KONSTRUKSI ALJABAR-BCI DARI GRUP

SKRIPSI

Oleh:
YULIS SYAIDAH
NIM. 07610063

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG

2011

KONSTRUKSI ALJABAR-BCI DARI GRUP

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan Dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
YULIS SYAIDAH
NIM. 07610063

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2011

KONSTRUKSI ALJABAR-BCI DARI GRUP

SKRIPSI

Oleh:

YULIS SYAIDAH
NIM. 07610063

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji

Tanggal: 10 Januari 2011

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Drs. H. Turmudi, M.Si	**Ach. Nashichuddin, MA**
NIP. 19571005 198203 1 006	**NIP. 19730705 200003 1 002**

Mengetahui,

Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

KONSTRUKSI ALJABAR-BCI DARI GRUP

SKRIPSI

Oleh:
YULIS SYAIDAH
NIM. 07610063

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal: 20 Januari 2011

Susunan Dewan Penguji		**Tanda Tangan**
1. Penguji Utama	**: Hairur Rahman, M.Si** **NIP. 19800429 200604 1 003**	( )
2. Ketua	**: Wahyu Henky Irawan, M.Pd** **NIP. 19700420 200003 1 001**	( )
3. Sekretaris	**: Drs. H. Turmudi, M.Si** **NIP. 19571005 198203 1 006**	( )
4. Anggota	**: Achmad Nashichuddin, M.A** **NIP. 19730705 200003 1 002**	( )

Mengetahui dan Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

HALAMAN PERSEMBAHAN

بِسْمِ اللهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيْمِ

Dengan iringan doa dan rasa syukur yang teramat besar,

Karya tulis ini penulis persembahkan kepada:

Abah dan Ummi tercinta, yang selalu mendukung dan selalu ada untuk penulis.

Adik tercinta, yang selalu menjadi inspirasi bagi penulis.

Kakek dan nenek tercinta, yang selalu mendukung dan mendoakan penulis.

Saudara-saudara tercinta, yang selalu mengingatkan penulis.

MOTTO

....يَرْفَعِ اللهُ الَّذِيْنَ آمَنُوْامِنْكُمْ وَالَّذِيْنَ أُوتُواالْعِلْمَ دَرَجَتٍ وَاللهُ بِمَا تَعمَلُونَ خَبِيرٌ (المجادله:١١)

Niscaya Allah akan meninggikan orang-orang yang beriman di antaramu dan orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat. dan Allah Maha mengetahui apa yang kamu kerjakan. (Al-Mujadilah: 11)

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Yulis Syaidah

NIM : 07610063

Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika

Judul Penelitian : Konstruksi Aljabar-BCI dari Grup

Menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa hasil penelitian saya ini tidak terdapat unsur-unsur penjiplakan karya penelitian atau karya ilmiah yang pernah dilakukan atau dibuat oleh orang lain, kecuali yang secara tertulis dikutip dalam naskah ini dan disebutkan dalam sumber kutipan dan daftar pustaka.

Apabila ternyata hasil penelitian ini terbukti terdapat unsur-unsur jiplakan, maka saya bersedia untuk mempertanggung jawabkan, serta diproses sesuai peraturan yang berlaku.

Malang, 11 Januari 2011

Yang membuat pernyataan,

Yulis Syaidah

NIM. 07610063

KATA PENGANTAR

بسم الله الرحمن الرحيم

Alhamdulillahirrobbil 'alamin, segala puji syukur kehadirat Allah SWT atas limpahan rahmat, taufiq dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul *"Konstruksi Aljabar-BCI dari Grup"*. Sholawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada junjungan Nabi besar Muhammad SAW sebagai *uswatun hasanah* dalam meraih kesuksesan di dunia dan akhirat.

Selanjutnya penulis menghaturkan ucapan terimakasih kepada semua pihak yang telah membantu demi selesainya penulisan skripsi ini. Ungkapan terimakasih ini penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku rektor UIN Maulana Malik Ibrahim Malang, yang telah banyak memberikan pengetahuan dan pengalaman yang berharga.
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU., D.Sc, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Drs. H. Turmudi, M.Si selaku dosen pembimbing I yang telah memberikan pengarahan dan pengalaman yang berharga.

5. Achmad Nashichuddin, M.A selaku dosen pembimbing II, yang telah memberikan saran dan bantuan selama penulisan skripsi ini.
6. Muhammad Jamhuri, M.Si selaku dosen wali, yang telah memberikan pengarahan-pengarahan dan nasehat-nasehat yang sangat penulis butuhkan.
7. Seluruh dosen Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, terimakasih atas seluruh ilmu dan bimbingannya.
8. Bapak dan Ibu tercinta, yang senantiasa memberikan do'a dan restunya kepada penulis dalam menuntut ilmu.
9. Teman-teman penulis Imam Fahcruddin, Diyah Ayu Resmi, Umamatur Rofi'a, Lusi Sarwo Endah, Kridha Pusa W, Rr Kusuma Dwi Nur M, dan Sholehati Ningrum yang selalu memberikan bantuan, semangat dan do'a.
10. Teman-teman Matematika angkatan 2007, terima kasih atas doa serta kenangan yang kalian berikan.
11. Teman-teman Warga Dinata yang selalu memberi semangat pada penulis agar secepatnya menyelesaikan skripsi ini.
12. Semua pihak yang tidak mungkin penulis sebut satu persatu, atas keikhlasan bantuan moril dan spirituil.

Semoga skripsi ini bermanfaat dan dapat menambah wawasan keilmuan khususnya Matematika. Amin.

Malang, 11 Januari 2011

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR LAMPIRAN

DAFTAR SIMBOL

$\mathbb{G}$	: Sebarang Himpunan Tak Kosong
$\mathbb{Z}$	: Himpunan Bilangan Bulat
$\mathbb{R}$	: Bilangan Rasional
$*$	: Operasi Biner pada Aljabar-BCI
$\circ$	: Operasi Biner pada Grup
$\blacksquare$	: Operasi pada Aljabar
$+$	: Operasi Penjumlahan
e	: Elemen Identitas
x^{-1}	: Invers dari x
A^c	: Komplemen dari A
$\cup$	: Gabungan
$\cap$	: Irisan
$\emptyset$	: Himpunan Kosong
$\leq$ atau $\geq$	: Relasi Pengurutan Parsial
$(X,*,0)$	: Aljabar X yang Dibangun oleh Operasi Biner " $*$ " dan Elemen Khusus 0
$(M_n,*,0)$	: Aljabar Grup Modulo n yang Dibangun oleh Operasi Biner " $*$ " dan Elemen Khusus 0

ABSTRAK

Syaidah, Yulis. 2011. **Konstruksi Aljabar-BCI dari Grup**. Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: I. Drs. H. Turmudi, M.Si.
II. Ach. Nashichuddin, M.A

Kata Kunci: Aljabar-BCI, Aljabar-BCI *p-semisimple*, Grup, Ideal Tertutup

Termotivasi oleh operasi penjumlahan dan pengurangan pada bilangan bulat, karena $(\mathbb{Z},+)$ merupakan grup dan $(\mathbb{Z},-,0)$ adalah Aljabar-BCI, maka dapat definisikan operasi $" * "$ dengan $a * b = a + (-b)$, $\forall\, a, b\ \in \mathbb{Z}$, sehingga dapat diperoleh gagasan mengenai keterkaitan antara grup dengan aljabar-BCI.

Pada skripsi ini dikaji konstruksi Aljabar-BCI yang dapat dibentuk dari karakterisasi grup modulo n, kemudian hubungan antara subgrup dan ideal tertutup dari grup abelian dan Aljabar-*BCI p-semisimple*. Dari hasil penelitian, diperoleh:

1. Diberikan $(M_n,+)$ adalah grup dengan M_n adalah himpunan bilangan modulo n dengan $n \in \mathbb{N}$. Didefinisikan operasi $" * "$ dengan $x * y = x + (-y)$ dimana $(-y)$ adalah elemen invers dari y terhadap operasi $" + "$. Maka $(M_n,*,0)$ adalah Aljabar-BCI. Dari teorema ini kemudian digeneralisasikan menjadi grup $(\mathbb{G},+)$, didefinisikan suatu operasi $" * "$, yang memenuhi $a * b = a + (-b), \forall\, a, b\ \in \mathbb{G}$. Dimana $(-b)$ adalah elemen invers dari b terhadap operasi $" + "$. Maka $(\mathbb{G},*,0)$ merupakan Aljabar-BCI.
2. Jika $(X,*,0)$ merupakan Aljabar-BCI *p-semisimple* dengan operasi $" * "$ yang didefinisikan $x * y = x + (-y)$, $\forall x, y \in X$, $(X,+)$ adalah grup abelian dengan $(-y)$ adalah elemen invers y terhadap operasi $" + "$, dan A subset dari X, maka pernyataan berikut ekuivalen:
   (1) A ideal tertutup,
   (2) A subgrup.

ABSTRACT

Syaidah, Yulis. 2011. **Konstruksi BCI-Algebras of Group.** Theses. Mathematics Programme Faculty of Science and Technology The State of Islamic University Maulana Malik Ibrahim Malang.
Promotor: I. Drs. H. Turmudi, M.Si.
II. Ach. Nashichuddin, M.A.

Key Words: *BCI*-Algebras, *BCI*-Algebras *p-semisimple*, Group, Close Ideal

Motivated by sum operation $"+"$ and reduction operation $"-"$ on integer, because $(\mathbb{Z},+)$ is group and $(\mathbb{Z},-,0)$ is BCI-Algebras, then it can be defined as operation $"*"$ by $a*b=a+(-b)$, $\forall\, a,b\ \in\mathbb{Z}$, such that it can be found idea about concern between group and BCI-Algebras.

In this research, investigate contraction BCI-Algebras that could be form from characterization of modulo n group, besides relationship between subgroup and close ideal from abelian group and BCI-Algebras *p-semisimple*. The result of the research showed that there are for kinds of theorem:

1. Let $(M_n,+)$ be a group, where M_n is set of modulo n, $n\in\mathbb{N}$. If define $x*y=x+(-y), \forall\, x,y\in M_n$. Where $(-y)$ is inverses element of y on sum operation $"+"$. Then, $(M_n,*,0)$ is BCI-Algebras. Next, it's generalizations to be: Let $(\mathbb{G},+)$ be a group. If define $a*b=a+(-b), \forall\, a,b\ \in\mathbb{G}$. Where $(-b)$ is inverses element of b on sum operation $"+"$. Then $(\mathbb{G},*,0)$ is BCI-Algebras.
2. If $(X,*,0)$ is BCI-Algebras *p-semisimple*. Define $x*y=x+(-y)$, $\forall x,y\in X$, $(X,+)$ is Abelian group with $(-y)$ is inverses element of y on sum operation $"+"$, and A subset of X, then followings are equivalent:
   a. A close ideal,
   b. A subgroup.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Wahyu yang pertama kali turun yaitu *iqra* yang terdapat dalam surat *Al-Alaq,* ayat 1:

ٱقۡرَأۡ بِٱسۡمِ رَبِّكَ ٱلَّذِي خَلَقَ ١

Artinya: *"Bacalah dengan (menyebut) nama Tuhanmu yang Menciptakan"*

Di dalam ayat di atas tersirat makna bahwa manusia diperintahkan untuk membaca. Dan Allah SWT mengajar manusia dengan perantaraan tulis dan baca. Sebagaimana firman Allah SWT dalam surat *Al-Alaq,* ayat 4:

ٱلَّذِي عَلَّمَ بِٱلۡقَلَمِ ٤

Artinya: *"Yang mengajar (manusia) dengan perantaran kalam"*

Karena teman duduk yang terbaik adalah buku, dan kenikmatan paling besar adalah membuka-buka lembaran akal para pemikir. Disisi lain orang yang berteman dengan lembaran-lembaran kitab, akan meraih kemulian. Dan setiap kali seseorang membaca buku, maka pasti akan memperoleh ilmu (A'id Abdullah al Qarni, 2006:52). Secara tidak langsung pula seseorang akan paham dalam hal apapun jika mau membaca, menelaah, meneliti, dan menghimpun, sebagaimana firman Allah dalam surat *Al-Baqarah,*ayat 269:

يُؤۡتِي ٱلۡحِكۡمَةَ مَن يَشَآءُۚ وَمَن يُؤۡتَ ٱلۡحِكۡمَةَ فَقَدۡ أُوتِيَ خَيۡرٗا كَثِيرٗاۗ وَمَا يَذَّكَّرُ إِلَّآ أُوْلُواْ ٱلۡأَلۡبَٰبِ ٢٦٩

Artinya: *"Allah menganugerahkan Al Hikmah (kefahaman yang dalam tentang Al Quran dan As Sunnah) kepada siapa yang dikehendaki-Nya. Dan Barangsiapa yang dianugerahi hikmah, ia benar-benar telah* *dianugerahi karunia yang banyak. Dan hanya orang-orang yang berakallah yang dapat mengambil pelajaran (dari firman Allah).”*

Kepahaman akan diberikan apabila manusia dapat mengambil hikmah dari apa yang telah dipelajari, seperti ayat di atas juga mengatakan bahwa Allah akan memberikan hikmah kepahaman tentang Al-Qur’an dan sunnah bagi siapa yang dikehendaki-Nya dan hanya orang berakal yang dapat mengambil pelajaran. Begitu juga dengan ilmu pengetahuan umum yang ada dalam kehidupan sehari-hari. Bagi siapa saja yang menuntut ilmu baik itu ilmu agama maupun umum, maka Allah akan memberikan hikmah kepahaman terhadap ilmu yang telah dipelajari, khususnya bidang ilmu yang sering dibaca, telaah, teliti dan lain sebagainya. Dan khususnya bagi orang yang mau menggunakan akalnya untuk berfikir. Salah satu bukti yang terlihat dalam kehidupan saat ini yaitu perkembangan dalam dunia sains.

Salah satu ilmu yang mengalami perkembangan pesat dari tahun ke tahun yaitu matematika. Hal ini terjadi karena banyak para ilmuan matematika yang mau menggunakan akalnya untuk berfikir mengembangkan ilmu yang telah ada, dimana mereka merumuskan dalam bentuk bahasa sendiri sehingga ditemukan rumus-rumus atau teori-teori yang bisa dikategorikan ilmiah. Sebelum abad ke-10, matematika mulai menggunakan berbagai simbol dan variabel. Pada masa itu pula ditemukan bilangan nol dan digunakan pertama kalinya dalam perhitungan sistem decimal (http://en.wikipedia.org/wiki/Matematika).

Dalam perkembangannya, salah satu bagian ilmu matematika yang berkembang dengan pesat karena berhubungan dengan himpunan, dan sifat struktur-struktur di dalamnya yaitu struktur aljabar.

Suatu struktur aljabar merupakan himpunan yang tidak kosong dengan paling sedikit sebuah relasi ekuivalensi, satu atau lebih operasi biner dan memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Dalam perkuliahan selama ini, topik struktur aljabar yang dikaji adalah grup dan ring saja, ternyata masih banyak sekali struktur aljabar yang lain, salah satunya yaitu Aljabar-BCI.

Pada tahun 1966, Y. Imai dan K. Iseki memperkenalkan struktur aljabar abstrak yaitu Aljabar-BCK. Pada tahun yang sama, K. Iseki memperkenalkan gagasan baru yaitu Aljabar-BCI yang merupakan perumuman dari Aljabar-BCK sehingga Aljabar-BCK termuat di dalam Aljabar-BCI. Dari tahun ke tahun, ilmu pengetahuan berkembang semakin pesat, begitu juga dengan Aljabar-BCI.

Misalkan X himpunan tak kosong dengan operasi biner "$*$" dan 0 sebagai elemen khusus, serta memenuhi aksioma-aksioma tertentu maka akan membentuk struktur aljabar baru yang disebut Aljabar-BCI. Misalkan G adalah suatu himpunan tak kosong dengan operasi biner "$\circ$", maka sistem aljabar $(G,\circ)$ disebut grup jika memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Antara Aljabar-BCI dan Grup itu sangat berbeda. Himpunan bilangan bulat "$\mathbb{Z}$" dengan operasi penjumlahan $(\mathbb{Z},+)$ adalah grup tetapi bukan Aljabar-BCI, dan himpunan bilangan bulat "$\mathbb{Z}$" dengan operasi pengurangan "$-$" dan elemen khusus "0" $(\mathbb{Z},-,0)$ adalah Aljabar-BCI tetapi bukan grup karena tidak asosiatif. Sehingga menarik sekali untuk dikaji, antara Aljabar-BCI dengan Grup.

Oleh karena itu dalam penelitian ini, penulis tertarik untuk meneliti Aljabar-BCI dan Grup dengan judul penelitian *"Konstruksi Aljabar-BCI dari Grup"*.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah yang dapat dikemukakan adalah:

1. Bagaimana Aljabar-BCI dapat dibentuk dari karakterisasi grup modulo n?
2. Bagaimana hubungan antara subgrup dan ideal tertutup dari grup abelian dan Aljabar-BCI *p-semisimple*?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah, maka tujuan penelitian ini adalah:

1. Untuk mengetahui karakterisasi dari grup modulo n dapat dibentuk Aljabar-BCI.
2. Untuk mengetahui hubungan antara subgrup dan ideal tertutup dari grup abelian dan Aljabar-BCI *p-semisimple*.

1.4 Batasan Masalah

Pada skripsi ini, topik yang dikaji di grup adalah grup modulo n (grup abelian) dengan operasi "+" dan dalam Aljabar-BCI adalah Aljabar-BCI *p-semisimple*.

1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah:

1. Penulis
   a. Untuk memperdalam dan mengembangkan wawasan disiplin ilmu yang telah dipelajari untuk mengkaji permasalahan tentang Aljabar-BCI.
   b. Sebagai suatu bentuk partisipasi penulis dalam memberikan kontribusi dalam pengembangan keilmuan, khususnya dalam bidang matematika.

2. Pembaca
    a. Sebagai tambahan wawasan dan pengetahuan tentang Aljabar-BCI.
    b. Sebagai motivasi kepada para pembaca agar dapat mempelajari dan mengembangkan ilmu dalam bidang matematika.
3. Institusi

    Hasil penelitian ini dapat digunakan sebagai tambahan kepustakaan yang dijadikan sarana pengembangan wawasan keilmuan khususnya di jurusan matematika untuk mata kuliah struktur aljabar.

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode penelitian kepustakaan (*library research*) atau kajian pustaka, yakni melakukan penelitian untuk memperoleh data-data dan informasi-informasi serta objek yang digunakan dalam pembahasan masalah tersebut. Langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah :

1. Mengumpulkan definisi yang berhubungan dengan topik-topik dalam Aljabar-BCI dan grup.
2. Mengumpulkan dan membuktikan teorema yang berhubungan dengan sifat-sifat dalam Aljabar-BCI.
3. Melakukan karakterisasi grup modulo n sehingga dapat dibentuk Aljabar-BCI, dan hubungan antara subgrup dan ideal tertutup dari grup abelian dan Aljabar-BCI *p-semisimple*
4. Dari karakterisasi yang diperoleh, kemudian disajikan dalam bentuk teorema.
5. Membuktikan teorema yang diperoleh disertai dengan contoh.

6. Membuat Kesimpulan

7. Melaporkan

1.7 Sistematika Penulisan

Agar penulisan skripsi ini lebih terarah, mudah ditelaah dan dipahami, maka digunakan sistematika penulisan yang terdiri dari empat bab. Masing-masing bab dibagi ke dalam beberapa subbab dengan rumusan sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN

Pendahuluan meliputi: latar belakang permasalahan, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II KAJIAN PUSTAKA

Bagian ini terdiri atas konsep-konsep (teori-teori) yang mendukung bagian pembahasan. Konsep-konsep tersebut antara lain membahas tentang definisi Himpunan, Relasi, Relasi Ekuivalensi, Himpunan Terurut Parsial, Fungsi, Grup, Subgrup, Sifat-sifat Grup, dan Jenis-jenis Grup.

BAB III PEMBAHASAN

Pembahasan berisi tentang sifat-sifat dari Aljabar-BCI, beberapa teorema Aljabar-BCI yang dibentuk dari karakterisasi grup dan hubungan antara subgrup dan ideal tertutup dari grup abelian dan Aljabar-BCI *p-semisimple*.

BAB IV PENUTUP

Pada bab ini akan dibahas tentang kesimpulan dan saran.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Dasar-dasar Himpunan

Himpunan didefinisikan sebagai kumpulan objek-objek yang terdefinisi dengan baik dan jelas (*well defined*). Objek yang dimaksud dapat berupa benda kongkrit seperti bunga, buah, orang, maupun objek abstrak seperti fungsi, bilangan, matriks, dan lainnya (Dugopolski, 2000:2).

Objek yang terdapat pada himpunan disebut dengan elemen, unsur, atau anggota. Biasa dilambangkan dengan "$\in$", sedangkan lambang bukan anggota dinyatakan dengan "$\notin$". Anggota himpunan dinyatakan dengan huruf kecil seperti *a, b, c, d,…*, dan dituliskan dalam dua tanda kurung kurawal, sedangkan nama himpunan ditulis dengan huruf besar, misalnya *A, B, C, D* (Jong Jek Siang, 2002:131).

Definisi 2.1.1

Jika A dan B adalah himpunan-himpunan, maka A disebut himpunan bagian (*Subset*) dari B jika dan hanya jika setiap anggota A juga merupakan anggota B.

Dinotasikan: $A \subseteq B \leftrightarrow \{\forall x | x \in A \rightarrow x \in B\}$

Jika ada anggota A yang bukan anggota B berarti A bukan himpunan bagian B.

Dinotasikan: $A \nsubseteq B \leftrightarrow \{\exists x | x \in A \wedge x \notin B\}$ (Siang, 2002:133).

Definisi 2.1.2

Semesta pembicaraan (S) adalah himpunan semua objek yang dibicarakan. Suatu himpunan yang tidak memiliki anggota disebut himpunan kosong $\emptyset$ atau $\{\ \ \}$ (Siang, 2002:136).

Contoh 2.1.3

1. Misalkan A adalah himpunan dari orang-orang di dunia yang lebih tua dari usia 200 tahun. Menurut statistik, A adalah himpunan kosong.
2. Misalkan B={$x|x^2 = 4, x$ adalah ganjil}. Maka B adalah himpunan kosong.

2.2 Operasi-operasi pada Himpunan

Jika ada satu atau beberapa himpunan, himpunan-himpunan tersebut dapat dioperasikan dengan operator tertentu untuk menghasilkan himpunan baru.

Definisi 2.2.1

Jika A dan B adalah himpunan maka gabungan dari himpunan A dan B dinotasikan $(A \cup B)$ adalah himpunan semua elemen-elemen anggota A atau anggota B (Dugopolski, 2000:3).

Dinotasikan: $A \cup B = \{x \in S | x \in A \vee x \in B\}$.

Definisi 2.2.2

Jika A dan B adalah himpunan maka irisan dari himpunan A dan B dinotasikan $(A \cap B)$ adalah himpunan semua elemen A dan sekaligus elemen B (Dugopolski, 2000:4).

Dinotasikan: $A \cap B = \{x \in S | x \in A \wedge x \in B\}$

Definisi 2.2.3

Komplemen himpunan A (A^c) adalah himpunan semua elemen x dalam S sedemikian hingga x bukan anggota A (Siang, 2002:139).

Dinotasikan: $A^c = \{x \in S | x \notin A\}$

Definisi 2.2.4

Selisih himpunan B dari himpunan A $(A - B)$ adalah himpunan semua elemen x dalam S sedemikian hingga x anggota A, tetapi x bukan anggota B (Siang, 2002:139).

Dinotasikan: $A - B = \{x \in S | x \in A \wedge x \notin B\}$

Contoh 2.2.5

Misalkan $S = \{a, b, c, d, e, f, g\}; A = \{a, c, e, g\}; B = \{d, e, f, g\}$.

Tentukan $A \cup B;\ A \cap B;\ A - B;\ A^c$

Penyelesaian

$A \cup B = \{a, c, d, e, f, g\}$ $\qquad$ $A - B = \{a, e\}$

$A \cap B = \{e, g\}$ $\qquad$ $A^c = \{b, d, f\}$

2.3 Relasi

Definisi 2.3.1

Misal A dan B adalah himpunan. Relasi biner $\mathcal{R}$ dari A ke B adalah himpunan bagian dari $A \times B$. Dengan kata lain

Dinotasikan: $(A \times B = \{(a, b) |\ a \in A, b \in B\})$

Dengan kata lain, relasi biner dari A ke B adalah $\mathcal{R}$ yang menghubungkan anggota A dengan anggota B. Notasi $a\,\mathcal{R}\,b$ untuk menunjukkan bahwa $(a, b) \in \mathcal{R}$ dan $a \not\mathcal{R}\, b$ untuk menunjukkan bahwa $(a, b) \notin \mathcal{R}$. Selanjutnya, ketika (a, b) termasuk ke $\mathcal{R}$, maka dikatakan a dihubungkan ke b oleh $\mathcal{R}$ (Rosen, 1995:355).

Contoh 2.3.2

Misal $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{2, 4, 6, 8\}$ dan didefinisikan bahwa $A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B \; dan \; a < b\}$.

Maka $\mathcal{R} = \{(1, 2), (1, 4), (1,6), (1, 8), (2, 4), (2, 6), (2, 8), (3, 4), (3, 6), (4, 8)\}$.

2.4 Jenis-jenis Relasi

Definisi 2.4.1

Relasi $\mathcal{R}$ pada himpunan A adalah *refleksif* jika $(a, a) \in \mathcal{R}$ untuk setiap $a \in A$, itu artinya jika $a \, \mathcal{R} \, a$ untuk setiap $a \in A$. Relasi $\mathcal{R}$ pada himpunan A adalah *irrefleksif* jika $a \not\mathcal{R} \, a$ untuk setiap $a \in A$.

Oleh karena itu $\mathcal{R}$ adalah *refleksif* jika setiap $a \in A$ relasi ke dirinya sendiri dan *irrefleksfi* jika tidak ada $a \in A$ relasi ke dirinya sendiri (Kolman, Busby, dan Ross, 2004: 129).

Dinotasikan: *Refleksif* : $\forall \, a \in A \rightarrow (a, a) \in \mathcal{R}$

Irrefleksif : $\forall \, a \in A \rightarrow (a, a) \notin \mathcal{R}$

Contoh 2.4.2

Misalkan $A = \{1,2,3,4\}$, dan relasi $\mathcal{R}$ di bawah ini didefinisikan pada himpunan A, maka

(a) Relasi $\mathcal{R} = \{(1,1), (1,3), (2,1), (2, 2), (3, 3), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$ bersifat *refleksif* karena terdapat elemen relasi yang berbentuk (a, a) yaitu $(1,1), (2, 2), (3, 3)$, dan $(4,4)$.

(b) Relasi $\mathcal{R} = \{(1,1), (2,2), (2, 3), (4,2), (4, 3), (4, 4)\}$ tidak bersifat *refleksif* karena $(3,3) \notin \mathcal{R}$.

