidak akan terlepas dari problem yang dihadapi. Oleh karena itu mereka harus dapat memecahkan setiap masalah yang dihadapi. Surat Ali Imran ayat 159 memberikan motivasi bagi setiap manusia harus bersikap lemah lembut dan bijaksana dalam menyelesaikan permasalahan sehingga akan menumbuhkan rasa sabar dan tawadhu’ setiap menghadapi masalah. Jika metode yang digunakan baik dan bijaksana maka solusi yang akan didapatkan juga baik dan benar. Ayat di atas menganjurkan bahwa segala solusi yang diperolah harus dikembalikan kepada Allah yang Maha Mengetahui. Dengan demikian Surat Ali Imran ayat 159 secara garis besar memberikan pengajaran yang baik dalam menyelesaikan masalah secara tepat dan berasaskan hati nurani.

Dari penelitian sebelumnya, Yokohama (2007) memaparkan dalam tulisannya bahwa persamaan diferensial orde tinggi dapat diselesaikan dengan fungsi Airy. Adapun proses penyelesaiannya adalah mengkontruksi persamaan diferensial orde tinggi menjadi persamaan Airy dengan transformasi Cole Hopf, selanjutnya diselesaikan dan didapatkan fungsi Airy sebagai solusi analitik. Dengan demikian terlihat bahwa fungsi Airy memberikan kontribusi dalam skema keilmuan misalnya, fungsi Airy dapat digunakan dalam menyelesaikan persamaan diferensial orde tinggi. Secara teoritik fungsi Airy memberikan kontribusi dalam hal transformasi matematika, adapun transformasi yang terkait dengan fungsi Airy adalah transformasi Laplace, transformasi Mellin, dan trasformasi Fourier.

Dengan demikian didapatkan gambaran manfaat dari fungsi Airy, sehingga menjadikan penting untuk dilakukan pengkajian lanjut tentang fungsi Airy yang diterapkan pada persamaan lain, misalnya pada model gelombang Schrodinger. Oleh karena itu tema yang diangkat oleh penulis adalah: *"Generalisasi Fungsi Airy sebagai Solusi Analitik Persamaan Schrodinger Nonlinier*".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, peneliti merumuskan masalah sebagai berikut: Bagaimana analisis bentuk generalisasi fungsi Airy sebagai solusi analitik persamaan Schrodinger nonlinier?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, penelitian ini bertujuan untuk memaparkan analisis bentuk generalisasi fungsi Airy sebagai solusi analitik persamaan Schrodinger nonlinier.

1.4 Batasan Masalah

Dalam penelitian tentang generalisasi fungsi Airy sebagai solusi persamaan Schrodinger nonlinier dibatasi pada:

1. Generalisasi bentuk umum solusi ketika pangkat dari modulus persamaan Schrodinger nonlinier dianalisis dengan bentuk pangkat ganjil dan genap.
2. Generalisasi bentuk umum solusi ketika dimensi dari persamaan Schrodinger nonlinier dinaikkan hingga dimensi n.

1.5 Manfaat Penelitian

Penelitian ini memberikan kontribusi pada perkembangan keilmuan secara teoritik dan teknologi, yaitu:

1. Dalam keilmuan matematika penelitian ini memberikan skema teoritik tentang generalisasi fungsi Airy yang dapat diterapkan dalam mencari solusi analitik persamaan diferensial.
2. Dalam bidang teknologi penelitian ini dapat diterapkan pada persamaan Schrodinger dalam penemuan positron (anti materi).

1.6 Metode Penelitian

Metode penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah:

1. Analisis brownian motion persamaan Schrodinger nonlinier.
2. Transformasi persamaan Schrodinger nonlinier ke dalam bentuk persamaan Airy dengan transformasi Fourier.
3. Menyelesaikan persamaan Airy sehingga solusi yang disebut dengan fungsi Airy
4. Menerapkan invers transformasi Fourier dan memberikan kondisi awal sehingga didapatkan solusi persamaan Schrodinger nonlinier.
5. Generalisasi solusi persamaan Schrodinger nonlinier dengan fungsi Airy

1.7 Sistematika Penulisan

Dalam penelitian penulisannya dibagi menjadi empat bab, yaitu:

BAB I PENDAHULUAN: Bab ini membahas tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batsan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian, sistematika penelitian.

BAB II KAJIAN PUSTAKA: Bab ini membahas tentang definisi persamaan diferensial, orde persamaan diferensial, solusi analitik persamaan diferensial, persamaan Schrodinger, deret Taylor dan Maclaurin, transformasi Fourier, fungsi Airy dan kajian agama.

BAB III PEMBAHASAN: Dalam bab ini akan membahas tentang bagaimana mengkontruksi persamaan Schrodinger nonlinier dengan analisis Brownian motion. Generalisasi fungsi Airy sebagai solusi analitik persamaan Schrodinger nonlinier. Generalisasi fungsi Airy sebagai solusi persamaan Schrodinger nonlinier dimensi tinggi.

BAB IV PENUTUP: Bab ini menjelaskan tentang kesimpulan dari penelitian dan saran untuk peneliti selanjutnya.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Diferensial Parsial

Persamaan diferensial parsial dapat digunakan untuk menginterpretasikan fenomena atau kejadian alam, misalnya

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + A|u(x,t)|^n u(x,t) = 0 \tag{2.1}$$

Persamaan (2.1) adalah persamaan diferensial yang menginterpretasikan gerakan partikel khususnya elektron dan persamaan ini disebut persamaan Schrodinger Nonlinier.

Definisi 2.1

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat turunan satu atau lebih dari variabel tak bebas terhadap satu atau lebih variabel bebas. Berdasarkan jumlah variabel bebasnya, persamaan diferensial dikelompokkan menjadi persamaan diferensial biasa (PDB) atau *Ordinary Differential Equation (ODE)* dan persamaan diferensial parsial (PDP) atau *Partial Differential Equation (PDE)* (Ross, 1984).

Definisi 2.2

Persamaan diferensial parsial (PDP) adalah persamaan diferensial yang memuat turunan parsial satu atau lebih dari variabel tak bebas terhadap satu atau lebih variabel bebas (Ross, 1984). Selanjutnya diberikan persamaan diferensial parsial sebagai berikut:

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial t} = z \tag{2.2}$$

Persamaan (2.2) adalah persamaan dengan dua variabel bebas, yaitu x dan t. Sedangkan variabel tak bebasnya adalah z. Selanjutnya diberikan persamaan berikut:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \tag{2.3}$$

Persamaan (2.3) adalah persamaan dengan tiga variabel yaitu x, y dan t, dengan variabel bebasnya adalah x, y, dan t, sedangkan variabel tak bebasnya adalah u. Dengan demikian dapat dikatakan bahwa persamaan (2.1) adalah persamaan diferensial dengan variabel bebas x dan t, sedangkan variabel terikatnya adalah u.

Selain definisi di atas persamaan diferensial parsial dapat juga dikatakan sebagai persamaan yang memuat satu atau lebih turunan-turunan parsial. Dan persamaan diferensial merupakan laju perubahan terhadap dua atau lebih variabel bebas, yang biasanya disebut dengan waktu dan jarak (ruang) (Triatmojo, 2002).

2.2 Persamaan Diferensial Parsial Linier dan Nonlinier

Persamaan diferensial parsial dikelompokkan menjadi dua bagian yaitu persamaan diferensial parsial linier dan nonlinier. Didefinisikan Persamaan diferensial parsial sebagai berikut:

$$\begin{gathered} A(x,y)u_{xx}(x,y) + 2B(x,y)u_{xy}(x,y) + C(x,y)u_{yy}(x,y) + \\ D(x,y)u_x(x,y) + E(x,y)u_y(x,y) + F(x,y)u(x,y) = G(x,y) \end{gathered} \tag{2.4}$$

Linieritas persamaan (2.4) ditentukan oleh fungsional dari koefisien $A(x,y)$, $B(x,y)$, $C(x,y)$, $D(x,y)$, $E(x,y)$, $F(x,y)$, dan $G(x,y)$. Jika koefisien tersebut konstanta atau hanya tergantung pada variabel bebas $[F(x,y)=0]$, maka PDP tersebut adalah linier. Jika koefisien-koefisien tersebut merupakan fungsi dari turunan pertama dan kedua $\left[F\left(x,y,u,u_x,u_y,u_{xx},u_{yy},u_{xy}\right)=0\right]$, maka PDP tersebut adalah nonlinier (Zauderer, 2006). Untuk lebih jelasnya diberikan beberapa PDP berikut:

1. $\frac{\partial u}{\partial t}=\alpha^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (PDP Linier)
2. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+u=cos\ x$ (PDP Linier)
3. $\frac{\partial u}{\partial x}u+\frac{\partial u}{\partial y}y+u^2=1$ (PDP Nonlinier)
4. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+u^2|u|=0$ (PDP Nonlinier)
5. $\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+|u|^n u=0$ (PDP Nonlinier)

2.3 Orde Persamaan Diferensial Parsial

Ordo/orde suatu persamaan diferensial adalah pangkat turunan tertinggi yang muncul dalam persamaan diferensial (Stewart, 2003). Sedangkan tingkat derivatif parsial tertinggi merupakan tingkat dari persamaan differensial parsial tersebut dan pangkat tertinggi dari orde tertinggi merupakan derajat dari persamaan differensial tersebut (Soeharjo,1996).

Persamaan diferensial parsial dengan dua variabel bebas dikatakan berorde satu jika turunan tertinggi dari variabel terikatnya adalah satu. Adapun bentuk umum persamaan diferensial parsial linier berorde satu adalah

$$a(x,t)\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} + b(x,t)\,\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = c(x,t)v(x,t) + d(x,t) \tag{2.5}$$

dimana $a, b, c,$ dan d adalah fungsi dan di setiap titik (x,t) merupakan vektor $[a(x,t), b(x,t)]$ yang terdefinisi dan tidak nol. Persamaan (2.5) dapat ditulis dalam bentuk $F\big(x, t, v(x,t), v_x(x,t), v_t(x,t)\big) = 0$, dimana $v_x(x,t) = \frac{\partial v(x,t)}{\partial x}$ dan $v_t(x,t) = \frac{\partial v(x,t)}{\partial t}$ (Zauderer, 2006).

Dengan demikian dapat dipaparkan bahwa persamaan diferensial parsial dengan dua variabel bebas dikatakan berorde dua, tiga, empat hingga berorde *n* jika turunan tertinggi dari variabel terikatnya adalah dua, tiga, empat atau *n*. Bentuk umum persamaan diferensial parsial linier berorde dua, tiga, empat dan *n* berturut-turut sebagai berikut:

a. Persamaan diferensial parsial linier orde dua

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu + d = 0$$

b. Persamaan diferensial parsial linier orde tiga

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ijk}\frac{\partial^3 u}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + du + e = 0$$

c. Persamaan diferensial parsial linier orde empat

$$\sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\sum_{i_3=1}^{n}\sum_{i_4=1}^{n} a_{i_1 i_2 i_3 i_4}\frac{\partial^4 u}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\partial x_{i_3}\partial x_{i_4}} + \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\sum_{i_3=1}^{n} b_{i_1 i_2 i_3}\frac{\partial^3 u}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\partial x_{i_3}}$$

$$+ \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n} c_{i_1 i_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}} + \sum_{i=1}^{n} d_{i_1}\frac{\partial u}{\partial x_{i_1}} + eu + f = 0$$

d. Persamaan diferensial parsial linier orde n

$$\sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\cdots\sum_{i_m=1}^{n}\sum_{i_4}^{n} a_{i_1,i_2,i_3,\dots,i_m}\frac{\partial^m u}{\partial x_{i_1}\dots\partial x_{i_m}}+\cdots+0$$

(Zauderer, 2006)

Dari pemaparan sebelumnya didapatkan bahwa persamaan Schrodinger (2.1) termasuk kategori persamaan diferensial parsial orde dua (Sudirham dan Utari, 2010), sedangkan menurut Polyanin persamaan Schrodinger adalah persamaan diferensial parsial nonlinier orde dua (Polyanin dan Zaitsev, 2004).

2.4 Solusi Analitik Persamaan Diferensial Parsial

Solusi dari persamaan diferensial adalah suatu fungsi tanpa turunan-turunan yang memenuhi persamaan diferensial tersebut (Soehardjo, 1996). Dalam menyelesaikan persamaan diferensial parsial dikenal istilah solusi umum dan solusi khusus. Solusi umum adalah suatu solusi yang terdiri dari sejumlah fungsi bebas sembarang yang jumlahnya sesuai dengan orde persamaannya. Sedangkan solusi khusus adalah solusi yang bisa didapatkan dari solusi umumnya dengan pilihan khusus dari fungsi sebarang (Spiegel, 1983).

Untuk mendapatkan solusi analitik dari persamaan diferensial parsial, maka harus ditentukan terlebih dahulu masalah nilai awal dengan metode *d'Alembret's Solution* dan dalam menentukan solusi masalah nilai batas dengan metode pemisahan variabel. Masalah nilai batas (MNB) melibatkan suatu persamaan diferensial parsial dan semua solusi yang memenuhi syarat, selanjutnya disebut syarat batas (Spiegel, 1983). Misal persamaan diferensial linier orde dua

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x) \tag{2.6}$$

dimana koefisien-koefisien $a_2(x), a_1(x), a_0(x)$ dan fungsi $g(x)$ merupakan fungsi-fungsi kontinu pada selang $a \leq x \leq b$ dengan konstanta $a_2(x) \neq 0$. Menentukan solusi $y(x)$ dari persamaan diferensial (2.6) pada sebuah titik $x = x_0$ pada selang $a \leq x \leq b$ dan memenuhi dua syarat awal yang diberikan, yaitu:

$$y(x_0) = y_0 \text{ dan } y'(x_0) = y_1 \tag{2.7}$$

merupakan suatu *masalah nilai awal* (MNA). Dalam MNA variabel bebas x dari persamaan diferensial dan pada umumnya menyatakan waktu, x_0 menyatakan waktu awal sedangkan y_0 dan y_1 menyatakan syarat awal. Jika variabel x merupakan variabel yang menyatakan tempat (*space variable*), maka dalam mencari suatu solusi $y(x)$ dari persamaan diferensial yang memenuhi syarat pada titik akhir pada selang $a \leq x \leq b$ adalah

$$y(a) = A \text{ dan } y(b) = B \tag{2.8}$$

dengan A dan B adalah konstanta, dalam hal ini disebut *syarat batas*. Persamaan diferensial (2.6) bersama-sama dengan syarat batas (2.8), merupakan suatu *masalah nilai batas* (Finizio dan Ladas, 1982). Beberapa bentuk khusus syarat batas, yaitu:

Separated : $a_1 y(a) + a_2 y'(a) = c_1, b_1 y(b) + b_2 y'(b) = c_2$

Dirichlet : $y(a) = c_1,\ y(b) = c_2$

Neumann : $y'(a) = c_1,\ y'(b) = c_2$

Periodik : $y(-T) = y(T),\ y'(-T) = y'(T), y(0) = y(2T), y'(0) = y'(2T)$

dimana periodenya adalah $2T$ (Nagle dan Saff, 1996).

2.5 Persamaan Schrodinger

Persamaan Schrodinger diajukan pada tahun 1925 oleh ahli fisika yaitu Erwin Schrodinger (1887-1961). Persamaan ini pada awalnya merupakan jawaban dari dualitas partikel gelombang yang lahir dari gagasan de Broglie yang menggunakan persamaan kuantisasi cahaya Planck dan prinsip fotolistrik Einstein dalam menentukan kuantisasi pada orbit elektron. Selain Erwin Schrodinger ada dua orang fisikawan lainnya yang mengajukan teorinya yaitu Werner Heisenberg dengan mekanika matriks dan Paul Dirac dengan aljabar kuantum. Ketiga teori ini merupakan teori kuantum lengkap yang berbeda dan dikerjakan secara terpisah namun ketiganya setara. Teori Erwin Schrodinger kemudian lebih sering digunakan dengan alasan rumusan matematisnya yang relatif sederhana dan lebih aplikatif. Meskipun sebelumnya persamaan Schrodinger banyak mendapat kritikan akan tetapi sekarang telah diterima secara luas sebagai persamaan yang menjadi postulat dasar mekanika kuantum (Sudirham dan Utari, 2010).

2.5.1 Fungsi Hamilton

Jika gelombang dapat mewakili suatu elektron maka energi gelombang dan energi elektron yang diwakili harus sama. Sebagai partikel, elektron mempunyai energi total yang terdiri dari energi potensial dan energi kinetik. Energi potensial merupakan fungsi posisi x (dengan referensi koordinat tertentu) dan disebut $\left(E_p(x)\right)$, sedangkan untuk energi kinetik adalah $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ dengan m adalah massa elektron dan v adalah kecepatan elektron. Dengan demikian energi total bagi elektron adalah $E = E_p + E_k$ dan secara matematik dapat dijabarkan sebagai berikut (Sudirham dan Utari, 2010):

$$E = \frac{mv^2}{2} + E_p(x)$$

Jika didefinisikan $p = mv$ maka persamaan di atas menjadi

$$E = \frac{p^2}{2m} + E_p(x) \tag{2.9}$$

Dengan memandang persamaan (2.9) sebagai persamaan matematis maka dapat ditulis sebagai berikut:

$$E \equiv H(p,x) = \frac{p^2}{2m} + E_p(x) \tag{2.10}$$

$H(p,x)$ adalah fungsi Hamilton, dengan p dan x adalah variabel-variabel bebas. Jika persamaan (2.10) diturunkan parsial terhadap p dan x, maka didapatkan

$$\frac{\partial H(p,x)}{\partial p} = \frac{p}{m}$$

dan

$$\frac{\partial H(p,x)}{\partial x} = \frac{\partial E_p(x)}{\partial x}$$

dan jika memandang persamaan (2.10) sebagai persamaan besaran fisika dengan p dan x menjelaskan momentum dan posisi, maka diperoleh

$$\frac{\partial H(p,x)}{\partial p} = \frac{p}{m} = \frac{dx}{dt}$$

dan

$$-\frac{\partial H(p,x)}{\partial x} = -\frac{\partial E_p(x)}{\partial x} = F(x) = m\frac{dv}{dt} = \frac{dp}{dt}$$

dengan demikian turunan $H(p,x)$ terhadap p memberikan turunan x terhadap t dan turunan $H(p,x)$ terhadap x memberikan turunan p terhadap t, dan diketahui bahwa p adalah momentum suatu besaran fisis dan bukan variabel bebas seperti dalam fungsi Hamilton. Sehingga didapatkan hubungan fisik bahwa, $\frac{dx}{dt} = v$ adalah kecepatan dan $\frac{dp}{dt} = F$ adalah gaya. Oleh karena itu, fungsi Hamilton memberikan hubungan antara variabel bebas p dan x untuk memperoleh E dan dapat digunakan untuk menggantikan hubungan-hubungan fisik momentum, kecepatan dan gaya, yaitu:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{p}{m}$$

dan

$$F = m\frac{dx}{dt} = \frac{dp}{dt}$$

2.5.2 Fungsi Hamilton dalam Mekanika Kuantum

Dalam mekanika kuantum, elektron dinyatakan sebagai gelombang dan jika fungsi Hamilton dapat diterapkan pada elektron sebagai partikel, maka harus dapat diterapkan pula untuk elektron sebagai gelombang. Hal ini akan dilihat sebagai berikut (Sudirham dan Utari, 2010):

1. Variabel p pada fungsi Hamilton, harus diganti dengan operator momentum jika dioperasikan terhadap fungsi gelombang sehingga dapat menyatakan momentum elektron yang tidak dipandang sebagai partikel melainkan sebagai gelombang.

2. E pada fungsi Hamilton, harus diganti dengan operator energi yang jika beroperasi pada fungsi gelombang elektron akan memberikan energi
3. Variabel x yang akan menentukan posisi elektron sebagai partikel, akan terkait dengan posisi elektron sebagai gelombang sehingga variabel ini tidak berubah pada fungsi gelombang dari elektron. Dalam kaitan ini perlu diingat bahwa jika elektron dipandang sebagai partikel maka momentum dan posisi mempunyai nilai-nilai yang akurat dan jika elektron dipandang sebagai gelombang maka dibatasi oleh prinsip ketidakpastian Heisenberg.

