TITIK DAN SISI PENUTUP MINIMAL PADA GRAF LINTASAN BERANTING DAN GRAF SIKEL BERAMBUT

SKRIPSI

Oleh:
HAWZAH SA'ADATI
NIM. 08610051

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG

2012

TITIK DAN SISI PENUTUP MINIMAL PADA
GRAF LINTASAN BERANTING DAN GRAF SIKEL BERAMBUT

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
HAWZAH SA'ADATI
NIM. 08610051

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2012

TITIK DAN SISI PENUTUP MINIMAL PADA GRAF LINTASAN BERANTING DAN GRAF SIKEL BERAMBUT

SKRIPSI

Oleh:
HAWZAH SA'ADATI
NIM. 08610051

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal: 16 Januari 2012

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Wahyu Henky Irawan, M.Pd	Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag
NIP. 19710420 200003 1 003	NIP. 19720420 200212 1 003

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

TITIK DAN SISI PENUTUP MINIMAL PADA GRAF LINTASAN BERANTING DAN GRAF SIKEL BERAMBUT

SKRIPSI

Oleh:
HAWZAH SA'ADATI
NIM. 08610051

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal, 1 Maret 2012

Penguji Utama:	Drs. Turmudi, M.Si NIP. 19571005 198203 1 006	....
Ketua Penguji:	Abdussakir, M.Pd NIP. 19751006 200312 1 001	....
Sekretaris Penguji:	Wahyu Henky Irawan, M.Pd NIP. 19710420 200003 1 003	....
Anggota Penguji:	Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag NIP. 19720420 200212 1 003	....

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Hawzah Sa'adati
NIM	: 08610051
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	: Titik dan Sisi Penutup Minimal pada Graf Lintasan Beranting dan Graf Sikel Berambut

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambil alihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencatumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 16 Januari 2012
Yang menyatakan,

<u>Hawzah Sa'adati</u>
NIM. 08610051

MOTTO

Man jadda wa jada

" Siapa bersungguh-sungguh, akan berhasil"

"Barang siapa meminta bantuan akal, Ia akan meluruskannya. Barang siapa meminta petunjuk ilmu, Ia akan mengarahkannya".

(Imam Ali ibn Abi Thalib)

"Jika kita menyadari keberadaan kita dan tahu apa yang kita inginkan maka kita pasti tahu apa yang harus dilakukan dan bagaimana mendapatkannya".

(Abraham Lincoln)

PERSEMBAHAN

Penulis persembahkan karya sederhana ini kepada

Ayah, ibu dan saudara penulis, yang selalu memberikan nasihat,
petuah –petuah, dan mendoakan penulis untuk terus berjuang
menjadi manusia yang sukses di dunia dan akhir

KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيْمِ

Alhamdulillahirrobbil 'alamin, segala puji syukur ke hadirat Allah SWT atas limpahan rahmat, taufiq dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik. Sholawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada Nabi besar Muhammad SAW sebagai *uswatun hasanah* dalam meraih kesuksesan di dunia dan akhirat.

Selanjutnya penulis haturkan ucapan terima kasih seiring do'a dan harapan *jazakumullah ahsanal jaza'* kepada semua pihak yang telah membantu selesainya skripsi ini. Ucapan terima kasih ini penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU., D.Sc, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim yang telah memberikan pengarahan dan nasihat-nasihat yang penulis butuhkan.
4. Wahyu Henky Irawan, M.Pd, selaku dosen pembimbing Matematika yang telah banyak memberikan tuntunan dan arahan sehingga penulisan skripsi ini dapat terselesaikan.
5. Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag, selaku dosen pembimbing integrasi Sains Matematika dan Islam, yang telah memberikan saran dan bantuan selama penulisan skripsi ini.
6. Seluruh dosen Jurusan Matematika, terimakasih atas seluruh ilmu dan bimbingannya.

7. Kedua orang tua penulis, Ayahanda H. Bakhruddin Fannani, M.A dan Bunda Hj. Mas'ulah yang atas restunya, doanya, harapan-harapan serta pengorbanannya kepada penulis dalam menuntut ilmu.
8. Saudara penulis, Nabila Fitriana dan Shafiyat Jadwa Faradisi yang dengan doa serta dukungannya menjadikan penulis semakin bersemangat dalam penulisan skripsi ini.
9. Sahabat-sahabat tercinta, Cindy Puspitasari, Nurul Hijriyah, M. Rofiq Nanang dan Azwar Riza yang telah memberikan pengalaman dan kenangan dalam hidup.
10. Teman-teman Matematika angkatan 2008, terima kasih atas do'a serta kenangan yang kalian berikan.
11. Semua pihak yang tidak mungkin penulis sebut satu persatu, atas keikhlasan bantuan moral dan spiritual, penulis ucapkan terima kasih.

Semoga skripsi ini bermanfaat dan dapat menambah wawasan keilmuan khususnya matematika. Amien.

Malang, 16 Januari 2012

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

DAFTAR LAMPIRAN

ABSTRAK

Sa'adati, Hawzah. 2012. **Titik dan Sisi Penutup Minimal pada Graf Lintasan Beranting dan Graf Sikel Berambut.** Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: (I) Wahyu Henky Irawan, M.Pd
(II) Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag

Kata Kunci: Graf, Himpunan, Titik Penutup, Sisi Penutup

Suatu titik dan sisi dikatakan saling *cover* pada graf G jika titik dan sisi tersebut incident pada G. Titik *cover* di G merupakan himpunan dari titik-titik yang meng*cover* semua sisi di G dan sisi *cover* pada graf G (tanpa titik terisolasi) merupakan himpunan sisi-sisi yang meng*cover* titik di G. Kardinalitas minimum titik *cover* pada graf G disebut bilangan *cover* titik (*vertex covering number*) dan dilambangkan dengan $\alpha(G)$. Sedangkan kardinalitas minimum sisi *cover* pada graf G disebut bilangan *cover* sisi (*edge covering number*) dan dilambangkan dengan $\alpha_1(G)$. Skripsi ini membahas tentang titik dan sisi penutup minimal pada Graf Lintasan Beranting dan Graf Sikel Berambut.

Dengan demikian pada skripsi ini didapatkan sebuah konsep baru tentang titik dan sisi penutup minimal pada graf dan sifat yang terkait dengan titik dan sisi penutup pada suatu graf. Hasil penelitian ini diperoleh pola sebagai berikut:

1. $\alpha\left(P_{n(2)\left(\frac{1}{2}n\right)}\right) \coloneqq \begin{cases} n\,\frac{1}{2}n;\ n = 4k-2 \\ \frac{1}{2}n\,(n+1);\ n = 4k \end{cases}$
2. $\alpha_1\left(P_{n(2)\left(\frac{1}{2}n\right)}\right) \coloneqq \begin{cases} n\left(\frac{1}{2}n+1\right);\ n = 4k-2 \\ \frac{1}{2}n\,(n+1);\ n = 4k \end{cases}$
3. $\alpha\left(P_{n(2)\left(\frac{1}{2}n-1\right)}\right) \coloneqq \begin{cases} n\,\left(\frac{1}{2}(n-1)\right);\ n = 4k-1 \\ n\,\left(\frac{1}{2}(n-1)\right)\,(n+1);\ n = 4k+1 \end{cases}$
4. $\alpha_1\left(P_{n(2)\left(\frac{1}{2}n-1\right)}\right) \coloneqq \begin{cases} n\left(\frac{1}{2}(n-1)+1\right);\ n = 4k-1 \\ n\left(\frac{1}{2}(n-1)\right)+\left(\frac{1}{2}(n-1)+1\right);\ n = 4k+1 \end{cases}$
5. $\alpha({}_nC_n) = n; untuk\ n \in N, n \geq 3$
6. $\alpha_1({}_nC_n) = n^2;\ untuk\ n \in N, n \geq 3$

Pada skripsi ini, penulis hanya memfokuskan pada pokok bahasan masalah titik dan sisi penutup minimal dari Graf Lintasan dan Graf Sikel. Maka dari itu, untuk penulisan skripsi selanjutnya, penulis menyarankan kepada pembaca untuk mengkaji lebih lanjut pada graf yang lain.

ABSTRACT

Sa'adati, Hawzah. 2012. **Minimal Vertex and Edge Cover of Pendant Path Graph and Hairy Cycle Graph.** Thesis. Mathematics Department Faculty of Science and Technology The State Islamic University Maulana Malik Ibrahim of Malang.
Promotor: (I) Wahyu Henky Irawan, M.Pd.
(II) Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag.

A vertex and edge in graph G is called covering each other if they incident in G. Vertex cover in G is the set if vertices that covering all edges in G and edge cover in G is the set of edges that covering all vertices in G. Minimal number of vertex cover is called minimal vertex cover and denoted by $\alpha(G)$, and minimal number of edge cover is called minimal edge cover and denoted by $\alpha_1(G)$. This thesis discusses about minimal vertex and edge cover of Pendant Path Graph and Hairy Cycle Graph.

So acquired a new concept about a vertex and edge cover in graph and properties associated with vertex and edge cover in a graph. The results of this thesis was obtained:

1. $\alpha\left(P_{n(2)\left(\frac{1}{2}n\right)}\right) := \begin{cases} n\,\frac{1}{2}n;\ n = 4k-2 \\ \frac{1}{2}n\,(n+1);\ n = 4k \end{cases}$
2. $\alpha_1\left(P_{n(2)\left(\frac{1}{2}n\right)}\right) := \begin{cases} n\left(\frac{1}{2}n+1\right);\ n = 4k-2 \\ \frac{1}{2}n\,(n+1);\ n = 4k \end{cases}$
3. $\alpha\left(P_{n(2)\left(\frac{1}{2}n-1\right)}\right) := \begin{cases} n\left(\frac{1}{2}(n-1)\right);\ n = 4k-1 \\ n\left(\frac{1}{2}(n-1)\right)(n+1);\ n = 4k+1 \end{cases}$
4. $\alpha_1\left(P_{n(2)\left(\frac{1}{2}n-1\right)}\right) := \begin{cases} n\left(\frac{1}{2}(n-1)+1\right);\ n = 4k-1 \\ n\left(\frac{1}{2}(n-1)\right)+\left(\frac{1}{2}(n-1)+1\right);\ n = 4k+1 \end{cases}$
5. $\alpha\left({}_nC_n\right) = n;\ untuk\ n \in N, n \geq 3$
6. $\alpha_1\left({}_nC_n\right) = n^2;\ untuk\ n \in N, n \geq 3$

In this thesis, authors focus only on subject matter minimal vertex and edge cover of Pendant Path Graph and Hairy Cycle Graph. Therefore, for the writing of the next, authors suggest to the reader study further on yhe other graph.

keywords: Graphs, Set, Vertex Cover, Edge Cover

الملخص

سعادتي، حوزة. 2012. النقطة الحاجبة والجانب الحاجب الأدنى عند الرسم البياني السائر(*Graf Lintasan*) المتفرع والرسم البياني الدائر(*Graf Sikel*) المتشعر. بحث. قسم الرياضيات كلية العلوم والتكنولوجيا جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانق.

المشرف : وحيو هينكي إيراوان، الماجستير

د. الحاج منير العابدين، الماجستير

كلمات المفتاح : الرسم البياني(*Graf*)، مجموعة، النقطة الحاجبة، الجانب الحاجب.

تعتبر النقطة والجانب مغطيين للرسم البياني G إذا كانا متعلقين بشكل مباشر بـ G. النقطة الحاجبة في G عبارة عن مجموعة من النقط المغطية لجميع الجوانب في G، والجانب المغطي في الرسم البياني G عبارة عن مجموعة من الجوانب المغطية لجميع النقط في G. والأصل الأدنى من النقطة المغطية عند الرسم البياني G يسمى بعدد النقط المغطاة ويرمزه بـ $\alpha(G)$. وأما الأصل الأدنى من الجانب المغطي عند الرسم البياني G يسمى بعدد الحاجبات المغطاة ويرمزه بـ $\alpha_1(G)$.

وفي هذا البحث دراسة جديدة عن النقطة الحاجبة والجانب الحاجب الأدنى عند الرسم البياني والصفات أو الخصائص التي تتعلق بالنقطة الحاجبة والجانب الحاجب عند الرسم البياني. وتكون نتائج البحث على النحو التالي :

1. $\alpha\left(P_{n(2)\left(\frac{1}{2}n\right)}\right) := \begin{cases} n\,\frac{1}{2}n;\ n = 4k-2 \\ \frac{1}{2}n\,(n+1);\ n = 4k \end{cases}$
2. $\alpha_1\left(P_{n(2)\left(\frac{1}{2}n\right)}\right) := \begin{cases} n\left(\frac{1}{2}n+1\right); n = 4k-2 \\ \frac{1}{2}n\,(n+1);\ n = 4k \end{cases}$
3. $\alpha\left(P_{n(2)\left(\frac{1}{2}n-1\right)}\right) := \begin{cases} n\,\left(\frac{1}{2}(n-1)\right)\ ; n = 4k-1 \\ n\,\left(\frac{1}{2}(n-1)\right)\ (n+1);\ n = 4k+1 \end{cases}$
4. $\alpha_1\left(P_{n(2)\left(\frac{1}{2}n-1\right)}\right) := \begin{cases} n\left(\frac{1}{2}(n-1)+1\right); n = 4k-1 \\ n\left(\frac{1}{2}(n-1)\right)+\left(\frac{1}{2}(n-1)+1\right);\ n = 4k+1 \end{cases}$
5. $\alpha(\,_nC_n) = n; untuk\ n \in N, n \geq 3$
6. $\alpha_1(\,_nC_n) = n^2;\ untuk\ n \in N, n \geq 3$

في هذه الأطروحة، فإن الكتاب يركز فقط على موضوع وجهة نظر من غطاء الحد الأدنى منمسار غراف والمنجل .لذلك، لكتابة المقبل، ويقترح المؤلفان إلى القارئ على إجراء مزيد من الدراسة على الرسم البياني أخرى.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Al-Quran merupakan kitab yang paling sempurna, kitab yang dijadikan pedoman bagi umat muslim di dunia. Al-Quran tidak hanya dijelaskan tentang aturan-aturan peribadatan umat muslim, tetapi juga dijelaskan berbagai macam ilmu pengetahuan. Segala ilmu pengetahuan dijelaskan didalam Al-Quran. Namun, ilmu pengetahuan yang telah banyak dikaji oleh para ilmuan hanyalah sebagaian kecil dari ilmu Allah SWT, masih banyak ilmupengetahuan yang belum dikaji dan masih perlu dikaji. Hal itu karena luasnya ilmu Allah SWT sangat tidak terbatas dan meliputi sesuatu hal. Dalam Q.S Al-Kahfi ayat 109 dijelaskan betapa luasnya ilmu Allah SWT.

قُل لَّوْ كَانَ ٱلْبَحْرُ مِدَادًا لِّكَلِمَـٰتِ رَبِّى لَنَفِدَ ٱلْبَحْرُ قَبْلَ أَن تَنفَدَ كَلِمَـٰتُ رَبِّى وَلَوْ جِئْنَا بِمِثْلِهِۦ مَدَدًا ﴿١٠٩﴾

Artinya:*"katakanlah, Sekiranya lautan menjadi tinta untuk (menulis) kalimat-kalimat Tuhanku, sungguh habislah lautan itu sebelum habis (ditulis) kalimat-kalimat Tuhanku, meskipun Kami datangkan tambahan sebanyak itu (pula)"*.(QS. Al-Kahfi 18:109)

Umat muslim diwajibkan untuk mempelajari ilmu pengetahuan, karena dengan mempelajari ilmu pengetahuan diharapkan bisa menambah keyakinan terhadap kekuasaan-Nya serta mempertebal keimanan terhadap Allah SWT. Matematika termasuk salah satu ilmu pengetahuan yang masih perlu dikaji. Karena matematika bisa dikatakan "*Queen of Science*" karena matematika menempati posisi yang cukup penting dalam kajian-kajian ilmu yang lain, khususnya ilmu-ilmu sains. Matematika banyak membantu dalam mempermudah menyelesaikan permasalahan dalam kajian-kajian ilmu lain. Oleh sebab itu, matematika menduduki posisi yang cukup penting dalam ilmu pengetahuan

Masalah yang sering muncul di tengah-tengah kehidupan masyarakat seringkali membutuhkan matematika. Dengan bantuan simbol matematika suatu permasalahan lebih mudah untuk dipahami, dipecahkan, atau bahkan dapat ditunjukkan bahwa suatu persoalan tidak mempunyai penyelesaian. Oleh karena itu suatu permasalahan perlu dikaji dan dianalisis dan kemudian dicari model matematikanya. Salah satu cabang matematika yang banyak digunakan untuk menyelesaikan permasalahan dalam kehidupan sehari-hari adalah teori graf, seperti mencari jarak terpendek untuk tukang pos dalam menyampaikan surat, penjadwalan, jaringan tekomunikasi, ilmu komputer dan lain-lain.

