# FAKTORISASI GRAF BERATURAN-*r*

# DENGAN ORDER GENAP

**SKRIPSI**

**Oleh:**

**Asna Bariroh**
**NIM.06510013**

**JURUSAN MATEMATIKA**
**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**
**UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MAULANA MALIK IBRAHIM**
**MALANG**
**2010**

**FAKTORISASI GRAF BERATURAN-*r***
**DENGAN ORDER GENAP**

**SKRIPSI**

**Diajukan Kepada:**
**Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang**
**Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam**
**Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)**

**Oleh:**

**ASNA BARIROH**
**NIM.06510013**

**JURUSAN MATEMATIKA**
**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**
**UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MAULANA MALIK IBRAHIM**
**MALANG**
**2010**

**FAKTORISASI GRAF BERATURAN-*r***
**DENGAN ORDER GENAP**

**SKRIPSI**

**Oleh:**

**ASNA BARIROH**
**NIM.06510013**

**Telah Disetujui untuk Diuji**
**Tanggal, 12 Juli 2010**

| Dosen Pembimbing I, | Dosen Pembimbing II, |
| --- | --- |
| **Wahyu Henky Irawan, M.Pd** | **Dr. Ahmad Barizi, M.A** |
| **NIP.19710420 200003 1 003** | **NIP.19731212 199803 1 001** |

**Mengetahui,**
**Ketua Jurusan Matematika**

**Abdussakir, M.Pd**
**NIP.19751006 200312 1 001**

**FAKTORISASI GRAF BERATURAN-*r***
**DENGAN ORDER GENAP**

**SKRIPSI**

**Oleh:**

**ASNA BARIROH**
**NIM.06510013**

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal:
26 Juli 2010

| **Susunan Dewan Penguji:** | | **Tanda Tangan** |
|---|---|---|
| **1. Penguju Utama** | : **Hairur Rahman, M.Si**<br>**NIP.19800429 200604 1 003** | (                    ) |
| **2. Ketua** | : **Abdussakir, M.Pd**<br>**NIP.19751006 200312 1 001** | (                    ) |
| **3. Sekertaris** | : **Wahyu Henky Irawan, M.Pd**<br>**NIP.19710420 200003 1 003** | (                    ) |
| **4. Anggota** | :**Dr. Ahmad Barizi, M.A**<br>**NIP.19731212 199803 1 001** | (                    ) |

**Mengetahui dan Mengesahkan,**
**Ketua Jurusan Matematika**

**Abdussakir, M.Pd**
**NIP.19751006 200312 1 001**

**PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN**

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Asna Bariroh

NIM : 06510013

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar hasil karya saya sendiri, bukan merupakan hasil tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri.

Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 12 Juli 2010

Yang membuat pernyataan

Asna Bariroh

NIM.06510013

# MOTTO

لَوْكَانَ الْعِلْمُ يُدْرَكُ بِالْمُنَى # مَاكَانَ يَبْقَى فِي الْبَرِيَّةِ جَاهِلٌ

Seandainya ilmu itu dapat diperoleh dengan berangan-angan, maka tidak ada di bumi ini orang yang bodoh

Jangan lihat masa lampau dengan penyesalan, jangan pula lihat masa depan dengan ketakutan, tapi lihatlah sekitar anda dengan penuh kesadaran.

**(James Thurber)**

بسم الله الرحمن الرحيم

Karya Kecil ini Penulis Persembahkan teruntuk:

**Ayah dan Ibu tercinta:**

Ayahanda (Muhaimin Muhtadi) dan Ibunda (Siti Maimunah) tercinta

Yang tanpa lelah memberikan dorongan moral, spiritual, finansial dan tak henti-hentinya mencurahkan kasih sayangnya.

**Adik tersayang:**

Dliyaul Fuadah, kejarlah cita-citamu sampai kamu meraihnya..!!

**Keluarga Besar:**

Bani Muhtadi dan Bani H. Abdullah yang selalu memberi motivasi dan menjadikan kebersamaan kami sebagai anugerah terindah yang akan selalu terjaga.

## KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيْمِ

***Assalamu'alaikum Wr. Wb.***

Puji syukur ke hadirat Allah SWT atas segala limpahan rahmat, taufik dan hidayah-Nya, sehingga skripsi dengan judul *"Faktorisasi Graf Beraturan-r dengan order Genap"* dapat diselesaikan. Shalawat serta salam semoga tetap tercurahkan kepada Nabi Muhammad Saw, yang telah mengantarkan umat manusia dari zaman kebodohan menuju ke zaman yang terang benderang, yakni agama Islam.

Penulis tidak dapat menyelesaikan skripsi ini tanpa bantuan dari berbagai pihak, untuk itu penulis mengucapkan rasa hormat dan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Prof. Dr. Imam Suprayogo, selaku Rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU., D.Sc selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Wahyu Henky Irawan, M.Pd, selaku dosen pembimbing yang senantiasa sabar memberi arahan dan bimbingan dalam menyusun skripsi ini.

5. Dr. Ahmad Barizi, M.A, selaku dosen pembimbing agama yang telah membimbing dan memberi penjelasan dalam menyusun skripsi ini.
6. Seluruh dosen dan staf Fakultas Sains dan Teknologi yang telah memberikan ilmunya selama ini dan memberi motivasi agar penulis dapat menyelesaikan studi dengan baik.
7. Ayah dan Ibu tercinta, adik tersayang, keluarga besar Bani Muhtadi, dan keluarga besar Bani H. Abdullah yang senantiasa berdo'a dan memberikan dukungan moril serta materil kepada penulis.
8. Teman-teman Mahasiswa Jurusan Matematika angkatan 2006 Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang Khususnya Novia Dwi Rahmawati, Lutfiana Fathiyah, Mufidatul Khoiroh, Himma Rosyidah, Erik Sulistianaini, dan Imam Fahruddin yang telah banyak memberikan dukungan dalam penelitian dan penyusunan skripsi ini.
9. Semua pihak yang telah membantu penulis, yang tidak dapat disebutkan satu persatu.

Penulis berdo'a semoga bantuan yang telah diberikan dicatat sebagai amal baik oleh Allah SWT dan mendapatkan balasan yang setimpal. Penulis berharap, semoga skripsi ini bermanfa'at. Amin.

Malang, 03 Juli 2010

Penulis

## DAFTAR ISI

# DAFTAR TABEL

# ABSTRAK

Bariroh, Asna. 2010. *Faktorisasi Graf Beraturan-r dengan Order Genap*. Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Wahyu Henky Irawan, M.Pd. (II) Dr. Ahmad Barizi, M.A.

Kata Kunci: faktor, faktorisasi, graf beraturan-*r*

Salah satu permasalahan dalam teori graf adalah faktorisasi pada graf G. Faktorisasi adalah penjumlahan *(union)* sisi dari faktor-faktor graf G. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan pola umum faktorisasi graf beraturan-*r* $(r \geq 2)$ dengan order genap yang memiliki faktor-1, faktorisasi graf beraturan-*r* yang memiliki faktor-2 dan faktor-3. Permasalahan yang dikaji dibatasi pada faktorisasi graf beraturan-*r* yang memiliki faktor-1, faktor-2 dan faktor-3. Sedangkan metode dalam skripsi ini adalah metode penelitian pustaka *(library research)*.

Langkah-langkah menentukan pola faktorisasi graf beraturan-*r* adalah sebagai berikut: (1) Menggambar beberapa graf beraturan-*r* dengan order genap $(2n)$ untuk $n \geq 2$ sampai dengan order sepuluh, (2) Menentukan faktor pada graf beraturan-*r*, dan (3) Menentukan pola faktorisasi pada graf beraturan-*r*. Kemudian merumuskan teorema yang dilengkapi dengan bukti-bukti.