Definisi 2.4.3

Relasi $\mathcal{R}$ pada himpunan A adalah *Simetris* jika $a\,\mathcal{R}\,b$, maka $b\,\mathcal{R}\,a$ dimana $a, b \epsilon A$. Itu terpenuhi bahwa $\mathcal{R}$ adalah *Asimetris* jika $a, b \epsilon A$ dengan $a\,\mathcal{R}\,b$, tetapi $b \not{\mathcal{R}}\, a$.

Relasi $\mathcal{R}$ pada himpunan A adalah *Asimetris* jika $a\,\mathcal{R}\,b$, maka $b \not{\mathcal{R}}\, a$. Itu artinya bahwa $\mathcal{R}$ adalah *non-Asimetris* jika ada $a, b \epsilon A$ dengan keduanya $a\,\mathcal{R}\,b$ dan $b\,\mathcal{R}\,a$.

Relasi $\mathcal{R}$ pada himpunan A adalah *Antisimetris* jika $a\,\mathcal{R}\,b$ dan $b\,\mathcal{R}\,a$ maka $a = b$. Kontrapositif dari definisi ini bahwa $\mathcal{R}$ adalah *Antisimetris* jika $a \neq b$, maka $a \not{\mathcal{R}}\, b$ atau $b \not{\mathcal{R}}\, a$. Juga menyatakan bahwa $\mathcal{R}$ adalah *non-Antisimetris* jika $a, b \epsilon A, a \neq b$, dan keduanya $a\mathcal{R}\,b$ dan $b\,\mathcal{R}\,a$ (Kolman, Busby, dan Ross, 2004:129).

Dinotasikan: *Simetris* : $\forall\, a, b \in A, (a, b) \in \mathcal{R} \rightarrow (b, a) \in \mathcal{R}$

Asimetris : $\forall\, a, b \in A, (a, b) \in \mathcal{R} \rightarrow (b, a) \notin \mathcal{R}$

Antisimetris : $\forall\, a, b \in A, (a, b) \in \mathcal{R}\ dan\ (b, a) \in \mathcal{R} \rightarrow a = b$

Non- Antisimetris : $\forall\, a, b \in A, a \neq b \rightarrow (a, b) \in \mathcal{R}\ dan\ (b, a) \in \mathcal{R}$

Contoh 2.4.4

Misal $A = \mathbb{Z}$, himpunan bilangan bulat, dan misalkan

$$\mathcal{R} = \{\{a, b\} \epsilon A \times A | a < b\}$$

Sehingga $\mathcal{R}$ adalah relasi kurang daripada. Carilah bahwa $\mathcal{R}$ *Simetris*, *Asimetris*, atau *Antisimetris*?

Jawab:

Simetris : jika $a < b$, maka tidak benar bahwa $b < a$, jadi $\mathcal{R}$ *Antisimetris*.

Asimetris: jika $a < b$, maka $b \nless a$ (b tidak kurang daripada a), jadi $\mathcal{R}$ adalah *Asimetris*.

Antisimetris: jika $a \neq b$, maka terdapat $a \nless b$ atau $b \nless a$, jadi $\mathcal{R}$ *Antisimetris.*

Definisi 2.4.5

Relasi $\mathcal{R}$ pada himpunan A adalah *transitif* jika $a\,\mathcal{R}\,b$ dan $b\,\mathcal{R}\,c$, maka $a\,\mathcal{R}\,c$, untuk $a, b, c \in A$. Dan relasi $\mathcal{R}$ pada himpunan A *tidak transitif* jika ada $a, b, c \in A$ sedemikian sehingga $a\,\mathcal{R}\,b$ dan $b\,\mathcal{R}\,c$, tetapi $a \not{\mathcal{R}}\, c$. Jika a, b, c tidak ada maka $\mathcal{R}$ transitif (Kolman, Busby, dan Ross, 2004:132).

Dinotasikan: *transitif* : $\forall\, a, b, c \in A, (a, b) \in \mathcal{R}\ dan\ (b, c) \in \mathcal{R} \rightarrow (a, c) \in \mathcal{R}$

tidak transitif : $\forall\, a, b, c \in A, (a, b) \in \mathcal{R}\ dan\ (b, c) \in \mathcal{R} \rightarrow (a, c) \notin \mathcal{R}$

Contoh 2.4.6

Misal $A = \{1,2,3,4\}$ dan misalkan $\mathcal{R} = \{(1, 2), (1, 3), (4,2)\}$. Apakah $\mathcal{R}$ *transitif*?

Jawab:

Karena tidak terdapat elemen $a, b,$ dan c di A sedemikian sehingga $a\,\mathcal{R}\,b$ dan $b\,\mathcal{R}\,c$, tetapi $a \not{\mathcal{R}}\, c$, maka $\mathcal{R}$ *transitif*. Jadi $\mathcal{R}$ tidak *transitif.*

2.5 Relasi Ekuivalensi

Definisi 2.5.1

Relasi $\mathcal{R}$ pada himpunan A dikatakan *relasi ekuivalensi* jika ia *refleksif*, *simetris* dan *transitif* (Siang, 2009:346).

Contoh 2.5.2

Misalkan $\mathcal{R} = \{(1,1), (1,3), (3,1), (3,3)\}$. apakah $\mathcal{R}$ adalah suatu relasi ekuivalensi pada $A = \{1,2,3\}$ dan $B = \{1,3\}$?

Jawab:

Jelas $\mathcal{R}$ adalah *simetris* dan *transitif*. Tetapi, $\mathcal{R}$ bukan sebuah *relasi ekuivalensi* pada A karena 2 $\not\mathcal{R}$ 2 sehingga $\mathcal{R}$ *tidak refleksif* pada A. Sebaliknya, $\mathcal{R}$ *refleksif* pada B sehingga $\mathcal{R}$ adalah *relasi ekuivalensi* pada B.

2.6 Himpunan Terurut Parsial (*Partially Ordered Set*)

Definisi 2.6.1

Relasi $\mathcal{R}$ pada himpunan $\mathcal{S}$ dikatakan relasi pengurutan parsial jika ia *refleksif*, *antisimetri*, dan *transitif*. Himpunan $\mathcal{S}$ bersama-sama dengan relasi $\mathcal{R}$ disebut himpunan terurut secara parsial *(partially ordered set,* atau *poset),* dan dilambangkan dengan $(\mathcal{S}, \mathcal{R})$ (Siang, 2009:358).

Biasanya relasi pengurutan parsial disimbolkan dengan ≤ dan ≥, dan simbol ini bersifat umum.

Contoh 2.6.2

Himpunan $\mathbb{Z}^+$adalah himpunan bilangan bulat positif. Relasi ≤ (kurang atau sama dengan) adalah relasi terurut parsial pada $\mathbb{Z}^+$. Hal ini berlaku pula untuk relasi ≥.

Jawab:

Bila (a, b)ada didalam $\mathcal{R}$ jika $a \le b$.

- Karena setiap bilangan bulat = dirinya sendiri (*refleksif*)
- Karena $a \le b$ dan $b \le a$ kecuali a = b (*antisimetri*)
- Jika $a \le b$ dan $b \le c$ maka $a \le c$ (*transitif*)

2.7 Fungsi

Definisi 2.7.1

Dikatakan fungsi jika memenuhi ketiga pernyataan berikut:

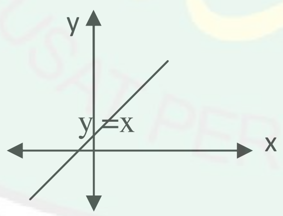
1. Himpunan tak kosong A, dikatakan domain dari fungsi.
2. Himpunan tak kosong B, dikatakan range dari fungsi.
3. Setiap elemen dari himpunan A dipetakan satu dan hanya satu pada elemen dari himpunan B (Roman. 1989:36).

Dinotasikan: $f : A \to B$ (f adalah fungsi dari A ke B).

Definisi 2.7.2

Misal A adalah sebarang himpunan. Misal f adalah fungsi dari himpunan A ke A atau $f : A \to A$. Jika setiap anggota himpunan A dipasangkan oleh f kepada dirinya sendiri, dengan kata lain f(x)= x. $\forall\, x \epsilon A$, maka fungsi f disebut fungsi Identitas (Siang, 2009:426).

Dapat digambarkan pada diagram cartesius berikut :



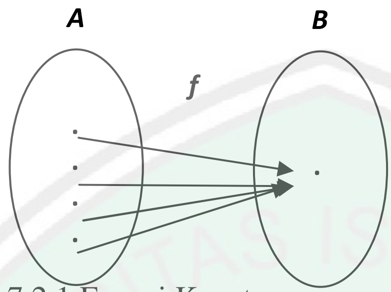
Gambar 2.7.1.1 Fungsi Identitas

Definisi 2.7.3

Misal A dan B sebarang himpunan. Misal f adalah suatu fungsi dari himpunan A ke himpunan B atau $f : A \to B$. Jika setiap anggota himpunan A dipasangkan pada hanya satu anggota himpunan B, dengan kata lain range mempunyai satu anggota atau R_f = {c} dengan $c \in B$, maka fungsi f disebut fungsi konstan (Siang, 2009:427).

Dapat dinyatakan sebagai $\forall\, x \in A$ maka $f(x) = c$

Apabila digambarkan dalam diagram panah adalah seperti berikut :



Gambar 2.7.2.1 Fungsi Konstan

2.8 Operasi Biner

Definisi 2.8.1

(1) Operasi biner " $\circ$ " pada himpunan $\mathbb{G}$ adalah fungsi $\circ : \mathbb{G} \times \mathbb{G} \to \mathbb{G}$. untuk setiap $a, b \in \mathbb{G}$. Dapat dituliskan $a \circ b$ untuk $\circ\,(a, b)$.

(2) Operasi biner " $\circ$ " pada himpunan $\mathbb{G}$ adalah *asosiatif* jika untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{G}, a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$.

(3) Jika " $\circ$ " adalah operasi biner pada himpunan $\mathbb{G}$, kita katakan $a, b \in \mathbb{G}$ *komutatif* jika $a \circ b = b \circ a$. Katakan $\circ$ (atau $\mathbb{G}$) adalah *komutatif* jika untuk setiap $a, b \in \mathbb{G}, a \circ b = b \circ a$ (Dummit & Foote, 1991:17).

2.9 Grup

Definisi 2.9.1

Suatu grup $(\mathbb{G}, \circ)$ adalah suatu himpunan tak kosong $\mathbb{G}$ dengan suatu operasi biner " $\circ$ " yang memenuhi aksioma-aksioma berikut:

a. Tertutup terhadap operasi " $\circ$ ", yaitu $a \circ b \in \mathbb{G}, \forall\, a, b \in \mathbb{G}$

b. Operasi " $\circ$ " bersifat *asosiatif*, yaitu $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c), \forall a, b, c \in \mathbb{G}$

c. Ada elemen identitas e dalam $\mathbb{G}$ sedemikian sehingga: $a \circ e = e \circ a = a$, $\forall\, a \in \mathbb{G}$

d. Setiap elemen $a \in \mathbb{G}$ mempunyai elemen invers $a^{-1} \in \mathbb{G}$ sedemikian sehingga: $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$ (Grillet, 2007:8).

Aksioma ketertutupan merupakan akibat dari definisi operasi biner, sehingga aksioma tersebut sudah tercakup kedalam sifat dari suatu operasi biner. Suatu grup haruslah mempunyai paling sedikit satu elemen, yaitu elemen identitas.

Contoh 2.9.2

Selidiki apakah $(\mathbb{Z}, +)$ merupakan grup?

Jawab:

i. Ambil $a, b \in \mathbb{Z}$, maka $a + b \in \mathbb{Z}$. Jadi $\mathbb{Z}$ tertutup terhadap operasi penjumlahan.

ii. Ambil $a, b, c \in \mathbb{Z}$, maka $(a + b) + c = a + (b + c)$. Jadi operasi penjumlahan bersifat asosiatif di $\mathbb{Z}$.

iii. $\exists\, 0 \in \mathbb{Z}$ sehingga $a + 0 = 0 + a = a, \forall\, a \in \mathbb{Z}$. Jadi 0 adalah identitas penjumlahan.

iv. Untuk masing-masing $a \in \mathbb{Z}$ ada $(-a) \in \mathbb{Z}$, sehingga $a + (-a) = (-a) + a = 0$. Jadi invers dari a adalah $-a$.

Dari (i), (ii), (iii) dan (iv) maka $(\mathbb{Z}, +)$ adalah grup.

Definisi 2.9.3

Grup $(\mathbb{G}, \circ)$ disebut grup abelian atau grup komutatif jika pada operasi biner "$\circ$", $\mathbb{G}$ bersifat *komutatif*, yaitu $a \circ b = b \circ a, \forall\, a, b \in \mathbb{G}$ (Dummit & Foote, 1991:17).

Jika pada operasi biner " $\circ$ " tidak bersifat komutatif, maka grup $(\mathbb{G},\circ)$ disebut grup tidak komutatif (*non abelian*) (Grillet, 2007:8).

Contoh 2.9.4

Tunjukkan bahwa $(M_4, +)$ adalah grup abelian?

Jawab:

$M_4 = \{0,1,2,3\}$

Dapat dibangun tabel komposisi dengan operasi " $+$ ".

$\rightarrow$

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Tabel 2.9.4.1 Grup Modulo 4

1. Tertutup. Karena semua entri dari operasi (+) di tabel adalah elemen dari M_3 ke M_3 terhadap operasi " $+$ " modulo 3.
2. Asosiatif, $\forall\, x, y, z \in M_3 \rightarrow (x + y) + z = x + (y + z)$

   Untuk $x = 0$ maka diperoleh

   $(0 + 0) + 0 = 0 + (0 + 0) = 0$

   $(0 + 0) + 1 = 0 + (0 + 1) = 1$

   $(0 + 0) + 2 = 0 + (0 + 2) = 2$

   $(0 + 0) + 3 = 0 + (0 + 3) = 3$

   $(0 + 2) + 0 = 0 + (2 + 0) = 2$

   $(0 + 2) + 1 = 0 + (2 + 1) = 3$

   $(0 + 2) + 2 = 0 + (2 + 2) = 0$

   $(0 + 2) + 3 = 0 + (2 + 3) = 1$

$(0+1)+0=0+(1+0)=1$	$(0+3)+0=0+(3+0)=3$
$(0+1)+1=0+(1+1)=2$	$(0+3)+1=0+(3+1)=0$
$(0+1)+2=0+(1+2)=3$	$(0+3)+2=0+(3+2)=1$
$(0+1)+3=0+(1+3)=0$	$(0+3)+3=0+(3+3)=2$

Untuk $x = 1$ maka diperoleh

$(1+0)+0=1+(0+0)=1$	$(1+2)+0=1+(2+0)=3$
$(1+0)+1=1+(0+1)=2$	$(1+2)+1=1+(2+1)=0$
$(1+0)+2=1+(0+2)=3$	$(1+2)+2=1+(2+2)=1$
$(1+0)+3=1+(0+3)=0$	$(1+2)+3=1+(2+3)=2$
$(1+1)+0=1+(1+0)=2$	$(1+3)+0=1+(3+0)=0$
$(1+1)+1=1+(1+1)=3$	$(1+3)+1=1+(3+1)=1$
$(1+1)+2=1+(1+2)=0$	$(1+3)+2=1+(3+2)=2$
$(1+1)+3=1+(1+3)=1$	$(1+3)+3=1+(3+3)=3$

Untuk $x = 2$ maka diperoleh

$(2+0)+0=2+(0+0)=2$	$(2+2)+0=2+(2+0)=0$
$(2+0)+1=2+(0+1)=3$	$(2+2)+1=2+(2+1)=1$
$(2+0)+2=2+(0+2)=0$	$(2+2)+2=2+(2+2)=2$
$(2+0)+3=2+(0+3)=1$	$(2+2)+3=2+(2+3)=3$
$(2+1)+0=2+(1+0)=3$	$(2+3)+0=2+(3+0)=1$

$(2 + 1) + 1 = 2 + (1 + 1) = 0$

$(2 + 1) + 2 = 2 + (1 + 2) = 1$

$(2 + 1) + 3 = 2 + (1 + 2) = 2$

$(2 + 3) + 1 = 2 + (3 + 1) = 2$

$(2 + 3) + 2 = 2 + (3 + 2) = 3$

$(2 + 3) + 3 = 2 + (3 + 3) = 0$

Untuk $x = 3$ maka diperoleh

$(3 + 0) + 0 = 3 + (0 + 0) = 3$

$(3 + 0) + 1 = 3 + (0 + 1) = 0$

$(3 + 0) + 2 = 3 + (0 + 2) = 1$

$(3 + 0) + 3 = 3 + (0 + 3) = 2$

$(3 + 1) + 0 = 3 + (1 + 0) = 0$

$(3 + 1) + 1 = 3 + (1 + 1) = 1$

$(3 + 1) + 2 = 3 + (1 + 2) = 2$

$(3 + 1) + 3 = 3 + (1 + 3) = 3$

$(3 + 2) + 0 = 3 + (2 + 0) = 1$

$(3 + 2) + 1 = 3 + (2 + 1) = 2$

$(3 + 2) + 2 = 3 + (2 + 2) = 3$

$(3 + 2) + 3 = 3 + (2 + 3) = 0$

$(3 + 3) + 0 = 3 + (3 + 0) = 2$

$(3 + 3) + 1 = 3 + (3 + 1) = 3$

$(3 + 3) + 2 = 3 + (3 + 2) = 0$

$(3 + 3) + 3 = 3 + (3 + 3) = 1$

Jadi terbukti bahwa $\forall x, y, z \in M_4$ berlaku $(x + y) + z = x + (y + z)$

3. Ada Identitas sedemikian sehingga $e + x = x + e = x;\ \forall\, x \in M_4$

   Untuk $x = 0$ maka diperoleh $0 + 0 = 0 + 0 = 0$

   Untuk $x = 1$ maka diperoleh $0 + 1 = 0 + 1 = 1$

   Untuk $x = 2$ maka diperoleh $0 + 2 = 0 + 2 = 2$

   Untuk $x = 3$ maka diperoleh $0 + 3 = 0 + 3 = 3$

Jadi terbukti bahwa $e = 0$ adalah identitas dari M_4 sehingga berlaku $e + x = x + e = x;\ \forall\, a \in M_4$.

4. Mempunyai invers $x^{-1} + x = x + x^{-1} = e = 0$

   Invers dari $0 = 0^{-1} = 0$

Invers dari $1 = 1^{-1} = 3$

Invers dari $2 = 2^{-1} = 2$

Invers dari $3 = 3^{-1} = 1$

Untuk $x = 0$ maka diperoleh $0 + 0 = 0 + 0 = 0$

Untuk $x = 1$ maka diperoleh $1 + 3 = 3 + 1 = 0$

Untuk $x = 2$ maka diperoleh $2 + 2 = 2 + 2 = 0$

Untuk $x = 3$ maka diperoleh $3 + 1 = 1 + 3 = 0$

Jadi terbukti bahwa $x \in M_4$ mempunyai elemen invers $x^{-1} \in M_4$.

5. Komutatif. Ambil $\forall\, x, y \in M_4$ maka berlaku $x + y = y + x$.

Untuk $x = 0$ maka diperoleh	Untuk $x = 1$ maka diperoleh
$0 + 0 = 0 + 0$	$1 + 0 = 0 + 1$
$0 + 1 = 1 + 0$	$1 + 1 = 1 + 1$
$0 + 2 = 2 + 0$	$1 + 2 = 2 + 1$
$0 + 3 = 3 + 0$	$1 + 3 = 3 + 1$

Untuk $x = 2$ maka diperoleh	Untuk $x = 3$ maka diperoleh
$2 + 0 = 0 + 2$	$3 + 0 = 0 + 3$
$2 + 1 = 1 + 2$	$3 + 1 = 1 + 3$
$2 + 2 = 2 + 2$	$3 + 2 = 2 + 3$
$2 + 3 = 3 + 2$	$3 + 3 = 3 + 2$

Jadi terbukti bahwa $\forall\, x, y \in M_4$ maka berlaku $x + y = y + x$.

Terbukti bahwa $(M_4, +)$ adalah grup abelian.

Definsi 2.9.5

Bila $(\mathbb{G},\circ)$ suatu grup dan $\mathbb{H}$ subset tidak kosong dari $\mathbb{G}$, maka $(\mathbb{H},\circ)$ disebut subgrup dari $(\mathbb{G},\circ)$ bila

i. $a \circ b \in \mathbb{H}$; $\forall\, a, b \in \mathbb{H}$ (Tertutup) dan

ii. $a^{-1} \in \mathbb{H}$; $\forall\, a \in \mathbb{H}$ (Keberadaan Invers) (Raisinghania, 1980:165).

Contoh 2.9.6

Diberikan $(M_3, +)$ adalah grup, dimana M_3 adalah himpunan bilangan modulo *3*. Tunjukkan bahwa $(M_2, +)$ adalah subgrup dari $(M_3, +)$ dan " + " adalah operasi penjumlahan.

Jawab:

Dari pembahasan sebelumnya didapatkan tabel dari operasi " + " pada modulo 3 $(M_3 = \{0,1,2\})$:

→

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Tabel 2.9.6.1 Grup Modulo 3

Ada $M_2 \subseteq M_3$ dengan tabel modulo 2 $(M_2 = \{0,1\})$ sebagai berikut:

→

+	0	1
0	0	1
1	1	0

Tabel 2.9.6.2 Grup Modulo 2

M_2dikatakan subgrup dari $(M_3, +)$ jika

(a). $x + y \in M_2, \forall\, x, y \in M_2$ (Tertutup) (b). $x^{-1} \in M_2, \forall\, x \in M_2$ (Invers)

Sehingga:

(a) Jelas M_2 tertutup, karena semua entri tabel dengan operasi $" + "$ adalah elemen M_2 ke M_2 sehingga tertutup terhadap operasi $" + "$ modulo 2.

(b) $\forall\, x \in M_2$ mempunyai invers $x^{-1} \in M_2$

Untuk $x = 0 \rightarrow x^{-1} = 0 \in M_2$

Untuk $x = 1 \rightarrow x^{-1} = 1 \in M_2$

Terbukti bahwa M_2 subgrup dari $(M_3, +)$

2.10 Sifat-sifat Grup

Teorema 2.10.1

Elemen identitas dalam suatu grup adalah tunggal (Raisinghania, 1980:75).

Bukti.

Misal $(\mathbb{G}, \circ)$ adalah grup.

Andaikan *e* dan *e'* adalah elemen identitas $(e \neq e')$ maka berlaku:

i. $e \circ e' = e' \circ e = e'$ (*e* sebagai identitas)

ii. $e \circ e' = e' \circ e = e$ (*e'* sebagai identitas)

Karena $e \circ e'$ dan $e' \circ e$ adalah elemen tunggal pada $\mathbb{G}$ maka i dan ii berakibat *e* = *e'* (kontradiksi dengan pengandaian). Hal ini berarti bahwa elemen identitas di $\mathbb{G}$ adalah tunggal.

Teorema 2.10.2

Setiap elemen dari suatu grup memiliki invers yang tunggal (Raisinghania, 1980:75).

Bukti.

Misal $(\mathbb{G},\circ)$ adalah grup dan e adalah elemen identitas di $\mathbb{G}$. Akan dibuktikan setiap elemen dari $(\mathbb{G},\circ)$ mempunyai invers tunggal.

Andaikan invers dari $a \in \mathbb{G}$ tifak tunggal yaitu a_1^{-1} dan a_2^{-1} dengan $a_1^{-1} \neq a_2^{-1}$

Misal e adalah elemen identitas di $\mathbb{G}$ maka berlaku:

$a \circ a_1^{-1} = a_1^{-1} \circ a = e$.......................... (i)

$a \circ a_2^{-1} = a_2^{-1} \circ a = e$......................... (ii)

Selanjutnya $a_1^{-1} \circ (a \circ a_2^{-1}) = a_1^{-1} \circ e = a_1^{-1}$ .... (iii)

dan $(a_1^{-1} \circ a) \circ a_2^{-1} = e \circ a_2^{-1} = a_2^{-1}$ ....(iv)

karena operasi $\circ$ bersifat asosiatif di $\mathbb{G}$ yang berarti bahwa

$a_1^{-1} \circ (a \circ a_2^{-1}) = (a_1^{-1} \circ a) \circ a_2^{-1}$……………dari (iii)dan (iv)

$a_1^{-1} = a_2^{-1}$ (Kontradiksi dengan pengandaian)

Hal ini berarti setiap elemen di $\mathbb{G}$ meempunyai invers yang tunggal.

Teorema 2.10.3

Di dalam grup berlaku hukum kanselasi (Raisinghania, 1980:76).

Bukti.

Misal $(\mathbb{G},\circ)$ adalah grup dan $a, b, c \in \mathbb{G}$.

Akan ditunjukkan:

(i) $b \circ a = c \circ a \rightarrow b = c$.....................kanselasi kanan

(ii) $a \circ b = a \circ c \rightarrow b = c$....................kanselasi kiri

Kasus (i)

$a \in \mathbb{G} \rightarrow a^{-1} \in \mathbb{G}$ (a mempunyai invers yaitu $a^{-1} \in \mathbb{G}$)

$b \circ a = c \circ a$

$(b \circ a) \circ a^{-1} = (c \circ a) \circ a^{-1}$

$b \circ (a \circ a^{-1}) = c \circ (a \circ a^{-1})$

$b \circ e = c \circ e$ (e adalah elemen identitas di $\mathbb{G}$)

$b = c$ (sifat identitas)

Kasus (ii)

$a \circ b = a \circ c$

$a^{-1} \circ (a \circ b) = a^{-1} \circ (a \circ c)$

$(a^{-1} \circ a) \circ b = (a^{-1} \circ a) \circ c$

$e \circ b = e \circ c$

$b = c$

Jadi hukum kanselasi berlaku pada sebarang grup.

Teorema 2.10.4

Invers dari invers suatu elemen dari suatu grup adalah elemen itu sendiri (Raisinghania, 1980:75).

Bukti.

Misal $(\mathbb{G},\circ)$ adalah grup dan e adalah elemen identitas di $\mathbb{G}$. Akan dibuktikan bahwa $(a^{-1})^{-1} = a$.

$a \in \mathbb{G} \to a^{-1}\mathbb{G}$ sehingga $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$ (e elemen identitas di $\mathbb{G}$)

(i) $a \circ a^{-1} = e$

$(a \circ a^{-1}) \circ (a^{-1})^{-1} = e \circ (a^{-1})^{-1}$

$a \circ (a^{-1} \circ (a^{-1})^{-1}) = (a^{-1})^{-1}$ (asosiatif)

$a \circ e = (a^{-1})^{-1}$

$a = (a^{-1})^{-1}$

(ii) $a^{-1} \circ a = e$

$(a^{-1})^{-1} \circ (a \circ a^{-1}) = (a^{-1})^{-1} \circ e$

$((a^{-1})^{-1} \circ a^{-1}) \circ a = (a^{-1})^{-1}$ (asosiatif)

$e \circ a = (a^{-1})^{-1}$

$a = (a^{-1})^{-1}$

Dari (i) dan (ii) maka $a = (a^{-1})^{-1}$

Teorema 2.10.5

Misal $(\mathbb{G},\circ)$ adalah grup. $\forall\, a, b \in \mathbb{G}$ berlaku $(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$ (Raisinghania, 1980:76).