Teori graf merupakan salah satu cabang matematika yang masih menarik untuk dibahas karena teori-teorinya masih palikatif sampai saat ini dan dapat diterapkan untuk memecahkan suatu masalah. Dalam mengkaji dan menganalisis model atau rumusan, teori graf dapat diperlihatkan peranannya dan kegunaannya dalam memecahkan berbagai permasalahan. Permasalahan yang dirumuskan dengan teori graf dibuat sederhana, yaitu diambil aspek-aspek yang diperlukan dan dibuang aspek-aspek lainnya (Purwanto,1998:15).

Salah satu topik yang menarik untuk dikaji pada teori graf adalah tentang titik dan sisi penutup dari graf. Teori-teori pada masalah ini menimbulkan banyak perdebatan di kalangan matematikawan. Tidak banyak teori yang mengkaji masalah titik dan sisi penutup dari graf sehingga hal ini membuka peluang bagi matematikawan dan pemerhati matematika untuk melakukan riset-riset dalam membangun teori-teori khususnya tentang titik dan sisi penutup dari graf. Pada penelitian ini, penulis mengkaji tentang titik dan sisi penutup dari graf yang diberi judul **“Titik dan Sisi Penutup Minimal pada Graf Lintasan Beranting dan Graf Sikel Berambut”.**

1.2 Rumusan Masalah

Masalah yang dikaji dalam penelitian ini dirumuskan sebagai:

1. Bagaimana titik dan sisi penutup minimal pada Graf Lintasan Beranting?
2. Bagaimana titik dan sisi penutup minimal pada Graf Sikel Berambut?

1.3 Tujuan

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan penelitian ini adalah

1. Bagaimana titik dan sisi penutup minimal pada Graf Lintasan Beranting?
2. Bagaimana titik dan sisi penutup minimal pada Graf Sikel Berambut?

1.4 Definisi Operasional

Dalam penelitian ini penulis mendefinisikan untuk beberapa istilah yang digunakan agar tidak terjadi penafsiran ganda terhadap istilah-istilah tersebut:

1. $Graf\ P_{n\,(2)\,(\frac{1}{2}n)}$ atau $P_{n\,(2)\,(\frac{1}{2}n-1)}$ didefinisikan sebagai graf terhubung Lintasan Beranting yang dikembangkan dari Graf P_n dengan n adalah banyak titik pada Graf Lintasan; (2) merupakan anting pada setiap titik-titik pada lintasan pusat; $(\frac{1}{2}n)$ adalah banyak titik disetiap anting untuk n genap sedangkan $(\frac{1}{2}n-1)$ adalah banyak titik di setiap anting untuk n ganjil.
2. $Graf\ {}_mC_n$ didefinisikan sebagai graf sikel berambut yang dikembangkan dari graf C_n dengan n merupakan banyak titik pada graf sikel; m merupakan

banyak rambut yang terdapat disetiap titik-titik sikel. Karena $m = n$ maka menjadi graf ${}_{n}C_{n}$.

1.5 Manfaat Penelitian

Hasil penelitian ini diharapkan bermanfaat bagi:

1. Bagi Penulis

Hasil penelitian ini digunakan sebagai tambahan informasi dan wawasan ilmu pengetahuan tentang Teori Graf khususnya tentang titik dan sisi penutup minimal.

2. Bagi Lembaga

Hasil penelitian ini dapat digunakan sebagai tambahan kepustakaan yang dijadikan sarana pengembangan wawasan keilmuan khususnya di Jurusan Matematika untuk mata kuliah Teori Graf.

3. Bagi Pembaca

Sebagai bahan pembelajaran dan pengetahuan mengenai titik dan sisi penutup dari Graf Lintasan Beranting dan Graf Sikel Berambut dan sebagai rujukan penelitian yang lain tentang titik dan sisi penutup pada graf.

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode penelitian kepustakaan *(library research)* atau kajian pustaka, yakni peneliti mengkaji beberapa jenis graf terhubung sederhana dan membangun titik dan sisi penutup dari graf lintasan dan graf sikel yang selanjutnya peneliti membuat pola tentang titik dan sisi penutup minimal dari graf terhubung dan membuktikan kebenaran pola tersebut benar secara umum. Langkah-langkah yang akan dilakukan pada penelitian ini adalah:

1. Merumuskan Masalah

Sebelum peneliti melakukan penelitian, terlebih dahulu disusun rencana peneliti bermula dari suatu masalah tentang titik dan sisi penutup minimal pada graf.

2. Mengumpulkan Data

Mengumpulkan data dari buku *Graphs & Digraphs* (Gary Chartrand dan Linda Lesniak) dan buku pendukung, baik yang bersumber dari buku, jurnal, artikel, diktat kuliah, dan lainnya yang berhubungan dengan permasalahan yang akan dibahas dalam penelitian ini berupa definisi–definisi, teorema-teorema, sifat-sifat, lemma tentang titik dan sisi penutup.

3. Menganalisis Data

Analisis data yang digunakan dalam penelitian ini meliputi:

a. Menggambarkan Graf Lintasan (P_n) mulai dari P_2 sampai dengan P_{15} dan Graf Sikel (C_n) mulai dari C_3 sampai dengan C_{15} yang kemudian setiap titik pada Graf Lintasan tersebut diberi anting sebanyak n titik dan pada Graf Sikel diberi rambut sebanyak n titik.
b. Menentukan kardinalitas titik dan sisi penutup minimal dari Graf Lintasan Beranting dan Graf Sikel Berambut.
c. Mencari pola dari kardinalitas titik dan sisi penutup minimal dari Graf Lintasan Beranting dan Graf Sikel Berambut yang kemudian membuktikan pola tersebut benar secara umum menggunakan cara induksi matematika.

4. Membuat Kesimpulan

Kesimpulan dalam skripsi ini berupa hasil pola dari titik dan sisi penutup minimal dari Graf Lintasan Beranting dan Graf Sikel Berambut.

5. Melaporkan

Langkah terakhir dari penelitian adalah menyususn laporan dari penelitian yang telah dilakukan, yaitu berupa skripsi yang digunakan sebagai syarat memperoleh gelar sarjana.

1.7 Sistematika Penulisan

Penelitian ini terdiri dari empat bab sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN

Sebagai pendahuluan bab ini memuat latar belakang permasalahan, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II KAJIAN PUSTAKA

Bab ini disajikan secara singkat mengenai konsep dasar pada teori graf yang relevan dengan titik dan sisi penutup dari Graf Lintasan dan Graf Sikel dalam bentuk definisi, notasi serta beberapa teorema hasil penemuan sebelumnya yang menunjang pengerjaan penelitian ini.

BAB III PEMBAHASAN

Dibahas mengenai hasil utama dari penelitian ini yaitu memuat pola hasil pemetaan yang didapat dari menutup titik dan sisi pada Graf Lintasan Beranting dan Graf Sikel Berambut yang kemudian membuktikan pola tersebut benar secara umum.

BAB IV PENUTUP

Memuat kesimpulan dari pengerjaan penelitian secara keseluruhan.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Definisi Graf

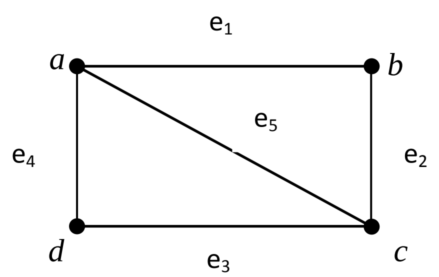
Graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang dapat memecahkan permasalahan dalam kehidupan sehari-hari. Secara matematis graf didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.1.1

Graf G adalah pasangan himpunan (V, E) dengan $V(G)$ adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut sebagai titik dan $E(G)$ adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di $V(G)$ yang disebut sebagai sisi.

Himpunan titik di G dinotasikan dengan $V(G)$ dari himpunan sisi dinotasikan dengan $E(G)$. Sedangkan banyaknya unsur di V disebut *order* dari G dan dilambangkan dengan $p(G)$ dan banyaknya unsur di E disebut *size* dari G dan dilambangkan dengan $q(G)$. Jika graf yang dibicarakan hanya graf G, maka *order* dan *size* dari G tersebut cukup ditulis dengan $G(p, q)$ (Chartrand dan Lesniak,1986:4).

Contoh 2.1.1



Gambar 2.1 Graf G

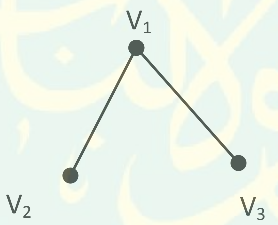
Graf G pada Gambar 2.1 mempunyai order 4 dan mempunyai 5 sisi, dapat dinyatakan sebagai $G = (V(G), E(G))$ dengan $V(G) = \{a, b, c, d\}$ dan $E(G) = \{(a, b), (b, c), (c, d), (a, d), (a, c)\}$atau ditulis dengan $V(G) = \{a, b, c, d\}$ dan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ untuk $e_1 = (a, b)$, $e_2 = (b, c)$, $e_3 = (c, d)$, $e_4 = (a, d)$, $e_5 = (a, c)$.

2.2 Derajat Titik

Definisi 2.2.1

Derajat titik v pada graf G, ditulis dengan $\deg_G(v)$, adalah banyaknya sisi yang terkait langsung (*incident*) pada v. Dengan kata lain, banyak sisi yang memuat v sebagai titik ujung. Titik v dikatakan genap atau ganjil tergantung dari jumlah $deg_G(v)$ genap atau ganjil (Chartrand dan Lesniak, 1986:7).

Contoh 2.2.1



$deg_G(v_1) = 2$

$deg_G(v_2) = 1$

$deg_G(v_3) = 1$

Gambar 2.2 Graf Berderajat

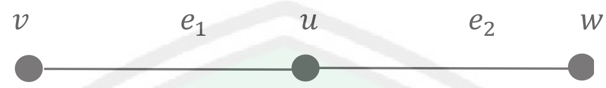
2.3 Terhubung Langsung (*Adjacent*) dan Terkait Langsung (*Incident*)

Dari definisi graf, suatu graf paling tidak memiliki satu titik. Jika suatu graf memiliki lebih dari satu titik dan lebih dari satu sisi maka secara matematis hubungan antara titik dan sisi itu didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.3.1

Sisi $e = (v, u)$ dikatakan menghubungkan titik v dan u. Jika $e = (v, u)$ adalah sisi di graf G, maka v dan u disebut terhubung langsung (*Adjacent*), v dan e serta u dan e disebut terkait langsung (*Incident*), titik v dan u disebut ujung dari sisi e. Untuk selanjutnya, sisi $e = (u, v)$ dilalui $e = uv$ (Chartrand dan Lesniak,1986:4).

Contoh 2.3.1



Gambar 2.3 *Adjacent* dan *Incident* pada Graf

Keterangan:

v dan u, u dan w terhubung langsung *(adjacent)*

v dan u terkait langsung *(incident)* dengan e_1

u dan w terkait langsung *(incident)* dengan e_2

e_1 dan e_2 terhubung langsung *(adjacent)*

2.4 Graf Terhubung dan Tak Terhubung

Keterhubungan dua titik adalah sangat penting di dalam graf. Dua titik u dan v dikatakan terhubung jika terdapat lintasan dari u ke v. Jika dua titik terhubung maka pasti titik yang pertama dapat dicapai dari titik kedua.

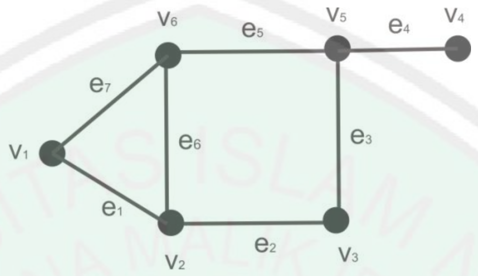
Definisi 2.4.1

Sebuah jalan (*walk*) u-v di graf G adalah barisan berhingga (tak kososng) $W: u = u_0, e_1, u_1, e_2, .., u_{n-1}, e_n,\ u_n = v$ yang berselang seling antara titik dan sisi, yang dimulai dari titik u dan diakhiri dengan titik v, dengan $e_i = u_{i-1}u_i$ untuk $i = 1,2,3 \ldots, n$ adalah sisi di G. u_0 disebut titik awal, u_n disebut titik akhir $u_1, u_2, .. u_{n-1}$ disebut titik internal, dan menyatakan panjang W (Chartrand dan Lesniak,1986:26)

Definisi 2.4.2

Jalan *u-v* yang semua sisinya berbeda disebut *trail u-v* (Chartrand dan Lesniak,1986:26).

Contoh 2.4.1



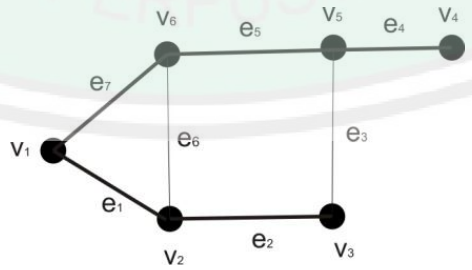
Gambar 2.4 Graf Terhubung Sederhana

Pada gambar 2.4, jalan $v_5, e_3, v_3, e_2, v_2, e_6, v_6, e_5, v_5, e_4, v_4$ adalah contoh trail.

Definisi 2.4.3

Jalan *u-v* yang semua titiknya berbeda disebut path (lintasan) *u-v*. Dengan demikian, semua lintasan adalah *trail*. Trail *u-v* adalah jalan yang tidak mengulang sisi. Lintasan *u-v* adalah jalan yang tidak mengulang titik (Chartrand dan Lesniak,1986:26).

Contoh 2.4.2



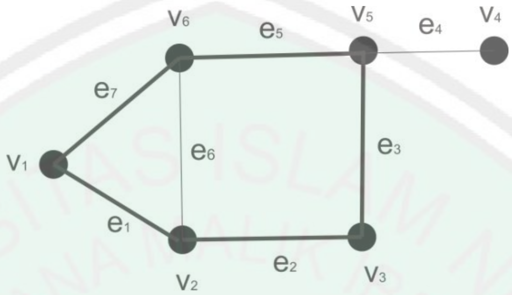
Gambar 2.5 Lintasan

Pada gambar 2.5 jalan $v_3, e_2, v_2, e_1, v_1, e_7, v_6, e_5, v_5, e_4, v_4$ adalah lintasan.

Definisi 2.4.4

Trail tertutup (*closed trail*) dan tak *trivial* pada graf G disebut *Sirkuit* G (Chartrand dan Lesniak, 1986:28).

Contoh 2.4.3



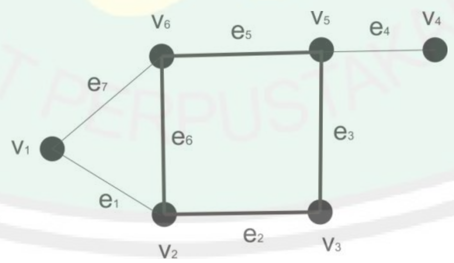
Gambar 2.6 Sirkuit

Pada Gambar 2.6 jalan $v_5, e_5, v_6, e_7, v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_5$ adalah contoh sirkuit.

Definisi 2.4.5

Sirkuit $v_1, v_2, .., v_n, v_1 (n \geq 3)$ memiliki titik dengan v_i adalah titik-titik berbeda untuk $1 \leq i \leq n$ disebut sikel (*Cycle*) (Chartrand dan Lesniak,1986:28).

Contoh 2.4.4



Gambar 2.7 Sikel

Pada Gambar 2.7 jalan $v_5, e_5, v_6, e_6, v_2, e_2\ , v_3, e_3, v_5$ adalah contoh sikel.

Definisi 2.4.6

Pasangan titik u dan v dapat dikatakan terhubung (*connected*), jika terdapat lintasan $u - v$ di G. sedangkan suatu graf G dapat dikatakan terhubung (*connected*) jika untuk setiap titik *u* dan *v* di *G* terhubung (Chartrand dan Lesniak,1986:152).

2.5 Jenis-jenis Graf

Graf dapat dikelompokkan menjadi beberapa kategori (jenis) bergantung pada sudut pandang pengelompokannya. Pengelompokan graf dapat dipandang berdasarkan ada tidaknya sisi ganda, berdasarkan jumlah simpul, atau berdasarkan orientasi arah pada sisi.

2.5.1 Graf Lintasan (*Path Graph*)

Definisi 2.5.1

Graf yang terdiri dari satu lintasan (*path*) disebut graf lintasan (*path*) (Chartrand dan Lesniak,1986:26).

