

**DISKRETISASI MODEL *LORENZ*
DENGAN ANALOGI PERSAMAAN BEDA**

SKRIPSI

Oleh:
SITI SHIFATUL AZIZAH
NIM. 08610067



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2012**

**DISKRETISASI MODEL *LORENZ*
DENGAN ANALOGI PERSAMAAN BEDA**

SKRIPSI

Diajukan kepada:
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan
dalam Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
SITI SHIFATUL AZIZAH
NIM. 08610067

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2012**

**DISKRETISASI MODEL *LORENZ*
DENGAN ANALOGI PERSAMAAN BEDA**

SKRIPSI

Oleh:
SITI SHIFATUL AZIZAH
NIM. 08610067

Telah diperiksa dan disetujui untuk diuji:
Tanggal: 20 Januari 2012

Pembimbing I,

Pembimbing II,

Usman Pagalay, M.Si
NIP. 1965041 200312 1 001

Ach. Nashichuddin, M.A
NIP. 19730705 200003 1 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

**DISKRETISASI MODEL *LORENZ*
DENGAN ANALOGI PERSAMAAN BEDA**

SKRIPSI

**Oleh:
SITI SHIFATUL AZIZAH
NIM. 08610067**

Skripsi ini telah dipertahankan di depan Dewan Penguji
dan dinyatakan diterima sebagai salah satu persyaratan
dalam memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal: 20 Januari 2012

Susunan Dewan Penguji

TandaTangan

- | | | |
|------------------|--|-------|
| 1. Penguji Utama | : <u>Hairur Rahman, M.Si</u>
NIP. 19800429 200604 1 003 | _____ |
| 2. Ketua | : <u>Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd</u>
NIP. 19770521 200501 2 004 | _____ |
| 3. Sekretaris | : <u>Usman Pagalay, M.Si</u>
NIP. 1965041 200312 1 001 | _____ |
| 4. Anggota | : <u>Ach.Nashichuddin, M.A</u>
NIP.19730705 200003 1 001 | _____ |

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Siti Shifatul Azizah

NIM : 08610067

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Diskretisasi Model *Lorenz* dengan Analogi Persamaan Beda

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 13 Januari 2012
Hormat Kami,

Siti Shifatul Azizah
NIM. 08610067

MOTTO

”خير الناس انفعهم للناس”

*”Sebaik-baik manusia adalah yang paling
bermanfaat bagi manusia lainnya” (H.R. Bukhori)*

”Jangan Hitung Berapa Kali Kita Jatuh,
Tapi Hitunglah Berapa Kali Kita Bangkit” (Penulis)

PERSEMBAHAN

**Dengan Menyebut Nama Allah
Yang Maha Pengasih dan Penyayang,**

Penulis mempersembahkan

karya ini untuk:

**Ayahanda tercinta, Khoirur Rozikin,
yang selalu menjadi inspirasi
kegigihan dan kerja keras penulis,
Ibunda terkasih, Jannatul Muhaiyyah,
teladan kesabaran yang selalu menyebut
nama penulis dalam hening malamNya,
dan Adik tersayang, Tajirul Amin
dan Jazilatun Ni'mah, mutiara masa depan
yang menjadi ruh penyemangat penulis**

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Puji syukur ke hadirat Allah SWT yang telah menganugerahkan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi berjudul “Diskretisasi Model *Lorenz* dengan Analogi Persamaan Beda” dengan baik dan lancar.

Shalawat dan salam senantiasa penulis persembahkan kepada Rasulullah Muhammad SAW, yang telah memberikan inspirasi kepada seluruh umat manusia tidak terkecuali penulis, untuk berkarya dengan penuh semangat berlandaskan keagungan moral dan spiritual.

Ucapan terimakasih pun tidak lupa disampaikan kepada seluruh pihak yang telah mendukung lancarnya penyusunan skripsi ini, dengan hormat penulis ucapkan terimakasih kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU.DSc, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Usman Pagalay, M.Si, selaku pembimbing skripsi matematika.
5. Ach. Nashichuddin, M.A, selaku pembimbing skripsi keagamaan.
6. Hairur Rahman, M.Si dan Ari Kusumastuti, S.Si, M.Pd selaku penguji skripsi.
7. Seluruh dosen dan staf administrasi di Jurusan Matematika.

8. Bapak Khoirur Rozikin dan Ibu Jannatul Muhaiyyah selaku orang tua yang senantiasa memberikan dukungan moril, spirituail dan materil.
9. Tajirul Amin dan Jazilatun Ni'mah, selaku saudara tercinta.
10. Segenap keluarga besar di Gondang, Mojokerto.
11. Imam Fachruddin, S.Si, Riang Fauzi, S.Si, Iin Komarus Soimah, S.Si, Umi Maghfiroh, Abdul Latif, Shofwan Ali Fauji, Aulia Dewi Farizki, dan Nurul Hijriyah selaku orang terdekat dan rekan diskusi yang memperlancar penelitian untuk skripsi ini.
12. Nur Kholidah, Ainul Aziziyah, Siti Nur Faizah, Suhartin, Faridasari, Fitrianingrum yang telah menjadi keluarga kecil di kost Gapika Lantai 2.
13. Seluruh teman seperjuangan di Jurusan Matematika angkatan 2008.
14. Seluruh teman seperjuangan di Himpunan Mahasiswa Jurusan (HMJ) Matematika periode 2009 dan 2010.
15. Seluruh teman seperjuangan di Senat Mahasiswa (SEMA) periode 2011.
16. Seluruh Gus dan Ning di Lembaga Kajian, Penelitian, dan Pengembangan Mahasiswa (LKP2M).
17. Keluarga besar LBB *Progressive Private Center* (P2C).
18. Seluruh adik-adik bimbingan belajar di MAN 3 Malang.
19. Saudara-saudara lain yang namanya tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Semoga karya ini dapat bermanfaat bagi penulis dan pembaca sekalian.

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Malang, 14 Januari 2012

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PENGAJUAN	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	
MOTTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR	i
DAFTAR ISI	iii
DAFTAR GAMBAR	v
DAFTAR TABEL	vi
DAFTAR LAMPIRAN	vii
ABSTRAK	viii
ABSTRACT	ix
ملخص البحث	x
 BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	5
1.3 Tujuan	5
1.4 Batasan Masalah	5
1.5 Manfaat Penelitian	6
1.6 Metode Penelitian	6
1.7 Sistematika Penulisan	7
 BAB II TINJAUAN PUSTAKA	
2.1 Persamaan Diferensial.....	8
2.1.1 Pengertian Turunan	8
2.1.2 Sistem Persamaan Diferensial.....	10
2.1.3 Titik Keseimbangan	11
2.1.4 Kestabilan	11
2.1.5 Kekontinuan Fungsi	12
2.2 Persamaan Beda	13
2.2.1 Pengertian Beda	13
2.2.2 Pengertian Persamaan Beda	13
2.2.3 Persamaan Beda Linier dan Nonlinier	14
2.2.4 Sistem Persamaan Beda	15
2.2.5 Analogi antara Kalkulus Beda dan Kalkulus Diferensial	16
2.2.6 Pendekatan Persamaan Diferensial dengan Persamaan Beda	17
2.3 Model Kontinu dan Model Diskret	18
2.4 Model <i>Lorenz</i>	20
2.5 Kekacauan (<i>Chaos</i>)	23
2.6 Udara dalam Alquran	25

BAB III PEMBAHASAN

3.1 Konstruksi Bentuk Diskret Model <i>Lorenz</i>	32
3.1.1 Konstruksi t Diskret.....	32
3.1.2 Diskretisasi f_1	34
3.1.3 Diskretisasi f_2	35
3.1.4 Diskretisasi f_3	36
3.2 Analisis Perbandingan Perilaku Variabel pada Model Kontinu dan Diskret <i>Lorenz</i>	37
3.3 Analisis Perbandingan Perilaku Kekacauan (<i>Chaos</i>) pada Model Kontinu dan Diskret <i>Lorenz</i>	48
3.4 Model <i>Lorenz</i> dalam Pandangan Islam.....	55

BAB IV PENUTUP

4.1 Kesimpulan	60
4.2 Saran	61

DAFTAR PUSTAKA	62
-----------------------------	----

LAMPIRAN	64
-----------------------	----

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Grafik Persamaan Logistik Diskret dan Kontinu	20
Gambar 2.2 Sel Konveksi <i>Rayleigh-Benard</i>	21
Gambar 2.3 Sel Konveksi	22
Gambar 2.4 Pendulum yang Digerakkan	24
Gambar 2.5 Gangguan δ di sekitar Titik $X(t)$	25
Gambar 3.1 Skema Perubahan t Diskret.....	33
Gambar 3.2 Grafik Diskret dan Kontinu Model <i>Lorenz</i> dengan Parameter $\sigma = 10, b = \frac{8}{3}, r = 28$ dan Nilai Awal $(X_0, Y_0, Z_0) = (1,1,1)$ untuk $0 \leq t \leq 1$ Menit.....	39
Gambar 3.3 Grafik Diskret dan Kontinu Model <i>Lorenz</i> dengan Parameter $\sigma = 10, b = \frac{8}{3}, r = 28$ dan Nilai Awal $(X_0, Y_0, Z_0) = (1,1,1)$ untuk $0 \leq t \leq 10$ Menit.....	43
Gambar 3.4 Grafik Diskret dan Kontinu Model <i>Lorenz</i> dengan Parameter $\sigma = 10, b = \frac{8}{3}, r = 28$ dan Nilai Awal $(X_0, Y_0, Z_0) = (1,1,1)$ untuk $0 \leq t \leq 30$ Menit.....	46
Gambar 3.5 (a) Titik Kestimbangan Sebelum Mendapat Gangguan	52
Gambar 3.5 (b) Titik Kestimbangan Setelah Mendapat Gangguan	52
Gambar 3.6 Grafik Model <i>Lorenz</i> Sesudah dan Sebelum diberi Gangguan...	53
Gambar 3.7 Titik Kestimbangan Model <i>Lorenz</i> dengan $h = 0.001$	54
Gambar 3.8 Titik Kestimbangan Model <i>Lorenz</i> dengan $h = 0.0001$	54

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1 Analogi Kalkulus Diferensial dengan Persamaan Beda	16
Tabel 3.1 Nilai X, Y, Z dengan $h = 0.1$ dalam $0 \leq t \leq 1$ Menit.....	40



DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1	Program MATLAB untuk Grafik Diskret pada Gambar 3.2.....	64
Lampiran 2	Program MATLAB untuk Grafik Diskret pada Gambar 3.3.....	65
Lampiran 3	Program MATLAB untuk Grafik Diskret pada Gambar 3.4.....	66
Lampiran 4	Program MATLAB untuk Grafik Kontinu pada Gambar 3.2	67
Lampiran 5	Program MATLAB untuk Grafik Kontinu pada Gambar 3.3	68
Lampiran 6	Program MATLAB untuk Grafik Kontinu pada Gambar 3.4	69
Lampiran 7	Program MATLAB untuk Grafik Titik Tetap Model Kontinu Sebelum dan Sesudah Mendapat Gangguan di sekitar $(X^*, Y^*, Z^*) = (0,0,0)$ pada Gambar 3.5 (a) dan (b).....	70
Lampiran 8	Program MATLAB untuk Grafik Titik Tetap Model Kontinu pada Gambar 3.6 (a) dan (b)	71
Lampiran 9	Program MATLAB untuk Grafik Titik Tetap Model Kontinu pada Gambar 3.6 (c) dan (d)	72
Lampiran 10	Program MATLAB untuk Grafik Titik Tetap Model Diskret dengan $h = 0.001$ pada Gambar 3.7 (a) dan (b).....	73
Lampiran 11	Program MATLAB untuk Grafik Titik Tetap pada Model Diskret dengan $h = 0.0001$ Gambar 3.8 (a) dan (b).....	74
Lampiran 12	Program MAPLE untuk Perhitungan Titik Keseimbangan dan Analisis Kestabilan Sebelum Mendapat Gangguan.....	75
Lampiran 13	Program MAPLE untuk Perhitungan Titik Keseimbangan dan Analisis Kestabilan Sesudah Mendapat Gangguan	77
Lampiran 14	<i>Output</i> Program MATLAB untuk Model Diskret $h = 0.1$ dengan $0 \leq t \leq 1$ Menit.....	78
Lampiran 15	<i>Output</i> Program MATLAB untuk Model Diskret $h = 0.1$ dengan $0 \leq t \leq 10$ Menit	79
Lampiran 16	<i>Output</i> Program MATLAB untuk Model Diskret $h = 0.1$ dengan $0 \leq t \leq 30$ Menit	81
Lampiran 17	<i>Output</i> Program MATLAB untuk Model Diskret $h = 0.01$ dengan $0 \leq t \leq 1$ Menit	87

ABSTRAK

Azizah, Siti Shifatul. 2012. **Diskretisasi Model Lorenz dengan Analogi Persamaan Beda**. Skripsi. Jurusan Matematika. Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing:(I) Usman Pagalay, M.Si. (II) Ach. Nashichuddin, M.A.

Kata kunci: diskretisasi, model *Lorenz*, persamaan beda, model kontinu, model diskret, *chaos*

Diskretisasi model merupakan prosedur transformasi model kontinu ke model diskret. Diskretisasi dilakukan dengan menggunakan metode analogi persamaan beda, yaitu dengan menganalogikan persamaan diferensial yang menggunakan aturan limit, dengan persamaan beda yang menggunakan beda h antar titik waktu diskret. Model yang digunakan dalam skripsi ini adalah model *Lorenz* yang merepresentasikan aliran konveksi udara di atmosfer yang terjadi karena perbedaan suhu.

Inti dari penelitian ini adalah melakukan konstruksi model diskret *Lorenz* dan pengamatan perbandingan perilaku antar model diskret dan model kontinu. Metode yang digunakan terdiri dari tiga tahap, yaitu tahap konstruksi t untuk kasus diskret, tahap diskretisasi masing-masing persamaan dan tahap validasi model diskret dengan membandingkan hasil simulasi grafik kontinu dan diskret.

Hasil dari penelitian ini didapatkan model diskret *Lorenz* dalam bentuk umum: $X_{m+1} = (1 - \sigma h)X_m + \sigma h Y_m$, $Y_{m+1} = (r - Z_m)hX_m + (1 - h)Y_m$, $Z_{m+1} = (1 - bh)Z_m + hX_m Y_m$ dengan $m \in N$ dan $h \rightarrow 0$. Perbandingan perilaku setiap variabel pada model kontinu dan diskret diamati saat $h = 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001$ dengan parameter $\sigma = 10, b = \frac{8}{3}$ dan $r = 28$ dan nilai awal $(X_0, Y_0, Z_0) = (1, 1, 1)$. Untuk h semakin kecil perbedaan antara model kontinu dan diskret akan semakin sedikit pula. Dari hasil simulasi diskret, efek *chaos* terjadi pada $t \geq 15$ menit. Saat $h \leq 0,001$, model diskret yang dibentuk dapat mengimplementasikan perilaku variabel kontinu dan gejala kekacauan (*chaos*) di sekitar titik kesetimbangan.

ABSTRACT

Azizah, Siti Shifatul. 2012. **Discretization Lorenz Model by Difference Equation Analogy**. Theses. Mathematics Programme. Faculty of Science and Technology. The State of Islamic University Maulana Malik Ibrahim Malang.

Promotor: (I) Usman Pagalay, M. Si
(II) Ach. Nashichuddin, M.A

Key words: discretization, *Lorenz* model, difference equation, continuous model, discrete model, chaos

Discretization of model is transformation a model in continuous form to be a discrete one. It does to get a model which applicative in continuous and discret condition. It can be done by using difference equation analogy method. It analogues a differential equation that use limit rules with difference equation that use difference h between the points of discrete time. The model in this research is *Lorenz* model. This model represents a convection motion in atmosphere that occurs due to temperature difference.

The purpose of the research is show construction the discrete version of *Lorenz* model and know comparison of discrete *Lorenz* behavior and continuous one. This research was done by three steps. First, construct time t for discrete case. Second, discretization each of equations in *Lorenz* system, and third, validation the discrete model that is obtained, by simulating its graphics and compare it with continuous one.

The results of this research obtain a discrete *Lorenz* model in general form: $X_{m+1} = (1 - \sigma h)X_m + \sigma h Y_m$, $Y_{m+1} = (r - Z_m)h X_m + (1 - h)Y_m$, $Z_{m+1} = (1 - bh)Z_m + h X_m Y_m$ with $m \in N$ and $h \rightarrow 0$. Comparison of the behavior of each variables on a continuous and discrete model is observed when $h = 0.1; 0.01, 0.001; 0.0001$ with the parameter $\sigma = 10, b = \frac{8}{3}$ and $r = 28$ and initial value $(X_0, Y_0, Z_0) = (1, 1, 1)$. For smaller h , the difference between continuous and discrete model will be less too. From, simulation of discrete graphics, chaotic behavior can be shown from $t \geq 15$ minutes. When $h \leq 0.001$, discrete model can implement the behavior of continuous variables and chaotic behavior around equilibrium point.

ملخص البحث

العزيزة، ستي صفة. ٢٠١٢. تفريد نموذج لورينز بقياس الفرقية المعادلة. بحث جامعي. شعبة الرياضيات. كلية العلوم و التكنولوجيا. جامعة مولانا مالك ابراهيم الاسلامية الحكومية ملانج.

مشريف: (١) عثمان فكلي الماجستير في العلوم
(٢) احمد نصيح الدين سيد الدين

الكلمة الرئيسية: تفريد, نموذج لورينز, الفرقية المعادلة, نموذج مستمر, نموذج منفصلة, فوضى

تفريد نموذج هي اجراءات لتغيير نموذج مستمر الى نموذج منفصلة. تفريد التي تؤديها بطريق قياسا الفرقية المعادلة هي يساوي المعادلة التفاضلية اللواتي يستخدمون قواعد الحد, مع فارق المعادلات اللواتي يستخدمون فرق h بين نقطة الوقت المنفصلة. النموذج في هذه الدراسة هو لورينز النموذج الذي يصف حركة الهواء الحراري في السماء التي حدثت بسبب الاختلافات في درجات الحرارة.

الغرض من هذه الدراسة هو لالبناء نماذج لورينز منفصلة وقارون. الطريقة المستخدمة تتكون من ثلاث: اولاً, البناء مرحلة t منفصلة. الثانية, تفريد كل معادلة لورينز النظام. والثالث, والتحقق من صحة النموذج المنفصل بمقارنة نتائج المحاكاة من الرسومات المستمرة والمتقطعة. الحصول على نتائج هذه الدراسة نموذج لورينز منفصلة في العام: $X_{m+1} = (1 - \sigma h)X_m + \sigma h Y_m$, $Y_{m+1} = (r - Z_m)h X_m + (1 - h)Y_m$, $Z_{m+1} = (1 - b h)Z_m + h X_m Y_m$

ومعالمات $r = 28$ و $b = \frac{1}{3}$, $\sigma = 10$, الاعدولية والقيمة $(X_0, Y_0, Z_0) = (1, 1, 1)$

مع ان $m \in N$ و $h \rightarrow 0$ ويلاحظ مقارنة بين سلوك كل متغير علي النماذج المستمرة والمتقطعة عند $h = 0.1; 0.01; 0.001; 0.0001$. اقل يمكن h يكون مختلفاً. الفرق بين النماذج المستمرة والمتقطعة تكون اقل ايضاً. من نتيجة محاكاة منفصلة, اثار الفوضى تحدث في ان تشكل نمودجا منفصلة تنفيذ سلوك المستمرة و على اعراض اضطراب عليه عندما $h \leq 0.001$.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Alquran merupakan sumber pengetahuan dan inspirasi umat Islam dalam segala hal. Berbagai informasi sains dan teknologi telah terkandung di dalamnya sejak ribuan tahun silam. Salah satunya adalah teknologi angin yang menginspirasi penulisan skripsi ini, terdapat dalam surat al-Furqaan ayat 48, yang berbunyi:

وَهُوَ الَّذِي أَرْسَلَ الرِّيحَ بُشْرًا بَيْنَ يَدَيْ رَحْمَتِهِ ۖ وَأَنْزَلْنَا مِنَ السَّمَاءِ مَاءً طَهُورًا ﴿٤٨﴾

Artinya:

“Dialah yang meniupkan angin (sebagai) pembawa kabar gembira dekat sebelum kedatangan rahmat-Nya (hujan), dan Kami turunkan dari langit air yang amat bersih” (QS. Al-Furqaan:48).

Ayat ini menjelaskan bahwa angin dapat dijadikan sebagai kabar gembira sebelum kedatangan hujan, dengan kata lain angin dapat digunakan untuk mengetahui turunnya hujan. Pengetahuan yang disampaikan Alquran ini, dibuktikan oleh pakar meteorologi dan matematika, Edward Lorenz (1963) dalam temuannya yang dikenal dengan istilah sistem persamaan *Lorenz* atau model *Lorenz*. Model ini merepresentasikan gerakan konveksi yaitu aliran angin di atmosfer untuk kebutuhan peramalan cuaca. Salah satu studi yang dapat diterapkan pada model tersebut adalah dilakukannya diskretisasi agar model dapat digunakan baik dalam bentuk kontinu maupun diskret.

Menurut Liu dan Hussain (2012:2), diskretisasi merupakan proses kuantisasi sifat-sifat kontinu. Kuantisasi diartikan sebagai proses pengelompokan

sifat-sifat kontinu pada selang-selang tertentu (*step size*). Kegunaan diskretisasi adalah untuk mereduksi dan menyederhanakan data, sehingga didapatkan data diskret yang lebih mudah dipahami, digunakan dan dijelaskan. Oleh karena itu, hasil pembelajaran dengan bentuk diskret dipandang Dougherty (1995) sebagai hasil yang cepat dan akurat dibandingkan hasil dari bentuk kontinu. Diskretisasi dapat dilakukan dengan berbagai metode, salah satunya yaitu metode analogi persamaan beda.

Menurut Kamus Bahasa Indonesia yang diterbitkan oleh Pusat Bahasa Departemen Pendidikan Nasional 2008, analogi merupakan persesuaian atau penyetaraan dari dua hal yang berlainan. Adapun konsep analogi persamaan beda muncul dari pengertian persamaan kontinu dan diskret. Meyer (1985:325) menjelaskan bahwa persamaan kontinu merupakan persamaan yang mencakup perubahan sesaat, yang secara matematis dinyatakan dengan persamaan diferensial (*differential equation*). Sedangkan persamaan diskret menggambarkan perubahan yang tidak sesaat dan dinyatakan dalam persamaan beda (*difference equation*). Dari pengertian-pengertian tersebut, dapat diketahui bahwa analogi persamaan beda merupakan penyesuaian persamaan diferensial dengan persamaan beda.

Persamaan beda adalah persamaan yang menghubungkan nilai fungsi y yang diketahui, dan satu atau lebih beda $\Delta y, \Delta^2 y, \dots, \Delta^n y$, dengan $\Delta y(x) = y(x+h) - y(x)$, untuk setiap nilai x anggota suatu himpunan bilangan yang memuat selesaian dari fungsi (Goldberg, 1958: 50). Secara umum, persamaan beda dituliskan oleh Meyer (1985:327) sebagaimana berikut:

$$x(k+1) - x(k) = F(x(k), k) \quad \text{atau} \quad x_{k+1} - x_k = F(x_k, k) \quad (1.1)$$

Penelitian terdahulu (Tirtana, 2008), menggunakan analogi persamaan beda dalam mendiskretkan persamaan eksponensial dan persamaan logistik kontinu serta model kontinu penyebaran *AIDS*. Pada penelitian tersebut dapat ditunjukkan bahwa hasil diskretisasi model kontinu *AIDS* dapat menjelaskan pola perkembangan variabel pada model kontinunya dengan sangat baik, selain itu kesederhanaan algoritma dari analogi persamaan beda tersebut, juga memudahkan dalam pengaplikasian. Untuk membuktikan bahwa metode tersebut dapat diaplikasikan dengan baik dan mudah, maka penulis menindaklanjuti saran penelitian sebelumnya untuk mengembangkan penelitian pada model lain, yaitu dipilih model *Lorenz*.

Secara matematis, model *Lorenz* adalah struktur tiga dimensi berbentuk persamaan diferensial biasa nonlinear (Robinson, 2004:245):

$$\left. \begin{aligned} \dot{X} &= -\sigma X + \sigma Y \\ \dot{Y} &= rX - Y - XZ \\ \dot{Z} &= -bZ + XY \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

Dalmedico (2001:417) menguraikan bahwa dalam bidang meteorologi, model *Lorenz* digunakan untuk memodelkan aliran konveksi yaitu pergerakan udara (angin) di atmosfer yang mengalami pergolakan karena perbedaan temperatur, dengan X adalah intensitas gerakan konveksi, Y besar perbedaan temperatur horizontal antara arus naik dan turun, dan Z besar perbedaan suhu vertikal.

Menurut O. Knill (2012), parameter σ, b, r memiliki harga $\sigma > 1, r > 0$ dan $b > 0$ yang memiliki interpretasi sebagai berikut. Parameter σ adalah bilangan *Prandtl*, merupakan hasil bagi dari viskositas dan konduktivitas termal, parameter r menunjukkan perbedaan suhu pada lapisan yang dipanaskan, dan

parameter b bergantung pada keadaan geometri dari lapisan fluida. Nilai parameter yang digunakan dalam penelitian ini mengacu pada keterangan Wyle (1985) dalam Sazali (2010:1), yang menjelaskan bahwa besar parameter σ dan b untuk fluida di atmosfer masing-masing dapat digunakan nilai $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$ dan r yang bervariasi. Adapun nilai parameter r dipilih berdasarkan penelitian Warmer Turker, yang membuktikan bahwa pada saat nilai parameter $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$ dan $r = 28$ maka sistem *Lorenz* memiliki ketergantungan sensitif terhadap kondisi awal dan memiliki gejala *chaos* (Robinson, 2004:252). Oleh karena itu, untuk mengamati model *Lorenz* kontinu dan diskret serta gejala chaosnya, maka penelitian ini menggunakan nilai parameter $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$ dan $r = 28$.

Model *Lorenz* kontinu telah diteliti sebelumnya oleh Sazali (2009) dari segi kestabilan titik kesetimbangannya, untuk mengetahui perilaku dinamik dari sistem persamaan *Lorenz* tersebut. Secara matematis, perilaku dinamik dari sistem persamaan *Lorenz* diketahui dari kurva penyelesaian model matematikanya. Sistem persamaan *Lorenz* ini akan stabil dan tidak stabil pada kondisi tertentu.

Dalam skripsi ini, akan diteliti perilaku dinamik model *Lorenz* dalam keadaan diskret. Penelitian ini bertujuan untuk membandingkan perilaku dinamik model *Lorenz* kontinu dengan model *Lorenz* diskret. Oleh karena itu, peneliti merancang penelitian yang terdiri dari proses pendiskretisasian, simulasi grafik model kontinu dan model diskret, dan analisis perbandingan perilaku dan gejala *chaos* setiap variabel yang ditunjukkan oleh kedua jenis grafik.

Penelitian ini penting dilakukan dalam rangka menyiapkan prosedur penelitian di lapangan yang lebih representatif jika dilakukan secara diskret daripada kontinu. Penelitian diskretisasi untuk mendapatkan model diskret yang

merepresentasikan model kontinunya juga belum banyak dikembangkan dewasa ini. Oleh karena itu, penulis tertarik untuk melakukan penelitian tersebut dan menyajikannya dalam judul Diskretisasi Model *Lorenz* dengan Analogi Persamaan Beda.

1.2 Rumusan Masalah

Masalah yang akan dibahas dalam skripsi ini dirumuskan sebagai berikut:

1. Bagaimana konstruksi bentuk diskret model *Lorenz* dengan analogi persamaan beda?
2. Bagaimana perbandingan perilaku setiap variabel dan gejala kekacauan (*chaos*) yang terjadi pada model kontinu dan diskret *Lorenz*?