Berdasarkan hasil pembahasan dapat diperoleh pola jumlah faktor-faktor pada graf beraturan-*r* sebagai berikut:

a) Graf beraturan-*r* $\left(r \geq 2\right)$ dimana $2 \leq r \leq 2n-1$ dengan order genap memiliki faktor-1 sebanyak $r$
b) Graf beraturan-*r* dimana $2 \leq r \leq 2n-2$ dengan syarat $r \equiv 0 (\bmod 2)$ dan order genap memiliki faktor-2 sebanyak $\frac{1}{2}r$
c) Graf beraturan-*r* dimana $3 \leq r \leq 2n-1$, $n = 2+3p$ untuk $p \geq 0$, $3 \leq r \leq 2n-3$, $n = 3+3p$ untuk $p \geq 0$ dan $3 \leq r \leq 2n-2$, $n = 0+3p$ untuk $p \geq 0$ dengan syarat $r \equiv 0 (\bmod 3)$, dan order genap memiliki faktor-3 sebanyak $\frac{1}{3}r$, untuk $n \geq 2$ dan $n \in \mathbb{N}$.

Pembahasan skripsi ini penulis hanya membahas fakorisasi graf beraturan-*r* dengan order genap yang memiliki faktor-1, faktor-2 dan faktor-3. Oleh karena itu diharapkan pada peneliti berikutnya dapat dikembangkan sampai faktor ke-*n* $(n \in \mathbb{N})$ dan atau menggunakan order ganjil yang memiliki faktor-*n* $(n \in \mathbb{N})$.

## ABSTRACT

Bariroh, Asna. 2010. *Factorization of r-Regular Graph with Even Order*. Thesis Mathematic Department of Science and Technology Faculty of State Islamic University Maulana Malik Ibrahim of Malang. Advisor: (I) Wahyu Henky Irawan, M.Pd. (II) Dr. Ahmad Barizi, M.A.

Keyword: factor, factorization, graph of regular-*r*

One problem of graph theory is factorization at graph G. Factorization is edge union from factors of graph G. This research aim at determine general pattern of factorization of *r*-regular graph $(r \geq 2)$ with even order which has 1-factor and *r*-regular graph which has 2-factor and 3-factor. The problems studied were limited at factorization of *r*-regular graph which have 1-factor, 2-factor and 3-factor. While the thesis method is library research method.

The steps to determine factorization pattern of *r*-regular graph are, (1) Draw some *r*-regular graphs with even order $(2n)$ for $n \geq 2$ up to ten order, (2) Determine the factor at *r*-regular graph, and (3) Determine factorization pattern in *r*-regular graph. Then the researcher formulates the theorem and proof it.

Based on the result of the discussion, the researcher obtained some patterns of factors sum at *r*-regular graph, are:

a) *r*-Regular graph $(r \geq 2)$ with $2 \leq r \leq 2n-1$ and even order which has 1-factor equals to the amount of $r$
b) *r*-Regular graph where $2 \leq r \leq 2n-2$ with $r \equiv 0 (\bmod 2)$ and even order which has 2-factor equals to the amount of $\frac{1}{2}r$
c) *r*-Regular graph where $3 \leq r \leq 2n-1$, $n = 2+3p$ for $p \geq 0$, $3 \leq r \leq 2n-3$, $n = 3+3p$ for $p \geq 0$ and $3 \leq r \leq 2n-2$, $n = 0+3p$ for $p \geq 0$ with $r \equiv 0 (\bmod 3)$ and even order which has 3-factor equals to the amount of $\frac{1}{3}r$, for $n \geq 2$ and $n \in \mathbb{N}$.

This thesis writer only study factorization of graph regular-*r* with even order which have 1-factor, 2-factor and 3-factor. Therefore expected at the next researcher can be developed at *n*-factors and or applies odd order which have n-factors.

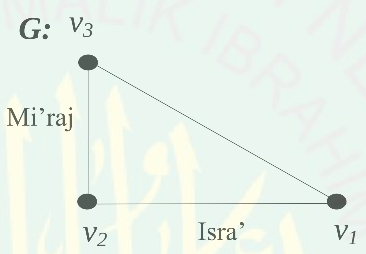
# BAB 1
# PENDAHULUAN

## 1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan suatu ilmu yang mempunyai obyek kajian abstrak yang universal dan mendasari perkembangan teknologi modern serta mempunyai peran penting dalam berbagai disiplin ilmu pengetahuan. Apalagi di era globalisasi, teknologi berkembang dengan pesatnya serta pembangunan sedang giat-giatnya dilaksanakan. Perkembangan teknologi yang erat hubungannya dengan kegiatan manusia sehari-hari adalah matematika. Dengan bantuan matematika, masalah tersebut akan lebih mudah dipahami dan dipecahkan (Purwanto,1998:1). Carl Friedrich Gauss mengatakan matematika sebagai *"Ratunya Ilmu Pengetahuan"*, sehingga matematika tidak dapat dilepaskan dari berbagai ilmu yang ada dan matematika juga membantu dalam kehidupan sehari-hari (Falaqiyah, 2004:1).