Contoh 2.5.1

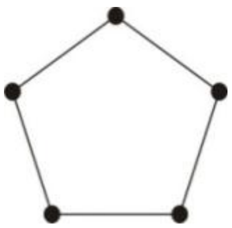
Gambar 2.8 Graf Lintasan ($\boldsymbol{P_n}$)

2.5.2 Graf Sikel (*Cycle Graph*)

Definisi 2.5.1

Graf Sikel (C_n) adalah graf terhubung n titik yang setiap titiknya berderajat 2. Sikel dengan panjang n disebut sikel-n (C_n). Panjang sikel pada sebuah graf paling kecil adalah 3. Graf yang memuat sikel disebut graf siklik (Chartrand dan Lesniak,1986:28).

Contoh 2.5.2



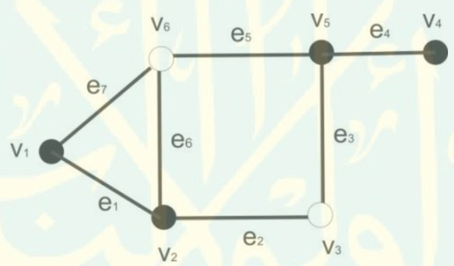
Gambar 2.9 sikel-5 (C_5)

2.6 Penutup pada Graf

Definisi 2.6.1

Suatu titik dan sisi dikatakan saling *cover* pada graf G jika titik dan sisi tersebut incident pada G. Titik *cover* di G merupakan himpunan dari titik-titik yang meng*cover* semua sisi di G dan sisi *cover* pada graf G (tanpa titik terisolasi) merupakan himpunan sisi-sisi yang meng*cover* titik di G. Kardinalitas minimum titik *cover* pada graf G disebut bilangan *cover* titik (*vertex covering number*) dan dilambangkan dengan $\alpha(G)$. Sedangkan kardinalitas minimum sisi *cover* pada graf G disebut bilangan *cover* sisi (*edge covering number*) dan dilambangkan dengan $\alpha_1(G)$ (Chartrand dan Lesniak,1986:243).

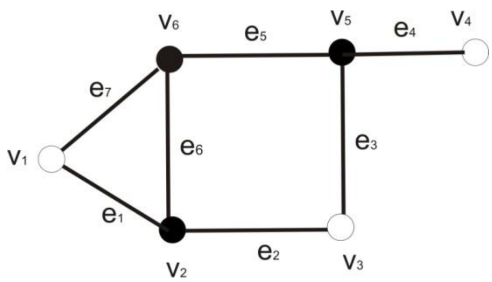
Contoh 2.6.1



G_1

Gambar 2.10 Titik Penutup dari $\boldsymbol{G_1}$

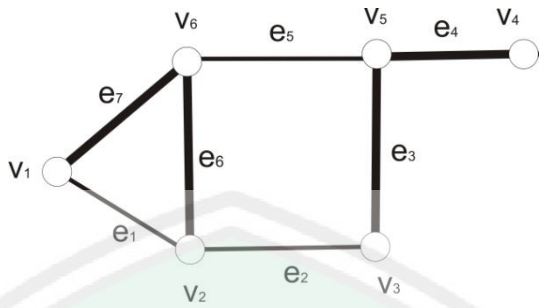
Pada Gambar 2.10 titik berwarna hitam menunjukkan contoh titik penutup dari G_1, maka untuk himpunan titik penutup minimal G_1 adalah $\{\{v_2, v_5, v_6\}\}$ jadi $\alpha(G_1) = 3$ titik yang ditunjukkan oleh gambar berikut:



G_1

Gambar 2.11 Titik Penutup Minimal dari $\boldsymbol{G_1}$

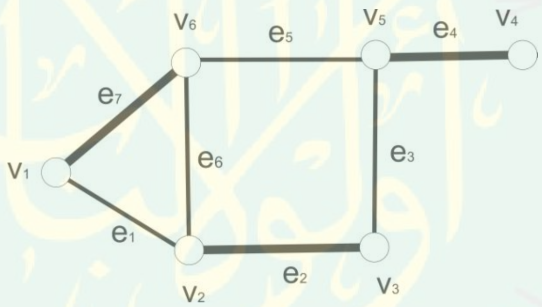
Contoh 2.6.2



G_1

Gambar 2.12 Sisi Penutup dari $\boldsymbol{G_1}$

Pada Gambar 2.12 sisi yang berwarna hitam tebal menunjukkan sisi penutup dari G_1, maka himpunan sisi penutup minimal G_1 adalah $\{\{e_2, e_4, e_7\}\}$. Jadi $\alpha_1(G1) = 3$ sisi yang ditunjukkan oleh gambar berikut:



G_1

Gambar 2.13 Sisi Penutup Minimal dari $\boldsymbol{G_1}$

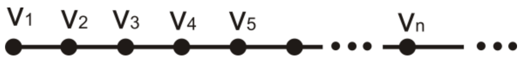
2.7 Pengembangan Graf Lintasan Beranting dan Graf Sikel Berambut

Dalam penelitian ini penulis mendefinisikan untuk beberapa istilah yang digunakan agar tidak terjadi penafsiran ganda terhadap istilah-istilah tersebut:

2.7.1 Graf Lintasan Beranting

Didefinisikan sebagai graf terhubung yang dikembangkan dari graf P_n.

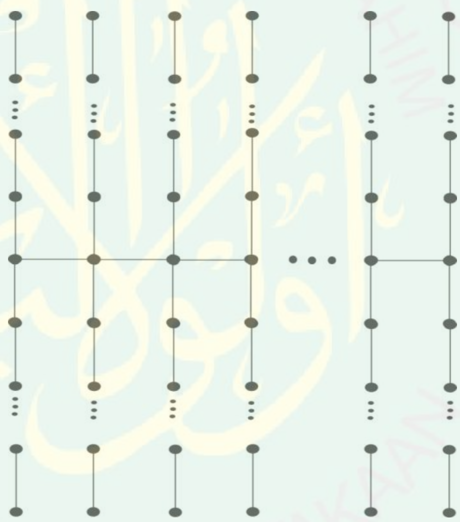
P_n : graf lintasan dengan n titik



Gambar 2.14 Graf Lintasan (P_n)

Selanjutnya setiap titik pada graf lintasan (P_n) diberi anting sebanyak n titik sehingga menjadi graf lintasan beranting $P_{n\,(2)\,(\frac{1}{2}n)}$ atau $P_{n\,(2)\,(\frac{1}{2}n-1)}$.

Graf $P_{n\,(2)\,(\frac{1}{2}n)}$ atau $P_{n\,(2)\,(\frac{1}{2}n-1)}$ adalah graf terhubung lintasan yang beranting dengan n adalah banyak titik pada graf lintasan; (2) adalah 2 anting pada setiap titik-titik pada lintasan; $(\frac{1}{2}n)$ adalah banyak titik di setiap anting untuk n genap atau $(\frac{1}{2}n-1)$ adalah banyak titik di setiap anting untuk n ganjil.

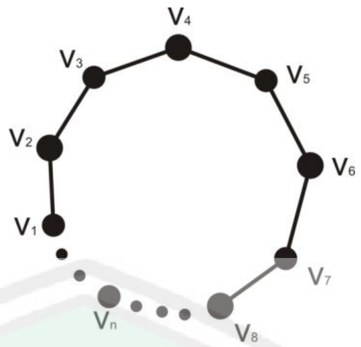


Gambar 2.15 Graf Lintasan Beranting n

2.7.2 Graf Sikel Berambut (${}_{n}C_n$)

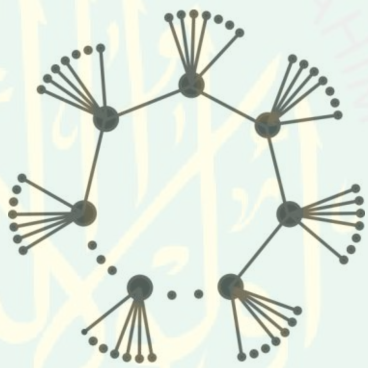
Didefinisikan sebagai graf terhubung yang dikembangkan dari graf C_n.

C_n : graf sikel dengan n titik



Gambar 2.16 Graf Sikel (C_n)

Selanjutnya setiap titik pada graf sikel (C_n) diberi rambut sebanyak n titik sehingga menjadi graf sikel berambut (${}_{n}C_n$). Banyaknya rambut pada graf sikel sama dengan banyak titik pada graf sikel.



Gambar 2.17 Graf Sikel Berambut (${}_{n}C_n$)

2.8 Keterhubungan antara Graf dan Ayat Al-Quran

Secara umum konsep dari disiplin ilmu telah dijelaskan dalam Al-Quran, salah satunya adalah matematika. Teori graf yang merupakan salah satu cabang matematika memiliki sifat keterhubungan dapat definisikan Keterhubungan titik pada graf G adalah minimum titik yang apabila dihapus dari graf G akan membuat graf tersebut tidak terhubung.

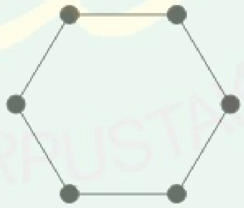
Sarang lebah dan laba-laba dapat dipandang berdasar teori graf. Terdapat dalam ayat Al-Quran sehubungan dengan lebah dan laba-laba, yaitu surat An-Nahl ayat 68, yaitu:

وَأَوْحَىٰ رَبُّكَ إِلَى ٱلنَّحْلِ أَنِ ٱتَّخِذِى مِنَ ٱلْجِبَالِ بُيُوتًا وَمِنَ ٱلشَّجَرِ وَمِمَّا يَعْرِشُونَ ﴿٦٨﴾

Artinya: *"Dan Tuhanmu mewahyukan kepada lebah:"Buatlah sarang dibukit-bukit, dipohon-pohon kayu, dan ditempat-tempat yang dibikin manusia"* (QS. An-Nahl 16: 68).

Sarang lebah dapat dilihat langsung dari bentuk sarangnya, dimana terdapat sisi-sisi dan titik-titik sebagai pengait sisi-sisinya. Selama jutaan tahun, lebah telah menggunakan struktur segi enam untuk membangun sarangnya (Yahya, 2007:21).

Sarang lebah dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 2.18 Graf Sarang Lebah

Dari Gambar 2.18 menunjukkan graf sarang lebah terdiri dari 6 titik dan 6 sisi, pada teori graf termasuk dalam graf sikel (*Cycle*).

Representasi yang lain dari suatu graf adalah waktu shalat. Adapun hubungan waktu shalat dengan teori graf adalah bahwa waktu-waktu shalat merupakan suatu himpunan yang terdiri dari waktu shalat fardhu. Keterkaitan antara kelima sholat fardhu tersebut yang tidak dapat ditinggalkan salah satunya dalam menunaikannya. Dalam surat An-Nisa' ayat 103 dikatakan bahwa shalat telah ditentukan waktunya.

فَإِذَا قَضَيْتُمُ ٱلصَّلَوٰةَ فَٱذْكُرُوا۟ ٱللَّهَ قِيَـٰمًا وَقُعُودًا وَعَلَىٰ جُنُوبِكُمْ ۚ فَإِذَا ٱطْمَأْنَنتُمْ

فَأَقِيمُوا۟ ٱلصَّلَوٰةَ ۚ إِنَّ ٱلصَّلَوٰةَ كَانَتْ عَلَى ٱلْمُؤْمِنِينَ كِتَـٰبًا مَّوْقُوتًا ﴿١٠٣﴾

Artinya: *"Sesungguhnya shalat itu adalah kewajiban kepada orang-orang mukmin yang tertentu waktu-waktunya"* (QS. An-Nisa'4: 103).

Setiap orang islam yang telah baligh dan tidak ada halangan syara' diwajibkan melaksanakan shalat lima kali dalam sehari semalam, yaitu shalat dhuhur, ashar, maghrib, isya', dan shubuh. Masing-masing shalat fardu ini telah ditetapkan bilangan rakaat dan waktunya oleh agama. Waktu shalat fardhu tersebut adalah:

a. Shalat Dhuhur, waktunya adalah sejak matahari tergelincir dari titik kulminasinya, sampai dengan bayang-bayang suatu benda itu sama dengan tinggi bendanya yang berdiri tegak lurus.

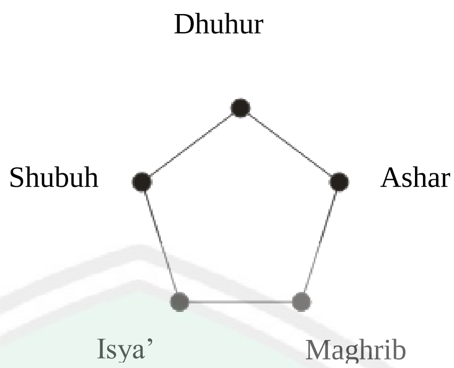
b. Shalat Ashar, waktunya sejak tinggi baying-bayang suatu benda sama dengan tinggi bendanya hingga terbenam matahari.

c. Shalat Maghrib, waktunya mulai terbenam matahari hingga hilangnya cahaya mega kemerah-merahan.

d. Shalat Isya', waktunya sejak hilangnya cahaya mega kemerah-merahan dan berakhir sampai fajar shadiq.

e. Shalat Shubuh, waktunya sejak terbit fajar shadiq sampai matahari terbit.

Sehingga dapat digambarkan dalam bentuk graf seperti pada gambar berikut:



Gambar 2.19 Graf terhadap Waktu Shalat

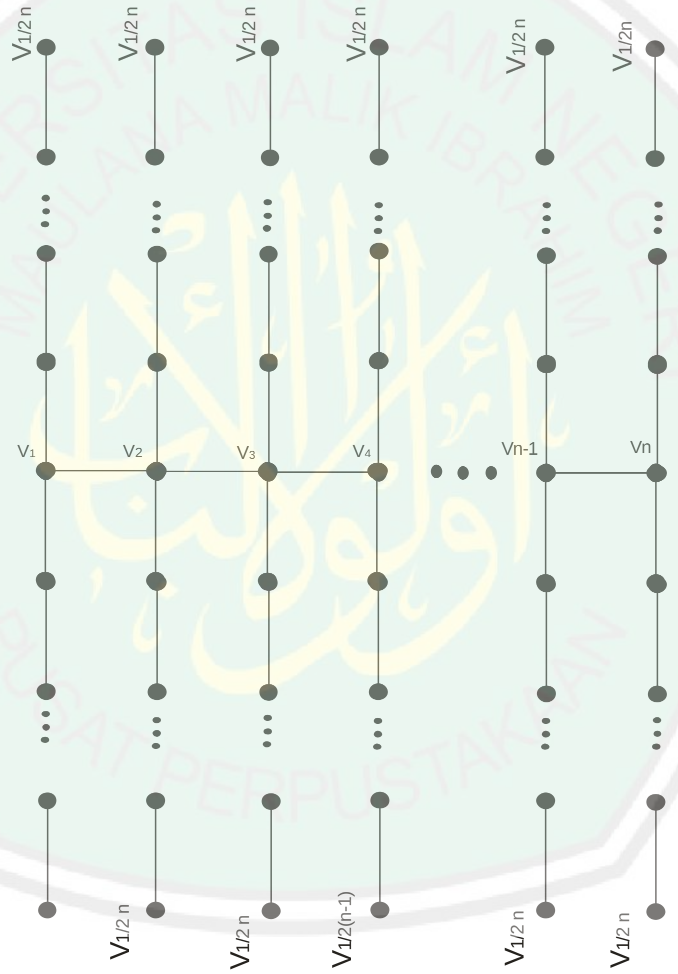
Dengan demikian itulah waktu pelaksanaan shalat fardhu yang telah diatur oleh agama. Gambar 2.19 menunjukkan bagaimana waktu pelaksanaan shalat direpresentasikan kedalam bentuk graf sikel, maka graf sikel C_5 menggambarkan dimana titik-titik dalam graf tersebut diumpamakan subagai shalat dhuhur, ashar, maghrib, isya’, dan shubuh sedangkan garis yang berbentuk lingkaran yang menghubungkan titik-titik diumpamakan sebagai putaran matahari selama sehari semalam.