Selanjutnya dalam menentukan persamaan Schrodinger diperlukan operator-operator, yaitu: operator momentum dan operator energi. Dalam menelusuri operator-operator yang diperlukan maka fungsi gelombang komposit, yaitu:

$$u = \left(\sum_n e^{j[(\Delta\omega_n)t-(\Delta k_n)x]} \right) A_0 e^{j(\omega_0 t - k_0 x)}$$

Jika fungsi di atas diturunkan terhadap t maka diperoleh

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left[\sum_n j\Delta\omega_n e^{j[(\Delta\omega_n)t-(\Delta k_n)x]} \right] A_0 e^{j(\omega_0 t - k_0 x)} + \left[\sum_n e^{j[(\Delta\omega_n)t-(\Delta k_n)x]} \right] j\omega_0 A_0 e^{j(\omega_0 t - k_0 x)}$$

dan persamaan di atas dapat disederhanakan menjadi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = j\omega_0 \left[\frac{\Delta\omega_n}{\omega_0} \sum_n e^{j[(\Delta\omega_n)t-(\Delta k_n)x]} \right] A_0 e^{j(\omega_0 t - k_0 x)} \tag{2.11}$$

Jika Δk sangat kecil maka mengakibatkan $\frac{\omega_n}{\omega_0} \approx 1$, dan jika ruas kiri dan kanan dari persamaan (2.11) dikalikan dengan h maka didapatkan energi $E = h\omega$, yaitu:

$$h\frac{\partial}{\partial t}u = j(h\omega_0)u = jEu$$

atau

$$-jh\frac{\partial}{\partial t}u = Eu \tag{2.12}$$

E adalah energi total elektron. Akan tetapi jika memandang persamaan (2.12) sebagai suatu persamaan matematik maka dapat dinyatakan bahwa E sebuah operator yang beroperasi pada fungsi gelombang u, sehingga

$$E \equiv -jh\frac{\partial}{\partial t} \tag{2.13}$$

Selanjutnya jika u diturunkan terhadap x maka

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left[\sum_n (-j\Delta k_n)e^{j[(\Delta\omega_n)t-(\Delta k_n)x]}\right] A_0 e^{j(\omega_0 t - k_0 x)}$$
$$+\left[\sum_n e^{j[(\Delta\omega_n)t-(\Delta k_n)x]}\right](-jk_0)A_0 e^{j(\omega_0 t - k_0 x)}$$

dan Persamaan di atas dapat disederhanakan menjadi

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -jk_0\left[\frac{k_n}{k_0}\sum_n e^{j[(\Delta\omega_n)t-(\Delta k_n)x]}\right] A_0 e^{j(\omega_0 t - k_0 x)} \tag{2.14}$$

untuk $\frac{k_n}{k_0} \approx 1$ dan jika ruas kiri dan kanan dikalikan dengan h maka didapatkan

$$h\frac{\partial}{\partial x}u = -j(hk_0)u = -jpu \qquad \text{atau}$$

$$jh\frac{\partial}{\partial x}u = pu \tag{2.15}$$

Analog dengan kasus E pada persamaan (2.13), maka p pada (2.15) juga dipandang sebagai operator, yaitu:

$$p \equiv jh \frac{\partial}{\partial x} \tag{2.16}$$

Dengan demikian didapatkan operator untuk E pada persamaan (2.13) dan p pada (2.16). Jika fungsi gelombang disebut dengan Ψ dan mengoperasikan $H(p, x)$ pada fungsi gelombang, maka didapatkan

$$\left(\frac{p^2}{2m} + E_p(x)\right)\Psi = E\Psi \tag{2.17}$$

Substitusi operator p pada persamaan (2.17) maka didapatkan persamaan sebagai berikut:

$$\left(\frac{1}{2m}\left(jh\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(jh\frac{\partial}{\partial x}\right) + E_p(x)\right)\Psi = E\Psi$$

atau

$$-\frac{h^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + E_p(x)\Psi = E\Psi \tag{2.18}$$

dan persamaan (2.18) adalah persamaan Schrodinger satu dimensi.

2.5.3 Persamaan Schrodinger Linier dan Nonlinier

Dengan meninjau persamaan (2.18) bahwa didapatkan persamaan Schrodinger termasuk persamaan diferensial linier karena tidak terdapat koefisien atau fungsi yang menyebabkan persamaan Schrodinger menjadi persamaan diferensial nonlinier. Karena linieritas suatu persamaan diferensial didasarkan pada fungsionalitas koefisien dari persamaan diferensial tersebut. Dengan demikian persamaan Schrodinger nonlinier adalah modifikasi dari persamaan

Schrodinger linier karena hanya berbeda pada operator fungsionalitas koefisien dari persamaan Schrodinger tersebut.

Persamaan Schrodinger banyak kegunaannya dan karena penerapannya mencapai ketelitian sangat tinggi dan akurat. Penggunaan persamaan Schrodinger pada sistem fisis memungkinkan untuk memberikan ketelitian yang sangat tinggi dan berdasarkan penelitian terbaru bahwa persamaan Schrodinger nonlinier mempunyai peluang hingga tingkatan nano. Sehingga penerapan ini menghasilkan ramalan-ramalan baru misalnya, penemuan positron yang merupakan anti materi dari elektron. Selanjutnya persamaan Schrodinger menjadi landasan berkembangnya keilmuan di bidang mekanika kuantum dan dewasa ini persamaan Schrodinger telah diterapkan di berbagai bidang fisika yaitu fisika matematika, optik tidak linier, sistem kuantum partikel banyak, fisika plasma dan superkonduktivitas. Dan pada penelitian ini dikhususkan untuk mempelajari solusi analitik persamaan Schrodinger nonlinear menggunakan generalisasi fungsi Airy, adapun bentuk umum persamaan Schrodinger nonlinier adalah (Polyanin dan Zaitsev, 2004):

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + A|u(x,t)|^n u(x,t) = 0$$

dimana:

$u(x,t)$: fungsi bernilai kompleks

t : waktu

A : bilangan bernilai riil

$|u|^2$: $u\bar{u}$

$\bar{u}$: konjugat fungsi $u(x,t)$

2.5.4 Aplikasi Persamaan Schrodinger

1. Analisis Elektron Bebas

Elektron bebas adalah elektron yang tidak mendapatkan pengaruh dari luar sehingga energi potensialnya nol, dengan demikian nilai $V(x) = 0$, sehingga persamaan Schrodinger menjadi (Sudirham dan Utari, 2010):

$$\frac{h^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2} + E\psi(x) = 0$$

Karena berupa persamaan diferensial maka diduga solusi persamaan di atas berbentuk $\psi(x) = Ae^{sx}$. Kemudian solusi dugaan ini disubstitusikan pada persamaan maka didapatkan persamaan karakteristik yang memberikan nilai dan fungsi gelombang yaitu bilangan gelombang k, yaitu $k = \sqrt{\alpha} = \sqrt{\frac{2mE}{h^2}} = \pm j\sqrt{a}$, dengan $\alpha = \frac{2mE}{h^2}$ maka fungsi gelombangnya adalah $\psi(x) = A_1e^{j\sqrt{\alpha}x} + A_2e^{-j\sqrt{\alpha}x}$, karena $k = \sqrt{\alpha}$ maka solusi yang didapatkan $\psi(x) = A_1e^{jkx} + A_2e^{-jkx}$ dan solusi ini memberikan paparan bahwa terdapat gelombang maju dan gelombang mundur dan hal ini tentu tidak ditafsirkan bahwa tidak terdapat dua elektron, satu bergerak ke kiri dan satu ke kanan melainkan keberadaan elektron ditentukan oleh $\bar{\Psi}\Psi$ yang mempunyai nilai nyata.

2. Analisis Terjadinya Pantulan Elektron

Dalam percobaan Davisson dan Germen berkas elektron dengan energi tertentu ditembakkan pada permukaan kristal tunggal. Terjadinya pantulan mudah difahami jika kita bayangkan elektron sebagai partikel. Namun pantulan berkas elektron oleh permukaan kristal ternyata mencapai maksimum pada sudut tertentu dan hal ini diterangkan melalui gejala pantulan gelombang. Oleh karena itu pantulan elektron tidak hanya terjadi ketika membentur fisik akan tetapi juga akan terjadi jika elektron bertemu dengan suatu daerah yang mendapat pengaruh medan listrik. Elektron yang bergerak bebas di suatu daerah yang tidak mendapat pengaruh medan listrik hanya memiliki energi kinetik, elektron akan berubah arah atau terpantul jika bertemu daerah yang mendapat pengaruh medan listrik. Diasumsikan perbatasan kedua daerah itu elektron bertemu dinding potensial (Sudirham dan Utari, 2010).

3. Analisis Elektron Bertemu pada Dinding Potensial

Andaikan elektron bebas bergerak ke arah x positif dan di suatu titik $(x = 0)$ elektron memasuki daerah yang mendapat pengaruh medan potensial. Artinya mulai dari $x = 0$ ke arah positif energi potensialnya tidak lagi nol. Misalkan, elektron bertemu dinding potensial di $x = 0$. Keadaan ini diasumsikan pada satu dimensi, walaupun sebenarnya elektron bergerak ke kanan akan tetapi penggunaan persamaannya tetap menggunakan Schrodinger yang bebas waktu untuk menentukan kemungkinan keberadaan elektron, andaikan terdapat dua daerah yaitu daerah I dan II. Energi potensial $E_p(x)$ untuk $x < 0$ (daerah I) bernilai nol. Sehingga solusi persamaan Schrodinger untuk $x < 0$ adalah solusi untuk elektron bebas yaitu $\psi_1(x) = A_1 e^{-jk_1 x} + A_2 e^{jk_1 x}, k_1 = \sqrt{\frac{2mE}{h^2}}$ dan untuk $x > 0$ (daerah II), solusi yang akan diperoleh mirip dengan di atas akan tetapi hanya berbeda pada nilai k, yaitu:

$$\psi_2(x) = B_1 e^{-jk_2 x} + B_2 e^{jk_2 x}, k_2 = \sqrt{\frac{2m}{h^2}(E - V)} \tag{2.19}$$

Meskipun hanya menyelesaikan persamaan yang bebas waktu akan tetapi tetap memperhatikan hal yang berkaitan dengan waktu karena dalam melihat persamaan (2.19). Sesuai logika, jika elektron berasal dari daerah I maka akan sampai pada daerah II maka elektron harus gerak ke kanan terus dan fungsi gelombang pada daerah II haruslah gelombang maju bukan gelombang mundur (Sudirham dan Utari, 2010).

Dengan demikian memberikan nilai B_1 pada persamaan di atas haruslah nol. Perbandingan amplitudo A_2dan B_2 terhadap amplitudo gelombang maju di daerah I yaitu A_1 akan memberikan gambaran keadaan elektron. Dengan menerapkan syarat kekontinuan gelombnag di $x = 0$, yaitu $\psi_1(0) = \psi_2(0)$ dan $\frac{d\psi_1(0)}{dx} = \frac{d\psi_2(0)}{dx}$ sehingga diperoleh

$$\frac{B_2}{A_1} = \frac{2k_1}{k_1 - k_2} A_1, \qquad \frac{A_2}{A_1} = \frac{k_1 + k_2}{k_1 - k_2} \tag{2.20}$$

Jika $E > V$ maka nilai k_2 adalah nyata seperti halnya k_1 akan tetapi $k_2 < k_1$. Oleh karena itu $0 < \frac{B_2}{A_1} < 1$ dan $0 < \frac{A_2}{A_1} < 1$. Amplitudo gelombang maju di daerah II lebih kecil dari amplitudo maju di daerah I sedangkan amplitudo gelombang mundur di daerah I juga lebih kecil dari gelombang maju di daerah I, sehingga jumlah amplitudo gelombang maju dan gelombang mundur di daerah I sama dengan amplitudo gelombang maju di daerah II. Keadaan ini ditafsirkan bahwa pada saat elektron bertemu dengan dinding potensial ada kemungkinan elektron dipantulkan.

2.6 Deret Taylor dan MacLaurin

Misalkan $f(x)$ adalah fungsi yang analitik pada titik $x = a$ maka $f(x)$ dapat diinterpretasikan menjadi bentuk deret yaitu (Spiegel, 1964):

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots \quad (2.21)$$

jika didefinisikan $x = a + h$ maka $h = x - a$, sehingga persamaan (2.21) menjadi

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h^2\frac{f''(a)}{2!} + h^3\frac{f'''(a)}{3!} + \cdots \quad (2.22)$$

dan selanjutnya persamaan (2.22) disebut deret Taylor (*Taylor Series*). Jika mengambil $a = 0$ maka didapatkan deret dari persamaan (2.22) adalah

$$f(x) = f(0) + f'(0)(x) + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots \quad (2.23)$$

dan persamaan (2.23) disebut deret MacLaurin (*MacLaurin Series*).

Selanjutnya diberikan fungsi $f(x) = \sin x$ dan berdasarkan persamaan (2.21) maka fungsi $f(x) = \sin x$ dapat dinyatakan dalam bentuk deret di sekitar titik $x = \pi$, yaitu (Purcell, 1999):

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sin x &\rightarrow\ & f(\pi) = 0 \\
f'(x) &= \cos x &\rightarrow\ & f'(\pi) = -1 \\
f''(x) &= -\sin x &\rightarrow\ & f''(\pi) = 0 \\
f'''(x) &= -\cos x &\rightarrow\ & f'''(\pi) = 1 \\
f^{iv}(x) &= \sin x &\rightarrow\ & f^{iv}(\pi) = 0
\end{aligned} \quad (2.24)$$

sehingga deret Taylor dari $f(x) = \sin x$ disekitar $x = \pi$ adalah

$$f(x) = -(x-\pi) + \frac{1}{6}(x-\pi)^3 + \cdots$$

dan deret MacLaurin dari fungsi $f(x) = \sin x$ adalah

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sin x \quad \rightarrow f(0) = 0 \\
f'(x) &= \cos x \quad \rightarrow f'(0) = 1 \\
f''(x) &= -\sin x \rightarrow f''(0) = 0 \\
f'''(x) &= -\cos x \rightarrow f'''(0) = -1 \\
f^{iv}(x) &= \sin x \quad \rightarrow f^{iv}(0) = 0
\end{aligned}
\tag{2.25}
$$

dari hasil (2.25) maka didapatkan deret MacLaurin adalah

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{iv}(0)}{4!}x^4 + \cdots \\
&= x - \frac{1}{6}x^3 + \cdots
\end{aligned}
$$

Beberapa deret MacLaurin yang penting adalah (Purcell dan Varberg, 1999):

$$
\begin{aligned}
&1.\ \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\
&2.\ e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\
&3.\ \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&4.\ \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}
\end{aligned}
\tag{2.26}
$$

Selanjutnya jika suatu deret berlaku pada bilangan riil maka diasumsikan berlaku juga pada bilangan kompleks, didefinisikan bilangan kompleks yaitu $z = x + iy$, x, y adalah bilangan riil dan $i = \sqrt{-1}$. Berdasarkan persamaan (2.26) maka akan berlaku juga untuk bilangan kompleks yaitu: $e^z = e^{x+iy} = e^x . e^{iy}$ sehingga didapatkan e^{iy} adalah (Soemantri, 1994):

$$e^{iy} = 1 + iy + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \frac{(iy)^5}{5!} + \cdots$$

$$= 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - \frac{iy^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \frac{iy^5}{5!} + \cdots$$

$$= 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + iy - \frac{iy^3}{3!} + \frac{iy^5}{5!} + \cdots$$

$$= 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!}\right) + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= cos\ y + i\ sin\ y \tag{2.27}$$

sehingga diperoleh

$$e^{iy} = cos\ y + i\ sin\ y \tag{2.28}$$

Analog dengan persamaan (2.28) maka diperolah

$$\begin{aligned} e^{-iy} &= cos\ (-y) + i\ sin\ (-y) \\ &= cos\ y - i\ sin\ y \end{aligned} \tag{2.29}$$

Selanjutnya jika persamaan (2.28) dan (2.29) dijumlahkan maka didapatkan

$$\begin{aligned} e^{iy} + e^{-iy} &= cos\ y + i\ sin\ y + cos\ y - isin\ y \\ cos\ \ y &= \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \end{aligned} \tag{2.30}$$

dan jika dikurangkan maka didapatkan

$$e^{iy} - e^{-iy} = \cos y + i \sin y - (\cos y - i \sin y)$$

$$\sin\ y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \tag{2.31}$$

2.7 Transformasi Fourier

2.7.1 Kekontinuan Fungsi

Misal diberikan fungsi $f_p(x)$ adalah fungsi kontinu dalam suatu interval $c \in [a, b]$ jika memenuhi kriteria berikut:

1. Fungsi $f_p(x)$ terdefinisi pada interval c, yaitu nilai $f_p(c)$ ada
2. Nilai $lim_{x \to c} f_p(x)$ ada
3. Nilai $lim_{x \to c} f_p(x) = f_p(c)$

Dengan demikian jika suatu fungsi tidak memenuhi syarat kekontinuan di atas maka fungsi tersebut dikatakan tidak kontinu atau diskontinu. Sebagai pemahaman diberikan contoh sebagai berikut:

$f_p(x) = x^2$, pada $x = 2$

Dalam menentukan fungsi ini kontinu atau diskontinu maka perlu dilakukan pengecekan dengan syarat di atas dengan langkah berikut:

1. $f_p(x) = x^2$

   $f_p(2) = 2^2 = 4$
2. Nilai $lim_{x \to c} x^2 = lim_{x \to 2} x^2 = 4$
3. Karena nilai $f_p(x) = lim_{x \to c} x^2 = 4$

Sehingga disimpulkan bahwa fungsi $f_p(x) = x^2$ kontinu pada titik $x = 2$.

Selanjutnya suatu fungsi $f_p(x)$ dikatakan kontinu secara mulus pada interval $c \in [a, b]$ jika memenuhi kriteria berikut:

1. Fungsi $f_p(x)$ memenuhi kriteria fungsi kontinu
2. $f_p'(x)$ memenuhi kriteria fungsi kontinu

Dengan demikian suatu fungsi $f_p(x)$ dikatakan kontinu secara mulus pada suatu interval tertentu jika fungsi $f_p(x)$ dan turunannya $f_p'(x)$ kontinu pada interval tersebut.

2.7.2 Periode Fungsi

Secara definitif periode adalah waktu yang dibutuhkan untuk melakukan getaran satu kali. Dan yang dimaksud periode fungsi adalah misalkan diberikan suatu fungsi $f(x)$ dan fungsi ini dikatakan periodik dengan $T > 0$, jika memenuhi kriteria berikut: $f(x \pm T) = f(x), \forall\, x \in$ bilangan real. Dengan penjelasan sebagai berikut:

1. Jika T adalah suatu periode yang kecil maka T disebut dengan periode dasar dan interval $a \leq x \leq a + T$ dimana a adalah konstanta sebarang maka interval disebut dengan interval dasar fungsi perodik $f(x)$.
2. Konstanta a dapat dipilih sebarang dan dapat berharga nol atau negatif. Misalnya, $a = -\frac{T}{2}$ maka didapatkan interval dari periodik fungsi $f(x)$ adalah $-\frac{T}{2} \leq x \leq \frac{T}{2}$. Interval ini biasanya digunakan dengan alasan kesimetrian dari interval periodik fungsi.