Bukti.

Misal $(\mathbb{G},\circ)$ adalah grup. Akan dibuktikan bahwa $(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$

Andaikan $a, b \in \mathbb{G}$

$\forall\, a, b \in \mathbb{G} \rightarrow a \circ b \in \mathbb{G}$

$a \circ b \in \mathbb{G} \rightarrow (a \circ b)^{-1} \in \mathbb{G}$

Sehingga $(a \circ b) \circ (a \circ b)^{-1} = e$ ....(i)

$\forall\, a, b \in \mathbb{G} \rightarrow a^{-1} \circ b^{-1} \in \mathbb{G}$

Sehingga $(a \circ b) \circ b^{-1} \circ a^{-1} = a \circ (b \circ b^{-1}) \circ a^{-1}$ (Asosiatif)

$(a \circ b) \circ b^{-1} \circ a^{-1} = (a \circ e) \circ a^{-1}$

$(a \circ b) \circ b^{-1} \circ a^{-1} = a \circ a^{-1}$

$(a \circ b) \circ b^{-1} = a^{-1} \circ e$ ....(ii)

Dari (i) dan (ii) diperoleh : $(a \circ b) \circ (a \circ b)^{-1} = (a \circ b) \circ b^{-1} \circ a^{-1}$

Menurut teorema 2.10.3 (ii) maka $(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$

Teorema 2.10.6

Misal $(\mathbb{G},\circ)$ adalah grup. $\forall\, a, b \in \mathbb{G}$ maka persamaan $a \circ x = b$ dan $y \circ a = b$ memiliki selesaian yang tunggal di $\mathbb{G}$ (Raisinghania, 1980:77).

Bukti.

(i) Akan dibuktikan bahwa $a \circ x = b$ dan $y \circ a = b$ memiliki selesaian.

(ii) Akan dibuktikan bahwa selesaiannya tunggal di $\mathbb{G}$.

Kasus (i)

Untuk bagian $a \circ x = b$.

$\forall\, a, b \in \mathbb{G} \rightarrow$ ada $a^{-1} \in \mathbb{G}$ dan $a^{-1} \circ b \in \mathbb{G}$ (karena $\mathbb{G}$ bersifat tertutup terhadap operasi $\circ$).

Selanjutnya $a \circ x = b$

$$a^{-1} \circ (a \circ x) = a^{-1} \circ b$$

$$(a^{-1} \circ a) \circ x = a^{-1} \circ b$$

$$e \circ x = a^{-1} \circ b$$

$$x = a^{-1} \circ b$$

Untuk memeriksa bahwa $a^{-1} \circ b$ adalah selesaian dari $a \circ x = b$ didapatkan $x = (a^{-1} \circ b)$ sehingga disubstitusikan

$a \circ x = b$

$a \circ (a^{-1} \circ b)$ =b

$(a \circ a^{-1}) \circ b = 0$

$e \circ b = 0$

$b = b$ (benar)

Untuk bagian $y \circ a = b$.

$\forall\, a, b \in \mathbb{G} \rightarrow$ ada $a^{-1} \in \mathbb{G}$ dan $b \circ a^{-1} \in \mathbb{G}$ (karena $\mathbb{G}$ bersifat tertutup terhadap operasi $\circ$).

Selanjutnya $y * a = b$

$$(y \circ a) \circ a^{-1} = b \circ a^{-1}$$

$$y \circ (a \circ a^{-1}) = b \circ a^{-1}$$

$$y \circ e = b \circ a^{-1}$$

$$y = b \circ a^{-1}$$

Untuk memeriksa bahwa $b \circ a^{-1}$ adalah selesaian dari $y \circ a = b$ didapatkan $y = (b \circ a^{-1})$ sehingga disubstitusikan

$y \circ a = b$

$(b \circ a^{-1}) \circ a$ =b

$b \circ (a^{-1} \circ a) = 0$

$b \circ e = 0$

$b = b$ (benar)

Kasus (ii)

Untuk bagian $a \circ x = b$.

Misalkan $a \circ x = b$ memiliki selesaian tunggal yaitu x_1 dan x_2 dengan $x_1 \neq x_2$.

Selanjutnya $a \circ x_1 = b$ dan $a \circ x_2 = b$

Diperoleh $a \circ x_1 = a \circ x_2$

$x_1 = x_2$ (kanselasi kiri)

Hal ini bertentangan dengan pemisalan

Jadi $a \circ x = b$ memiliki selesaian tunggal di $\mathbb{G}$

Untuk bagian $y \circ a = b$.

Misalkan $y \circ a = b$ memiliki selesaian tunggal yaitu y_1 dan y_2 dengan $y_1 \neq y_2$.

Selanjutnya $y_1 \circ a = b$ dan $y_2 \circ a = b$

Diperoleh $y_1 \circ a = y_2 \circ a$

$y_1 = y_2$ (kanselasi kanan)

Hal ini bertentangan dengan pemisalan

Jadi $y \circ a = b$ memiliki selesaian tunggal di $\mathbb{G}$. *Terbukti*

2.11 Jenis-jenis Grup

Definisi 2.10.1

Suatu permutasi himpunan *A* adalah fungsi dari *A* ke *A* yang bersifat satu-satu dan onto (Siang. 2009:500).

Contoh 2.10.2

Misalkan $S = \{a, b, c, d\}$ dan fungsinya memetakan *a* ke *b*, *b* ke *d*, *c* ke *c*, dan *d* ke *a*. Maka permutasinya yaitu

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & d & c & a \end{pmatrix}$$

Dimana baris yang atas merupakan daerah asal (domain) dan baris yang bawah merupakan kawannya.

Definisi 2.10.3

Diberikan *A* himpunan berhingga $\{1,2,\dots,n\}$. Grup semua permutasi untuk *A* disebut grup simetrik pada *n*, dan dilambangkan dengan S_n (Siang. 2009:501).

Contoh 2.10.4

Diberikan grup S_3 dari $3! = 6$ elemen. Diberikan himpunan $A\{1,2,3\}$. Maka permutasi-permutasi pada A adalah sebagai berikut:

$$\rho_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \rho_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \rho_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rho_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \rho_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Sehingga

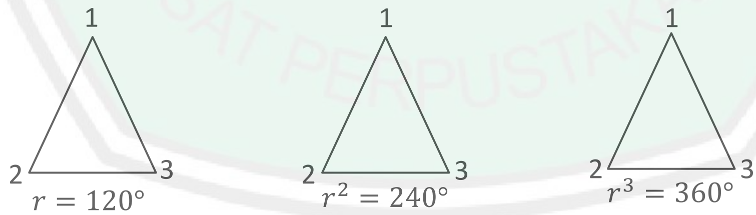
$$S_3 = \{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Definisi 2.10.5

Grup Dihedral ke *n*, D_n merupakan grup yang terdiri dari simetri-simetri *n* segibanyak(*n-poligon*)yang teratur (David & Richard.1999:23).

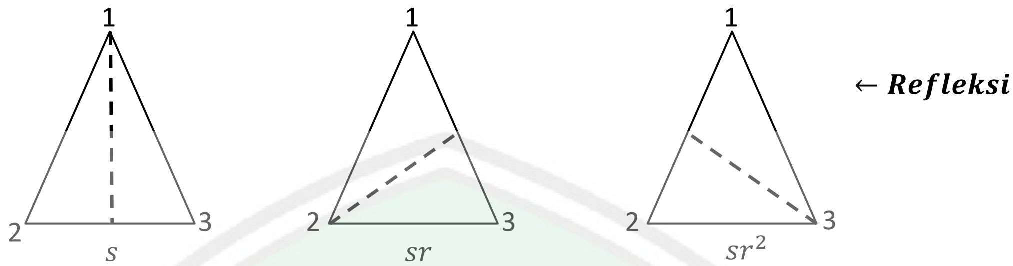
Contoh 2.10.6

Diberikan elemen-elemen grup dihedral D_6 sebagai berikut:



$\leftarrow \boldsymbol{Rotasi}$

$1 \to 2$	$1 \to 3$	$1 \to 1$
$2 \to 3$	$2 \to 1$	$2 \to 2$
$3 \to 1$	$3 \to 2$	$3 \to 3$



s	sr	sr^2
$1 \to 1$	$1 \to 3$	$1 \to 2$
$2 \to 3$	$2 \to 2$	$2 \to 1$
$3 \to 2$	$3 \to 1$	$3 \to 3$

Gambar 2.10.6.1 Segitiga yang Menyatakan Rotasi dan Refleksi pada Grup Dihedal

Sehingga didapatkan tabel sebagai berikut:

$\cdot$	r^3	r	r^2	s	sr	sr^2
r^3	r^3	r	r^2	s	sr	sr^2
r	r	r^2	r^3	sr^2	s	sr
r^2	r^2	r^3	r	sr	sr^2	s
s	s	sr	sr^2	r^3	r	r^2
sr	sr	sr^2	s	r^2	r^3	r
sr^2	sr^2	s	sr^2	r	r^2	r^3

Tabel 2.10.6.2 Tabel Grup Dihedral 6

2.12 Bilangan Bulat Modulo n

Definisi 2.12.1

Misalkan s dan t bilangan bulat, dan n bilangan bulat positif. Maka dapat dituliskan $s \equiv t(mod\, n)$ jika n membagi $t - s$. $s \equiv t(mod\, n)$ dibaca "s kongruen t modulo n". Bilangan bulat positif n disebut modulus (Stinson, 1995:3).

2.13 Hikmah menurut Islam

Menurut bahasa *hikmah* berarti "sikap bijak", "kebijakan", atau "kebijaksanaan" (Abdul., Ismail, dan Syafi'ah, 2009:147).

Definisi 2.13.1

Kata hikmah di dalam al-Qur'an ada dua macam:

1. Disebutkan berdampingan dengan kata al-Qur'an.
2. Tidak berdampingan dengan kata al-Qur'an, namun disebutkan sendirian.

   Jika bergandengan dengan kata al-Qur'an maka hikmah berarti: hadits Rasul. (Zain, 2007:5).

Sebagaimana firman Allah SWT dalam surat Al-imron ayat 164:

لَقَدْ مَنَّ ٱللَّهُ عَلَى ٱلْمُؤْمِنِينَ إِذْ بَعَثَ فِيهِمْ رَسُولاً مِّنْ أَنفُسِهِمْ يَتْلُواْ عَلَيْهِمْ ءَايَـٰتِهِۦ وَيُزَكِّيهِمْ وَيُعَلِّمُهُمُ ٱلْكِتَـٰبَ وَٱلْحِكْمَةَ وَإِن كَانُواْ مِن قَبْلُ لَفِى ضَلَـٰلٍ مُّبِينٍ ﴿١٦٤﴾

Artinya: *Sungguh Allah Telah memberi karunia kepada orang-orang yang beriman ketika Allah mengutus diantara mereka seorang Rasul dari golongan mereka sendiri, yang membacakan kepada mereka ayat-ayat Allah, membersihkan (jiwa) mereka, dan mengajarkan kepada mereka Al Kitab dan Al hikmah. dan Sesungguhnya sebelum (kedatangan Nabi) itu, mereka adalah benar-benar dalam kesesatan yang nyata.*

Namun jika kata hikmah disebutkan sendirian tanpa didampingkan dengan kata al-Qur'an maka maknanya adalah tepat dalam perkataan, perbuatan dan keyakinan, serta meletakkan sesuatu pada tempatnya yang sesuai.

Sebagaimana firman Allah SWT dalam surat Al-Baqarah ayat 269:

يُؤْتِى ٱلْحِكْمَةَ مَن يَشَآءُ ۚ وَمَن يُؤْتَ ٱلْحِكْمَةَ فَقَدْ أُوتِىَ خَيْرًا كَثِيرًا ۗ وَمَا يَذَّكَّرُ إِلَّآ أُوْلُواْ ٱلْأَلْبَـٰبِ ﴿٢٦٩﴾

Artinya: *Allah menganugerahkan Al hikmah (kefahaman yang dalam tentang Al Quran dan As Sunnah) kepada siapa yang dikehendaki-Nya. dan barangsiapa yang dianugerahi hikmah, ia benar-benar Telah dianugerahi karunia yang banyak. dan Hanya orang-orang yang berakallah yang dapat mengambil pelajaran (dari firman Allah).*

Pilar-pilar Hikmah:

Sikap hikmah dibangun di atas tiga pilar:

1. Ilmu.
2. *Al-hilmu* (Bijaksana).
3. *Al-anaah* (tidak tergesa-gesa).

Diantara tiga pilar ini, pilar yang paling utama dan yang paling penting adalah pilar pertama yaitu ilmu. Dan ilmu yang dimaksud di sini adalah al-Qur'an dan hadits serta pemahaman generasi terbaik umat (Zain, 2007:6).

Di dalam al-Qur'an kata Hikmah terulang sampai dua puluh kali, di dalam Sembilan belas (19) ayat yang ada di dalam dua belas (12) surat yaitu surat Al-Baqarah ayat 129, 151, 151, 231, dan 269, surat Al-Imran ayat 48, 81, dan 164, surat An-Nisaa' ayat 54, dan 113, surat Al-Maa-idah ayat 110, surat Luqman ayat 12, surat Shaad ayat 20, surat Al-Jum'ah ayat 2, surat An-Nahl ayat 125, surat Al-Israa' ayat 39, surat Al-Ahzab ayat 34, surat Az-Zukhruf ayat 63, dan surat Al-Qamar ayat 5.

Adapun definisi - definisi Hikmah berdasarkan berbagai tafsir yaitu:

اَلْحِكْمَةُ اْلمَنْطُوْقُ بِهَاهِىَ عُلُوْمُ الشَّرِيْعَةِ وَالطَّرِيْقَةِ

Hikmah yang boleh dibicarakan adalah ilmu-ilmu Syari'at dan ilmu-ilmu Thoriqot. (At-Ta'rifat hal. 91).

اَلْحِكْمَةُ اْلمَسْكُوْتُ عَنْهَاهِىَ اَسْرَارُ اْلحَقِيْقَةِ اَلَّتِىلاَيَطْلُعُ عَلَيْهَاعُلَمَاءُ الرُّسُوْم

وَاْلعَوَامُّ عَلَىمَايَنْبَغِى فَيَضُرَّهُمْ اَوْيُهْلِكَهُمْ

Hikmah yang tidak boleh dibicarakan adalah rahasia-rahasia hakiki, yang ulama bidang tulisan (hanya mengenal tulisan ala harfi) dan awam, itu tidak dapat mentalaahnya atas cara yang semestinya, maka menjadi sebab bahaya bagi mereka atau merusaknya. (At-Ta'rifat hal. 91–92).

كُلُّ كَلاَمٍ وَافَقَ اْلحَقَّ فَهُوَ حِكْمَةٌ

Setiap pembicaraan yang mencocoki pada sesuatu yang hak (benar) itulah Hikmah namanya. (At-Ta'rifat hal. 91).

اَلْحِكْمَةُ يُسْتَفَادُ مِنْهَامَاهُوَاْلحَقّ ُ فِي نَفْسِ اْلاَمْرِ بِحَسَبِ طَاقَةِ اْلاِنْسَانِ

Hikmah ialah hakiki sesuatu yang diambil faidah dari zatnya, di dalam suatu masalah yang baik, sesuai kadar kemampuan manusia. (At-Ta'rifat hal. 91).

اَلْحِكْمَةُ هِىَ اَلْكَلاَمُ اْلمَعْقُوْلُ اَلْمَصُوْنُ عَنِ اْلحَشْوِ

Hikmah adalah pembicaraan yang diperhitungkan dan dijaga dari kejahatan atau kesesatan. (At-Ta'rifat hal. 91).

اَلْحِكْمَةُ هِىَ اَلْعِلْمُ التَّامّ ُ وَالصُّنْعُ اْلمُتْقَنُ

Hikmah adalah ilmu yang sempurna dan pekerjaan yang dikokohkan atau ditetapkan. (Ash-Shoowi hal. 369 juz 2).

اَلْحِكْمَةُ هِىَ اَلْعِلْمُ النَّافِعُ اَلْمُؤَدِّىْ اِلَى اَلْعَمَلِ

Hikmah adalah ilmu manfaat yang bisa menyampaikan pada pengamalan. (Tafsir Jalalain hal. 43 juz awal).

اَلْحِكْمَة هِىَ اَلْمَعْرِفَة ُبِاَحْكَامِ اْلقُرْآنِ

Hikmah adalah mengetahui hukum-hukum di dalam Al-Qur,an. (Ash-Shoowi hal. 128 juz awal).

اَلْحِكْمَة ُهِىَ اَلْفَهْمُ فِى الْقُرْآنِ

Hikmah adalah paham di dalam Al-Qur,an. (Ash-Shoowi hal. 128 juz awal)

اَلْحِكْمَةُ هِىَ اَلْاِصَابَةُ فِى القَوْلِ وَالْفِعْلِ

Hikmah adalah ketetapan di dalam pembicaraan dan pekerjaan. (Ash-Shoowi hal. 128 juz awal)

اَلْحِكْمَةُ هِىَ اَلْفِقْهُ فِى الدِّيْنِ مُطْلَقًا

Hikmah adalah paham di dalam keagamaan secara keseluruhan. (Ash-Shoowi hal. 128 juz awal)

اَلْحِكْمَةُ هِىَ اَلْمَعْرِفَةُ وَالاَمَانَةُ

Hikmah adalah ma'rifat dan amanat. (Ash-Shoowi hal. 255 juz 3)

اَلْحِكْمَةُ نُوْرٌ فِى اْلقَلْبِ يُدْرَكُ بِهِ الاَشْيَاءُ كَمَايُدْرَكُ بِاْلبَصَرِ

Hikmah adalah cahaya di dalam hati, yang segala sesuatu dapat ditemukan olehnya, sebagaimana ditemukan pula oleh mata lahir. (Ash-Shoowi hal. 255 juz 3)

اَلْحِكْمَةُ هِىَ تَوْ فِيْقُ اْلعَمَلِ بِاْلعِلْمِ فَكُلُّ مَنْ اُوْتِيتَوْ فِيْقَ اْلعَمَلِ بِاْلعِلْمِ فَقَدْ اُوْ تِىَ

حِكْمَةً وَمَنْ تَعَلَّمَ شَيْئًا وَلاَيَعْلَمُ مَصَالِحَهُ وَمَفَاسِدَهُ لاَيُسَمَّى حَكِيْمًا

Hikmah adalah mengadaptasikan amal dengan ilmunya, kemudian setiap orang yang dianugrahi dengan keadaptasian amal dalam ilmunya, maka ia benar-benar dianugrahi Hikmah, selanjutnya barang siapa belajar sesuatu dalam keadaan tidak mengerti maslahat (kebaikan) dan mafsadatnya (kerusakannya) maka ia tidak dinamakan Hakim (pakar hikmah). (At-Tafsiril Munir hal. 170 juz 2)

اَلْحِكْمَةُ هِىَ اِسْتِكْمَالُ النَّفْسِ اْلاِنْسَانِيَّةِ بِاقْتِبَاسِ اْلعُلُوْمِ النَّظَرِيَّةِ وَاكْتِسَابِ اْلمَلَكَةِ

التَّامَّةِ عَلَى اْلاَفْعَالِ اْلفَاضِلَةِ عَلَى قَدْرِطَاقَتِهَا

Hikmah adalah berusaha menyempurnakan jiwa kemanusiaan dengan cara menggali ilmu-ilmu penelitian, dan berusaha memperoleh karakter yang sempurna di dalam semua pekerjaan mulia, sesuai kadar kemampuannya (manusia). (Baidlowi hal. 151 juz 4)

اَلْحِكْمَةُ هِىَ خَشْيَةُ اللهِ فَاِنَّ خَشْيَةَ اللهِ رَاْسُ كُلِّ حِكْمَةٍ

Hikmah adalah takut kepada Alloh, karena sesungguhnya rasa takut kepada Alloh adalah pokok setiap Hikmah. (Ibnu Katsir hal. 322 juz awal)

اَلْحِكْمَةُ هِىَ اْلعِلْمُ وَاْلفِقْهُ وَاْلقُرْآنُ

Hikmah adalah ilmu, paham dan mengerti hakiki Al-Qur,an. (Ibnu Katsir hal. 322 juz awal)

اَلْحِكْمَةُ هِىَ السُّنَّةُ

Hikmah adalah sunnah (langkah). (Ibnu Katsir hal. 322 juz awal)

اَلْحِكْمَةُ هِىَ اْلعَقْلُ

Hikmah adalah akal. (Ibnu Katsir hal. 322 juz awal)

اَلْحِكْمَةُ هِىَ اْلفَهْمُ وَاْلعِلْمُ وَالتَّعْبِيْرُ

Hikmah adalah faham, mengerti dan mampu memberikan ibarat. (Ibnu Katsir hal. 444 juz 3)

وَقَدْ فَسَّرَابْنُ عَبَّاسٍ رَضِىَ اللهُ عَنْهُمَا اَلْحِكْمَةَ فِى اْلقُرْآنِ بِتَعَلُّمِ اْلحَلاَلِ وَاْلحَرَامِ

Sahabat Ibnu Abas benar-benar mentafsirkan kata Hikmah di dalam Al-Qur,an, adalah berusaha mengerti tentang halal dan haram. (At-Ta'rifat hal. 91)

اَلْحِكْمَةُ فِى اللُّغَةِ اَلْعِلْمُ مَعَ اْلعَمَلِ

Hikmah menurut pengertian linguis, adalah ilmu yang disertai pengamalan. (At-Ta'rifat hal. 91)

Berdasarkan definisi-definisi di atas dapat disimpulkan bahwa yang menemukan hikmah itu adalah akal. Yaitu ketika menggunakan akal untuk berfikir maka dari situlah akan ditemukan hikmah.

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Pendahuluan Aljabar BCI

Dalam contoh 2.9.2 telah dibahas bahwa jika diberikan himpunan $\mathbb{Z}$ dilengkapi dengan operasi "+" dan memenuhi 4 aksioma yaitu $\mathbb{Z}$ tertutup terhadap operasi "+", operasi "+" bersifat asosiatif, ada elemen identitas $e \in \mathbb{Z}$, serta $a \in \mathbb{Z}$ mempunyai elemen invers $-a \in \mathbb{Z}$, maka diperoleh suatu grup $(\mathbb{Z}, +)$. Kemudian, pada aksioma ke-4 dalam definisi grup, terdapat elemen invers yang dinotasikan dengan "-", yang mana $\forall\ a \in \mathbb{Z}$, maka invers dari a dinotasikan dengan $-a$. Dari penjelasan tersebut, kemudian timbul gagasan, keistimewaan apa yang terjadi, jika diberikan suatu grup $(\mathbb{Z}, +)$, kemudian didefinisikan operasi $" * "$, yang mana $a * b = a + (-b),\ \forall a, b \in Z$ dan 0 adalah elemen identitas di $(\mathbb{Z}, +)$. Untuk mempermudah dalam penulisan, pernyataan tersebut dituliskan $(\mathbb{Z}, *, 0)$.

Setelah diperoleh suatu struktur aljabar $(\mathbb{Z}, *, 0)$, kemudian diteliti sifat-sifat yang ada pada struktur tersebut, maka diperoleh:

$\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$, berlaku

1. $\big((a * c) * (a * b)\big) * (b * c) = 0,$
2. $\big(a * (a * b)\big) * b = 0,$
3. $a * a = 0,$
4. $a * b = 0 = b * a \rightarrow a = b.$

Dari penjelasan tersebut, yang perlu diperhatikan adalah apabila diberikan suatu grup $(\mathbb{Z}, +)$, didefinisikan operasi $" * "$ yang mana mengoperasikan setiap elemen di $\mathbb{Z}$, dengan invers dari sebarang elemen di $\mathbb{Z}$ terhadap operasi $" + "$, sehingga diperoleh 4 aksioma diatas. Termotivasi dari $(\mathbb{Z},*,0)$ tersebut, kemudian diabstraksikan sehingga memenuhi definisi berikut ini:

Definisi 3.1.1

Misalkan *X* adalah himpunan tak kosong dengan operasi biner " $*$ " dan konstanta "0". Maka struktur aljabar $(X,*,0)$ dikatakan Aljabar-BCI jika memenuhi:

i. $((x*y)*(x*z))*(z*y)=0$,

ii. $(x*(x*y))*y=0$,

iii. $x*x=0$,

iv. $x*y=0=y*x \rightarrow x=y$,

untuk setiap $x,y,z \in X$. Apabila pada Aljabar-BCI berlaku $\forall x \in X, 0*x=0$, maka *X* disebut sebagai Aljabar-BCK (Saeid, 2010:550).

Contoh 3.1.2

Tunjukkan bahwa $(\mathbb{R},-,0)$ merupakan Aljabar-BCI.

($\mathbb{R}$ adalah bilangan rasional)

Ambil sebarang $a,b,c \in \mathbb{R}$ sehingga diperoleh

i. $((a-b)-(a-c))-(c-b)=((a-a)+(c-b))-(c-b)=0$

ii. $(a-(a-b))-b=a-a+b-b=0$

iii. $a-a=0$

iv. Jika $a-b=0$ dan $b-a=0$, maka $a=b$

Jadi jelas bahwa $(\mathbb{R},-,0)$ merupakan Aljabar-BCI.

Pada aksioma (*iii*) dari Aljabar-BCI, diperoleh $x*x=0, \forall x \in X$. Kemudian timbul pertanyaan, keistimewaan apa yang terjadi apabila pernyataan tersebut digeneralisasi dengan $x*y=0$, untuk sebarang $x,y \in X$.

Definisi 3.1.3

Diberikan $(X,*,0)$ adalah Aljabar-BCI. Didefinisikan relasi biner $\leq$ atas X yang mana $x \leq y$ jika dan hanya jika $x * y = 0$, untuk sebarang $x, y \in X$ (Bae, Sik, dan Neggers, 2006:40).

Teorema 3.1.4

Diberikan $(X,*,0)$ adalah Aljabar-BCI. $(X,\leq)$ merupakan *partially ordered set* (Saeid, 2010:550).

Bukti.