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Titik dan Sisi Penutup Minimal pada Graf Lintasan Beranting

3.1.1 Titik dan Sisi Penutup Minimal pada Graf Lintasan Beranting n Genap



Gambar 3.1 Graf Lintasan Beranting n Genap

3.1.1.1 Titik Penutup

Tabel 3.1 Titik Penutup Graf Lintasan Beranting n Genap

Graf	Banyaknya Titik	Titik Penutup Minimal
$P_{2(2)(1)}$	6	2
$P_{4(2)(2)}$	20	10
$P_{6(2)(3)}$	42	18

$P_{8(2)(4)}$	72	36
$P_{10(2)(5)}$	110	50
$P_{12(2)(6)}$	156	78
$P_{14(2)(7)}$	210	98
. . $P_{n\,(2)(1/2\,n)}$	. . $n^2 + n$	. . Untuk $n = 4k - 2$ $maka\ polanya = n \cdot \frac{1}{2} n$ $= (4k-2\ ) \cdot \frac{1}{2}(4k-2\ )$ $= (4k-2)\ (2k-1)$ Untuk $n = 4k$ $maka\ polanya = n\ \left(\frac{1}{2}n\right) + \frac{1}{2}n$ $= \frac{1}{2}n\ (n+1)$ $= \left(\frac{1}{2}(4k)\right)\ (4k+1)$ $= 2k\ (4k+1)$

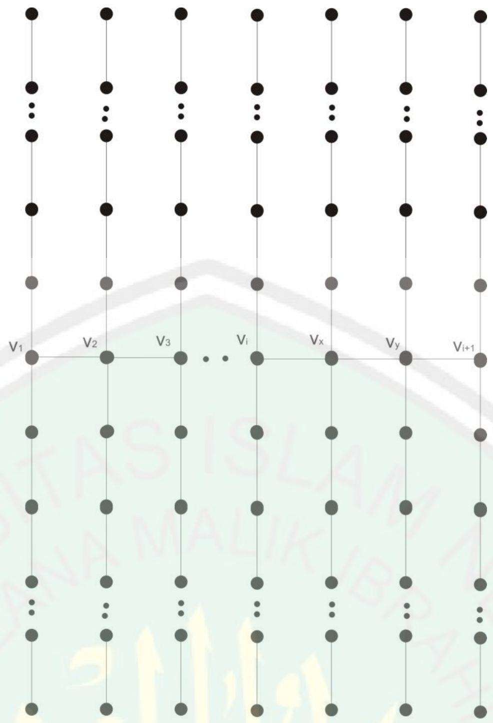
Sehingga disimpulkan pola yang didapat adalah:

$$\alpha\left(P_{n(2)\left(\frac{1}{2}n\right)}\right) \coloneqq \begin{cases} n\ \dfrac{1}{2}n;\ n = 4k-2 \\ \dfrac{1}{2}n\ (n+1);\ n = 4k \end{cases}$$

Bukti:

Untuk $n = 4k - 2$titik penutup minimal Graf Lintasan Beranting $(4k-2)(2k-1)$. Untuk $k = 1$ maka $P_{2\,(2)(1)}$ memiliki titik penutup minimal $(4k-2)(2k-1) = 2 \cdot 1 = 2$. Untuk $k = 2$ maka $P_{6(2)(3)}$ memiliki titik penutup minimal $(4k-2)(2k-1) = 6 \cdot 3 = 18$ dan seterusnya. Asumsikan benar untuk $k = t$ maka $P_{(4t-2)\,(2)\,(\frac{1}{2}(4t-2))}$ memiliki titik penutup minimalnya adalah $(4k-2)\ (2k-1) = (4t-2)\ (2t-1)$.

Akan ditunjukkan benar untuk $k = t + 1$ maka $n = 4k + 2$berarti $P_{(4t+2)\,(2)\,(\frac{1}{2}(4t+2))}$ memiliki titik penutup minimal $(4k-2)\ (2k-1) =$ $(\ 4(t+1) - 2)\ \ (\ 2(t+1) - 1) = (4t+2)(2t+1)$.

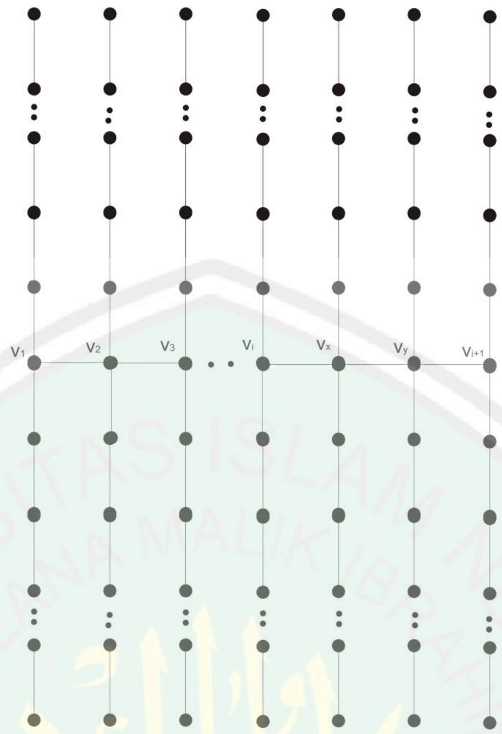


Gambar 3.2 Graf $P_{(4t+2)\,(2)\,(\frac{1}{2}(4t+2))}$

Dari $k = t$ maka $P_{(4t-2)\,(2)\,(\frac{1}{2}(4t-2))}$ memiliki himpunan titik penutup minimal, misal $\{v_1, v_3, v_5, \dots, v_{2(k-1)}\}$ atau $\{v_2, v_4, v_6, \dots, v_{2k}\}$, maka titik penutup minimalnya adalah $(4k-2)(2k-1)$. Ambil lintasan beranting (v_i, v_{i+1}) di $P_{(4t-2)\,(2)\,(\frac{1}{2}(4t-2))}$, dalam lintasan ini v_i atau v_{i+1} menjadi salah satu titik penutup, sisipkan dua titik yang beranting di (v_i, v_{i+1}). Misal (v_i, v_x, v_y, v_{i+1}), v_x adalah titik penutup yang menutup sisi (v_i, v_x) dan (v_x, v_y), v_y adalah titik penutup yang menutup sisi (v_x, v_y) dan (v_y, v_{i+1}) sehingga jika pada lintasan (v_i, v_{i+1}), jika v_i menjadi titik penutup maka v_y menjadi titik penutup tambahan, sebaliknya jika v_{i+1} menjadi titik penutup maka v_x menjadi titik penutup tambahan. Sehingga titik penutup tambahan adalah salah satu dari v_x atau v_y begitu juga pada antingnya di setiap titik sikel pada anting bertambah dan titik penutupnya juga bertambah maka lintasan $k = t + 1$ memiliki titik penutup minimal $(4t+2)\,(2t+1)$. Jika $P_{(4t-2)\,(2)\,(\frac{1}{2}(4t-2))}$ disisipkan 2 titik beranting dalam salah satu lintasannya maka menjadi $P_{(4t+2)\,(2)\,(\frac{1}{2}(4t+2))}$ atau $P_{(4t+2)\,(2)\,(2t+1))}$. Sehingga $P_{n\,(2)\,\left(\frac{1}{2}n\right)}$ untuk $n = 4k - 2$ memiliki pola titik penutup minimal $n \cdot \frac{1}{2}n$.

Untuk $n = 4k$, titik penutup minimal Graf Lintasan Beranting $2k(4k+1)$. Untuk $k = 1$ maka $P_{4\,(2)(2)}$ memiliki titik penutup minimal $2k(4k+1) = 2 \cdot 5 = 10 \cdot 1 = 2$. Untuk $k = 2$ maka $P_{8(2)(4)}$ memiliki banyak penutup minimal $2k(4k+1) = 4 \cdot 9 = 36$ dan seterusnya. Asumsikan benar untuk $k = t$ maka $P_{4t\,(2)\,(\frac{1}{2}(4t))}$ memiliki banyak titik penutup minimal adalah $2k\,(4k+1) = 2t\,(4t+1)$.

Akan ditunjukkan benar untuk $k = t+1$ maka $n = 4k+4$ berarti $P_{(4k+4)\,(2)\,(\frac{1}{2}(4k+4))}$ memiliki titik penutup minimal $2k\,(4k+1) = 2(t+1)\,(\,4(t+1)+1) = (2t+2)\,(4t+5)$.



Gambar 3.3 Graf $P_{(4t+4)\ (2)\ (\frac{1}{2}(4t+4))}$

Dari $k = t$ maka $P_{(4t)\ (2)\ (\frac{1}{2}(4t))}$ memiliki himpunan titik penutup minimal, misal $\{v_1, v_3, v_5, \dots, v_{2(k-1)}\}$ atau $\{v_2, v_4, v_6, \dots, v_{2k}\}$, maka titik penutup minimalnya adalah $2t(4t + 1)$. Ambil lintasan beranting (v_i, v_{i+1}) di $P_{(4t)\ (2)\ (\frac{1}{2}(4t))}$, dalam lintasan ini v_i atau v_{i+1} menjadi salah satu titik penutup, sisipkan dua titik yang beranting di (v_i, v_{i+1}). Misal (v_i, v_x, v_y, v_{i+1}), v_x adalah titik penutup yang menutup sisi (v_i, v_x) dan (v_x, v_y), v_y adalah titik penutup yang menutup sisi (v_x, v_y) dan (v_y, v_{i+1}) sehingga jika pada lintasan (v_i, v_{i+1}), jika v_i menjadi titik penutup maka v_y menjadi titik penutup tambahan, sebaliknya jika v_{i+1} menjadi titik penutup maka v_x menjadi titik penutup tambahan. Sehingga titik penutup tambahan adalah salah satu dari v_x atau v_y begitu juga pada antingnya di setiap titik sikel pada anting bertambah dan titik penutupnya juga bertambah maka lintasan $k = t + 1$ memiliki titik penutup minimal $(2t +$

$2)(4t+5)$. Jika $P_{(4t)\,(2)\,(\frac{1}{2}(4t))}$ disisipkan dua titik beranting dalam salah satu lintasannya maka menjadi $P_{(4t+4)\,(2)\,(\frac{1}{2}(4t+4))}$ atau $P_{(4t+4)\,(2)\,(2t+2)}$ sehingga $P_{n\,(2)\,\left(\frac{1}{2}n\right)}$ untuk $n=4k$ memiliki pola titik penutup minimal $\frac{1}{2}n(n+1)$.

3.1.1.2 Sisi Penutup

Tabel 3.2 Sisi Penutup Graf Lintasan Beranting n Genap

Graf	Banyaknya Sisi	Sisi Penutup Minimal
$P_{2(2)(1)}$	5	4
$P_{4(2)(2)}$	19	10
$P_{6(2)(3)}$	41	24
$P_{8(2)(4)}$	71	36
$P_{10(2)(5)}$	109	60
$P_{12(2)(6)}$	155	78
$P_{14(2)(7)}$	209	112
. . $P_{n\,(2)(1/2\,n)}$	. . $(n^2+n)-1$	. . Untuk $n=4k-2$ $maka\ polanya = n\left(\frac{1}{2}n+1\right)$ $=(4k-2)\left(\frac{1}{2}(4k-2)+1\right)$ $=(4k-2)\,2k$ Untuk $n=4k$ $maka\ polanya = n\left(\frac{1}{2}n\right)+\frac{1}{2}n$ $=\frac{1}{2}n\,(n+1)$ $=2k\,(4k+1)$

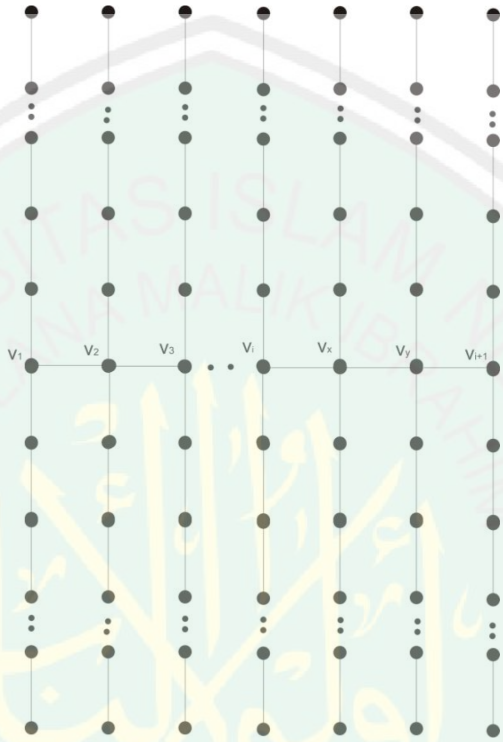
Sehingga dapat disimpulkan pola yang didapat:

$$\alpha_1\left(P_{n(2)\left(\frac{1}{2}n\right)}\right) := \begin{cases} n\left(\dfrac{1}{2}n+1\right); n=4k-2 \\ \dfrac{1}{2}n\,(n+1);\ n=4k \end{cases}$$

Bukti:

Untuk $n=4k-2$, sisi penutup minimal graf lintasan beranting $(4k-2)2k$. Untuk $k=1$ maka $P_{2(2)(1)}$ memiliki sisi penutup minimal $(4k-2)2k=2\cdot 2=4$. Untuk $k=2$ maka $P_{6\,(2)\,(3)}$ memiliki sisi penutup minimal $(4k-2)2k=6\cdot 4=24$ dan seterusnya. Asumsikan benar untuk $k=t$ maka $P_{(4t-2)(2)(\frac{1}{2}(4t-2))}$ memiliki sisi penutup minimal $(4k-2)2k=(4t-2)2t$.

Akan ditunjukkan benar untuk$k = t + 1$ maka$n = 4k + 2$ berarti $P_{(4t+2)(2)(\frac{1}{2}(4t+2))}$ memiliki sisi penutup minimal $(4k - 2)2k = (4t + 2)(2t + 2)$.

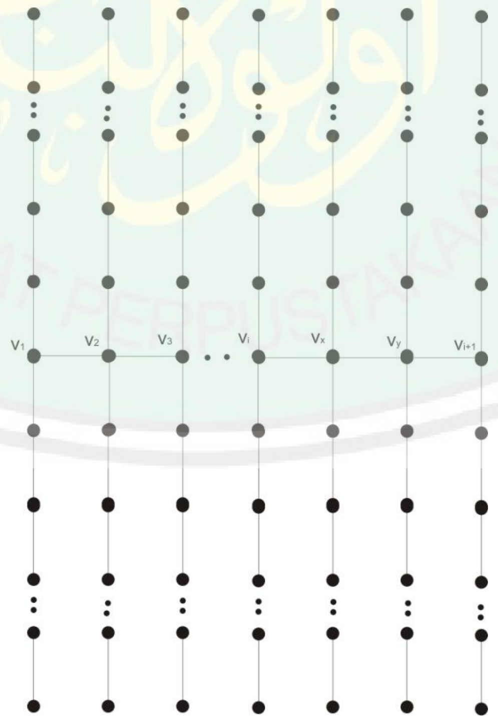


Gambar 3.4 Graf $\boldsymbol{P_{(4t+2)(2)(\frac{1}{2}(4t+2))}}$

Dari $k = t$ maka $P_{(4t-2)(2)(\frac{1}{2}(4t-2))}$ memiliki himpunan sisi penutup minimal, misal $\{e_1, e_3, e_5, \ldots, e_{2(k+1)}\}$ atau $\{e_2, e_4, e_6, \ldots, e_{2k}\}$, maka penutupnya adalah $(4t - 2)2t$. Ambil lintasan beranting (v_i, v_{i+1}) di $P_{(4t-2)(2)(\frac{1}{2}(4t-2))}$, dalam lintasan ini di sisipkan dua titik jika (v_i, v_x) menjadi sisi penutup maka (v_y, v_{i+1}) menjadi sisi penutup tambahan sebaliknya jika (v_y, v_{i+1}) jadi sisi penutup maka (v_i, v_x) menjadi sisi penutup tambahan begitu pula dengan antingnya akan bertambah sisi penutup. Jadi lintasan $k = t + 1$ memiliki sisi penutup minimal $(4t + 2(2t + 2))$. Jika $P_{(4t-2)(2)(\frac{1}{2}(4t-2))}$ ditambah dua sisi dalam tiap lintasannya maka menjadi $P_{(4t+2)(2)(\frac{1}{2}(4t+2))}$ atau $P_{(4t+2)(2)(2t+1)}$. Jadi untuk $n = 4k - 2$ maka memiliki pola sisi penutup minimalnya yaitu $n\,(\frac{1}{2}n + 1)$.

Untuk $n = 4k$, sisi penutup minimal graf lintasan beranting $2k(4k + 1)$. Misal $k = 1$ maka $P_{4\,(2)\,(2)}$ memiliki sisi penutup minimal 10. Misal $k = 2$ maka $P_{8\,(2)\,(4)}$ memiliki sisi penutup minimal 36 dan seterusnya. Asumsikan benar untuk $k = t$ maka $P_{(4t)(2)\,(\frac{1}{2}(4t))}$ memiliki sisi penutup minimal $2k(4k + 1) = 2t(4t + 1)$.