Secara umum beberapa konsep dari disiplin ilmu telah dijelaskan dalam Al-Qur'an. Salah satu konsep dari disiplin ilmu matematika yang terdapat dalam Al-Qur'an adalah masalah teori graf. Teori graf merupakan cabang matematika yang didefinisikan sebagai pasangan himpunan $(V,E)$ ditulis dengan notasi $G=(V,E)$, dengan $V$ adalah himpunan tidak kosong dari titik-titik *(vertices)* dan $E$ adalah himpunan sisi *(edges)* yang menghubungkan sepasang titik (Munir, 2005: 356).

Banyak ajaran serta amalan dalam Islam yang dapat direpresentasikan dalam teori graf. Representasi dari graf adalah dengan menyatakan obyek dengan titik, noktah, bulatan, titik *(vertec)*, sedangkan hubungan antara objek dinyatakan dengan sisi *(edge)*. Misalnya peristiwa Isra' dan Mi'raj. Isra' adalah perjalanan Nabi Muhammad dari Masjidil Haram di Makkah ke Masjidil Aqsha di Palestina. Mi'roj adalah perjalanan Nabi Muhammad dari Masjidil Aqsha ke Sidratulmuntaha. Terkait dengan kedua peristiwa tersebut, maka kejadian ini dapat digambarkan sebagai berikut:




Gambar 1.1 Representasi Isra' dan Mi'raj dalam Bentuk Graf

Gambar 1.1 memperlihatkan bahwa ada tiga titik yang dihubungkan oleh tiga sisi. Titik $v_1$ menggambarkan Masjidil Haram, titik $v_2$ menggambarkan Masjidil Aqsha dan titik $v_3$ menggambarkan Sidratulmuntaha. Sedangkan tiga sisi menggambarkan perjalanan Nabi Muhammad yaitu Isra' (dari Masjidil Haram ke Masjidil Aqsha) dan Mi'raj (dari Masjidil Aqsha ke Sidratulmuntaha).

Allah SWT berfirman dalam surat Al-Isra' ayat 1:

سُبْحَٰنَ ٱلَّذِىٓ أَسْرَىٰ بِعَبْدِهِۦ لَيْلًا مِّنَ ٱلْمَسْجِدِ ٱلْحَرَامِ إِلَى ٱلْمَسْجِدِ
ٱلْأَقْصَا ٱلَّذِى بَٰرَكْنَا حَوْلَهُۥ لِنُرِيَهُۥ مِنْ ءَايَٰتِنَآ ۚ إِنَّهُۥ هُوَ ٱلسَّمِيعُ ٱلْبَصِيرُ ﴿١﴾

Artinya: *"Maha suci Allah, yang telah memperjalankan hamba-Nya pada suatu malam dari Al Masjidil Haram ke Al Masjidil Aqsha yang telah Kami berkahi sekelilingnya agar Kami perlihatkan kepadanya* *sebagian dari tanda-tanda (kebesaran) kami. Sesungguhnya Dia adalah Maha mendengar lagi Maha mengetahui".*