Sebagai ilustrasi diberikan contoh fungsi sederhana, yaitu fungsi $sin\, x$ dan $cos\, x$. Karena kedua fungsi trigonometri ini mempunya periode sebagai berikut: $sin\,(x \pm 2\pi) = sin\, x$ dan $cos\,(x \pm 2\pi) = cos\, x$. Dengan demikian memaparkan bahwa kedua fungsi trigonometri tersebut mempunyai $T = 2\pi$. Dalam hal ini x adalah variabel sudut dengan satuan derajad atau radian. Seandainya x bukan dalam variabel sudut maka x harus dijadikan sudut, misalnya dikalikan dengan faktor alih p sehingga $px = \alpha$ berdimensi sudut. Oleh karena itu pernyataan fungsi $sin\, x$ dan $cos\, x$ menjadi $sin\, x = sin\, px$ dan $cos\, x = cos\, px$ dan kasus ini menyatakan bahwa sudut $\alpha = px$ sebesar satu periode $T = 2\pi$, dan ini dapat ditraslasi menjadi variabel x sejauh $\pm T$, yaitu: $px \pm 2\pi = p(x \pm T)$. Sehingga didapatkan hubungan $p = \frac{2\pi}{T}$, dengan ini dapat dinyatakan bahwa sifat periodik fungsi $sin\, px$ dan $cos\, px$ adalah $sin\, px = sin\, p(x \pm T)$ dan $cos\, px = cos\, p(x \pm T)$ dengan demikian fungsi $sin\, px$ dan $cos\, px$ menunjukkan fungsi berperiode T (Nakhae, 2000).

2.7.3 Deret Fourier

Deret Fourier adalah suatu deret fungsi-fungsi trigonometri. Misalkan didefinisikan fungsi $f(x)$ pada selang $[a, a + 2L]$, maka deret Fourier dari $f(x)$ adalah

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\, cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\, sin\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad (2.32)$$

dengan koefisien Fourier adalah

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_a^{a+2L} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_a^{a+2L} f(x)cos\frac{n\pi x}{L}\ dx$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_a^{a+2L} f(x)sin\frac{n\pi x}{L}\ dx$$

untuk setiap $n = 1,2,3, \ldots, n$ (Soehardjo, 1996). Sebagai ilustrasi diberikan fungsi $f(x) = x$ pada interval $[0,2\pi]$ maka fungsi $f(x) = x$ dapat diinterpretasikan menjadi deret Fourier dengan langkah sebagai berikut:

$[a, a + 2L] = [0,2\pi]$

$a + 2L = 2\pi$ maka didapatkan $L = \pi$

Sehingga didapatkan koefisien-koefisien Fouriernya adalah

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_a^{a+2L} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{2\pi} = 2\pi$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_a^{a+2L} f(x)cos\frac{n\pi x}{L}\ dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\ cos\frac{n\pi x}{L}\ dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_a^{a+2L} f(x)sin\frac{n\pi x}{L}\ dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\ sin\frac{n\pi x}{L}\ dx = -\frac{2}{n}$$

Subsitusi hasil di atas pada persamaan (2.32) maka didapatkan deret Fourier dari $f(x) = x$ pada interval $[0,2\pi]$, adalah

$$\pi - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sin\ (nx)}{n}$$

2.7.4 Deret Fourier Ganda

Deret Fourier ganda dari fungsi $f(x,y)$ pada interval $-k < x < k$ dan $-l < y < l$, adalah:

$$\frac{a_{00}}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_{0n}\, cos\left(\frac{n\pi y}{l}\right) + b_{0n}\, sin\left(\frac{n\pi y}{l}\right)\right]$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\left[a_{m0}\, cos\left(\frac{m\pi x}{k}\right) + b_{m0}\, sin\left(\frac{m\pi x}{k}\right)\right]$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\begin{bmatrix} a_{mn}\cos\left(\frac{m\pi x}{k}\right)\cos\left(\frac{n\pi y}{l}\right) + b_{mn}\cos\left(\frac{m\pi x}{k}\right) sin\left(\frac{n\pi y}{l}\right) \\ +c_{mn} sin\left(\frac{m\pi x}{k}\right) cos\left(\frac{n\pi y}{l}\right) + d_{mn} sin\left(\frac{m\pi x}{k}\right) sin\left(\frac{n\pi y}{l}\right) \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

dengan koefisien-koefisien Fourirnya adalah

$$a_{mn} = \frac{1}{kl}\int_{-l}^{l}\int_{-k}^{k} f(x,y)\, cos\left(\frac{m\pi x}{k}\right) cos\left(\frac{n\pi y}{l}\right) dxdy$$

$$b_{mn} = \frac{1}{kl}\int_{-l}^{l}\int_{-k}^{k} f(x,y)\, cos\left(\frac{m\pi x}{k}\right) sin\left(\frac{n\pi y}{l}\right) dxdy$$

$$c_{mn} = \frac{1}{kl}\int_{-l}^{l}\int_{-k}^{k} f(x,y)\, sin\left(\frac{m\pi x}{k}\right) cos\left(\frac{n\pi y}{l}\right) dxdy$$

$$d_{mn} = \frac{1}{kl}\int_{-l}^{l}\int_{-k}^{k} f(x,y)\, sin\left(\frac{m\pi x}{k}\right) sin\left(\frac{n\pi y}{l}\right) dxdy$$

(Soehardjo, 1996)

Diberikan suatui fungsi $f(x,y) = xe^{y}$ pada interval $-2 < x < 2$ dan $-1 < y < 1$ maka tentukan deret Fourier ganda dari fungsi tersebut dengan langkah sebagai berikut:

$$a_{mn} = \frac{1}{2.1} \int_{-1}^{1} \int_{-2}^{2} xe^{y} \cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{1}\right) dxdy$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-2}^{2} x \cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right) dx \int_{-1}^{1} e^{y} \cos\left(\frac{n\pi y}{1}\right) dy$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot \int_{-1}^{1} e^{y} \cos\left(\frac{n\pi y}{1}\right) dy = 0$$

$$a_{00} = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \int_{-2}^{2} xe^{y} dxdy = \frac{1}{2} \int_{-2}^{2} x\, dx \int_{-1}^{1} e^{y}\, dy$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot \int_{-1}^{1} e^{y}\, dy = 0$$

$$a_{0n} = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \int_{-2}^{2} xe^{y} \cos\left(\frac{n\pi y}{1}\right) dxdy$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-2}^{2} x\, dx \int_{-1}^{1} e^{y} \cos(n\pi y)\, dy$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot \int_{-1}^{1} e^{y} \cos(n\pi y)\, dy = 0$$

$$a_{m0} = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \int_{-2}^{2} xe^{y} \cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right) dxdy$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-2}^{2} x \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx \int_{-1}^{1} e^{y} dy$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot \int_{-1}^{1} e^{y} \cos(n\pi y)\, dy = 0$$

$$b_{mn} = \frac{1}{2.1}\int_{-1}^{1}\int_{-2}^{2} xe^{y}\, cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right) sin\left(\frac{n\pi y}{1}\right) dxdy$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{y}\sin(n\pi y)\, dy \int_{-2}^{2} x\, cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{y}\sin(n\pi y)\, dy \cdot 0 = 0$$

$$b_{0n} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\int_{-2}^{2} xe^{y}\, sin\left(\frac{m\pi x}{1}\right) dxdy$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} x\, dx \int_{-1}^{1} e^{y}\, sin(n\pi y)\, dy$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 0 \cdot \int_{-1}^{1} e^{y}\, sin(n\pi y)\, dy = 0$$

$$b_{m0} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\int_{-2}^{2} xe^{y}\, sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dxdy$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} x\, sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\, dx \int_{-1}^{1} e^{y} dy$$

$$= \frac{1}{2}\left[x\, cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right) \cdot -\frac{2}{m\pi} - sin\left(\frac{m\pi x}{2}\right) \cdot \frac{2}{m\pi} \cdot -\frac{2}{m\pi}\right]_{-2}^{2} \cdot \int_{-1}^{1} e^{y} dy$$

$$= \frac{1}{2} \cdot -\frac{2}{m\pi}\left[x\, cos\left(\frac{m\pi x}{2}\right) - \frac{2}{m\pi} sin\left(\frac{m\pi x}{2}\right)\right]_{-2}^{2} \cdot [e^{y}]_{-1}^{1}$$

$$= -\frac{1}{m\pi}[4\, cos\,(m\pi)] \cdot (e - e^{-1})$$

$$= -\frac{4(e - e^{-1})}{m\pi}(-1)^{m}$$

$$c_{mn} = \frac{1}{2.1}\int_{-1}^{1}\int_{-2}^{2} xe^{y}\, sin\left(\frac{m\pi x}{2}\right) cos\left(\frac{n\pi y}{1}\right) dxdy$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} x\, sin\left(\frac{m\pi x}{2}\right) dx \int_{-1}^{1} e^{y}\, cos\left(\frac{n\pi y}{1}\right) dy$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{4}{m\pi}\right]\cdot\left[\frac{e^{y}}{1+(n\pi)^2}\left(cos\,(n\pi y) + n\pi\, sin\,(n\pi y)\right)\right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{4}{m\pi}\right]\cdot(-1)^{m}\cdot\left[\frac{e-e^{-1}}{1+(n\pi)^2}\right]\cdot(-1)^{n}$$

$$= -\frac{4(e-e^{-1})}{m\pi(1+(n\pi)^2)}(-1)^{m+n}$$

$$d_{mn} = \frac{1}{2.1}\int_{-1}^{1}\int_{-2}^{2} xe^{y}\, sin\left(\frac{m\pi x}{2}\right) sin\left(\frac{n\pi y}{1}\right) dxdy$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} x\, sin\left(\frac{m\pi x}{2}\right) dx \int_{-1}^{1} e^{y}\, sin\left(\frac{n\pi y}{1}\right) dy$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{4}{m\pi}\right]\cdot\left[\frac{e^{y}}{1+(n\pi)^2}\left(sin\,(n\pi y) - n\pi\, cos\,(n\pi y)\right)\right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{4}{m\pi}\right]\cdot(-1)^{m}\cdot\left[\frac{e+e^{-1}}{1+(n\pi)^2}\right]\cdot(-1)^{n} = -\frac{4n\pi(e-e^{-1})}{m\pi(1+(n\pi)^2)}(-1)^{m+n}$$

dengan demikian didapatkan deret Fourier ganda dari fungsi $f(x,y) = xe^{y}$ pada interval $-2 < x < 2$ dan $-1 < y < 1$ adalah

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{4(e-e^{-1})}{m\pi}(-1)^{m}\, sin\left(\frac{m\pi x}{2}\right) +$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\begin{array}{l}\frac{-4(e-e^{-1})}{m\pi(1+(n\pi)^2)}(-1)^{n}\ sin\left(\frac{m\pi x}{2}\right) cos(n\pi y) \\ +\frac{-4n\pi(e-e^{-1})}{m\pi(1+(n\pi)^2)}(-1)^{m+n}\, sin\left(\frac{m\pi x}{2}\right) sin(n\pi y)\end{array}\right]$$

2.7.5 Integral Fourier

Misalkan didefinisikan fungsi $f_p(x)$ suatu fungsi dengan periode $2p$ maka fungsi ini dapat diinterpretasikan ke dalam bentuk deret Fourier (Agarwal dan O'regan, 2009), yaitu:

$$f_p(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cos \omega_n x \ + \ b_n \sin \omega_n x) \tag{2.35}$$

dimana

$$\omega_n = \frac{n\pi}{p}$$

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f_p(t) \cos \omega_n t \, dt, \ \ n \geq 0$$

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f_p(t) \sin \omega_n t \, dt, \ \ n \geq 1$$

Dengan demikian didapatkan nilai dari $\frac{a_0}{2}$ adalah

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f_p(t) \ t \ dt \tag{2.36}$$

dan $a_n \cos \omega_n x$ adalah

$$a_n \cos \omega_n x = \cos \omega_n x \left(\frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f_p(t) \cos \omega_n t \, dt\right) \tag{2.37}$$

dan nilai $b_n \sin \omega_n x$ adalah

$$b_n \sin \omega_n x = \sin \omega_n x \left(\frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f_p(t) \sin \omega_n t \, dt\right) \tag{2.38}$$

Substitusi persamaan (2.36), (2.37) dan (2.38) ke persamaan (2.35), dengan $p \to \infty$ maka didapatkan

$$f_p(x) = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f_p(t)\, t\, dt$$
$$+\frac{1}{p}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\cos\omega_n x\int_{-p}^{p} f_p(t)\cos\omega_n t dt + \sin\omega_n x\int_{-p}^{p} f_p(t)\sin\omega_n t dt\right] \tag{2.39}$$

Kemudian didefinisikan $\Delta\omega$ sebagai perubahan frekuensi sudut, yaitu:

$$\Delta\omega = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{(n+1)\pi}{p} - \frac{n\pi}{p} = \frac{\pi}{p} \tag{2.40}$$

Maka diperoleh dari persamaan (2.40) adalah

$$\frac{1}{p} = \frac{\Delta\omega}{\pi} \tag{2.41}$$

Dengan menerapkan persamaan (2.41) pada persamaan (2.39) maka didapatkan

$$f_p(x) = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f_p(t)\, t\, dt +$$
$$\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[(\cos\omega_n x)\Delta\omega\int_{-p}^{p} f_p(t)\cos\omega_n t dt + (\sin\omega_n x)\Delta\omega\int_{-p}^{p} f_p(t)\sin\omega_n t dt\right. \tag{2.42}$$

Karena $p \to \infty$ maka $lim_{p\to\infty} f_p(x) = f(x)$ sehingga nilai dari $\frac{1}{p} \to 0$ dan mengakibatkan nilai dari $\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f_p(t)\, t\, dt \approx 0$, begitu juga nilai $\Delta\omega = \frac{\pi}{p} \to 0$. Suatu deret adalah jumlah dari suku demi suku dan dikarenakan suku menuju tak hingga maka didekati dengan limit sehingga berupa suatu luasan kurva dari persamaan. Berdasarkan definisi integral Reimann bahwa limit dari deret infinit ekuivalen dengan integral yang mempunyai batas bawah 0 dan batas atas ∞

(Purcell dan Varberg, 1999). Dengan demikian persamaan (2.42) yang semula berupa deret infinit menjadi definisi suatu integral (Agarwal dan O'regan, 2009),

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left[cos\ \omega x \int_{-\infty}^{\infty} f(t)cos\ \omega t\ dt + \ sin\ \omega x \int_{-\infty}^{\infty} f(t)sin\ \omega t\ dt\right]d\omega \qquad (2.43)$$

Jika didefinisikan

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)cos\ \omega t dt \qquad (2.44)$$

dan

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)sin\ \omega t dt \qquad (2.45)$$

Dengan substitusi $A(\omega)$ dan $B(\omega)$ dari persamaan (2.44) dan persamaan (2.45) ke persamaan (2.43) maka dapat dinyatakan

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} [A(\omega)cos\ \omega x + B(\omega)sin\ \omega x]d\omega \qquad (2.46)$$

Persamaan (2.46) disebut dengan integral Fourier.

2.7.6 Transformasi Fourier

Pandang persamaan (2.43), yaitu

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left[cos\ \omega x \int_{-\infty}^{\infty} f(t)cos\ \omega t\ dt + \ sin\ \omega x \int_{-\infty}^{\infty} f(t)sin\ \omega t\ dt\right]d\omega$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ [\cos \omega t \cos \omega x + sin\ \omega t\ sin\ \omega x]dt d\omega$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)cos\,(\omega x - \omega t)dt\right]d\omega \tag{2.47}$$

Persamaan (2.47) dapat dinyatakan dalam bentuk yang ekuivalen sebagai berikut:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)cos\,(\omega x - \omega t)dt\right]d\omega \tag{2.48}$$

Analog persamaan (2.48) maka dapat dibentuk persamaan baru yang valid yaitu

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)(i)sin\,(\omega x - \omega t)dt\right]d\omega = 0 \tag{2.49}$$

Karena fungsi $sin\,x$ adalah fungsi ganjil maka nilai dari persamaan (2.49) adalah nol, dikarenakan integral dari $-\infty$ sampai ∞ pada fungsi ganjil menghasilkan nilai nol maka persamaan (2.49) benar (Agarwal dan O'regan, 2009). Selanjutnya kombinasi dari persamaan (2.48) dan (2.49) menghasilkan

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)cos\,(\omega x - \omega t)dt\right]d\omega \\ &+ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,i\,sin\,(\omega x - \omega t)dt\right]d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\big(cos\,(\omega x - \omega t) + i\,sin\,(\omega x - \omega t)\big)dt\right]d\omega \end{aligned} \tag{2.50}$$

Berdasarkan rumus Euler (2.28) maka persamaan (2.50) menjadi

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i(\omega x - \omega t)}dtd\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega(x - t)}dtd\omega \end{aligned} \tag{2.51}$$

Persamaan (2.51) dapat diuraikan menjadi

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt\right]e^{i\omega x}d\omega \qquad (2.52)$$

Selanjutnya integral yang di dalam kurung dari persamaan (2.52) disimbolkan dengan $F(\omega)$ yang disebut dengan transformasi Fourier dari $f(x)$, yaitu:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}d\omega \qquad (2.53)$$

Jika variabel t diganti dengan x maka didapatkan berikut

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx \qquad (2.54)$$

Sebagai pemahaman tentang transformasi Fourier diberikan contoh berikut:

$$f(x) = \begin{cases} k, & 0 < x < a \\ 0, & dimana - mana \end{cases} \qquad (2.55)$$

dengan memandang persamaan (2.55) maka diperoleh transformasi Fourier

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{0}^{a} ke^{-i\omega x}dx = \frac{k}{-i\omega}e^{-i\omega x}|_0^a \\ &= \frac{k}{-i\omega}\left(e^{-i\omega a} - 1\right) \qquad (2.56) \\ &= \frac{k\left(1 - e^{-ia\omega}\right)}{i\omega} \end{aligned}$$

Teorema 2.1:

Misalkan $f(x)$ adalah fungsi kontinu mulus maka nilainya akan ekuivalen dengan nol jika $x \to \infty$ dan karena $f(x)$ kontinu mulus maka $f'(x)$ juga kontinu, sehingga berlaku

$$F(f'(x)) = i\omega F(\omega) \tag{2.57}$$

Bukti:

$$F(f'(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-i\omega x}dx$$

$$= \left(f(x)e^{-i\omega x}|_{-\infty}^{\infty} - (-i\omega) \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx \right) = i\omega F(\omega)$$

terbukti persamaan (2.57).

Teorema 2.2:

Pandang persamaan berikut:

$$F(f''(x)) = (i\omega)^2 F(\omega) \tag{2.58}$$

Bukti:

$$F(f''(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} f''(x)e^{-i\omega x}dx$$

$$= \left(f'(x)e^{-i\omega x}|_{-\infty}^{\infty} - (-i\omega) \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-i\omega x}dx \right)$$

$$= i\omega \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-i\omega x}dx$$

$$= i\omega \left(f(x)e^{-i\omega x}|_{-\infty}^{\infty} - (-i\omega) \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx \right) = (i\omega)^2 F(\omega)$$

terbukti persamaan (2.58).