1.3 Tujuan

Tujuan yang ingin dicapai dalam skripsi ini, meliputi:

1. Mengetahui konstruksi bentuk diskret model *Lorenz* dengan analogi persamaan beda.
2. Menganalisis perbandingan perilaku setiap variabel dan gejala kekacauan (*chaos*) yang terjadi pada model kontinu dan diskret *Lorenz*.

1.4 Batasan Masalah

Dalam penelitian ini, diberikan batasan masalah sebagai berikut:

1. Berdasarkan latar belakang masalah, parameter model *Lorenz* yang digunakan adalah $\sigma = 10$, $r = 28$, $b = \frac{8}{3}$.

2. Perbandingan perilaku setiap variabel pada model diskret dan kontinu dibatasi pada tiga interval, yaitu interval $0 \leq t \leq 1$ menit, $0 \leq t \leq 10$ menit dan $0 \leq t \leq 30$ menit.
3. Model diskret yang diamati dibatasi pada model diskret dengan $h = 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001$.

1.5 Manfaat Penelitian

Penulisan skripsi ini diharapkan bermanfaat bagi penelitian-penelitian diskret di lapangan yang menggunakan model diskret. Model diskret *Lorenz* yang dihasilkan dalam penelitian ini diharapkan dapat menjadi sumbangan bagi penelitian bidang atmosfer, kriptografi, dan bidang lainnya yang menggunakan model *Lorenz* dalam prosedur penelitiannya. Selain itu, penelitian ini diharapkan dapat mengembangkan khasanah keilmuan khususnya bidang pemodelan dan sistem dinamik.

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan adalah studi literatur, yaitu dengan menelaah buku, jurnal, dan referensi lain yang mendukung. Secara rinci, langkah penelitian ini dijabarkan sebagai berikut:

1. Menentukan t diskret.
2. Mendeskritkan f_1, f_2, f_3 .
3. Mensimulasikan grafik f_1, f_2, f_3 diskret dengan Matlab R2008b.
4. Membandingkan pola perkembangan variabel pada model diskret dan model kontinu.

5. Menghitung titik tetap model.
6. Mengamati gejala *chaos* di sekitar titik tetap pada model diskret dan kontinu
7. Menyimpulkan model diskret yang dapat menjelaskan karakter model kontinu.

1.7 Sistematika Penulisan

Penulisan skripsi ini menggunakan sistematika penulisan yang terdiri dari empat bab. Masing-masing bab terdiri dari sub bab sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN

Pendahuluan meliputi latar belakang masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian, sistematika penulisan.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Bab ini terdiri atas teori-teori yang mendukung pembahasan. Teori tersebut meliputi persamaan diferensial, persamaan beda, model kontinu dan model diskret, model *Lorenz*, sistem kekacauan (*chaos*), dan kajian udara dalam Alquran.

BAB III PEMBAHASAN

Bab ini akan menguraikan keseluruhan langkah yang disebutkan dalam metode penelitian.

BAB IV PENUTUP

Bab ini akan memaparkan kesimpulan dan saran untuk penelitian selanjutnya.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Diferensial

2.1.1 Pengertian Turunan

Definisi 1:

Turunan sebuah fungsi f adalah fungsi lain f' (dibaca “f aksen”) yang nilainya pada sebarang bilangan c adalah

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \quad (2.1)$$

asalkan limit ini ada (Purcell dan Vanberg, 2003: 111).

Definisi 2:

Persamaan diferensial adalah sebuah persamaan yang mengandung turunan dari satu atau lebih peubah tak bebas dengan satu atau lebih peubah bebas (Ross, 1984: 3).

Definisi 3:

Persamaan diferensial biasa adalah persamaan diferensial yang mengandung turunan-turunan biasa dari satu atau lebih peubah tak bebas dengan satu peubah bebas (Ross, 1984: 4).

Persamaan diferensial terdiri dari persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial, dalam skripsi ini akan digunakan persamaan diferensial biasa nonlinier, yang didefinisikan sebagaimana berikut.

Definisi 4:

Persamaan diferensial biasa linier orde n dalam peubah tak bebas y dan peubah bebas x , adalah persamaan yang dinyatakan dalam bentuk berikut:

$$a_0(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{(n-1)}(x) \frac{dy}{dx} + a_n(x) y = b(x) \quad (2.2)$$

di mana a_0 tidak nol (Ross, 1984: 6).

Sifat-sifat persamaan diferensial biasa linier meliputi: 1) peubah tak bebas y dan macam-macam turunannya hanya berlaku untuk derajat pertama, 2) tidak terdapat perkalian y dan atau turunannya, dan 3) bukan fungsi transenden dari y dan atau turunan-turunannya.

Contoh 1:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 5 \frac{dy}{dx} + 6y = 0 \quad (2.3)$$

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + x^2 \frac{d^3 y}{dx^3} + x^3 \frac{d^2 y}{dx^2} = xe^x \quad (2.4)$$

Kedua persamaan di atas adalah contoh persamaan diferensial biasa linier. Pada masing-masing persamaan, y adalah peubah tak bebas. Peubah y dan variasi turunan-turunannya terjadi pada derajat pertama, serta tidak terdapat perkalian y dan atau turunan-turunannya.

Definisi 5:

Persamaan diferensial biasa nonlinier adalah persamaan diferensial biasa yang tidak linier (Ross, 1984: 6).

Contoh 2:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 5 \frac{dy}{dx} + 6y^2 = 0 \quad (2.5)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 5 \left(\frac{dy}{dx} \right)^3 + 6y = 0 \quad (2.6)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 5y \frac{dy}{dx} + 6y^2 = 0 \quad (2.7)$$

Persamaan (2.5), (2.6) dan (2.7) merupakan contoh-contoh persamaan diferensial biasa nonlinier. Persamaan (2.5) dikatakan nonlinier karena mengandung $6y^2$ yang berarti peubah tak bebas y berderajat lebih dari 1. Persamaan (2.6) mengandung turunan $\frac{dy}{dx}$ yang berderajat lebih dari 1, dan persamaan (2.7) mengandung perkalian peubah y dengan turunannya.

2.1.2 Sistem Persamaan Diferensial

Definisi 6:

Sistem persamaan diferensial adalah suatu sistem yang memuat n buah persamaan diferensial, dengan n buah fungsi yang tidak diketahui, di mana $n \geq 2$ (Finizio dan Ladas, 1982:132). Bentuk umum dari sistem n persamaan orde pertama mempunyai bentuk sebagai berikut:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= g_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} &= g_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= g_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

dengan $\frac{dx_n}{dt}$ merupakan turunan fungsi x_n terhadap t , g_n adalah fungsi yang bergantung pada variabel x_1, x_2, \dots, x_n dan t .

Definisi 7:

Sistem autonomus adalah suatu sistem persamaan diferensial yang berbentuk:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= F(x, y, z) \\ \frac{dy}{dt} &= G(x, y, z) \\ \frac{dz}{dt} &= H(x, y, z) \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

dengan fungsi F, G, H secara eksplisit tidak dipengaruhi oleh variabel waktu t (Boyce, 1986 dalam Sazali, 2010:5).

2.1.3 Titik Keseimbangan

Titik kritis sistem (2.9) adalah titik $\bar{x} = (x, y, z)$ sedemikian hingga $F(\bar{x}) = G(\bar{x}) = H(\bar{x}) = 0$. Titik kritis \bar{x} merupakan solusi-solusi sistem (2.9) yang bernilai konstan, sebab pada \bar{x} , $\frac{dx}{dt} = 0, \frac{dy}{dt} = 0$ dan $\frac{dz}{dt} = 0$. Keadaan yang menyebabkan $\frac{dx}{dt} = 0, \frac{dy}{dt} = 0$ dan $\frac{dz}{dt} = 0$ disebut keadaan setimbang, sehingga titik kritis tersebut disebut juga titik keseimbangan (Edward dan Penney, 2001 dalam Sazali, 2001:6).

2.1.4 Kestabilan

Menurut Hariyanto (1992:222) sifat dan jenis kestabilan hampir seluruhnya bergantung pada akar-akar karakteristik. Kestabilan titik keseimbangan suatu sistem dinamik diberikan pada Teorema 1 berikut:

Teorema 1:

- Titik keseimbangan dari sistem (2.9) bersifat *stabil asimtotik*, jika nilai eigen λ_1 dan λ_2 pada persamaan karakteristiknya adalah real dan negatif atau mempunyai bagian real negatif.
- Titik keseimbangan dari sistem (2.9) bersifat *stabil* tetapi tidak stabil asimtotik, jika nilai eigen λ_1 dan λ_2 pada persamaan karakteristiknya adalah imajiner murni.

- c. Titik kesetimbangan dari sistem (2.9) bersifat *tak stabil*, jika nilai eigen λ_1 dan λ_2 pada persamaan karakteristiknya adalah real dan juga positif atau mempunyai bagian yang positif.

2.1.5 Kekontinuan Fungsi

Definisi 8:

Andaikan f terdefinisi pada suatu selang terbuka yang mengandung c , maka f akan kontinu di c jika $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$.

Definisi 9:

Fungsi f kontinu pada suatu selang terbuka (a, b) jika f kontinu pada setiap titik pada selang tersebut. f akan kontinu pada selang tertutup $[a, b]$ jika f kontinu pada (a, b) , kontinu kanan di a dan kontinu kiri di b (Purcell dan Vanberg, 2003:93).

Teorema 2:

Keterdiferensiasi menyebabkan kekontinuan. Maksudnya adalah jika f terdiferensiasi di $x = c$ maka f kontinu di $x = c$.

Bukti:

Akan dibuktikan f kontinu di $x = c$, dengan menunjukkan $f(x)$ mendekati $f(c)$ saat $x \rightarrow c$. Karena f terdiferensiasi di $x = c$, maka dapat diberikan limit berikut.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow c} (f(x) - f(c)) &= \lim_{x \rightarrow c} (x - c) \frac{(f(x) - f(c))}{(x - c)} \\ &= \lim_{x \rightarrow c} (x - c) \lim_{x \rightarrow c} \frac{(f(x) - f(c))}{(x - c)} \\ &= 0 \cdot f'(c) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Karena selisih $f(x)$ dan $f(c)$ mendekati 0 saat $x \rightarrow c$, maka dapat disimpulkan bahwa $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$. Oleh karena itu, f kontinu di $x = c$. Jika fungsi terdiferensiasi di $x = c$, maka fungsi tersebut akan kontinu di $x = c$. Tetapi tidak berlaku sebaliknya, artinya jika fungsi kontinu di $x = c$ belum tentu fungsi akan terdiferensiasi di $x = c$ (Sunnerville, 2004:3).

2.2 Persamaan Beda

2.2.1 Pengertian Beda

Definisi 10:

Untuk suatu fungsi y diketahui, dengan h sebarang konstan dan $x + h$ berada di domain fungsi y , dapat ditentukan Δy sebagai beda pertama dari $y(x)$ yang dinotasikan dengan $\Delta y(x)$ atau Δy_x , dan dinyatakan sebagai berikut.

$$\Delta y(x) = y(x + h) - y(x) \quad (2.10)$$

Simbol Δ menyatakan operator beda, dan h disebut interval beda (Goldberg, 1958:14).

Pada fungsi $y(x)$ yang didefinisikan untuk setiap nilai $x \in R$ atau hanya pada titik tertentu, diasumsikan memiliki titik-titik x yang berjarak sama. Untuk $y(n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ fungsi $y(n)$ dapat dinotasikan sebagai y_n (Froberg, 1964:226).

2.2.2 Pengertian Persamaan Beda

Definisi 11:

Persamaan beda adalah persamaan yang menghubungkan nilai fungsi y yang diketahui, dan satu atau lebih beda $\Delta y, \Delta^2 y, \dots, \Delta^n y$, untuk setiap nilai x anggota suatu himpunan bilangan (Goldberg, 1958:50).

Sebuah persamaan beda biasa adalah persamaan yang mengandung sebuah variabel bebas, sebuah variabel terikat y , dan satu atau beberapa beda $\Delta y, \Delta^2 y, \dots, \Delta^n y$ (Froberg, 1964:226).

Meyer (1985: 327), menuliskan bentuk umum dari persamaan beda adalah sebagai berikut:

$$x(k+1) - x(k) = y(x(k), k) \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.11)$$

atau dapat dituliskan:

$$x_{k+1} - x_k = y(x_k, k) \quad (2.12)$$

Pada ruas kanan persamaan (2.12) diberikan beda pertama dari variabel terikat x , yang dihubungkan dengan y sebagai fungsi yang diketahui dari dua variabel. Dalam kasus tertentu, fungsi y boleh jadi tidak mengandung x_k, k atau lainnya. Seperti ditunjukkan oleh persamaan (2.13) pada Contoh 3. Sedangkan, pada persamaan (2.14) fungsi y tidak mengandung x_k .

Contoh 3:

$$x_{k+1} - x_k = 3 \quad (2.13)$$

$$x_{k+1} - x_k = k + 1 \quad (2.14)$$

$$x_{k+1} - x_k = \sin(x_k + 2k) \quad (2.15)$$

untuk $k = 0, 1, 2, \dots$

2.2.3 Persamaan Beda Linier dan Nonlinier

Definisi 12:

Persamaan beda linier adalah jika dapat dituliskan dalam bentuk sebagai berikut:

$$f_0(k)y_{k+n} + f_1(k)y_{k+n-1} + \dots + f_{n-1}(k)y_{k+1} + f_n(k)y_k = g(k) \quad (2.16)$$

di mana $f_0, f_1, \dots, f_{n-1}, f_n$ dan g adalah fungsi di k (tetapi bukan y_k).

Jika $f_0, f_1, \dots, f_{n-1}, f_n$ dan g berbentuk fungsi konstan, maka persamaan 2.16 merupakan persamaan linier dengan koefisien konstan. Sedangkan jika $f_0, f_1, \dots, f_{n-1}, f_n$ dan g berbentuk fungsi y_k maka persamaan 2.16 merupakan persamaan beda nonlinier (Goldberg, 1958:53).

Contoh 4:

Persamaan beda linier dicontohkan oleh persamaan berikut.

$$y_{k+1} + 2y_k = 0 \quad (2.17)$$

$$y_{k+2} + 2y_{k+1} + y_k = 2k + 4 \quad (2.18)$$

Contoh 5:

Persamaan beda nonlinier dicontohkan oleh persamaan berikut.

$$y_k y_{k+1} + 2y_k = 0 \quad (2.19)$$

$$y_{k+2} + 2y_{k+1} + (y_k)^2 = 2k + 4 \quad (2.20)$$

2.2.4 Sistem Persamaan Beda

Definisi 13:

Misalkan sebuah persamaan beda linier orde satu dinyatakan sebagai:

$$y_{n+1} + x_n y_n = 0 \quad (2.21)$$

terdapat fungsi g_n di luar persamaan (2.21), tetapi sangat mempengaruhi persamaan (2.21), dengan g_n merupakan persamaan beda linier, yang dimisalkan

$$x_{n+1} + ax_n = 0 \quad (2.22)$$

a adalah konstanta. Hubungan kedua persamaan (2.21) dan (2.22) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} y_{n+1} + x_n y_n &= 0 \\ x_{n+1} + ax_n &= 0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

Persamaan (2.23) disebut sistem persamaan beda linier (Farlow,1994 dalam Tirtania, 2008: 2).

Dari Definisi 13 dapat diketahui bahwa sistem persamaan beda nonlinier dapat pula dikonstruksi dengan memberikan salah satu dari persamaan dengan persamaan beda nonlinier sebagaimana diuraikan pada Definisi 12.

2.2.5 Analogi antara Kalkulus Beda dan Kalkulus Diferensial

Fakta bahwa turunan sebuah fungsi didefinisikan sebagai limit dari hasil bagi beda menghasilkan banyak analogi menarik antara kalkulus beda hingga dan kalkulus diferensial. Untuk sebuah fungsi y yang diberikan, maka fungsi baru Dy yang memiliki nilai di x dinyatakan sebagai:

$$Dy(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta y(x)}{h} \tag{2.24}$$

Jika limitnya ada maka fungsi baru di atas disebut turunan. D adalah operator diferensiasi yang menghasilkan turunan fungsi. $\frac{\Delta y(x)}{h}$ adalah kemiringan dari garis lurus yang menghubungkan titik-titik pada kurva y di x dengan y di $(x + h)$. Dengan menggunakan notasi ini, kalkulus diferensial dapat dinyatakan dengan beberapa analogi formula kalkulus beda berikut (Goldberg, 1958:47).

Tabel 2.1: Analogi Kalkulus Diferensial dengan Persamaan Beda

Kalkulus Beda	Kalkulus Diferensial
$\Delta y(x) = y(x + h) - y(x)$	$Dy(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(x + h) - y(x)}{h}$ $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta y(x)}{h}$
$\Delta^n y(x) = \Delta(\Delta^{n-1}y),$ $n = 1, 2, \dots$	$D^n y = D(D^{n-1}y)$ $n = 1, 2, \dots$
$\Delta(cy) = c\Delta y$	$D(cy) = cDy$

(Goldberg, 1958:47)

2.2.6 Pendekatan Persamaan Diferensial dengan Persamaan Beda

Berdasarkan hubungan antara operator beda “ Δ ” dengan operator diferensial D yang telah disinggung pada bagian sebelumnya, didapatkan beberapa hubungan antara persamaan beda dan persamaan diferensial. Pada bagian ini akan ditunjukkan kemungkinan mendapatkan solusi persamaan diferensial sebagai solusi limit yang tepat dengan persamaan beda. Ambil sebuah fungsi y yang terdefinisi di setiap $x \in R$ pada interval $a \leq x \leq b$, yang memenuhi persamaan diferensial berikut.

$$Dy(x) = \frac{dy(x)}{dx} = Ay(x) + B, a \leq x \leq b \quad (2.25)$$

dengan A dan B adalah sebarang konstan dengan $A \neq 0$. Diasumsikan nilai y di $x = a$ ditentukan sebagai nilai awal $y(a) = y_0$ (Goldberg, 1958:116-117).

Untuk mendekati persamaan diferensial dengan persamaan beda, pertama dilakukan penggantian interval kontinu $a \leq x \leq b$ dengan himpunan diskret dari nilai x yang memungkinkan persamaan beda terdefinisi pada himpunan tersebut. Ambil n bilangan bulat positif yang membagi interval a sampai b dalam n bagian yang sama, dengan panjang masing-masing interval:

$$h = \frac{b-a}{n} \quad (2.26)$$

pembagian interval ini menghasilkan titik-titik diskret pada selang $[a, b]$ berikut:

$$x_0 = a, x_1 = a + h, x_2 = a + 2h, \dots, x_n = a + nh = b \quad (2.27)$$

Sehingga setiap titik diskret $x_n, \forall n = 0, 1, 2, \dots$ akan berkorespondensi dengan:

$$y_n = y(x_n) = y(x_0 + nh) \quad (2.28)$$

ingat bahwa:

$$\begin{aligned} Dy(x_k) &= Ay(x_k) + B \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta y_k}{h} &= Ay(x_k) + B \end{aligned} \quad (2.29)$$

dengan menggunakan persamaan beda, maka persamaan (2.29) dapat dinyatakan dengan:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y_k}{h} &= Ay(x_k) + B \\ \frac{y_{k+1} - y_k}{h} &= Ay_k + B \\ y_{k+1} &= y_k + h(Ay_k + B) \\ y_{k+1} &= (1 + hA)y_k + Bh, k = 0, 1, 2, \dots, n-1\end{aligned}$$

y_{k+1} dapat ditentukan nilainya setelah diterapkan nilai awal fungsi y_0 (Goldberg, 1958:116-117).

2.3 Model Kontinu dan Model Diskret

Menurut Meyer (1985: 325), model kontinu adalah model yang melingkupi perubahan sesaat, dalam bahasa matematika dinyatakan dalam persamaan diferensial, di mana turunan-turunan di dalamnya menggambarkan laju perubahan sesaat. Model diskret merupakan model yang merepresentasikan perubahan yang tidak sesaat. Dalam bahasa matematika menggunakan persamaan beda.

Laju perubahan sesaat dapat dijelaskan sebagai berikut. Jika $y(x)$ menandakan besar perpindahan sepanjang garis lurus oleh partikel dalam waktu x , maka hasil bagi beda pada persamaan (2.30),

$$\frac{\Delta y(x)}{\Delta x} \quad (2.30)$$

untuk interval waktu x sampai $x + \Delta x$, rasio dari jarak perpindahan terhadap waktu perpindahan memberikan kecepatan rata-rata dalam interval waktu x sampai $x + \Delta x$. Limit dari kecepatan rata-rata didefinisikan sebagai kecepatan

sesaat pada waktu x . Sehingga dari persamaan (2.30) kecepatan sesaat pada waktu x dinyatakan sebagai $Dy(x)$ (Goldberg, 1958:48-49).

Model kontinu dicontohkan oleh (Tirtana, 2008: 6-7) pada model logistik berikut:

$$\frac{dS}{dt} = rS(t) \left(1 - \frac{S(t)}{K} \right) \quad (2.31)$$

dengan:

$S(t)$: banyaknya mangsa pada saat t

r : laju pertumbuhan S terhadap waktu (t)

K : daya dukung kondisi lingkungan bagi mangsa

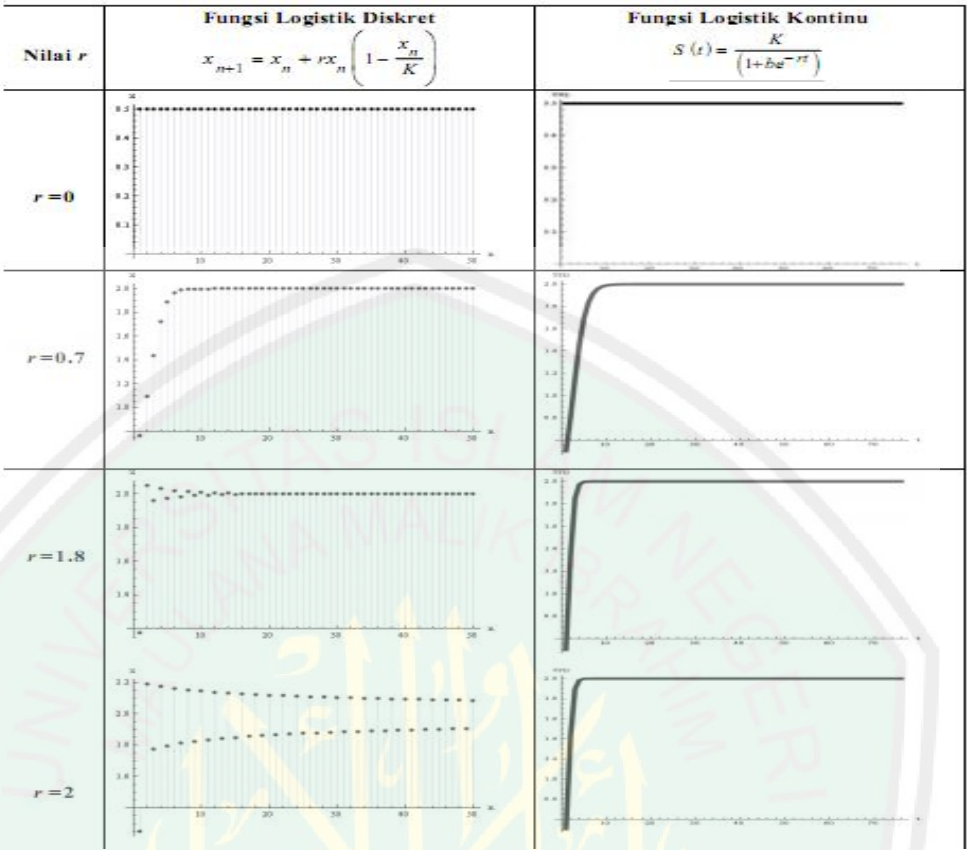
persamaan (2.36) merupakan fungsi logistik kontinu dengan solusi:

$$S(t) = \frac{K}{(1 + be^{-rt})} \quad (2.32)$$

Diskretisasi dengan memisalkan $S(t) = x_n$ menghasilkan solusi diskret sebagai berikut,

$$x_{n+1} = x_n + rx_n \left(1 - \frac{x_n}{K} \right) \quad (2.33)$$

Langkah selanjutnya adalah melakukan simulasi numerik dengan menggunakan bantuan *software* untuk mendapatkan grafik perkembangan $S(t)$ dan x_n , sehingga dapat dibandingkan persamaan diskret hasil transformasi fungsi logistik dengan fungsi kontinu (persamaan 2.31). Grafik persamaan diskret dan kontinu logistik dapat ditunjukkan oleh Gambar 2.1



Gambar 2.1: Grafik Persamaan Logistik Diskret dan Kontinu (Tirtana, 2008:7)

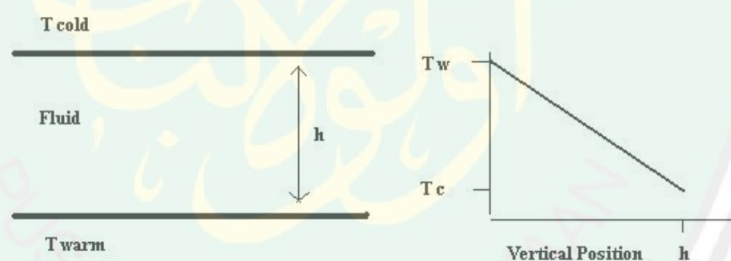
Gambar 2.1 menunjukkan bahwa fungsi logistik diskret memiliki semua pola perkembangan variabel pada fungsi logistik kontinu, namun fungsi logistik kontinu tidak memiliki semua pola perkembangan variabel pada fungsi logistik diskret.

2.4 Model *Lorenz*

Persamaan *Lorenz* dikembangkan dari sistem persamaan yang digunakan oleh Saltzman untuk mempelajari proses termodinamika yang dikenal dengan istilah konveksi. Konveksi menciptakan gaya yang bertanggungjawab untuk gerakan atmosfer bumi. Jika diberikan suatu fluida, konveksi akan terjadi ketika fluida dipanaskan dari bawah dan didinginkan dari atas. Perbedaan suhu fluida

antara bagian atas dan bawah atmosfer dijangkau fluida dalam gulungan-gulungan silinder (Danforth, 2001:4).

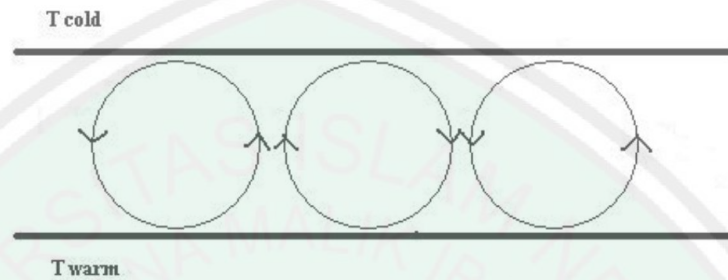
Jika fluida berada di dalam suatu tempat yang panjang dan tipis serta terbatas ke atas dan ke bawah, maka bagian atas tempat tersebut akan mempertahankan suhu dingin (T_c) saat bagian dasarnya bersuhu hangat (T_w). Perbedaan suhu $\Delta T = T_w - T_c$ dengan $T_w > T_c$ adalah pasti, namun dapat diatur sedemikian rupa untuk menciptakan perbedaan tipe perilaku. Sistem ini terjadi pada fluida yang berada dalam sel, yang dipanaskan dari bawah oleh piringan panas, dan dinginkan dari atas oleh piringan dingin. Sistem ini dipelajari Rayleigh dan Benard pada tahun 1900 dan 1916 (Danforth, 2001:7). Sel *Rayleigh-Benard* dapat ditunjukkan oleh Gambar 2.2.