Akan ditunjukkan bahwa $(X,\leq)$ memenuhi aksioma *refleksif*, *antisimetris* dan *transitif*.

i. Ambil sebarang $x \in X$, dari aksioma (iii) Aljabar-BCI diperoleh bahwa $x * x = 0$, yang berarti $x \leq x, \forall x \in X$. Jadi $(X,\leq)$ memenuhi aksioma *refleksif.*

ii. Ambil sebarang $x, y \in X$, dari aksioma (*iv*) Aljabar-BCI diperoleh bahwa $x * y = 0$ dan $y * x = 0 \rightarrow x = y$, sehingga jika $x \leq y$ dan $y \leq x$ maka $x = y$, $\forall x, y \in X$. Jadi $(X,\leq)$ memenuhi aksioma *antisimetris*.

iii. Ambil sebarang $x, y, z \in X$, jika $x * y = 0$ dan $y * z = 0$, maka $x * z = \big((x * z) * 0\big) * 0 = \big((x * z) * (x * y)\big) * (y * z) = 0$. Ekuivalen dengan $\forall x, y, z \in X$, $x \leq y$ dan $\mathrm{y} \leq \mathrm{z}$, maka $x \leq z$. Jadi $(X,\leq)$ memenuhi aksioma *transitif.*

Karena $(X,\leq)$ memenuhi aksioma *refleksif, antisimetris dan transitif*, maka $(X,\leq)$ merupakan *partially ordered set.*

3.2 Sifat-sifat Aljabar-BCI

Dari definisi Aljabar-BCI di atas, kemudian diturunkan beberapa sifat dari Aljabar-BCI, yang dapat digunakan untuk membuktikan beberapa teorema terkait dengan konsep Aljabar-BCI lebih lanjut.

Lemma 3.2.1

Diberikan $(X,*,0)$ adalah Aljabar-BCI. Untuk setiap $x, y, z \in X$, berlaku:

i. $x * 0 = 0 \rightarrow x = 0$,

ii. $x \leq y \rightarrow z * y \leq z * x$ dan $x * z \leq y * z$,

iii. $(x * y) * z = (x * z) * y$ (Tiande & Changchang, 1985:511).

Bukti.

i. Ambil sebarang $x \in X$, diketahui $x * 0 = 0$, sehingga diperoleh

$0 * x = (x * 0) * x \ldots (3.1.1(iii))$

$= \left(x * (x * x)\right) * x \ldots (3.1.1\ (ii))$

$= 0$

Karena $x * 0 = 0$ dan $0 * x = 0$, berdasarkan aksioma (iv) Aljabar-BCI, disimpulkan bahwa $x = 0$.

ii. Ambil sebarang $x, y, z \in X$, dari aksioma (i) Aljabar-BCI diperoleh bahwa

$\left((z * y) * (z * x)\right) * (x * y) = 0,$

Dari definisi 3.1.3, karena $x \leq y$ maka $x * y = 0$, sehingga

$\left((z * y) * (z * x)\right) * 0 = 0$, dari (3.2.1.$i$) diperoleh $(z * y) * (z * x) = 0$ yang berarti $(z * y) \leq (z * x)$.

Ambil sebarang $x, y, z \in X$, dari aksioma (i) Aljabar-BCI diperoleh bahwa

$\left((x * z) * (x * y)\right) * (y * z) = 0$, yang berarti

$\big((x * z) * (x * y)\big) \leq (y * z)$, dari sifat sebelumnya, kedua ruas dioperasikan dengan $(x * z)$ sehingga diperoleh

$$(x * z) * (y * z) \leq (x * z) * \big((x * z) * (x * y)\big)$$

Dari aksioma (ii) Aljabar-BCI diperoleh $((x * z) * ((x * z) * (x * y)\,)) * (x * y) = 0$.

Dari definisi 3.1.3, karena $x \leq y$ maka $((x * z) * (y * z)) * 0 = 0$. Dari (3.2.1.$i$) didapatkan $(x * z) * (y * z) = 0$, dengan kata lain $(x * z) \leq (y * z)$.

iii. Ambil sebarang $x, y, z \in X$, dari aksioma (iv) Aljabar-BCI, akan ditunjukkan bahwa:

1. $\big((x * y) * z\big) * \big((x * z) * y\big) = 0,$
2. $\big((x * z) * y\big) * \big((x * y) * z\big) = 0,$

sehingga $(x * y) * z = (x * z) * y$.

Kasus 1.

Dari aksioma (ii) Aljabar-BCI diperoleh bahwa $\big(x * (x * z)\big) * z = 0$. Dari definisi 3.1.3, diperoleh $\big(x * (x * z)\big) \leq z$. Kemudian, dari (3.2.1.$ii$), kedua ruas dioperasikan dengan $(x * y)$, sehingga diperoleh

$(x * y) * z \leq (x * y) * \big(x * (x * z)\big)$. … (1.$i$)

Dari aksioma (i) Aljabar-BCI, diperoleh $\Big((x * y) * \big(x * (x * z)\big)\Big) * ((x * z) * y) = 0$, Dari definisi 3.1.3, diperoleh

$(x * y) * \big(x * (x * z)\big) \leq (x * z) * y$. …(1.$ii$)

Dari (1.i) dan (1.ii), dengan memanfaatkan sifat transitif pada Aljabar-BCI, diperoleh $(x * y) * z \leq (x * z) * y$.

Dari definisi 3.1.3, diperoleh $((x * y) * z) * \big((x * z) * y\big) = 0$.

Kasus 2.

Dari aksioma (ii) Aljabar-BCI diperoleh bahwa $\big(x * (x * y)\big) * y = 0$. Dari definisi 3.1.3, diperoleh $\big(x * (x * y)\big) \leq y$. Kemudian, dari (3.2.1.$ii$), kedua ruas dioperasikan dengan $(x * z)$, sehingga diperoleh

$(x * z) * y \leq (x * z) * \big(x * (x * y)\big)$. … (2.$i$)

Dari aksioma (i) Aljabar-BCI, diperoleh $\Big((x * z) * \big(x * (x * y)\big)\Big) * ((x * y) * z) = 0$, Dari definisi 3.1.3, diperoleh

$(x * z) * \big(x * (x * y)\big) \leq (x * y) * z$. …(2.$ii$)

Dari (2.i) dan (2.ii), dengan memanfaatkan sifat transitif pada Aljabar-BCI, diperoleh $(x * z) * y \leq (x * y) * z$.

Dari definisi 3.1.3, diperoleh $((x * z) * y) * \big((x * y) * z\big) = 0$.

Jadi $(x * y) * z = (x * z) * y$.

Lemma 3.2.2

Diberikan $(X, * ,0)$ adalah Aljabar-BCI, untuk setiap $x, y, z \in X$, berlaku:

i. $x * 0 = x$

ii. $x * y = 0 \rightarrow (z * y) * (z * x) = 0$

iii. $0 * (x * y) = 0 \rightarrow (0 * x) * (0 * y) = 0$

iv. $0 * \big(0 * (0 * x)\big) = 0 * x$ (Lin, Xu & Meng, 2007:4988).

Bukti.

i. Ambil sebarang $x \in X$, untuk menunjukkan $x * 0 = x$, dengan menggunakan aksioma (iv) Aljabar-BCI, cukup ditunjukkan:

1. $(x * 0) * x = 0$
2. $x * (x * 0) = 0$

Kasus (1)

Berdasarkan aksioma (iii) dan (ii) Aljabar-BCI, diperoleh

$(x * 0) * x = (x * (x * x)) * x = 0.$

Kasus (2)

Berdasarkan aksioma (iv) Aljabar-BCI, untuk menunjukkan $x * (x * 0) = 0$, cukup ditunjukkan bahwa:

2.i $\quad (x * (x * 0)) * 0 = 0$

2. ii $\quad 0 * (x * (x * 0)) = 0$

Untuk 2.i, jelas terjamin pada aksioma (ii) Aljabar-BCI.

Untuk 2.ii, berdasarkan aksioma (ii), (iii), dan (i) Aljabar-BCI diperoleh

$$\begin{aligned} 0 * (x * (x * 0)) &= (x * (x * 0)) * 0 * (x * (x * 0)) \quad \ldots (3.1.1(iii)) \\ &= ((x(x * 0)) * (x * x)) * (x * (x * 0)) \quad \ldots (3.1.1(i)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Sehingga $x * (x * 0) = 0$ dan $(x * 0) * x = 0$, dari aksioma (iv) Aljabar-BCI, jelas bahwa $(x * 0) = x$.

ii. Ambil sebarang $x, y, z \in X$, dengan $x * y = 0$. Dari aksioma (i) Aljabar-BCI dan (3.2.1.i), diperoleh

$\big((z * y) * (z * x)\big) * (x * y) = 0$ ... diketahui $x * y = 0$

$\big((z * y) * (z * x)\big) * 0$ ... $(3.2.1.i)$

$(z * y) * (z * x) = 0$

iii. Ambil sebarang $x, y, z \in X$, dari aksioma (ii) Aljabar-BCI, diperoleh

$\big(x * (x * y)\big) * y = 0$ ... kedua ruas dioperasikan dengan x

$\Big(\big(x * (x * y)\big) * y\Big) * x = 0 * x$ ... $(3.2.1.iii)$

$\Big(\big(x * (x * y)\big) * x\Big) * y = 0 * x$ ... $(3.2.1.iii)$

$\big((x * x) * (x * y)\big) * y = 0 * x$ ... $\big(3.1.1(iii)\big)$

$\big(0 * (x * y)\big) * y = 0 * x$ ... $(3.2.1.iii)$

$(0 * y) * (x * y) = 0 * x$ ... dioperasikan $(0 * y)$

$\big((0 * y) * (x * y)\big) * (0 * y) = (0 * x) * (0 * y)$ ... $(3.2.1.iii)$

$\big((0 * y) * (0 * y)\big) * (x * y) = (0 * x) * (0 * y)$ ... $\big(3.1.1(iii)\big)$

$0 * (x * y) = (0 * x) * (0 * y)$

iv. Ambil sebarang $x, y, z \in X$, dari aksioma (iv) Aljabar-BCI, akan ditunjukkan bahwa:

(1) $0 * \big(0 * (0 * x)\big) * (0 * x) = 0$

(2) $(0 * x) * \Big(0 * \big(0 * (0 * x)\big)\Big) = 0$

Kasus (1)

Dari aksioma (ii) Aljabar-BCI, jelas bahwa $0 * \big(0 * (0 * x)\big) * (0 * x) = 0$

Kasus (2)

Dari aksioma (i) Aljabar-BCI, diperoleh $(0 * x) * \big(0 * \big(0 * (0 * x)\big)\big) * \big(\big(0 * (0 * x)\big) * x\big) = 0$ dari aksioma (ii) Aljabar-BCI, jelas bahwa $\big(0 * (0 * x)\big) * x = 0$, sehingga

$$\Big((0 * x) * \big(0 * \big(0 * (0 * x)\big)\big)\Big) * 0 = 0 \quad \ldots (3.2.1.i)$$

$$(0 * x) * \big(0 * \big(0 * (0 * x)\big)\big) = 0$$

Karena memenuhi kedua sifat (1) dan (2), maka berdasarkan aksioma (iv) Aljabar-BCI jelas bahwa $0 * \big(0 * (0 * x)\big) = 0 * x$.

Kembali ke $(\mathbb{Z}, * ,0)$ yang dijelaskan di atas, apabila diberikan suatu aturan $0 * x = 0, \forall x \in \mathbb{Z}$, maka hanya akan dipenuhi jika $x = 0$. Kemudian diabstraksikan, sehingga memenuhi definisi Aljabar-BCI *p-semisimple* yang disajikan dibawah ini.

Definisi 3.2.3

Diberikan $(X, * ,0)$ adalah Aljabar-BCI. Didefinisikan suatu himpunan $M = \{x \in X | 0 * x = 0, \forall\, x \in X\}$, maka M disebut sebagai BCK-*Part* atas X (Saeid, 2010:550).

Contoh 3.2.4

Pada contoh 3.1.2 telah ditunjukkan bahwa $(\mathbb{R}, -,0)$ adalah Aljabar-BCI. Ambil sebarang $a \in \mathbb{R}$ maka $0 - a = 0$ maka $a = 0$. Jadi, $M = \{0\}$ adalah BCK-*Part* atas $\mathbb{R}$.

Definisi 3.2.5

Diberikan $(X,*,0)$ adalah Aljabar-BCI. Jika $M = \{0\}$, maka X dikatakan Aljabar-BCI *p-semisimple* (Saeid, 2010:550).

Contoh 3.2.6

Berdasarkan **contoh 3.2.4**, diperoleh $M = \{0\}$. Karena hanya $0 \in M$ maka $(\mathbb{R}, -, 0)$ dikatakan Aljabar-BCI *p-semisimple*.

Seperti halnya pada struktur aljabar lain, seperti di grup terdapar konsep tentang subgrup, maka di Aljabar-BCI terdapat konsep mengenai karakterisasi dari himpunan bagian atau subset himpunan bagian dalam Aljabar-BCI, yaitu ideal dan ideal tertutup.

Definisi 3.2.7

Diberikan $(X,*,0)$ adalah Aljabar-BCI. $A \subseteq X$. A dikatakan ideal di X jika $0 \in A$ dan $\forall (x * y), y \in A$ maka $x \in A$ (Bae, Sik Kim & J. Neggers, 2006:40).

Definisi 3.2.8

Diberikan $(X,*,0)$ adalah Aljabar-BCI. A ideal di X. A dikatakan ideal tertutup di X, jika $\forall a \in A$, berlaku $0 * a \in A$(Bae, Sik Kim & J. Neggers, 2006:40).

Contoh 3.2.9

Diberikan $(M_{2\times 2}, +)$ adalah grup dan $O_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Tunjukkan bahwa $J = \{\alpha A | A \in M_{2\times 2}, \alpha \in \mathbb{R}\}$ adalah ideal di $(M_{2\times 2}, , *, 0)$ dimana operasi "$*$" didefinisikan $\forall A, B \in M_{2\times 2}, A * B = A + (-B)$.

Jawab:

Karena entri dari $(M_{2\times2},*\,,0)$ adalah bilangan riil, berdasarkan contoh 3.1.2. jelas bahwa $(M_{2\times2},*\,,0)$ adalah Aljabar-BCI. Berdasarkan definisi ideal, akan ditunjukkan:

i. $\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix} \in J$

ii. $\forall\, A * B, B \in J\ maka\ A \in J$

Kasus i

Untuk $A = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$, diperoleh $\alpha A = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix} = 0_{2\times2} \in J$.

Kasus ii

Ambil sebarang $A = \begin{bmatrix}a_1 & a_2\\a_3 & a_4\end{bmatrix} \in M_{2\times2}, B = \begin{bmatrix}\alpha b_1 & \alpha b_2\\\alpha b_3 & \alpha b_4\end{bmatrix} \in J$ dengan $A * B \in J$ dan $B \in J$, akan ditunjukkan bahwa $A \in J$. Karena $A * B \in J$, misalkan $C = A * B$ untuk suatu $C = \begin{bmatrix}\alpha c_1 & \alpha c_2\\\alpha c_3 & \alpha c_4\end{bmatrix} \in J$, maka

$$A * B = C$$

$$A + (-B) = C$$

$$A = C + B = \begin{bmatrix}\alpha c_1 & \alpha c_2\\\alpha c_3 & \alpha c_4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\alpha b_1 & \alpha b_2\\\alpha b_3 & \alpha b_4\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\alpha c_1 + \alpha b_1 & \alpha c_2 + \alpha b_2\\\alpha c_3 + \alpha b_3 & \alpha c_4 + \alpha b_4\end{bmatrix}$$

$$= \alpha \begin{bmatrix}c_1 + b_1 & c_2 + b_2\\c_3 + b_3 & c_4 + b_4\end{bmatrix} \in J$$

Dibawah ini, akan disajikan mengenai beberapa pernyataan yang ekuivalen dalam Aljabar-BCI *p-semisimple*.

Teorema 3.2.10

Diberikan $(X,*,0)$ adalah Aljabar-BCI. Maka pernyataan dibawah ini adalah ekuivalen:

(1) X adalah Aljabar-BCI *p-semisimple*,

(2) $(0*(0*x)) = x$,

(3) $x*(0*y) = y*(0*x)$.

Bukti.

(1) → (2). Ambil sebarang $x \in X$, dari aksioma (iii) Aljabar-BCI, diperoleh

$(0*x)*(0*x) = 0$

kemudian dari (3.2.1.*iii*), didapatkan

$(0*(0*x))*x = 0.$ (*i*)

Dari definisi 3.1.3, diperoleh $(0*(0*x)) \leq x$. Dengan mengoperasikan x pada kedua ruas, dari (3.2.1.*ii*) diperoleh $x*x \leq x*(0*(0*x))$, dari aksioma (iii) Aljabar-BCI dihasilkan $0 \leq x*(0*(0*x))$, dengan kata lain $0*(x*(0*(0*x)))=0$.

Karena X adalah Aljabar-BCI *p-semisimple*, yang berarti

$\forall y \in X, 0*y = 0$ maka $y = 0$. Misalkan $y = x*(0*(0*x))$, maka diperoleh

$x*\big(0*(0*x)\big) = 0.$ (*ii*)

Dari (*i*) dan (*ii*), berdasarkan aksioma (*iv*) Aljabar-BCI disimpulkan

$0*(0*x) = x.$

(2) → (3). Ambil sebarang $x, y \in X$, dengan $(0*(0*x)) = x$, maka

$x*(0*y) = (0*(0*x))*(0*y)$, dari (3.2.1.*iii*) diperoleh

$= (0*(0*y))*(0*x)$, karena $\big(0*(0*y)\big) = y$, maka diperoleh $x * (0 * y) = y * (0 * x)$.

$(3) \rightarrow (1)$. Ambil sebarang $x \in X$, dengan $0 * x = 0$, akan ditunjukkan bahwa $x = 0$. Dari (3.2.2.*i*) dan aksioma (*iii*) Aljabar-BCI, diperoleh $x = x * 0 = x * (0 * 0)$, dengan mensubsitusikan $y = 0$ pada $x * (0 * y) = y * (0 * x)$, maka diperoleh $x * (0 * 0) = 0 * (0 * x)$, diketahui bahwa $0 * x = 0$, maka $x = 0$. Jadi X adalah Aljabar-BCI *p-semisimple*.

3.3 Membangun Aljabar-BCI dari Grup

Pada pembahasan sebelumnya, telah disinggung bahwa apabila diberikan grup $(Z, +)$ dapat dibuat Aljabar-BCI, yaitu $(Z, *, 0)$ seperti yang dijelaskan diatas. Dibawah ini akan disajikan karakterisasi tentang Aljabar-BCI yang dibentuk dari grup.

Teorema 3.3.1

Sebarang grup $(\mathbb{G}, +)$, didefinisikan suatu operasi " $*$ ", yang memenuhi $a * b = a + (-b), \forall\, a, b \in \mathbb{G}$. Dimana $(-b)$ adalah elemen invers dari b terhadap operasi " $+$ ". Maka $(\mathbb{G}, *, 0)$ merupakan Aljabar-BCI.

i. Akan ditunjukkan $\forall a, b, c \in \mathbb{G}$ berlaku $((a * b) * (a * c)) * (c * b) = 0$.

$$((a * b) * (a * c)) * (c * b) = \big(a + (-b)\big) + (-(a + (-c))) + \Big(-\big(c + (-b)\big)\Big)$$

$$= ((a + (-b)) + ((-a) + c)) + (-c) + b$$

$$= a + (-b) + (-a) + c + (-c) + b$$

$$= \big(a + (-a)\big) + \big(c + (-c)\big) + \big(b + (-b)\big) = 0$$

ii. Akan ditunjukkan $\forall a, b \in \mathbb{G}$ berlaku $(a * (a * b)) * b = 0$.

$$(a * (a * b)) * b = \Big(a + \Big(-\big(a + (-b)\big)\Big)\Big) + (-b)$$

$$= \left(a + (-a + b)\right) + (-b) = \left(\left(a + (-a)\right) + b\right) + (-b)$$

$$= \left(a + (-a)\right) + (b + (-b)) = 0 + 0 = 0$$

iii. Akan ditunjukkan $\forall a \in \mathbb{G}$ berlaku $a * a = 0$.

$a * a = a + (-a) = 0$

iv. Akan ditunjukkan $\forall a, b \in \mathbb{G}$, jika $a * b = 0$ dan $b * a = 0$, maka $a = b$.

Untuk $a * b = a + (-b) = 0$

$(a + (-b)) + b = 0 + b$

$a + (-b) + b = 0 + b$

$a + 0 = b$

$a = b$

Untuk $b * a = b + (-a) = 0$

$(b + (-a)) + a = 0 + a$

$b + ((-a) + a) = 0 + a$

$b + 0 = 0 + a$

$b = a$

Jadi $(\mathbb{G}, *, 0)$ merupakan Aljabar-BCI.

Dari teorema tersebut, menunjukkan bahwa, apabila diberikan suatu grup $(\mathbb{G}, +)$, maka dapat dibentuk Aljabar-BCI $(\mathbb{G}, *, 0)$, yang mana operasi $" * "$ tersebut, mengoperasikan setiap elemen di grup $\mathbb{G}$, dengan invers dari sebarang elemen di grup $\mathbb{G}$ terhadap operasi $" + "$.

Contoh 3.3.2

Diberikan grup $(M_2, +)$ dengan $M_2 = \{0,1\}$ adalah himpunan bilangan modulo 2. Didefinisikan operasi $" * "$ dengan $x * y = x + (-y), \forall x, y \in M_2$, dimana $(-y)$

adalah elemen invers dari y terhadap operasi $" + "$. Tunjukkan bahwa $(M_2, *, 0)$ adalah Aljabar-BCI.

Jawab.

Dari operasi $" + "$ dan $" * "$ pada modulo 2, diperoleh tabel berikut ini:

$\rightarrow$

+	0	1
0	0	1
1	1	0

Tabel 3.3.2.1 Grup Modulo 2

*	0	1
0	0	1
1	1	0

Tabel 3.3.2.2 Aljabar-BCI $(M_2, *, 0)$

Gambar 3.3.2.3Diagram Hasse $(M_2, *, 0)$

i. Akan ditunjukkan $\forall x, y, z \in M_2$, berlaku $\big((x * y) * (x * z)\big) * (z * y) = 0$.

Untuk $x = 1$, maka diperoleh

$\big((1 * 1) * (1 * 1)\big) * (1 * 1) = 0$

$\big((1 * 1) * (1 * 0)\big) * (0 * 1) = 0$

$\big((1 * 0) * (1 * 1)\big) * (1 * 0) = 0$

$\big((1 * 0) * (1 * 0)\big) * (0 * 0) = 0$

Untuk $x = 0$, maka diperoleh

$\big((0 * 1) * (0 * 1)\big) * (1 * 1) = 0$

$\big((0 * 1) * (0 * 0)\big) * (0 * 1) = 0$

$\big((0 * 0) * (0 * 1)\big) * (1 * 0) = 0$

$\big((0 * 0) * (0 * 0)\big) * (0 * 0) = 0$

Jadi terbukti bahwa $\forall x, y, z \in M_2$, berlaku $\big((x * y) * (x * z)\big) * (z * y) = 0$.

ii. Akan ditunjukkan $\forall x, y \in M_2$, berlaku $(x * (x * y)) * y = 0$.

Untuk $x = 1, y = 1$ maka diperoleh $(1 * (1 * 1)) * 1 = 0$

Untuk $x = 1, y = 0$ maka diperoleh $(1 * (1 * 0)) * 0 = 0$

Untuk $x = 0, y = 1$ maka diperoleh $(0 * (0 * 1)) * 1 = 0$

Untuk $x = 0, y = 0$ maka diperoleh $(0 * (0 * 0)) * 0 = 0$

Jadi terbukti bahwa $\forall x, y \in M_2$, berlaku $(x * (x * y)) * y = 0$

iii. Dari tabel jelas bahwa $\forall x \in M_2$, berlaku $x * x = 0$.

iv. Dari tabel, jelas bahwa $\forall x \in M_2$, jika $x * x = 0$, maka $x = x$

Hal ini juga dapat dibuktikan melalui kedua tabel yaitu

Invers dari suatu elemen diperoleh dari tabel grup modulo 2:

Invers dari $0 = 0^{-1} = 0$

Invers dari $1 = 1^{-1} = 1$

i. Pilih $x = 1, y = 1$, dan $z = 1 \rightarrow \big((1 * 1) * (1 * 1)\big) * (1 * 1) = 0$

Berdasarkan tabel grup modulo 2:

$\big((1 * 1) * (1 * 1)\big) * (1 * 1)$

$\big((1 + (1)^{-1}) * (1 + (1)^{-1})\big) * (1 + (1)^{-1})$

$\big((1 + 1) * (1 + 1)\big) * (1 + 1)$

$(0 * 0) * 0$

$(0 + (0)^{-1}) * 0$

$(0 + 0) * 0$

$0 * 0$

$(0 + (0)^{-1})$

$0 + 0 = 0$

Berdasarkan tabel Aljabar-BCI:

$\big((1 * 1) * (1 * 1)\big) * (1 * 1)$

$(0 * 0) * 0$

$0 * 0 = 0$

ii. Pilih $x = 1$ dan $y = 0 \rightarrow \big(1 * (1 * 0)\big) * 0 = 0$

Berdasarkan tabel grup modulo 2:

$\big(1 * (1 * 0)\big) * 0$

$\big(1 * (1 + (0)^{-1})\big) * 0$

$\big(1 * (1 + 0)\big) * 0$

$(1 * 1) * 0$

$(1 + (1)^{-1}) * 0$

$(1 + 1) * 0$

$0 * 0$

$0 + (0)^{-1}$

$0 + 0 = 0$

Berdasarkan tabel Aljabar-BCI:

$\big(1 * (1 * 0)\big) * 0$

$(1 * 1) * 0$

$0 * 0 = 0$

iii. Pilih $x = 1 \rightarrow 1 * 1 = 0$

Berdasarkan tabel grup modulo 2:

$1 * 1$

$1 + (1)^{-1}$

$1 + 1 = 0$

Berdasarkan tabel Aljabar-BCI:

$1 * 1 = 0$

iv. Pilih $x = 0$ dan $y = 0 \rightarrow 0 * 0 = 0$ dan $0 * 0 = 0 \rightarrow x = y$

Berdasarkan tabel grup modulo 2:

$x * y$	$y * x$
$0 * 0$	$0 * 0$
$0 + (0)^{-1}$	$0 + (0)^{-1}$
$0 + 0 = 0$	$0 + 0 = 0$

Berdasarkan tabel Aljabar-BCI:

$x * y$	$y * x$
$0 * 0 = 0$	$0 * 0 = 0$

Terbukti bahwa $(M_2,* ,0)$ adalah Aljabar-BCI.

Berangkat dari **contoh 3.3.2,** penulis tertarik untuk mencari bentuk umum tabel Aljabar-BCI dari grup modulo n. Diberikan grup $(M_n, +)$ dengan M_n adalah himpunan bilangan modulo n dengan $n \in N$. Didefinisikan operasi " $*$ " dengan $x * y = x + (-y), \forall x, y \in M_n$, dimana $(-y)$ adalah elemen invers dari y terhadap operasi " $+$ ". Sebelum membuktikan bahwa $(M_n,* ,0)$ adalah Aljabar-BCI, terlebih dahulu akan disajikan dibuktikan bahwa M_2, M_3, M_4, M_5, M_6 dengan operasi " $*$ " dan elemen khusus "0" adalah Aljabar-BCI.