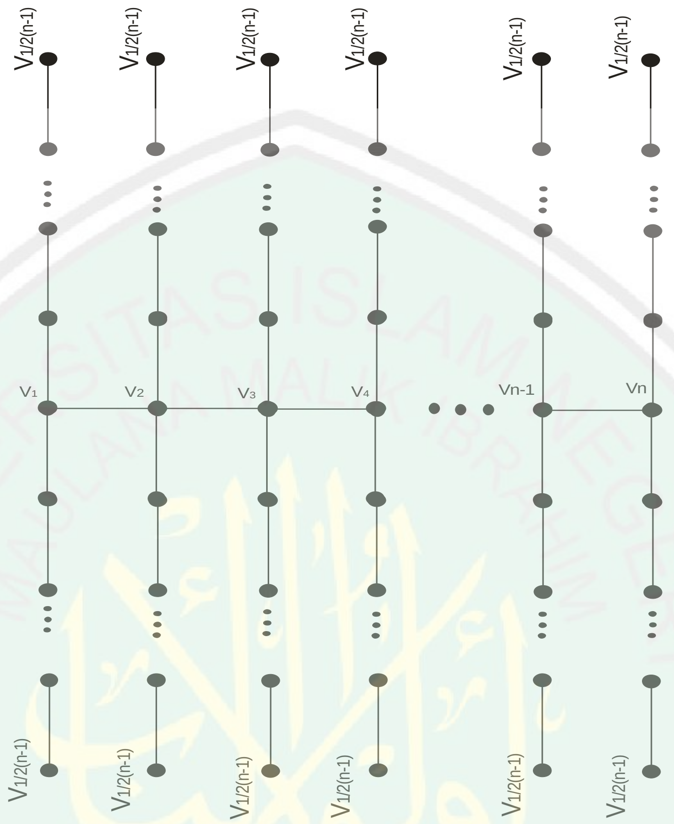
Akan ditunjukkan benar untuk$k = t + 1$ maka $n = 4t + 4$ berarti $P_{(4t+4)(2)(\frac{1}{2}(4t+4))}$ memiliki sisi penutup minimal $2k(4k + 1) = (2t + 2)(4t + 5)$.



Gambar 3.5 Graf $\boldsymbol{P_{(4t+4)(2)(\frac{1}{2}(4t+4))}}$

Dari $k = t$ maka $P_{(4t)(2)\,(\frac{1}{2}(4t))}$ memiliki himpunan sisi penutup minimal, misal $\{e_1, e_3, e_5, \dots, e_{2(k+1)}\}$ atau $\{e_2, e_4, e_6, \dots, e_{2k}\}$, maka penutupnya adalah $2t(4t+1)$. Ambil lintasan beranting (v_i, v_{i+1}) di $P_{(4t)(2)\,(\frac{1}{2}(4t))}$, dalam lintasan ini disisipkan dua titik jika (v_i, v_x) menjadi sisi penutup maka (v_y, v_{i+1}) menjadi sisi penutup tambahan sebaliknya jika (v_y, v_{i+1}) jadi sisi penutup maka (v_i, v_x) menjadi sisi penutup tambahan begitu pula dengan antingnya akan bertambah sisi penutup. Jadi lintasan $k = t + 1$ memiliki sisi penutup minimal $(2t+2)(4t+5)$. Jika $P_{(4t)(2)\,(\frac{1}{2}(4t))}$ ditambah dua sisi dalam tiap lintasannya maka menjadi $P_{(4t+4)(2)(\frac{1}{2}(4t+4))}$ atau $P_{(4t+4)(2)(2t+2)}$. Jadi untuk $n = 4k$ maka memiliki pola sisi penutup minimalnya yaitu $\frac{1}{2}n(n+1)$.

3.1.2 Titik dan Sisi Penutup Minimal pada Graf Lintasan Beranting n Ganjil



Gambar 3.6 Graf Lintasan Beranting n Ganjil

3.1.2.1 Titik Penutup

Tabel 3.3 Titik Penutup Graf Lintasan Beranting n Ganjil

Graf	Banyaknya Titik	Titik Penutup Minimal
$P_{3(2)(1)}$	9	3
$P_{5(2)(2)}$	25	12
$P_{7(2)(3)}$	49	21
$P_{9(2)(4)}$	81	40
$P_{11(2)(5)}$	121	55
$P_{13(2)(6)}$	169	84
$P_{15(2)(7)}$	225	105
. . . $P_{n\,(2)(1/2\,n-1)}$	. . . n^2	. . . $n = 4k - 1\ \ maka\ polanya = n\left(\frac{1}{2}(n-1)\right)$ $= (4k-1)\left(\frac{1}{2}(4k-1-1)\right)$ $= (4k-1)\,(2k-1)$ $n = 4k + 1\ maka\ polanya = n\left(\frac{1}{2}n - 1\right) + \left(\frac{1}{2}n - 1\right)$

		$= \left(\frac{1}{2}(n-1)\right)(n+1)$ $= \left(\frac{1}{2}(4k+1-1)\right)(4k+1+1)$ $= 2k(4k+2)$

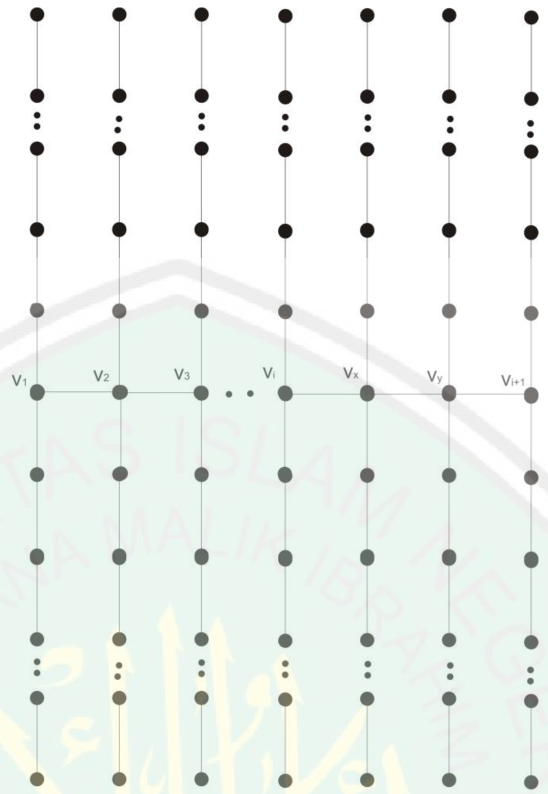
Sehingga dapat disimpulkan pola yang didapat:

$$\alpha\left(P_{n(2)\left(\frac{1}{2}n-1\right)}\right) \coloneqq \begin{cases} n\left(\dfrac{1}{2}(n-1)\right);\, n = 4k-1 \\ n\left(\dfrac{1}{2}(n-1)\right)(n+1);\; n = 4k+1 \end{cases}$$

Bukti:

Untuk $n = 4k-1$, titik penutup minimal Graf Lintasan Beranting $(4k-1)(2k-1)$. Untuk $k = 1$ maka $P_{3\,(2)(1)}$ memiliki titik penutup minimal $(4k-1)(2k-1) = 3 \cdot 1 = 3$. Untuk $k = 2$ maka $P_{7(2)(3)}$ memiliki banyak penutup minimal $(4k-1)(2k-1) = 7 \cdot 3 = 21$ dan seterusnya. Asumsikan benar untuk $k = t$ maka $P_{(4t-1)\,(2)\,(\frac{1}{2}(4t-2))}$ memiliki titik penutup minimal adalah $(4k-1)\,(2k-1) = (4t-1)\,(2t-1)$.

Akan ditunjukkan benar untuk $k = t+1$ maka $n = 4t+3$ berarti $P_{(4t+3)\,(2)\,\,(\frac{1}{2}(4t+2))}$ memiliki titik penutup minimal $(4k-1)\,(2k-1) = (\,4(t+1)-1)\,\,(\,2(t+1)-1)\,\,= (4t+3)(2t+1)$.

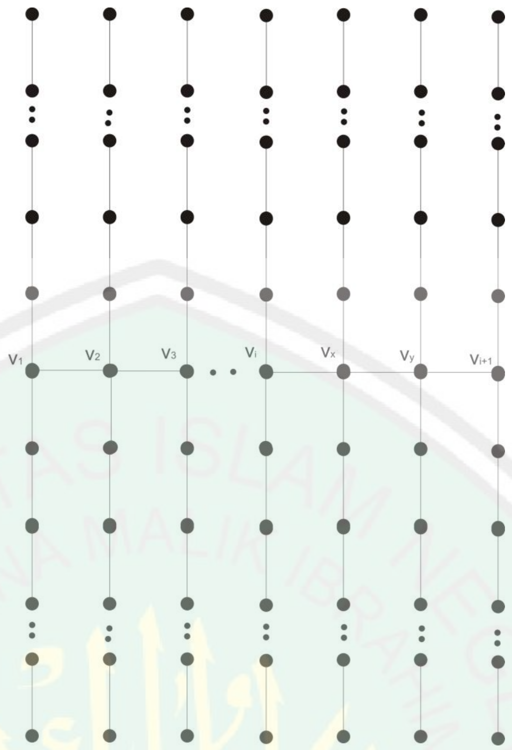


Gambar 3.7 Graf $P_{(4t+3)\ (2)\ (\frac{1}{2}(4t+2))}$

Dari $k = t$ maka $P_{(4t-1)\ (2)\ (\frac{1}{2}(4t-2))}$ memiliki himpunan titik penutup minimal, misal $\{v_1, v_3, v_5, \ldots, v_{2(k-1)}\}$ atau $\{v_2, v_4, v_6, \ldots, v_{2k}\}$, maka titik penutup minimalnya adalah $(4k-1)(2k-1)$. Ambil lintasan beranting (v_i, v_{i+1}) di $P_{(4t-1)\ (2)\ (\frac{1}{2}(4t-2))}$, dalam lintasan ini v_i atau v_{i+1} menjadi salah satu titik penutup, sisipkan 2 titik yang beranting di (v_i, v_{i+1}). Misal (v_i, v_x, v_y, v_{i+1}), v_x adalah titik penutup yang menutup sisi (v_i, v_x) dan (v_x, v_y), v_y adalah titik penutup yang menutup sisi (v_x, v_y) dan (v_y, v_{i+1}) sehingga jika pada lintasan (v_i, v_{i+1}), jika v_i menjadi titik penutup maka v_y menjadi titik penutup tambahan, sebaliknya jika v_{i+1} menjadi titik penutup maka v_x menjadi titik penutup tambahan. Sehingga titik penutup tambahan adalah salah satu dari v_x atau v_y begitu juga pada antingnya di setiap titik sikel pada anting bertambah dan titik penutupnya juga bertambah maka lintasan $k = t + 1$ memiliki titik penutup minimal $(4t + 3)\ (2t + 1)$. Jika $P_{(4t-1)\ (2)\ (\frac{1}{2}(4t-2))}$ disisipkan dua titik beranting dalam salah satu lintasannya maka menjadi $P_{(4t+3)\ (2)\ (\frac{1}{2}(4t+2))}$atau $P_{(4t+3)\ (2)\ (2t+1))}$. Sehingga $P_{n\ (2)\ \left(\frac{1}{2}n\right)}$ untuk $n = 4k - 1$ memiliki pola titik penutup minimal $n\left(\frac{1}{2}(n-1)\right)$.

Untuk $n = 4k + 1$, titik penutup minimal Graf Lintasan Beranting $2k(4k + 2)$. Untuk $k = 1$ maka $P_{5\ (2)(2)}$ memiliki titik penutup minimal $2k(4k + 2) = 2 \cdot 6 = 12$. Untuk $k = 2$ maka $P_{9(2)(4)}$ memiliki banyak penutup minimal $2k(4k + 2) = 4 \cdot 10 = 40$ dan seterusnya. Asumsikan benar untuk $k = t$ maka $P_{4t+1\ (2)\ (\frac{1}{2}(4t))}$ memiliki banyak titik penutup minimal adalah $2k\ (4k + 2) = 2t\ (4t + 6)$.

Akan ditunjukkan benar untuk $k = t + 1$ maka $n = 4k + 5$ berarti $P_{(4k+5)\ (2)\ (\frac{1}{2}(4k+4))}$ memiliki titik penutup minimal $2k\ (4k + 2)\ = 2(t + 1)\ (\ 4(t + 1) + 2) = (2t + 2)\ (4t + 6)$.



Gambar 3.8 Graf $P_{(4t+5)\,(2)\,(\frac{1}{2}(4t+4))}$

Dari $k = t$ maka $P_{(4t+5)\,(2)\,(\frac{1}{2}(4t+4))}$ memiliki himpunan titik penutup minimal, misal $\{v_1, v_3, v_5, \dots, v_{2(k-1)}\}$ atau $\{v_2, v_4, v_6, \dots, v_{2k}\}$, maka titik penutup minimalnya adalah $2t(4t+2)$. Ambil lintasan beranting (v_i, v_{i+1}) di $P_{(4t+5)\,(2)\,(\frac{1}{2}(4t+4))}$, dalam lintasan ini v_i atau v_{i+1} menjadi salah satu titik penutup, sisipkan dua titik yang beranting di (v_i, v_{i+1}). Misal (v_i, v_x, v_y, v_{i+1}), v_x adalah titik penutup yang menutup sisi (v_i, v_x) dan (v_x, v_y), v_y adalah titik penutup yang menutup sisi (v_x, v_y) dan (v_y, v_{i+1}) sehingga jika pada lintasan (v_i, v_{i+1}), jika v_i menjadi titik penutup maka $v_y$menjadi titik penutup tambahan, sebaliknya jika v_{i+1} menjadi titik penutup maka v_x menjadi titik penutup tambahan. Sehingga titik penutup tambahan adalah salah satu dari v_x atau v_y begitu juga pada antingnya di setiap titik sikel pada anting bertambah dan titik penutupnya juga bertambah maka lintasan $k = t + 1$ memiliki titik penutup minimal $(2t+2)(4t+6)$. Jika $P_{(4t+1)\,(2)\,(\frac{1}{2}(4t))}$ disisipkan dua titik beranting dalam salah satu lintasannya maka menjadi $P_{(4t+5)\,(2)\,(\frac{1}{2}(4t+4))}$ atau $P_{(4t+5)\,(2)\,(2t+2)}$ sehingga $P_{n\,(2)\,\left(\frac{1}{2}n\right)}$ untuk $n = 4k + 1$ memiliki pola titik penutup minimal $n\left(\frac{1}{2}n - 1\right) + (\frac{1}{2}n - 1)$.

3.1.2.2 Sisi Penutup

Tabel 3.4 Sisi Penutup Graf Lintasan Beranting n Ganjil

Graf	Banyaknya Sisi	Sisi Penutup Minimal
$P_{3(2)(1)}$	8	6
$P_{5(2)(2)}$	24	13
$P_{7(2)(3)}$	48	28
$P_{9(2)(4)}$	80	41
$P_{11(2)(5)}$	120	66
$P_{13(2)(6)}$	168	85
$P_{15(2)(7)}$	224	120
. . . $P_{n\,(2)(1/2\,n-1)}$	. . . $n^2 - 1$	. . . Untuk $n = 4k - 1$ $maka\ polanya = \left(\frac{1}{2}(n-1)+1\right)n$ $= \left(\frac{1}{2}n - \frac{1}{2} + 1\right)n$ $= \frac{1}{2}(n+1)\,n$ $= (4k-1)\,(\frac{1}{2}(4k-1\ -1)+1)$ $= (4k-1)\,((2k-1)+1)$ $= 2k\,(4k-1)$ Untuk $n = 4k + 1$ $maka\ polanya = n\left(\frac{1}{2}(n-1)\right) +$ $\left(\frac{1}{2}(n-1)+1\right)$ $= (4k+1)\,\left(\frac{1}{2}(4k+1-1)\right) + (\frac{1}{2}(4k+1\ -1)+1$ $= \left((4k+1)2k\right) + (2k+1)$

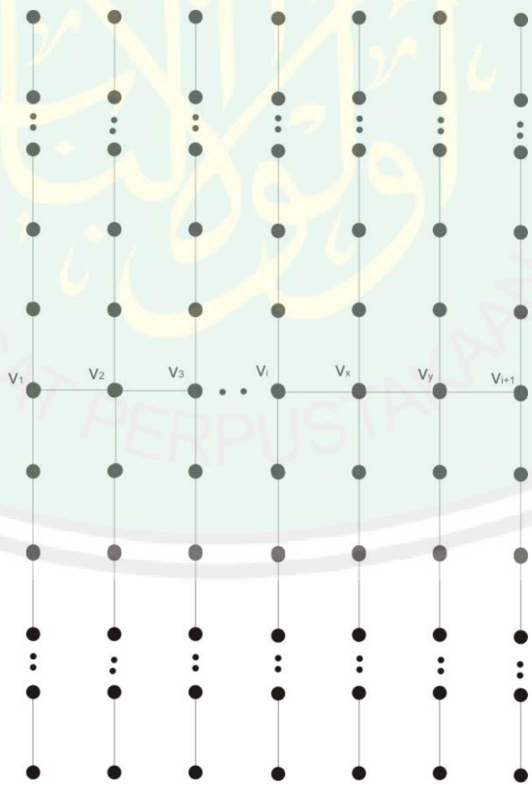
Sehingga dapat disimpulkan pola yang didapat:

$$\alpha_1\left(P_{n(2)\left(\frac{1}{2}n-1\right)}\right) \coloneqq \begin{cases} n\left(\dfrac{1}{2}(n-1)+1\right); n = 4k-1 \\ n\left(\dfrac{1}{2}(n-1)\right) + \left(\dfrac{1}{2}(n-1)+1\right);\ n = 4k+1 \end{cases}$$

Bukti:

Untuk $n = 4k - 1$, sisi penutup minimal Graf Lintasan Beranting $2k(4k - 1)$. Misal $k = 1$ maka $P_{3\,(2)\,(1)}$ memiliki sisi penutup minimal $2k(4k - 1) = 2 \cdot 3 = 6$. Misal $k = 2$ maka $P_{7\,(2)\,(3)}$ memiliki sisi penutup minimal $2k(4k - 1) = 4 \cdot 7 = 28$ dan seterusnya. Asumsikan benar untuk $k = t$ maka $P_{(4t-1)(2)(\frac{1}{2}(4t-2))}$ memiliki sisi penutup minimal $2k(4k - 1) = 2t(4t - 1)$

Akan ditunjukkan benar untuk$k = t + 1$ maka $n = 4t + 3$ berarti $P_{(4t+3)(2)(\frac{1}{2}(4t+2))}$ memiliki sisi penutup minimal $2k(4k - 1) = (2t + 2)(4t + 3)$.