Gambar 2.2: Sel Konveksi *Rayleigh-Benard* (Danforth, 2001:7)

Sel konveksi digunakan untuk mensimulasikan perilaku atmosfer secara kualitatif. Matahari yang memanaskan atmosfer dan permukaan bumi, menyediakan sumber energi panas yang besar. Laut dan ruang angkasa mengalirkan energi tersebut keluar atmosfer. Udara hangat dari permukaan bumi naik ke angkasa, sampai menjangkau titik-titik embun yang akan berkondensasi membentuk awan. Pada lapisan terluar atmosfer udara didinginkan oleh ruang angkasa, sehingga menjadi lebih padat dan jatuh ke bagian bawah. Dengan cara

ini, konveksi yang merupakan aliran udara dingin dan hangat terjadi di atmosfer dan menimbulkan pengaruh pada cuaca (Danforth, 2001:7). Sel konveksi ditunjukkan dalam Gambar 2.3 berikut.



Gambar 2.3: Sel Konveksi
(Danforth, 2001:7)

Persoalan konveksi ini sebenarnya melibatkan dua fenomena yaitu fenomena gerak dan fenomena difusi termal. Pada dasarnya untuk membahas keseluruhan fenomena ini adalah dengan mencari solusi dari persamaan *Navier-Stokes* (gerak) dan persamaan difusi termal. Kedua persamaan tersebut diekspansi oleh *Lorenz* sehingga dapat digunakan dalam kasus nonlinier. Solusi yang dipelajari *Lorenz* dibentuk dalam model berikut (Sulaiman, 2000:25-27):

$$\begin{aligned}\dot{X} &= -\sigma X + \sigma Y \\ \dot{Y} &= rX - Y - XZ \\ \dot{Z} &= -bZ + XY\end{aligned}\tag{2.34}$$

Titik menyatakan turunan terhadap non dimensi waktu, $\tau = \pi^2 H^{-2} (1 + a^2) kt$, dengan $\sigma = k^{-1} \nu$ adalah bilangan *Prandtl*, $r = R_c^{-1} R_0$ dan $b = 4(1 + a^2)^{-1}$. Persamaan (2.34) adalah persamaan konveksi yang dikenal dengan sistem persamaan *Lorenz* atau model *Lorenz* (Sulaiman, 2000:25-27).

Paramater model *Lorenz* terdiri dari σ, b, r . Parameter σ adalah bilangan *Prandtl* yang merupakan suatu nilai atau harga untuk menentukan distribusi temperatur pada suatu aliran. Parameter b merupakan nilai yang menunjukkan ekspansi termal. Dan parameter r sebagai bilangan *Rayleigh* yang didefinisikan sebagai rasio dari bilangan *Rayleigh* kritis dan bilangan *Rayleigh* awal. Bilangan *Rayleigh* mengindikasikan keberadaan dan kekuatan konveksi pada suatu fluida.

Warmer Tucker membuktikan bahwa sistem *Lorenz* kontinu memiliki ketergantungan yang sensitif terhadap pemberian nilai awal dan memiliki gejala *chaos* pada saat nilai parameter $\sigma = 10, b = \frac{8}{3}$ dan $r = 28$ (Robinson, 2004:252). Oleh karena itu, pada penelitian ini dipilih nilai parameter tersebut untuk mengetahui adanya *chaos* pada model diskret.

Variabel dalam model *Lorenz* terdiri dari variabel X yang menyatakan intensitas gerakan konveksi, variabel Y yang menyatakan perbedaan suhu horizontal dan Z perbedaan suhu vertikal dalam derajat Fahrenheit (Dalmedico, 2001:417).

Sifat Persamaan *Lorenz* adalah nonlinier yang ditunjukkan oleh suku XY dan XZ . Simetri, yang berarti bahwa persamaan invariant terhadap $(X, Y) \rightarrow (-X, -Y)$, oleh karena itu, jika $(X(t), Y(t), Z(t))$ adalah solusi persamaan, maka $(-X(t), -Y(t), Z(t))$ juga merupakan solusi dari persamaan tersebut (Anonim, 2012:4).

2.5 Kekacauan (*chaos*)

Chaos adalah suatu perilaku evolusi jangka panjang yang menunjukkan kekacauan dan memenuhi kriteria matematika tertentu serta terjadi pada sistem

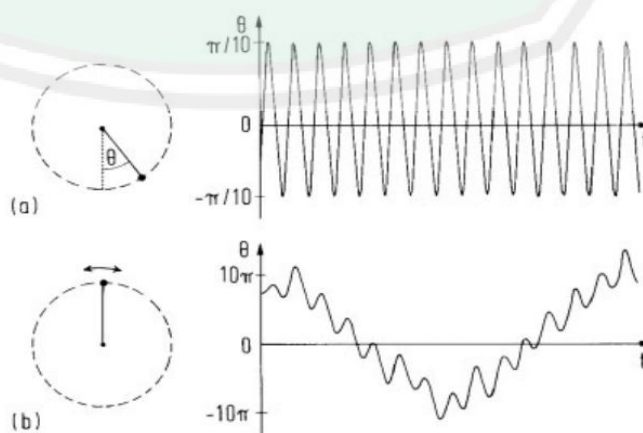
nonlinear deterministik (Williams, 1997: 9). *Chaos* bersifat aperiodik dan memiliki ketergantungan pada kondisi awal (Ipek, 2009).

Sistem nonlinear adalah suatu nilai sistem pada suatu waktu yang tidak sebanding dengan nilai awalnya. Dalam matematika, dikenal persamaan nonlinear, yaitu persamaan yang mengandung dua atau lebih variabel dan menghasilkan grafik yang tak lurus. Sedangkan kumpulan dari persamaan nonlinear disebut sistem persamaan nonlinear (Williams, 1997:9).

Kriteria berikutnya adalah deterministik. Menurut Schuster and Just (2005:7), deterministik *chaos* menyatakan ketidakteraturan atau gerakan *chaos* yang dibangun oleh sistem nonlinier dengan aturan-aturan dinamik tertentu yang menentukan waktu evolusi suatu sistem. Contoh sistem nonlinier yang menunjukkan deterministik *chaos* adalah persamaan pendulum yang digerakkan berikut.

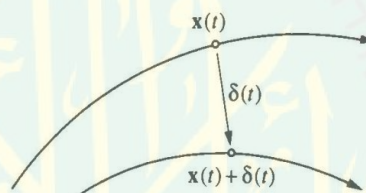
$$\ddot{\theta} + \gamma\dot{\theta} + \sin\theta = A\cos\omega t \quad (2.35)$$

Dengan θ adalah sudut simpangan, γ konstanta redaman dan A adalah amplitudo dan t waktu. Dengan memberikan A yang bervariasi, dapat dilihat efek *chaos* nya pada Gambar 2.4.



Gambar 2.4 Pendulum yang Digerakkan. (a) Gerakan Teratur dengan $A \rightarrow 0$.
(b) Gerakan Chaotic dengan A Besar (Schuster and Just, 2005:7)

Sifat *chaos* lainnya adalah aperiodik, yakni suatu kondisi yang tidak beraturan dan dalam grafik tidak ditemukan perulangan ke bentuk awal grafik. Keadaan tersebut terlihat pada Gambar 2.4b. Tampilan grafik yang acak tersebut adalah bentuk dari respon sistem terhadap kondisi awal yang diberikan. Perbedaan pemberian nilai awal, akan menyebabkan perbedaan hasil yang sangat besar pada sistem *chaos*. Jika $X(t)$ adalah titik kesetimbangan model, dan diberikan gangguan nilai yang sangat dekat dengan titik tersebut, sehingga dapat dikatakan $X(t) + \delta(t)$, di mana δ adalah nilai yang sangat kecil, misal $\delta = 10^{-15}$. Keadaan ini dapat diilustrasikan oleh Gambar 2.5 berikut (Anonim, 2012:10).



Gambar 2.5: Gangguan δ di Sekitar Titik $X(t)$

Kondisi pada Gambar 2.5 dapat diterapkan pada sebuah model dalam rangka mengetahui kesensitivitas terhadap kondisi awal.

2.6 Udara dalam Alquran

Dalam Alquran, kata “udara” digantikan dengan kata “angin”, yang memiliki maksud dan arti sama dengan udara yang bergerak di seputar lapisan bumi. Kata angin termaktub sebanyak 27 kali di dalam Alquran (Musthafa, 2010). Diantaranya terdapat pada Surat Al-Jatsiyah ayat 5, Ar-Ruum ayat 48, dan Fushilat ayat 11.

1. Surat Al-Jatsiyah ayat 5

Dalam ayat ini, udara dikaji dalam istilah perkisaran angin sebagaimana berikut.

وَآخْتَلَفَ اللَّيْلُ وَالنَّهَارُ وَمَا أُنْزِلَ اللَّهُ مِنَ السَّمَاءِ مِنْ رِزْقٍ فَأَحْيَا بِهِ الْأَرْضَ بَعْدَ مَوْتِهَا وَتَصْرِيفِ الرِّيحِ ؕ آيَاتٌ لِّقَوْمٍ يَعْقِلُونَ ﴿٥﴾

Artinya :

“Dan pada pergantian malam dan siang dan hujan yang diturunkan Allah dari langit lalu dihidupkanNya dengan air "hujan" itu bumi sesudah matinya; dan pada perkisaran angin terdapat pula tanda-tanda (kekuasaan Allah) bagi kaum yang berakal” (QS.Al Jatsiyah: 5).

Menurut Shihab (2002:35), ayat ini ditafsirkan sebagai bukti dari kekuasaan Allah. *Dan pada perbedaan malam dan siang* sekali ini yang datang, sekali itu, sekali malam yang panjang dan kali lain siang yang panjang. Kesemuanya berdasarkan ketentuan yang tetap dan pasti. Juga demikian apa yang diturunkan Allah dari langit berupa hujan dan lain-lain, lalu *dihidupkan-Nya*. Maksudnya adalah dengan air hujan itu dihidupkan bumi sesudah matinya. *Dan pada perkisaran angin* ke berbagai arah, perbedaan suhu dan kekuatannya, serta manfaat atau bahayanya, pada semua itu terdapat tanda-tanda kekuasaan Allah bagi yang berakal.

Sejalan dengan penafsiran Shihab di atas, Tafsir *Al-Katsir* juga menjelaskan bahwa dalam ayat ini, Allah membimbing makhluk-Nya untuk bertafakkur (memikirkan) berbagai nikmat dan kekuasaan-Nya yang agung. Allah menciptakan langit dan bumi serta di dalamnya diciptakan berbagai macam makhluk dengan segala macam jenis dan rupanya. Juga adanya pergantian malam dan siang secara silih berganti, terus menerus, yang tidak hilang karena gelap

yang ditimbulkan malam dan sinar terang oleh siang. Dan Allah juga menurunkan awan menjadi hujan pada saat dibutuhkan yang disebut sebagai rezeki.

Firman-Nya: *وَتَصْرِيفُ الرِّيحِ* “*Dan pada perkisaran angin*” baik angin selatan, angin utara, angin barat maupun angin timur juga angin laut, siang maupun malam hari. Di antaranya ada yang dimaksudkan untuk hujan, dan ada yang dimaksudkan untuk bernafas atau penyerbukan (Abdullah, 2007: 335).

Sementara Syaikh Abu Bakar Jabir Al-Jazairi dalam Tafsir *Al-Aisa*, menguraikan, firman-Nya, “*Dan pada perkisaran angin*” dari angin yang sejuk menjadi panas, dari angin utara ke angin selatan, dari angin yang lembut sepoi-sepoi menjadi angin kencang yang mengandung hawa dingin dan panas. Sesungguhnya pada semua yang disebutkan itu terdapat tanda-tanda yakni bukti-bukti atas wajibnya beribadah dan menyembah Allah serta mengesakan-Nya. Akan tetapi, hal itu hanya “*bagi kaum yang berakal*”. Adapun mereka yang tidak memiliki akal, maka mereka tidak dapat melihat satu pun dari tanda-tanda kebesaran dan kekuasaan Allah (Al-Jazairi, 2009:721-722).

Dalam Tafsir *Fi Zhilalil-Quran*, penggalan ayat “*Dan pada perkisaran angin...*” ditafsirkan sebagai angin yang bergerak ke utara dan selatan, timur dan barat, melenceng dan lurus, hangat dan dingin, sesuai dengan sistem yang cermat, teratur dan terprogram dalam bangunan alam semesta. Juga sesuai dengan pengaturan segala sesuatu padanya dengan perhitungan cermat yang tak membiarkan sesuatu bagi kebetulan buta (Quthb, 2004:290).

Perkisaran angin itu juga mempunyai pengaruh yang diketahui dengan perputaran bumi, dengan fenomena malam dan siang, serta dengan rezeki yang diturunkan dari langit. Semua itu saling bekerja sama mewujudkan kehendak

Allah dalam menciptakan alam semesta ini dan menggerakkannya sesuai dengan yang Dia kehendaki. Padanya terdapat “tanda-tanda kekuasaan Allah” yang terpancang dalam alam semesta ini. Namun, itu semua bagi:”.....*Bagi kaum yang berakal.*” Akal di sini mempunyai peran, dan di situ medan bagi akal untuk bekerja (Quthb, 2004:290).

2. Surat Ar-Ruum ayat 48

Perkisan angin lebih lanjut dijelaskan dalam Surat Ar-Ruum ayat 48, sebagai penggerak awan yang dapat menyebabkan hujan, lebih lengkap diuraikan sebagai berikut.

اللَّهُ الَّذِي يُرْسِلُ الرِّيَّاحَ فَتُثِيرُ سَحَابًا فَيَبْسُطُهُ فِي السَّمَاءِ كَيْفَ يَشَاءُ وَجَعَلَهُ كِسْفًا فَرَى
الْوَدْقَ تَخْرُجُ مِنْ خَلِيلِهِ فَإِذَا أَصَابَ بِهِ مَنْ يَشَاءُ مِنْ عِبَادِهِ إِذَا هُمْ يَسْتَبْشِرُونَ

Artinya:

“Allah, Dialah yang mengirim angin, lalu angin itu menggerakkan awan dan Allah membentangkannya di langit menurut yang dikehendaki-Nya, dan menjadikannya bergumpal-gumpal; lalu kamu lihat hujan keluar dari celah-celahnya, maka apabila hujan itu turun mengenai hamba-hamba-Nya yang dikehendakiNya, tiba-tiba mereka menjadi gembira.” (QS. Ar Ruum:48).

Tafsir Al-Qurthubi menjelaskan bahwa firman Allah, اللَّهُ الَّذِي يُرْسِلُ الرِّيَّاحَ “Allah, dialah yang mengirim angin.” Ibnu Muhaishin, Ibnu Katsir, Hamzah dan Al-Kisa’i membaca الرِّيَّاحَ dengan lafadh الرِّيحَ, dengan bentuk tunggal, sedangkan yang lainnya dalam bentuk jamak. Abu Amr berkata, “Setiap angin yang bermakna rahmat diungkapkan dengan bentuk jamak dan angin yang bermakna adzab diungkapkan dengan bentuk tunggal”(Al Qurthubi, 2009:104).

Menurut Quraish Shihab dalam Tafsir Al-Misbah, ayat ini menggambarkan proses terjadinya hujan. Awan tebal bermula ketika angin atas kuasa Allah mengiringi atau mengarak kawanan awan kecil ke zona konvergen.

Pergerakan awan-awan itu menyebabkan bertambahnya kualitas jumlah uap dalam perjalanannya terutama di sekitar zona tersebut. Apabila dua awan atau lebih menyatu, maka arus udara yang naik di dalam awan akan bertambah secara umum, hal ini menyebabkan datangnya tambahan uap air dari bagian bawah dasar awan yang perannya menambah potensi yang terpendam untuk berakumulasi (Shihab, 2002:90).

Awan tebal bergerak kemana saja sesuai arah gerak angin yang dikehendaki Allah, sedang faktor akumulasi dan pembangunannya akan terus menerus sepanjang ada arus udara yang naik mampu membawa formasi awan dari titik-titik air atau butir-butir embun. Ketika angin tidak lagi mampu membawa formasi-formasi itu karena telah bergumpal-gumpal dan menyatu maka proses akumulasi terhenti dan hujan pun turun (Shihab, 2002:90).

Dalam Tafsir *Al-Katsir*, Allah menjelaskan bagaimana Dia menciptakan awan yang dapat menurunkan air hujan. Dia berfirman: “*Allah, Dialah yang mengirimkan angin, lalu angin itu menggerakkan awan*”, adakalanya dari laut sebagaimana diceritakan banyak orang, atau sesuai apa yang dikehendaki Allah. “*Dan Allah membentangkannya di langit menurut yang dikehendakiNya*”, yaitu kemudian dia bentangkan hingga memenuhi bagian-bagian ufuk, dan terkadang awan datang dari arah lautan membawa sesuatu yang berat dan penuh. “*Lalu kamu lihat hujan keluar dari celah-celahnya*”, yaitu engkau melihat hujan, tetesannya keluar dari celah-celah awan (Abdullah, 2004:384).

Menurut Tafsir *Fi Zhilalil Qur'an*, dijelaskan bahwa Allahlah yang mengirim angin, menurunkan hujan, menghidupkan tanah setelah matinya, menghidupkan orang-orang mati dan membangkitkan mereka kembali. Allah

berfirman, “Allah, Dialah yang mengirim angin...” sesuai dengan ketentuan-Nya dalam menciptakan alam semesta ini, mengaturnya dan menggerakkannya. “....Lalu angin menggerakkannya awan...” dengan uap air yang dikandungnya yang naik dari timbunan air di bumi. “...Dan menjadikannya bergumpal-gumpal...”, dengan mengumpulkannya, memekatkannya, menumpuknya satu sama lain, membenturkannya satu sama lain, atau mengeluarkan aliran listrik antara satu tingkatan darinya dengan tingkatan lainnya (Quthb, 2004:153).

3. Surat Fushilat ayat 11

Udara atau angin disebutkan dalam kata “asap” sebagaimana berikut:

ثُمَّ أَسْتَوَىٰ إِلَى السَّمَاءِ وَهِيَ دُخَانٌ فَقَالَ لَهَا وَلِلْأَرْضِ ائْتِيَا طَوْعًا أَوْ كَرْهًا قَالَتَا أَتَيْنَا طَائِعِينَ ﴿١١﴾

“Kemudian Dia menuju langit dan langit itu masih merupakan asap, lalu Dia berkata kepadanya dan kepada bumi: “Datanglah kamu keduanya menurut perintah-Ku dengan suka hati atau terpaksa”. Keduanya menjawab: “Kami datang dengan suka hati” (QS. Fushshilat:11).

Menurut ilmuwan Prof. Zaghlul, kata دخان (*dukhon*) biasa diterjemahkan asap. Para ilmuwan memahami kata *dukhon* dalam artian satu benda yang pada umumnya terdiri dari gas yang mengandung benda-benda yang sangat kecil namun kukuh, berwarna gelap atau hitam dan mengandung panas (Shihab, 2002:386).

Sementara menurut tafsir *Al-Misbah*, ulama tafsir memahami kata tersebut dalam arti langit yang dilihat oleh manusia, berasal dari satu bahan yang serupa dengan *dukhon*. Sayyid Quttub menulis bahwa terdapat kepercayaan yang menyatakan bahwa sebelum terbentuknya bintang-bintang, ada sesuatu yang angkasa raya dipenuhi oleh gas dan asap, dari bahan inilah terbentuk bintang-bintang. Hingga kini sebagian dari gas dan asap itu masih tersisa dan tersebar di

angkasa raya. Pendapat ini menurut Sayyid Quttub boleh jadi benar karena ia mendekati apa yang diuraikan oleh Alquran dengan firman-Nya di atas: *“Kemudian ia menuju ke langit, sedang ia adalah asap”*. Dalam tafsir ini, disebutkan pula bahwa ada enam hari atau periode penciptaan alam raya. Pada periode *dukhon* inilah tercipta unsur-unsur pembentukan langit yang terjadi melalui gas hidrogen dan helium (Shihab, 2002:388).

Menurut Al-Maragi (1992:207), langit adalah zat dalam bentuk gas yang mirip dengan asap atau awan atau kabut. Para ahli telah menyaksikan saat ini, bahwa di antara alam semesta terdapat banyak alam kabut. Hal ini disimpulkan dari noda-noda yang tampak di langit, sebagaimana nampaknya matahari dengan planet-planet dan bumi yang pada asalnya adalah kabut.

BAB III

PEMBAHASAN

Pembahasan skripsi ini menyajikan upaya diskretisasi untuk mendapatkan model diskret yang dapat merepresentasikan model kontinu. Model diskret yang telah dikonstruksi digunakan untuk mendekati grafik kontinu yang memiliki selang waktu tertentu. Akurasi model diskret tersebut, akan dibuktikan melalui perbandingan grafik diskret dan kontinunya.

3.1 Konstruksi Bentuk Diskret Model *Lorenz*

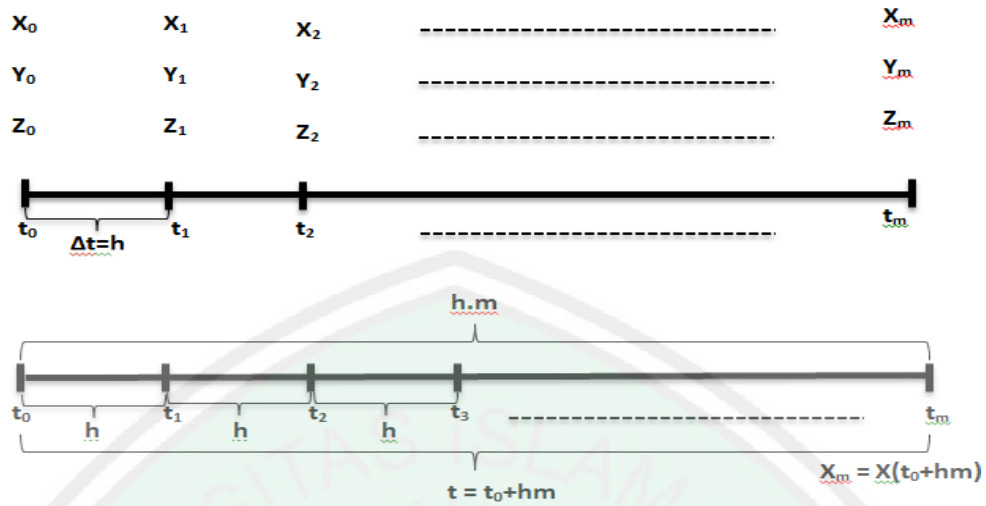
Model *Lorenz* kontinu adalah sebagai berikut:

$$\left. \begin{aligned} f_1 : \dot{X} &= -\sigma X + \sigma Y \\ f_2 : \dot{Y} &= rX - Y - XZ \\ f_3 : \dot{Z} &= -bZ + XY \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

konstruksi bentuk diskret (diskretisasi) dari model *Lorenz* yang berbentuk sistem persamaan tiga dimensi dilakukan dengan mentransformasi satu demi satu persamaannya. Proses diskretisasi diawali dengan penggantian interval kontinu $t_0 \leq t \leq t_m$ dengan himpunan t diskret yang memungkinkan persamaan beda terdefinisi pada himpunan tersebut.

3.1.1 Konstruksi t Diskret

Setiap variabel pada sistem persamaan *Lorenz* berubah berdasarkan perubahan waktu. Pada kasus diskret, variabel tersebut berubah seiring dengan perubahan waktu t yang bergerak dengan beda sebesar $\Delta t = h$. Perubahan nilai variabel untuk t diskret diilustrasikan oleh Gambar 3.1.

Gambar 3.1: Skema Perubahan t Diskret

Skema di atas menjelaskan bahwa interval kontinu $t_0 \leq t \leq t_m$ diubah ke dalam bentuk t diskret yang berupa himpunan $t = \{t_0, t_1, \dots, t_m\}$. Dengan mengambil m bilangan bulat positif yang membagi interval $t_0 \leq t \leq t_m$ dalam m bagian yang sama, diperoleh interval antar titik diskret berikut:

$$h = \frac{t_m - t_0}{m}, m = 1, 2, 3, \dots, k; k \in N \quad (3.2)$$

secara rekursif, titik-titik diskret dalam interval $[t_0, t_m]$ dapat ditentukan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} t_1 &= t_0 + \Delta t_0 = t_0 + h \\ t_2 &= t_0 + 2\Delta t_0 = t_0 + 2h \\ t_3 &= t_0 + 3\Delta t_0 = t_0 + 3h \\ &\vdots \\ t_m &= t_0 + m\Delta t_0 = t_0 + mh \\ t_{m+1} &= t_0 + (m+1)\Delta t_0 = t_0 + (m+1)h \end{aligned}$$

sehingga fungsi $X_1, X_2, \dots, X_m; Y_1, Y_2, \dots, Y_m$ dan Z_1, Z_2, \dots, Z_m dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
X_1 &= X(t_0 + h) \\
X_2 &= X(t_0 + 2h) \\
X_3 &= X(t_0 + 3h) \\
&\vdots \\
X_m &= X(t_0 + mh) \\
X_{m+1} &= X(t_0 + (m+1)h)
\end{aligned}$$

Dengan cara yang sama, dapat ditentukan pula bahwa $Y_m = Y(t_0 + mh)$ dan $Z_m = Z(t_0 + mh)$. Jika diasumsikan $t = t_m = t_0 + mh$ maka X_m, Y_m dan Z_m dapat ditulis menjadi:

$$\begin{aligned}
X_m &= X(t) \\
Y_m &= Y(t) \\
Z_m &= Z(t)
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Saat $t_{m+1} = t_0 + (m+1)h$, maka dapat diperoleh kondisi berikut:

$$\begin{aligned}
t_{m+1} &= t_0 + (m+1)h \\
&= t_0 + mh + h \\
&= (t_0 + mh) + h \\
&= t + h
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Sehingga didapatkan X_{m+1}, Y_{m+1} dan Z_{m+1} berikut:

$$\begin{aligned}
X_{m+1} &= X(t+h) \\
Y_{m+1} &= Y(t+h) \\
Z_{m+1} &= Z(t+h)
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Persamaan (3.3) dan (3.5) selanjutnya akan digunakan dalam diskretisasi masing-masing persamaan f_1, f_2, f_3 .