Teorema 2.3:

Pandang persamaan berikut:

$$F(f'''(x)) = (i\omega)^3 F(\omega) \tag{2.59}$$

Bukti:

$$F(f'''(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} f'''(x)e^{-i\omega x}dx$$

$$= \left(f''(x)e^{-i\omega x}|_{-\infty}^{\infty} - (-i\omega) \int_{-\infty}^{\infty} f''(x)e^{-i\omega x}dx \right)$$

$$= i\omega \int_{-\infty}^{\infty} f''(x)e^{-i\omega x}dx$$

$$= i\omega \left(f'(x)e^{-i\omega x}|_{-\infty}^{\infty} - (-i\omega) \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-i\omega x}dx \right)$$

$$= (i\omega)^2 \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-i\omega x}dx$$

$$= (i\omega)^2 \left(f(x)e^{-i\omega x}|_{-\infty}^{\infty} - (-i\omega) \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx \right)$$

$$= (i\omega)^3 \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx = (i\omega)^3 F(\omega)$$

2.8 Fungsi Airy

2.8.1 Analisis Solusi Persamaan Airy

Pandang persamaan diferensial orde dua berikut (Oliver dan Manuael, 2004):

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} - xy(x) = 0 \tag{2.60}$$

Selanjutnya persamaan (2.60) disebut Persamaan Airy dan solusi persamaan Airy disebut dengan fungsi Airy. Solusi persamaan (2.60) akan mudah dicari dengan menerapkan transformasi Fourier, jika didefinisikan $Y(\omega)$ sebagai transformasi Fourier dari $y(x)$, yaitu:

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} y(x) dx \qquad (2.61)$$

Jika persamaan (2.61) diturunkan dua kali terhadap x maka didapatkan

$$\frac{d^2Y(\omega)}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} y(x) dx\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} y''(x) dx$$

$$= e^{-i\omega x} y'(x)|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} (-i\omega) e^{-i\omega x} y'(x) dx$$

$$= i\omega \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} y'(x) dx$$

$$= i\omega\left(e^{-i\omega x} y(x)|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} (-i\omega) e^{-i\omega x} y(x) dx\right)$$

$$= -\omega^2 Y\big(\omega(x)\big)$$

Maka diperoleh

$$\frac{d^2Y(\omega)}{dx^2} = -\omega^2 Y\big(\omega(x)\big) \qquad (2.62)$$

Selanjutnya persamaan (2.61) diturukan terhadap ω dengan langkah berikut:

$$\frac{dY(\omega)}{d\omega} = \frac{d}{d\omega}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} y(x) dx\right)$$

$$= -ix \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} y(x) dx = -ixY\big(\omega(x)\big)$$

Maka didapatkan

$$\frac{dY(\omega)}{d\omega} = -ixY\big(\omega(x)\big) \tag{2.63}$$

Berdasarkan persamaan (2.63) maka didapatkan

$$\frac{-1}{i}\frac{d\,Y(\omega)}{d\omega} = xY(\omega)$$

$$i\frac{dY(\omega)}{d\omega} = xY(\omega)$$

Maka diperoleh

$$i\frac{dY(\omega)}{d\omega} = xY(\omega) \tag{2.64}$$

Berdasarkan persamaan (2.62) dan (2.64) maka didapatkan modifikasi persamaan (2.60), adalah

$$-\omega^2 Y(\omega) = i\frac{dY(\omega)}{d\omega}$$

$$i\omega^2 Y(\omega) = \frac{dY(\omega)}{d\omega}$$

$$i\omega^2 d\omega = \frac{dY(\omega)}{Y(\omega)}$$

$$\frac{\omega^3}{3}i = ln\,Y(\omega)$$

$$Y(\omega) = e^{\frac{\omega^3}{3}i} \tag{2.65}$$

Langkah selanjutnya adalah menggunakan invers transformasi Fourier untuk mendapatkan solusi dalam bentuk $y(x)$, yaitu:

$$y(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x}Y(\omega)d\omega \tag{2.66}$$

Substitusi persamaan (2.65) pada persamaan (2.66) dan didapatkan

$$y(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \cdot e^{\frac{\omega^3}{3} i} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\left(\omega x + \frac{\omega^3}{3}\right)} d\omega \quad (2.67)$$

Berdasarkan rumus Euler (2.28), maka didapatkan

$$e^{i\left(\omega x + \frac{\omega^3}{3}\right)} = cos\left(\omega x + \frac{\omega^3}{3}\right) + i\, sin\left(\omega x + \frac{\omega^3}{3}\right) \quad (2.68)$$

Dengan demikian diperoleh

$$y(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(cos\left(\omega x + \frac{\omega^3}{3}\right) + i\, sin\left(\omega x + \frac{\omega^3}{3}\right)\right) d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} cos\left(\omega x + \frac{\omega^3}{3}\right) d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} i\, sin\left(\omega x + \frac{\omega^3}{3}\right) d\omega \right] \quad (2.69)$$

Karena fungsi $sin\ x$ adalah fungsi ganjil maka persamaan (2.69) menjadi

$$y(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} cos\left(\omega x + \frac{\omega^3}{3}\right) d\omega \quad (2.70)$$

Karena fungsi $cos\ x$ adalah fungsi genap maka persamaan (2.70) menjadi

$$y(x) = \frac{1}{2\pi}(2) \int_{0}^{\infty} cos\left(\omega x + \frac{\omega^3}{3}\right) d\omega$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} cos\left(\omega x + \frac{\omega^3}{3}\right) d\omega \quad (2.71)$$

Karena persamaan (2.71) adalah solusi bagi persamaan Airy (2.60) maka disebut dengan fungsi Airy dan kemudian fungsi Airy disimbolkan dengan $Ai(x)$, yaitu:

$$Ai(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} cos\left(\omega x + \frac{\omega^3}{3}\right)d\omega \qquad (2.72)$$

2.8.2 Penelitian Terdahulu tentang Fungsi Airy

Dari penelitian Yokohama tahun 2007 dan dalam penelitian ini diberikan persamaan diferensial tidak linier yaitu persamaan Riccati

$$y' + y^2 = x \qquad (2.73)$$

Dimana fungsi $y = y(x)$ adalah fungsi kontinu.

Selanjutnya, dengan menerapkan transformasi Cole Hopf dengan bentuk transformasi Cole Hopf adalah

$$y = \frac{d}{dx}\log u = \frac{u'}{u} \quad (u = u(x)) \qquad (2.74)$$

Jika persamaan (2.74) diturunkan sekali terhadap u maka didapatkan

$$y' = \frac{uu'' - u'u'}{u^2} \qquad (2.75)$$

Substitusi persamaan (2.74) dan (2.75) pada persamaan (2.60) maka didapatkah

$$y' + y^2 = x$$

$$\left(\frac{uu'' - u'u'}{u^2}\right) + \left(\frac{u'}{u}\right)^2 = x$$

$$\frac{uu'' - (u')^2}{u^2} + \frac{(u')^2}{u^2} = x$$

$$\frac{uu'' - (u')^2 + (u')^2}{u^2} = x$$

$$u'' = ux \qquad (2.76)$$

Berdasarkan persamaan (2.60) maka persamaan (2.76) mempunyai solusi

$$u(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos\left(\frac{t^3}{3} + xt\right) dt \tag{2.77}$$

Dengan demikian didapatkan solusi persamaan (2.60) dengan fungsi Airy adalah

$$y = \frac{u'}{u} = \frac{-\int_0^\infty t \sin\left(\frac{t^3}{3} + xt\right) dt}{\int_0^\infty \cos\left(\frac{t^3}{3} + xt\right) dt}$$

2.9 Kajian Solusi dalam Al-Qur'an

Solusi dalam matematika adalah sesuatu yang memenuhi permasalahan matematika, misalnya fungsi kuadrat maka kemungkinan akar-akar yang memenuhi persamaan adalah akar-akar bilangan riil atau bilangan komplek. Sedangkan dalam kehidupan nyata, yang dimaksud dengan solusi adalah segala sesuatu yang menjadikan masalah selesai atau masalah tersebut mempunyai jalan keluar atau pemecahannya. Dan metode untuk menyelesaiakan masalah sangat beraneka ragam akan tetapi harus memenuhi kaidah atau hukum yang berlaku sehingga solusi atau penyelesaian yang didapatkan valid dan dapat dipertanggungjawabkan.

Sebenarnya secara tersirat telah ada dalam Al-Qur'an mengenai cara atau metode untuk mencari jalan keluar atau solusi terhadap permasalahan yang sedang dihadapi, yaitu surat Ali-Imran ayat 159:

فَبِمَا رَحۡمَةٖ مِّنَ ٱللَّهِ لِنتَ لَهُمۡۖ وَلَوۡ كُنتَ فَظًّا غَلِيظَ ٱلۡقَلۡبِ لَٱنفَضُّواْ مِنۡ حَوۡلِكَۖ
فَٱعۡفُ عَنۡهُمۡ وَٱسۡتَغۡفِرۡ لَهُمۡ وَشَاوِرۡهُمۡ فِي ٱلۡأَمۡرِۖ فَإِذَا عَزَمۡتَ فَتَوَكَّلۡ عَلَى ٱللَّهِۚ إِنَّ
ٱللَّهَ يُحِبُّ ٱلۡمُتَوَكِّلِينَ ١٥٩

"Maka disebabkan rahmat dari Allah-lah kamu berlaku lemah lembut terhadap mereka. Sekiranya kamu bersikap keras lagi berhati kasar, tentulah mereka menjauhkan diri dari sekelilingmu. Karena itu ma'afkanlah mereka, mohonkanlah ampun bagi mereka, dan bermusyawaratlah dengan mereka dalam urusan itu. Kemudian apabila kamu telah membulatkan tekad, maka bertawakkallah kepada Allah. Sesungguhnya Allah menyukai orang-orang yang bertawakkal kepada-Nya." (QS Ali Imran : 159).

Ayat di atas Allah SWT menerangkan bahwa setiap manusia yang hidup di dunia tidak akan pernah terlepas dari problem dan persoalan karena fitrah manusia selalu berhadapan dengan problematika kehidupan. Oleh karena itu, setiap manusia harus dapat memecahkan atau mencari jalan keluar dari masalah yang dihadapi dan ayat Al-Qur'an di atas menerangkan bahwa setiap manusia harus mencontoh dan mengambil teladan dari nabi Muhammad SAW dalam mengambil keputusan dalam menyelesaikan masalah yaitu dengan cara lemah lembut dan berdasarkan rahmat Allah SWT serta setiap persoalan diselesaikan dengan jalan musyawarah atau kekeluargaan. Dan jika dengan cara musyawarah telah disepakati bersama maka hendaklah segala yang disepakati dikembalikan atau diserahkan (tawakal) kepada Allah.

Kalimat فَبِمَا رَحْمَةٍ مِنَ اللَّهِ لِنْتَ, ba\` di situ adalah *ba\` lit ta'qib*. Maksudnya adalah hanya dengan rahmat Allah kamu (wahai Muhammad SAW), bisa berlemah lembut kepada umatmu. Dan sikap lemah lembut adalah suatu sikap yang mulia ketika menghadapi suatu masalah karena dengan lemah lembut akan didapatkan jalan keluar yang benar-benar karena rahmat Allah SWT. Sesungguhnya dalam lemah lembut itu terdapat berbagai kelebihan. Rasulullah bersabda, "*Sesungguhnya Allah itu Maha lemah-lembut dan mencintai sikap lemah-lembut. Allah memberikan sesuatu dengan jalan lemah-lembut, yang tidak dapat diberikan jika dicari dengan cara kekerasan, juga sesuatu yang tidak dapat diberikan selain dengan jalan lemah- lembut itu*." (HR. Muslim).

Dengan demikian hadist di atas menganjurkan kepada kita untuk bersikap lemah lembut dalam mencari jalan keluar. Adapaun cara yang ditawarkan oleh Islam adalah musyawarah dan musyawarh merupakan salah satu pilar dan prinsip agama Islam. Dalam bermusyawah tentunya melibatkan orang ahli ilmu untuk mencapai perkara yang lebih mendekati kebenaran karena Rasulullah bersabda, "*Penasehat (orang yang dimintai pendapat) adalah orang yang amanah (dipercaya)*" (HR. Tirmidzi, no. 2823). Maksudnya, orang tersebut adalah ahli dalam bidangnya dan memberi masukan yang benar serta tidak menyebarkan rahasia orang lain.

Dan Rasulullah telah memberikan contoh tentang musyawarah. Menjelang perang Uhud terjadi perbedaan pendapat antara beliau dengan sejumlah sahabat, Nabi berpendapat sebaiknya orang Islam bertahan di dalam kota, tetapi sebagian sahabat mengusulkan agar musuh dihadapai di luar kota. Karena telah bermusyawarah maka Nabi menerima pendapat sahabat dan terbukti kekalahan berada di umat Islam, tetapi Nabi tetap bersikap lemah lembut dan bijaksana dengan hasil peperangan.

Dan kisah ini adalah penyebab turunnya surat Ali-Imran ayat 159, karena dalam peperangan ini umat Islam dikalahkan oleh kaum musyrikin sehingga mengakibatkan kaum muslimin labil dalam psikologi. Khususnya mereka yang telah melakukan kesalahan dalam perang Uhud, sebenarnya cukup banyak hal dari perang uhud yang mengundang emosi umat Islam, akan tetapi surat Ali-Imran memberikan wacana bahwa dalam menyelesaiakan masalah atau problem yang dimiliki harus menunjukkan kelemah lembutan. Dan secara tidak langsung surat Ali-Imran ayat 159 adalah Allah SWT memperingatkan kepada Muhammad, agar bersikap lemah lembut dan sopan santun ketika mengajak umatnya kepada ajaran agama Islam, selain itu menganjurkan untuk mencari jalan keluar atau menyelesaikan masalah dengan baik-baik dan kebersamaan.

Solusi permasalahan tidak akan pernah muncul dengan sendirinya akan tetapi perlu adanya suatu usaha atau perbuatan sehingga akan didapatkan jalan keluar dari masalah yang dihadapi. Secara tidak langsung masalah adalah suatu cara menuntut setiap manusia untuk berusaha dan ikhtiyar dengan segala yang dihadapinya. Dan jika manusia bersungguh-sungguh maka akan ada jalan keluar atau kemudahan, dan apabila manusia tidak mau berikhtiyar maka jalan itu tidak akan muncul dengan begitu saja. Dan hal ini terdapat dalam Al-Qur’an surat Al-ankabut ayat 69, yaitu:

وَٱلَّذِينَ جَٰهَدُواْ فِينَا لَنَهۡدِيَنَّهُمۡ سُبُلَنَاۚ وَإِنَّ ٱللَّهَ لَمَعَ ٱلۡمُحۡسِنِينَ ٦٩

“Dan orang-orang yang berjihad untuk (mencari keridhaan) Kami, benar-benar akan Kami tunjukkan kepada mereka jalan-jalan Kami. Dan sesungguhnya Allah benar-benar beserta orang-orang yang berbuat baik”.

Kata jihad pada ayat di atas mempunyai bermacam-macam makna, menurut Zamahsyari dan Al-Nasafi, jihad disini masih bersifat umum tak hanya jihad fisik, tapi juga jihad batin dan segala bentuk lainnya. Sedangkan Ibn `Asyur memahaminya dalam arti moral (penguatan akhlak), sementara Al-Razi memahaminya dalam arti pemikiran (penguatan intelektual). Dengan demikian diperoleh banyak sekali mengenai arti tentang jihad, secara mudahnya jihad di sini bisa dimaknai sebagai suatu usaha baik usaha yang keras atau usaha yang sekedarnya. Usaha adalah suatu kegiatan untuk melakukan sesuatu, misalnya usaha untuk mencari jalan keluar atau solusi masalah (Shihab, 2002).

Dalam maknanya yang umum, jihad memiliki cakupan dan spektrum yang luas, menyangkut setidak-tidaknya tiga bidang, yaitu jihad dalam lingkup sendiri jihad al-nafs (Al-Ankabut: 6), lalu jihad dalam lingkup keluarga (Al-furqan: 74), serta jihad dalam lingkup sosial. Dalam lingkup yang terakhir ini, jihad dilakukan dengan mengembangkan masyarakat Islam menuju kualitas "Khairal Ummah".

Beberapa makna di atas tidak bertentangan, bahkan menguatkan satu sama lain dan saling melengkapi. Mereka yang menyebutkan jihad dengan makna perang tidak mengkhususkan hanya dalam perkara perang, namun menyebutkan salah satu jenis dari amalan jihad tersebut. Sebab jihad meliputi keseluruhan kemampuan yang dikerahkan oleh seorang muslim dalam menjalankan ketaatan kepada Allah. Dengan syarat, dalam mengamalkan semua itu harus ditopang dengan ilmu yang benar sesuai dengan tuntunan Rasulullah SAW dan para shahabatnya. Sebab barang siapa yang berjihad dengan tidak mengikuti petunjuk Rasulullah, maka akan menjerumuskan ke dalam kesesatan dan penyimpangan.

Oleh karena itu, Abu Sulaiman Ad-Darani berkata: "Bukanlah jihad di dalam ayat ini hanya terkhusus jihad melawan orang-orang kafir saja. Namun menolong agama, membantah orang yang berada di atas kebatilan, mencegah orang yang dzalim, dan yang mulia adalah beramar ma'ruf nahi mungkar. Dan di antaranya pula adalah berjihad melawan hawa nafsu".

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Analisis Brownian Motion Persamaan Schrodinger Nonlinier

Suatu gelombang pada dasarnya adalah pergerakan bebas partikel-partikel yang merambat ke segala arah dan pergerakannya dipengaruhi oleh energi masing-masing partikel, akan tetapi setiap partikel berpeluang sama untuk bergerak ke segala arah. Persamaan Schrodinger adalah salah satu model gelombang yang interpretasinya banyak diterapkan pada mekanika kuantum. Adapun asumsi yang mendasari persamaan Schrodinger adalah adanya pergerakan acak pertikel dan setiap partikel mempunyai peluang gerak yang sama baik ke kanan maupun ke kiri karena pergerakan gelombangnya diasumsikan bergerak ke kanan dan ke kiri.

Dalam buku yang berjudul "Partial Differential Equations of Applied Mathematics" Erich Zauderer menyebutkan bahwa pergerakan suatu partikel dapat diinterpretasikan dalam bentuk distribusi probabilitas yang menyatakan bahwa probabilitas partikel di x pada saat $t+\tau$ sama dengan probabilitas partikel di $x-\delta$ pada saat t dikalikan dengan probabilitas η yang berpindah ke kanan ditambah dengan probabilitas partikel di $x+\delta$ pada saat t dikalikan dengan probabilitas ξ yang berpindah ke kiri, sehingga pergerakan partikel dapat dinyatakan dengan persamaan matematis, yaitu:

$$u(x,t+\tau)=\eta u(x-\delta,t)+\xi u(x+\delta,t) \tag{3.1}$$

Berdasarkan ekspansi deret Taylor (2. 22) maka didapatkan sistem persamaan dari persamaan (3.1) adalah

$$\begin{cases} u(x,t+\tau) = u(x,t) + \tau u_t(x,t) \\ u(x-\delta,\tau) = u(x,t) - \delta u_x(x,t) + \frac{1}{2}\delta^2 u_{xx}(x,t) \\ u(x+\delta,\tau) = u(x,t) + \delta u_x(x,t) + \frac{1}{2}\delta^2 u_{xx}(x,t) \end{cases} \tag{3.2}$$

Selanjutnya substitusi sistem persamaan (3.2) pada persamaan (3.1) dan didapatkan

$$\begin{aligned} u(x,t) + \tau u_t(x,t) = \eta &\left[u(x,t) - \delta u_x(x,t) + \frac{1}{2}\delta^2 u_{xx}(x,t)\right] \\ &+\xi\left[u(x,t) + \delta u_x(x,t) + \frac{1}{2}\delta^2 u_{xx}(x,t)\right] \end{aligned} \tag{3.3}$$

Persamaan (3.3) dapat disederhanakan menjadi

$$\begin{aligned} u(x,t) + \tau u_t(x,t) = (\eta+\xi)u(x,t) &+ (-\eta+\xi)\delta u_x(x,t) \\ &+(\eta+\xi)\frac{1}{2}\delta^2 u_{xx}(x,t) \end{aligned} \tag{3.4}$$

Karena pergerakan partikel adalah kejadian peluang maka nilai dari pergerakan peluang ke kanan dan ke kiri yaitu: $(\eta + \xi) \approx 1$ maka persamaan (3.4) menjadi

$$u(x,t) + \tau u_t(x,t) = u(x,t) + (-\eta+\xi)\delta u_x(x,t) + \frac{1}{2}\delta^2 u_{xx}(x,t) \tag{3.5}$$

Persamaan (3.5) dapat disederhanakan menjadi

$$\tau u_t(x,t) = u(x,t) - u(x,t) + (-\eta+\xi)\delta u_x(x,t) + \frac{1}{2}\delta^2 u_{xx}(x,t) \tag{3.6}$$

Persamaan (3.6) menjadi

$$\tau u_t(x,t) = (-\eta+\xi)\delta u_x(x,t) + \frac{1}{2}\delta^2 u_{xx}(x,t) \tag{3.7}$$

Jika masing-masing dari ruas persamaan (3.7) dibagi dengan τ maka didapatkan

$$u_t(x,t) = \frac{(-\eta+\xi)}{\tau}\delta u_x(x,t) + \frac{1}{2}\frac{\delta^2}{\tau}\, u_{xx}(x,t) \tag{3.8}$$

Jika ruas kanan dipindah ke ruas kiri maka persamaan (3.8) menjadi

$$u_t(x,t) - \frac{(-\eta+\xi)\delta}{\tau}u_x(x,t) - \frac{\delta^2}{2\tau}\, u_{xx}(x,t) = 0 \tag{3.9}$$

Dalam bentuk operator diferensial persamaan (3.9) menjadi

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \left(\frac{(-\eta+\xi)\delta}{\tau}\right)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} - \left(\frac{\delta^2}{2\tau}\right)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0$$

Kemudian persamaan (3.9) dikenal dengan persamaaan difusi satu dimensi, dengan pergerakan gelombangnya ke kanan dan ke kiri. Jika diasusmsikan nilai

$$\frac{(-\eta+\xi)\delta}{\tau} \approx 0$$

Maka didapatkan persamaan difusi satu dimensi dengan mengabaikan kecepatan pergerakan partikel, yaitu:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \left(\frac{\delta^2}{2\tau}\right)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0 \tag{3.10}$$

Jika ruas kiri dari persamaan (3.10) ditambah suatu fungsi dengan bentuk $A|u(x,t)|^n u(x,t)$ maka didapatkan

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \left(\frac{\delta^2}{2\tau}\right)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + A|u(x,t)|^n u(x,t) = 0 \tag{3.11}$$

Jika diasumsikan nilai dari $\frac{\delta^2}{2\tau} \approx -1$ maka persamaan (3.11) menjadi

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + A|u(x,t)|^n u(x,t) = 0 \tag{3.12}$$

Dimana A adalah konstanta riil dan bentuk persamaan (3.12) disebut dengan persamaan Schrodinger nonlinier satu dimensi.