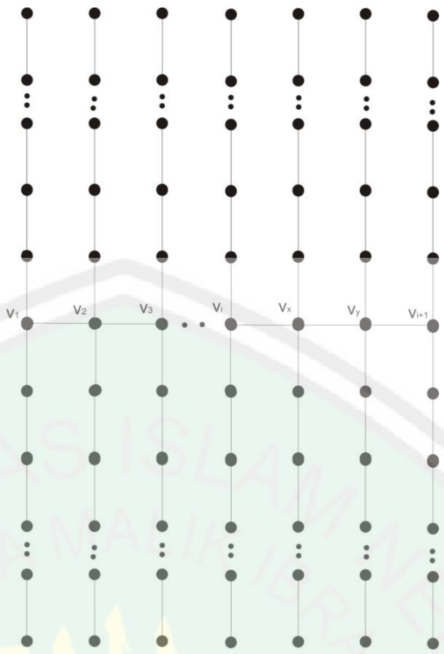


Gambar 3.9 Graf $\boldsymbol{P_{(4t+3)(2)(\frac{1}{2}(4t+2))}}$

Dari $k = t$ maka $P_{(4t-1)(2)(\frac{1}{2}(4t-2))}$ memiliki himpunan sisi penutup minimal, misal $\{e_1, e_3, e_5, \dots, e_{2(k+1)}\}$ atau $\{e_2, e_4, e_6, \dots, e_{2k}\}$, maka penutupnya adalah $2t(4t-1)$. Ambil lintasan beranting (v_i, v_{i+1}) di $P_{(4t-1)(2)(\frac{1}{2}(4t-2))}$, dalam lintasan ini disisipkan dua titik jika (v_i, v_x) menjadi sisi penutup maka (v_y, v_{i+1}) menjadi sisi penutup tambahan sebaliknya jika (v_y, v_{i+1}) jadi sisi penutup maka (v_i, v_x) menjadi sisi penutup tambahan begitu pula dengan antingnya akan bertambah sisi penutup. Jadi lintasan $k = t + 1$ memiliki sisi penutup minimal $(2t+2)(4t+3)$. Jika $P_{(4t-1)(2)(\frac{1}{2}(4t-2))}$ ditambah dua sisi dalam tiap lintasannya maka menjadi $P_{(4t+3)(2)(\frac{1}{2}(4t+2))}$ atau $P_{(4t+3)(2)(2t+1)}$. Jadi untuk $n = 4k - 1$ maka memiliki pola sisi penutup minimalnya yaitu $\frac{1}{2}n\,(n + 1)$.

Untuk $n = 4k + 1$, sisi penutup minimal Graf Lintasan Beranting $\big((4k+1)2k\big) + (2k+1)$. Misal $k = 1$ maka $P_{5\,(2)\,(2)}$ memiliki sisi penutup minimal 13. Misal $k = 2$ maka $P_{9\,(2)\,(4)}$ memiliki sisi penutup minimal 41 dan seterusnya. Asumsikan benar untuk $k = t$ maka $P_{(4t+1)(2)\,(\frac{1}{2}(4t+1-1))}$ memiliki sisi penutup minimal $= (4t+1)2t + (2t+1)$.

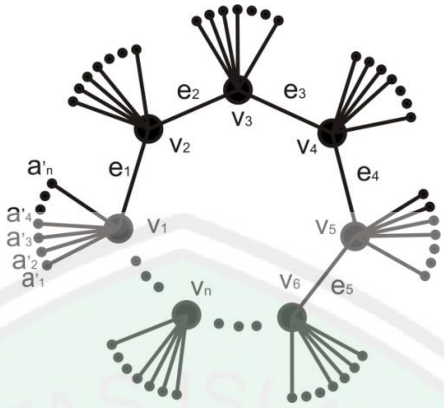
Akan ditunjukkan benar untuk $k = t + 1$ maka $n = 4t + 5$ berarti $P_{(4t+5)(2)(\frac{1}{2}(4t+4))}$ memiliki sisi penutup minimal $\big((4k+1)2k\big) + (2k+1) = (4t+5)(2t+2) + (2t+3)$.



Gambar 3.10 Graf $\boldsymbol{P}_{(4t)(2)\,(\frac{1}{2}(4t))}$

Dari $k = t$ maka $P_{(4t+1)(2)\,(\frac{1}{2}(4t+1-1))}$ memiliki himpunan sisi penutup minimal, misal $\{e_1, e_3, e_5, \dots, e_{2(k+1)}\}$ atau $\{e_2, e_4, e_6, \dots, e_{2k}\}$, maka penutupnya adalah $(4t+1)2t + (2t+1)$.Ambil lintasan beranting (v_i, v_{i+1}) di $P_{(4t+1)(2)\,(\frac{1}{2}(4t+1-1))}$, dalam lintasan ini di sisipkan dua titik jika (v_i, v_x) menjadi sisi penutup maka (v_y, v_{i+1}) menjadi sisi penutup tambahan sebaliknya jika (v_y, v_{i+1}) jadi sisi penutup maka (v_i, v_x) menjadi sisi penutup tambahan begitu pula dengan antingnya akan bertambah sisi penutup. Jadi lintasan $k = t + 1$ memiliki sisi penutup minimal$(4t+5)(2t+2) + (2t+3)$. Jika $P_{(4t+1)(2)\,(\frac{1}{2}(4t+1-1))}$ ditambah 2 sisi dalam tiap lintasannya maka menjadi $P_{(4t+5)(2)(\frac{1}{2}(4t+4))}$ atau $P_{(4t+5)(2)(2t+2)}$. Jadi untuk $n = 4k + 1$ maka memiliki pola sisi penutup minimalnya yaitu $n\left(\frac{1}{2}(n-1)\right) + \left(\frac{1}{2}(n-1) + 1\right)$.

3.2 Titik dan Sisi Penutup Minimal pada Graf Sikel Berambut



Gambar 3.11 Graf Sikel Berambut n

3.2.1 Titik Penutup

Tabel 3.5 Titik Penutup Graf Sikel Berambut

Graf	Banyaknya Titik	Titik Penutup Minimal
${}_{3}C_{3}$	12	3
${}_{4}C_{4}$	20	4
${}_{5}C_{5}$	30	5
${}_{6}C_{6}$	42	6
${}_{7}C_{7}$	56	7
${}_{8}C_{8}$	72	8
${}_{9}C_{9}$	90	9
${}_{10}C_{10}$	110	10
${}_{11}C_{11}$	132	11
${}_{12}C_{12}$	156	12
${}_{13}C_{13}$	182	13
${}_{14}C_{14}$	210	14
${}_{15}C_{15}$	240	15
.	.	.
.	.	.
.	.	.
${}_{n}C_{n}$	$n^2 + n$	n

Sehingga dapat disimpulkan pola yang didapat:

$\alpha\left({}_{n}C_{n}\right) = n;\ untuk\ n \in N, n \geq 3$

Bukti:

Pada ${}_{n}C_{n}$, misalkan $v_1, v_2, .., v_n$ adalah titik pada sikel dan a_j^i adalah rambut pada titik v_i, untuk $1 \leq i,\ j \leq n$. Ambil himpunan $A = \{v_1, v_2, .., v_n\}$. Maka semua sisi di ${}_{n}C_{n}$ terkait langsung dengan minimal satu titik di A. Jadi A

adalah titik cover. Karena A adalah titik cover dengan kardinalitas minimal, maka disimpulkan $\alpha({}_nC_n) = |A| = n$.

3.2.2 Sisi Penutup

Tabel 3.6 Titik Penutup Graf Sikel Berambut *n* Genap

Graf	Banyaknya Sisi	Sisi Penutup Minimal
${}_3C_3$	12	2
${}_4C_4$	20	16
${}_5C_5$	30	3
${}_6C_6$	42	36
${}_7C_7$	56	4
${}_8C_8$	72	64
${}_9C_9$	90	5
${}_{10}C_{10}$	110	100
${}_{11}C_{11}$	132	11
${}_{12}C_{12}$	156	144
${}_{13}C_{13}$	182	13
${}_{14}C_{14}$	210	196
${}_{15}C_{15}$	240	15
. . ${}_nC_n$	. . $n^2 + n$	. . n^2

Sehingga dapat disimpulkan pola yang didapat:

$\alpha_1({}_nC_n) = n^2;\ \ untuk\ n \in N, n \geq 3$

Bukti:

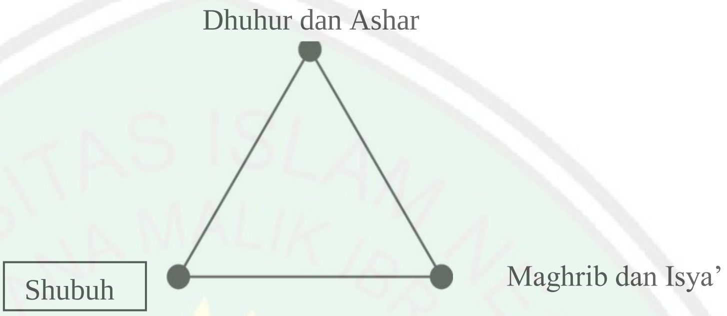
Pada ${}_nC_n$, misalkan $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ adalah titik pada sikel, a_j^i adalah rambut pada titik v_i, untuk $1 \leq i,\ j \leq n$. Ambil $B = \{a_j^i vi \mid 1 \leq i,\ j \leq n\}$ maka himpunan B mengcover semua titik di ${}_nC_n$, sehingga B adalah sisi cover di ${}_nC_n$. Karena B adalah sisi cover dengan kardinalitas minimal, maka disimpulkan $\alpha_1({}_nC_n) = |B| = n^2$.

3.3 Keterhubungan antara Graf Sikel Berambut dengan Agama

Islam adalah agama yang sesuai dengan fitrah manusia. Maksudnya, Islam adalah agama yang sesuai dengan kondisi dan keterbatasan yang dimiliki oleh manusia. Pada keadaan normal, berlaku hukum'azimah dan pada keadaan tidak normal maka Islam mengakomodirnya dengan rukhsah (keringanan/kemudahan) sehingga syariat tetap dapat ditunaikan. Kemudahan itu mencakup berbagai telah aspek dalam kehidupan, baik dalam hal aqidah, ibadah, syariat maupun muamalah telah banyak dalil Al-Quran dan As-Sunnah yang telah diterangkan. Pada pembahasan ini akan membahas salah satu diantara kemudahan dalam agama ini yakni shalat jama'. Menjama' shalat adalah menggabungkan antara dua shalat (Dhuhur dan Ashar atau Maghrib dan Isya') dan dikerjakan dalam waktu salah satunya. Menjama' shalat dilakukan karena beberapa sebab diantaranya safar, hujan, dan kepentingan mendesak.

Dari Anas ra berkata, "Rasulullah SAW apabila akan bepergian sebelum matahari bergeser ke arah barat, beliau menangguhkan shalat dhuhur kemudian (setelah tiba waktu ashar beliau singgah di suatu tempat), lalu menjama' keduanya dan apabila matahari tergelincir sebelum berangkat, maka beliau shalat dhuhur, kemudian berangkat". (HR. Bukhari dan Muslim)

Dari Muadz bin Jabal bahwa Rasulullah SAW apabila beliau melakukan perjalanan sebelum matahari condong (masuk waktu sholat zuhur), maka beliau mengakhirkan shalat dhuhur kemudian menjama'nya dengan shalat ashar pada waktu ashar, dan apabila beliau melakukan perjalanan sesudah matahari condong, beliau menjama' sholat dhuhur dan ashar (pada waktu dhuhur) baru kemudian beliau berangkat. Dan apabila beliau melakukan perjalanan sebelum *maghrib maka beliau mengakhirkan shalat maghrib dan menjama'nya dengan* shalat *isya', dan jika beliau berangkat sesudah masuk waktu maghrib,maka beliau menyegerakan shalat isya dan menjama'nya dengan* shalat *magrib.* (Hadits Riwayat Ahmad, Abu Daud dan Tirmidzi).



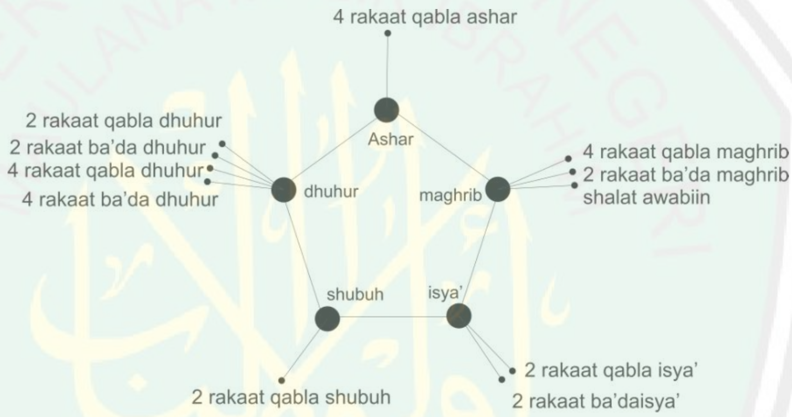
Gambar 3.12 Graf Shalat Jama'

Dari gambar diatas kemudian penulis merepresentasikan antara jama' shalat dengan titik penutup minimal Waktu shalat wajib yang telah ditetapkan oleh agama islam adalah lima waktu karena ada sebab yang tidak terduga maka Islam memberi kemudahan menjadi hanya tiga waktu. Pada matematika keadaan itu sama dengan titik penutup minimal pada graf sikel C_5, dimana C_5 memiliki banyak titik 5 tetapi penutup minimalnya 3.

Representasi yang lain dari suatu graf adalah mengenai shalat sunah. Shalat sunnah ialah semua perbuatan yang tidak termasuk dalam fardhu. Waktu pelaksanaan shalat sunah bermacam-macam tergantung keadaan ada yang sebelum atau setelah shalat fardhu, shalat gerhana, shalat khusuf, shalat istisqa, shalat tahajud dan lain-lain.

Dari Abu Hurairah ra. Rasulullah SAW bersabda " Barangsiapa yang mengerjakan shalat sunnah 20 rakaat antara maghrib dan isya' maka Allah akan memelihara keluarga, agama, dunia, dan akhiratnya. Dan barangsiapa yang mengerjakan shalat shubuh lalu ia duduk ditempat shalatnya sampai mata hari *terbit, kemudian iamengerjakan shalat dua rakaat, maka Allah akan membuatkan dinding (penghalang) baginya dari api neraka nanti padahari kiamat".*

Dengan demikian hadits diatas menunjukkan adanya shalat sunah yang dianjurkan oleh agama, maka penulis merepresentasikan shalat sunnah dengan graf sikel berambut. Setiap titik pada graf sikel menggambarkan shalat fardhu sedangkan rambut yang ada pada setiap titik pada sikel menggambarkan shalat sunnah.