3.1.2 Diskretisasi f_1

Proses diskretisasi f_1 dengan analogi persamaan beda dilakukan sebagaimana berikut. Diberikan f_1 :

$$\dot{X} = -\sigma X + \sigma Y \tag{3.6}$$

tanda titik pada X menyatakan turunan pertama fungsi X terhadap waktu t . Berdasarkan definisi turunan, maka (3.6) dapat dinyatakan sebagai berikut,

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= -\sigma X + \sigma Y \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{X(t + \Delta t) - X(t)}{\Delta t} &= -\sigma X(t) + \sigma Y(t) \end{aligned} \quad (3.7)$$

dengan menggunakan persamaan beda, maka persamaan (3.7) dapat dinyatakan sebagai:

$$\frac{X(t + \Delta t) - X(t)}{\Delta t} = -\sigma X(t) + \sigma Y(t) \quad (3.8)$$

karena $\Delta t = h$ maka ruas kiri persamaan (3.8) dapat ditulis kembali sebagai,

$$\begin{aligned} X(t + h) - X(t) &= h(-\sigma X(t) + \sigma Y(t)) \\ X(t + h) - X(t) &= -\sigma h X(t) + \sigma h Y(t) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Selanjutnya, persamaan (3.9) ditransformasi ke dalam fungsi diskret dengan t diskret yang diberikan pada persamaan (3.3) dan (3.5). Sehingga, persamaan (3.9) menjadi,

$$\begin{aligned} X_{m+1} - X_m &= -\sigma h X_m + \sigma h Y_m \\ X_{m+1} &= X_m - \sigma h X_m + \sigma h Y_m \\ X_{m+1} &= (1 - \sigma h) X_m + \sigma h Y_m \end{aligned} \quad (3.10)$$

3.1.3 Diskretisasi f_2

Transformasi f_2 kontinu ke bentuk diskret dilakukan dengan menggunakan langkah yang sama dengan transformasi f_1 . Diberikan f_2 sebagai berikut,

$$\dot{Y} = rX - Y - XZ \quad (3.11)$$

tanda titik pada Y menyatakan turunan pertama fungsi Y terhadap waktu t . Berdasarkan definisi turunan, maka (3.11) dapat dituliskan sebagai berikut,

$$\begin{aligned}\frac{dY}{dt} &= rX - Y - XZ \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{Y(t + \Delta t) - Y(t)}{\Delta t} &= rX(t) - Y(t) - X(t)Z(t)\end{aligned}\quad (3.12)$$

dengan menggunakan persamaan beda, dan dengan $\Delta t = h$ maka persamaan (3.12) dapat dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned}\frac{Y(t + \Delta t) - Y(t)}{\Delta t} &= rX(t) - Y(t) - X(t)Z(t) \\ \frac{Y(t + h) - Y(t)}{h} &= rX(t) - Y(t) - X(t)Z(t) \\ Y(t + h) - Y(t) &= h(rX(t) - Y(t) - X(t)Z(t)) \\ Y(t + h) - Y(t) &= hrX(t) - hY(t) - hX(t)Z(t)\end{aligned}\quad (3.13)$$

Selanjutnya, persamaan (3.13) ditransformasi ke dalam fungsi diskret dengan t diskret yang diberikan pada persamaan (3.3) dan (3.5). Sehingga, persamaan (3.13) menjadi,

$$\begin{aligned}Y_{m+1} - Y_m &= hrX_m - hY_m - hX_mZ_m \\ Y_{m+1} &= hrX_m + Y_m - hY_m - hX_mZ_m \\ Y_{m+1} &= hrX_m - hX_mZ_m + Y_m - hY_m \\ Y_{m+1} &= (r - Z_m)hX_m + (1 - h)Y_m\end{aligned}\quad (3.14)$$

3.1.4 Diskretisasi f_3

Transformasi f_3 kontinu ke bentuk diskret, juga menggunakan langkah yang sama dengan transformasi f_1 dan f_2 . Diberikan f_3 sebagai berikut,

$$\dot{Z} = -bZ + XY \quad (3.15)$$

dengan menguraikan ruas kiri sesuai dengan definisi turunan Z terhadap t , dan dengan memberikan $\Delta t = h$, maka (3.15) menjadi,

$$\begin{aligned}\frac{dZ}{dt} &= -bZ + XY \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{Z(t + \Delta t) - Z(t)}{\Delta t} &= -bZ(t) + X(t)Y(t)\end{aligned}\quad (3.16)$$

dengan menggunakan persamaan beda, persamaan (3.16) dapat ditulis

$$\frac{Z(t + \Delta t) - Z(t)}{\Delta t} = -bZ(t) + X(t)Y(t) \quad (3.17)$$

dengan mensubstitusi $\Delta t = h$, maka persamaan (3.17) menjadi

$$\begin{aligned} \frac{Z(t + h) - Z(t)}{h} &= -bZ(t) + X(t)Y(t) \\ Z(t + h) - Z(t) &= h(-bZ(t) + X(t)Y(t)) \\ Z(t + h) - Z(t) &= -bhZ(t) + hX(t)Y(t) \end{aligned} \quad (3.18)$$

Selanjutnya persamaan (3.18) dianalogikan dengan menggunakan persamaan (3.3)

dan (3.5), sehingga menjadi,

$$\begin{aligned} Z_{m+1} - Z_m &= -bhZ_m + hX_m Y_m \\ Z_{m+1} &= Z_m - bhZ_m + hX_m Y_m \\ Z_{m+1} &= (1 - bh)Z_m + hX_m Y_m \end{aligned} \quad (3.19)$$

Dari uraian di atas, maka diperoleh bentuk diskret dari persamaan f_1, f_2 dan f_3 yang dapat disusun dalam sistem persamaan *Lorenz* diskret berikut,

$$\left. \begin{aligned} X_{m+1} &= (1 - \sigma h)X_m + \sigma h Y_m \\ Y_{m+1} &= (r - Z_m)hX_m + (1 - h)Y_m \\ Z_{m+1} &= (1 - bh)Z_m + hX_m Y_m \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

di mana $m = 1, 2, 3, \dots, k$ dengan $k \in N$, dan $h \rightarrow 0$.

3.2 Analisis Perbandingan Perilaku Variabel pada Model Kontinu dan Diskret *Lorenz*

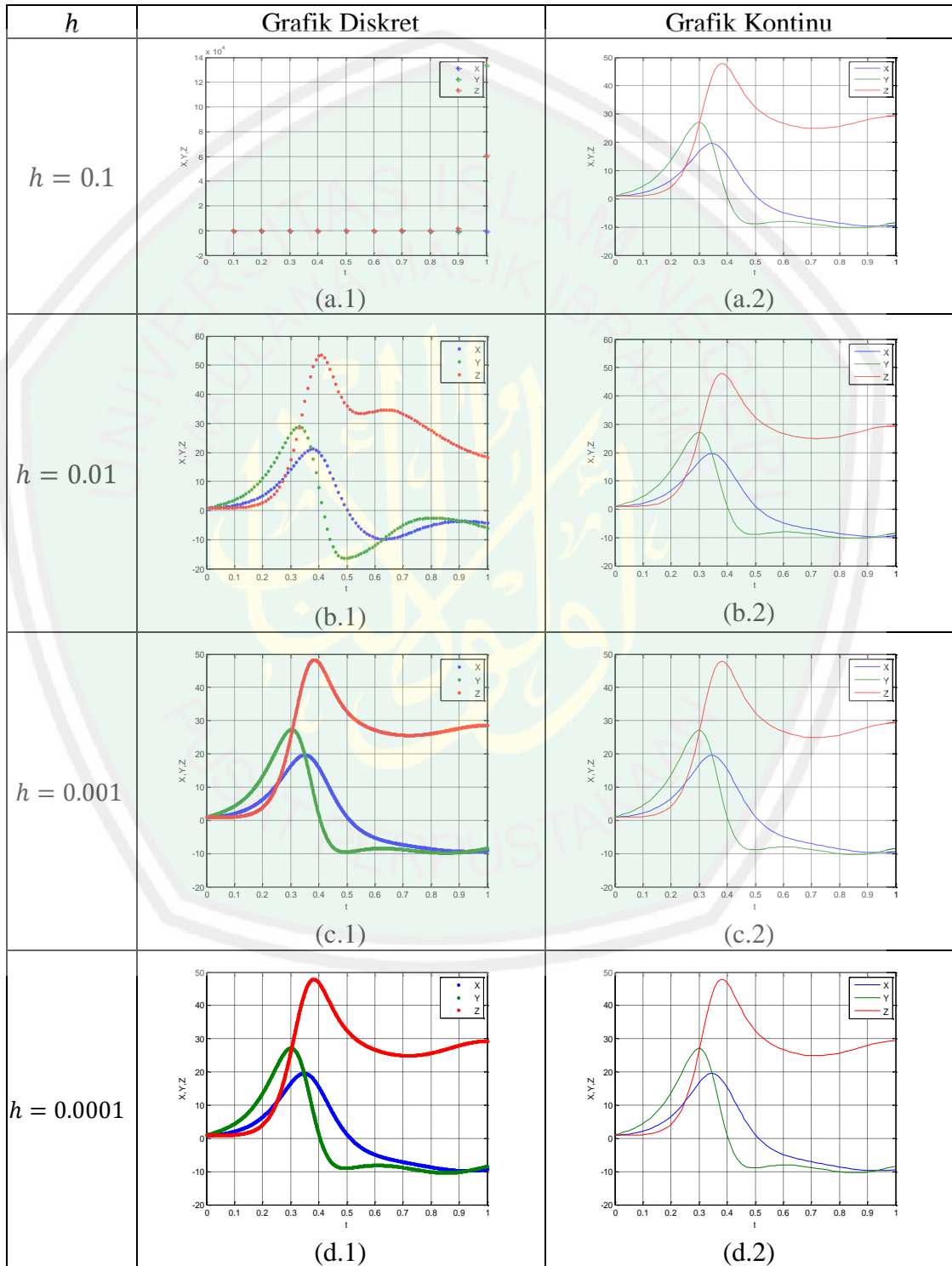
Setelah dilakukan diskretisasi model, maka langkah selanjutnya adalah validasi model diskret dengan membandingkan grafik model diskret yang telah dikonstruksi dengan model kontinunya. Sebuah grafik kontinu dengan selang waktu tertentu akan didekati oleh grafik diskret yang membagi selang tersebut dengan titik-titik diskret berinterval tetap (h).

Besar interval h mendekati nol, dalam skripsi ini diberikan $h = 0.1; 0.01; 0.001$ dan 0.0001 dengan tiga selang waktu kontinu yang berbeda, yaitu $0 \leq t \leq 1$ menit, $0 \leq t \leq 10$ menit dan $0 \leq t \leq 30$ menit. Dengan nilai parameter $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$, $r = 28$, dan nilai awal $X_0 = 1$, $Y_0 = 1$, dan $Z_0 = 1$ maka model *Lorenz* kontinu pada persamaan (3.1) dan model *Lorenz* diskret pada persamaan (3.20), dapat ditunjukkan oleh Gambar 3.2. Intensitas dari gerak konveksi (X) ditunjukkan dalam $X(t)$ gerakan, besar perbedaan temperatur horizontal (Y) dan perbedaan temperatur vertikal (Z) diukur dalam derajat Fahrenheit (F), sedangkan waktu t dalam satuan menit.

Pada saat kontinu, perkembangan variabel akan terlihat sebagaimana Gambar 3.2 bagian (a.2), (b.2), (c.2), (d.2). Terdapat beberapa pola perilaku dari setiap variabel yang ditunjukkan. Perkembangan X menunjukkan bahwa dalam selang $0 \leq t \leq 1$ menit, kuantitas gerak konveksi akan mengalami kenaikan sampai dengan mendekati 20 gerakan pada saat 0,35 menit pertama. Perkembangan ini sebanding dengan Y yang menunjukkan perbedaan suhu horizontal, dalam 0,30 menit pertama selalu mengalami kenaikan sampai mendekati 25°F . Sedangkan perbedaan suhu secara vertikal meningkat lebih besar pada saat mendekati 0,38 menit pertama, yaitu sampai dengan mendekati 50°F . Perilaku X, Y, Z sebanding satu sama lain, kenaikan satu variabel akan diikuti oleh kenaikan variabel lainnya.

Perilaku variabel dalam pengamatan kontinu yang telah diuraikan di atas akan dibandingkan dengan perilaku variabel dalam pengamatan diskret. Perbandingan ini dilakukan sampai didapatkan plot diskret yang menunjukkan perilaku variabel yang paling mendekati perilaku kontinunya. Oleh karena itu

akan dibandingkan plot diskret dengan interval $h = 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001$ sebagaimana ditunjukkan oleh Gambar 3.2 bagian (a.1), (b.1), (c.1), (d.1).



Gambar 3.2: Grafik Diskret dan Kontinu Model *Lorenz* dengan Parameter $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$, $r = 28$, Nilai Awal $(X_0, Y_0, Z_0) = (1, 1, 1)$ dan $0 \leq t \leq 1$ menit. Y, Z dalam Derajat Fahrenheit

Pada keadaan diskret dengan $h = 0.1$ yang ditunjukkan oleh Gambar 3.2 bagian (a.1), artinya dalam waktu 1 menit akan dilakukan pengamatan di 10 titik waktu yang dilakukan setiap 0.1 menit sekali. 10 data yang diukur dapat dilihat pada Tabel 3.1 berikut.

Tabel 3.1: Nilai X, Y, Z dengan $h = 0.1$ dalam selang $0 \leq t \leq 1$ Menit

t_m	X_m	Y_m	Z_m
1	1	1	1
2	1	4	1
3	4	6	1
4	6	15	3
5	15	29	11
6	29	51	51
7	51	-20	184
8	-20	-817	31
9	-817	-729	1675
10	-729	133904	60747

Sumber: (Output Matlab R2008b, 2012)

Tabel 3.1 menunjukkan bahwa dengan menggunakan interval $h = 0.1$ didapatkan $-0,0729.10^4 \leq X \leq 0,0051.10^4$, $-0,729.10^4 \leq Y \leq 13,3904.10^4$, dan $0,0001.10^4 \leq Z \leq 6,0747.10^4$. Karena X menyatakan kuantitas, maka nilai X yang realistis adalah 0 sampai dengan $0,0051.10^4$ gerakan, dan Y yang menyatakan besar perbedaan suhu, 0°F sampai dengan $13,3904.10^4$ $^\circ\text{F}$. Nilai titik-titik diskret yang memiliki jangkauan terlampau besar ini mengakibatkan nilai fungsi tersebar pada angka-angka yang besar, dan mengakibatkan titik-titik tersebut terlihat berkumpul di sekitar $X = Y = Z = 0$.

Pola perilaku X menunjukkan bahwa dalam 1 menit pengamatan diskret terjadi peningkatan kuantitas gerak konveksi sampai dengan 51 gerakan konveksi, peningkatan ini terjadi sampai 0,7 menit pertama, pada menit-menit selanjutnya kuantitas gerak konveksi mengalami penurunan. Sedangkan pola perilaku Y

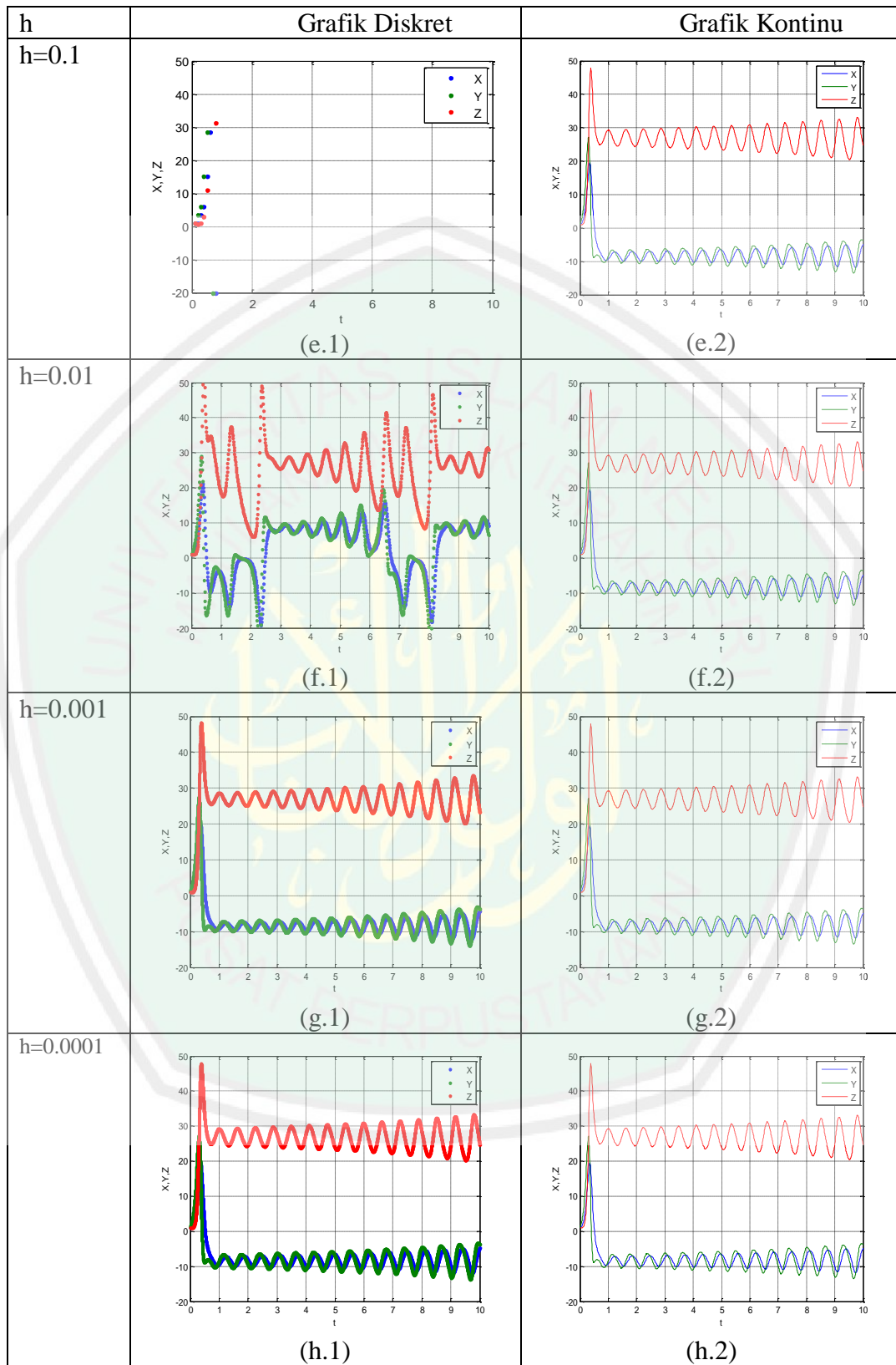
menunjukkan bahwa dalam 1 menit pengamatan terjadi perkembangan yang sama dengan pola perkembangan X bahkan nilai Y yang merupakan variabel bebas atau *input* dari X menunjukkan pola di mana nilai Y_m akan menjadi nilai X_{m+1} . Hal ini menandakan adanya efek deterministik yaitu adanya masukan acak yang membentuk pola tertentu. Sesuai dengan definisi *chaos* yang dipaparkan oleh William, maka sistem ini berpeluang untuk menunjukkan adanya gejala kekacauan (*chaos*). Adapun pola perilaku Z tidak jauh berbeda dengan pola perkembangan X dan Y . Fluktuasi Z cenderung mengalami kenaikan, sehingga perbedaan suhu vertikal pada kasus diskret dengan $h = 0.1$ meningkat sampai dengan $6,0747 \cdot 10^{40}$ F. Untuk interval $0 \leq t \leq 1$ menit, pendekatan grafik kontinu oleh grafik diskret secara visual menunjukkan galat yang besar terhadap perkembangan pola kontinu, sehingga untuk kasus diskret dengan $h = 0.1$ pada 1 menit pengamatan, model diskret dinyatakan belum mengimplementasikan model kontinunya.

Model diskret selanjutnya diuji dengan menggunakan interval $h = 0.01$ untuk 1 menit pengamatan, artinya dalam selang $0 \leq t \leq 1$ menit terdapat 100 titik data yang akan mewakili data pada saat kontinu. Dari Gambar 3.2 bagian (b.1) dapat diamati bahwa interval $h = 0.01$ mengakibatkan semakin banyaknya titik data yang tergambar. Pola perkembangan X, Y, Z menampilkan fluktuasi yang mulai mendekati pola fluktuasi data kontinu. Perkembangan X menunjukkan kuantitas tertinggi gerakan konveksi pada menit ke-0,38 yaitu sebesar 21 gerakan, sedangkan perkembangan Y menunjukkan perbedaan suhu horizontal meningkat sampai dengan $28,9^0$ F pada menit ke-0.33. Perbedaan suhu vertikal juga mengalami kenaikan sampai dengan $53,5^0$ F pada saat 0.41 menit

pengamatan. Secara umum, pola perkembangan X, Y, Z menunjukkan pola yang hampir sama dengan keadaan kontinu, dengan lintasan plot yang mulai mendekati lintasan kontinu. Grafik diskret dengan selang $h = 0.01$ berkembang lebih lambat daripada perkembangannya saat kontinu, hal ini dapat ditunjukkan oleh visualisasi grafik diskret dan nilai numeriknya yang disajikan dalam Lampiran 16.

Model diskret untuk selang $0 \leq t \leq 1$ menit selanjutnya diuji dengan menggunakan interval $h = 0.001$. Secara kualitatif, dapat dijelaskan bahwa tampilan grafik diskret terlihat telah mendekati pola perkembangan data kontinu. Keadaan ini terjadi karena semakin banyaknya titik yang digambarkan untuk mewakili data kontinu, yaitu sebanyak 1000 titik. Dengan memperkecil nilai h , kembali dilakukan uji pada model diskret, yaitu dengan memilih $h = 0.0001$. Semakin kecil h maka akan semakin banyak dan rapat titik-titik yang diamati, secara teori kondisi ini akan menyebabkan grafik akan semakin mendekati keadaan kontinunya. Gambar 3.2 bagian (d.1) menunjukkan bahwa dengan menguji grafik diskret dengan $h < 0.001$, ternyata tidak memperlihatkan pola perkembangan perilaku dan pergeseran plot yang jauh berbeda dari lintasan grafik diskret dengan $h = 0.001$. Oleh karena itu, untuk pengamatan $0 \leq t \leq 1$ menit, dapat dinyatakan bahwa model kontinu dapat diwakili oleh model diskret saat $h \leq 0.001$.

Uji validasi model diskret selanjutnya dilakukan dengan menggunakan selang waktu pengamatan yang lebih panjang, yaitu selama 10 menit. Akan dibuktikan bahwa model diskret dengan $h \leq 0.001$ dapat mewakili model kontinu dalam selang lainnya. Perbandingan grafik diskret dan kontinu untuk selang waktu $0 \leq t \leq 10$ menit ditunjukkan oleh Gambar 3.3.



Gambar 3.3: Grafik Diskret dan Kontinu Model *Lorenz* dengan Parameter $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$, $r = 28$, Nilai Awal $(X_0, Y_0, Z_0) = (1, 1, 1)$ dan $0 \leq t \leq 10$ Menit

Pola perkembangan variabel pada saat kontinu yang terlihat pada Gambar 3.3 bagian (e.2), (f.2), (g.2), (h.2) menunjukkan bahwa grafik mengalami osilasi. Variabel X, Y, Z berosilasi pada lintasannya masing-masing. Lintasan X berhimpit dengan lintasan Y pada interval $-25 < X, Y < 25$, sedangkan Z memiliki lintasan tersendiri pada interval $20 \leq Z \leq 50$. Pola perkembangan setiap variabel dalam 10 menit pengamatan adalah berfluktuasi dan berosilasi dengan setimbang di sekitar titik $(X, Y, Z) = (-8, -8, 27)$. Analisis titik kesetimbangan ini akan dibahas lebih detail pada sub bab selanjutnya.

Gambar 3.3 bagian (e.1), (f.1), (g.1), (h.1) adalah grafik model diskret *Lorenz* dalam 10 menit pengamatan. Sebagaimana perilaku yang ditunjukkan pada pengamatan sebelumnya yang dilakukan dalam selang $0 \leq t \leq 1$ menit, grafik diskret dengan $h = 0.1$ menunjukkan adanya keterbatasan kemampuan dalam merepresentasikan grafik kontinu. Interval h yang sedemikian besar, menyebabkan fungsi sangat besar dan tidak terdefinisi pada selang fungsi $-20 \leq X, Y, Z \leq 50$. Nilai fungsi tersebut dapat dilihat pada Lampiran 15.

Selanjutnya, dengan $h = 0.01$, grafik diskret mulai memperlihatkan osilasinya, walaupun lintasan masing-masing plot variabel diskret masih menyebar dan bergeser dari lintasan kontinu. Pada grafik ini, gejala *chaos* yang ditandai dengan osilasi aperiodik sudah mulai diperlihatkan.

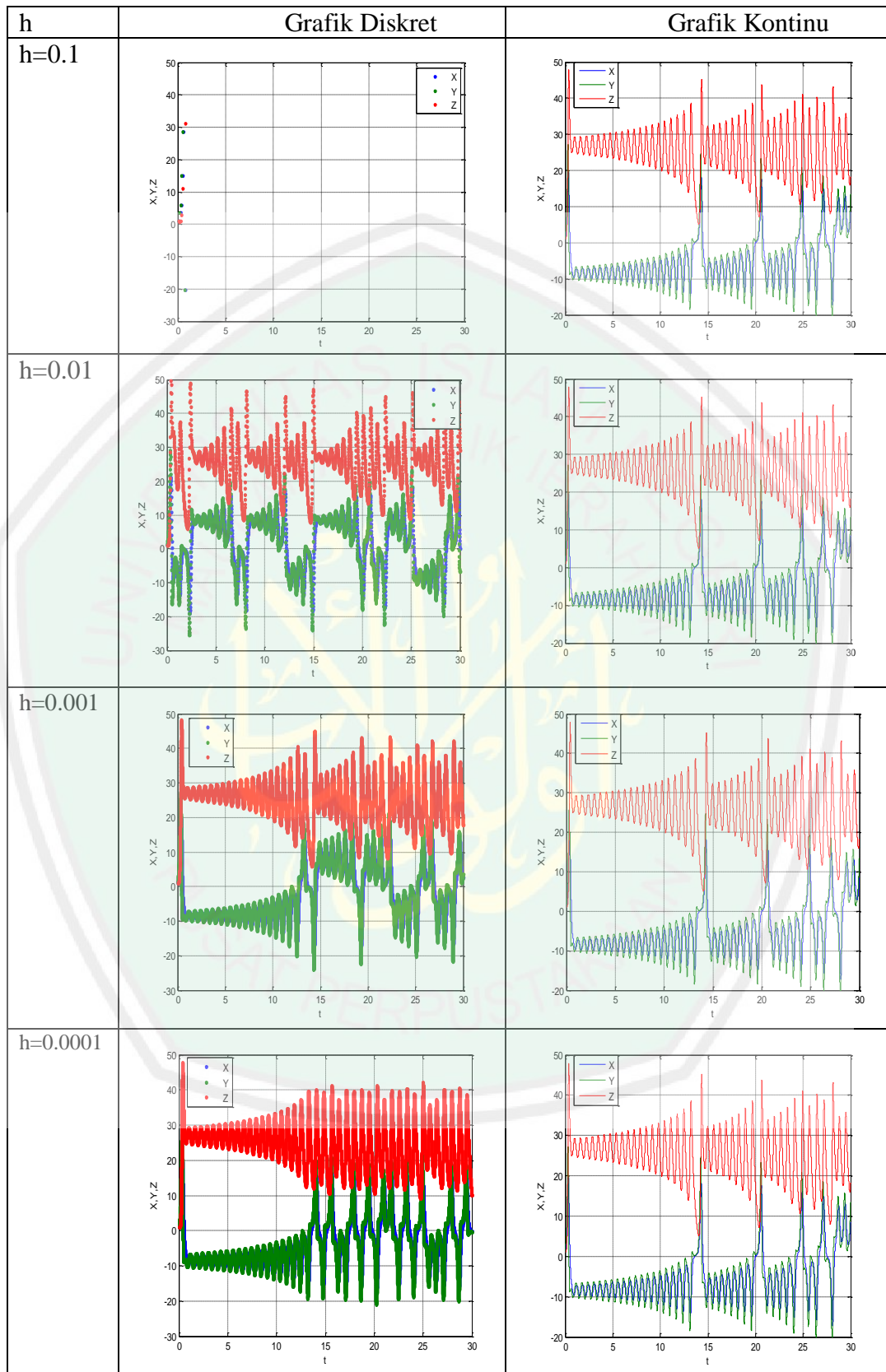
Pada grafik diskret dengan $h = 0.001$, kembali ditunjukkan bahwa keadaan grafik diskret dengan titik-titik pengamatan yang semakin banyak dan rapat, lebih mewakili keadaan kontinu. Pola perkembangan setiap variabel diskret sangat mendekati keadaan kontinu, yaitu berfluktuasi secara terus menerus dan menunjukkan adanya kestabilan. Demikian pula saat $h = 0.0001$, kembali

ditunjukkan bahwa keadaan diskret tidak mengalami perubahan yang besar dari keadaan diskret saat $h = 0.001$. Sehingga secara umum, untuk pengamatan 10 menit, model kontinu *Lorenz* dapat diwakili oleh model diskret dengan $h \leq 0.001$. Pola perkembangan setiap variabel berfluktuasi pada interval $-25 < X, Y < 25$ dan $20 < Z < 50$. Gejala ketidak teraturan atau *chaos* telah terlihat pada saat $h = 0.01$.

Selanjutnya, untuk memperumum kesimpulan bahwa grafik diskret model *Lorenz* dapat mengimplementasikan perilaku kontinunya saat $h \leq 0.001$, maka kembali dilakukan uji untuk selang waktu pengamatan yang lebih besar, yaitu $0 \leq t \leq 30$ menit. Hasil dari uji tersebut ditampilkan dalam Gambar 3.4.