Persamaan Schrodinger adalah persamaan yang menggambarkan akan pergerakan partikel yang sangat kecil bahkan ukuran atom dan partikel disini adalah bagian yang terpenting dalam proses analisis. Jika memandang kata partikel maka bisa diintegrasikan dengan amal perbuatan, amal perbuatan ada yang bernilai benar dan bernilai salah sehingga dari nilai tersebut akan mempengaruhi kehidupan dari setiap manusia tersebut. Misalkan amal perbuatannya baik maka akan memberikan sifat yang baik juga pada manusia begitu juga sebaliknya jika perbuatan buruk maka akan mempengaruhi sifat dan sikap dari manusia tersebut, hal ini sesuai dengan hadit Rosul mengenai amal perbuatan manusia baik yang kecil maupun yang besar, yaitu:

قال عليه الصلاة والسلام : اِتَّقُوا النار وَلَوْ بِشِقِّ تَمْرَةٍ ، فَإِنْ لَمْ تَجِدُوْا فَبِكَلِمَةٍ طَيِّبَ

Hadist di atas memberikan makna bahwa “Peliharalah dirimu dari sentuhan api neraka sekalipun hanya dengan separuh kurma, maka jika kalian tidak dapat melakukannya, maka lakukanlah oleh kalian walau dengan membaca kalimat thayyibah”. Hadist ini menjelaskan bahwa hal yang kecil akan dapat menentukan hal yang besar atau sesuatu yang kecil dapat memberikan pengaruh pada sesuatu yang besar karena hal yang kecil akan menjadi besar jika dilakukan berulang-ulang.

3.2 Solusi Analitik Persamaan Schrodinger Nonlinier dengan Generalisasi Fungsi Airy

Meninjau persamaan Schrodinger nonlinier (3.12), yaitu:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}+\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+A|u(x,t)|^n u(x,t)=0 \tag{3.13}$$

Dimana A adalah konstanta real dan $|u|^2=u\bar{u}$, untuk $\bar{u}$ adalah konjugat dari u suatu fungsi kompleks.

Kasus I: jika n genap maka persamaan (3.13) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}+\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+A|u(x,t)|^{2m} u(x,t)=0 \tag{3.14}$$

Selanjutnya, jika $m=1$ maka persamaan (3.14) menjadi

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}+\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+A|u(x,t)|^2 u(x,t)=0 \tag{3.15}$$

Jika persamaan (3.15) ditransformasi dengan transformasi Fourier, dan transformasi Fourier yang digunakan adalah

$$U(\omega(x,t),t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}u(x,t)dt \tag{3.16}$$

Maka invers trasformasi Fourier dari $U(\omega,t)$ adalah $u(x,t)$ dan dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}U(\omega,t)d\omega \tag{2.17}$$

Persamaan (3.16) memberikan makna bahwa bentuk $u(x,t)$ ditranformasi menjadi bentuk $U(\omega(x,t),t)$ yang secara fisis mentransformasi domain dari bentuk spasial ke dalam bentuk frekuensi, dan kemudian penulisan $U(\omega(x,t),t)$

akan disingkat dengan $U(\omega,t)$. Kemudian, jika persamaan (3.16) diturunkan terhadap t dan analog dengan (2.57) maka didapatkan

$$\frac{\partial U(\omega,t)}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\,dt$$

$$= e^{-i\omega t}u(x,t)|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty}(-i\omega)e^{-i\omega t}u(x,t)dt$$

$$= i\omega U(\omega,t) \tag{3.18}$$

Memandang transformasi untuk $|u(x,t)|^2$ adalah $|U(\omega,t)|^2$ maka berdasarkan definisi pada analisis kompleks didapatkan bahwa

$$|U(\omega,t)|^2 = U(\omega,t)\cdot\bar{U}(\omega,t) \tag{2.19}$$

Kemudian dengan memandang persamaan (3.16) maka transformasi $|U(\omega,t)|^2$ pada persamaan (2.19) dapat dinyatakan

$$|U(\omega,t)|^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}u(x,t)dt\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\bar{u}(x,t)dt\right) \tag{3.20}$$

Berdasarkan persamaan (3.18) maka didapatkan modifikasi dari persamaan (3.15) adalah

$$i\omega U(\omega,t) + \frac{\partial^2 U(\omega,t)}{\partial x^2} + A|U(\omega,t)|^2U(\omega,t) = 0 \tag{3.21}$$

Bentuk sederhana persamaan (3.21) adalah

$$\frac{\partial^2 U(\omega,t)}{\partial x^2} = (-i\omega - A|U(\omega,t)|^2)U(\omega,t) \tag{3.22}$$

Misalkan $-i\omega - A|U(\omega,t)|^2 = B$, maka persamaan (3.22) menjadi

$$\frac{\partial^2 U(\omega,t)}{\partial x^2} = BU(\omega,t) \tag{3.23}$$

Persamaan (3.23) disebut dengan persamaan Airy, sedangkan solusi persamaan (3.23) disebut dengan fungsi Airy. Analog dengan persamaan (2.60) maka persamaan (3.23) mempunyai solusi fungsi Airy berikut:

$$U(\omega,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty cos\left(\frac{\omega^3}{3} + B\omega\right)d\omega \tag{3.24}$$

Substitusi B pada persamaan (3.24) dengan $-i\omega - A|U(\omega,t)|^2$ maka didapatkan

$$U(\omega,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty cos\left(\frac{\omega^3}{3} + (-i\omega - A|U(\omega,t)|^2)\omega\right)d\omega \tag{3.25}$$

Persamaan (3.25) dapat disederhanakan

$$U(\omega,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty cos\left(\frac{\omega^3}{3} - i\omega^2 - A|U(\omega,t)|^2\omega\right)d\omega \tag{3.26}$$

Substitusi $|U(\omega,t)|^2$ dengan persamaan (3.20), maka persamaan (3.26) menjadi

$$U(\omega,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty cos\left(\frac{\omega^3}{3} - i\omega^2 - A\left(\left(\int_{-\infty}^\infty e^{-i\omega t}u(x,t)dt\right)\left(\int_{-\infty}^\infty e^{-i\omega t}\bar{u}(x,t)dt\right)\right)\omega\right)d\omega \tag{3.27}$$

Dengan demikian persamaan (3.27) adalah solusi persamaan Airy (3.23) dan untuk mendapatkan solusi persamaan Schrodinger (3.15) maka transformasi Fourier yang terdapat pada persamaan (3.27) harus diinverskan. Selanjutnya menggunakan invers transformasi Fourier (2.17) maka diperoleh bentuk berikut:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty e^{i\omega t}U(\omega,t)d\omega \tag{3.28}$$

Maka berdasarkan persamaan (3.28) didapatkan modifikasi persamaan (3.27) sebagai solusi persamaan Schrodinger nonlinier (3.15), yaitu:

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} cos \left(\frac{\omega^3}{3} - i\omega^2 - A\left(\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}U(\omega,t)d\omega\right)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\overline{U}(\omega,t)d\omega\right)\right)\omega\right)d\omega \quad (3.29)$$

Selanjutnya pandang faktor berikut

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}U(\omega,t)d\omega \quad (3.30)$$

Jika bentuk (3.30) diberikan sebarang kondisi awal dan diasumsikan kondisi awalnya adalah fungsi komplek, maka dalam penelitian ini penulis mengambil kondisi awal sebagai berikut:

$$U(\omega,t) = \omega^2 + it \quad (3.31)$$

Sehingga saat $t = 0$ didapatkan

$$U(\omega,0) = \omega^2 + i0 = \omega^2 \quad (3.32)$$

Karena $\overline{U}$ adalah konjugat dari U maka didapatkan

$$\overline{U}(\omega,t) = \omega^2 - it \quad (3.33)$$

Sehingga saat $t = 0$ didapatkan

$$U(\omega,0) = \omega^2 - i0 = \omega^2 \quad (3.34)$$

Berdasarkan persamaan (3.32) dan (3.34) maka persamaan (3.29) menjadi

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} cos \left(\frac{\omega^3}{3} - i\omega^2 - A\left(\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\omega^2 d\omega\right)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\omega^2\, d\omega\right)\right)\omega\right)d\omega \quad (3.35)$$

Persamaan (3.35) dapat disederhanakan menjadi

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} cos \left(\frac{\omega^3}{3} - i\omega^2 - A\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\omega^2 d\omega\right)^2 \omega\right)d\omega \quad (3.36)$$

Kemudian pandang faktor berikut

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\omega^2 d\omega \tag{3.37}$$

Berdasarkan sifat integral maka persamaan (3.37) setara dengan

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} e^{i\omega t}\omega^2 d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} e^{i\omega t}\omega^2 d\omega$$

Kemudian pandang langkah berikut

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} \omega^2\, e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi}\lim_{b\to-\infty}\int_{b}^{0} \frac{\omega^2}{it}\, d\left(e^{i\omega t}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\lim_{b\to-\infty}\left(\frac{\omega^2}{it}e^{i\omega t}|_b^0 - \int_b^0 e^{i\omega t}\frac{2\omega}{it}d\omega\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\lim_{b\to-\infty}\left(0 - \frac{b^2}{it}e^{ibt} - \int_b^0 \frac{2\omega}{it}\frac{1}{it}\, d\left(e^{i\omega t}\right)\right)$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\lim_{b\to-\infty}\frac{b^2}{it}e^{ibt} + \frac{1}{2\pi}\lim_{b\to-\infty}\int_b^0 \frac{2\omega}{t^2}\, d\left(e^{i\omega t}\right)$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\lim_{b\to-\infty}\frac{b^2}{it}e^{ibt} + \frac{1}{2\pi}\lim_{b\to-\infty}\left(\frac{2\omega}{t^2}e^{i\omega t}|_b^0 - \int_b^0 e^{i\omega t}\frac{2}{t^2}\, d\omega\right)$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\lim_{b\to-\infty}\frac{b^2}{it}e^{ibt} + \frac{1}{2\pi}\lim_{b\to-\infty}\left(0 - \frac{2b}{t^2}e^{ibt} - \int_b^0 \frac{2}{t^2}\frac{1}{it}\, d\left(e^{i\omega t}\right)\right)$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\lim_{b\to-\infty}\frac{b^2}{it}e^{ibt} - \frac{1}{2\pi}\lim_{b\to-\infty}\frac{2b}{t^2}e^{ibt} - \frac{1}{2\pi}\lim_{b\to-\infty}\int_b^0 \frac{2}{it^3}\, d\left(e^{i\omega t}\right)$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\lim_{b\to-\infty}\frac{b^2}{it}e^{ibt} - \frac{1}{2\pi}\lim_{b\to-\infty}\frac{2b}{t^2}e^{ibt} - \frac{1}{2\pi}\lim_{b\to-\infty}\left(\frac{2}{it^3}e^{i\omega t}|_b^0 - \int_b^0 e^{i\omega t}.0\right)$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\lim_{b\to-\infty}\frac{b^2}{it}e^{ibt} - \frac{1}{2\pi}\lim_{b\to-\infty}\frac{2b}{t^2}e^{ibt} - \frac{1}{2\pi}\lim_{b\to-\infty}\left(\frac{2}{it^3} - \frac{2}{it^3}e^{ibt}\right)$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\lim_{b\to-\infty}\frac{b^2}{it}e^{ibt} - \frac{1}{2\pi}\lim_{b\to-\infty}\frac{2b}{t^2}e^{ibt} - \frac{1}{2\pi}\lim_{b\to-\infty}\frac{2}{it^3} + \frac{1}{2\pi}\lim_{b\to-\infty}\frac{2}{it^3}e^{ibt}$$

$$= -\frac{1}{2\pi}0 - \frac{1}{2\pi}0 - \frac{1}{2\pi}\frac{2}{it^3} + \frac{1}{2\pi}0$$

$$= -\frac{1}{\pi i t^3}$$

Langkah di atas didapatkan

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} e^{i\omega t}\omega^2 d\omega = -\frac{1}{\pi i t^3} \tag{3.38}$$

Selanjutnya pandang faktor berikut:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} \omega^2\, e^{i\omega t} d\omega$$

Kemudian diselesaikan dengan langkah berikut:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} \omega^2\, e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi}\lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b}\frac{\omega^2}{it}\, d\left(e^{i\omega t}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\lim_{b\to\infty}\left(\frac{\omega^2}{it}e^{i\omega t}\Big|_0^b - \int_{0}^{b} e^{i\omega t}\frac{2\omega}{it}d\omega\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\lim_{b\to\infty}\left(\left(\frac{b^2}{it}e^{ibt} - 0\right) - \int_{0}^{b}\frac{2\omega}{it}\frac{1}{it}\, d\left(e^{i\omega t}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\lim_{b\to\infty}\frac{b^2}{it}e^{ibt} + \frac{1}{2\pi}\lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b}\frac{2\omega}{t^2}\, d\left(e^{i\omega t}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\lim_{b\to\infty}\frac{b^2}{it}e^{ibt} + \frac{1}{2\pi}\lim_{b\to\infty}\left(\frac{2\omega}{t^2}e^{i\omega t}\Big|_0^b - \int_{0}^{b} e^{i\omega t}\frac{2}{t^2}\, d\omega\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\lim_{b\to\infty}\frac{b^2}{it}e^{ibt} + \frac{1}{2\pi}\lim_{b\to\infty}\left(\left(\frac{2b}{t^2}e^{ibt} - 0\right) - \int_{0}^{b}\frac{2}{t^2}\frac{1}{it}\, d\left(e^{i\omega t}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\lim_{b\to\infty}\frac{b^2}{it}e^{ibt} + \frac{1}{2\pi}\lim_{b\to\infty}\frac{2b}{t^2}e^{ibt} - \frac{1}{2\pi}\lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{2}{it^3}\, d(e^{i\omega t})$$

$$= \frac{1}{2\pi}\lim_{b\to\infty}\frac{b^2}{it}e^{ibt} + \frac{1}{2\pi}\lim_{b\to\infty}\frac{2b}{t^2}e^{ibt} - \frac{1}{2\pi}\lim_{b-\infty}\left(\frac{2}{it^3}e^{i\omega t}|_0^b - \int_0^b e^{i\omega t}.0\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\lim_{b\to\infty}\frac{b^2}{it}e^{ibt} + \frac{1}{2\pi}\lim_{b\to\infty}\frac{2b}{t^2}e^{ibt} - \frac{1}{2\pi}\lim_{b\to\infty}\left(\frac{2}{it^3}e^{ibt} - \frac{2}{it^3}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\lim_{b\to\infty}\frac{b^2}{it}e^{ibt} + \frac{1}{2\pi}\lim_{b\to\infty}\frac{2b}{t^2}e^{ibt} - \frac{1}{2\pi}\lim_{b\to\infty}\frac{2}{it^3}e^{ibt} + \frac{1}{2\pi}\lim_{b\to\infty}\frac{2}{it^3}$$

$$= \frac{1}{i\pi t^3}$$

Langkah di atas didapatkan bahwa

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{i\omega t}\omega^2 d\omega = \frac{1}{\pi i t^3} \qquad (3.39)$$

Berdasarkan persamaan (3.38) dan (3.39) maka didapatkan nilai dari faktor (3.37) adalah

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty e^{i\omega t}\omega^2 d\omega = \frac{1}{\pi i t^3} - \frac{1}{\pi i t^3} = 0$$

Persamaan (3.36) menjadi

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos\left(\frac{\omega^3}{3} - i\omega^2 - A(0)^2\omega\right) d\omega$$

Dengan demikian didapatkan bahwa

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos\left(\frac{\omega^3}{3} - i\omega^2\right) d\omega \qquad (3.40)$$

Persamaan (3.40) adalah fungsi Airy yang menjadi solusi bagi persamaan Schrodinger nonlinier (3.15).

Selanjutnya jika $m = 2$ maka dari persamaan (3.14) didapatkan

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + A|u(x,t)|^4 u(x,t) = 0 \qquad (3.41)$$

Memandang transformasi untuk $|u(x,t)|^4$ adalah $|U(\omega,t)|^4$ maka dapat dinyatakan sebagai berikut

$$|U(\omega,t)|^4 = \left(U(\omega,t).\bar{U}(\omega,t)\right)^2 \qquad (3.42)$$

Berdasarkan persamaan (3.16) maka transformasi $|U(\omega,t)|^4$ pada persamaan (3.42) menjadi

$$|U(\omega,t)|^4 = \left(\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} u(x,t)dt\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \bar{u}(x,t)dt\right)\right)^2 \qquad (3.43)$$

Dengan memandang persamaan (3.18) maka didapatkan modifikasi dari persamaan (3.41) adalah

$$i\omega U(\omega,t) + \frac{\partial^2 U(\omega,t)}{\partial x^2} + A|U(\omega,t)|^4 U(\omega,t) = 0 \qquad (3.44)$$

Bentuk sederhana persamaan (3.44) adalah

$$\frac{\partial^2 U(\omega,t)}{\partial x^2} = (-i\omega - A|U(\omega,t)|^4)U(\omega,t) \qquad (3.45)$$

Misalkan $-i\omega - A|U(\omega,t)|^4 = B$, maka persamaan (3.45) menjadi

$$\frac{\partial^2 U(\omega,t)}{\partial x^2} = BU(\omega,t) \qquad (3.46)$$

Analog dengan persamaan (2.60) maka solusi persamaan (3.46) adalah

$$U(\omega,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} cos\left(\frac{\omega^3}{3} + B\omega\right)d\omega \qquad (3.47)$$

Substitusi B dengan $-i\omega - A|U(\omega,t)|^4$ maka didapatkan

$$U(\omega,t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} cos\left(\frac{\omega^3}{3} + (-i\omega - A|U(\omega,t)|^4)\omega\right)d\omega \tag{3.48}$$

Persamaan (3.48) dapat disederhanakan

$$U(\omega,t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} cos\left(\frac{\omega^3}{3} - i\omega^2 - A|U(\omega,t)|^4\omega\right)d\omega \tag{3.49}$$

Kemudian substitusi $|U(\omega,t)|^4$ dengan persamaan (3.43) maka diperoleh

$$U(\omega,t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} cos\left(\frac{\omega^3}{3} - i\omega^2 - A\left(\left(\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}u(x,t)dt\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\bar{u}(x,t)dt\right)\right)^2\omega\right)\right)d\omega \tag{3.50}$$

Dengan demikian didapatkan solusi dari persamaan (3.46) adalah persamaan (3.50) dan untuk mendapatkan solusi persamaan Schrodinger (3.41) maka transformasi Fourier yang terdapat pada persamaan (3.50) harus diinverskan. Dan kemudian analog dengan persamaan (3.28) maka persamaan (3.50) menjadi

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} cos\left(\frac{\omega^3}{3} - i\omega^2 - A\left(\left(\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}U(x,\omega)d\omega\right)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\bar{U}(x,\omega)d\omega\right)\right)^2\omega\right)\right)d\omega \tag{3.51}$$

Selanjutnya diberikan kondisi awal adalah persamaan (3.32) dan (3.34) maka persamaan (3.51) menjadi

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} cos\left(\frac{\omega^3}{3} - i\omega^2 - A\left(\left(\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\omega^2 d\omega\right)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\omega^2\, d\omega\right)\right)^2\omega\right)\right)d\omega$$

Persamaan ini dapat disederhanakan menjadi

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} cos\left(\frac{\omega^3}{3} - i\omega^2 - A\left(\left(\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\omega^2 d\omega\right)^2\right)^2\omega\right)\right)d\omega \tag{3.52}$$

Analog dengan persamaan (3.38) dan (3.39) maka didapatkan hasil dari persamaan (3.52) adalah

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} cos\left(\frac{\omega^3}{3} - i\omega^2 - A((0)^2)^2\omega\right)d\omega$$

Maka didapatkan

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} cos\left(\frac{\omega^3}{3} - i\omega^2\right)d\omega \qquad (3.53)$$

Persamaan (3.53) adalah solusi persamaan Schrodinger (3.41).