Gambar 3.13 Graf Shalat Sunah Mu'akkad dan Ghairu Mu'akkad

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Dari pembahasan dapat disimpulkan sebuah pola tentang titik dan sisi penutup minimal pada Graf Lintasan Beranting dan Graf Sikel Berambut. Hasil penelitian ini diperoleh:

1. $\alpha\left(P_{n(2)\left(\frac{1}{2}n\right)}\right) := \begin{cases} n\ \frac{1}{2}n;\ n = 4k-2 \\ \frac{1}{2}n\ (n+1);\ n = 4k \end{cases}$
2. $\alpha_1\left(P_{n(2)\left(\frac{1}{2}n\right)}\right) := \begin{cases} n\left(\frac{1}{2}n+1\right);\ n = 4k-2 \\ \frac{1}{2}n\ (n+1);\ n = 4k \end{cases}$
3. $\alpha\left(P_{n(2)\left(\frac{1}{2}n-1\right)}\right) := \begin{cases} n\ \left(\frac{1}{2}(n-1)\right)\ ;\ n = 4k-1 \\ n\ \left(\frac{1}{2}(n-1)\right)\ (n+1);\ n = 4k+1 \end{cases}$
4. $\alpha_1\left(P_{n(2)\left(\frac{1}{2}n-1\right)}\right) := \begin{cases} n\left(\frac{1}{2}(n-1)+1\right);\ n = 4k-1 \\ n\left(\frac{1}{2}(n-1)\right) + \left(\frac{1}{2}(n-1)+1\right);\ n = 4k+1 \end{cases}$
5. $\alpha\left({}_nC_n\right) = n;\ untuk\ n \in N, n \geq 3$
6. $\alpha_1\left({}_nC_n\right) = n^2;\ \ untuk\ n \in N, n \geq 3$

4.2 Saran

Pada skripsi ini, penulis hanya memfokuskan pada pokok bahasan masalah titik dan sisi penutup minimal dari Graf Lintasan dan Graf Sikel. Maka dari itu, untuk penulisan skripsi selanjutnya, penulis menyarankan kepada pembaca untuk mengkaji lebih lanjut pada graf yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

Abdullah bin Muhammad bin ‘Abdurrahman bin Ishaq Alu Syaikh. 2007. *Lubaabut Tafsiir Min Ibni Katsir*. Kairo: Mu-assasah Daar al-Hilaal Kairo.

Abdussakir, Nilna N. Azizah dan Fifi F. Nofandika. 2009. *Teori Graf*. Malang: UIN-Malang Press.

Al Qarni, ‘Aidh. 2007. *Tafsir Muyassar*. Jakarta: Qisthi Prees.

As Shiddiqiey, Muhammad Hasbi. 2000. *Tafsir Al Qur’anul Majid An Nuur*. Semarang: Pustaka Rizki Putra.

Chartrand, Gary dan Lesniak, Linda. 1986. *Graphs and Digraphs Second Edition*. California: a Division of Wadsworth, Inc.

Kerami, Djati dan Cormentyna Sitanggang. 2003. *Kamus Matematika*. Jakarta: Balai Pustaka.

Lipschutz, Seymor dan Lipson, Marc Lars. 2002. *Matematika Diskrit*. Jakarta: Penerbit Salemba Teknika.

Purwanto, Agus. 2009. *Ayat-Ayat Semesta*. Bandung: Mizan.

Rahman, Subhan MA, Tradisi dan Inovasi Keilmuan Islam Masa Klasik: *Innovation*, vol 5:249-274,2006.

Sulaiman, Umar. 2005. *Fiqih Niat Dalam Ibadah*. Jakarta: Gema Insani Press.

Tim Penyusun Kamus Pusat Pembinaan dan Pengembangan Bahasa. 1989. *Kamus Besar Bahasa Indonesia*. Jakarta: Balai Pustaka.

Wilson. Robin J dan Walkins, John J. 1990. *Graphs an Introductory Approach: A First Course in Discrete Mathematic*. New York: John Wiley & Sons, Inc.

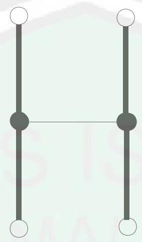
Anonim.2011. *Covering*. http://en.wikipedia.org/wiki/Covering. Di akses tanggal 11 Oktober 2011

LAMPIRAN

LAMPIRAN 1

Gambar titik dan sisi penutup minimal pada Graf Lintasan Beranting

a) Graf Lintasan Beranting ($P_{2(2)(1)}$)

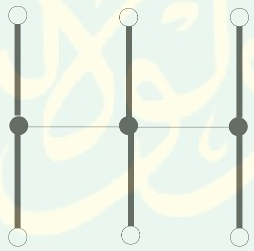


Gambar. Graf Lintasan Beranting ($P_{2(2)(1)}$)

$$\alpha(P_{2(2)(1)}) = 2$$

$$\alpha_1(P_{2(2)(1)}) = 4$$

b) Graf Lintasan Beranting ($P_{3(2)(1)}$)

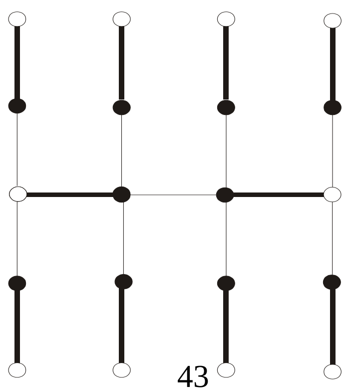


Gambar. Graf Lintasan Beranting ($P_{3(2)(1)}$)

$$\alpha(P_{3(2)(1)}) = 3$$

$$\alpha_1(P_{3(2)(1)}) = 6$$

c) Graf Lintasan Beranting ($P_{4(2)(2)}$)

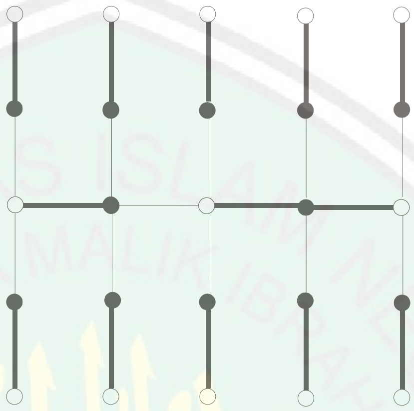


Gambar 4.3 Graf Lintasan Beranting ($P_{4(2)(2)}$)

$$\alpha(P_4(2)(2)) = 10$$

$$\alpha_1(P_4(2)(2)) = 10$$

d) Graf Lintasan Beranting ($P_{5(2)(2)}$)

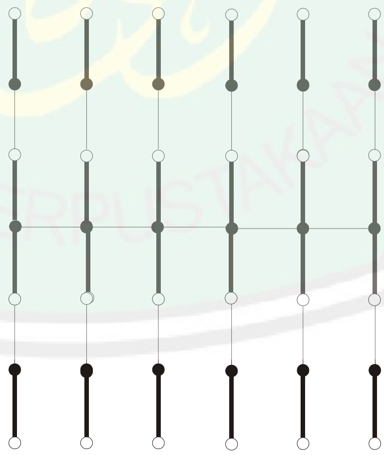


Gambar 4.4 Graf Lintasan Beranting ($P_{5(2)(2)}$)

$$\alpha(P_5(2)(2)) = 12$$

$$\alpha_1(P_5(2)(2)) = 13$$

e) Graf Lintasan Beranting ($P_{6(2)(3)}$)

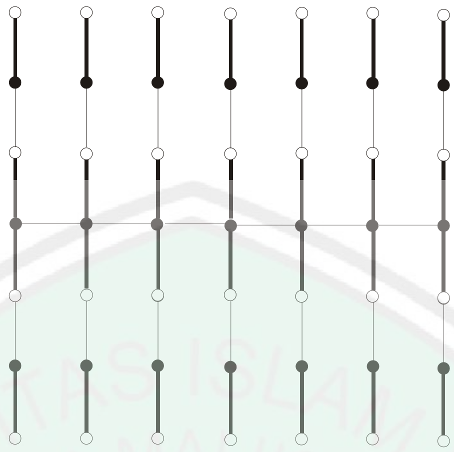


Gambar 4.5 Graf Lintasan Beranting ($P_{6(2)(3)}$)

$$\alpha(P_6(2)(3)) = 18$$

$$\alpha_1(P_6(2)(3)) = 24$$

f) **Graf Lintasan Beranting ($P_{7(2)(3)}$)**

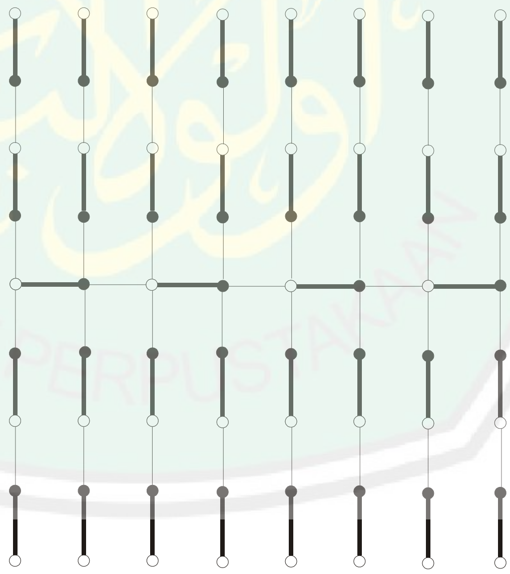


Gambar 4.6 Graf Lintasan Beranting ($P_{7(2)(3)}$)

$$\alpha(P_7(2)(3)) = 21$$

$$\alpha_1(P_7(2)(3)) = 28$$

g) **Graf Lintasan Beranting ($P_{8(2)(4)}$)**

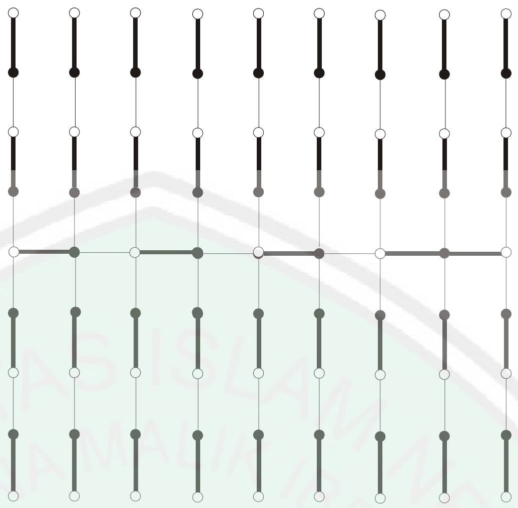


Gambar 4.7 Graf Lintasan Beranting ($P_{8(2)(4)}$)

$$\alpha(P_8(2)(4)) = 36$$

$$\alpha_1(P_8(2)(4)) = 36$$

h) Graf Lintasan Beranting ($P_{9(2)(4)}$)

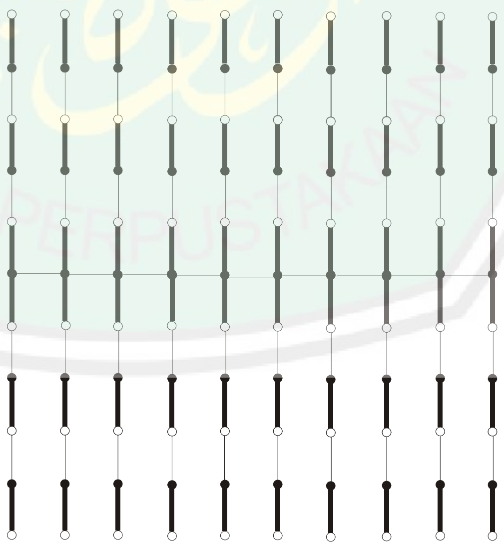


Gambar 4.8 Graf Lintasan Beranting ($P_{9(2)(4)}$)

$$\alpha(P_9(2)(4)) = 40$$

$$\alpha_1(P_9(2)(4)) = 41$$

i) Graf Lintasan Beranting ($P_{10(2)(5)}$)

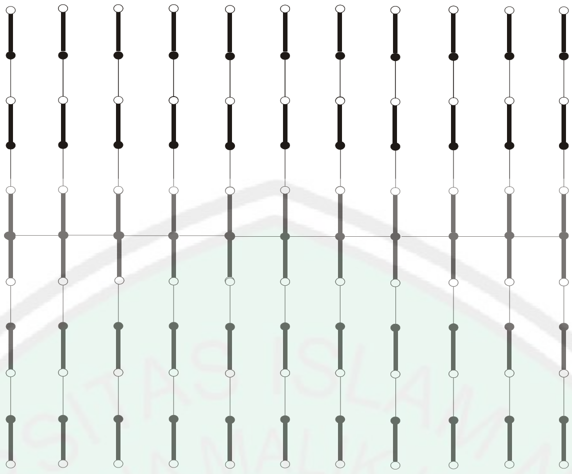


Gambar 4.9 Graf Lintasan ($P_{10(2)(5)}$)

$$\alpha(P_{10}(2)(5)) = 50$$

$$\alpha_1(P_{10}(2)(5)) = 60$$

j) **Graf Lintasan Beranting ($P_{11(2)(5)}$)**

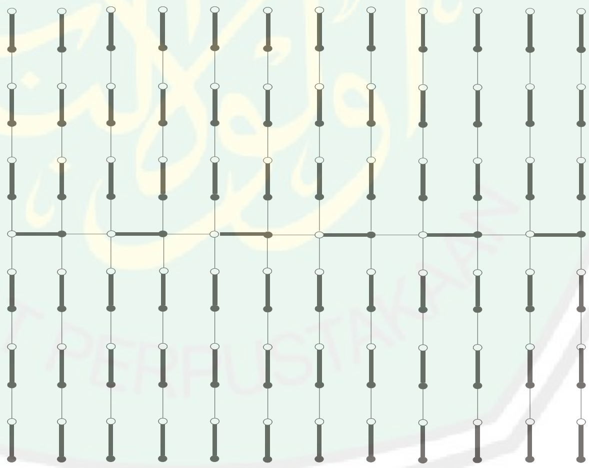


Gambar 4. 10 Graf Lintasan Beranting ($P_{11(2)(5)}$)

$$\alpha(P_{11}(2)(5)) = 55$$

$$\alpha_1(P_{11}(2)(5) = 66$$

k) **Graf Lintasan Beranting ($P_{12(2)(6)}$)**

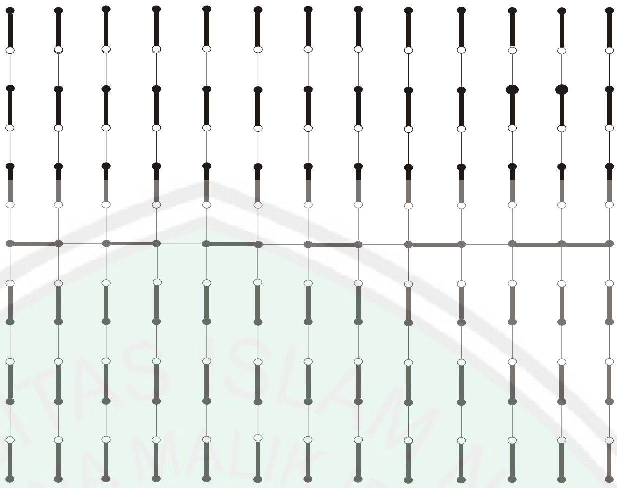


Gambar 4.11 Graf Lintasan Beranting ($P_{12(2)(6)}$)

$$\alpha(P_{12}(2)(6)) = 78$$

$$\alpha_1\big(P12(2)(6)\big) = 78$$

l) Graf Lintasan Beranting ($P_{13(2)(6)}$)

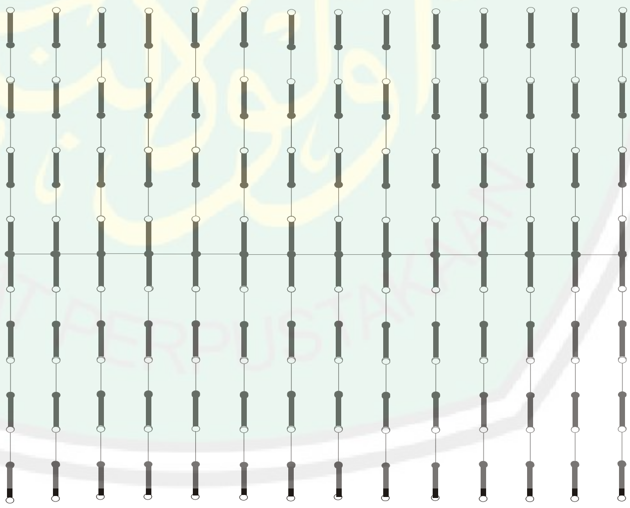


Gambar 4.12 Graf Lintasan Beranting ($P_{13(2)(6)}$)

$$\alpha(P_{13}(2)(6)) = 84$$

$$\alpha_1(P13(2)(6)) = 85$$

m) Graf Lintasan Beranting ($P_{14(2)(7)}$)