Gambar 3.4 menunjukkan bahwa dalam waktu pengamatan yang lebih panjang, yaitu 30 menit, keadaan kontinu menunjukkan adanya gejala *chaos* yang ditandai dengan keacakan osilasi grafiknya. Pola perilaku setiap variabel pada saat kontinu, berfluktuasi secara random dalam lintasan yang sama dengan lintasan yang dilalui saat pengamatan 10 menit, namun lebih lebar. Perkembangan X dan Y bergerak dalam interval $-20 \leq X, Y \leq 25$, sedangkan Z berfluktuasi dalam interval $0 \leq Z \leq 50$.

Model diskret dengan $0 \leq t \leq 30$ menit dan $h = 0.1$ menunjukkan perilaku variabel yang cenderung tidak berbeda dengan perilaku saat diuji dengan selang waktu $0 \leq t \leq 10$ menit, yaitu menunjukkan galat yang besar karena nilainya yang terlampau besar sehingga tidak terdefinisi pada selang nilai fungsi $-20 \leq X, Y, Z \leq 50$. Nilai fungsi dapat dilihat di Lampiran 16.



Gambar 3.4: Grafik Diskret dan Kontinu Model *Lorenz* dengan Parameter $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$, $r = 28$, Nilai Awal $(X_0, Y_0, Z_0) = (1, 1, 1)$ dan $0 \leq t \leq 30$ Menit

Seiring dengan pemilihan h yang semakin kecil, yaitu dari $h = 0.01$ dan $h = 0.001$, perkembangan X, Y, Z menampakkan osilasi yang mendekati pola osilasi grafik kontinu, untuk $h = 0.01$ ditunjukkan bahwa perkembangan variabel masih terlalu lebar dari lintasan. Hal ini dikarenakan jumlah titik-titik yang membagi selang tersebut belum cukup mewakili perkembangan semua titik di saat kontinu. Selanjutnya saat $h = 0.001$, pola perkembangan lebih mendekati pola kontinu. Namun saat h diambil lebih kecil lagi yaitu $h = 0.0001$, grafik yang sebelumnya pada saat $0 \leq t \leq 1$ menit dan $0 \leq t \leq 10$ menit cenderung tidak menunjukkan perubahan pola perkembangan lagi untuk $h \leq 0.001$, pada selang waktu yang lebih besar yaitu $0 \leq t \leq 30$ menit menunjukkan adanya perubahan yang signifikan mulai menit ke-15. Namun tetap mempertahankan bentuknya, dalam arti, perkembangan setiap variabel masih berada pada lintasan masing-masing, walaupun perkembangannya telah sedikit berbeda dengan kondisi kontinunya. Hal ini menunjukkan adanya efek kekacauan (*chaos*) yang oleh banyak teori disebutkan dimiliki oleh sistem persamaan *Lorenz* ini. Analisis kekacauan *Lorenz* akan diuraikan lebih detail pada bagian berikutnya.

Dari uji validitas, yang dilakukan dengan membandingkan grafik diskret dan grafik kontinu pada tiga selang waktu, yaitu $0 \leq t \leq 1$ menit, $0 \leq t \leq 10$ menit dan $0 \leq t \leq 30$ menit serta interval untuk titik diskret yang bernilai $h = 0.1; 0.01; 0.001; 0.0001$, dapat diketahui secara umum bahwa perilaku setiap variabel menunjukkan perbedaan yang signifikan saat model diskret menggunakan $h = 0.1$, dengan memperkecil nilai h menjadi $h = 0.01$ didapatkan model diskret yang lebih mendekati pola perkembangan kontinu yang menunjukkan adanya fluktuasi grafik dengan lintasan yang lebih lebar daripada

lintasan kontinu. Semakin kecil h maka diperoleh perilaku diskret yang semakin mendekati perilaku kontinu, yaitu saat $h = 0.001$. Apabila h kembali diperkecil, perilaku grafik diskret memunculkan dua kemungkinan, pertama yaitu mempertahankan keadaannya sebagaimana ditunjukkan pada saat $h = 0.001$, dan kedua mengalami sedikit perubahan dalam lintasannya. Kemungkinan kedua ini, terjadi untuk selang pengamatan pada menit-menit yang cukup besar, yaitu $t \geq 15$ menit. Namun secara umum, keadaan kontinu telah dapat dicapai saat model diskret dikonstruksi dengan $h \leq 0.001$.

Dari kedua grafik, baik kontinu maupun diskret dengan $h \leq 0.001$ menunjukkan bahwa kuantitas gerak konveksi berkembang sebanding dengan perkembangan perbedaan suhu horisontal, keduanya berkembang dalam kisaran nilai yang tidak jauh berbeda. Sedangkan untuk perbedaan suhu vertikal, meskipun memiliki pola perkembangan dengan fluktuasi yang sebanding, tetapi nilainya jauh lebih tinggi dari dua variabel lainnya.

3.3 Analisis Perbandingan Perilaku Kekacauan (*chaos*) pada Model Kontinu dan Diskret *Lorenz*

Perilaku *chaos* pada model kontinu dan diskret dapat diamati di sekitar titik kesetimbangannya. Untuk menunjukkan kekacauan yang menyebabkan sistem mengalami perubahan yang signifikan, maka diberikan gangguan berupa δ dengan besar $\delta \rightarrow 0$ di sekitar titik kesetimbangan. Dalam hal ini, besar gangguan yang diberikan dipilih sangat kecil, yaitu $\delta = 10^{-6}$ yang diterapkan pada salah satu variabel, yaitu X . Langkah untuk membandingkan gejala *chaos* pada model kontinu dan diskret diawali dengan analisis titik kesetimbangan model kontinu,

analisis kekacauan di sekitar titik kesetimbangan model kontinu, dan analisis kekacauan di sekitar titik kesetimbangan model diskret. Dalam hal ini, dipilih model diskret dengan $h \leq 0.001$ yaitu $h = \{0.001, 0.0001\}$ yang pada pembahasan sebelumnya telah ditunjukkan dapat mendekati model kontinu dengan baik, dan dari tiga interval waktu yang diberikan, dipilih interval waktu $0 \leq t \leq 30$ menit karena pada pembahasan sebelumnya dinyatakan bahwa kekacauan grafik terlihat pada $t \geq 15$ menit. Berikut akan ditunjukkan analisis titik kesetimbangan model *Lorenz* sebelum mendapat gangguan.

Titik kesetimbangan sistem persamaan *Lorenz* (3.1) diperoleh saat sistem berada dalam keadaan setimbang, yang terjadi saat $\frac{dX}{dt} = 0$, $\frac{dY}{dt} = 0$ dan $\frac{dZ}{dt} = 0$. Sehingga didapatkan sistem berikut

$$\left. \begin{aligned} f_1 : 0 &= -\sigma X + \sigma Y \\ f_2 : 0 &= rX - Y - XZ \\ f_3 : 0 &= -bZ + XY \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

Dari f_1 diketahui bahwa $X = Y$, yang menyebabkan f_2 menjadi

$$\begin{aligned} 0 &= rX - X - XZ \\ 0 &= X(r - 1 - Z) \end{aligned} \quad (3.21)$$

Persamaan (3.21) menyebabkan $X = 0$ atau $Z = r - 1$. Pilih $X = 0$ sehingga $Y = 0$. Nilai ini mengakibatkan Z pada f_3 juga bernilai $Z = 0$. Dengan demikian titik kesetimbangan pertama dari sistem (3.1) adalah

$$(X^*, Y^*, Z^*) = (0, 0, 0) \quad (3.22)$$

Selanjutnya akan ditentukan titik kesetimbangan kedua. Ingat bahwa dari f_1 , didapatkan $X = Y$ dan dari f_2 didapatkan $Z = r - 1$, yang mengakibatkan f_3 menjadi

$$\begin{aligned}
 0 &= -b(r-1) + X^2 \\
 X &= \pm\sqrt{b(r-1)} \\
 Y &= \pm\sqrt{b(r-1)}
 \end{aligned}$$

Karena model *Lorenz* memiliki sifat simetri, di mana persamaan akan invariant pada $(X, Y) \rightarrow (-X, -Y)$, maka $(\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, (r-1))$ sebagai titik kesetimbangan sistem mengakibatkan $(-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, (r-1))$ juga akan menjadi titik kesetimbangan sistem. Sehingga secara umum, titik kesetimbangan yang tidak nol untuk sistem persamaan *Lorenz* dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 P^+ &= (X^*, Y^*, Z^*)^+ = (\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, (r-1)) \\
 P^- &= (X^*, Y^*, Z^*)^- = (-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, (r-1))
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Untuk nilai parameter yang dibatasi pada $b = \frac{8}{3}$ dan $r = 28$, maka titik kesetimbangan pada persamaan (3.23) dapat diberikan sebagai berikut.

$$P^\pm = (\pm 8,48; \pm 8,48; 27)$$

Selanjutnya akan dianalisis kestabilan dari titik kesetimbangan yang telah diperoleh. Untuk titik tetap pertama, matriks Jacobi di sekitar $(0,0,0)$ adalah

$$J_{1(0,0,0)} = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix}$$

Dapat ditentukan nilai eigen yang memenuhi $|J - \lambda I| = 0$ dengan I matriks identitas, sebagai berikut.

$$\begin{vmatrix} \sigma + \lambda & \sigma & 0 \\ r & 1 + \lambda & 0 \\ 0 & 0 & b + \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Sehingga diperoleh persamaan karakteristik berikut

$$(\lambda + b)(\lambda^2 + (1 + \sigma)\lambda + (1 - r)\sigma) = 0$$

Dengan demikian, didapatkan nilai eigen,

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -b \\ \lambda_2 &= \frac{-(1+\sigma) - \sqrt{(1+\sigma)^2 - 4\sigma(1-r)}}{2} \\ \lambda_3 &= \frac{-(1+\sigma) + \sqrt{(1+\sigma)^2 - 4\sigma(1-r)}}{2}\end{aligned}$$

Untuk nilai $b = \frac{8}{3}$, $\sigma = 10$ dan $r = 28$, nilai eigennya adalah

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -2.67 \\ \lambda_2 &= -22.82 \\ \lambda_3 &= 11.82\end{aligned}$$

Karena terdapat $\lambda_{1,2} < 0$ dan $\lambda_3 > 0$ maka berdasarkan Teorema 1, titik kesetimbangan pertama tidak stabil.

Selanjutnya akan dianalisis kestabilan titik kesetimbangan tak nol, yaitu $P^\pm = (\pm 8.48; \pm 8.48; 27)$. Matriks Jacobi di sekitar titik $(\pm 8.48; \pm 8.48; 27)$ dengan nilai parameter yang telah diberikan adalah

$$J_{P^\pm(\pm 8.48; \pm 8.48; 27)} = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 1 & -1 & \mp 8.48 \\ \pm 8.48 & \pm 8.48 & -2.67 \end{bmatrix}$$

Persamaan karakteristiknya adalah

$$\lambda^3 + 13.67\lambda^2 - 42.67\lambda - 138.67 = 0$$

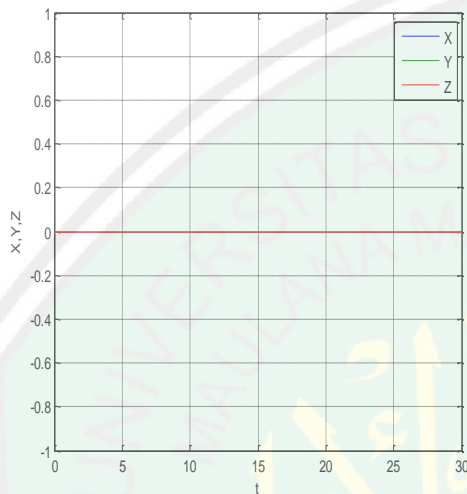
Sehingga nilai eigennya:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -13.85 \\ \lambda_2 &= 0.09 + 10.19i \\ \lambda_3 &= 0.09 - 10.19i\end{aligned}$$

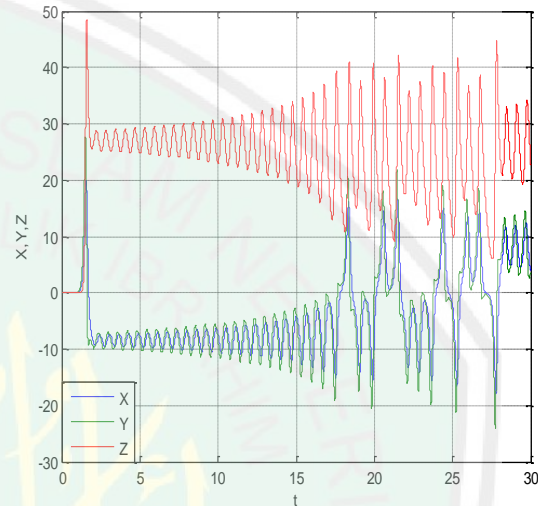
Karena $\lambda_1 < 0$ dan unsur real dari $\lambda_{2,3} > 0$ maka titik kesetimbangan tak nol untuk model *Lorenz* adalah tidak stabil. Analisis titik kesetimbangan dan kestabilan ini juga dapat dilakukan dengan menggunakan program Maple sebagaimana terlampir pada Lampiran 12.

Selanjutnya akan diamati gejala kekacauan (*chaos*) yang terjadi di sekitar titik kesetimbangan model kontinu *Lorenz*. Dengan memberikan gangguan $\delta \rightarrow 0$

pada variabel X , maka titik kesetimbangan baru adalah $(X^* + \delta, Y^*, Z^*)$. Titik kesetimbangan pertama sebelum dan sesudah mendapat gangguan dapat ditunjukkan oleh Gambar 3.5.



Gambar 3.5a: Titik Tetap Sebelum Mendapat Gangguan, $(X^*, Y^*, Z^*) = (0, 0, 0)$

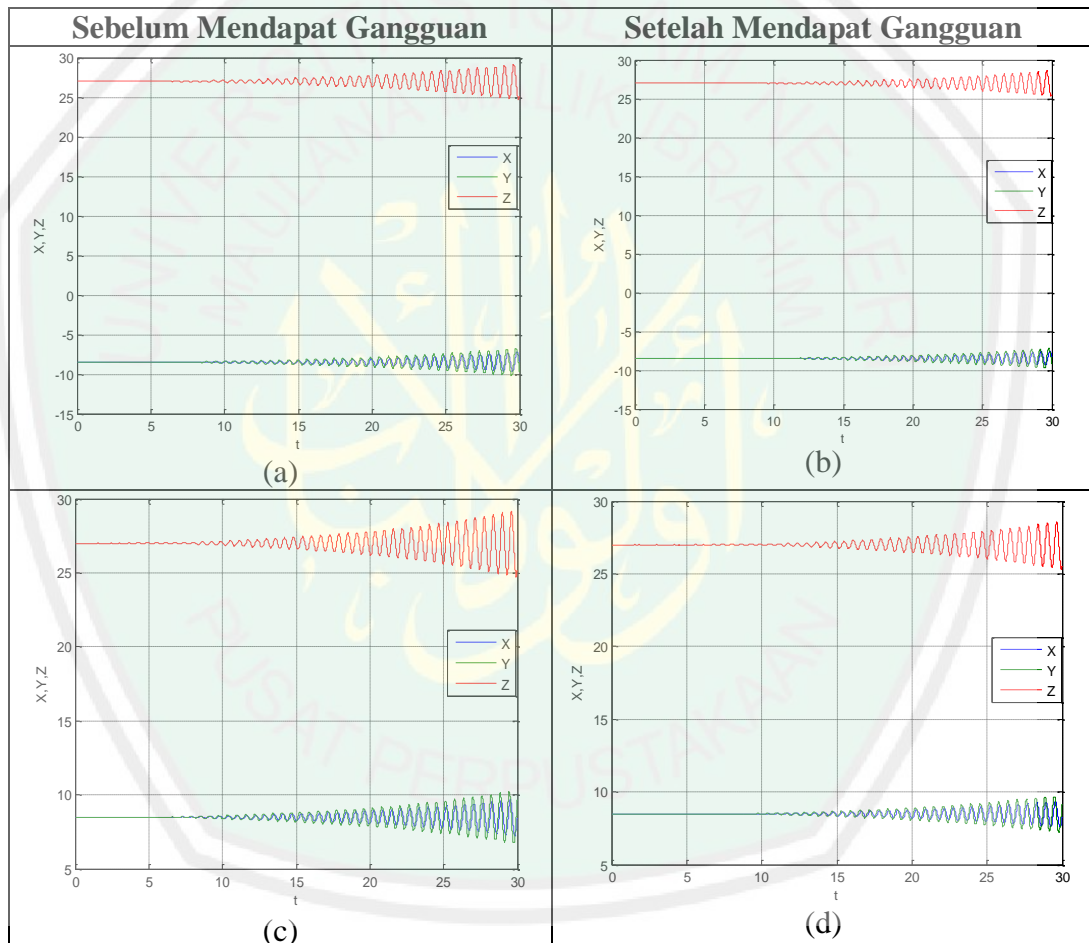


Gambar 3.5b: Titik Tetap Setelah Mendapat Gangguan, $(X^* + \delta, Y^*, Z^*) = (10^{-6}, 0, 0)$

Berdasarkan Gambar 3.5a dan 3.5b di atas, diketahui bahwa gangguan yang sangat kecil pada variabel X menyebabkan perubahan yang signifikan pada sistem *Lorenz*. Fakta ini menandakan bahwa sistem sensitif terhadap pemberian nilai awal, dan penerimaan input yang sederhana pada sistem telah menghasilkan keluaran yang kompleks. Gejala ini merupakan bukti bahwa sistem memiliki gejala *chaos* di sekitar titik kesetimbangan pertama.

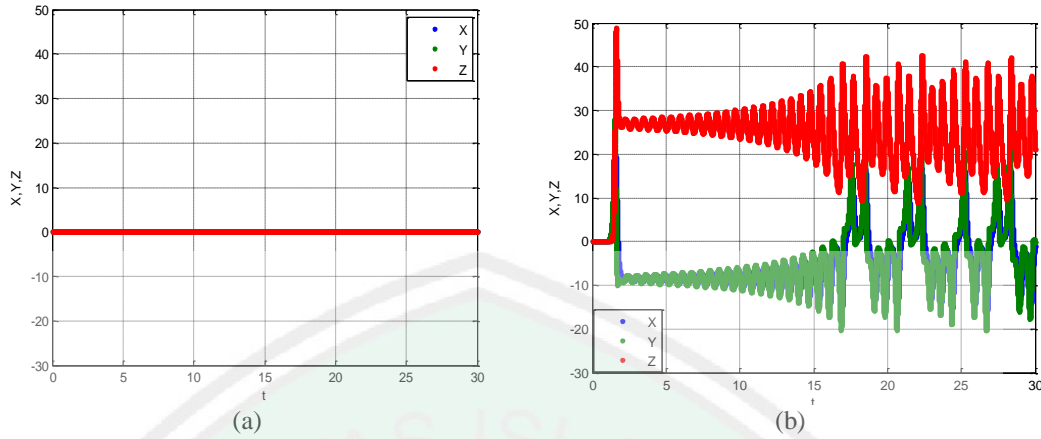
Selanjutnya gangguan diberikan di sekitar titik kesetimbangan tak nol, keadaan grafik sebelum dan sesudah diberikan gangguan di sekitar titik kesetimbangan tak nol, ditampilkan dalam Gambar 3.6. Grafik menunjukkan bahwa gangguan sebesar δ tidak mengakibatkan perubahan yang signifikan pada sistem dalam interval waktu $0 \leq t \leq 30$ menit. Sehingga di sekitar titik

kesetimbangan tak nol, tidak dapat ditunjukkan adanya kekacauan (*chaos*) yang terjadi. Dengan demikian, dapat ditunjukkan bahwa gejala *chaos* model kontinu *Lorenz* terjadi di sekitar titik tetap pertama $(X^*, Y^*, Z^*) = (0,0,0)$. Oleh karena itu, pada perbandingan gejala *chaos* pada model diskret dan kontinu, akan dilakukan di sekitar titik kesetimbangan pertama.



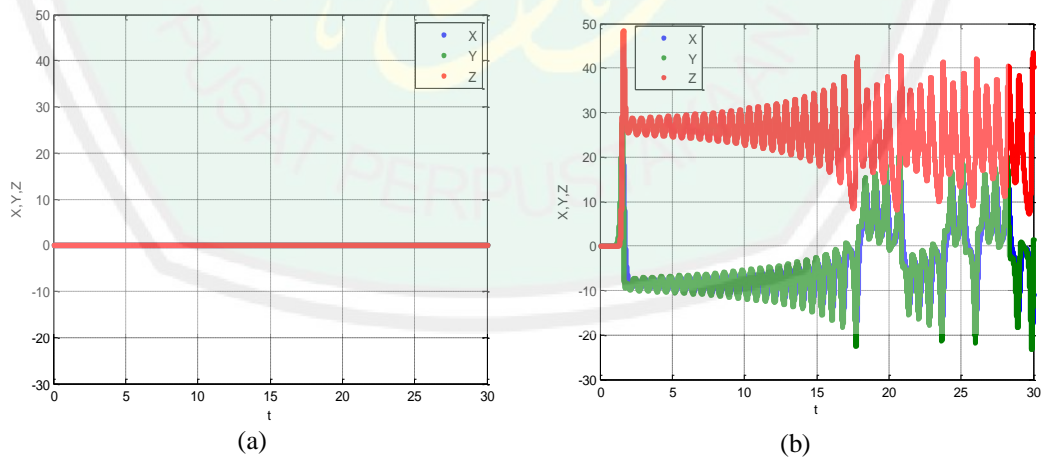
Gambar 3.6: Grafik Model *Lorenz* Kontinu sesudah dan sebelum diberikan gangguan di sekitar titik kesetimbangan. (a) Titik Kesetimbangan $P^- = (-8,48; -8,48; 27)$, (b) Titik Kesetimbangan $P^- = (-8,48 + 10^{-6}; -8,48; 27)$, (c) Titik Kesetimbangan $P^+ = (8,48; 8,48; 27)$, (d) Titik Kesetimbangan $P^+ = (8,48 + 10^{-6}; 8,48; 27)$

Berikut akan ditunjukkan titik kesetimbangan model diskret dengan $h = 0.001$ sebelum dan sesudah diberikan gangguan $\delta = 10^{-6}$ di sekitar titik $(X^*, Y^*, Z^*) = (0,0,0)$ oleh Gambar 3.7.



Gambar 3.7: (a) Titik Kestimbangan Model Diskret dengan $h = 0.001$ Lorenz di $(X^*, Y^*, Z^*) = (0, 0, 0)$, (b) Titik Kestimbangan Model Diskret Lorenz dengan $h = 0.001$ di $(X^* + \delta, Y^*, Z^*) = (10^{-6}, 0, 0)$

Keadaan serupa Gambar 3.7 di atas juga ditunjukkan oleh model diskret dengan $h = 0.0001$. Perubahan sebelum dan sesudah pemberian gangguan di sekitar titik kesetimbangan pada model diskret $h = 0.0001$ diberikan pada Gambar 3.8 berikut.



Gambar 3.8: (a) Titik Kestimbangan Model Diskret dengan $h = 0.0001$ Lorenz di $(X^*, Y^*, Z^*) = (0, 0, 0)$, (b) Titik Kestimbangan Model Diskret Lorenz dengan $h = 0.0001$ di $(X^* + \delta, Y^*, Z^*) = (10^{-6}, 0, 0)$

Dari Gambar 3.7 (a) dan (b) dan Gambar 3.8 (a) dan (b), dapat ditunjukkan bahwa dalam keadaan diskret juga terjadi perubahan yang signifikan sebelum dan sesudah diberikan gangguan di sekitar titik kesetimbangan. Hal ini menunjukkan bahwa sistem diskret juga memiliki sensitivitas terhadap pemberian nilai awal. Dengan sistem diskret juga memiliki efek *chaos* di sekitar titik kesetimbangan $(X^*, Y^*, Z^*) = (0,0,0)$.

Selanjutnya gejala *chaos* pada kondisi diskret dibandingkan dengan *chaos* dalam kondisi kontinu. Untuk itu, dibandingkan Gambar 3.7 (b) dan 3.8 (b) yang mewakili gejala *chaos* pada kondisi diskret dan Gambar 3.5 (b) untuk gejala *chaos* pada kondisi kontinu. Kedua gambar ini menunjukkan bahwa osilasi grafik yang mengandung *chaos* baik dalam kondisi kontinu maupun diskret, menunjukkan pola yang serupa, yakni berfluktuasi dalam lintasan yang sama secara aperiodik saat $t \geq 15$ menit.

Berdasarkan hasil pengamatan yang dilakukan, dapat ditunjukkan bahwa model kontinu *Lorenz* dengan parameter $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$ dan $r = 28$ memiliki gejala *chaos* di sekitar titik kesetimbangan $(X^*, Y^*, Z^*) = (0,0,0)$. Keadaan ini dapat direpresentasikan dengan baik oleh model diskret *Lorenz* dengan $h \leq 0.001$.

3.4 Model *Lorenz* dalam Pandangan Islam

Udara merupakan suatu komponen alam yang sangat dibutuhkan oleh semua makhluk hidup. Dengan udara seluruh makhluk dapat bernapas, tanaman dapat melakukan penyerbukan, tumbuh dan memasak makanan, kapal-kapal mata pencaharian nelayan dapat bergerak, dan menjadi kabar gembira turunnya hujan di mana dengan air hujan itu banyak aktivitas kehidupan dijalankan.

Lebih sempit akan ditinjau manfaat udara dalam perannya memberikan kabar gembira akan turunnya hujan. Dalam perkembangan sains dan teknologi, terdapat istilah peramalan cuaca dalam rangka mengetahui apakah hari berikutnya akan turun hujan atau tidak. Penelitian tentang ini telah banyak dilakukan oleh berbagai pihak dan berbagai metode. Secara matematis, ramalan cuaca dapat dilakukan dengan pemodelan. Salah satu model yang digunakan dalam bidang ini adalah Model *Lorenz* yang memodelkan gerak angin sebagai parameter peramalan cuaca.

Gerakan angin disinggung dalam Alquran Surat Al-Jatsiyah ayat 5, yang menyebutkan bahwa perkisaran angin dari barat ke timur, utara ke selatan, dari yang mengandung hawa dingin dan hangat dan pergerakan angin lainnya disebabkan oleh perbedaan suhu atau kekuatan adalah bentuk-bentuk dari petunjuk yang diberikan Allah bagi manusia yang berakal. Pergerakan angin ini salah satunya ada yang dapat menurunkan rezeki Allah dari langit yakni hujan. Dan perkisaran angin yang demikian bukanlah sesuatu yang kebetulan belaka, namun sudah terprogram dan diperhitungkan secara cermat dalam sistem yang diciptakan oleh Allah SWT.

Dari ayat ini, telah jelas bahwa Allah SWT memberikan petunjuk-Nya melalui fenomena alam yang berupa perkisaran angin, bagi orang yang berakal. Temuan *Lorenz* menjadi bukti bahwa dengan mengamati petunjuk Allah, yang berupa gerakan angin tersebut dapat diperoleh suatu formula luar biasa yang bermanfaat bagi kehidupan manusia, yaitu dalam bentuk model *Lorenz*.

Model *Lorenz* memperkuat kandungan ayat ini sebagaimana disampaikan oleh Tafsir *Al-Misbah* dan *Fi Zhilalil Quran*, bahwa pada perkisaran

angin yang disebabkan oleh perbedaan suhu, yang bergerak dari udara dingin ke udara hangat atau sebaliknya, salah satunya ada yang dimaksudkan untuk menurunkan hujan. Oleh model ini, hubungan antara perkisaran angin, perbedaan suhu dan turunnya hujan kemudian dikaji lebih detail sehingga orang yang berakal dapat memahami petunjuk Allah dengan lebih mudah.