I. Untuk $(M_2, +)$ ke $(M_2,*, 0)$

Hal ini telah terbukti bahwa $(M_2,*, 0)$ adalah Aljabar-BCI dari **contoh 3.3.2**.

II. Untuk $(M_3, +)$ ke $(M_3,*, 0)$

$M_3 = \{0,1,2\}$

Dari operasi " $+$ " dan " $*$ " pada modulo 3, diperoleh tabel berikut ini:

$\rightarrow$

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Tabel 3.3.2.4 Grup Modulo 3

*	0	1	2
0	0	2	1
1	1	0	2
2	2	1	0

Tabel 3.3.2.5 Aljabar-BCI $(M_3,* ,0)$

Gambar 3.3.2.6 Diagram Hasse $(M_3,* ,0)$

Akan disajikan dua cara untuk membuktikan bahwa $(M_3,*,0)$ adalah Aljabar-BCI. Bukti pertama dengan metode pembuktian langsung yaitu metode pengecekan satu persatu menggunakan tabel 3.3.2.4 Aljabar-BCI $(M_3,*,0)$dan untuk bukti pertama ini dapat dilihat dalam *lampiran 1*, bukti kedua dengan pembuktian berdasarkan kasus-kasus menggunakan tabel 3.3.2.3. grup modulo 3 dan tabel 3.3.2.4 Aljabar-BCI $(M_3,*,0)$, sebagaimana berikut:

Dari tabel grup modulo 3 diperoleh invers dari setiap elemen:

Invers dari $0 = 0^{-1} = 0$

Invers dari $1 = 1^{-1} = 2$

Invers dari $2 = 2^{-1} = 1$

i. Pilih $x = 2, y = 1, \text{dan } z = 0 \rightarrow \big((2 * 1) * (2 * 0)\big) * (0 * 1) = 0$

Berdasarkan tabel grup modulo 3:

$\big((2 * 1) * (2 * 0)\big) * (0 * 1)$

$\big((2 + (1)^{-1}) * (2 + (0)^{-1})\big) * (0 + (1)^{-1})$

$\big((2 + 2) * (2 + 0)\big) * (0 + 2)$

$(1 * 2) * 2$

$(1 + (2)^{-1}) * 2$

$(1 + 1) * 2$

$2 * 2$

$2 + (2)^{-1}$

$2 + 1 = 0$

Berdasarkan tabel Aljabar-BCI:

$\left((2 * 1) * (2 * 0)\right) * (0 * 1)$

$(1 * 2) * 2$

$2 * 2 = 0$

ii. Pilih $x = 1$ dan $y = 2 \rightarrow \left(1 * (1 * 2)\right) * 2 = 0$

Berdasarkan tabel grup modulo 3:

$\left(1 * (1 * 2)\right) * 2$

$\left(1 * (1 + (2)^{-1})\right) * 2$

$\left(1 * (1 + 1)\right) * 2$

$(1 * 2) * 2$

$(1 + (2)^{-1}) * 2$

$(1 + 1) * 2$

$2 * 2$

$2 + (2)^{-1}$

$2 + 1 = 0$

Berdasarkan tabel Aljabar-BCI:

$\big(1 * (1 * 2)\big) * 2$

$(1 * 2) * 2$

$2 * 2 = 0$

iii. Pilih $x = 2 \rightarrow 2 * 2 = 0$

Berdasarkan tabel grup modulo 3:

$2 * 2$

$2 + (2)^{-1}$

$2 + 1 = 0$

Berdasarkan tabel Aljabar-BCI:

$2 * 2 = 0$

iv. Pilih $x = 1$ dan $y = 1 \rightarrow 1 * 1 = 0$ dan $1 * 1 = 0 \rightarrow x = y$

$x * y$	$y * x$
$1 * 1$	$1 * 1$
$1 + (1)^{-1}$	$1 + (1)^{-1}$
$1 + 2 = 0$	$1 + 2 = 0$

Berdasarkan tabel Aljabar-BCI:

$x * y$	$y * x$
$1 * 1 = 0$	$1 * 1 = 0$

Terbukti bahwa $(M_3, * ,0)$ adalah Aljabar-BCI.

III. Untuk $(M_4, +)$ ke $(M_4, *, 0)$

$M_4 = \{0,1,2,3\}$

Dari operasi " + " dan " $*$ " pada modulo 4, diperoleh tabel berikut ini:

→

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Tabel 3.3.2.7 Grup Modulo 4

*	0	1	2	3
0	0	3	2	1
1	1	0	3	2
2	2	1	0	3
3	3	2	1	0

Tabel 3.3.2.8 Aljabar-BCI $(M_4, *, 0)$

Gambar 3.3.2.9 Diagram Hasse $(M_4, *, 0)$

Bukti dengan metode pengecekan satu persatu menggunakan tabel 3.3.2.6 Aljabar-BCI $(M_4, *, 0)$ disajikan pada *lampiran 2*.

Berikut ini bukti menggunakan tabel 3.3.2.5 Grup Modulo 4 dan menggunakan tabel 3.3.2.6 Aljabar-BCI $(M_4, *, 0)$.

Dari tabel grup modulo 4 diperoleh invers dari setiap elemen:

Invers dari $0 = 0^{-1} = 0$

Invers dari $1 = 1^{-1} = 3$

Invers dari $2 = 2^{-1} = 2$

Invers dari $3 = 3^{-1} = 1$

i. Pilih $x = 3, y = 1,$ dan $z = 2 \rightarrow ((3 * 1) * (3 * 2)) * (2 * 1) = 0$

Berdasarkan tabel grup modulo 4:

$((3 * 1) * (3 * 2)) * (2 * 1)$

$((3 + (1)^{-1}) * (3 + (2)^{-1})) * (2 + (1)^{-1})$

$\big((3+3)*(3+2)\big)*(2+3)$

$(2*1)*1$

$(2+(1)^{-1})*1$

$(2+3)*1$

$1*1$

$1+(1)^{-1}$

$1+3=0$

Berdasarkan tabel Aljabar-BCI:

$\big((3*1)*(3*2)\big)*(2*1)$

$(2*1)*1$

$1*1=0$

ii. Pilih $x=3$ dan $y=0 \rightarrow \big(3*(3*0)\big)*0=0$

Berdasarkan tabel grup modulo 4:

$\big(3*(3*0)\big)*0$

$\big(3*(3+(0)^{-1})\big)*0$

$\big(3*(3+0)\big)*0$

$(3*3)*0$

$(3+(3)^{-1})*0$

$(3+1)*0$

$0*0$

$0+(0)^{-1}$

$0+0=0$

Berdasarkan tabel Aljabar-BCI:

$\big(3 * (3 * 0)\big) * 0$

$(3 * 3) * 0$

$0 * 0 = 0$

iii. Pilih $x = 3 \rightarrow 3 * 3 = 0$

Berdasarkan tabel grup modulo 4:

$3 * 3$

$3 + (3)^{-1}$

$3 + 1 = 0$

Berdasarkan tabel Aljabar-BCI:

$3 * 3 = 0$

iv. Pilih $x = 2$ dan $y = 2 \rightarrow 2 * 2 = 0$ dan $2 * 2 = 0 \rightarrow x = y$

Berdasarkan tabel grup modulo 4:

$x * y$	$y * x$
$2 * 2$	$1 * 1$
$2 + (2)^{-1}$	$2 + (2)^{-1}$
$2 + 2 = 0$	$2 + 2 = 0$

Berdasarkan tabel Aljabar-BCI:

$x * y$	$y * x$
$2 * 2 = 0$	$2 * 2 = 0$

Terbukti bahwa $(M_4, * ,0)$ adalah Aljabar-BCI.

IV. Untuk $(M_5, +)$ ke $(M_5, *, 0)$

$M_5 = \{0,1,2,3,4\}$

Dari operasi " + " dan " $*$ " pada modulo 5, diperoleh tabel berikut ini:

$\rightarrow$

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

Tabel 3.3.2.10 Grup Modulo 5

*	0	1	2	3	4
0	0	4	3	2	1
1	1	0	4	3	2
2	2	1	0	4	3
3	3	2	1	0	4
4	4	3	2	1	0

Tabel 3.3.2.11 Aljabar-BCI $(M_5,*,0)$

Gambar 3.3.2.12 Diagram Hasse $(M_5,*,0)$

Bukti dengan metode pengecekan satu persatu menggunakan tabel 3.3.2.8 Aljabar-BCI $(M_5,*,0)$ disajikan pada *lampiran 3*.

Berikut ini bukti menggunakan tabel 3.3.2.7 Grup Modulo 5 dan menggunakan tabel 3.3.2.8 Aljabar-BCI $(M_5,*,0)$.

Dari tabel grup modulo 5 diperoleh invers dari setiap elemen:

Invers dari $0 = 0^{-1} = 0$

Invers dari $1 = 1^{-1} = 4$

Invers dari $2 = 2^{-1} = 3$

Invers dari $3 = 3^{-1} = 2$

Invers dari $4 = 4^{-1} = 1$

i. Pilih $x = 2, y = 4,$ dan $z = 1 \rightarrow \big((2 * 4) * (2 * 1)\big) * (1 * 4) = 0$

   Berdasarkan tabel grup modulo 5:

   $\big((2 * 4) * (2 * 1)\big) * (1 * 4)$

$\left((2+(4)^{-1})*(2+(1)^{-1})\right)*(1+(4)^{-1})$

$\left((2+1)*(2+4)\right)*(1+1)$

$(3*1)*2$

$(3+(1)^{-1})*2$

$(3+4)*2$

$2*2$

$2+(2)^{-1}$

$2+3=0$

Berdasarkan tabel Aljabar-BCI:

$\left((2*4)*(2*1)\right)*(1*4)$

$(3*1)*2$

$2*2=0$

ii. Pilih $x=1$ dan $y=4 \rightarrow \left(1*(1*4)\right)*4=0$

Berdasarkan tabel grup modulo 5:

$\left(1*(1*4)\right)*4$

$\left(1*(1+(4)^{-1})\right)*4$

$\left(1*(1+1)\right)*4$

$(1*2)*4$

$(1+(2)^{-1})*4$

$(1+3)*4$

$4*4$

$4 + (4)^{-1}$

$4 + 1 = 0$

Berdasarkan tabel Aljabar-BCI:

$\big(1 * (1 * 4)\big) * 4$

$(1 * 2) * 4$

$4 * 4 = 0$

iii. Pilih $x = 4 \rightarrow 4 * 4 = 0$

Berdasarkan tabel grup modulo 5:

$4 * 4$

$4 + (4)^{-1}$

$4 + 1 = 0$

Berdasarkan tabel Aljabar-BCI:

$4 * 4 = 0$

iv. Pilih $x = 3$dan $y = 3 \rightarrow 3 * 3 = 0$ dan $3 * 3 = 0 \rightarrow x = y$

Berdasarkan tabel grup modulo 5:

$x * y$	$y * x$
$3 * 3$	$3 * 3$
$3 + (3)^{-1}$	$3 + (3)^{-1}$
$3 + 2 = 0$	$3 + 2 = 0$

Berdasarkan tabel Aljabar-BCI:

$x * y$	$y * x$
$3 * 3 = 0$	$3 * 3 = 0$

Terbukti bahwa $(M_5, * ,0)$ adalah Aljabar-BCI.

V. Untuk $(M_6, +)$ ke $(M_6, *, 0)$

$M_6 = \{0,1,2,3,4,5\}$

Dari operasi " + " dan " $*$ " pada modulo 6, diperoleh tabel berikut ini:

→

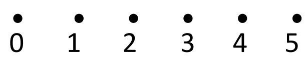
+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

Tabel 3.3.2.13 Grup Modulo 6

→

$*$	0	1	2	3	4	5
0	0	5	4	3	2	1
1	1	0	5	4	3	2
2	2	1	0	5	4	3
3	3	2	1	0	5	4
4	4	3	2	1	0	5
5	5	4	3	2	1	0

Tabel 3.3.2.14 Aljabar-BCI $(M_6, * ,0)$



Gambar 3.3.2.15 Diagram Hasse $(M_6, * ,0)$

Bukti dengan metode pengecekan satu persatu menggunakan tabel 3.3.2.10 Aljabar-BCI (M_6,$*$,0) disajikan pada *lampiran 4*.

Berikut ini bukti menggunakan tabel 3.3.2.9 Grup Modulo 6 dan menggunakan tabel 3.3.2.10 Aljabar-BCI (M_6,$*$,0).

Dari tabel grup modulo 6 diperoleh invers dari setiap elemen:

Invers dari $0 = 0^{-1} = 0$

Invers dari $1 = 1^{-1} = 5$

Invers dari $2 = 2^{-1} = 4$

Invers dari $3 = 3^{-1} = 3$

Invers dari $4 = 4^{-1} = 2$

Invers dari $5 = 5^{-1} = 1$

i. Pilih $x = 3, y = 1,$ dan $z = 5 \rightarrow \big((3 * 1) * (3 * 5)\big) * (5 * 1) = 0$

   Berdasarkan tabel grup modulo 6:

   $\big((3 * 1) * (3 * 5)\big) * (5 * 1)$

   $\big((3 + (1)^{-1}) * (3 + (5)^{-1})\big) * (5 + (1)^{-1})$

   $\big((3 + 5) * (3 + 1)\big) * (5 + 5)$

   $(2 * 4) * 4$

   $(2 + (4)^{-1}) * 4$

   $(2 + 2) * 4$

   $4 * 4$

   $4 + (4)^{-1}$

   $4 + 2 = 0$

Berdasarkan tabel Aljabar-BCI:

$((3 * 1) * (3 * 5)) * (5 * 1)$

$(2 * 4) * 4$

$4 * 4 = 0$

ii. Pilih $x = 2$ dan $y = 3 \rightarrow (2 * (2 * 3)) * 3 = 0$

Berdasarkan tabel grup modulo 6:

$(2 * (2 * 3)) * 3$

$(2 * (2 + (3)^{-1})) * 3$

$(2 * (2 + 3)) * 3$

$(2 * 5) * 3$

$(2 + (5)^{-1}) * 3$

$(2 + 1) * 3$

$3 * 3$

$3 + (3)^{-1}$

$3 + 3 = 0$

Berdasarkan tabel Aljabar-BCI:

$(2 * (2 * 3)) * 3$

$(2 * 5) * 3$

$3 * 3 = 0$

iii. Pilih $x = 4 \rightarrow 4 * 4 = 0$

Berdasarkan tabel grup modulo 6:

$4 * 4$

$4 + (4)^{-1}$

$4 + 1 = 0$

Berdasarkan tabel Aljabar-BCI:

$4 * 4 = 0$

iv. Pilih $x = 3$dan $y = 3 \rightarrow 3 * 3 = 0$ dan $3 * 3 = 0 \rightarrow x = y$

Berdasarkan tabel grup modulo 6:

$x * y$	$y * x$
$3 * 3$	$3 * 3$
$3 + (3)^{-1}$	$3 + (3)^{-1}$
$3 + 2 = 0$	$3 + 2 = 0$

Berdasarkan tabel Aljabar-BCI:

$x * y$	$y * x$
$3 * 3 = 0$	$3 * 3 = 0$

Terbukti bahwa $(M_6, * ,0)$ adalah Aljabar-BCI.

Dari tabel Aljabar-BCI $M_2, M_3, M_4, M_5,$ dan M_6 dapat digeneralisasikan ke modulo *n*. Karena terdapat pola yang teratur dan dapat diumumkan sampai modulo *n* dimana $\forall n \in \mathbb{N}$.

VI. Untuk $(M_n, +)$ ke $(M_n, *, 0)$

Dari operasi " $+$ " dan " $*$ " pada modulo n, diperoleh tabel berikut ini:

→

$+$	0	1	⋯	⋯	⋯	n-2	n-1
0	0	1	2	⋯	⋯	n-2	n-1
1	1	2	⋯	⋯	⋯	n-1	0
⋮	2	⋯	⋯	⋯	n-1	0	1
⋮	⋯	⋯	⋯	n-1	0	1	⋮
⋮	⋯		n-1	0	1	⋯	⋮
n-2	n-2	n-1	0	1	⋯	⋯	n-3
n-1	n-1	0	1	⋯	⋯	n-3	n-2

Tabel 3.3.2.16 Grup Modulo n

→

$*$	0	1	⋯	⋯	⋯	n-2	n-1
0	0	n-1	n-2	⋯	⋯	2	1
1	1	0	n-1	⋯	⋯	3	2
⋮	⋮	1	0	n-1	⋯	⋯	⋮
⋮	⋮	⋯	⋯	0	n-1	⋯	⋮
⋮	⋮	⋯	⋯	1	0	n-1	⋮
n-2	n-2	n-3	⋯	⋯	1	0	n-1
n-1	n-1	n-2	⋯	⋯	⋯	1	0

Tabel 3.3.2.17 Aljabar-BCI $(M_n, * ,0)$

Gambar 3.3.2.18 Diagram Hasse $(M_n, * ,0)$

$\rightarrow$

*	0	1	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	n-2	n-1
0	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$a_{1(n-1)}$	a_{1n}
1	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$a_{2(n-1)}$	a_{2n}
$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$	a_{33}	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\ddots$	$\cdots$	$\cdots$	$\vdots$
$\vdots$	$a_{(n-2)1}$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$a_{(n-2)(n-2)}$	$\cdots$	$\vdots$
n-2	$a_{(n-1)1}$	$a_{(n-1)2}$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$a_{(n-1)(n-1)}$	$a_{(n-1)n}$
n-1	a_{n1}	a_{n2}	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$a_{n(n-1)}$	a_{nn}

Tabel 3.3.2.19 Indek Entri Aljabar-BCI $(M_n,* ,0)$

Sehingga entri tabel Aljabar-BCI $(M_n,* ,0)$.

1. $a_{ij} = 0$ untuk $i = j$
2. $a_{i(i+k)} = n - k$ untuk $i < j$
3. $a_{i(i-k)} = k$ untuk $i > j$

Bukti.

1. Berdasarkan definisi Aljabar-BCI aksioma (*iii*), yaitu $x * x = 0$ maka jelas bahwa $a_{ij} = 0$ untuk $i = j$
2. Berdasarkan tabel 3.3.2.17 Aljabar-BCI $(M_n,*,0)$ dan tabel 3.3.2.18 Indek Entri Aljabar-BCI $(M_n,* ,0)$ dapat diketahui bahwa suku barisan minimal untuk $i < j$ adalah a_{12} dimana $a_{12} = n - 1$

   Terlihat dari tabel 3.3.2.18 Indek Entri Aljabar-BCI, ketika indek entri dari a_{12} kolomnya bergerak maka nilai entriannya cenderung turun, hal ini terlihat pada tabel 3.3.2.17 Aljabar-BCI. Ketika indek entri dari a_{12} barisnya bergerak maka nilai entriannya cenderung naik, sebagaimana berikut:

$$\text{Ketika kolomnya bergerak } \left.\begin{aligned} a_{12} &= n-1 \\ a_{13} &= n-2 \\ a_{14} &= n-3 \\ &\vdots \\ a_{1n} &= 1 \end{aligned}\right\} a_{1(k+1)} = n-k$$

$$\text{Ketika barisnya bergerak } \left.\begin{aligned} a_{1n} &= 1 \\ a_{2n} &= 2 \\ a_{3n} &= 3 \\ &\vdots \\ a_{(n-1)n} &= n-1 \end{aligned}\right\} a_{kn} = n-k$$

Sehingga ketika kolom dan baris sama-sama bergerak maka $a_{k(k+1)} = n - k$

Terbukti benar bahwa $a_{i(i+k)} = n - k$ untuk $i < j$

3. Berdasarkan tabel 3.3.2.17 Aljabar-BCI $(M_n, *, 0)$ dan tabel 3.3.2.18 Indek Entri Aljabar-BCI $(M_n, *, 0)$ dapat diketahui bahwa suku barisan minimal untuk $i > j$ adalah a_{21} dimana $a_{21} = 1$

   Terlihat dari tabel 3.3.2.18 Indek Entri Aljabar-BCI, ketika indek entri dari a_{21} kolomnya bergerak maka nilai entriannya cenderung turun, hal ini terlihat pada tabel 3.3.2.17 Aljabar-BCI. Ketika indek entri dari a_{21} barisnya bergerak maka nilai entriannya cenderung naik, sebagaimana berikut:

$$\text{Ketika kolomnya bergerak } \left.\begin{aligned} a_{n1} &= n-1 \\ a_{n2} &= n-2 \\ a_{n3} &= n-3 \\ &\vdots \\ a_{n(n-1)} &= 1 \end{aligned}\right\} \quad a_{nk} = k$$

$$\text{Ketika barisnya bergerak } \left.\begin{aligned} a_{21} &= 1 \\ a_{31} &= 2 \\ a_{41} &= 3 \\ &\vdots \\ a_{n1} &= n-1 \end{aligned}\right\} \quad a_{(k+1)1} = k$$

Sehingga ketika kolom dan baris sama-sama bergerak maka $a_{(k+1)k} = k$

Terbukti benar bahwa $a_{(j+k)j} = a_{i(i-k)} = k$ untuk $i > j$

Contoh 3.3.3

1. Diberikan $(M_{100}, *, 0)$

   Ambil $x = 70$ dan $y = 40$ maka $x * y = 70 * 40 = 70 + (40)^{-1} = 70 + 60 = 130 (mod\ 100) = 30$

   Dapat diketahui pula bahwa $i = 70$ dan $j = 40$ dan karena $i > j$ sehingga $a_{i(i-k)} = k \rightarrow a_{70(70-30)} = 30$

2. Diberikan $(M_{500}, *, 0)$

   Ambil $x = 220$ dan $y = 90$ maka $x * y = 220 * 90 = 220 + (90)^{-1} = 220 + 410 = 630 (mod\ 500) = 130$

   Dapat diketahui pula bahwa $i = 220$ dan $j = 90$ dan karena $i > j$ sehingga $a_{i(i-k)} = k \rightarrow a_{220(220-130)} = 130$

3. Diberikan $(M_{900},*,0)$

   Ambil $x = 330$ dan $y = 570$ maka $x * y = 330 * 570 = 330 + (570)^{-1} = 330 + 330 = 660(mod\ 900) = 660$

   Dapat diketahui pula bahwa $i = 330$ dan $j = 570$ dan karena $i < j$ sehingga $a_{i(i+k)} = n - k \rightarrow a_{330(330+240)} = 900 - 240 = 660$

4. Diberikan $(M_{1100},*\ ,0)$

   Ambil $x = 270$ dan $y = 890$ maka $x * y = 270 * 890 = 270 + (890)^{-1} = 270 + 210 = 480(mod\ 1100)$ =480

   Dapat diketahui pula bahwa $i = 270$ dan $j = 890$ dan karena $i < j$ sehingga $a_{i(i+k)} = n - k \rightarrow a_{270(270+620)} = 1100 - 620 = 480$

Teorema 3.3.4

Diberikan $(M_n, +)$ adalah Grup dengan M_n adalah himpunan bilangan modulo n dengan $n \in \mathbb{N}$. Didefinisikan operasi " $*$ " dengan $x * y = x + (-y)$ dimana $(-y)$ adalah elemen invers dari y terhadap operasi " $+$ ". Maka $(M_n,*,0)$ adalah Aljabar-BCI.

Bukti.

Akan ditunjukkan bahwa $(M_n,*,0)$ adalah Aljabar-BCI

Akan diperlihatkan bahwa $(M_n,*,0)$ memenuhi aksioma Aljabar-BCI dengan bantuan entrian tabel Aljabar-BCI $(M_n,*,0)$.

i. $\forall\, a, b, c \in M_n$ maka berlaku $\big((a * b) * (a * c)\big) * (c * b) = 0$

   $\big((a * b) * (a * c)\big) * (c * b)$

   $\big((a + (b)^{-1}) * (a + (c)^{-1})\big) * (c + (b)^{-1})$

$\left(\left(a+(n-b)\right)*\left(a+(n-c)\right)\right)*\left(c+(n-b)\right)$

$\left((a+n-b)*(a+n-c)\right)*(c+n-b)$

$\left((a+n-b)+(a+n-c)^{-1}\right)*(c+n-b)$

$\left((a+n-b)+\left(n-(a-c)\right)\right)*(c+n-b)$

$(2n-b+c)*(c+n-b)$

$(2n-b+c)+(c+n-b)^{-1}$

$(2n-b+c)+\left(n-(c-b)\right)$

$3n-b+c-c+b$

$3n$

Karena $3n \equiv 0(\text{mod } n)$

Terbukti bahwa $\left((a*b)*(a*c)\right)*(c*b)=0$

ii. $\forall\ a,b \in M_n$ maka berlaku $\left(a*(a*b)\right)*b=0$

$\left(a*(a*b)\right)*b$

$\left(a*(a+(b)^{-1})\right)*b$

$\left(a*\left(a+(n-b)\right)\right)*b$

$\left(a*(a+n-b)\right)*b$

$(a+(a+n-b)^{-1}))*b$

$\left(a+\left(n-(a-b)\right)\right)*b$

$(a+n-a+b)*b$

$(n+b)+(b)^{-1}$

$(n+b)+(n-b)$

$2n + b - b$

$2n$

Karena $2n \equiv 0(\mathrm{mod}\ n)$

Terbukti bahwa $\big(a * (a * b)\big) * b = 0$

iii. $\forall\ a \in M_n$ maka berlaku $a * a = 0$

$a * a$

$a + (a)^{-1}$

$a + (n - a)$

n

Karena $n \equiv 0(\mathrm{mod}\ n)$

Terbukti bahwa $a * a = 0$

iv. $\forall\ a, b\ \in M_n$ maka berlaku $a * b = 0$ dan $b * a = 0 \rightarrow a = b$

$a * b$	$b * a$
$a + (b)^{-1}$	$b + (a)^{-1}$
$a + (n - b)$	$b + (n - a)$
$a + n - b$	$b + n - a$

Karena $a = b$ maka $n \equiv 0(\mathrm{mod}\ n)$

Terbukti bahwa $a * b = 0$ dan $b * a = 0 \rightarrow a = b$

Dengan cara lain

$(a - b + n) \rightarrow a \equiv b(\mathrm{mod}\ n)$ dan

$(b - a + n) \rightarrow b \equiv a(\mathrm{mod}\ n)$

Sehingga terbukti bahwa $a = b$.

Yang perlu diperhatikan pada teorema 3.3.1 diatas adalah operasi $" + "$ memang benar-benar operasi penjumlahan, bukan sekedar notasi operasi secara umum dalam sebarang grup. Karena tidak sebarang grup merupakan Aljabar-BCI dengan operasi yang didefinisikan seperti teorema 3.3.1 diatas. Berikut ini disajikan contoh grup yang bukan merupakan Aljabar-BCI.

Contoh 3.3.5

Diberikan $(D_8,*)$ adalah grup dehidral sisi 4. Didefinisikan operasi $"\blacksquare"$ yang mana $a \blacksquare b = a * (b)^{-1}$, dengan $(b)^{-1}$ adalah elemen invers b terhadap operasi $" * "$. Tunjukkan bahwa $(D_8, \blacksquare, 1)$ bukan Aljabar-BCI.