Selanjutnya, jika $m = 3$ maka dari persamaan (3.14) didapatkan

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + A|u(x,t)|^6 u(x,t) = 0 \qquad (3.54)$$

Memandang transformasi untuk $|u(x,t)|^6$ adalah $|U(\omega,t)|^6$ maka dapat dinyatakan sebagai berikut

$$|U(\omega,t)|^6 = \left(U(\omega,t).\overline{U}(\omega,t)\right)^3$$

Berdasarkan persamaan (3.16) maka transformasi $|U(\omega,t)|^6$ dapat dinyatakan

$$|U(\omega,t)|^6 = \left(\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}u(x,t)dt\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\bar{u}(x,t)dt\right)\right)^3 \qquad (3.55)$$

Berdasarkan persamaan (3.18) maka diperoleh modifikasi persamaan (3.54) adalah

$$i\omega U(\omega,t) + \frac{\partial^2 U(\omega,t)}{\partial x^2} + A|U(\omega,t)|^6 U(\omega,t) = 0$$

Persamaan ini dapat disederhanakan menjadi

$$\frac{\partial^2 U(\omega,t)}{\partial x^2} = (-i\omega - A|U(\omega,t)|^6)U(\omega,t) \qquad (3.56)$$

Misalkan $-i\omega - A|U(\omega,t)|^6 = B$, maka persamaan (3.56) menjadi

$$\frac{\partial^2 U(\omega,t)}{\partial x^2} = BU(\omega,t) \tag{3.57}$$

Analog dengan persamaan (2.60) maka solusi untuk persamaan (3.57) adalah

$$U(\omega,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty cos\left(\frac{\omega^3}{3} + B\omega\right)d\omega$$

Substitusi B dengan $-i\omega - A|U(\omega,t)|^6$ maka didapatkan

$$U(\omega,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty cos\left(\frac{\omega^3}{3} + (-i\omega - A|U(\omega,t)|^6)\omega\right)d\omega \tag{3.58}$$

Persamaan (3.58) dapat disederhanakan menjadi

$$U(\omega,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty cos\left(\frac{\omega^3}{3} - i\omega^2 - A|U(\omega,t)|^6\omega\right)d\omega$$

Kemudian substitusi $|U(\omega,t)|^6$ dengan persamaan (3.55) maka didapatkan

$$U(\omega,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty cos\left(\frac{\omega^3}{3} - i\omega^2 - A\left(\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}u(x,t)dt\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\bar{u}(x,t)dt\right)\right)^3 \omega\right)d\omega \tag{3.59}$$

Dengan demikian didapatkan solusi dari persamaan (3.57) adalah persamaan (3.59) dan untuk mendapatkan solusi persamaan Schrodinger (3.54) maka transformasi Fourier yang terdapat pada persamaan (3.59) harus diinverskan. Kemudian analog dengan persamaan (3.28) maka persamaan (3.59) menjadi

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty cos\left(\frac{\omega^3}{3} - i\omega^2 - A\left(\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}U(x,\omega)d\omega\right)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\bar{U}(x,\omega)d\omega\right)\right)^3 \omega\right)d\omega \tag{3.60}$$

Diberikan kondisi awal adalah persamaan (3.32) dan (3.34) maka persamaan (3.60) menjadi

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} cos\left(\frac{\omega^3}{3} - i\omega^2 - A\left(\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\omega^2 d\omega\right)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\omega^2\, d\omega\right)\right)^3 \omega\right) d\omega$$

Persamaan ini dapat disederhanakan menjadi

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} cos\left(\frac{\omega^3}{3} - i\omega^2 - A\left(\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\omega^2 d\omega\right)^2\right)^3 \omega\right) d\omega \tag{3.61}$$

Analog dengan persamaan (3.38) dan (3.39) maka didapatkan hasil dari persamaan (3.61) adalah

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} cos\left(\frac{\omega^3}{3} - i\omega^2 - A((0)^2)^3\omega\right) d\omega$$

Maka didapatkan

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} cos\left(\frac{\omega^3}{3} - i\omega^2\right) d\omega \tag{3.62}$$

Dengan demikian persamaan (3.62) adalah solusi persamaan Schrodinger (3.54).

Dari pemaparan di atas didapatkan bentuk-bentuk fungsi Airy yaitu persamaan (3.40), (3.53), (3.62) dan bentuk-bentuk ini memberikan bentuk generalisasi fungsi Airy yang sama, meskipun ditingkatkan pangkat modulusnya hingga $2m$ dalam hal ini memberikan makna bahwa solusi dari persamaan

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + A|u(x,t)|^2 u(x,t) = 0$$

adalah

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} cos\left(\frac{\omega^3}{3} - i\omega^2\right) d\omega \tag{3.63}$$

dengan demikian dapat disimpulkan bahwa bentuk umum fungsi Airy sebagai solusi persamaan Schrodinger nonlinier (3.14) adalah persamaan (3.63).

Kasus II: jika n ganjil maka persamaan (3.13) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}+\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+A|u(x,t)|^{2m+1}u(x,t)=0 \qquad (3.64)$$

Jika $m=0$ maka dari persamaan (3.83) didapatkan

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}+\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+A|u(x,t)|u(x,t)=0 \qquad (3.65)$$

Kemudian memandang transformasi untuk $|u(x,t)|$ adalah $|U(\omega,t)|$ dan berdasarkan transformasi Fourier yaitu persamaan (3.16) maka didapatkan

$$|U(\omega,t)|=\left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}u(x,t)dt\right| \qquad (3.66)$$

Berdasarkan persamaan (3.18) maka didapatkan modifikasi dari persamaan (3.65) adalah

$$i\omega U(\omega,t)+\frac{\partial^2 U(\omega,t)}{\partial x^2}+A|U(\omega,t)|U(\omega,t)=0$$

Persamaan ini dapat disederhanakan menjadi

$$\frac{\partial^2 U(\omega,t)}{\partial x^2}=(-i\omega-A|U(\omega,t)|)U(\omega,t) \qquad (3.67)$$

Misalkan $-i\omega-A|U(\omega,t)|=B$, maka persamaan (3.67) menjadi

$$\frac{\partial^2 U(\omega,t)}{\partial x^2}=BU(\omega,t) \qquad (3.68)$$

Selanjutnya analog dengan persamaan (2.60) maka persamaan (3.68) mempunyai solusi fungsi Airy dengan bentuk berikut:

$$U(\omega,t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}cos\left(\frac{\omega^3}{3}+B\omega\right)d\omega$$

Substitusi B dengan $-i\omega-A|U(\omega,t)|$ maka didapatkan

$$U(\omega,t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}cos\left(\frac{\omega^3}{3}+(-i\omega-A|U(\omega,t)|)\omega\right)d\omega \tag{3.69}$$

Persamaan (3.69) dapat disederhanakan menjadi

$$U(\omega,t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}cos\left(\frac{\omega^3}{3}-i\omega^2-A|U(\omega,t)|\omega\right)d\omega \tag{3.70}$$

Kemudian substitusi $|U(\omega,t)|$ dengan persamaan (3.66) pada persamaan (3.70) maka didapatkan

$$U(\omega,t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}cos\left(\frac{\omega^3}{3}-i\omega^2-A\left|\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega t}u(x,t)dt\right|\omega\right)d\omega \tag{3.71}$$

Dengan demikian persamaan (3.71) adalah solusi persamaan Airy (3.68) dan untuk mendapatkan solusi persamaan Schrodinger (3.68) maka transformasi Fourier yang terdapat pada persamaan (3.71) harus diinverskan dan analog dengan persamaan (3.28) maka persamaan (3.71) menjadi

$$u(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}cos\left(\frac{\omega^3}{3}-i\omega^2-A\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega t}U(\omega,t)dt\right|\omega\right)d\omega \tag{3.72}$$

Diberikan kondisi awal adalah persamaan (3.32) dan (3.34) maka persamaan (3.72) menjadi

$$u(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}cos\left(\frac{\omega^3}{3}-i\omega^2-A\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega t}\omega^2dt\right|\omega\right)d\omega \tag{3.73}$$

Analog dengan persamaan (3.38) dan (3.39) maka didapatkan hasil dari persamaan (3.73) adalah

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} cos\left(\frac{\omega^3}{3} - i\omega^2 - A|0|\omega\right) d\omega \qquad (3.74)$$

Dengan demikian persamaan (3.74) adalah fungsi Airy sebagai solusi persamaan Schrodinger nonlinier (3.65).

Selanjutnya jika $m = 1$ maka dari persamaan (3.64) didapatkan

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + A|u(x,t)|^3 u(x,t) = 0 \qquad (3.75)$$

Memandang transformasi untuk $|u(x,t)|^3$ adalah $|U(\omega,t)|^3$ maka dapat dinyatakan sebagai berikut

$$|U(\omega,t)|^3 = \big(U(\omega,t).\bar{U}(\omega,t)\big)|U(\omega,t)|$$

Berdasarkan persamaan (3.16) maka transformasi $|U(\omega,t)|^3$ menjadi

$$|U(\omega,t)|^3 = \left(\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}u(x,t)dt\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\bar{u}(x,t)dt\right)\right)\left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}u(x,t)dt\right| \qquad (3.76)$$

Berdasarkan persamaan (3.18) maka diperoleh modifikasi persamaan (3.75) adalah

$$i\omega U(\omega,t) + \frac{\partial^2 U(\omega,t)}{\partial x^2} + A|U(\omega,t)|^3 U(\omega,t) = 0$$

Bentuk sederhana persamaan ini adalah

$$\frac{\partial^2 U(\omega,t)}{\partial x^2} = (-i\omega - A|U(\omega,t)|^3)U(\omega,t) \qquad (3.77)$$

Misalkan $-i\omega - A|U(\omega,t)|^3 = B$, maka persamaan (3.77) menjadi

$$\frac{\partial^2 U(\omega,t)}{\partial x^2} = BU(\omega,t) \tag{3.78}$$

Berdasarkan persamaan (2.60) maka solusi untuk persamaan (3.78) adalah

$$U(\omega,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty cos\left(\frac{\omega^3}{3} + B\omega\right)d\omega$$

Substitusi B dengan $-i\omega - A|U(\omega,t)|^3$ maka didapatkan

$$U(\omega,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty cos\left(\frac{\omega^3}{3} + (-i\omega - A|U(\omega,t)|^3)\omega\right)d\omega \tag{3.79}$$

Persamaan (3.79) dapat disederhanakan menjadi

$$U(\omega,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty cos\left(\frac{\omega^3}{3} - i\omega^2 - A|U(\omega,t)|^3\omega\right)d\omega$$

Kemudian substitusi $|U(\omega,t)|^3$ dengan persamaan (3.76) adalah

$$U(\omega,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty cos\left(\begin{array}{c}\frac{\omega^3}{3} - i\omega^2 - A\left(\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}u(x,t)dt\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\bar{u}(x,t)dt\right)\right) \\ \left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}u(x,t)dt\right|\omega\end{array}\right)d\omega \tag{3.80}$$

Dengan demikian didapatkan solusi dari persamaan (3.78) adalah persamaan (3.80) dan untuk mendapatkan solusi persamaan Schrodinger (3.75) maka transformasi Fourier yang terdapat pada persamaan (3.80) harus diinverskan. Dan analog dengan persamaan (3.28) maka persamaan (3.80) menjadi

$$u(x,t) = \tag{3.81}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} cos\left(\frac{\frac{\omega^3}{3}-i\omega^2-A\left(\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}U(\omega,t)d\omega\right)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\bar{U}(\omega,t)d\omega\right)\right)}{\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}U(\omega,t)dt\right|\omega}\right)d\omega$$

Kemudian diberikan kondisi awal adalah persamaan (3.32) dan (3.34) maka persamaan (3.81) menjadi

$$u(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} cos\left(\frac{\frac{\omega^3}{3}-i\omega^2-A\left(\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\omega^2 d\omega\right)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\omega^2 d\omega\right)\right)}{\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\omega^2 dt\right|\omega}\right)d\omega$$

Persamaan ini dapat disederhanakan menjadi

$$u(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} cos\left(\frac{\omega^3}{3}-i\omega^2-A\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\omega^2 d\omega\right)^2\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\omega^2 dt\right|\omega\right)d\omega \qquad (3.82)$$

Analog dengan persamaan (3.38) dan (3.39) maka didapatkan hasil dari persamaan (3.82) adalah

$$u(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} cos\left(\frac{\omega^3}{3}-i\omega^2-A((0)^2|0|)\omega\right)d\omega \qquad (3.83)$$

Dengan demikian persamaan (3.83) adalah solusi persamaan Schrodinger (3.75).

Selanjutnya, jika $m=2$ maka dari persamaan (3.64) didapatkan

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}+\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+A|u(x,t)|^5 u(x,t)=0 \qquad (3.84)$$

Memandang transformasi untuk $|u(x,t)|^5$ adalah $|U(\omega,t)|^5$ maka dapat dinyatakan sebagai berikut

$$|U(\omega,t)|^5=\left(U(\omega,t).\bar{U}(\omega,t)\right)^2|U(\omega,t)|$$

Berdasarkan persamaan (3.16) maka transformasi $|U(\omega,t)|^5$ menjadi

$$|U(\omega,t)|^5 = \left(\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}u(x,t)dt\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\bar{u}(x,t)dt\right)\right)^2 \left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}u(x,t)dt\right| \qquad (3.85)$$

Selanjutnya dengan memandang persamaan (3.18) maka diperoleh modifikasi persamaan (3.84) adalah

$$i\omega U(\omega,t) + \frac{\partial^2 U(\omega,t)}{\partial x^2} + A|U(\omega,t)|^5 U(\omega,t) = 0$$

Persamaan ini dapat disederhanakan menjadi

$$\frac{\partial^2 U(\omega,t)}{\partial x^2} = (-i\omega - A|U(\omega,t)|^5)U(\omega,t) \qquad (3.86)$$

Misalkan $-i\omega - A|U(\omega,t)|^5 = B$, maka persamaan (3.86) menjadi

$$\frac{\partial^2 U(\omega,t)}{\partial x^2} = BU(\omega,t) \qquad (3.87)$$

Analog dengan persamaan (2.60) maka solusi untuk persamaan (3.87) adalah

$$U(\omega,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} cos\left(\frac{\omega^3}{3} + B\omega\right)d\omega$$

Substitusi B dengan $-i\omega - A|U(\omega,t)|^5$ maka didapatkan

$$U(\omega,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} cos\left(\frac{\omega^3}{3} + (-i\omega - A|U(\omega,t)|^5)\omega\right)d\omega$$

Persamaan ini dapat disederhanakan menjadi

$$U(\omega,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} cos\left(\frac{\omega^3}{3} - i\omega^2 - A|U(\omega,t)|^5\omega\right)d\omega \qquad (3.88)$$

Kemudian substitusi $|U(\omega,t)|^5$ dengan persamaan (3.85) dan diperoleh modifikasi dari persamaan (3.88) adalah

$U(\omega,t) =$

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} cos\left(\frac{\frac{\omega^3}{3} - i\omega^2 - A\left(\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}u(x,t)dt\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\bar{u}(x,t)dt\right)\right)^2}{\left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}u(x,t)dt\right|\omega}\right)d\omega \quad (3.89)$$

Dengan demikian didapatkan solusi dari persamaan (3.83) adalah persamaan (3.89) dan untuk mendapatkan solusi persamaan Schrodinger (3.84) maka transformasi Fourier yang terdapat pada persamaan (3.89) harus diinverskan. Analog dengan persamaan (3.28) maka persamaan (3.89) menjadi

$u(x,t) =$

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} cos\left(\frac{\frac{\omega^3}{3} - i\omega^2 - A\left(\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}U(\omega,t)d\omega\right)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\bar{U}(\omega,t)d\omega\right)\right)^2}{\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}U(\omega,t)dt\right|\omega}\right)d\omega \quad (3.90)$$

Kemudian diberikan kondisi awal adalah persamaan (3.32) dan (3.34) maka persamaan (3.90) menjadi

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} cos\left(\frac{\frac{\omega^3}{3} - i\omega^2 - A\left(\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\omega^2 d\omega\right)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\omega^2 d\omega\right)\right)^2}{\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\omega^2 dt\right|\omega}\right)d\omega$$

Bentuk ini dapat disederhanakan menjadi

$u(x,t) =$

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} cos\left(\frac{\frac{\omega^3}{3} - i\omega^2 - A\left(\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\omega^2 d\omega\right)^2\right)^2}{\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\omega^2 dt\right|\omega}\right)d\omega \quad (3.91)$$

Analog dengan persamaan (3.37), (3.39) dan (3.40) maka didapatkan hasil dari persamaan (3.120) adalah

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} cos\left(\frac{\omega^3}{3} - i\omega^2\right) d\omega \qquad (3.92)$$

Dengan demikian persamaan (3.92) adalah solusi persamaan Schrodinger (3.84).

Sehingga didapatkan beberapa fungsi Airy yaitu persamaan (3.74), (3.83), (3.92) dan bentuk-bentuk ini memberikan generalisasi fungsi Airy yang sama, meskipun ditingkatkan pangkat modulusnya dengan bentuk $2m + 1$ yang artinya untuk solusi persamaan Schrodinger

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + A|u(x,t)|^{2m+1}u(x,t) = 0$$

adalah

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} cos\left(\frac{\omega^3}{3} - i\omega^2\right) d\omega \qquad (3.93)$$

Dengan demikian solusi persamaan Schrodinger (3.64) adalah persamaan (3.93).