Perkisaran angin dalam model *Lorenz* dipersempit dalam istilah konveksi udara. Yaitu sebuah aliran naiknya udara panas dan turunnya udara dingin yang disebabkan oleh perbedaan suhu antara keduanya. Mekanisme konveksi berawal dari sifat udara yang bergerak karena perbedaan tekanan udara, yang menyebabkan udara bergerak dari daerah bertekanan tinggi ke daerah bertekanan rendah. Saat udara di atas permukaan bumi mendapat pemanasan, yang diakibatkan oleh berbagai aktivitas manusia, udara akan memuai dan menjadi lebih ringan dan bergerak naik ke langit. Hal ini menyebabkan konsentrasi udara di atas permukaan bumi berkurang sehingga tekanan udaranya pun berkurang. Udara dingin di sekitarnya terutama di tempat yang lebih tinggi akan menyusut dan menjadi lebih berat sehingga akan bergerak turun ke tanah. Di atas tanah, udara menjadi panas lagi dan naik kembali. Demikianlah prosesnya sehingga udara mengalir dari udara panas ke dingin kembali ke panas lagi dan seterusnya.

Dalam kaitannya dengan hujan, maka udara yang dimaksudkan melakukan konveksi udara ini adalah udara yang berada di atas permukaan bumi, khususnya yang berada di langit. Mengenai udara di langit ini, Alquran sebagai sumber dari segala sumber pengetahuan sejak ribuan tahun silam telah menyebutkan pada Surat Fushshilat ayat 11, bahwa udara sebagai *dukhon* atau

asap adalah berupa suatu benda, umumnya terdiri dari gas yang mengandung partikel-partikel yang sangat kecil tetapi kukuh dan telah berada di angkasa jauh lebih dahulu daripada terciptanya bintang atau benda langit lainnya, sehingga gas inilah yang kemudian membentuk gugus-gugus bintang dan benda langit lain yang berada di langit.

Langit yang sebenarnya adalah asap atau udara terdiri dari tujuh lapis dengan perannya masing-masing. Hal ini sesuai dengan kelanjutan dari Surat Fushshilat ayat 11,

فَقَضَيْنَهُنَّ سَبْعَ سَمَوَاتٍ فِي يَوْمَيْنِ وَأَوْحَىٰ فِي كُلِّ سَمَاءٍ أَمْرَهَا ﴿١٢﴾

Artinya:

“Maka Dia menjadikannya tujuh langit dalam dua masa. Dia mewahyukan pada tiap-tiap langit urusannya,”(QS. Fushshilat:12).

Pakar geologi membenarkan bahwa langit terdiri dari tujuh lapis dengan perannya masing-masing, yaitu lapisan troposfer, lapisan ozon, stratosfer, mesosfer, ionosfer, termosfer dan eksosfer. Lapisan troposfer adalah lapisan terbawah di mana terdapat oksigen dan pembentukan awan, salju, dan hujan.

Terkait dengan proses terjadinya hujan yang disebabkan oleh pergerakan angin, Surat Ar-Ruum ayat 48 menjelaskan bahwa gerakan angin dapat membawa uap air dari air laut atau tempat lain yang dikehendaki Allah, dan mengumpulkannya dalam gumpalan awan-awan, sehingga setelah awan yang menampung uap air tersebut tidak mampu lagi digerakkan oleh angin, maka jatuhlah uap tersebut dan turun sebagai air hujan. Karena itu, jika terdapat banyak angin, maka akan banyak uap air yang dibawa ke langit, dan terkumpul dalam awan sehingga akhirnya terjatuh kembali ke bumi sebagai rezeki Allah yang menjadi sumber kehidupan di bumi.

Kebenaran ayat ini kembali dibuktikan oleh model *Lorenz*, bahwa udara yang bergerak dalam mekanisme konveksi adalah aliran udara yang berasal dari permukaan bumi yang membawa uap-uap air hasil pemanasan di bumi, yang selanjutnya akan bergerak naik ke lapisan troposfer. Di atmosfer uap-uap air tersebut akan berkumpul dengan gas lain dan membentuk awan, dan berkondensasi sehingga turunlah tetes-tetes air berupa hujan.

Dengan merangkum seluruh simbol-simbol alam tersebut dalam simbol matematika yang merepresentasikan tiga variabel, yaitu variabel X banyaknya gerakan konveksi udara, Y besarnya perbedaan suhu antara udara yang dingin dan hangat, dan Z besarnya perbedaan penyimpangan suhu vertikal, maka *Lorenz* menawarkan sebuah sistem berupa model yang dinamai sesuai dengan namanya, sebagai salah satu alat untuk memperhitungkan dan memperkirakan turunnya hujan di waktu yang akan datang.

Sebagai hamba yang beriman kepada Allah dan kitab-Nya, hendaknya kita dapat meneladani jejak intelektual *Lorenz*, dalam mengungkap petunjuk-petunjuk Allah lainnya yang tersirat atau tersurat di dalam Alquran, sehingga pada akhirnya aktivitas intelektual adalah jalan yang lebar bagi kaum berakal untuk lebih mengenal dan mendekatkan diri pada Allah SWT.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan penelitian yang telah dilaksanakan, maka dapat diberikan kesimpulan berikut:

1. Konstruksi bentuk diskret model *Lorenz* dengan menggunakan analogi persamaan beda dilakukan dengan tiga tahap, tahap pertama adalah konstruksi waktu t untuk kasus diskret, tahap kedua adalah diskretisasi masing-masing persamaan penyusun sistem persamaan *Lorenz* dan tahap ketiga adalah validasi dengan simulasi perbandingan grafik. Bentuk diskret model *Lorenz* yang dihasilkan adalah

$$\begin{aligned}X_{m+1} &= (1 - \sigma h)X_m + \sigma h Y_m \\Y_{m+1} &= (r - Z_m)hX_m + (1 - h)Y_m \\Z_{m+1} &= (1 - bh)Z_m + hX_m Y_m\end{aligned}$$

dengan $m \in N$ dan $h \rightarrow 0$.

2. Perbandingan perilaku setiap variabel pada model kontinu dan diskret diamati saat $h = 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001$ dengan parameter $\sigma = 10, b = \frac{8}{3}$ dan $r = 28$ dan nilai awal $(X_0, Y_0, Z_0) = (1, 1, 1)$. Untuk h semakin kecil perbedaan antara kedua model akan semakin sedikit pula. Mulai $h = 0.001$ perilaku variabel pada model diskret hampir tidak menunjukkan perbedaan dengan model kontinu. Dari hasil simulasi diskret, efek *chaos* terjadi pada $t \geq 15$ menit. Saat $h \leq 0.001$, model diskret yang dibentuk dapat mengimplementasikan perilaku variabel kontinu dan gejala kekacauan (*chaos*) di sekitar titik kesetimbangannya.

4.2 Saran

Bagi penelitian selanjutnya, disarankan untuk melanjutkan studi diskretisasi model *Lorenz* ini dengan menggunakan nilai parameter yang berbeda dan bervariasi, agar dapat dilihat keakuratan model diskret yang telah dibangun untuk nilai parameter yang lain. Penelitian selanjutnya juga dapat mengembangkan metode diskretisasi lainnya.



DAFTAR PUSTAKA

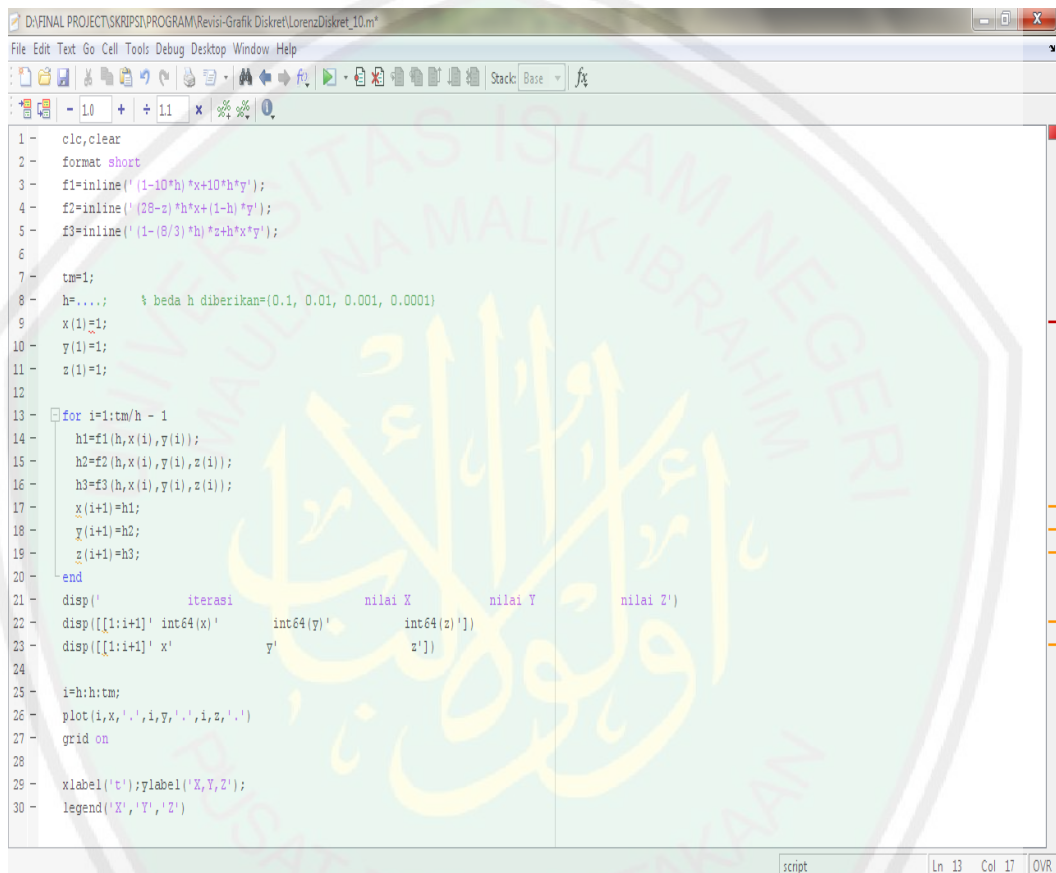
- Abdullah Bin Muhammad. 2007. *Tafsir Ibnu Katsir Jilid 7*. Bogor: Pustaka Imam Asy-Syafii.
- Al-Jazairi, Syaikh Abu Bakar Jabir. 2009. *Tafsir Al-Quran Al-Aisar Jilid 6*. Jakarta: Darus Sunnah Press.
- Al-Maragi, Ahmad Musthafa. 1992. *Tafsir Al-Maragi Juz XXIV*. Semarang: Toha Putra.
- Al-Qurthubi, Syaikh Imam. 2008. *Tafsir Al-Qurthubi Jilid 10*. Jakarta: Pustaka Azzam.
- Al-Qurthubi, Syaikh Imam. 2009. *Tafsir Al-Qurthubi*. Penj. Fathurrahman Abdul Hamid dkk. Jakarta: Pustaka Azzam.
- Anonim. TT. Three Dimensional Systems Lecture 6: The Lorenz Equations. www.atm.ox.ac.uk/user/read/chaos/lect6.pdf diakses tanggal 5 Desember 2011
- Dalmedico, Amy dahan. 2001. History and Epistemology of Models: Meteorology (1946-1963) as a Case Study. *Arch. Hist. Exact Sci.* 55 (2001) 395–422. Springer-Verlag 2001.
- Danforth, Christopher A. 2001. *Why the Weather is Unpredictable, An Experimental and Theoretical Study of The Lorenz Equations*. Lewiston: The Faculty of The Department of Mathematics ang The Department of Physics Bates College.
- Froberg, Carl Erik. 1964. *Introduction to Numerical Analysis*. London: Addison-Wesley Publishing Company Inc.
- Goldberg, Samuel. 1958. *Introduction to Difference Equations*. New York: John Wiley & Son.
- Hariyanto, dkk. 1992. *Persamaan Diferensial Biasa*. Malang: Universitas Terbuka
- Liu dan Hussain. TT. *Discretization: An Enabling Technique*. Arizona: Departement of Computer Science and Engineering-Arizona State University
- Meyer, Walter J. 1985. *Concept of Mathematical Modeling*. New York: McGraw-Hill Book Company.
- Musthafa, Muhammad Bishri. 2010. Udara dalam Al-Quran. Malang: UIN Malang. <http://blog.uin-malang.ac.id>. diakses tanggal 15 November 2011.

- O.Knill. TT. The Lorenz System. www.math.harvard.edu/~118r.../lorenz2.pdf. diakses tanggal 5 Desember 2011.
- Pagalay, Usman. 2009. *Mathematical Modelling: Aplikasi pada kedokteran, Imunologi, Biologi, Ekonomi, dan Perikanan*. Malang: UIN-Malang Press.
- Quthb, Sayyid. 2004. *Tafsir fi zhilalil-Qu'ran di bawah Naungan Al-Qur'an jilid 10*. Penj. As'ad Yasin. Jakarta: Gema Insani Press.
- Quthb, Sayyid. 2004. *Tafsir fi zhilalil-Qu'ran di bawah Naungan Al-Qur'an jilid 9*. Penj. As'ad Yasin. Jakarta: Gema Insani Press.
- Ross, Shepley L. 1984. *Differential Equations Third Edition*. New York: John Wiley & Son.
- Sazali, Munawir. 2009. Analisis Kestabilan pada Persamaan Lorenz. *Skripsi Tidak Diterbitkan*. Malang: Jurusan Matematika FMIPA UM.
- Schuster dan Just. 2005. *Deterministic Chaos An Introduction*. Weinheim: Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA
- Shihab, Quraish. 2002. *Tafsir Al-Mishbah*. Jakarta: Lentera Hati.
- Sulaiman. 2000. *Turbulensi Laut Banda*. Jakarta: Badan Pengkajian dan Penerapan Teknologi (BPPT).
- Sunnerville, Ericka. 2004. *Differential Functions*. http://pirate.shu.edu/~sunnerville_differentiation.pdf. Diakses tanggal 5 Desember 2011
- Tim Penyusun. 2008. *Kamus Bahasa Indonesia*. Jakarta: Pusat Bahasa
- Tirtana, Muhammad Arif. 2008. Diskretisasi Model Dinamik Kontinu. *Skripsi Diterbitkan*. Bandung: Departemen Matematika Fakultas F-MIPA Institut Pertanian Bogor.
- Varberg dan Purcell, Edwin J. 2003. *Calculus 8th Edition*. Terjemahan I Nyoman Susila. Jakarta: Erlangga
- Williams, Garnett P. 1997. *Chaos Theory Tamed*. London: Tailor and Francis
- Wyle. 1985. *Differential Equation*. Singapore: Mc Graw-Hill

LAMPIRAN

Lampiran 1

Program MATLAB untuk Grafik Diskret pada Gambar 3.2 bagian (a.1), (b.1), (c.1), (d.1):

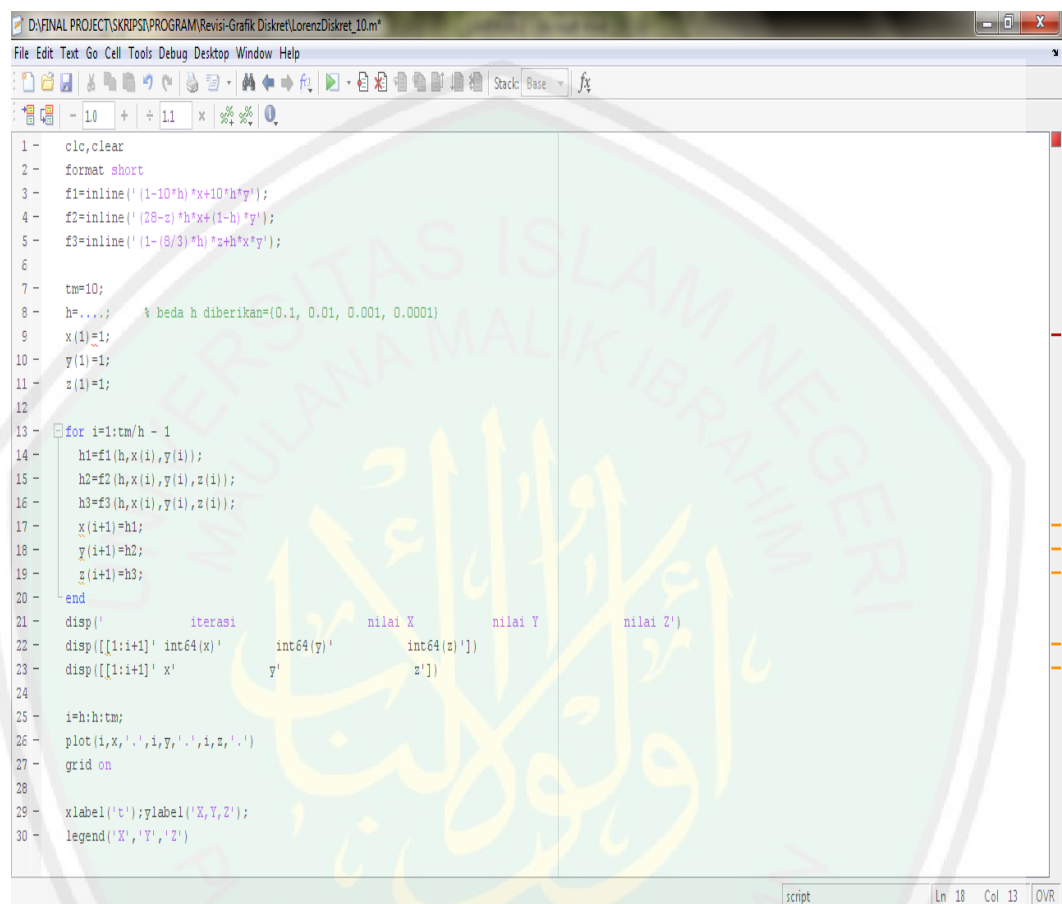


```

1 - clc,clear
2 - format short
3 - f1=inline('(1-10*h)*x+10*h*y');
4 - f2=inline('(28-z)*h*x+(1-h)*y');
5 - f3=inline('(1-(8/3)*h)*z+h*x*y');
6
7 - tm=1;
8 - h=...; % beda h diberikan={0.1, 0.01, 0.001, 0.0001}
9 - x(1)=1;
10 - y(1)=1;
11 - z(1)=1;
12
13 - for i=1:tm/h - 1
14 -     h1=f1(h,x(i),y(i));
15 -     h2=f2(h,x(i),y(i),z(i));
16 -     h3=f3(h,x(i),y(i),z(i));
17 -     x(i+1)=h1;
18 -     y(i+1)=h2;
19 -     z(i+1)=h3;
20 - end
21 - disp('          iterasi          nilai X          nilai Y          nilai Z')
22 - disp(['[1:i+1]' int64(x)'          int64(y)'          int64(z)'])
23 - disp(['[1:i+1]' x'          y'          z'])
24
25 - i=h:tm;
26 - plot(i,x,'.',i,y,'.',i,z,'.')
27 - grid on
28
29 - xlabel('t');ylabel('X,Y,Z');
30 - legend('X','Y','Z')
  
```

Lampiran 2

Program MATLAB untuk Grafik Diskret pada Gambar 3.3 bagian (e.1), (f.1), (g.1), (h.1):

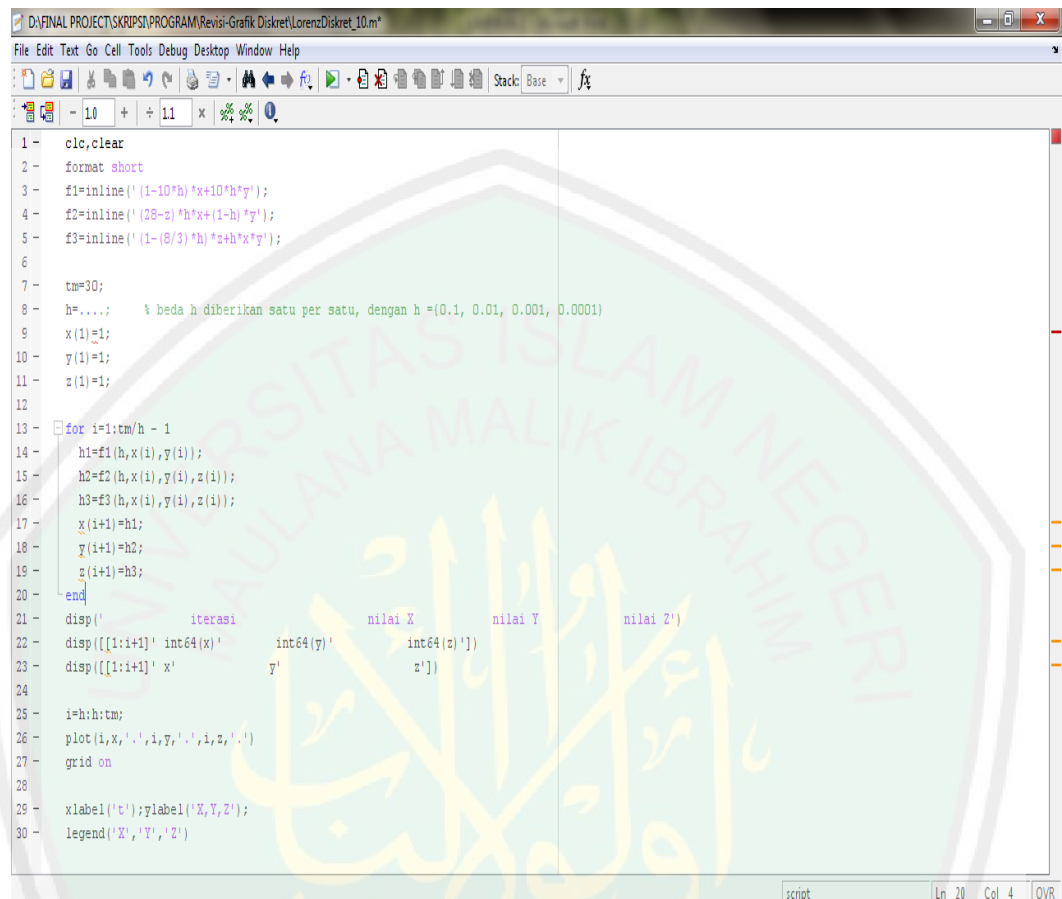


```

1 - clc,clear
2 - format short
3 - f1=inline('(1-10*h)*x+10*h*y');
4 - f2=inline('(28-z)*h*x+(1-h)*y');
5 - f3=inline('(1-(8/3)*h)*z+h*x*y');
6
7 - tm=10;
8 - h=...; % beda h diberikan(0.1, 0.01, 0.001, 0.0001)
9 - x(1)=1;
10 - y(1)=1;
11 - z(1)=1;
12
13 - for i=1:tm/h - 1
14 -     h1=f1(h,x(i),y(i));
15 -     h2=f2(h,x(i),y(i),z(i));
16 -     h3=f3(h,x(i),y(i),z(i));
17 -     x(i+1)=h1;
18 -     y(i+1)=h2;
19 -     z(i+1)=h3;
20 - end
21 - disp('          iterasi          nilai X          nilai Y          nilai Z')
22 - disp(['[1:i+1]' int64(x)'          int64(y)'          int64(z)'])
23 - disp(['[1:i+1]' x'          y'          z'])
24
25 - i=h:tm;
26 - plot(i,x','.',i,y','.',i,z','.')
27 - grid on
28
29 - xlabel('t');ylabel('X,Y,Z');
30 - legend('X','Y','Z')
  
```

Lampiran 3

Program MATLAB untuk Grafik Diskret pada Gambar 3.4:

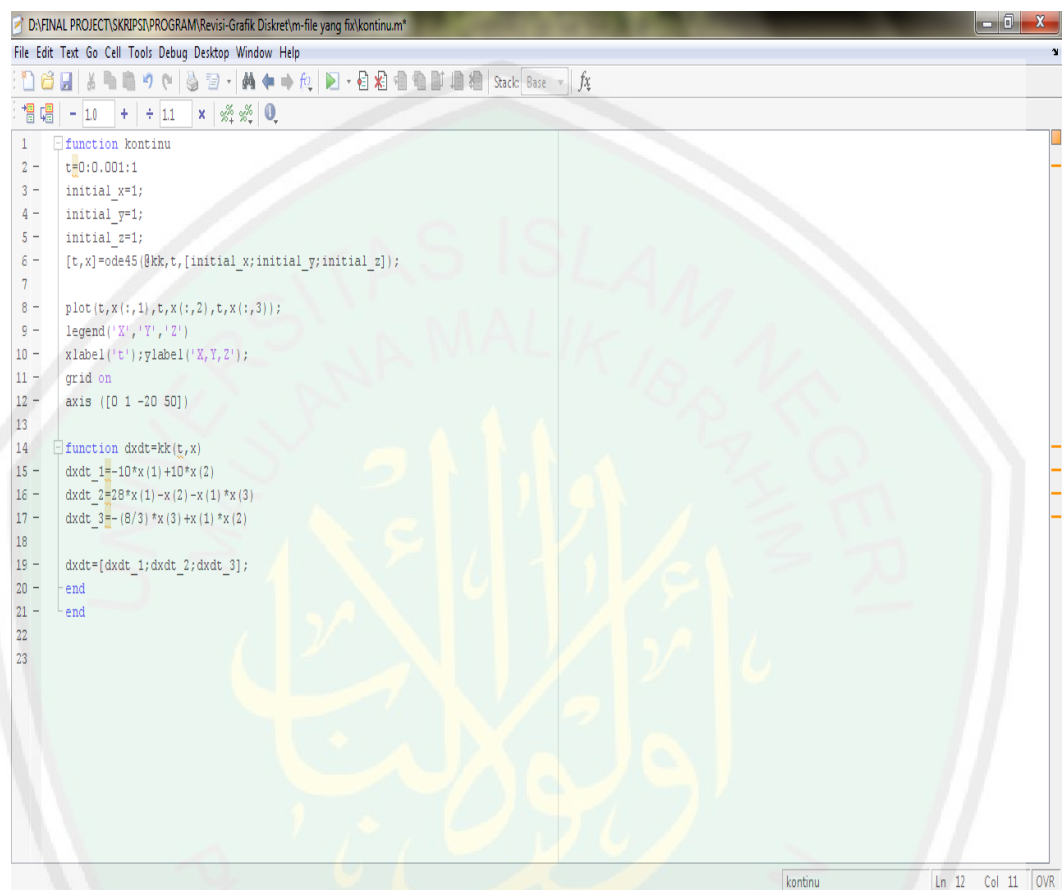


```

1  clc,clear
2  format short
3  f1=inline('(1-10*h)*x+10*h*y');
4  f2=inline('(28-z)*h*x+(1-h)*y');
5  f3=inline('(1-(8/3)*h)*z+h*x*y');
6
7  tm=30;
8  h=...; % beda h diberikan satu per satu, dengan h =(0.1, 0.01, 0.001, 0.0001)
9  x(1)=1;
10 y(1)=1;
11 z(1)=1;
12
13 for i=1:tm/h - 1
14     h1=f1(h,x(i),y(i));
15     h2=f2(h,x(i),y(i),z(i));
16     h3=f3(h,x(i),y(i),z(i));
17     x(i+1)=h1;
18     y(i+1)=h2;
19     z(i+1)=h3;
20 end
21 disp('          iterasi          nilai X          nilai Y          nilai Z')
22 disp(['[1:i+1]' int64(x)'          int64(y)'          int64(z)'])
23 disp(['[1:i+1]' x'          y'          z'])
24
25 i=h:tm;
26 plot(i,x','.',i,y','.',i,z','.')
27 grid on
28
29 xlabel('t');ylabel('X,Y,Z');
30 legend('X','Y','Z')
  
```

Lampiran 4

Program MATLAB untuk Grafik Kontinu Pada Gambar 3.2 bagian (a.2), (b.2), (c.2), (d.2):