Teori graf adalah teori lama yang hingga kini masih begitu banyak ditemukan aplikasinya. Ide dasarnya diperkenalkan pertama kali pada abad ke-18 oleh matematikawan Swis Leonhard Euler. Pada waktu itu, ia menggunakan graf untuk menyelesaikan masalah jembatan Konigsberg yang terkenal. Konisberg adalah sebuah kota di sebelah timur Prussia (Jerman) dimana terdapat sungai pregel dan tempat tinggal Duke of Prussia pada abab ke-16 (tahun 1736). Sungai Pregel membagi kota menjadi 4 daratan yang mengalir mengitari pulau Kneiphof lalu bercabang menjadi dua anak sungai. Pada abad ke-18 dibangunlah tujuh jembatan yang menghubungkan keempat daratan tersebut. Akhirnya Euler memecahkan masalah ini dengan merepresentasikannya ke dalam graf dengan keempat daratan sebagai titik *(vertec)* dan ketuju jembatan sebagai sisi *(edge)*. Bahkan 3 abad setelahnya, teori ini masih digunakan untuk menyelesaikan masalah dalam berbagai bidang. Pada umumnya, teori graf digunakan untuk memodelkan persoalan dan mencari solusinya (Munir, 2005:354).

Salah satu pembahasan dalam teori graf yaitu mengenai faktorisasi. Faktor dari graf $G$ adalah suatu subgraf merentang *(spanning subgraf)* dari graf $G$. Jika $G_1, G_2, G_3 ... G_n$ dan $n \geq 2$ adalah faktor yang disjoint sisi pada $G$ sedemikian hingga $\bigcup_i^n E(G_i) = E(G)$, maka $G = G_1 \oplus G_2 \oplus G_3 \oplus ... \oplus G_n$ disebut sebagai penjumlahan sisi dari faktor-faktor $G_1, G_2, G_3 ... G_n$. Sedangkan penjumlahan sisi dari faktor-faktor graf *G* disebut Faktorisasi (Chartrand dan Lesniak, 1986: 229).

Masalah faktorisasi banyak diterapkan dalam kegiatan manusia sehari-hari, misalnya masalah penjadwalan dalam turnamen sepak bola. Suatu kejuaraan sepak bola dalam bentuk turnamen setengah kompetisi, yakni setiap tim bertanding melawan setiap tim yang lainnya tepat satu kali. Setiap tim hanya bertanding paling banyak satu kali setiap minggunya. Untuk menyelesaikan seluruh pertandingan dengan jumlah *n* tim, dibutuhkan waktu minimal *n-1* minggu, apabila n adalah genap. Untuk *n* ganjil, dibutuhkan minimal *n* minggu. Pada setiap minggunya terdapat satu tim yang tidak bertanding, biasanya disebut mendapat *bye*. Untuk menyelesaikan masalah ini dibutuhkan beberapa pengetahuan dari geometri.

Bahasan mengenai faktorisasi dari suatu graf merupakan pembahasan yang masih jarang. Akan tetapi masalah faktorisasi pada graf komplit telah dibahas dalam skripsi oleh Vera Mandailina tahun 2009. Berdasarkan pembahasan dalam skripsi tersebut diperoleh jumlah faktor-faktor pada graf komplit sebagai berikut: (1) Graf komplit $(K_n)$ dengan *n* genap memiliki faktor-1 sebanyak $2n-1$ (2) Graf komplit $(K_n)$ dengan *n* ganjil memiliki faktor-2 sebanyak $\frac{2n}{2}$.

Oleh sebab itu, dalam penelitian ini penulis tertarik untuk meneliti dan melanjutkan mengenai faktorisasi graf beraturan-*r* yang memiliki faktor-1, faktor-2 dan faktor-3 yang dikemas dalam judul penelitian: *"Faktorisasi Graf beraturan-r dengan Order Genap".*

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah yang akan digunakan adalah: Bagaimana pola faktorisasi graf beraturan-*r* $(r \geq 2)$ dengan order genap yang memiliki faktor-1, graf beraturan-*r* yang memiliki faktor-2 dan faktor-3?.

## 1.3 Tujuan

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan skripsi ini adalah untuk mengetahui pola umum faktorisasi graf beraturan-*r* $(r \geq 2)$ dengan order genap yang memiliki faktor-1, graf beraturan-*r* yang memiliki faktor-2 dan faktor-3.

## 1.4 Batasan Masalah

Skripsi ini membahas faktorisasi graf beraturan-*r* yang memiliki faktor-1, faktor-2 dan faktor-3. Akan tetapi penulis membatasi pada graf sederhana, terhubung *(connected)* yang berorder genap $(2n)$ dimana $n \geq 2$ $(n \in \mathbb{N})$. Graf sederhana adalah graf yang tidak memuat loop dan sisi rangkap *(multiple edges)*. Sedangkan graf dikatakan terhubung jika untuk setiap titik di $G$ selalu terdapat lintasan *(path)* yang menghubungkan kedua titik tersebut.