3.3 Betuk Solusi Analitik Persamaan Schrodinger Nonlinier Dimensi Tinggi dengan Generalisasi Fungsi Airy

Pada paparan sebelumnya didapatkan generalisasi bahwa pangkat n dari modulus suku $A|u(x,t)|^n u(x,t)$ untuk setiap n genap maupun ganjil menghasilkan solusi dengan bentuk yang sama dan hal ini memberikan kesimpulan bahwa solusi analitik persamaan Shrodinger nonlinier satu dimensi

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + A|u(x,t)|^n u(x,t) = 0$$

adalah

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} cos\left(\frac{\omega^3}{3} - i\omega^2\right) d\omega$$

Selanjutnya, analog dengan persamaan (3.12) maka persamaan Schrodinger nonlinier dua dimensi dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial {x_2}^2} + A|u|^2 u = 0 \tag{3.94}$$

Dimana $u = u(x_1, x_2, t)$ dan memandang $U(\omega, t)$ sebagai transformasi Fourier dari $u(x_1, x_2, t)$ dengan bentuk berikut:

$$U(\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t+x_2)} u\, dt dx_2 \tag{3.95}$$

Jika persamaan (3.95) diturunkan terhadap t maka didapatkan

$$\frac{\partial U(\omega, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t+x_2)} u\, dt dx_2\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t+x_2)} u_t\, dt dx_2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\left[e^{-i\omega(t+x_2)} u\right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} (-i\omega(1 + x_2)) e^{-i\omega(t+x_2)} u\, dt\right) dx_2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (i\omega(1 + x_2)) e^{-i\omega(t+x_2)} u\, dt dx_2$$

$$= i\omega(1 + x_2) \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t+x_2)} u\, dt dx_2$$

$$= i\omega(1 + x_2) U(\omega, t) \tag{3.96}$$

Untuk mendapatkan tranformasi Fourier dari $\frac{\partial^2 U(\omega,t)}{\partial {x_2}^2}$ maka persamaan (3.95) diturunkan dua kali terhadap x_2, yaitu:

$$\frac{\partial^2 U(\omega,t)}{\partial {x_2}^2} = \frac{\partial^2}{\partial {x_2}^2}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t+x_2)} u\, dt dx_2\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t+x_2)} u_{x_2x_2}\, dx_2 dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\left[e^{-i\omega(t+x_2)} u_{x_2}\right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty}(-i\omega(t+1))e^{-i\omega(t+x_2)} u_{x_2} dx_2\right) dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(i\omega(t+1))e^{-i\omega(t+x_2)} u_{x_2} dx_2\, dt$$

$$= i\omega(t+1)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t+x_2)} u_{x_2} dx_2 dt$$

$$= i\omega(t+1)\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left(\left[e^{-i\omega(t+x_2)} u\right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty}(-i\omega(t+1))e^{-i\omega(t+x_2)} u\, dx_2\right) dt\right)$$

$$= i\omega(t+1)\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(i\omega(t+1))e^{-i\omega(t+x_2)} u\, dx_2\, dt\right)$$

$$= (i\omega(t+1))^2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t+x_2)} u\, dx_2 dt$$

$$= -\omega^2(t+1)^2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t+x_2)} u\, dt dx_2$$

$$= -\omega^2(t+1)^2 U(\omega,t) \tag{3.97}$$

Selanjutnya memandang transformasi Fourier dari $|u(x_1,x_2,t)|^2$ adalah $|U(\omega,t)|^2$ maka dapat dinyatakan

$$|U(\omega,t)|^2 = U(\omega,t)\bar{U}(\omega,t) \tag{3.98}$$

Berdasarkan persamaan (3.99) maka persamaan (3.98) menjadi

$$|U(\omega,t)|^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t+x_2)}u\,dtdx_2\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t+x_2)}\bar{u}\,dtdx_2\right) \tag{3.99}$$

Dengan persamaan (3.96) dan (3.97) maka persamaan (3.94) menjadi

$$i\omega(1+x_2)U(\omega,t) + \frac{\partial^2 U(\omega,t)}{\partial x^2} - \omega^2(t+1)^2U(\omega,t) + A|U(\omega,t)|^2U(\omega,t) = 0$$

Persamaan ini dapat disederhanakan menjadi

$$\frac{\partial^2 U(\omega,t)}{\partial x^2} = (\omega^2(t+1)^2 - i\omega(1+x_2) - A|U(\omega,t)|^2)U(\omega,t) \tag{3.100}$$

Misalkan $\omega^2(t+1)^2 - i\omega(1+x_2) - A|U(\omega,t)|^2 = B$ maka persamaan (3.100) menjadi

$$\frac{\partial^2 U(\omega,t)}{\partial x^2} = BU(\omega,t) \tag{3.101}$$

Berdaskan persamaan (2.60) maka solusi bagi persamaan (3.100) adalah

$$U(\omega,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} cos\left(\frac{\omega^3}{3} + B\omega\right)d\omega$$

Substitusi B dengan $\omega^2(t+1)^2 - i\omega(1+x_2) - A|U(\omega,t)|^2$ maka didapatkan

$$U(\omega,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} cos\left(\frac{\omega^3}{3} + (\omega^2(t+1)^2 - i\omega(1+x_2) - A|U(\omega,t)|^2)\omega\right)d\omega$$

Bentuk sederhana persamaan ini adalah

$$U(\omega,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} cos\left(\frac{\omega^3}{3} + (t+1)^2\omega^3 - i(1+x_2)\omega^2 - A|U(\omega,t)|^2\omega\right)d\omega \tag{3.102}$$

Kemudian substitusi $|U(\omega,t)|^2$ dengan persamaan (3.99) maka didapatka

$U(\omega,t) =$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty cos\begin{pmatrix} \frac{\omega^3}{3} + (t+1)^2\omega^3 - i(1+x_2)\omega^2 \\ -A\left(\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t+y)}u\, dtdx_2\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t+y)}\bar{u}\, dtdx_2\right)\right)\omega \end{pmatrix} d\omega \quad (3.103)$$

Persamaan (3.103) adalah solusi bagi persamaan Airy (3.101), sehingga untuk mendapatkan solusi persamaan Schrodinger (3.94) maka transformasi Fourier yang terdapat pada persamaan (3.103) harus diinverskan. Selanjutnya pandang persamaan (3.95) sebagai transformasi Fourier maka invers dari transformasi Fourier tersebut adalah

$$\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t+x_2)}\, U(\omega,t)dtdx_2 \quad (3.104)$$

Dengan menerapkan invers transformasi Fourier (3.104) pada persamaan (3.103) maka didapatkan solusi bagi persamaan Schrodinger (3.94) adalah

$u(x_1,x_2,t) =$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty cos\left(\frac{\omega^3}{3} + (t+1)^2\omega^3 - i(1+x_2)\omega^2\right. \quad (3.105)$$
$$\left. - A\left(\frac{1}{(2\pi)^4}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t+x_2)}\, U(\omega,t)dtdx_2\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t+x_2)}\, \overline{U}(\omega,t)dtdx_2\right)\right)\omega\right)d\omega$$

Kemudian pandang persamaan Schrodinger nonlinier tiga dimensi berikut

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial {x_2}^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial {x_3}^2} + A|u|^2 u = 0 \quad (3.106)$$

Dimana $u = u(x_1,x_2,x_3,t)$ dan memandang $U(\omega,t)$ sebagai transformasi Fourier dari $u(x_1,x_2,x_3,t)$ dengan bentuk sebagai berikut:

$$U(\omega,t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t+x_2+x_3)}u\,dtdx_2dx_3 \tag{3.107}$$

Jika persamaan (3.107) diturunkan terhadap t maka didapatkan

$$\frac{\partial U(\omega,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t+x_2+x_3)}u\,dtdx_2dx_3\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t+x_2+x_3)}u_t\,dtdx_2dx_3$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\left[e^{-i\omega(t+x_2+x_3)}u\right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty}(-i\omega(1+x_2+x_3))e^{-i\omega(t+x_2+x_3)}u\,dt\right)dx_2dx_3$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(i\omega(1+x_2+x_3))e^{-i\omega(t+x_2+x_3)}u\,dtdx_2dx_3$$

$$= i\omega(1+x_2+x_3)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t+x_2+x_3)}u\,dtdx_2dx_3$$

$$= i\omega(1+x_2+x_3)U(\omega,t) \tag{3.108}$$

Untuk mendapatkan tranformasi Fourier dari $\frac{\partial^2 U(\omega,t)}{\partial {x_2}^2}$ maka persamaan (3.107) diturunkan dua kali terhadap x_2, yaitu

$$\frac{\partial^2 U(\omega,t)}{\partial {x_2}^2} = \frac{\partial^2}{\partial {x_2}^2}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t+x_2+x_3)}u\,dtdx_2dx_3\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t+x_2+x_3)}u_{x_2x_2}\,dtdx_2dx_3$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\left[e^{-i\omega(t+x_2+x_3)}u_{x_2}\right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty}(-i\omega(t+1+x_3))e^{-i\omega(t+x_2+x_3)}u_{x_2}dx_2\right)dtdx_3$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (i\omega(t+1+x_3))e^{-i\omega(t+x_2+x_3)}u_{x_2}\, dx_2dtdx_3$$

$$= i\omega(t+1+x_3)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t+x_2+x_3)}u_{x_2}\, dx_2dtdx_3$$

$$= i\omega(t+1+x_3)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{-i\omega(t+x_2+x_3)}u|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty}(-i\omega(t+1+z))e^{-i\omega(t+x_2+x_3)}u\, dx_2\right)dtdx_3$$

$$= \left(i\omega(t+1+x_3)\right)^2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t+x_2+x_3)}u\, dtdx_2dx_3$$

$$= -\omega^2(t+1+x_3)^2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t+x_2+x_3)}u\, dtdx_2dx_3$$

$$= -\omega^2(t+1+x_3)^2U(\omega,t) \tag{3.109}$$

Untuk mendapatkan tranformasi Fourier dari $\frac{\partial^2 U(\omega,t)}{\partial {x_3}^2}$ maka persamaan (3.107) diturunkan dua kali terhadap x_3, yaitu:

$$\frac{\partial^2 U(\omega,t)}{\partial {x_3}^2} = \frac{\partial^2}{\partial {x_3}^2}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t+x_2+x_3)}u\, dtdx_2dx_3\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t+x_2+x_3)}u_{x_3x_3}\, dtdx_2dx_3$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{-i\omega(t+x_2+x_3)}u_{x_3}|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty}(-i\omega(t+x_2+1))e^{-i\omega(t+x_2+x_3)}u_{x_3}dx_3\right)dtdx_2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (i\omega(t+x_2+1))e^{-i\omega(t+x_2+x_3)}u_{x_3}\, dx_3dtdx_2$$

$$= i\omega(t+x_2+1)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t+x_2+x_3)}u_{x_3}\, dx_3dtdx_2$$

$$= i\omega(t+x_2+1)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{-i\omega(t+x_2+x_3)}u|_{-\infty}^{\infty}+\int_{-\infty}^{\infty}(i\omega(t+x_2+1))e^{-i\omega(t+x_2+x_3)}u\,dx_3\right)dtdx_2$$

$$= \left(i\omega(t+x_2+1)\right)^2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega(t+x_2+x_3)}u\,dtdx_2dx_3$$

$$= -\omega^2(t+x_2+1)^2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega(t+x_2+x_3)}u\,dtdx_2dx_3$$

$$= -\omega^2(t+x_2+1)^2U(\omega,t) \tag{3.110}$$

Selanjutnya memandang transformasi Fourier dari $|u(x_1,x_2,x_3,t)|^2$ adalah $|U(\omega,t)|^2$ maka dapat dinyatakan

$$|U(\omega,t)|^2 = U(\omega,t)\bar{U}(\omega,t) \tag{3.111}$$

Berdasarkan persamaan (3.107) maka persamaan (3.111) menjadi

$$|U(\omega,t)|^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega(t+x_2+x_3)}u\,dtdx_2dx_3\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega(t+x_2+x_3)}\bar{u}\,dtdx_2dx_3\right) \tag{3.112}$$

Dengan memandang persamaan (3.108), (3.109) dan (3.110) maka persamaan (3.106) menjadi

$$i\omega(1+x_2+x_3)U(\omega,t)+\frac{\partial^2U(\omega,t)}{\partial x^2}-\omega^2(t+1+x_3)^2U(\omega,t)$$

$$-\omega^2(t+x_2+1)^2U(\omega,t)+A|U(\omega,t)|^2U(\omega,t)=0$$

Persamaan ini dapat disederhanakan menjadi

$$\frac{\partial^2U(\omega,t)}{\partial x^2} = (\omega^2(t+1+x_3)^2+\omega^2(t+x_2+1)^2-i\omega(1+x_2+x_3) - A|U(\omega,t)|^2)U(\omega,t) \tag{3.113}$$

Misalkan $\omega^2(t+1+x_3)^2+\omega^2(t+x_2+1)^2-i\omega(1+x_2+x_3)-A|U(\omega,t)|^2=B$ maka persamaan (3.113) menjadi

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = BU(\omega, t) \tag{3.114}$$

Analog dengan ersamaan (2.60) maka solusi persamaan (3.114) adalah

$$U(\omega, t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} cos\left(\frac{\omega^3}{3} + B\omega\right) d\omega$$

Substitusi B dengan $\omega^2(t + 1 + x_3)^2 + \omega^2(t + x_2 + 1)^2 - i\omega(1 + x_2 + x_3) - A|U(\omega, t)|^2$ maka didapatkan

$$U(\omega, t) =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} cos\left(\frac{\omega^3}{3} + (\omega^2(t + 1 + x_3)^2 + \omega^2(t + x_2 + 1)^2 - i\omega(1 + x_2 + x_3) - A|U(\omega, t)|^2)\omega\right) d\omega$$

Bentuk sederhana persamaan ini adalah

$$U(\omega, t) =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} cos\begin{pmatrix}\frac{\omega^3}{3} + (t + 1 + x_3)^2\omega^3 + \omega^2(t + x_2 + 1)^2\omega^3 \\ -i(1 + x_2 + x_3)\omega^2 - A|U(\omega, t)|^2\omega\end{pmatrix} d\omega \tag{3.115}$$

Kemudian substitusi $|U(\omega, t)|^2$ dengan persamaan (3.112) maka didapatkan

$$U(\omega, t) =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} cos\left(\frac{\omega^3}{3} + (t + 1 + x_3)^2\omega^3 + \omega^2(t + x_2 + 1)^2\omega^3 - i(1 + x_2 + x_3)\omega^2\right. \tag{3.116}$$

$$\left. - A\left(\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t+x_2+x_3)}u\, dtdx_2dx_3\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t+x_2+x_3)}\bar{u}\, dtdx_2dx_3\right)\right)\omega\right) d\omega$$

Persamaan (3.116) adalah solusi bagi persamaan Airy (3.114), sehingga untuk mendapatkan solusi persamaan Schrodinger (3.106) maka transformasi Fourier yang terdapat pada persamaan (3.116) harus diinverskan. Kemudian pandang persamaan (3.107) adalah transformasi Fourier maka invers dari transformasi Fourier tersebut adalah

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t+x_2+x_3)}\, U(\omega,t)dtdx_2dx_3 \tag{3.117}$$

Sehingga didapatkan solusi bagi persamaan Schrodinger (3.106) adalah

$$u(x_1,x_2,x_3,t) =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} cos\left(\frac{\omega^3}{3} + (t+1+x_3)^2\omega^3 + \omega^2(t+x_2+1)^2\omega^3 - i(1+x_2+x_3)\omega^2\right.$$
$$\left. - A\left(\frac{1}{(2\pi)^6}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t+x_2+x_3)}\, U(\omega,t)dtdx_2dx_3\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t+x_2+x_3)}\, U(\omega,t)dtdx_2dx_3\right)\right)\omega\right)d\omega \tag{3.118}$$

Meninjau persamaan Schrodinger nonlinier empat dimensi, yaitu:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial {x_2}^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial {x_3}^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial {x_4}^2} + A|u|^2u = 0 \tag{3.119}$$

Dimana $u = u(x_1,x_2,x_3,x_4,t)$ dan selanjutnya jika $U(\omega,t)$ sebagai transformasi Fourier dari $u(x_1,x_2,x_3,x_4,t)$ dengan bentuk sebagai berikut:

$$U(\omega,t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t+x_2+x_3+x_4)}u\, dtdx_2dx_3dx_4 \tag{3.120}$$

Jika persamaan (3.120) diturunkan terhadap t maka didapatkan

$$\frac{\partial U(\omega,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t+x_2+x_3+x_4)}u\, dtdx_2dx_3dx_4\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t+x_2+x_3+x_4)}u_t\, dtdx_2dx_3dx_4$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{-i\omega(t+x_2+x_3+x_4)}u|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty}(-i\omega(1+x_2+x_3+x_4))e^{-i\omega(t+x_2+x_3+x_4)}u\, dt\right)dx_2dx_3dx_4$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(i\omega(1+x_2+x_3+x_4))e^{-i\omega(t+x_2+x_3+x_4)}u\, dtdx_2dx_3dx_4$$

$$= i\omega(1 + x_2 + x_3 + x_4) \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t+x_2+x_3+x_4)}u\, dtdx_2dx_3dx_4$$

$$= i\omega(1 + x_2 + x_3 + x_4)U(\omega, t) \qquad (3.121)$$

Untuk mendapatkan tranformasi Fourier dari $\frac{\partial^2 U(\omega,t)}{\partial {x_2}^2}$ maka persamaan (3.120) diturunkan dua kali terhadap x_2, yaitu

$$\frac{\partial^2 U(\omega,t)}{\partial {x_2}^2} = \frac{\partial^2}{\partial {x_2}^2}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t+x_2+x_3+x_4)}u\, dtdx_2dx_3dx_4\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t+x_2+x_3+x_4)}u_{x_2x_2}\, dtdx_2dx_3dx_4$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{-i\omega(t+x_2+x_3+x_4)}u_{x_2}|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty}(i\omega(t+1+x_3+x_4))e^{-i\omega(t+x_2+x_3+x_4)}u_{x_2}dx_2\right)dtdx_3dx_4$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(i\omega(t+1+x_3+x_4))e^{-i\omega(t+x_2+x_3+x_4)}u_{x_2}\, dx_2dtdx_3dx_4$$

$$= i\omega(t+1+x_3+x_4)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t+x_2+x_3+x_4)}u_{x_2}\, dx_2dtdx_3dx_4$$

$$= i\omega(t+1+x_3+x_4)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{-i\omega(t+x_2+x_3+x_4)}u|_{-\infty}^{\infty}\right.$$

$$\left. + \int_{-\infty}^{\infty}(i\omega(t+1+x_3+x_4))e^{-i\omega(t+x_2+x_3+x_4)}udx_2\right)dtdx_3dx_4$$

$$= (i\omega(t+1+x_3+x_4))^2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t+x_2+x_3+x_4)}u\, dx_2dtdx_3dx_4$$

$$= -\omega^2(t+1+x_3+x_4)^2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t+x_2+x_3+x_4)}u\, dx_2dtdx_3dx_4$$

$$= -\omega^2(t+1+x_3+x_4)^2U(\omega,t) \tag{3.122}$$

Untuk mendapatkan tranformasi Fourier dari $\frac{\partial^2 U(\omega,t)}{\partial {x_3}^2}$ maka persamaan (3.120) diturunkan dua kali terhadap x_3, yaitu:

$$\frac{\partial^2 U(\omega,t)}{\partial {x_3}^2} = \frac{\partial^2}{\partial {x_3}^2}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t+x_2+x_3+x_4)}u\ dtdx_2dx_3dx_4\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t+x_2+x_3+x_4)}u_{x_3x_3}\ dtdx_2dx_3dx_4$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{-i\omega(t+x_2+x_3+x_4)}u_{x_3}|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} i\omega(t+x_2+1+x_4)e^{-i\omega(t+x_2+x_3+x_4)}u_{x_3}dx_3\right)dtdx_2d\boldsymbol{x_4}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} i\omega(t+x_2+1+x_4)e^{-i\omega(t+x_2+x_3+x_4)}u_{x_3}\ dx_3dtdx_2dx_4$$

$$= i\omega(t+x_2+1+x_4)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t+x_2+x_3+x_4)}u_{x_3}\ dx_3dtdx_2dx_4$$

$$= i\omega(t+x_2+1+x_4)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Bigg(e^{-i\omega(t+x_2+x_3+x_3)}u|_{-\infty}^{\infty}$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} i\omega(t+x_2+1+x_4)e^{-i\omega(t+y+z+s)}u\ dx_3\Bigg)dtdx_2dx_4$$

$$= \left(i\omega(t+x_2+1+x_4)\right)^2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t+x_2+x_3+x_4)}u\ dx_3dtdx_2dx_4$$

$$= -\omega^2(t+x_2+1+x_4)^2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t+x_2+x_3+x_4)}u\ dx_3dtdx_2dx_4$$

$$= -\omega^2(t+x_2+1+x_4)^2U(\omega,t) \tag{3.123}$$

Untuk mendapatkan tranformasi Fourier dari $\frac{\partial^2 U(\omega,t)}{\partial {x_4}^2}$ maka persamaan (3.120) diturunkan dua kali terhadap x_4, yaitu:

$$\frac{\partial^2 U(\omega,t)}{\partial {x_4}^2} = \frac{\partial^2}{\partial {x_4}^2}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t+x_2+x_3+x_4)}u\, dtdx_2dx_3dx_4\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t+x_2+x_3+x_4)}u_{x_4x_4}\, dtdx_2dx_3dx_4$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{-i\omega(t+x_2+x_3+x_4)}u_{x_4}\Big|_{-\infty}^{\infty}\right.$$

$$\left. + \int_{-\infty}^{\infty} i\omega(t+x_2+x_3+1)e^{-i\omega(t+x_2+x_3+x_4)}u_{x_4}dx_4\right)dtdx_2dx_3$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} i\omega(t+x_2+x_3+1)e^{-i\omega(t+x_2+x_3+x_4)}u_{x_4}dx_4dtdx_2dx_3$$

$$= i\omega(t+x_2+x_3+1)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t+x_2+x_3+x_4)}u_{x_4}dx_4dtdx_2dx_3$$

$$= i\omega(t+x_2+x_3+1)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{-i\omega(t+x_2+x_3+x_4)}u\Big|_{-\infty}^{\infty}\right.$$

$$\left. + \int_{-\infty}^{\infty} i\omega(t+x_2+x_3+1)e^{-i\omega(t+y+z+s)}u\, dx_4\right)dtdx_2dx_4$$

$$= \left(i\omega(t+x_2+x_3+1)\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t+y+z+s)}u\, dx_4dtdx_2dx_4$$

$$= -\omega^2(t+x_2+x_3+1)^2 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t+y+z+s)}u\, dx_4dtdx_2dx_4$$

$$= -\omega^2(t+x_2+x_3+1)^2U(\omega,t) \qquad (3.124)$$

Memandang transformasi Fourier dari $|u(x_1,x_2,x_3,x_4,t)|^2$ adalah $|U(\omega,t)|^2$ maka dapat dinyatakan

$$|U(\omega,t)|^2 = U(\omega,t)\bar{U}(\omega,t) \tag{3.125}$$

Berdasarkan persamaan (3.120) maka didapatkan nilai dari $|U(\omega,t)|^2$ adalah

$$|U(\omega,t)|^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t+x_2+x_3+x_4)} u\, dt dx_2 dx_3 dx_4\right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t+x_2+x_3+x_4)} \bar{u}\, dt dx_2 dx_3 dx_4\right) \tag{3.126}$$