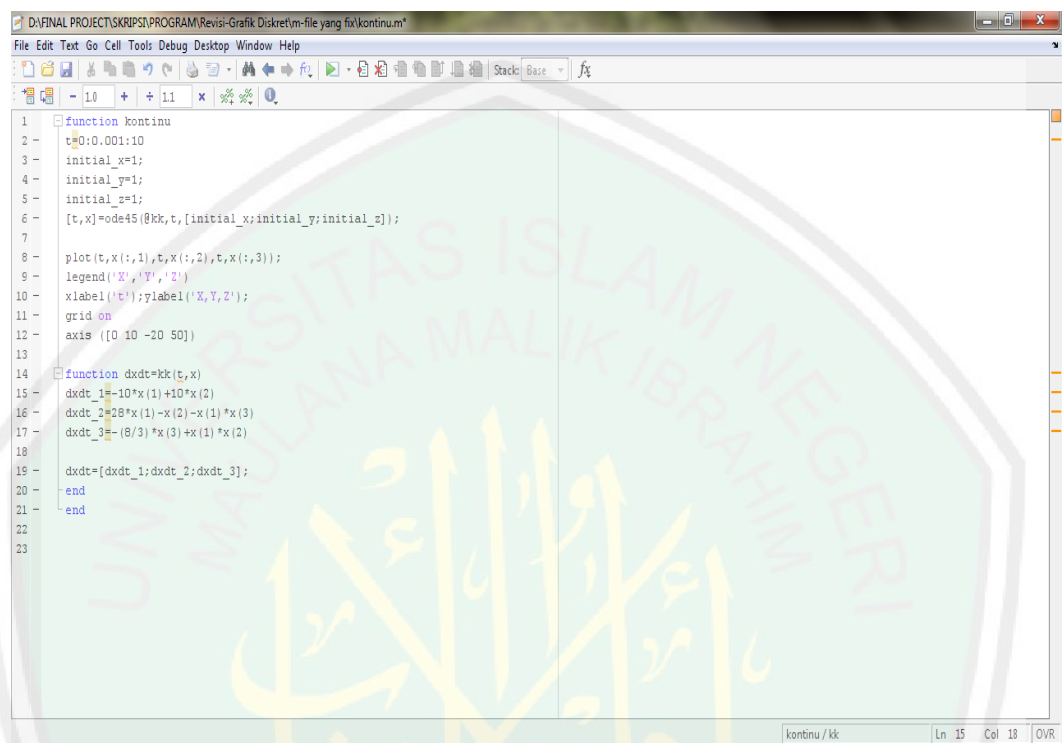
```

1 function kontinu
2 t=0:0.001:1
3 initial_x=1;
4 initial_y=1;
5 initial_z=1;
6 [t,x]=ode45(@kk,t,[initial_x;initial_y;initial_z]);
7
8 plot(t,x(:,1),t,x(:,2),t,x(:,3));
9 legend('X','Y','Z')
10 xlabel('t');ylabel('X,Y,Z');
11 grid on
12 axis ([0 1 -20 50])
13
14 function dxdt=kk(t,x)
15 dxdt_1=-10*x(1)+10*x(2)
16 dxdt_2=28*x(1)-x(2)-x(1)*x(3)
17 dxdt_3=-(8/3)*x(3)+x(1)*x(2)
18
19 dxdt=[dxdt_1;dxdt_2;dxdt_3];
20 end
21 end
22
23

```

Lampiran 5

Program MATLAB untuk Grafik Kontinu Pada Gambar 3.3 bagian (e.2), (f.2), (g.2), (h.2):



```

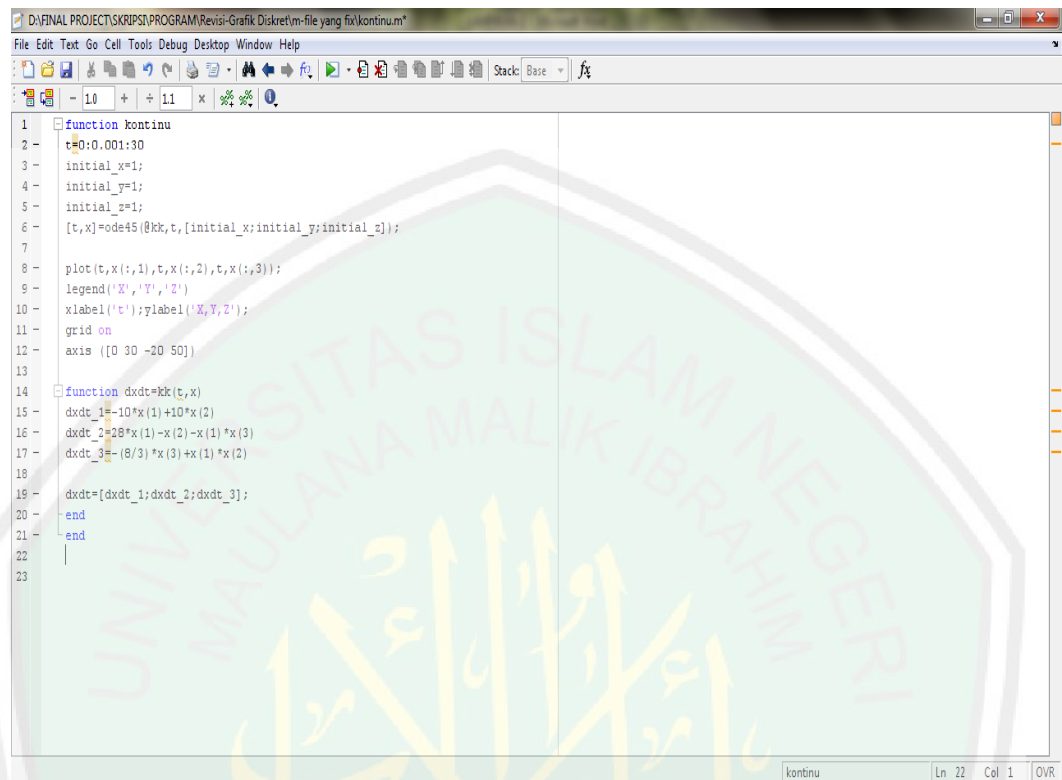
1 function kontinu
2 t=0:0.001:10
3 initial_x=1;
4 initial_y=1;
5 initial_z=1;
6 [t,x]=ode45(@kk,t,[initial_x;initial_y;initial_z]);
7
8 plot(t,x(:,1),t,x(:,2),t,x(:,3));
9 legend('X','Y','Z');
10 xlabel('t');ylabel('X,Y,Z');
11 grid on
12 axis ([0 10 -20 50])
13
14 function dxdt=kk(t,x)
15 dxdt_1=-10*x(1)+10*x(2)
16 dxdt_2=28*x(1)-x(2)-x(1)*x(3)
17 dxdt_3=-(8/3)*x(3)+x(1)*x(2)
18
19 dxdt=[dxdt_1;dxdt_2;dxdt_3];
20 end
21 end
22
23

```

The image shows a MATLAB script editor window titled 'DA\FINAL PROJECT\SKRIPSI\PROGRAM\Revisi-Grafik Diskret\m-file yang fix\kontinu.m'. The script defines a function 'kontinu' that solves a system of ordinary differential equations (ODEs) using the 'ode45' solver. The time interval is from 0 to 10 with a step size of 0.001. The initial conditions are x=1, y=1, and z=1. The solution is plotted as three lines (X, Y, Z) against time (t). The plot area is set with a grid and axes ranging from 0 to 10 on the x-axis and -20 to 50 on the y-axis. A sub-function 'kk' is defined to calculate the derivatives dxdt_1, dxdt_2, and dxdt_3 based on the current state x.

Lampiran 6

Program MATLAB untuk Grafik Kontinu Pada Gambar 3.4:



```

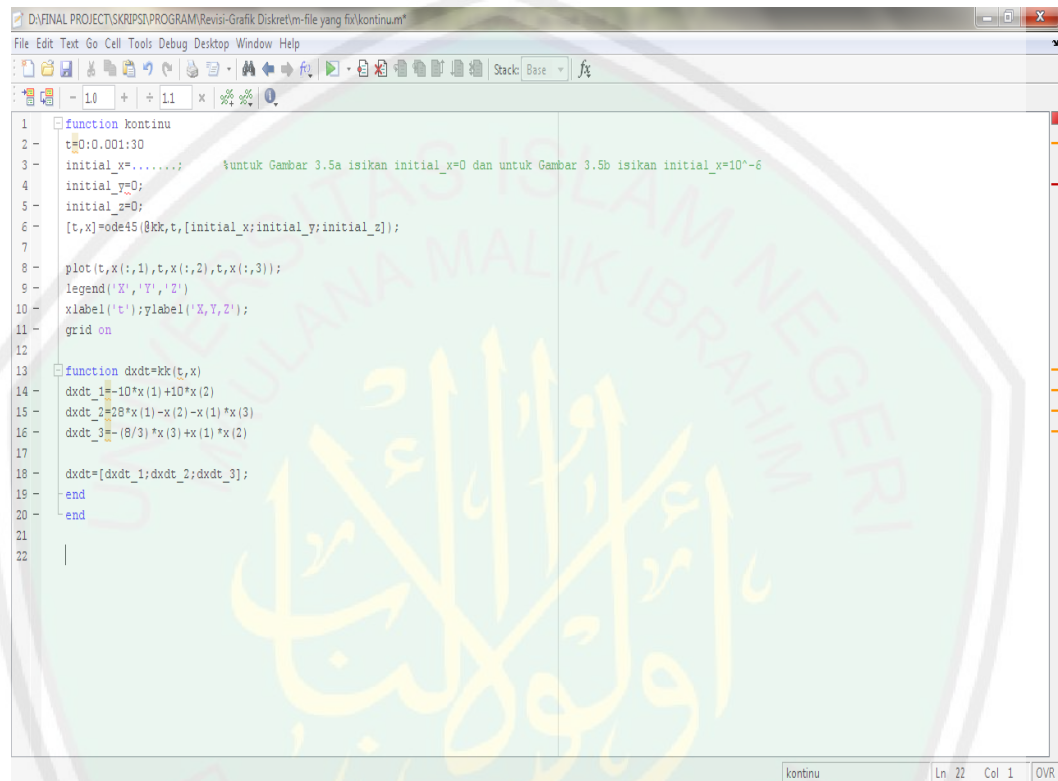
1 function kontinu
2 t=0:0.001:30
3 initial_x=1;
4 initial_y=1;
5 initial_z=1;
6 [t,x]=ode45(@kk,t,[initial_x;initial_y;initial_z]);
7
8 plot(t,x(:,1),t,x(:,2),t,x(:,3));
9 legend('X','Y','Z')
10 xlabel('t');ylabel('X,Y,Z');
11 grid on
12 axis ([0 30 -20 50])
13
14 function dxdt=kk(t,x)
15 dxdt_1=-10*x(1)+10*x(2)
16 dxdt_2=20*x(1)-x(2)-x(1)*x(3)
17 dxdt_3=-(8/3)*x(3)+x(1)*x(2)
18
19 dxdt=[dxdt_1;dxdt_2;dxdt_3];
20 end
21 end
22
23

```

Lampiran 7

Program MATLAB untuk Grafik Titik Tetap Model Kontinu Sebelum dan Sesudah Mendapat Gangguan di sekitar $(X^*, Y^*, Z^*) = (0,0,0)$ Pada Gambar 3.5

(a) dan (b):



```

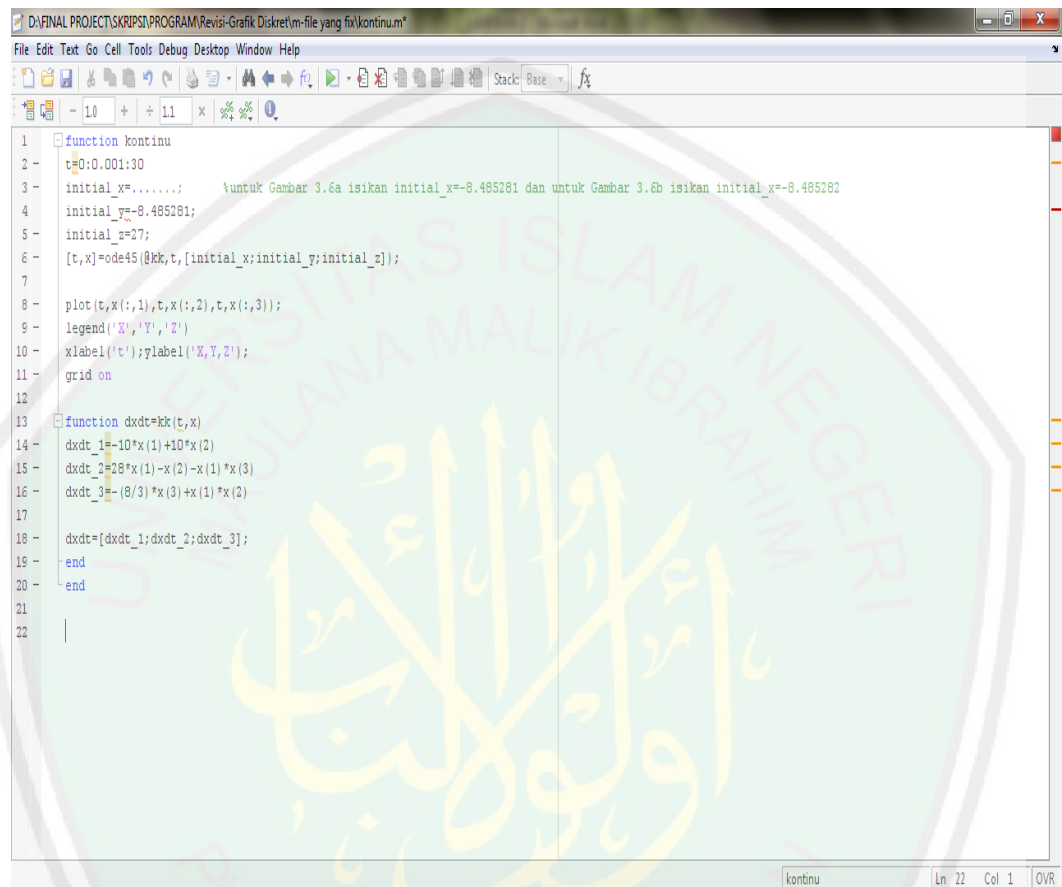
1 function kontinu
2 t=0:0.001:30
3 initial_x=.....; %untuk Gambar 3.5a isikan initial_x=0 dan untuk Gambar 3.5b isikan initial_x=10^-6
4 initial_y=0;
5 initial_z=0;
6 [t,x]=ode45(@kk,t,[initial_x;initial_y;initial_z]);
7
8 plot(t,x(:,1),t,x(:,2),t,x(:,3));
9 legend('X','Y','Z');
10 xlabel('t');ylabel('X,Y,Z');
11 grid on
12
13 function dxdt=kk(t,x)
14 dxdt_1=-10*x(1)+10*x(2)
15 dxdt_2=28*x(1)-x(2)-x(1)*x(3)
16 dxdt_3=-(8/3)*x(3)+x(1)*x(2)
17
18 dxdt=[dxdt_1;dxdt_2;dxdt_3];
19 end
20 end
21
22

```

Lampiran 8

Program MATLAB untuk Grafik Titik Tetap Model Kontinu pada Gambar 3.6

(a) dan (b):



```

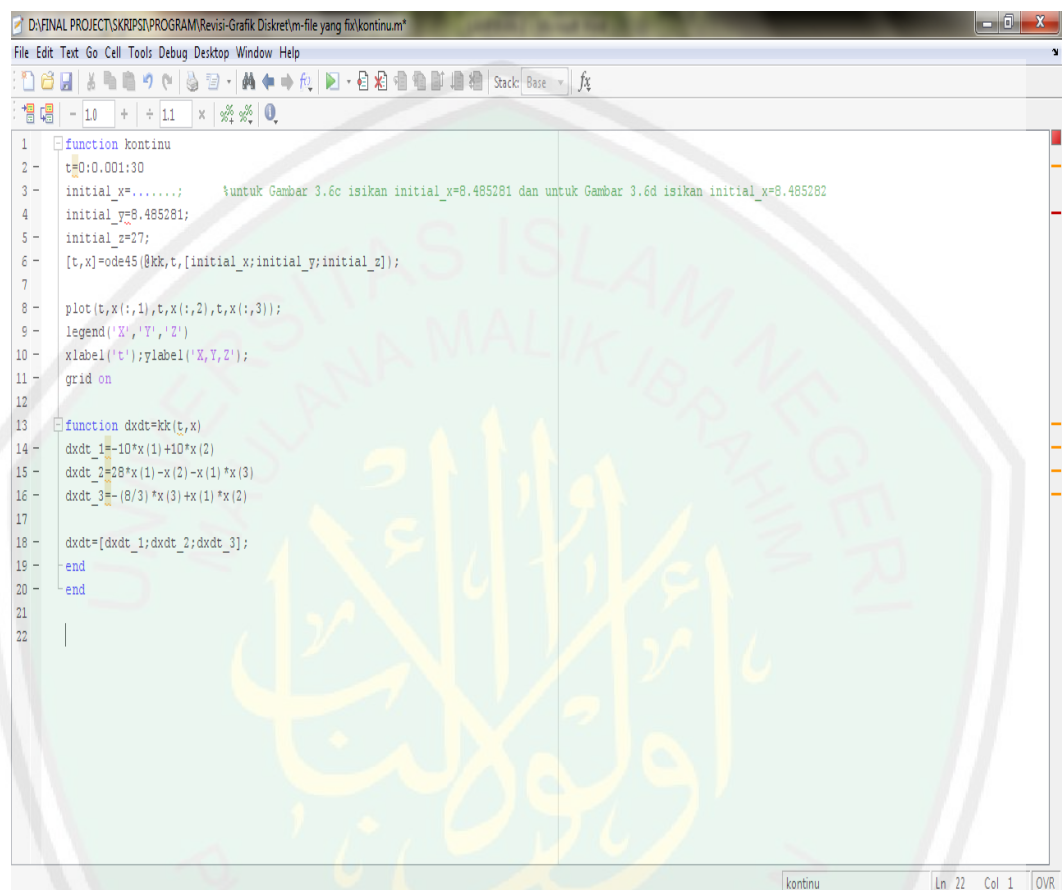
1 function kontinu
2 t=0:0.001:30
3 initial_x=.....; %untuk Gambar 3.6a isikan initial_x=-8.485281 dan untuk Gambar 3.6b isikan initial_x=-8.485282
4 initial_y=-8.485281;
5 initial_z=27;
6 [t,x]=ode45(@kk,t,[initial_x;initial_y;initial_z]);
7
8 plot(t,x(:,1),t,x(:,2),t,x(:,3));
9 legend('X','Y','Z')
10 xlabel('t');ylabel('X,Y,Z');
11 grid on
12
13 function dxdt=kk(t,x)
14 dxdt_1=-10*x(1)+10*x(2)
15 dxdt_2=28*x(1)-x(2)-x(1)*x(3)
16 dxdt_3=-(8/3)*x(3)+x(1)*x(2)
17
18 dxdt=[dxdt_1;dxdt_2;dxdt_3];
19 end
20 end
21
22

```

Lampiran 9

Program MATLAB untuk Grafik Titik Tetap Model Kontinu pada Gambar 3.6

(c) dan (d):



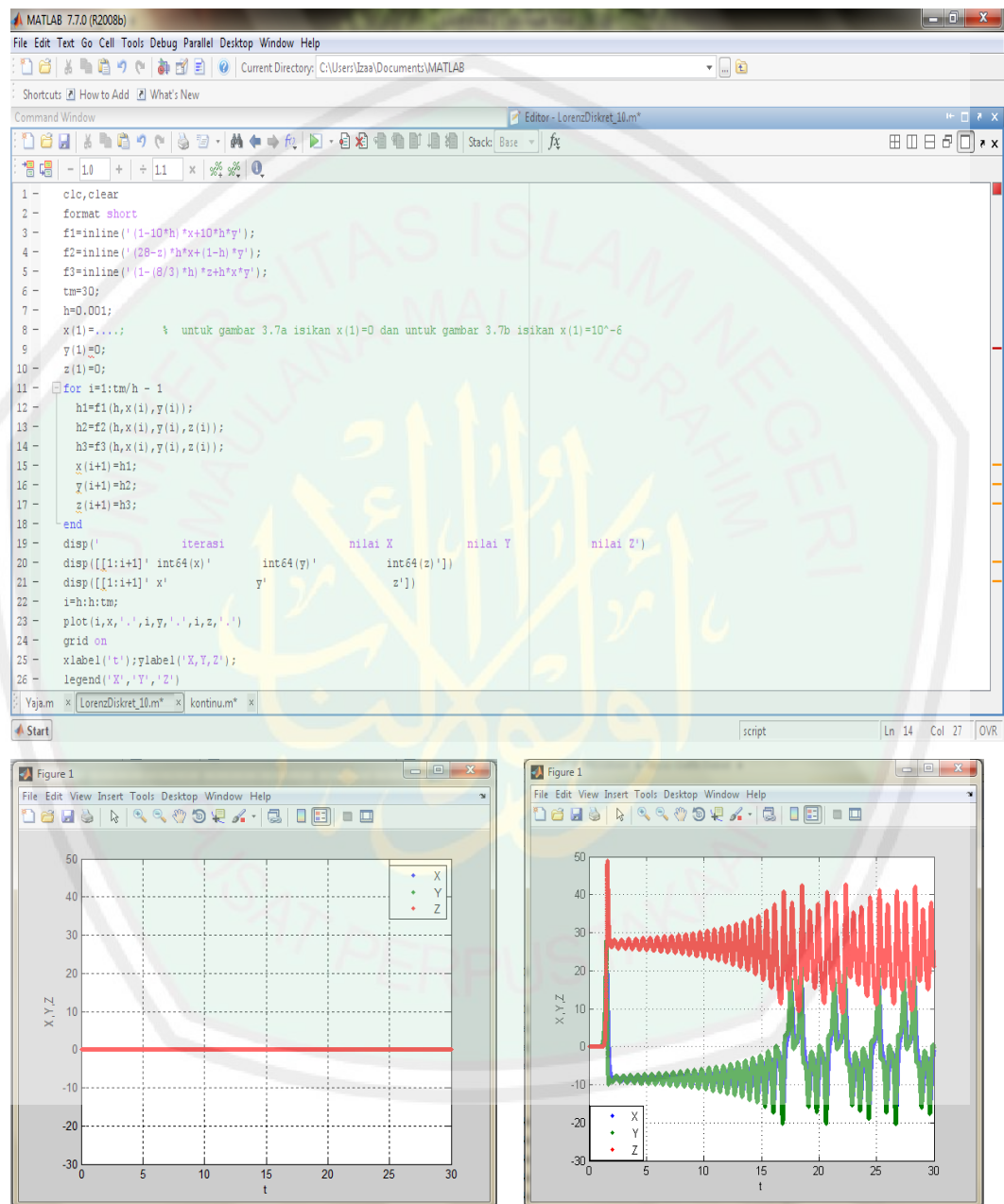
```

1 function kontinu
2 t=0:0.001:30
3 initial_x=.....; %untuk Gambar 3.6c isikan initial_x=8.485281 dan untuk Gambar 3.6d isikan initial_x=8.485282
4 initial_y=8.485281;
5 initial_z=27;
6 [t,x]=ode45(@kk,t,[initial_x;initial_y;initial_z]);
7
8 plot(t,x(:,1),t,x(:,2),t,x(:,3));
9 legend('X','Y','Z')
10 xlabel('t');ylabel('X,Y,Z');
11 grid on
12
13 function dxdt=kk(t,x)
14 dxdt_1=-10*x(1)+10*x(2)
15 dxdt_2=28*x(1)-x(2)-x(1)*x(3)
16 dxdt_3=-(8/3)*x(3)+x(1)*x(2)
17
18 dxdt=[dxdt_1;dxdt_2;dxdt_3];
19 end
20 end
21
22

```

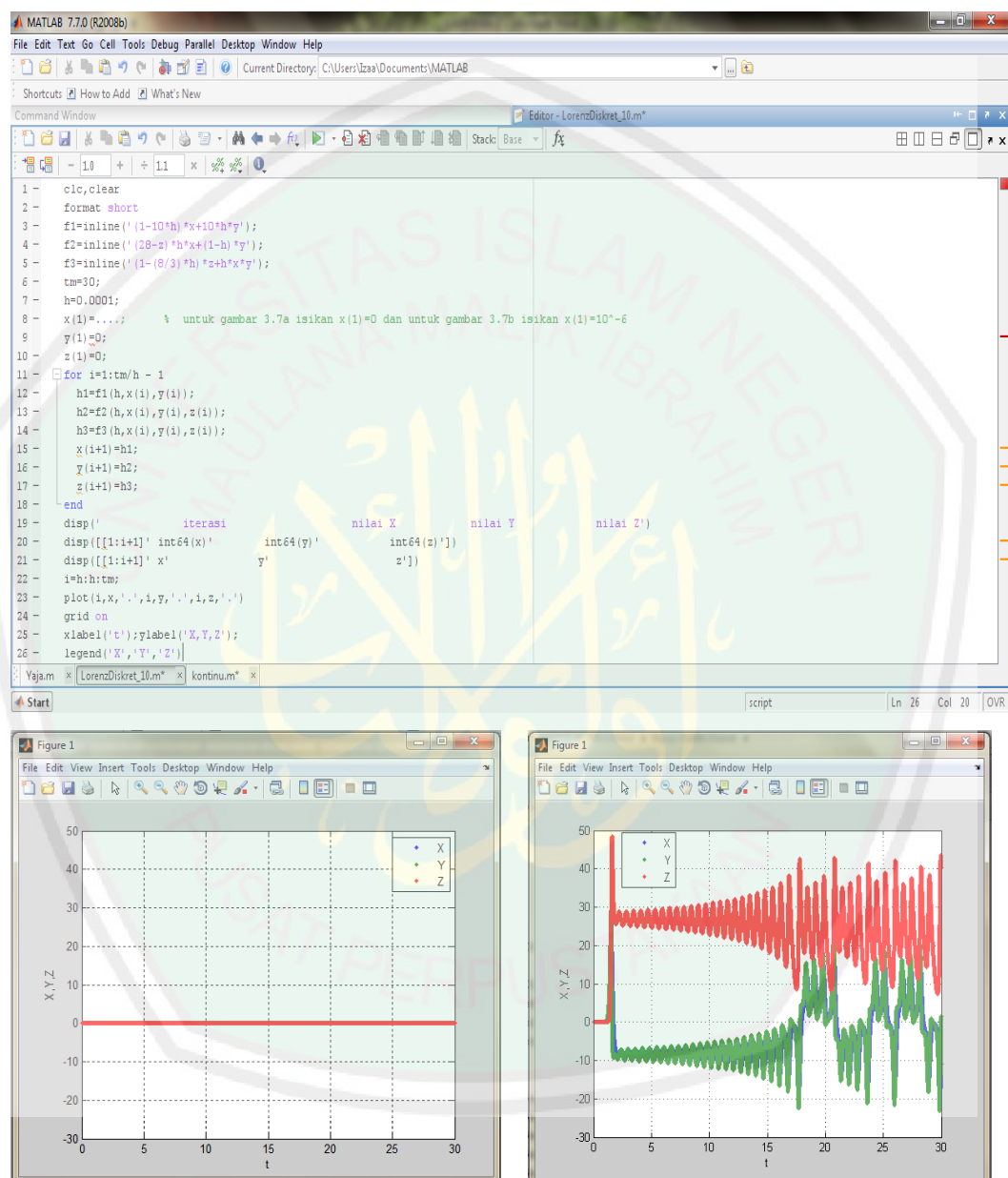
Lampiran 10

Program MATLAB untuk Grafik Titik Tetap dari Model Diskret dengan $h = 0.001$ pada Gambar 3.7 (a) dan (b):



Lampiran 11

Program MATLAB untuk Grafik Titik Tetap Model Diskret dengan $h = 0.0001$ pada Gambar 3.8 (a) dan (b):