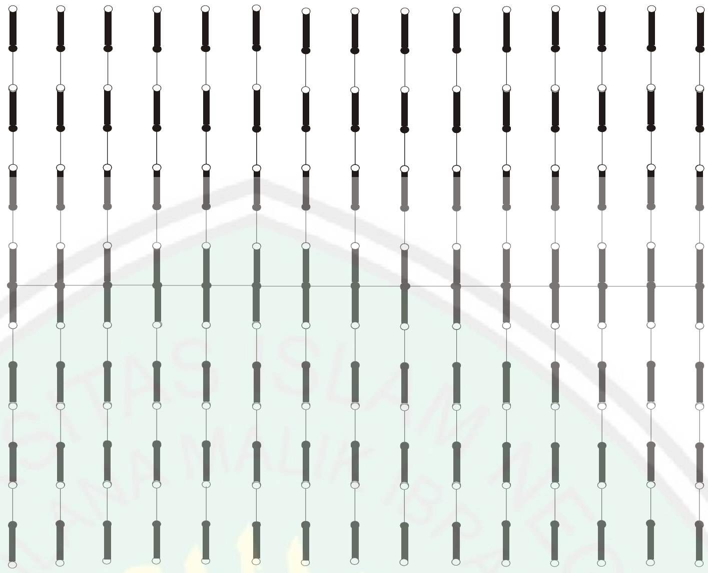


Gambar 4.13 Graf Lintasan Beranting ($P_{14(2)(7)}$)

$$\alpha(P_{14}(2)(7)) = 98$$

$$\alpha_1(P_{14}(2)(7)) = 112$$

n) **Graf Lintasan Beranting ($P_{15(2)(7)}$)**



Gambar 4.14 Graf Lintasan Beranting ($P_{15(2)(7)}$)

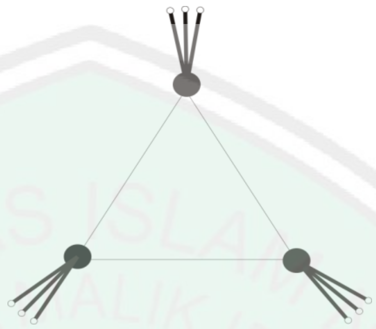
$$\alpha(P_{15}(2)(7)) = 105$$

$$\alpha_1(P_{15}(2)(7)) = 120$$

LAMPIRAN 2

Gambar titik dan sisi penutup minimal pada Graf Sikel Berambut

a) Graf Sikel Berambut (${}_3C_3$)

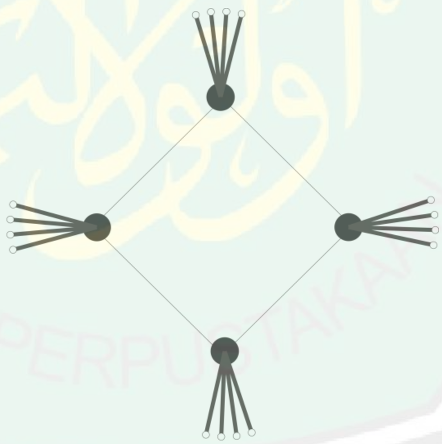


Gambar 4.17 Graf Sikel berambut (${}_3C_3$)

$$\alpha({}_3C_3) = 3$$

$$\alpha_1({}_3C_3) = 9$$

b) Graf Sikel Berambut (${}_4C_4$)

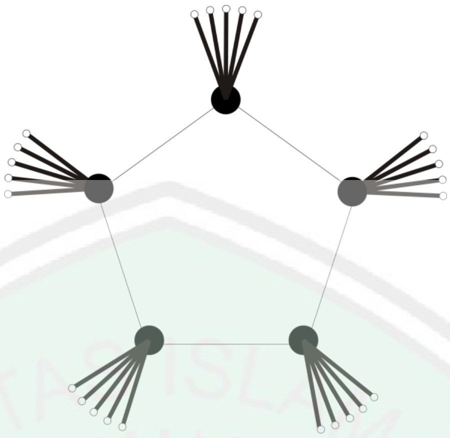


Gambar 4.18 Graf Sikel Berambut (${}_4C_4$)

$$\alpha({}_4C_4) = 4$$

$$\alpha_1({}_4C_4) = 16$$

c) Graf Sikel Berambut (${}_5C_5$)

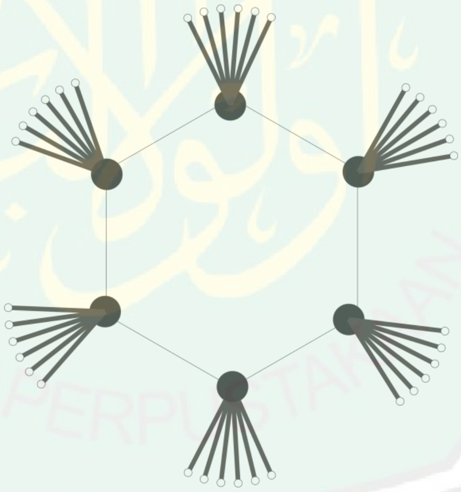


Gambar 4.19 Graf Sikel Berambut (${}_5C_5$)

$$\alpha({}_5C_5) = 5$$

$$\alpha_1({}_5C_5) = 25$$

d) Graf Sikel Berambut (${}_6C_6$)

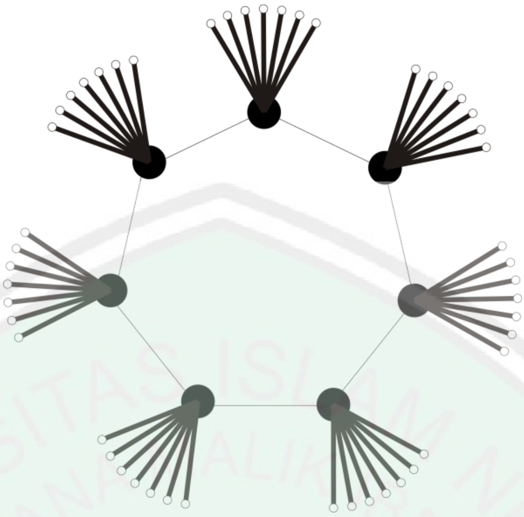


Gambar 4.20 Graf Sikel Berambut (${}_6C_6$)

$$\alpha({}_6C_6) = 6$$

$$\alpha_1({}_6C_6) = 36$$

e) **Graf Sikel Berambut ($_7C_7$)**

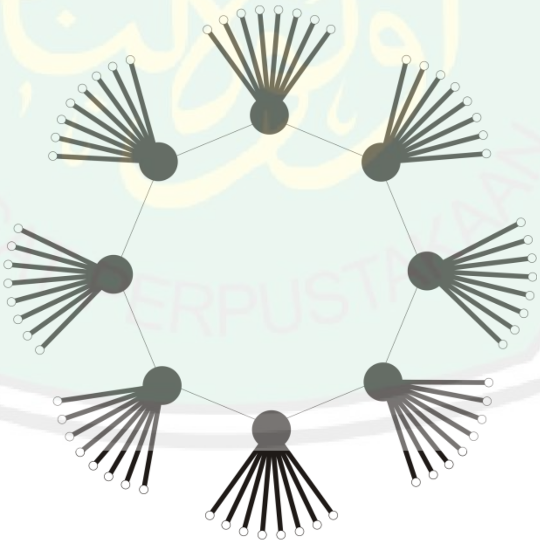


Gambar 4.21 Graf Sikel Berambut ($_7C_7$)

$$\alpha(\,_7C_7\,) = 7$$

$$\alpha_1(\,_7C_7\,) = 49$$

f) **Graf Sikel Berambut ($_8C_8$)**

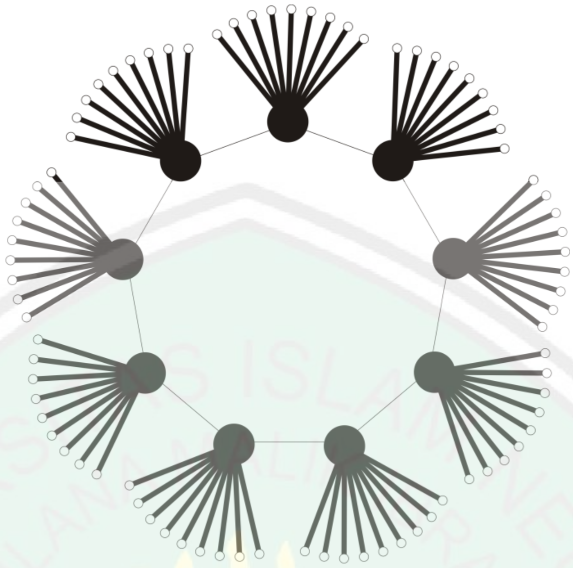


Gambar 4.22 Graf Sikel Berambut ($_8C_8$)

$$\alpha(\,_8C_8\,) = 8$$

$$\alpha_1(\,_8C_8\,) = 64$$

g) Graf Sikel Berambut ($_9C_9$)

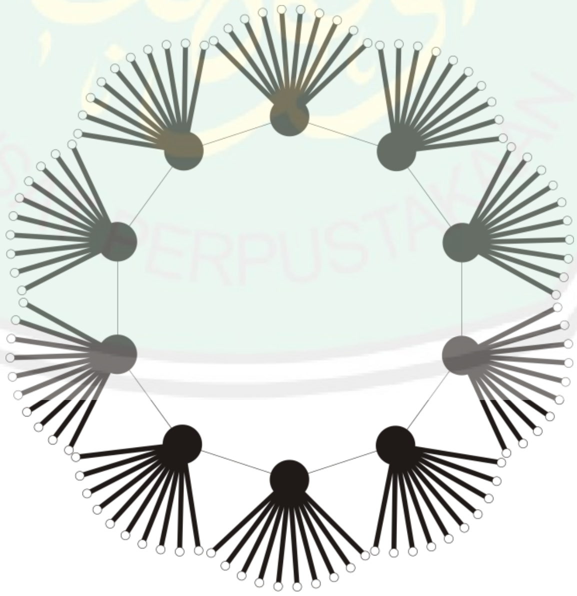


Gambar 4.23 Graf Sikel Berambut ($_9C_9$)

$$\alpha\left({}_9C_9\right) = 9$$

$$\alpha_1\left({}_9C_9\right) = 81$$

h) Graf Sikel Berambut ($_{10}C_{10}$)



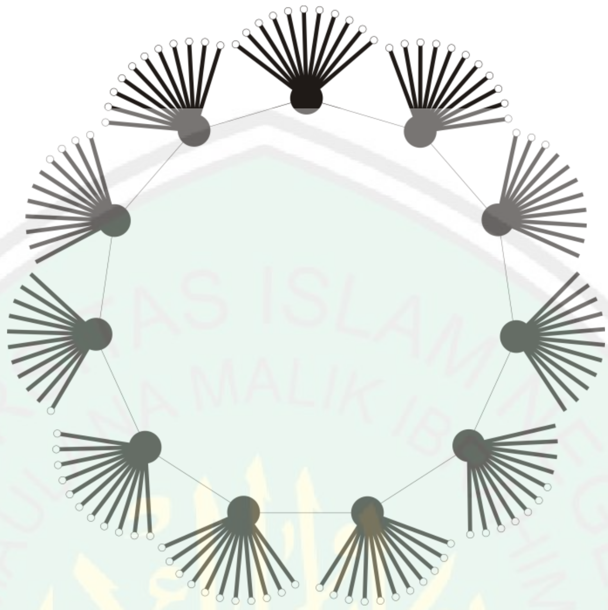
Gambar 4.24 Graf Sikel Berambut ($_{10}C_{10}$)

$$\alpha\left({}_{10}C_{10}\right) = 10$$

$$\alpha_1\left({}_{10}C_{10}\right) = 100$$

i) Graf Sikel Berambut (${}_{11}C_{11}$)

Gambar Graf Sikel Berambut (${}_{11}C_{11}$) sebagai berikut:

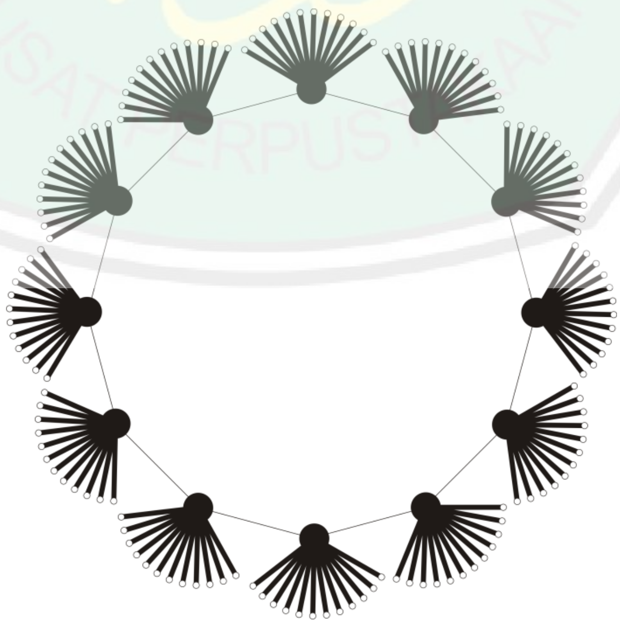


Gambar 4.25 Graf Sikel Berambut (${}_{11}C_{11}$)

$$\alpha\left({}_{11}C_{11}\right) = 11$$

$$\alpha_1\left({}_{11}C_{11}\right) = 121$$

j) Graf Sikel Berambut (${}_{12}C_{12}$)

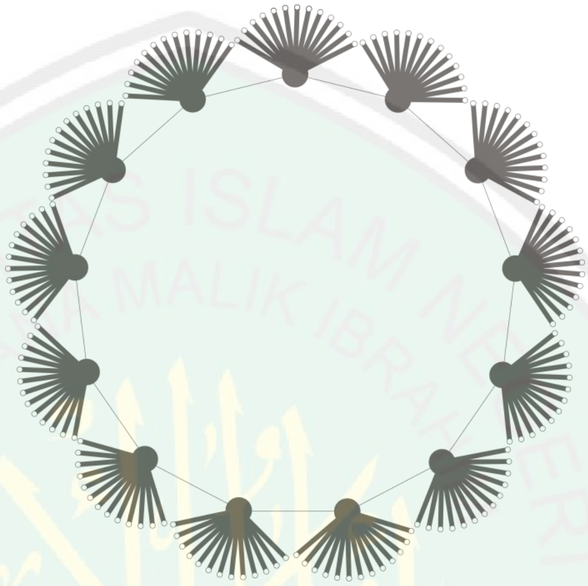


Gambar 4.26 Graf Sikel Berambut (${}_{12}C_{12}$)

$$\alpha({}_{12}C_{12}) = 12$$

$$\alpha_1({}_{12}C_{12}) = 144$$

k) Graf Sikel Berambut (${}_{13}C_{13}$)

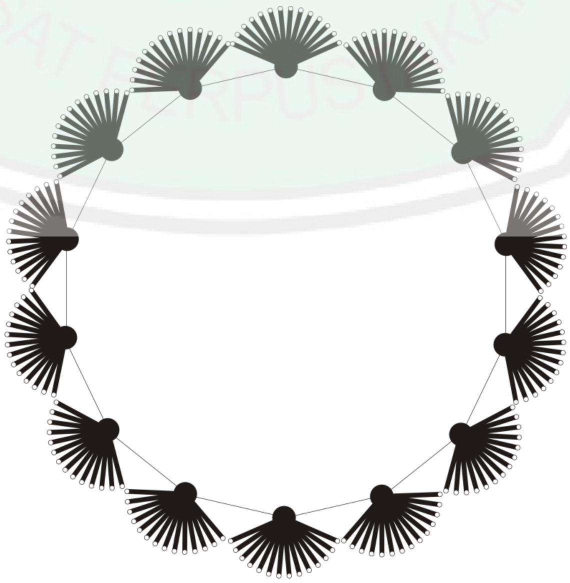


Gambar 4.27 Graf Sikel Berambut (${}_{13}C_{13}$)

$$\alpha({}_{13}C_{13}) = 13$$

$$\alpha_1({}_{13}C_{13}) = 169$$

l) Graf Sikel Berambut (${}_{14}C_{14}$)



Gambar 4.28 Graf Sikel Berambut (${}_{14}C_{14}$)

$$\alpha\left({}_{14}C_{14}\right) = 14$$

$$\alpha_1\left({}_{14}C_{14}\right) = 196$$

a) Graf Sikel Berambut (${}_{15}C_{15}$)

Gambar 4.29 Graf Sikel Berambut (${}_{15}C_{15}$)

$$\alpha\left({}_{15}C_{15}\right) = 15$$

$$\alpha_1\left({}_{15}C_{15}\right) = 225$$