Berdasarkan persamaan (3.121), (3.122), (3.123) dan (3.124) maka persamaan (3.119) menjadi

$$i\omega(1+x_2+x_3+x_4)U(\omega,t) + \frac{\partial^2 U(\omega,t)}{\partial x^2} - \omega^2(t+1+x_3+x_4)^2 U(\omega,t) - \omega^2(t+x_2+1+x_4)^2 U(\omega,t) - \omega^2(t+x_2+x_3+1)^2 U(\omega,t) + A|U(\omega,t)|^2 U(\omega,t) = 0$$

Persamaan ini dapat disederhanakan menjadi

$$\frac{\partial^2 U(\omega,t)}{\partial x^2} = \left(\omega^2(t+1+x_3+x_4)^2 + \omega^2(t+x_2+1+x_4)^2 + \omega^2(t+x_2+x_3+1)^2 - i\omega(1+x_2+x_3+x_4) - A|U(\omega,t)|^2\right)U(\omega,t) \tag{3.127}$$

Misal $\omega^2(t+1+x_3+x_4)^2 + \omega^2(t+x_2+1+x_4)^2 + \omega^2(t+x_2+x_3+1)^2 - i\omega(1+x_2+x_3+x_4) - A|U(\omega,t)|^2 = B$ maka persamaan (3.127) menjadi

$$\frac{\partial^2 U(\omega,t)}{\partial x^2} = BU(\omega,t) \tag{3.128}$$

Analog dengan persamaan (2.60) maka solusi persamaan (3.128) adalah

$$U(\omega,t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} cos\left(\frac{\omega^3}{3}+B\omega\right)d\omega$$

Substitusi B dengan $\omega^2(t+1+x_3+x_4)^2+\omega^2(t+x_2+1+x_4)^2+\omega^2(t+x_2+x_3+1)^2-i\omega(1+x_2+x_3+x_4)-A|U(\omega,t)|^2$ maka didapatkan

$$U(\omega,t)=$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} cos\left(\frac{\omega^3}{3}+(\omega^2(t+1+x_3+x_4)^2 +\omega^2(t+x_2+1+x_4)^2+\omega^2(t+x_2+x_3+1)^2-i\omega(1+x_2 +x_3+x_4)-A|U(\omega,t)|^2)\omega\right)d\omega$$

Bentuk sederhana persamaan ini adalah

$$U(\omega,t)=$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} cos\begin{pmatrix}\frac{\omega^3}{3}+(t+1+x_3+x_4)^2\omega^3+(t+x_2+1+x_4)^2\omega^3 \\ +(t+x_2+x_3+1)^2\omega-i(1+x_2+x_3+x_4)\omega^2 \\ -A|U(\omega,t)|^2\omega\end{pmatrix}^3 d\omega \tag{3.129}$$

Kemudian substitusi $|U(\omega,t)|^2$ dengan persamaan (3.126) maka didapatkan

$$U(\omega,t)=$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} cos\begin{pmatrix}\frac{\omega^3}{3}+(t+1+z+s)^2\omega^3+(t+y+1+s)^2\omega^3 \\ +(t+y+z+1)^2\omega-i(1+y+z+s)\omega^2 \\ -A\left(\begin{pmatrix}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t+y+z+s)}u\,dtdydzds\right) \\ \left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t+y+z+s)}\bar{u}\,dtdydzds\right)\end{pmatrix}\right)\omega\end{pmatrix}^3 d\omega \tag{3.130}$$

Persamaan (3.130) adalah solusi bagi persamaan Airy (3.128) sehingga untuk mendapatkan solusi persamaan Schrodinger (3.119) maka transformasi Fourier yang terdapat pada persamaan (3.130) harus diinverskan. Kemudian pandang persamaan (3.120) adalah transformasi Fourier maka invers dari transformasi Fourier tersebut adalah

$$\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t+x_2+x_3+x_4)}\,U(\omega,t)\,dt\,dx_2\,dx_3\,dx_4 \qquad (3.131)$$

Sehingga dengan menerapkan invers transformasi Fourier (3.131) pada persamaan (3.130) maka didapatkan solusi persamaan Schrodinger (3.119) adalah

$$u(x_1,x_2,x_3,x_4,t) =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} cos\left(\begin{matrix}\frac{\omega^3}{3}+(t+1+x_3+x_4)^2\omega^3+(t+x_2+1+x_4)^2\omega^3\\ +(t+x_2+x_3+1)^2\omega^3-i(1+x_2+x_3+x_4)\omega^2\\ -A\left(\begin{matrix}\left(\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t+x_2+x_3+x_4)}\,U(\omega,t)\,dt\,dx_2\,dx_3\,dx_4\right)\\ \left(\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t+x_2+x_3+x_4)}\,\overline{U}(\omega,t)\,dt\,dx_2\,dx_3\,dx_4\right)\end{matrix}\right)\omega\end{matrix}\right)d\omega \qquad (3.132)$$

Dengan demikian didapatkan bentuk generalisasi fungsi Airy yaitu dari persamaan (3.105), (3.118), dan (3.132) didapatkan bentuk generalisasi fungsi Airy sebagai solusi persamaan Schrodinger dimensi n adalah

$$u(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n,t) =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} cos\left(\begin{matrix}\frac{\omega^3}{3}+\left(t+1+\sum_{a=3}^{n}x_a\right)^2\omega^3+\left(t+x_2+1+\sum_{a=4}^{n}x_a\right)^2\omega^3+\dots+\\ +\left(t+\sum_{a=2}^{n-1}x_a+1\right)^2\omega^3-i\left(t+\sum_{a=2}^{n}x_a\right)^2\omega^2\\ -A\left(\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(\sum_{a=2}^{n}x_a+t)}\,dx_n\right)\end{matrix}\right)d\omega$$

Hal ini jika ditinjau secara Islam maka surat Ali-Imran ayat 159 telah memaparkan sikap dalam menghadapi masalah adalah harus lemah lembut dan dikembalikan kepada yang Maha pemberi solusi yaitu Allah SWT. Sehingga memberikan solusi atau jalan keluar yang benar-benar atas rahmat dan bimbingan Allah SWT bukan atas nafsu dan kehendak manusia sendiri. Begitu juga dengan matematika bahwa ilmu matematika selalu memberikan pengajaran yang jujur dan benar (valid), meskipun hanya secara implisit bukan secara langsung akan tetapi memberikan pengaruh yang besar akan pola piker kita untuk selanjutnya.

Misalnya perhitungan matematika yang selalu menuntut untuk berlaku adil dan jujur karena jika terdapat kecurangan sedikit dalam perhitungan maka akan memberikan pengaruh terhadap hasil yang akan dicapai, begitu juga dengan manusia jika dalam menyelesaikan suatu masalah dengan sikap yang arogan dan tanpa adanya komunikasi dengan baik maka hasil yang dicapai bukan hanya solusi akan tetapi masalah yang berlipat ganda. Dengan demikian sikap yang arogan akan menambah masalah dan masalah di sini memungkinkan berpengaruh kepada pihak lain, sehingga bukan hanya menyelesaikan masalah akan tetapi mengganggu kehidupan antar sesama manusia.

Komunikasi yang baik akan menghasilkan solusi yang baik pula dan Islam mengajarkan kepada manusia dalam menyelesaikan masalah dengan komunikasi yaitu musyawarah. Musyawarah di sini harus dilakukan dengan penuh kesabaran dan ketulusan karena sifat dari musyawarah adalah mufakat yang berarti setiap dari manusia harus saling berkomparasi dalam menghadapi masalah. Sehingga dalam mencari solusi harus melewati diskusi dan saling memahami akan setiap alasan yang akan diajukan, maka dengan sikap tersebut akan didapatkan jalan keluar yang benar-benar dari hati nurani dan atas kesepakatan bersama. Dan jika telah didapatkan kata mufakat atas jalan keluarnya maka segala bentuk solusi yang disepakati harus dikembalikan atau diserahkan kepada Allah karena segala yang disepakati berharapkan atas rahmat dan hidayah-Nya.

Jika memandang dari konteks matematika maka sangat sesuai dan koheren karena dalam ilmu matematika juga mengajarkan akan saling memahami dalam menyelesaikan masalah sehingga akan didapatkan solusi yang benar-benar valid dengan masalah yang dihadapi. Maksudnya saling memahami di sini adalah dalam menyelesaikan permasalahan matematika maka harus menggunakan metode yang benar-benar sesuai karena dalam menyelesaikan persoalan matematika tidak hanya berpegangan dengan satu postulat dan metode yang ada, melainkan terdapat berbagai metode yang sangat mendukung jika diperbandingkan antara metode yang satu dengan yang lain.

Dalam penelitian ini, penulis ingin menyelesaikan permasalahan persamaan diferensial parsial, dan berdasarkan teori yang ada maka persamaan diferensial dapat diselesaikan dengan motede karakteristik dan metode solusi batas, akan tetapi dalam penelitian ini penulis tidak menggunakan motede tersebut melainkan dengan metode solusi persamaan Airy yang disebut dengan fungsi Airy dan pada dasarnya fungsi Airy adalah solusi dari persamaan diferensial biasa bukan solusi persamaan diferensial parsial. Karena matematika disebut sebagai "*Queen of Science*" maka ilmu matematika memberikan manipulasi-manipulasi yang ekuivalen dan tidak bertentangan dengan aturan dasar matematika yaitu aljabar, kalkulus, statistik dan kaidah lainnya.

Dengan demikian didapatkan komparasi metode penyelesaian persamaan diferensial parsial dengan jalan tranformasi persamaan diferensial parsial menjadi persamaan diferensial biasa dengan kaidah pemisahan variabel, akan tetapi dengan metode ini memberikan bentuk yang begitu rumit untuk diselesaiakan dengan fungsi Airy, maka manipulasi yang digunakan dalam penelitian ini adalah transformasi Fourier. Sehingga proses mencari solusi di sini juga memerlukan adanya komunikasi antar variabel dan fungsi sehingga solusi yang diperoleh valid dan tidak bertentangan dengan kaidah dasar penyelesaian persamaan diferensial.

Suatu proses untuk menyelesaikan sering disebut dengan usaha, dan usaha di sini bisa bersifat keras atau sekadarnya saja karena usaha yang biasa-biasa saja maka akan memberikan dampak yang biasa-biasa saja dikarenakan dalam berusaha tanpa ada rasa sungguh-sungguh atau bahkan tidak adanya hasil yang didapatkan dari usaha, berbeda dengan usaha yang benar-benar karena dengan usaha yang benar-benar akan didapatkan jalan keluar yang benar-benar dibimbing dan sesuai dengan apa yang diharapkan. Hal ini terdapat dalam surat At-Tholaq ayat 2, yang berbunyi:

وَمَن يَتَّقِ ٱللَّهَ يَجۡعَل لَّهُۥ مَخۡرَجٗا ﴿٢﴾

"barangsiapa bertakwa kepada Allah niscaya dia akan mengadakan baginya jalan keluar" (At-Tholaq 65:2).

Ayat di atas memberikan penjelasan bahwa setiap manusia yang bersungguh-sungguh menjalankan perintahnya dalam rangka bertakwa kepada Allah maka akan dibukakan pintu baginya dalam segala bentuk, misal dalam menghadapi masalah maka akan dibukakan pintu menuju penyelesaian yang benar-benar dari Allah SWT. Begitu juga dengan solusi untuk diri sendiri maka akan dibukakan pintu yang menuju kedamaian bagi diri sendiri. Dalam tafsir Al-Misbah diterangkan bahwa yang dimaksud dengan jalan keluar disini tidak hanya masalah yang bersifat dhohir saja akan tetapi yang bersifat batin juga (Shihab, 2002). Selanjutnya yang dimaksud dengan "Allah akan mengadakan jalan keluar baginya" Artinya, Allah akan menyelamatkannya sebagaimana dikatakan Ibnu Abbas Radhiyallahu 'anhuma, yaitu: Allah akan menyelamatkan setiap manusia dari setiap kesusahan dunia maupun akhirat, Ar-Rabi' bin Khutsaim berkata: "Dia memberi jalan keluar dari setiap apa yang menyesakkan manusia". Dengan demikian usaha yang benar-benar akan menunjukkan jalan keluar yang benar-benar juga, begitu juga dengan menyelesaikan permasalahan matematika jika berusaha dengan sungguh-sungguh dalam membandingkan metode yang ada maka memberikan hasil yang benar-benar bereror kecil atau bahkan benar-benar valid.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Dari paparan pembahasan di atas dapat disimpulkan bahwa bentuk generalisasi fungsi Airy sebagai solusi analitik persamaan Schrodinger Nonlinier, yaitu:

1. Bentuk generalisasi fungsi Airy ketika pangkat n dari modulus persamaan Schrodinger Nonlinier
   a. Jika n genap yaitu $2m$, maka didapatkan bentuk umum fungsi Airy untuk persamaan Schrodinger nonlinier adalah
   $$u(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty cos\left(\frac{\omega^3}{3} - i\omega^2\right)d\omega$$
   b. Jika n ganjil yaitu $2m+1$, maka didapatkan bentuk umum fungsi Airy untuk persamaan Schrodinger nonlinier adalah
   $$u(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty cos\left(\frac{\omega^3}{3} - i\omega^2\right)d\omega$$

   Dengan demikian dapat diambil kesimpulan bahwa ketika pangkat dari modulus dianalisis dengan bentuk genap dan ganjil menghasilkan penyelesaian yang sama, yaitu:
   $$u(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty cos\left(\frac{\omega^3}{3} - i\omega^2\right)d\omega$$

2. Bentuk generalisasi fungsi Airy ketika dimensi dari persamaan Schrodinger nonlinier ditingkatkan hingga dimensi n

$u(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, t) =$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty cos\begin{pmatrix} \frac{\omega^3}{3} + \left(t + 1 + \sum_{a=3}^{n} x_a\right)^2 \omega^3 + \left(t + x_2 + 1 + \sum_{a=4}^{n} x_a\right)^2 \omega^3 + \dots + \\ + \left(t + \sum_{a=2}^{n-1} x_a + 1\right)^2 \omega^3 - i\left(t + \sum_{a=2}^{n} x_a\right)^2 \omega^2 \\ -A\left(\frac{1}{(2\pi)^n}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty}}_{n} e^{i\omega(\sum_{a=2}^{n} x_a + t)}\, dx_n\right)\end{pmatrix} d\omega$$

4.2 Saran

Dalam penelitian ini, peneliti memberikan saran bahwa penelitian ini dapat dilanjutkan pada

1. Penelitian ini dapat dikembangkan pada generalisasi fungsi Airy dengan meningkatkan orde dari persamaan Schrodinger nonlinier
2. Penelitian ini dapat dikomparasikan degan analisis fungsi Bessel
3. Dapat membandingkan antara solusi analitik dengan solusi numerik

DAFTAR PUSTAKA

Agarwal, Ravi P. dan O'regan, Donal. 2009. *Ordinary and Partial Diffreential Equations*. New York: Springer.

Al Qurthubi, S. I. 2008. *Tafsir Al Qurthubi*. *Terjemah athurrahman, Ahmad Hotib, dan Dudi Rasyadi*. Jakarta: Pustaka Azzam.

Billingham, King. 2003. *Differential Equations*. New York: Cambridge University Press.

Finizio, N dan Ladaz G. 1982. *Ordinary Differential Equations, with Modern Applications.*Terjemahan Widiarti Santoso ITB. 1988. Erlangga: Jakarta.

Nagle, Kent R dan Saff, Edward B. 1996. *Fundamentals of Differential Equations and Boundary Value Problems.* University of South Florida.

Nakhae H, Asmar. 2000. *Partial Differential Equations and Boundary Value Problems*. USA. Printice Hall.

Polyanain, A. D. dan Zaitsev. 2004. *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equatiuons*. New York: Chapman & Hall.

Purcell, Edwin J. dan Dale Varberg. 1999. *Kalkulus dan Geometri Analitik*. Jilid 2. Jakarta: Erlangga.

Purwanto, Agus. 2003. *Fisika Matematika 1&2*. Surabaya: ITS Press.

Ross, Shepley L. 1984. *Differential Equations.* Third Edition. New York: John Wiley&Sons. Inc.

Shihab, Quraish. 2002. *Tafsir Al-Qur'an*. Jakarta: Lentera Hati.

Soeharjo. 1996. *Matematika IV*. Surabaya: Diktat ITS.

Soemantri. 1994. *Fungsi Variabel Kompleks*. Yogyakarta: Erlangga.

Spiegel, Murray R. 1983. *Advanced Mathematics for Engineer and Scientists.* Terjemahan oleh Koko Martono. 1994. Jakarta: Erlangga.

Stewart, James. 2003. *Kalkulus jilid 2. Terjemahan oleh I Nyoman Susila, Hendra Gunawan. 2003*. Jakarta: Erlangga.

Sudirham, Sudaryatno dan Ning Utari. 2010. *Mengenal Sifat-Sifat Materi*. Bandung: Darpublic.

Triatmodjo, Bambang. 2002. *Metode Numerik Dilengkapi dengan Program Komputer*. Yogyakarta: Beta Offest.

Valle, Oliver dan Manuael, Soares. 2004. *Airy Functions and Applications to Physics*. London: Imperial College Press.

Zauderer, Erich. 2006. *Partial Differential Equations of Applied Mathematics*. New Jersey: John Willey & Sons, Inc.