Jawab:

$D_8 = \{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$

Dari operasi $" * "$ dan $"\blacksquare"$ pada grup dehidral sisi delapan (D_8), diperoleh tabel berikut ini:

$\rightarrow$

$*$	1	r	r^2	r^3	s	sr	sr^2	sr^3
1	1	r	r^2	r^3	s	sr	sr^2	sr^3
r	r	r^2	r^3	1	sr^3	s	sr	sr^2
r^2	r^2	r^3	1	r	sr^2	sr^3	s	sr
r^3	r^3	1	r	r^2	sr	sr^2	sr^3	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	1	r	r^2	r^3
sr	sr	sr^2	sr^3	s	r^3	1	r	r^2
sr^2	sr^2	sr^3	s	sr	r^2	r^3	1	r
sr^3	sr^3	s	sr	sr^2	r	r^2	r^3	1

Tabel 3.3.5.1 Grup Dihedral 8

→

$\blacksquare$	1	r	r^2	r^3	s	sr	sr^2	sr^3
1	1	r^3	r^2	r	s	sr	sr^2	sr^3
r	r	1	r^3	r^2	sr^3	s	sr	sr^2
r^2	r^2	r	1	r^3	sr^2	sr^3	s	sr
r^3	r^3	r^2	r	1	sr	sr^2	sr^3	s
s	s	sr^3	sr^2	sr	1	r	r^2	r^3
sr	sr	s	sr^3	sr^2	r^3	1	r	r^2
sr^2	sr^2	sr	s	sr^3	r^2	r^3	1	r
sr^3	sr^3	sr^2	sr	s	r	r^2	r^3	1

Tabel 3.3.5.2 Tabel Grup Dihedral 8 yang Didefinisikan $a\blacksquare b = a * (b)^{-1}$, dengan $(b)^{-1}$ adalah Elemen Invers b Terhadap Operasi " $*$ ".

Hal ini dapat dibuktikan melalui kedua tabel yaitu

Invers dari suatu elemen diperoleh dari tabel grup dihedral 8:

Invers dari $1 = 1^{-1} = 1$

Invers dari $r = r^{-1} = r^3$

Invers dari $r^2 = (r^2)^{-1} = r^2$

Invers dari $r^3 = (r^3)^{-1} = r$

Invers dari $s = s^{-1} = s$

Invers dari $sr = sr^{-1} = sr$

Invers dari $sr^2 = (sr^2)^{-1} = sr^2$

Invers dari $sr^3 = (sr^3)^{-1} = sr^3$

i. Akan ditunjukkan $\forall x, y, z \in M_2$, berlaku $\big((x\blacksquare y)\blacksquare(x\blacksquare z)\big)\blacksquare(z\blacksquare y) = 1$.

   Pilih $x = 1, y = s$ dan $z = sr$ maka $\big((1\blacksquare s)\blacksquare(1\blacksquare sr)\big)\blacksquare(sr\blacksquare s) = 1$

   Berdasarkan tabel grup dihedral 8:

   $\big((1\blacksquare s)\blacksquare(1\blacksquare sr)\big)\blacksquare(sr\blacksquare s)$

$\left((1 * (s)^{-1}) ■ (1 * (sr)^{-1})\right) ■ (sr * (s)^{-1})$

$\left((1 * s) ■ (1 * sr)\right) ■ (sr * s)$

$(s ■ sr) ■ r^3$

$(s * (sr)^{-1}) ■ r^3$

$(s * sr) ■ r^3$

$r ■ r^3$

$r * (r^3)^{-1}$

$r * r = r^2 \neq 1$

Berdasarkan tabel grup dihedral yang didefinisikan $a ■ b = a * (b)^{-1}$, dengan $(b)^{-1}$ adalah elemen invers b terhadap operasi " $*$ ".

$\left((1 ■ s) ■ (1 ■ sr)\right) ■ (sr ■ s)$

$(s ■ sr) ■ r^3$

$r ■ r^3 = r^2 \neq 1$

Jadi terbukti bahwa $\forall x, y, z \in D_8$, tidak berlaku $\left((x ■ y) ■ (x ■ z)\right) ■ (z ■ y) = 1$. Karena aksioma pertama untuk Aljabar-BCI tidak dipenuhi maka jelas terbukti bahwa $(D_8, ■, 1)$ bukan Aljabar-BCI.

3.4 Hubungan antara Subgrup dan Ideal Tertutup dari Grup Abelian dan Aljabar-BCI *p-semisimple*

Dalam grup, terdapat konsep mengenai grup abelian, dibawah ini, disajikan hubungan antara grup abelian dengan Aljabar-BCI *p-semisimple*.

Teorema 3.4.1

Diberikan Aljabar-BCI *p-semisimpel* $(X,*,0)$. Jika di X didefinisikan operasi $"+"$ sebagai berikut $\forall x, y \in X, x + y = x * (0 * y)$. Maka X terhadap $"+"$ merupakan grup abelian dengan 0 sebagai elemen identitas (Tiande & Changchang, 1985:514).

Bukti.

i. Karena operasi $"*"$ merupakan operasi biner, maka jelas bahwa

$\forall x, y \in X,\ x + y = x * (0 * y)$, dengan $(0 * y) \in X \rightarrow x * (0 * y) \in X$ (sifat tertutup)

ii. Akan ditunjukkan $\forall x, y, z \in X$ berlaku $x + (y + z) = (x + y) + z$.

$x + (y + z) = x * (0 * (y * (0 * z)))$ …(dari definisi)

$= (y * (0 * z)) * (0 * x) = (y * (0 * x)) * (0 * z)$…(3.2.10.(3)&3.2.1.*iii*)

$= (x * (0 * y)) * (0 * z)$ …(3.2.10.(3))

$= (x + y) + z$ … (dari definisi) (sifat assosiatif)

iii. Akan ditunjukkan $\forall x, y \in X$ berlaku $x + y = y + x$.

$x + y = x * (0 * y)$

$= y * (0 * x)$

$= y + x$ (sifat komutatif)

iv. Akan ditunjukkan $\forall x \in X$ terdapat $0 \in X$ sehingga $0 + x = x + 0 = x$.

$x + 0 = 0 + x$ …(sifat komutatif pada teorema 3.4.1.(*iii*))

$= 0 * (0 * x)$ …(teorema 3.2.10.(2))

$= x$ …(dari definisi)

v. Akan ditunjukkan $\forall x \in X$ terdapat elemen invers x, dinotasikan dengan $-x = 0 * x$, sedemikian hingga $x + (-x) = 0$.

$x + (0 * x) = (0 * x) + x$ …(sifat komutatif pada teorema 3.4.1.(iii))

$= (0 * x) * (0 * x)$ …(dari definisi)

$= 0$ … (aksioma (iii) pada definisi 3.1.1)

Contoh 3.4.2

Diberikan $(M_3, * ,0)$ Aljabar-BCI *p-semisimple* dengan $M_3 = \{0,1,2\}$ adalah himpunan bilangan modulo 3. Didefinisikan operasi " $*$ " dengan $\forall x, y \in M_3, x + y = x * (0 * y)$. Tunjukkan bahwa $(M_3, +)$ adalah Grup Abelian.

Jawab:

Berdasarkan pembahasan sebelumnya telah terbukti bahwa $(M_3, * ,0)$ adalah Aljabar BCI.

Dari operasi " $*$ " akan ditunjukkan bahwa $0 * x = 0, \forall x \in M_3$ maka $x = 0$.

Untuk $x = 0$ maka diperoleh $0 * 0 = 0$

Untuk $x = 1$ maka diperoleh $0 * 1 = 2$

Untuk $x = 2$ maka diperoleh $0 * 2 = 1$

Karena hanya akan dipenuhi jika $x = 0$ maka $(M_3, * ,0)$ adalah Aljabar-BCI *p-semisimple.*

Akan ditunjukkan bahwa $(M_3, +)$ adalah grup abelian.

1. Jelas, $(M_3, +)$ tertutup, karena semua entri pada tabel adalah elemen dari M_3 ke M_3.

2. Ambil $\forall x, y, z \in M_3 \rightarrow (x+y)+z = x+(y+z)$

   $(x+y)+z = x+(y+z)$

   $\big(x*(0*y)\big)+z = x+\big(y*(0*z)\big)$

   $\big(x*(0*y)\big)*(0*z) = x*\Big(0*\big(y*(0*z)\big)\Big)$

   Pilih $x=0, y=2$ dan $z=1$ maka diperoleh

   $\big(0*(0*2)\big)*(0*1) = 0*\Big(0*\big(2*(0*1)\big)\Big)$

   $(0*1)*2 = 0*(2*2)$

   $2*2 = 0*0$

   $0=0$

Jadi terbukti bahwa $\forall x, y, z \in M_3$ berlaku $(x+y)+z = x+(y+z)$

3. Ada Identitas sedemikian sehingga $e+x = x+e = x;\ \forall\, x \in M_3$

   Untuk $x=0$ maka diperoleh $0+0 = 0+0$

   $$0*(0*0) = 0*(0*0)$$

   $$0*0 = 0*0$$

   $$0 = 0$$

   Untuk $x=1$ maka diperoleh $0+1 = 1+0$

   $$0*(0*1) = 1*(0*0)$$

   $$0*2 = 1*0$$

   $$1 = 1$$

Untuk $x = 2$ maka diperoleh $0 + 2 = 2 + 0$

$$0 * (0 * 2) = 2 * (0 * 0)$$

$$0 * 1 = 2 * 0$$

$$2 = 2$$

Jadi terbukti bahwa $e = 0$ adalah identitas dari M_3 sehingga berlaku $e + x = x + e = x;\ \forall\, a \in M_3$.

4. Mempunyai invers $x^{-1} + x = x + x^{-1} = e = 0$

Invers dari $0 = 0^{-1} = 0$

Invers dari $1 = 1^{-1} = 2$

Invers dari $2 = 2^{-1} = 1$

Untuk $x = 0$ maka diperoleh $0 + 0 = 0 + 0$

$$0 * (0 * 0) = 0 * (0 * 0)$$

$$0 * 0 = 0 * 0$$

$$0 = 0$$

Untuk $x = 1$ maka diperoleh $2 + 1 = 1 + 2$

$$2 * (0 * 1) = 1 * (0 * 2)$$

$$2 * 2 = 1 * 1$$

$$0 = 0$$

Untuk $x = 2$ maka diperoleh $1 + 2 = 2 + 1$

$$1 * (0 * 2) = 2 * (0 * 1)$$

$$1 * 1 = 2 * 2$$

$$0 = 0$$

Jadi terbukti bahwa $x \in M_3$ mempunyai elemen invers $x^{-1} \in M_3$.

5. Ambil $\forall\, x, y \in M_3$ maka berlaku $x + y = y + x$.

Pilih $x = 2$ dan $y = 1$

$$x + y = y + x$$

$$2 + 1 = 1 + 2$$

$$2 * (0 * 1) = 1 * (0 * 2)$$

$$2 * 2 = 1 * 1$$

$$0 = 0$$

Jadi terbukti bahwa $\forall\, x, y \in M_3$ maka berlaku $x + y = y + x$.

Jadi terbukti bahwa $(M_3, +)$ adalah grup abelian.

Teorema 3.4.3

Grup abelian $(X, +)$ dengan 0 sebagai elemen identitas terhadap operasi $" + "$. Didefinisikan operasi $" * "$ sebagai berikut $x * y = x + (-y)$, $\forall x, y \in X$. Dengan $(-y)$ adalah elemen invers y terhadap operasi $" + "$. Maka $(X, *, 0)$ adalah Aljabar-BCI *p-semisimple*.

Bukti.

i. Ambil $x, y, z \in X$, akan ditunjukkan $\big((x * y) * (x * z)\big) * (z * y) = 0$.

$$\big((x * y) * (x * z)\big) * (z * y) = \Big(\big(x + (-y)\big) * \big(x + (-z)\big)\Big) * \big(z + (-y)\big)$$

$$= \Big(\big(x + (-y)\big) + \Big(-\big(x + (-z)\big)\Big)\Big) * \big(z + (-y)\big)$$

$$= (x + (-y) + (-x) + z) * \big(z + (-y)\big)$$

$$= (x + (-y) + (-x) + z) + \Big(-\big(z + (-y)\big)\Big)$$

$$= x + (-y) + (-x) + z + (-z) + y$$

$= x + (-x) + (-y) + y + z + (-z)$

$= 0 + 0 + 0 = 0$

ii. Ambil $x, y \in X$, akan ditunjukkan $\big(x * (x * y)\big) * y = 0$.

$\big(x * (x * y)\big) * y = \Big(x + \Big(-\big(x + (-y)\big)\Big)\Big) + (-y)$

$= x + \big((-x) + y\big) + (-y) = x + (-x) + y + (-y)$

$= 0 + 0 = 0$

iii. Ambil $x \in X$, akan ditunjukkan $x * x = 0$.

$x * x = x + (-x) = 0$

iv. Ambil $x, y \in X$, akan ditunjukkan jika $x * y = 0$ dan $y * x = 0$, maka $x = y$.

Diketahui $x * y = 0$ dan $y * x = 0$ maka $x + (-y) = 0$ dan $y + (-x) = 0$.

$x = x + 0 = x + (y + (-x)) = x + y + (-x) = x + (-x) + y = y$.

$y = y + 0 = y + (x + (-y)) = y + x + (-y) = y + (-y) + x = x$.

Terbukti bahwa $(X,* ,0)$ adalah Aljabar-BCI

v. Dari teorema (3.2.10.(2)), akan dibuktikan $(X,* ,0)$ adalah Aljabar-BCI *p-semisimpel* dengan menunjukkan $\forall x \in X, 0 * (0 * x) = x$.

$0 * (0 * x) = 0 + \Big(-\big(0 + (-x)\big)\Big) = 0 + (-(0) + x)$

$= 0 + (-0) + x = x$.

Jadi $(X,* ,0)$ adalah Aljabar-BCI *p-semisimpel.*

Contoh 3.4.4

Diberikan grup abelian $(M_4,+)$, jika didefinisikan sebagai berikut $x * y = x + (-y)$, $\forall x, y \in M_4$. Dengan $(-y)$ adalah elemen invers y terhadap operasi " + ". Tunjukkan bahwa $(M_4,*,0)$adalah Aljabar-BCI *p-semisimple*.

Jawab:

$M_4 = \{0,1,2,3\}$

Dalam bab sebelumnya telah dibahas bahwa $(M_4,+)$ adalah Grup Abelian. Sehingga akan ditunjukkan bahwa $(M_4,*,0)$ adalah Aljabar-BCI *p-semisimple* dengan definisi bahwa $x * y = x + (-y), \forall\, x, y \in M_4$.

Akan diperlihatkan bahwa $(M_4,*,0)$ adalah Aljabar-BCI dan $0 * x = 0, \forall\, x \in M_4 \rightarrow x = 0$.

Dalam bab sebelumnya terdapat tabel grup modulo M_4, yaitu

→

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Tabel 3.4.4.1 Grup Modulo 4

Sehingga invers setiap elemen yaitu

Invers dari $0 = 0^{-1} = 0$

Invers dari $1 = 1^{-1} = 3$

Invers dari $2 = 2^{-1} = 2$

Invers dari $3 = 3^{-1} = 1$

i. Ambil $1, 2, 3 \in M_4$, maka berlaku $\big((1 * 2) * (1 * 3)\big) * (3 * 2) = 0$

$\big((1 * 2) * (1 * 3)\big) * (3 * 2)$

$\big((1 + (2)^{-1}) * (1 + (3)^{-1})\big) * (3 + (2)^{-1})$

$\big((1 + 2) * (1 + 1)\big) * (3 + 2)$

$(3 * 2) * 1$

$(3 + (2)^{-1}) * 1$

$(3 + 2) * 1$

$1 * 1$

$1 + (1)^{-1}$

$1 + 3 = 0$

ii. Ambil $\forall$ 0,3 $\in M_4$ maka berlaku $(0 * (0 * 3)) * 3 = 0$

$(0 * (0 * 3)) * 3$

$(0 * (0 + (3)^{-1})) * 3$

$(0 * (0 + 1)) * 3$

$(0 * 1) * 3$

$(0 + (1)^{-1}) * 3$

$(0 + 3) * 3$

$3 * 3$

$3 + (3)^{-1}$

$3 + 1 = 0$

iii. Ambil $\forall$ 2 $\in M_4$ maka berlaku$2 * 2 = 0$

$2 * 2$

$2 + (2)^{-1}$

$2 + 2 = 0$

iv. Pilih $x = 2$ dan $y = 2$ maka berlaku $2 * 2 = 0$ dan $2 * 2 = 0 \rightarrow 2 = 2$

$2 * 2$	$2 * 2$
$2 + (2)^{-1}$	$2 + (2)^{-1}$
$2 + 2 = 0$	$2 + 2 = 0$

Berdasarkan teorema 3.4.1 dapat diketahui bahwa jika Aljabar-BCI *p-semisimple* $(X,*,0)$ maka Grup Abelian $(X,+)$ dengan didefinisikan $x + y = x * (0 * y), \forall\, x, y \in X$ dan dari teorema 3.4.3 dapat diketahui pula bahwa jika Grup Abelian $(X,+)$ maka Aljabar-BCI *p-semisimple* $(X,*,0)$ dengan didefinisikan $x * y = x + (-y)$. Hal ini dapat disimpulkan bahwa Aljabar-BCI *p-semisimple* $(X,*,0)$ jika dan hanya jika Grup Abelian $(X,+)$, dengan karakterisasi tertentu.

Dibawah ini, disajikan mengenai beberapa pernyataan yang ekuivalen mengenai subgrup dengan ideal tertutup pada Aljabar-BCI. Namun sebelum itu, akan diperlihatkan bahwa terdapat relasi ekuivalensi antara ideal dengan Aljabar-BCI.

Teorema 3.4.5

Aljabar-BCI $(X,*,0)$, $A \subset X$ dimana A adalah Ideal. Relasi $\leq$ dari A ke X, $\forall\, x, y \in A, x \leq y \leftrightarrow x * y = 0$.

Bukti.

Akan ditunjukkan bahwa $A \leq X$ memenuhi *refleksif, simetris* dan *transitif.*

i. Ambil sebarang $x \in A$, dari aksioma (iii) Aljabar-BCI diperoleh bahwa $x * x = 0$, yang berarti $x \leq x, \forall\, x \in A$. *(Transitif)*

ii. Ambil sebarang $x, y \in A$, dari aksioma (iv) Aljabar-BCI diperoleh bahwa $x * y = 0$ dan $y * x = 0$. Sehingga $x * y = 0 \rightarrow y * x = 0$

$$x \leq y \rightarrow y \leq x \ \ (Simetris)$$

iii. Ambil sebarang $x, y, z \in A$, jika $x * y = 0$ dan $y * x = 0$, maka $x * z = \big((x * z) * 0\big) * 0 = \big((x * z) * (x * y)\big) * (y * z) = 0$. Ekuivalen dengan $\forall\, x, y, z \in A, x \leq y$ dan $y \leq z$, maka $x \leq z$. *(Transitif)*

Karena memenuhi *refleksif, simetris dan transitif* maka *A* berrelasi dengan *X*.

Teorema 3.4.6

Jika $(X, *, 0)$ merupakan Aljabar-BCI *p-semisimple* dengan operasi $" * "$ yang didefinisikan $x * y = x + (-y)$, $\forall x, y \in X$, $(X, +)$ adalah grup abelian dengan $(-y)$ adalah elemen invers *y* terhadap operasi $" + "$, dan *A* subset dari *X*, maka pernyataan berikut ekuivalen:

(1) *A* ideal tertutup,

(2) *A* subgrup (Murty, 1987:890).

Bukti.

$(1) \rightarrow (2)$. Pilih $0 \in X$, maka $0 * 0 = 0 + (-0) \in A$, berarti $A \neq \emptyset$. Ambil sebarang $(x + y) * y, y \in A$. Akan ditunjukkan $x + y \in A$.

$(x + y) * y = (x + y) + (-y) = x \in A$. Karena *A* ideal, jelas bahwa $x + y \in A$, jadi *A* tertutup terhadap operasi $" + "$. Lebih lanjut, karena *A* ideal tertutup, maka $\forall x \in A$, berlaku $0 * x = 0 + (-x) = -x \in A$. Jadi *A* tertutup terhadap elemen inversnya. Dengan demikian terbukti *A* subgrup.

$(2) \rightarrow (1)$. Ambil sebarang $x, y \in X$, dengan $x * y \in A$ dan $y \in A$. Akan ditunjukkan $0 * x \in A$. Diketahui $(x * y), y \in A$, maka $x + (-y) \in A$ dan $y \in A$.

Karena A subgrup, maka $(x + (-y)) + y \in A$. Jelas bahwa $(x + (-y)) + y = x \in A$. Terbukti A ideal. Karena A subgrup, maka $\forall x \in A, -x = 0 + (-x) = 0 * x \in A$. Jadi A ideal tertutup.

Contoh 3.4.7

Diberikan $(M_n,* ,0)$ adalah Aljabar-BCI *p-semisimple*. Dengan operasi $" * "$ yang didefinisikan $x * y = x + (-y), \forall x, y \in M_n$, $(M_n, +)$ adalah grup abelian dengan $(-y)$ adalah elemen invers y terhadap operasi $" + "$, dan diberikan M_5 subset dari M_n. Tunjukkan bahwa M_5 ideal tertutup dan Subgrup.

Jawab:

Telah terbukti pada **teorema 3.3.4** bahwa $(M_n,* ,0)$ adalah Aljabar-BCI. Akan ditunjukkan terlebih dahulu bahwa $(M_n,* ,0)$ adalah Aljabar-BCI *p-semisimple*. Dan dikatakan Aljabar-BCI *p-semisimple* jika $0 * x = 0, \forall x \in M_5 \rightarrow x = 0$.

Dari tabel 3.4.2.12 Aljabar-BCI $(M_n,* ,0)$ terlihat bahwa $0 * x = 0, \forall x \in M_5$ hanya terpenuhi ketika $x = 0$. Jadi $(M_n,* ,0)$ adalah Aljabar-BCI *p-semisimple*. Dan jelas bahwa $(M_5,* 0) \subseteq (M_n,*, 0)$ dan $(M_5, +) \subseteq (M_n, +)$

Akan diperlihatkan terlebih dahulu bahwa M_5 adalah ideal.

$M_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$\rightarrow$

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

Tabel 3.4.6.1 Grup Modulo 5

Diperoleh invers tiap elemen dari M_5 yaitu

Invers dari $0 = 0^{-1} = 0$

Invers dari $1 = 1^{-1} = 4$

Invers dari $2 = 2^{-1} = 3$

Invers dari $3 = 3^{-1} = 2$

Invers dari $4 = 4^{-1} = 1$

M_5 dikatakan Ideal terhadap operasi " $*$ " yang didefinisikan $x * y = x + (-y)$, $\forall x, y \in M_5$

1.i Jelas bahwa $0 \in M_5$

1.ii $\forall (x * y), y \in M_5$ maka $x \in M_5$.

Pilih $y = 0 \in M_5$,

$0 * 0 = 0 + (0)^{-1} = 0 + 0 = 0 \rightarrow x = 0 \in M_5$

$1 * 0 = 1 + (0)^{-1} = 1 + 0 = 1 \rightarrow x = 1 \in M_5$

$2 * 0 = 2 + (0)^{-1} = 2 + 0 = 2 \rightarrow x = 2 \in M_5$

$3 * 0 = 3 + (0)^{-1} = 3 + 0 = 3 \rightarrow x = 3 \in M_5$

$4 * 0 = 4 + (0)^{-1} = 4 + 0 = 4 \rightarrow x = 4 \in M_5$

Terbukti bahwa M_5 adalah ideal

Akan ditunjukkan bahwa $(M_5, +)$ adalah

1. Ideal tertutup
2. Subgrup

Kasus 1

Dikatakan ideal tertutup jika $\forall\ x \in M_5$, berlaku $0 * x \in M_5$

Untuk $x = 0 \rightarrow 0 * 0 = 0 + (0)^{-1} = 0 + 0 = 0 \in M_5$

Untuk $x = 1 \rightarrow 0 * 1 = 0 + (1)^{-1} = 0 + 4 = 4 \in M_5$

Untuk $x = 2 \rightarrow 0 * 2 = 0 + (2)^{-1} = 0 + 3 = 3 \in M_5$

Untuk $x = 3 \rightarrow 0 * 3 = 0 + (3)^{-1} = 0 + 2 = 2 \in M_5$

Untuk $x = 4 \rightarrow 0 * 4 = 0 + (4)^{-1} = 0 + 1 = 1 \in M_5$

Terbukti bahwa M_5adalah ideal tertutup.

Kasus 2

Dikatakan subgrup jika

2.i $M_5 \neq \emptyset$, jelas karena $M_5 = \{0,1,2,3,4\}$

2.ii $x + y \in M_5, \forall\, x, y \in M_5$ (Tertutup)

Untuk $x = 0 \rightarrow 0 * 0 = 0 + (0)^{-1} = 0 + 0 = 0 \in M_5$

$0 * 1 = 0 + (1)^{-1} = 0 + 4 = 4 \in M_5$

$0 * 2 = 0 + (2)^{-1} = 0 + 3 = 3 \in M_5$

$0 * 3 = 0 + (3)^{-1} = 0 + 2 = 2 \in M_5$

$0 * 4 = 0 + (4)^{-1} = 0 + 1 = 1 \in M_5$

Untuk $x = 1 \rightarrow 1 * 0 = 1 + (0)^{-1} = 1 + 0 = 1 \in M_5$

$1 * 1 = 1 + (1)^{-1} = 1 + 4 = 0 \in M_5$

$1 * 2 = 1 + (2)^{-1} = 1 + 3 = 4 \in M_5$

$1 * 3 = 1 + (3)^{-1} = 1 + 2 = 3 \in M_5$

$1 * 4 = 1 + (4)^{-1} = 1 + 1 = 2 \in M_5$

Untuk $x = 2 \rightarrow 2 * 0 = 2 + (0)^{-1} = 2 + 0 = 2 \in M_5$

$2 * 1 = 2 + (1)^{-1} = 2 + 4 = 1 \in M_5$

$2 * 2 = 2 + (2)^{-1} = 2 + 3 = 0 \in M_5$

$2 * 3 = 2 + (3)^{-1} = 2 + 2 = 4 \in M_5$

$2 * 4 = 2 + (4)^{-1} = 2 + 1 = 3 \in M_5$

Untuk $x = 3 \rightarrow 3 * 0 = 3 + (0)^{-1} = 3 + 0 = 3 \in M_5$

$3 * 1 = 3 + (1)^{-1} = 3 + 4 = 2 \in M_5$

$3 * 2 = 3 + (2)^{-1} = 3 + 3 = 1 \in M_5$

$3 * 3 = 3 + (3)^{-1} = 3 + 2 = 0 \in M_5$

$$3 * 4 = 3 + (4)^{-1} = 3 + 1 = 4 \in M_5$$

Untuk $x = 4 \rightarrow 4 * 0 = 4 + (0)^{-1} = 4 + 0 = 4 \in M_5$

$$4 * 1 = 4 + (1)^{-1} = 4 + 4 = 3 \in M_5$$

$$4 * 2 = 4 + (2)^{-1} = 4 + 3 = 2 \in M_5$$

$$4 * 3 = 4 + (3)^{-1} = 4 + 2 = 1 \in M_5$$

$$4 * 4 = 4 + (4)^{-1} = 4 + 1 = 0 \in M_5$$

2.iii $x^{-1} \in M_5, \forall\, x \in M_5$ (Invers)

Untuk $x = 0 \rightarrow x^{-1} = 0 \in M_5$

Untuk $x = 1 \rightarrow x^{-1} = 4 \in M_5$

Untuk $x = 2 \rightarrow x^{-1} = 3 \in M_5$

Untuk $x = 3 \rightarrow x^{-1} = 2 \in M_5$

Untuk $x = 4 \rightarrow x^{-1} = 1 \in M_5$

Terbukti bahwa M_5 adalah subgrup.