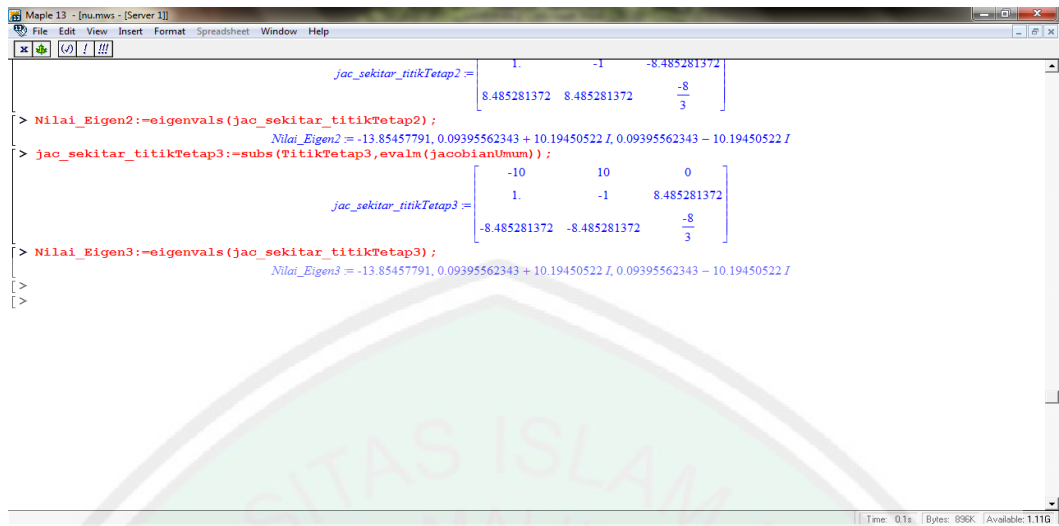
Program MAPLE untuk Perhitungan Titik Keseimbangan dan Analisis

```

Maple 13 - [numws - [Server 1]]
File Edit View Insert Format Spreadsheet Window Help
Normal Times New Roman 12 B I U
> restart;
Menuliskan Persamaan:
> dx:=-10*x+10*y;
dx:=-10 x + 10 y
> dy:=28*x-y-x*z;
dy:=28 x - y - x z
> dz:=- (8/3) *z+x*y;
dz:=- 8 z / 3 + x y
Menghitung Titik Tetap:
> fixpoint:=solve((dx,dy,dz), (x,y,z));
fixpoint:={x=0,y=0,z=0}, {x=6 RootOf(-2+_Z^2,label=_L3),y=6 RootOf(-2+_Z^2,label=_L3),z=27}
> point1:=fixpoint[1]; point2:=fixpoint[2];
point1:={x=0,y=0,z=0}
point2:={x=6 RootOf(-2+_Z^2,label=_L3),y=6 RootOf(-2+_Z^2,label=_L3),z=27}
> evalf(point2);
{x=8.485281372,y=8.485281372,z=27}
> TitikTetap1:=point1; TitikTetap2:=evalf(point2); TitikTetap3:={x=-8.485281372, y=-8.485281372, z=27.};
>
TitikTetap1:={x=0,y=0,z=0}
TitikTetap2:={x=8.485281372,y=8.485281372,z=27.}
TitikTetap3:={x=-8.485281372,y=-8.485281372,z=27.}

Maple 13 - [numws - [Server 1]]
File Edit View Insert Format Spreadsheet Window Help
> with(linalg);
Menganalisis Kestabilan:
> jacobianUmum:=jacobian([dx,dy,dz], [x,y,z]);
jacobianUmum:=
[ -10  10  0
 28 - z  -1  -x
  y  x  -8/3 ]
> jac_sekitar_titikTetap1:=subs(TitikTetap1,evalm(jacobianUmum));
jac_sekitar_titikTetap1:=
[ -10  10  0
 28  -1  0
  0  0  -8/3 ]
> Nilai_Eigen1:=eigenvals(jac_sekitar_titikTetap1);evalf(Nilai_Eigen1);
Nilai_Eigen1:=-8/3, -11/2 + sqrt(1201)/2, -11/2 - sqrt(1201)/2
-2.666666667, 11.82772345, -22.82772345
> jac_sekitar_titikTetap2:=subs(TitikTetap2,evalm(jacobianUmum));
jac_sekitar_titikTetap2:=
[ -10  10  0
  1.  -1  -8.485281372
 8.485281372  8.485281372  -8/3 ]
> Nilai_Eigen2:=eigenvals(jac_sekitar_titikTetap2);
Nilai_Eigen2:=-13.85457791, 0.09395562343 + 10.19450522 I, 0.09395562343 - 10.19450522 I

```



```

Maple 13 - [nu.mws - [Server 1]]
File Edit View Insert Format Spreadsheet Window Help
[Icons]

jac_sekitar_titikTetap2 :=

$$\begin{bmatrix} 1. & -1 & -8.485281372 \\ 8.485281372 & 8.485281372 & -\frac{8}{3} \end{bmatrix}$$

> Nilai_Eigen2:=eigenvals(jac_sekitar_titikTetap2);
      Nilai_Eigen2 := -13.85457791, 0.09395562343 + 10.19450522 I, 0.09395562343 - 10.19450522 I
> jac_sekitar_titikTetap3:=subs(TitikTetap3,evalm(jacobianUmum));
      jac_sekitar_titikTetap3 :=

$$\begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 1. & -1 & 8.485281372 \\ -8.485281372 & -8.485281372 & -\frac{8}{3} \end{bmatrix}$$

> Nilai_Eigen3:=eigenvals(jac_sekitar_titikTetap3);
      Nilai_Eigen3 := -13.85457791, 0.09395562343 + 10.19450522 I, 0.09395562343 - 10.19450522 I
>
>

```

Time: 0.1s Bytes: 896K Available: 1.11G



Program MAPLE untuk Perhitungan Titik Kesetimbangan dan Analisis Kestabilan setelah mendapat gangguan di sekitar $(X^*, Y^*, Z^*) = (0,0,0)$:

[illegible]

Lampiran 14

Output Program MATLAB untuk model diskret dengan $h = 0.1$ dengan $0 \leq t \leq$

1 menit:

iterasi	nilai X	nilai Y	nilaiZ	1.0e+005 *			
1	1	1	1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	1	4	1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	4	6	1	0.0000	0.0000	0.0001	0.0000
4	6	15	3	0.0000	0.0001	0.0002	0.0000
5	15	29	11	0.0001	0.0002	0.0003	0.0001
6	29	51	51	0.0001	0.0003	0.0005	0.0005
7	51	-20	184	0.0001	0.0005	-0.0002	0.0018
8	-20	-817	31	0.0001	-0.0002	-0.0082	0.0003
9	-817	-729	1675	0.0001	-0.0082	-0.0073	0.0168
10	-729	133904	60747	0.0001	-0.0073	1.3390	0.6075

Lampiran 15

Output Program MATLAB untuk model diskret dengan $h = 0.1$ dengan $0 \leq t \leq$

10 menit:

iterasi	nilai X	nilai Y	nilai Z
(1.0e+284 *)			
1	1	1	1
2	1	4	1
3	4	6	1
4	6	15	3
5	15	29	11
6	29	51	51
7	51	-20	184
8	-20	-817	31
9	-817	-729	1675
10	-729	133904	60747
11	133904	4544848	-9712491
12	4544848	130058543968	60850177539
13	130058543968	-27655361577448204	59109671423742376
14	-27655361577448204	-9223372036854775808	-9223372036854775808
15	-9223372036854775808	-9223372036854775808	9223372036854775807
16	-9223372036854775808	9223372036854775807	9223372036854775807
17	9223372036854775807	9223372036854775807	-9223372036854775808
18	9223372036854775807	9223372036854775807	9223372036854775807
19	9223372036854775807	-9223372036854775808	9223372036854775807
20	-9223372036854775808	-9223372036854775808	-9223372036854775808
21	-9223372036854775808	-9223372036854775808	0
22	0	0	0
23	0	0	0
24	0	0	0
25	0	0	0
26	0	0	0
27	0	0	0
28	0	0	0
29	0	0	0
30	0	0	0
31	0	0	0
32	0	0	0
33	0	0	0
34	0	0	0

35	0	0	0
36	0	0	0
37	0	0	0
38	0	0	0
39	0	0	0
40	0	0	0
41	0	0	0
42	0	0	0
43	0	0	0
44	0	0	0
45	0	0	0
46	0	0	0
47	0	0	0
48	0	0	0
49	0	0	0
50	0	0	0
51	0	0	0
52	0	0	0
53	0	0	0
54	0	0	0
55	0	0	0
56	0	0	0
57	0	0	0
58	0	0	0
59	0	0	0
60	0	0	0
61	0	0	0
62	0	0	0
63	0	0	0
64	0	0	0
65	0	0	0
66	0	0	0
67	0	0	0
68	0	0	0
69	0	0	0
70	0	0	0
71	0	0	0
72	0	0	0
73	0	0	0
74	0	0	0
75	0	0	0

76	0	0	0
77	0	0	0
78	0	0	0
79	0	0	0
80	0	0	0
81	0	0	0
82	0	0	0
83	0	0	0
84	0	0	0
85	0	0	0
86	0	0	0
87	0	0	0
88	0	0	0
89	0	0	0
90	0	0	0
91	0	0	0
92	0	0	0
93	0	0	0
94	0	0	0
95	0	0	0
96	0	0	0
97	0	0	0
98	0	0	0
99	0	0	0
100	0	0	0

Lampiran 16

Output program Matlab untuk model diskret dengan $h = 0.1$ waktu $0 \leq t \leq 30$ menit:

iterasi	nilai X	nilai Y	nilai Z				
1	1	1	1				
2	1	4	1				
3	4	6	1				
4	6	15	3				
5	15	29	11				
6	29	51	51				
7	51	-20	184				
8	-20	-817	31				
9	-817	-729	1675				
10	-729	133904	60747				
11	133904	4544848	-9712491				
12	4544848	130058543968	60850177539				
13	130058543968	-27655361577448204	59109671423742376				
14	-27655361577448204	-9223372036854775808	-9223372036854775808				
15	-9223372036854775808	-9223372036854775808	9223372036854775807				
16	-9223372036854775808	9223372036854775807	9223372036854775807				
17	9223372036854775807	9223372036854775807	-9223372036854775808				
18	9223372036854775807	9223372036854775807	9223372036854775807				
19	9223372036854775807	-9223372036854775808	9223372036854775807				
20	-9223372036854775808	-9223372036854775808	-9223372036854775808				
21	-9223372036854775808	-9223372036854775808	0				
22	0	0	0				
23	0	0	0				
24	0	0	0				
25	0	0	0				
26	0	0	0				
27	0	0	0				
28	0	0	0				
29	0	0	0	168	0	0	0
30	0	0	0	169	0	0	0
31	0	0	0	170	0	0	0
32	0	0	0	171	0	0	0
33	0	0	0	172	0	0	0
34	0	0	0	173	0	0	0
35	0	0	0	174	0	0	0
36	0	0	0	175	0	0	0
37	0	0	0	176	0	0	0
38	0	0	0	177	0	0	0
39	0	0	0	178	0	0	0
40	0	0	0	179	0	0	0
41	0	0	0	180	0	0	0
42	0	0	0	181	0	0	0
43	0	0	0	182	0	0	0
44	0	0	0	183	0	0	0
45	0	0	0	184	0	0	0
46	0	0	0	185	0	0	0
47	0	0	0	186	0	0	0

48	0	0	0	187	0	0	0
49	0	0	0	188	0	0	0
50	0	0	0	189	0	0	0
51	0	0	0	190	0	0	0
52	0	0	0	191	0	0	0
53	0	0	0	192	0	0	0
54	0	0	0	193	0	0	0
55	0	0	0	194	0	0	0
56	0	0	0	195	0	0	0
57	0	0	0	196	0	0	0
58	0	0	0	197	0	0	0
59	0	0	0	198	0	0	0
60	0	0	0	199	0	0	0
61	0	0	0	200	0	0	0
62	0	0	0	201	0	0	0
63	0	0	0	202	0	0	0
64	0	0	0	203	0	0	0
65	0	0	0	204	0	0	0
66	0	0	0	205	0	0	0
67	0	0	0	206	0	0	0
68	0	0	0	207	0	0	0
69	0	0	0	208	0	0	0
70	0	0	0	209	0	0	0
71	0	0	0	210	0	0	0
72	0	0	0	211	0	0	0
73	0	0	0	212	0	0	0
74	0	0	0	213	0	0	0
75	0	0	0	214	0	0	0
76	0	0	0	215	0	0	0
77	0	0	0	216	0	0	0
78	0	0	0	217	0	0	0
79	0	0	0	218	0	0	0
80	0	0	0	219	0	0	0
81	0	0	0	220	0	0	0
82	0	0	0	221	0	0	0
83	0	0	0	222	0	0	0
84	0	0	0	223	0	0	0
85	0	0	0	224	0	0	0
86	0	0	0	225	0	0	0
87	0	0	0	226	0	0	0
88	0	0	0	227	0	0	0
89	0	0	0	228	0	0	0
90	0	0	0	229	0	0	0

91	0	0	0	230	0	0	0
92	0	0	0	231	0	0	0
93	0	0	0	232	0	0	0
94	0	0	0	233	0	0	0
95	0	0	0	167	0	0	0
96	0	0	0	234	0	0	0
97	0	0	0	235	0	0	0
98	0	0	0	236	0	0	0
99	0	0	0	237	0	0	0
100	0	0	0	238	0	0	0
101	0	0	0	239	0	0	0
102	0	0	0	240	0	0	0
103	0	0	0	241	0	0	0
104	0	0	0	242	0	0	0
105	0	0	0	243	0	0	0
106	0	0	0	244	0	0	0
107	0	0	0	245	0	0	0
108	0	0	0	246	0	0	0
109	0	0	0	247	0	0	0
110	0	0	0	248	0	0	0
111	0	0	0	249	0	0	0
112	0	0	0	250	0	0	0
113	0	0	0	251	0	0	0
114	0	0	0	252	0	0	0
115	0	0	0	253	0	0	0
116	0	0	0	254	0	0	0
117	0	0	0	255	0	0	0
118	0	0	0	256	0	0	0
119	0	0	0	257	0	0	0
120	0	0	0	258	0	0	0
121	0	0	0	259	0	0	0
122	0	0	0	260	0	0	0
123	0	0	0	261	0	0	0
124	0	0	0	262	0	0	0
125	0	0	0	263	0	0	0
126	0	0	0	264	0	0	0
127	0	0	0	265	0	0	0
128	0	0	0	266	0	0	0
129	0	0	0	267	0	0	0
130	0	0	0	268	0	0	0
131	0	0	0	269	0	0	0
132	0	0	0	270	0	0	0
133	0	0	0	271	0	0	0

[illegible]

[illegible]

[illegible]

0.0000	NaN	NaN	NaN	0.0000	NaN	NaN	NaN
0.0000	NaN	NaN	NaN	0.0000	NaN	NaN	NaN
0.0000	NaN	NaN	NaN	0.0000	NaN	NaN	NaN
0.0000	NaN	NaN	NaN	0.0000	NaN	NaN	NaN
0.0000	NaN	NaN	NaN	0.0000	NaN	NaN	NaN
0.0000	NaN	NaN	NaN	0.0000	NaN	NaN	NaN
0.0000	NaN	NaN	NaN	0.0000	NaN	NaN	NaN
0.0000	NaN	NaN	NaN	0.0000	NaN	NaN	NaN
0.0000	NaN	NaN	NaN	0.0000	NaN	NaN	NaN
0.0000	NaN	NaN	NaN	0.0000	NaN	NaN	NaN
0.0000	NaN	NaN	NaN	0.0000	NaN	NaN	NaN
0.0000	NaN	NaN	NaN	0.0000	NaN	NaN	NaN
0.0000	NaN	NaN	NaN	0.0000	NaN	NaN	NaN
0.0000	NaN	NaN	NaN	0.0000	NaN	NaN	NaN
0.0000	NaN	NaN	NaN	0.0000	NaN	NaN	NaN
0.0000	NaN	NaN	NaN	0.0000	NaN	NaN	NaN

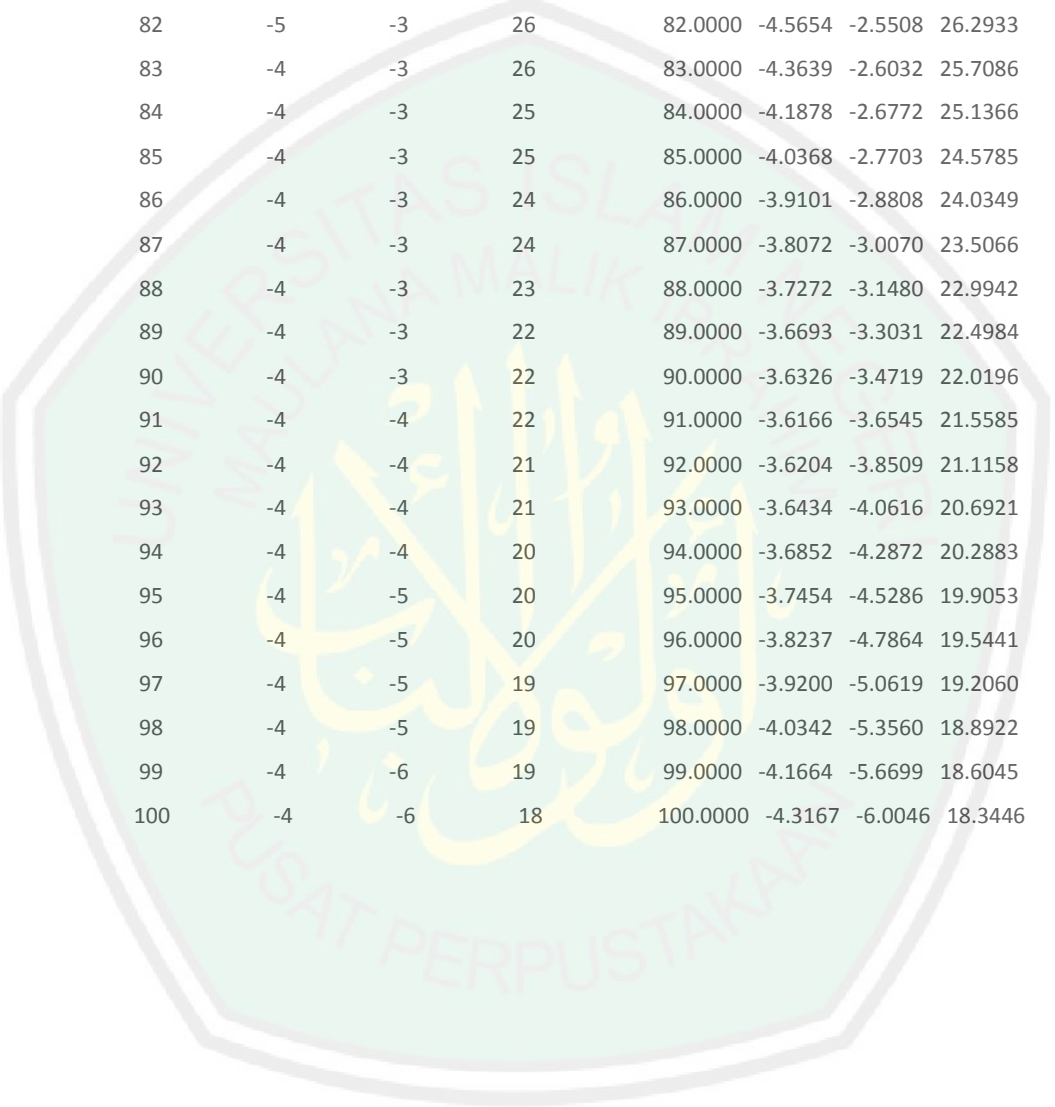


Lampiran 17

Output Program MATLAB untuk model diskret dengan $h = 0.01$, $0 \leq t \leq 1$ menit:

iterasi	nilai X	nilai Y	nilai Z				
1	1	1	1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2	1	1	1	2.0000	1.0000	1.2600	0.9833
3	1	2	1	3.0000	1.0260	1.5176	0.9697
4	1	2	1	4.0000	1.0752	1.7797	0.9594
5	1	2	1	5.0000	1.1456	2.0527	0.9530
6	1	2	1	6.0000	1.2363	2.3420	0.9511
7	1	3	1	7.0000	1.3469	2.6530	0.9547
8	1	3	1	8.0000	1.4775	2.9907	0.9649
9	2	3	1	9.0000	1.6288	3.3602	0.9834
10	2	4	1	10.0000	1.8020	3.7667	1.0119
11	2	4	1	11.0000	1.9984	4.2153	1.0528
12	2	5	1	12.0000	2.2201	4.7117	1.1090
13	2	5	1	13.0000	2.4693	5.2616	1.1840
14	3	6	1	14.0000	2.7485	5.8712	1.2823
15	3	7	1	15.0000	3.0608	6.5468	1.4095
16	3	7	2	16.0000	3.4094	7.2952	1.5723
17	4	8	2	17.0000	3.7980	8.1233	1.7791
18	4	9	2	18.0000	4.2305	9.0379	2.0402
19	5	10	2	19.0000	4.7112	10.0457	2.3681
20	5	11	3	20.0000	5.2447	11.1528	2.7782
21	6	12	3	21.0000	5.8355	12.3641	3.2891
22	6	14	4	22.0000	6.4884	13.6825	3.9229
23	7	15	5	23.0000	7.2078	15.1079	4.7060
24	8	17	6	24.0000	7.9978	16.6358	5.6695
25	9	18	7	25.0000	8.8616	18.2553	6.8488
26	10	20	8	26.0000	9.8010	19.9471	8.2839
27	11	22	10	27.0000	10.8156	21.6800	10.0180
28	12	23	12	28.0000	11.9020	23.4081	12.0956
29	13	25	15	29.0000	13.0526	25.0669	14.5591
30	14	27	17	30.0000	14.2540	26.5706	17.4428
31	15	28	21	31.0000	15.4857	27.8098	20.7650
32	17	29	25	32.0000	16.7181	28.6521	24.5178
33	18	29	29	33.0000	17.9115	28.9477	28.6541
34	19	29	33	34.0000	19.0151	28.5411	33.0750
35	20	27	38	35.0000	19.9677	27.2906	37.6201

36	21	25	42	36.0000	20.7000	25.0968	42.0662
37	21	22	46	37.0000	21.1397	21.9341	46.1395
38	21	18	50	38.0000	21.2191	17.8802	49.5459
39	21	13	52	39.0000	20.8852	13.1295	52.0187
40	20	8	53	40.0000	20.1097	7.9819	53.3737
41	19	3	54	41.0000	18.8969	2.7995	53.5555
42	17	-2	53	42.0000	17.2871	-2.0577	52.6564
43	15	-6	51	43.0000	15.3527	-6.2995	50.8965
44	13	-10	49	44.0000	13.1874	-9.7517	48.5721
45	11	-12	46	45.0000	10.8935	-12.3671	45.9908
46	9	-14	43	46.0000	8.5675	-14.2033	43.4172
47	6	-15	41	47.0000	6.2904	-15.3821	41.0425
48	4	-16	39	48.0000	4.1231	-16.0487	38.9805
49	2	-16	37	49.0000	2.1059	-16.3410	37.2793
50	0	-16	36	50.0000	0.2612	-16.3730	35.9410
51	-1	-16	35	51.0000	-1.4022	-16.2300	34.9398
52	-3	-16	34	52.0000	-2.8850	-15.9704	34.2357
53	-4	-16	34	53.0000	-4.1935	-15.6308	33.7835
54	-5	-15	34	54.0000	-5.3372	-15.2320	33.5381
55	-6	-15	33	55.0000	-6.3267	-14.7841	33.4567
56	-7	-14	33	56.0000	-7.1724	-14.2910	33.4998
57	-8	-14	34	57.0000	-7.8843	-13.7536	33.6315
58	-8	-13	34	58.0000	-8.4712	-13.1721	33.8191
59	-9	-13	34	59.0000	-8.9413	-12.5474	34.0331
60	-9	-12	34	60.0000	-9.3019	-11.8825	34.2474
61	-10	-11	34	61.0000	-9.5600	-11.1825	34.4394
62	-10	-10	35	62.0000	-9.7222	-10.4551	34.5901
63	-10	-10	35	63.0000	-9.7955	-9.7099	34.6842
64	-10	-9	35	64.0000	-9.7870	-8.9580	34.7104
65	-10	-8	35	65.0000	-9.7041	-8.2117	34.6615
66	-10	-7	35	66.0000	-9.5548	-7.4831	34.5341
67	-9	-7	34	67.0000	-9.3477	-6.7840	34.3282
68	-9	-6	34	68.0000	-9.0913	-6.1246	34.0469
69	-9	-6	34	69.0000	-8.7946	-5.5136	33.6958
70	-8	-5	33	70.0000	-8.4665	-4.9576	33.2821
71	-8	-4	33	71.0000	-8.1156	-4.4608	32.8143
72	-8	-4	32	72.0000	-7.7501	-4.0255	32.3013
73	-7	-4	32	73.0000	-7.3777	-3.6518	31.7519
74	-7	-3	31	74.0000	-7.0051	-3.3385	31.1746
75	-7	-3	31	75.0000	-6.6384	-3.0828	30.5772



76	-6	-3	30	76.0000	-6.2829	-2.8808	29.9664
77	-6	-3	29	77.0000	-5.9427	-2.7285	29.3483
78	-6	-3	29	78.0000	-5.6212	-2.6211	28.7278
79	-5	-3	28	79.0000	-5.3212	-2.5540	28.1091
80	-5	-3	27	80.0000	-5.0445	-2.5226	27.4954
81	-5	-3	27	81.0000	-4.7923	-2.5228	26.8895
82	-5	-3	26	82.0000	-4.5654	-2.5508	26.2933
83	-4	-3	26	83.0000	-4.3639	-2.6032	25.7086
84	-4	-3	25	84.0000	-4.1878	-2.6772	25.1366
85	-4	-3	25	85.0000	-4.0368	-2.7703	24.5785
86	-4	-3	24	86.0000	-3.9101	-2.8808	24.0349
87	-4	-3	24	87.0000	-3.8072	-3.0070	23.5066
88	-4	-3	23	88.0000	-3.7272	-3.1480	22.9942
89	-4	-3	22	89.0000	-3.6693	-3.3031	22.4984
90	-4	-3	22	90.0000	-3.6326	-3.4719	22.0196
91	-4	-4	22	91.0000	-3.6166	-3.6545	21.5585
92	-4	-4	21	92.0000	-3.6204	-3.8509	21.1158
93	-4	-4	21	93.0000	-3.6434	-4.0616	20.6921
94	-4	-4	20	94.0000	-3.6852	-4.2872	20.2883
95	-4	-5	20	95.0000	-3.7454	-4.5286	19.9053
96	-4	-5	20	96.0000	-3.8237	-4.7864	19.5441
97	-4	-5	19	97.0000	-3.9200	-5.0619	19.2060
98	-4	-5	19	98.0000	-4.0342	-5.3560	18.8922
99	-4	-6	19	99.0000	-4.1664	-5.6699	18.6045
100	-4	-6	18	100.0000	-4.3167	-6.0046	18.3446



**KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang (0341) 558933 Fax. (0341) 558933**

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Siti Shifatul Azizah
NIM : 08610067
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi : Diskretisasi Model Lorenz dengan Analogi Persamaan Beda
Pembimbing I : Usman Pagalay, M.Si
Pembimbing II : Ach. Nashichuddin, M. A

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	19 September 2011	Konsultasi BAB I	1.
2.	14 November 2011	Konsultasi BAB II	2.
3.	16 November 2011	Konsultasi BAB I dan BAB II Keagamaan	3.
4.	17 November 2011	ACC BAB I dan BAB II	4.
5.	20 Desember 2011	Konsultasi Bab III	5.
6.	4 Januari 2012	Revisi BAB III	6.
7.	6 Januari 2012	Revisi BAB III	7.
8.	9 Januari 2012	Revisi BAB I dan BAB II Keagamaan	8.
9.	9 Januari 2012	Konsultasi BAB III Keagamaan	9.
10.	11 Januari 2012	ACC BAB I,II,III Keagamaan	10.
11.	12 Januari 2012	Konsultasi BAB IV dan ABSTRAK	11.
12.	13 Januari 2012	ACC Keseluruhan	12.

Malang, 14 Januari 2012
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001