3.5 Hubungan antara Hikmah dan Konstruksi Aljabar-BCI dari Grup

Pada skripsi ini, objek penelitiannya adalah Aljabar-BCI dan Grup yang dikaji dalam perspektif aljabar. Spesifikasinya mengenai sifat-sifat Aljabar-BCI, membangun Aljabar-BCI dari Grup dan hubungan antara subgrup dan ideal tertutup dari grup ideal dan Aljabar-BCI *p-semisimple*. Hal ini sangat bermanfaat untuk perkembangan keilmuan matematika, terutama aljabar.

Aljabar-BCI dan grup pada dasarnya tidak memiliki kesamaan yang mutlak, karena di dalam Aljabar-BCI tidak mengenal identitas sedangkan di dalam grup memiliki identitas. Namun, antara Aljabar-BCI dan grup sama-sama berangkat dari suatu himpunan yang tidak kosong dan operasi biner. Berdasarkan pembahasan sebelumnya mengenai Aljabar-BCI dan grup dapat diketahui bahwa suatu Aljabar-BCI itu dapat dibangun dari suatu grup dengan memberikan kondisi tertentu.

Dalam konteks islam pun, hikmah memiliki dua macam pendefinisian yaitu disebutkan berdampingan dengan kata al-Qur'an dan tidak berdampingan dengan kata al-Qur'an. Jika berdampingan dengan kata al-Qur'an maka hikmah bermakna hadits Rasul, jika berdiri sendiri maka hikmah bermakna tepat dalam perkataan, perbuatan dan keyakinan, serta meletakkan sesuatu pada tempatnya yang sesuai.

Suatu Struktur Aljabar $(X,*,0)$ kemudian diteliti sifat-sifat yang ada pada struktur tersebut, maka diperoleh:

$\forall a, b, c \in X$, berlaku

1. $((a * c) * (a * b)) * (b * c) = 0$,
2. $(a * (a * b)) * b = 0$,
3. $a * a = 0$,
4. $a * b = 0 = b * a \rightarrow a = b$.

Begitu pula dalam konteks hikmah, sikap hikmah itu dibangun di atas tiga pilar yaitu

4. Ilmu.
5. *Al-hilmu* (Bijaksana).
6. *Al-anaah* (tidak tergesa-gesa).

Dari ketiga pilar di atas, pilar yang paling utama dan yang paling penting adalah pilar pertama yaitu ilmu. Dan ilmu yang dimaksud di sini adalah al-Qur'an dan hadits serta pemahaman generasi terbaik umat. Kata hikmah di dalam al-

Qur'an terulang sampai 20 kali, di dalam 19 ayat yang ada di dalam 12 surat. Dan kata hikmah di dalam ayat-ayat yang telah disebutkan pada bab sebelumnya tersebut, kebanyakan di 'Athafkan (sambungkan) kepada lafal KITAB dengan huruf wawu, yang mempunyai makna Lil Jami'il Muthlaqi (untuk berbarengan secara mutlak), ialah menunjukkan, bahwasannya Hikmah pada hakikatnya adalah Kitab. Artinya, tidak ada orang ahli di bidang Hikmah yang tidak berdasarkan paham kitab. Dengan kata lain, apabila seseorang paham hikmah, maka ia pasti paham kitab yang diturunkan oleh Allah kepada Rasul-Nya serta berusaha mengimplementasikan kitab itu. Dan dalam umat Islam, kitab tersebut adalah al-Qur'an. Sehingga dapat disimpulkan bahwa hikmah adalah mengimplementasikan ajaran al-Qur'an.

Pendefinisian hikmah tersebut tidak boleh berhenti hanya sebatas mengimplementasikan ajaran al-Qur'an karena Allah SWT memerintahkan manusia untuk beribadah dan ibadah itu sangat luas. Salah satunya yaitu menuntut ilmu baik itu ilmu agama maupun ilmu umum. Karena berdasarkan definisi hikmah dari beberapa ahli tafsir yang telah disebutkan di dalam bab 2 mengatakan bahwa salah satu definisi hikmah yaitu

اَلْحِكْمَةُ هِىَ اَلْكَلاَمُ اْلمَعْقُوْلُ اَلْمَصُوْنُ عَنِ اْلحَشْوِ

Hikmah adalah pembicaraan yang diperhitungkan dan dijaga dari kejahatan atau kesesatan. (At-Ta'rifat hal. 91).

اَلْحِكْمَةُ هِىَ اَلْعِلْمُ التَّامّ ُ وَالصُّنْعُ اْلمُتْقَنُ

Hikmah adalah ilmu yang sempurna dan pekerjaan yang dikokohkan atau ditetapkan. (Ash-Shoowi hal. 369 juz 2).

اَلْحِكْمَةُ هِىَ اَلْعِلْمُ النَّافِعُ اَلْمُؤَدِّىْ اِلَى اَلْعَمَلِ

Hikmah adalah ilmu manfaat yang bisa menyampaikan pada pengamalan. (Tafsir Jalalain hal. 43 juz awal).

اَلْحِكْمَةُ هِىَ اِسْتِكْمَالُ النَّفْسِ اْلاِنْسَانِيَّةِ بِاقْتِبَاسِ اْلعُلُوْمِ النَّظَرِيَّةِ وَاكْتِسَابِ اْلمَلَكَةِ

التَّامَّةِ عَلَى اْلاَفْعَالِ اْلفَاضِلَةِ عَلَى قَدْرِطَاقَتِهَا

Hikmah adalah berusaha menyempurnakan jiwa kemanusiaan dengan cara menggali ilmu-ilmu penelitian, dan berusaha memperoleh karakter yang sempurna di dalam semua pekerjaan mulia, sesuai kadar kemampuannya (manusia). (Baidlowi hal. 151 juz 4)

Oleh karena itu, apa yang telah dibahas dan diperoleh dalam penelitian ini merupakan salah satu contoh hikmah. Karena yang menemukan hikmah itu adalah akal maka dengan menggunakan akal untuk berfikir atau menggali ilmu-ilmu penelitian yang telah ada sebelumnya sehingga dapat memperoleh suatu pengalaman baru yang bermanfaat.

Akal merupakan pemberian Allah yang hanya dimiliki oleh manusia, dan tidak bagi makhluk lain. Akal adalah suatu daya pikir untuk berusaha menempatkan sesuatu pada tempatnya, supaya terhindar dari malapetaka atau suatu nilai kehinaan. Dengan kata lain makhuk yang berakal harus bisa berfikir, bersikap dan berbuat atau berkata kearah yang benar atau tepat. Sebagaimana ayat yang pertama kali turun adalah mengisyaratkan bahwa manusia diberikan kelebihan berupa akal untuk berfikir. Yaitu supaya membaca guna memperoleh pengetahuan tentang Allah yang telah menciptakan dirinya dan seluruh makhluk yang ada.

Selain itu, untuk melakukan penelitian, diperlukan suatu perhitungan yang teliti sehingga terhindar dari kesesatan dalam menyimpulkan sehingga menjadi suatu ketetapan yaitu teorema yang dapat telah dibuktikan kebenarannya. Sehingga teorema ini dapat bermanfaat untuk dipakai dalam penelitian selanjutnya dalam bidang matematika yaitu Aljabar.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Pembahasan dari skripsi ini menghasilkan beberapa karakterisasi pembentukan Aljabar-BCI dari suatu grup dengan memanfaatkan operasi yang ada pada grup. Kemudian dilanjutkan dengan hubungan antara subgrup dan ideal tertutup dari grup abelian dan Aljabar-BCI *p-semisimple*, sehingga dapat diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Diberikan $(M_n, +)$ adalah grup dengan M_n adalah himpunan bilangan modulo n dengan $n \in \mathbb{N}$. Didefinisikan operasi $" * "$ dengan $x * y = x + (-y)$ dimana $(-y)$ adalah elemen invers dari y terhadap operasi $" + "$. Maka $(M_n, *, 0)$ adalah Aljabar-BCI. Dari teorema ini kemudian digeneralisasikan menjadi grup $(\mathbb{G}, +)$, didefinisikan suatu operasi $" * "$, yang memenuhi $a * b = a + (-b), \forall\, a, b \in \mathbb{G}$. Dimana $(-b)$ adalah elemen invers dari b terhadap operasi $" + "$. Maka $(\mathbb{G}, *, 0)$ merupakan Aljabar-BCI.
2. Jika $(X, *, 0)$ merupakan Aljabar-BCI *p-semisimple* dengan operasi $" * "$ yang didefinisikan $x * y = x + (-y)$, $\forall x, y \in X$, $(X, +)$ adalah grup abelian dengan $(-y)$ adalah elemen invers y terhadap operasi $" + "$, dan A subset dari X, maka pernyataan berikut ekuivalen:

   (3) A ideal tertutup,

   (4) A subgrup.

4.2 Saran

Pada skripsi ini, penulis hanya memfokuskan pada pokok bahasan masalah keterkaitan antara grup dan Aljabar-BCI. Maka dari itu, untuk penulisan skripsi selanjutnya, penulis menyarankan kepada pembaca untuk mengkaji karakterisasi dari klasifikasi ideal yang ada pada Aljabar-BCI, yaitu fantastic ideal, p-ideal, dan a-ideal, sehingga dapat dibentuk dari suatu grup yang dikenai syarat tertentu.

DAFTAR PUSTAKA

Al Qarni, A'id Abdullah. 2006. *Silakan Terpesona*. Jakarta: Sahara Publishers.

Arifin, Ahmad.2000.*Aljabar*. bandung: ITB Bandung.

Baidhowi. *Tafsir Baidhowi.* Bairut: Darul Fikr.

Dugopolski, Mark.2000. *Algebra for College Students*. Southeastern Louisiana University: The McGraw-Hill Companies, Inc.

Dummit, David S dan Foote, Richard M. 1991. *Abstract Algebra*. United States of America: Prentice-Hall, Inc.

Dummit, David S dan Foote, Richard M. 2002. *Abstract Algebra*. Singapore: John Wiley & Sons, Inc.

Grillet, Pierre Antoine. 2007. *Abstract Algebra*. New York: Springer Science + Business Media, LLC.

Hoo, C. S. Murty, P.V.R., 1987, *Quasi Commutative p-semisimple BCI-Algebra*, Math. Japanica 32, No. 6: 889-894.

Hoo, C.S. *Closed Ideals and p-semisimple BCI-Algebras.* Math. Jpn. 35 (1990) 1103-1112.

Huang, Wenping dan Jun, Young Bae. 2002. *Ideal and Subalgebras in BCI-Algebras.* Southeast Asian Bulletin of Math., 26: 567-573.

Huang, Y.S. 2006. *BCI-algebras.* China: Science Press.

Imai, Yasuyuki dan Iseki. 1966. *On axiom system of Propositional calculi.*XIV Proc. Japan Academy, 42: 19-22.

Iseki, K dan Tanaka, S. *Ideal theory of BCK-Algebras.* Math. Jpn. 21 (1976)351-366.

Iseki, Kiyoshi. 1966. *An Algebras Related with a Propositional Calculus.* XIV Proc. Japan Academy, 42: 26-29.

Ismail, Abu Fada'. 1999. *Tafsir al-Qur'an*. Darul Thoyyibah Linasyri wattauzi'.

Kolman, Bernard., Busby, C. Robert. Dan Ross, Cutler Sharon. 2004. *Discrete Mathematical Structures*. United States of America: Pearson Education, Inc.

Liu, Yong Lin., Xu, Yang dan Meng, Jie. 2007. *BCI-implicative ideals of BCI-algebras.*Published by Elsevier, Inc.

Mohammad Iqbal Ghazali. 2009. Hikmah, *http://www.islamhouse,com*. Diakses tanggal 07 Januari 2011.

Muhammad, Jalaluddin. *Tafsir Jalalain*. Kairo: Darul Hadits.

Mujieb, M. Abdul., Ismail, Ahmad., dan Syafi'ah. *Ensiklopedia Tasawuf Imam Al-Ghazali*. Bandung; Mizan Media Utama.

Muslim, Amim. 2010. http://hikmahkamilah.com/2010/04/data-hikmah/. Diakses tanggal 05 Januari 2011.

Raisinghania, M. D dan Anggarwal, R. S. 1980. *Modern Algebra*. Ram Nagar, New Delhi: S. Chand & Company Ltd.

Roman, Steven. 1989. *An Introduction to Discrete Mathematics*. California State University, Fullerton: Harcourt Brace Jovanovich,Inc.

Saeid, Arsham Borumand. 2010. *Fantastic Ideal in BCI-Algebras.*World Applied Sciences Journal 8 (5): 550-554.

Siang, Jong Jek. 2002. *Matematika Diskrit dan aplikasinya pada ilmu komputer*. Yogyakarta: Andi Offset.

Tiande, Lei, dan Changchang, Xi. 1985. *P-Radical in BCI-Algebras*. Math. Japonica 30, No. 4, 511-517.

Zain, Abu Abdirrahman Abdullah.Daurah. *14 Contoh Praktek Hikmah dalam Berdakwah*. Yogyakarta: Pustaka Muslim.

Zhang, Xiaohong and Jun, Young Bae. 1997. *The Role of T(X) in The Ideal Theory of BCI-Algebras*. Bull. Korean Math. Soc. 34, No. 2, pp.199-204.

Lampiran 1. Bukti $(M_3,*,0)$ adalah Aljabar-BCI dengan Metode Pengecekan Satu Persatu Menggunakan Tabel 3.3.2.4 Aljabar-BCI $(M_3,*,0)$

Akan di buktikan bahwa $(M_3,*,0)$ adalah Aljabar-BCI dengan syarat memenuhi 4 aksioma Aljabar-BCI, sebagaimana berikut:

i. Akan ditunjukkan $\forall x,y,z \in M_3$, berlaku $((x*y)*(x*z))*(z*y)=0$.

Untuk $x=0$, maka diperoleh

$((0*0)*(0*0))*(0*0)=0$

$((0*0)*(0*1))*(1*0)=0$

$((0*0)*(0*2))*(2*0)=0$

$((0*1)*(0*0))*(0*1)=0$

$((0*1)*(0*1))*(1*1)=0$

$((0*1)*(0*2))*(2*1)=0$

$((0*2)*(0*0))*(0*0)=0$

$((0*2)*(0*1))*(1*0)=0$

$((0*2)*(0*2))*(2*0)=0$

Untuk $x=1$, maka diperoleh

$((1*0)*(1*0))*(0*0)=0$

$((1*0)*(1*1))*(1*0)=0$

$((1*0)*(1*2))*(2*0)=0$

$((1*1)*(1*0))*(0*1)=0$

$((1*1)*(1*1))*(1*1)=0$

$((1*1)*(1*2))*(2*1)=0$

$((1*2)*(1*0))*(0*2)=0$

$((1*2)*(1*1))*(1*2)=0$

$((1*2)*(1*2))*(2*2)=0$

Untuk $x=2$, maka diperoleh

$((2*0)*(2*0))*(0*0)=0$

$((2*0)*(2*1))*(1*0)=0$

$((2*0)*(2*2))*(2*0)=0$

$((2*1)*(2*0))*(0*1)=0$

$((2*1)*(2*1))*(1*1)=0$

$((2*1)*(2*2))*(2*1)=0$

$((2*2)*(2*0))*(0*2)=0$

$((2*2)*(2*1))*(1*2)=0$

$((2*2)*(2*2))*(2*2)=0$

Jadi terbukti bahwa $\forall x,y,z \in M_3$, berlaku $((x*y)*(x*z))*(z*y)=0$.

ii. Akan ditunjukkan $\forall x, y \in M_3$, berlaku $(x * (x * y)) * y = 0$.

Untuk $x = 0, y = 0$ maka diperoleh $(0 * (0 * 0)) * 0 = 0$

Untuk $x = 0, y = 1$ maka diperoleh $(0 * (0 * 1)) * 1 = 0$

Untuk $x = 0, y = 2$ maka diperoleh $(0 * (0 * 2)) * 2 = 0$

Untuk $x = 1, y = 0$ maka diperoleh $(1 * (1 * 0)) * 0 = 0$

Untuk $x = 1, y = 1$ maka diperoleh $(1 * (1 * 1)) * 1 = 0$

Untuk $x = 1, y = 2$ maka diperoleh $(1 * (1 * 2)) * 2 = 0$

Untuk $x = 2, y = 0$ maka diperoleh $(2 * (2 * 0)) * 0 = 0$

Untuk $x = 2, y = 1$ maka diperoleh $(2 * (2 * 1)) * 1 = 0$

Untuk $x = 2, y = 2$ maka diperoleh $(2 * (2 * 2)) * 2 = 0$

Jadi terbukti bahwa $\forall x, y \in M_3$, berlaku $(x * (x * y)) * y = 0$

iii. Dari tabel jelas bahwa $\forall x \in M_3$, berlaku $x * x = 0$.

iv. Dari tabel, jelas bahwa $\forall x \in M_3$, jika $x * x = 0$, maka $x = x$

Terbukti bahwa $(M_3, *, 0)$ adalah Aljabar-BCI.

Lampiran 2. Bukti $(M_4,*,0)$ adalah Aljabar-BCI dengan Metode Pengecekan Satu Persatu Menggunakan Tabel 3.3.2.5 Aljabar-BCI $(M_4,*,0)$

Akan di buktikan bahwa $(M_4,*,0)$ adalah Aljabar-BCI dengan syarat memenuhi 4 aksioma Aljabar-BCI, sebagaimana berikut:

i. Akan ditunjukkan $\forall x,y,z \in M_4$, berlaku $((x*y)*(x*z))*(z*y)=0$.

Untuk $x=0$, maka diperoleh	Untuk $x=1$, maka diperoleh
$((0*0)*(0*0))*(0*0)=0$	$((1*0)*(1*0))*(0*0)=0$
$((0*0)*(0*1))*(1*0)=0$	$((1*0)*(1*1))*(1*0)=0$
$((0*0)*(0*2))*(2*0)=0$	$((1*0)*(1*2))*(2*0)=0$
$((0*0)*(0*3))*(3*0)=0$	$((1*0)*(1*3))*(3*0)=0$
$((0*1)*(0*0))*(0*1)=0$	$((1*1)*(1*0))*(0*1)=0$
$((0*1)*(0*1))*(1*1)=0$	$((1*1)*(1*1))*(1*1)=0$
$((0*1)*(0*2))*(2*1)=0$	$((1*1)*(1*2))*(2*1)=0$
$((0*1)*(0*3))*(3*1)=0$	$((1*1)*(1*3))*(3*1)=0$
$((0*2)*(0*0))*(0*2)=0$	$((1*2)*(1*0))*(0*2)=0$
$((0*2)*(0*1))*(1*2)=0$	$((1*2)*(1*1))*(1*2)=0$
$((0*2)*(0*2))*(2*2)=0$	$((1*2)*(1*2))*(2*2)=0$
$((0*2)*(0*3))*(3*2)=0$	$((1*2)*(1*3))*(3*2)=0$
$((0*3)*(0*0))*(0*3)=0$	$((1*3)*(1*0))*(0*3)=0$
$((0*3)*(0*1))*(1*3)=0$	$((1*3)*(1*1))*(1*3)=0$
$((0*3)*(0*2))*(2*3)=0$	$((1*3)*(1*2))*(2*3)=0$
$((0*3)*(0*3))*(3*3)=0$	$((1*3)*(1*3))*(3*3)=0$

Untuk $x = 2$, maka diperoleh	Untuk $x = 3$, maka diperoleh
$((2 * 0) * (2 * 0)) * (0 * 0) = 0$	$((3 * 0) * (3 * 0)) * (0 * 0) = 0$
$((2 * 0) * (2 * 1)) * (1 * 0) = 0$	$((3 * 0) * (3 * 1)) * (1 * 0) = 0$
$((2 * 0) * (2 * 2)) * (2 * 0) = 0$	$((3 * 0) * (3 * 2)) * (2 * 0) = 0$
$((2 * 0) * (2 * 3)) * (3 * 0) = 0$	$((3 * 0) * (3 * 3)) * (3 * 0) = 0$
$((2 * 1) * (2 * 0)) * (0 * 1) = 0$	$((3 * 1) * (3 * 0)) * (0 * 1) = 0$
$((2 * 1) * (2 * 1)) * (1 * 1) = 0$	$((3 * 1) * (3 * 1)) * (1 * 1) = 0$
$((2 * 1) * (2 * 2)) * (2 * 1) = 0$	$((3 * 1) * (3 * 2)) * (2 * 1) = 0$
$((2 * 1) * (2 * 3)) * (3 * 1) = 0$	$((3 * 1) * (3 * 3)) * (3 * 1) = 0$
$((2 * 2) * (2 * 0)) * (0 * 2) = 0$	$((3 * 2) * (3 * 0)) * (0 * 2) = 0$
$((2 * 2) * (2 * 1)) * (1 * 2) = 0$	$((3 * 2) * (3 * 1)) * (1 * 2) = 0$
$((2 * 2) * (2 * 2)) * (2 * 2) = 0$	$((3 * 2) * (3 * 2)) * (2 * 2) = 0$
$((2 * 2) * (2 * 3)) * (3 * 2) = 0$	$((3 * 2) * (3 * 3)) * (3 * 2) = 0$
$((2 * 3) * (2 * 0)) * (0 * 3) = 0$	$((3 * 3) * (3 * 0)) * (0 * 3) = 0$
$((2 * 3) * (2 * 1)) * (1 * 3) = 0$	$((3 * 3) * (3 * 1)) * (1 * 3) = 0$
$((2 * 3) * (2 * 2)) * (2 * 3) = 0$	$((3 * 3) * (3 * 2)) * (2 * 3) = 0$
$((2 * 3) * (2 * 3)) * (3 * 3) = 0$	$((3 * 3) * (3 * 3)) * (3 * 3) = 0$

Jadi terbukti bahwa $\forall x, y, z \in M_4$, berlaku $((x * y) * (x * z)) * (z * y) = 0$.

ii. Akan ditunjukkan $\forall x, y \in M_4$, berlaku $(x * (x * y)) * y = 0$.

Untuk $x = 0, y = 0$ maka diperoleh $(0 * (0 * 0)) * 0 = 0$

Untuk $x = 0, y = 1$ maka diperoleh $(0 * (0 * 1)) * 1 = 0$

Untuk $x = 0, y = 2$ maka diperoleh $(0 * (0 * 2)) * 2 = 0$

Untuk $x = 0, y = 3$ maka diperoleh $(0 * (0 * 3)) * 3 = 0$

Untuk $x = 1, y = 0$ maka diperoleh $(1 * (1 * 0)) * 0 = 0$

Untuk $x = 1, y = 1$ maka diperoleh $(1 * (1 * 1)) * 1 = 0$

Untuk $x = 1, y = 2$ maka diperoleh $(1 * (1 * 2)) * 2 = 0$

Untuk $x = 1, y = 3$ maka diperoleh $(1 * (1 * 3)) * 3 = 0$

Untuk $x = 2, y = 0$ maka diperoleh $(2 * (2 * 0)) * 0 = 0$

Untuk $x = 2, y = 1$ maka diperoleh $(2 * (2 * 1)) * 1 = 0$

Untuk $x = 2, y = 2$ maka diperoleh $(2 * (2 * 2)) * 2 = 0$

Untuk $x = 2, y = 3$ maka diperoleh $(2 * (2 * 3)) * 3 = 0$

Untuk $x = 3, y = 0$ maka diperoleh $(3 * (3 * 0)) * 0 = 0$

Untuk $x = 3, y = 1$ maka diperoleh $(3 * (3 * 1)) * 1 = 0$

Untuk $x = 3, y = 2$ maka diperoleh $(3 * (3 * 2)) * 2 = 0$

Untuk $x = 3, y = 3$ maka diperoleh $(3 * (3 * 3)) * 3 = 0$

Jadi terbukti bahwa $\forall x, y \in M_4$, berlaku $(x * (x * y)) * y = 0$

iii. Dari tabel jelas bahwa $\forall x \in M_4$, berlaku $x * x = 0$.

iv. Dari tabel, jelas bahwa $\forall x \in M_4$, jika $x * x = 0$, maka $x = x$

Terbukti bahwa $(M_4, *, 0)$ adalah Aljabar-BCI.

Lampiran 3. Bukti $(M_5,*,0)$ adalah Aljabar-BCI dengan Metode Pengecekan Satu Persatu Menggunakan Tabel 3.3.2.5 Aljabar-BCI $(M_5,*,0)$

Akan di buktikan bahwa $(M_5,*,0)$ adalah Aljabar-BCI dengan syarat memenuhi 4 aksioma Aljabar-BCI, sebagaimana berikut:

i. Akan ditunjukkan $\forall x,y,z \in M_5$, berlaku $\big((x*y)*(x*z)\big)*(z*y)=0$.

Untuk $x=0$, maka diperoleh	Untuk $x=1$, maka diperoleh
$\big((0*0)*(0*0)\big)*(0*0)=0$	$\big((1*0)*(1*0)\big)*(0*0)=0$
$\big((0*0)*(0*1)\big)*(1*0)=0$	$\big((1*0)*(1*1)\big)*(1*0)=0$
$\big((0*0)*(0*2)\big)*(2*0)=0$	$\big((1*0)*(1*2)\big)*(2*0)=0$
$\big((0*0)*(0*3)\big)*(3*0)=0$	$\big((1*0)*(1*3)\big)*(3*0)=0$
$\big((0*0)*(0*4)\big)*(4*0)=0$	$\big((1*0)*(1*4)\big)*(4*0)=0$
$\big((0*1)*(0*0)\big)*(0*1)=0$	$\big((1*1)*(1*0)\big)*(0*1)=0$
$\big((0*1)*(0*1)\big)*(1*1)=0$	$\big((1*1)*(1*1)\big)*(1*1)=0$
$\big((0*1)*(0*2)\big)*(2*1)=0$	$\big((1*1)*(1*2)\big)*(2*1)=0$
$\big((0*1)*(0*3)\big)*(3*1)=0$	$\big((1*1)*(1*3)\big)*(3*1)=0$
$\big((0*1)*(0*4)\big)*(4*1)=0$	$\big((1*1)*(1*4)\big)*(4*1)=0$
$\big((0*2)*(0*0)\big)*(0*2)=0$	$\big((1*2)*(1*0)\big)*(0*2)=0$
$\big((0*2)*(0*1)\big)*(1*2)=0$	$\big((1*2)*(1*1)\big)*(1*2)=0$
$\big((0*2)*(0*2)\big)*(2*2)=0$	$\big((1*2)*(1*2)\big)*(2*2)=0$
$\big((0*2)*(0*3)\big)*(3*2)=0$	$\big((1*2)*(1*3)\big)*(3*2)=0$
$\big((0*2)*(0*4)\big)*(4*2)=0$	$\big((1*2)*(1*4)\big)*(4*2)=0$
$\big((0*3)*(0*0)\big)*(0*3)=0$	$\big((1*3)*(1*0)\big)*(0*3)=0$

$((0*3)*(0*1))*(1*3)=0$

$((0*3)*(0*2))*(2*3)=0$

$((0*3)*(0*3))*(3*3)=0$

$((0*3)*(0*4))*(4*3)=0$

$((0*4)*(0*0))*(0*4)=0$

$((0*4)*(0*1))*(1*4)=0$

$((0*4)*(0*2))*(2*4)=0$

$((0*4)*(0*3))*(3*4)=0$

$((0*4)*(0*4))*(4*4)=0$

$((1*3)*(1*1))*(1*3)=0$

$((1*3)*(1*2))*(2*3)=0$

$((1*3)*(1*3))*(3*3)=0$

$((1*3)*(1*4))*(4*3)=0$

$((1*4)*(1*0))*(0*4)=0$

$((1*4)*(1*1))*(1*4)=0$

$((1*4)*(1*2))*(2*4)=0$

$((1*4)*(1*3))*(3*4)=0$

$((1*4)*(1*4))*(4*4)=0$

Untuk $x=2$, maka diperoleh

$((2*0)*(2*0))*(0*0)=0$

$((2*0)*(2*1))*(1*0)=0$

$((2*0)*(2*2))*(2*0)=0$

$((2*0)*(2*3))*(3*0)=0$

$((2*0)*(2*4))*(4*0)=0$

$((2*1)*(2*0))*(0*1)=0$

$((2*1)*(2*1))*(1*1)=0$

$((2*1)*(2*2))*(2*1)=0$

$((2*1)*(2*3))*(3*1)=0$

$((2*1)*(2*4))*(4*1)=0$

Untuk $x=3$, maka diperoleh

$((3*0)*(3*0))*(0*0)=0$

$((3*0)*(3*1))*(1*0)=0$

$((3*0)*(3*2))*(2*0)=0$

$((3*0)*(3*3))*(3*0)=0$

$((3*0)*(3*4))*(4*0)=0$

$((3*1)*(3*0))*(0*1)=0$

$((3*1)*(3*1))*(1*1)=0$

$((3*1)*(3*2))*(2*1)=0$

$((3*1)*(3*3))*(3*1)=0$

$((3*1)*(3*4))*(4*1)=0$

$((2 * 2) * (2 * 0)) * (0 * 2) = 0$

$((2 * 2) * (2 * 1)) * (1 * 2) = 0$

$((2 * 2) * (2 * 2)) * (2 * 2) = 0$

$((2 * 2) * (2 * 3)) * (3 * 2) = 0$

$((2 * 2) * (2 * 4)) * (4 * 2) = 0$

$((2 * 3) * (2 * 0)) * (0 * 3) = 0$

$((2 * 3) * (2 * 1)) * (1 * 3) = 0$

$((2 * 3) * (2 * 2)) * (2 * 3) = 0$

$((2 * 3) * (2 * 3)) * (3 * 3) = 0$

$((2 * 3) * (2 * 4)) * (4 * 3) = 0$

$((2 * 4) * (2 * 0)) * (0 * 4) = 0$

$((2 * 4) * (2 * 1)) * (1 * 4) = 0$

$((2 * 4) * (2 * 2)) * (2 * 4) = 0$

$((2 * 4) * (2 * 3)) * (3 * 4) = 0$

$((2 * 4) * (2 * 4)) * (4 * 4) = 0$

$((3 * 2) * (3 * 0)) * (0 * 2) = 0$

$((3 * 2) * (3 * 1)) * (1 * 2) = 0$

$((3 * 2) * (3 * 2)) * (2 * 2) = 0$

$((3 * 2) * (3 * 3)) * (3 * 2) = 0$

$((3 * 2) * (3 * 4)) * (4 * 2) = 0$

$((3 * 3) * (3 * 0)) * (0 * 3) = 0$

$((3 * 3) * (3 * 1)) * (1 * 3) = 0$

$((3 * 3) * (3 * 2)) * (2 * 3) = 0$

$((3 * 3) * (3 * 3)) * (3 * 3) = 0$

$((3 * 3) * (3 * 4)) * (4 * 3) = 0$

$((3 * 4) * (3 * 0)) * (0 * 4) = 0$

$((3 * 4) * (3 * 1)) * (1 * 4) = 0$

$((3 * 4) * (3 * 2)) * (2 * 4) = 0$

$((3 * 4) * (3 * 3)) * (3 * 4) = 0$

$((3 * 4) * (3 * 4)) * (4 * 4) = 0$

Untuk $x = 4$, maka diperoleh

$((4 * 0) * (4 * 0)) * (0 * 0) = 0$

$((4 * 0) * (4 * 1)) * (1 * 0) = 0$

$((4 * 0) * (4 * 2)) * (2 * 0) = 0$

$((4 * 0) * (4 * 3)) * (3 * 0) = 0$

$((4 * 2) * (4 * 2)) * (2 * 2) = 0$

$((4 * 2) * (4 * 3)) * (3 * 2) = 0$

$((4 * 2) * (4 * 4)) * (4 * 2) = 0$

$((4 * 3) * (4 * 0)) * (0 * 3) = 0$

$((4 * 3) * (4 * 1)) * (1 * 3) = 0$

$$((4*0)*(4*4))*(4*0)=0$$
$$((4*1)*(4*0))*(0*1)=0$$
$$((4*1)*(4*1))*(1*1)=0$$
$$((4*1)*(4*2))*(2*1)=0$$
$$((4*1)*(4*3))*(3*1)=0$$
$$((4*1)*(4*4))*(4*1)=0$$
$$((4*2)*(4*0))*(0*2)=0$$
$$((4*2)*(4*1))*(1*2)=0$$
$$((4*3)*(4*2))*(2*3)=0$$
$$((4*3)*(4*3))*(3*3)=0$$
$$((4*3)*(4*4))*(4*3)=0$$
$$((4*4)*(4*0))*(0*4)=0$$
$$((4*4)*(4*1))*(1*4)=0$$
$$((4*4)*(4*2))*(2*4)=0$$
$$((4*4)*(4*3))*(3*4)=0$$
$$((4*4)*(4*4))*(4*4)=0$$

Jadi terbukti bahwa $\forall x, y, z \in M_5$, berlaku $((x*y)*(x*z))*(z*y)=0$.

ii. Akan ditunjukkan $\forall x, y \in M_5$, berlaku $(x*(x*y))*y=0$.

Untuk $x=0, y=0$ maka diperoleh $(0*(0*0))*0=0$

Untuk $x=0, y=1$ maka diperoleh $(0*(0*1))*1=0$

Untuk $x=0, y=2$ maka diperoleh $(0*(0*2))*2=0$

Untuk $x=0, y=3$ maka diperoleh $(0*(0*3))*3=0$

Untuk $x=0, y=4$ maka diperoleh $(0*(0*4))*4=0$

Untuk $x=1, y=0$ maka diperoleh $(1*(1*0))*0=0$

Untuk $x=1, y=1$ maka diperoleh $(1*(1*1))*1=0$

Untuk $x=1, y=2$ maka diperoleh $(1*(1*2))*2=0$

Untuk $x=1, y=3$ maka diperoleh $(1*(1*3))*3=0$

Untuk $x=1, y=4$ maka diperoleh $(1*(1*4))*4=0$

Untuk $x=2, y=0$ maka diperoleh $(2*(2*0))*0=0$

Untuk $x=2, y=1$ maka diperoleh $(2*(2*1))*1=0$

Untuk $x = 2, y = 2$ maka diperoleh $(2 * (2 * 2)) * 2 = 0$

Untuk $x = 2, y = 3$ maka diperoleh $(2 * (2 * 3)) * 3 = 0$

Untuk $x = 2, y = 4$ maka diperoleh $(2 * (2 * 4)) * 4 = 0$

Untuk $x = 3, y = 0$ maka diperoleh $(3 * (3 * 0)) * 0 = 0$

Untuk $x = 3, y = 1$ maka diperoleh $(3 * (3 * 1)) * 1 = 0$

Untuk $x = 3, y = 2$ maka diperoleh $(3 * (3 * 2)) * 2 = 0$

Untuk $x = 3, y = 3$ maka diperoleh $(3 * (3 * 3)) * 3 = 0$

Untuk $x = 3, y = 4$ maka diperoleh $(3 * (3 * 4)) * 4 = 0$

Untuk $x = 4, y = 0$ maka diperoleh $(4 * (4 * 0)) * 0 = 0$

Untuk $x = 4, y = 1$ maka diperoleh $(4 * (4 * 1)) * 1 = 0$

Untuk $x = 4, y = 2$ maka diperoleh $(4 * (4 * 2)) * 2 = 0$

Untuk $x = 4, y = 3$ maka diperoleh $(4 * (4 * 3)) * 3 = 0$

Untuk $x = 4, y = 4$ maka diperoleh $(4 * (4 * 4)) * 4 = 0$

Jadi terbukti bahwa $\forall x, y \in M_5$, berlaku $(x * (x * y)) * y = 0$

iii. Dari tabel jelas bahwa $\forall x \in M_5$, berlaku $x * x = 0$.

iv. Dari tabel, jelas bahwa $\forall x \in M_5$, jika $x * x = 0$, maka $x = x$

Terbukti bahwa $(M_5, *, 0)$ adalah Aljabar-BCI.

Lampiran 4. Bukti $(M_6,*,0)$ adalah Aljabar-BCI dengan Metode Pengecekan Satu Persatu Menggunakan Tabel 3.3.2.5 Aljabar-BCI $(M_6,*,0)$

Akan di buktikan bahwa $(M_6,*,0)$ adalah Aljabar-BCI dengan syarat memenuhi 4 aksioma Aljabar BCI, sebagaimana berikut:

i. Akan ditunjukkan $\forall x,y,z \in M_6$, berlaku $\big((x*y)*(x*z)\big)*(z*y)=0$.

Untuk $x=0$, maka diperoleh	Untuk $x=1$, maka diperoleh
$\big((0*0)*(0*0)\big)*(0*0)=0$	$\big((1*0)*(1*0)\big)*(0*0)=0$
$\big((0*0)*(0*1)\big)*(1*0)=0$	$\big((1*0)*(1*1)\big)*(1*0)=0$
$\big((0*0)*(0*2)\big)*(2*0)=0$	$\big((1*0)*(1*2)\big)*(2*0)=0$
$\big((0*0)*(0*3)\big)*(3*0)=0$	$\big((1*0)*(1*3)\big)*(3*0)=0$
$\big((0*0)*(0*4)\big)*(4*0)=0$	$\big((1*0)*(1*4)\big)*(4*0)=0$
$\big((0*0)*(0*5)\big)*(5*0)=0$	$\big((1*0)*(1*5)\big)*(5*0)=0$
$\big((0*1)*(0*0)\big)*(0*1)=0$	$\big((1*1)*(1*0)\big)*(0*1)=0$
$\big((0*1)*(0*1)\big)*(1*1)=0$	$\big((1*1)*(1*1)\big)*(1*1)=0$
$\big((0*1)*(0*2)\big)*(2*1)=0$	$\big((1*1)*(1*2)\big)*(2*1)=0$
$\big((0*1)*(0*3)\big)*(3*1)=0$	$\big((1*1)*(1*3)\big)*(3*1)=0$
$\big((0*1)*(0*4)\big)*(4*1)=0$	$\big((1*1)*(1*4)\big)*(4*1)=0$
$\big((0*1)*(0*5)\big)*(5*1)=0$	$\big((1*1)*(1*5)\big)*(5*1)=0$
$\big((0*2)*(0*0)\big)*(0*2)=0$	$\big((1*2)*(1*0)\big)*(0*2)=0$
$\big((0*2)*(0*1)\big)*(1*2)=0$	$\big((1*2)*(1*1)\big)*(1*2)=0$
$\big((0*2)*(0*2)\big)*(2*2)=0$	$\big((1*2)*(1*2)\big)*(2*2)=0$
$\big((0*2)*(0*3)\big)*(3*2)=0$	$\big((1*2)*(1*3)\big)*(3*2)=0$

$$((0*2)*(0*4))*(4*2)=0$$
$$((0*2)*(0*5))*(5*2)=0$$
$$((0*3)*(0*0))*(0*3)=0$$
$$((0*3)*(0*1))*(1*3)=0$$
$$((0*3)*(0*2))*(2*3)=0$$
$$((0*3)*(0*3))*(3*3)=0$$
$$((0*3)*(0*4))*(4*3)=0$$
$$((0*3)*(0*5))*(5*3)=0$$
$$((0*4)*(0*0))*(0*4)=0$$
$$((0*4)*(0*1))*(1*4)=0$$
$$((0*4)*(0*2))*(2*4)=0$$
$$((0*4)*(0*3))*(3*4)=0$$
$$((0*4)*(0*4))*(4*4)=0$$
$$((0*4)*(0*5))*(5*4)=0$$

$$((1*2)*(1*4))*(4*2)=0$$
$$((1*2)*(1*5))*(5*2)=0$$
$$((1*3)*(1*0))*(0*3)=0$$
$$((1*3)*(1*1))*(1*3)=0$$
$$((1*3)*(1*2))*(2*3)=0$$
$$((1*3)*(1*3))*(3*3)=0$$
$$((1*3)*(1*4))*(4*3)=0$$
$$((1*3)*(1*5))*(5*3)=0$$
$$((1*4)*(1*0))*(0*4)=0$$
$$((1*4)*(1*1))*(1*4)=0$$
$$((1*4)*(1*2))*(2*4)=0$$
$$((1*4)*(1*3))*(3*4)=0$$
$$((1*4)*(1*4))*(4*4)=0$$
$$((1*4)*(1*5))*(5*4)=0$$

Untuk $x=2$, maka diperoleh

$$((2*0)*(2*0))*(0*0)=0$$
$$((2*0)*(2*1))*(1*0)=0$$
$$((2*0)*(2*2))*(2*0)=0$$
$$((2*0)*(2*3))*(3*0)=0$$
$$((2*0)*(2*4))*(4*0)=0$$

Untuk $x=3$, maka diperoleh

$$((3*0)*(3*0))*(0*0)=0$$
$$((3*0)*(3*1))*(1*0)=0$$
$$((3*0)*(3*2))*(2*0)=0$$
$$((3*0)*(3*3))*(3*0)=0$$
$$((3*0)*(3*4))*(4*0)=0$$

$((2*0)*(2*5))*(5*0)=0$
$((2*1)*(2*0))*(0*1)=0$
$((2*1)*(2*1))*(1*1)=0$
$((2*1)*(2*2))*(2*1)=0$
$((2*1)*(2*3))*(3*1)=0$
$((2*1)*(2*4))*(4*1)=0$
$((2*1)*(2*5))*(5*1)=0$
$((2*2)*(2*0))*(0*2)=0$
$((2*2)*(2*1))*(1*2)=0$
$((2*2)*(2*2))*(2*2)=0$
$((2*2)*(2*3))*(3*2)=0$
$((2*2)*(2*4))*(4*2)=0$
$((2*2)*(2*5))*(5*2)=0$
$((2*3)*(2*0))*(0*3)=0$
$((2*3)*(2*1))*(1*3)=0$
$((2*3)*(2*2))*(2*3)=0$
$((2*3)*(2*3))*(3*3)=0$
$((2*3)*(2*4))*(4*3)=0$
$((2*3)*(2*5))*(5*3)=0$
$((2*4)*(2*0))*(0*4)=0$
$((2*4)*(2*1))*(1*4)=0$

$((3*0)*(3*5))*(5*0)=0$
$((3*1)*(3*0))*(0*1)=0$
$((3*1)*(3*1))*(1*1)=0$
$((3*1)*(3*2))*(2*1)=0$
$((3*1)*(3*3))*(3*1)=0$
$((3*1)*(3*4))*(4*1)=0$
$((3*1)*(3*5))*(5*1)=0$
$((3*2)*(3*0))*(0*2)=0$
$((3*2)*(3*1))*(1*2)=0$
$((3*2)*(3*2))*(2*2)=0$
$((3*2)*(3*3))*(3*2)=0$
$((3*2)*(3*4))*(4*2)=0$
$((3*2)*(3*5))*(5*2)=0$
$((3*3)*(3*0))*(0*3)=0$
$((3*3)*(3*1))*(1*3)=0$
$((3*3)*(3*2))*(2*3)=0$
$((3*3)*(3*3))*(3*3)=0$
$((3*3)*(3*4))*(4*3)=0$
$((3*3)*(3*5))*(5*3)=0$
$((3*4)*(3*0))*(0*4)=0$
$((3*4)*(3*1))*(1*4)=0$

$\left((2*4)*(2*2)\right)*(2*4)=0$

$\left((2*4)*(2*3)\right)*(3*4)=0$

$\left((2*4)*(2*4)\right)*(4*4)=0$

$\left((2*4)*(2*5)\right)*(5*4)=0$

$\left((3*4)*(3*2)\right)*(2*4)=0$

$\left((3*4)*(3*3)\right)*(3*4)=0$

$\left((3*4)*(3*4)\right)*(4*4)=0$

$\left((3*4)*(3*5)\right)*(5*4)=0$

Untuk $x=4$, maka diperoleh

$\left((4*0)*(4*0)\right)*(0*0)=0$

$\left((4*0)*(4*1)\right)*(1*0)=0$

$\left((4*0)*(4*2)\right)*(2*0)=0$

$\left((4*0)*(4*3)\right)*(3*0)=0$

$\left((4*0)*(4*4)\right)*(4*0)=0$

$\left((4*0)*(4*5)\right)*(5*0)=0$

$\left((4*1)*(4*0)\right)*(0*1)=0$

$\left((4*1)*(4*1)\right)*(1*1)=0$

$\left((4*1)*(4*2)\right)*(2*1)=0$

$\left((4*1)*(4*3)\right)*(3*1)=0$

$\left((4*1)*(4*4)\right)*(4*1)=0$

$\left((4*1)*(4*5)\right)*(5*1)=0$

$\left((4*2)*(4*0)\right)*(0*2)=0$

$\left((4*2)*(4*1)\right)*(1*2)=0$

$\left((4*2)*(4*2)\right)*(2*2)=0$

Untuk $x=5$, maka diperoleh

$\left((5*0)*(5*0)\right)*(0*0)=0$

$\left((5*0)*(5*1)\right)*(1*0)=0$

$\left((5*0)*(5*2)\right)*(2*0)=0$

$\left((5*0)*(5*3)\right)*(3*0)=0$

$\left((5*0)*(5*4)\right)*(4*0)=0$

$\left((5*0)*(5*5)\right)*(5*0)=0$

$\left((5*1)*(5*0)\right)*(0*1)=0$

$\left((5*1)*(5*1)\right)*(1*1)=0$

$\left((5*1)*(5*2)\right)*(2*1)=0$

$\left((5*1)*(5*3)\right)*(3*1)=0$

$\left((5*1)*(5*4)\right)*(4*1)=0$

$\left((5*1)*(5*5)\right)*(5*1)=0$

$\left((5*2)*(5*0)\right)*(0*2)=0$

$\left((5*2)*(5*1)\right)*(1*2)=0$

$\left((5*2)*(5*2)\right)*(2*2)=0$

$((4 * 2) * (4 * 3)) * (3 * 2) = 0$	$((5 * 2) * (5 * 3)) * (3 * 2) = 0$
$((4 * 2) * (4 * 4)) * (4 * 2) = 0$	$((5 * 2) * (5 * 4)) * (4 * 2) = 0$
$((4 * 2) * (4 * 5)) * (5 * 2) = 0$	$((5 * 2) * (5 * 5)) * (5 * 2) = 0$
$((4 * 3) * (4 * 0)) * (0 * 3) = 0$	$((5 * 3) * (5 * 0)) * (0 * 3) = 0$
$((4 * 3) * (4 * 1)) * (1 * 3) = 0$	$((5 * 3) * (5 * 1)) * (1 * 3) = 0$
$((4 * 3) * (4 * 2)) * (2 * 3) = 0$	$((5 * 3) * (5 * 2)) * (2 * 3) = 0$
$((4 * 3) * (4 * 3)) * (3 * 3) = 0$	$((5 * 3) * (5 * 3)) * (3 * 3) = 0$
$((4 * 3) * (4 * 4)) * (4 * 3) = 0$	$((5 * 3) * (5 * 4)) * (4 * 3) = 0$
$((4 * 3) * (4 * 5)) * (5 * 3) = 0$	$((5 * 3) * (5 * 5)) * (5 * 3) = 0$
$((4 * 4) * (4 * 0)) * (0 * 4) = 0$	$((5 * 4) * (5 * 0)) * (0 * 4) = 0$
$((4 * 4) * (4 * 1)) * (1 * 4) = 0$	$((5 * 4) * (5 * 1)) * (1 * 4) = 0$
$((4 * 4) * (4 * 2)) * (2 * 4) = 0$	$((5 * 4) * (5 * 2)) * (2 * 4) = 0$
$((4 * 4) * (4 * 3)) * (3 * 4) = 0$	$((5 * 4) * (5 * 3)) * (3 * 4) = 0$
$((4 * 4) * (4 * 4)) * (4 * 4) = 0$	$((5 * 4) * (5 * 4)) * (4 * 4) = 0$
$((4 * 4) * (4 * 5)) * (5 * 4) = 0$	$((5 * 4) * (5 * 5)) * (5 * 4) = 0$

Jadi terbukti bahwa $\forall x, y, z \in M_6$, berlaku $((x * y) * (x * z)) * (z * y) = 0$.

ii. Akan ditunjukkan $\forall x, y \in M_6$, berlaku $(x * (x * y)) * y = 0$.

Untuk $x = 0, y = 0$ maka diperoleh $(0 * (0 * 0)) * 0 = 0$

Untuk $x = 0, y = 1$ maka diperoleh $(0 * (0 * 1)) * 1 = 0$

Untuk $x = 0, y = 2$ maka diperoleh $(0 * (0 * 2)) * 2 = 0$

Untuk $x = 0, y = 3$ maka diperoleh $(0 * (0 * 3)) * 3 = 0$

Untuk $x = 1, y = 0$ maka diperoleh $(1 * (1 * 0)) * 0 = 0$

Untuk $x = 1, y = 1$ maka diperoleh $(1 * (1 * 1)) * 1 = 0$

Untuk $x = 1, y = 2$ maka diperoleh $(1 * (1 * 2)) * 2 = 0$

Untuk $x = 1, y = 3$ maka diperoleh $(1 * (1 * 3)) * 3 = 0$

Untuk $x = 2, y = 0$ maka diperoleh $(2 * (2 * 0)) * 0 = 0$

Untuk $x = 2, y = 1$ maka diperoleh $(2 * (2 * 1)) * 1 = 0$

Untuk $x = 2, y = 2$ maka diperoleh $(2 * (2 * 2)) * 2 = 0$

Untuk $x = 2, y = 3$ maka diperoleh $(2 * (2 * 3)) * 3 = 0$

Untuk $x = 3, y = 0$ maka diperoleh $(3 * (3 * 0)) * 0 = 0$

Untuk $x = 3, y = 1$ maka diperoleh $(3 * (3 * 1)) * 1 = 0$

Untuk $x = 3, y = 2$ maka diperoleh $(3 * (3 * 2)) * 2 = 0$

Untuk $x = 3, y = 3$ maka diperoleh $(3 * (3 * 3)) * 3 = 0$

Untuk $x = 4, y = 0$ maka diperoleh $(3 * (3 * 0)) * 0 = 0$

Untuk $x = 4, y = 1$ maka diperoleh $(4 * (4 * 1)) * 1 = 0$

Untuk $x = 4, y = 2$ maka diperoleh $(4 * (4 * 2)) * 2 = 0$

Untuk $x = 4, y = 3$ maka diperoleh $(4 * (4 * 3)) * 3 = 0$

Untuk $x = 4, y = 4$ maka diperoleh $(4 * (4 * 4)) * 4 = 0$

Untuk $x = 5, y = 0$ maka diperoleh $(5 * (5 * 0)) * 0 = 0$

Untuk $x = 5, y = 1$ maka diperoleh $(5 * (5 * 1)) * 1 = 0$

Untuk $x = 5, y = 2$ maka diperoleh $(5 * (5 * 2)) * 2 = 0$

Untuk $x = 5, y = 3$ maka diperoleh $(5 * (5 * 3)) * 3 = 0$

Untuk $x = 5, y = 4$ maka diperoleh $(5 * (5 * 4)) * 4 = 0$

Jadi terbukti bahwa $\forall x, y \in M_6$, berlaku $(x * (x * y)) * y = 0$

iii. Dari tabel jelas bahwa $\forall x \in M_6$, berlaku $x * x = 0$.

iv. Dari tabel, jelas bahwa $\forall x \in M_6$, jika $x * x = 0$, maka $x = x$

Terbukti bahwa $(M_6, *, 0)$ adalah Aljabar-BCI.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN)
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang (0341)551345
Fax. (0341)572533

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : **Yulis Syaidah**
NIM : **07610063**
Fakultas/ jurusan : **Sains Dan Teknologi/ Matematika**
Judul skripsi : **Konstruksi Aljabar -BCI dari Grup**
Pembimbing I : **Drs. H. Turmudi, M.Si**
Pembimbing II : **Ach. Nashichuddin, M.A**

No	Tanggal	HAL	Tanda Tangan	
1	20 September 2010	Konsultasi BAB I	1.	
2	29 September 2010	Revisi BAB I dan ACC BAB I		2.
3	05 Oktober 2010	Konsultasi BAB II	3.	
4	13 Oktober 2010	Revisi BAB II		4.
5	21 Oktober 2010	Revisi BAB II dan ACC BAB II	5.	
6	04 November 2010	Konsultasi BAB III		6.
7	15 November 2010	Revisi BAB II	7.	
8	22 November 2010	Revisi BAB III		8.
9	13 Desember 2010	Revisi BAB III	9.	
10	04 Januari 2011	Revisi BAB III		10.
11	07 Januari 2011	Konsultasi Agama	11.	
12	10 Januari 2011	ACC BAB III dan IV		12.
13	10 Januari 2011	ACC Keagamaan	13.	

Malang, 11 Januari 2011
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

<u>Abdussakir, M.Pd</u>
NIP. 19751006 200312 1 001