Skripsi ini juga membatasi graf beraturan-2 dengan menggunakan graf cycle dan graf beraturan-$r$ dengan $r \geq 3$ menggunakan graf tangga dengan penambahan sebarang sisi sesuai dengan graf beraturan-$r$ yang memenuhi.

## 1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penulisan skripsi ini adalah:

1. Bagi Penulis
   a. Menambah informasi dan wawasan keilmuan tentang teori graf, khususnya faktorisasi pada graf beraturan-$r$
   b. Menambah pengetahuan tentang masalah sebenarnya, yaitu penggunaan teori-teori yang diterima di bangku kuliah tentang teori graf, khususnya faktorisasi pada graf beraturan-$r$.
2. Bagi Pembaca
   a. Penelitian mengenai faktorisasi graf beraturan-$r$ dapat digunakan sebagai langkah awal pembahasan yang dapat dilanjutkan sampai faktor ke-$n$ $(n \in \mathbb{N})$
   b. Menambah wawasan keilmuan tentang teori graf khususnya faktorisasi pada graf beraturan-$r$
   c. Sebagai rujukan untuk penelitian yang akan datang.

3. Bagi lembaga

Hasil penelitian ini dapat digunakan sebagai tambahan kepustakaan yang dijadikan sarana pengembangan wawasan keilmuan khususnya di jurusan matematika untuk mata kuliah teori graf.

## 1.6 Metode Penelitian

1. Jenis dan Pendekatan Penelitian

   Jenis penelitian ini adalah deskriptif kualitatif, yaitu pencarian fakta dengan interpretasi tepat untuk membuat gambaran atau lukisan secara sistematis, faktual, dan akurat. Dengan demikian, pendekatan yang digunakan adalah pendekatan kualitatif dengan metode kepustakaan *(Library Research)* yaitu usaha mendalami, mencermati, menelaah, dan mengidentifikasi pengetahuan yang ada dalam keperpustakaan (Hasan, 2002:45).

2. Jenis dan Sumber Data

   Jenis dan sumber data pada penelitian ini adalah:

   a. Data primer, diperoleh dengan menggambar beberapa graf beraturan-$r$ dan mencari banyak faktor-faktor yang dimiliki oleh graf beraturan-$r$

   b. Data skunder, diperoleh dengan cara mengambil teorema-teorema yang berhubungan dengan penelitian, misalnya teorema lemma jabat tangan untuk mengetahui banyaknya sisi dan derajat pada suatu graf.

3. Teknik Pengumpulan Data

   Teknik pengumpulan data dalam penelitian ini yaitu dengan cara menggambar beberapa graf beraturan-*r* kemudian menentukan faktor-faktor pada graf beraturan-*r* sehingga menghasilkan data berupa angka-angka yang menunjukkan nilai dari banyaknya faktor pada graf beraturan-*r*.

4. Menganalisis Data

   Langkah-langkah yang diambil dalam mengenalisis data dalam penelitian ini adalah:

   a. Menentukan graf beraturan-*r* sesuai order yang diberikan sampai order 10 dan menentukan faktor pada graf beraturan-*r*
   b. Menentukan pola faktorisasi pada graf beraturan-*r*
   c. Merumuskan teorema tentang faktorisasi pada graf beraturan-*r*
   d. Membuktikan teorema.

5. Rancangan penelitian

   a. Merumuskan masalah

      Sebelum peneliti melakukan penelitian, terlebih dahulu disusun rencana penelitian bermula dari suatu masalah tentang faktorisasi pada graf beraturan-*r*.

   b. Mengumpulkan data

      Mengumpulkan data dari berbagai literatur pendukung, baik yang bersumber dari buku, jurnal, artikel, diktat kuliah, internet dan lainnya yang berhubungan dengan permasalahan yang akan dibahas dalam penelitian ini.

c. Menganalisis data

Menganalisis data sesuai dengan langkah-langkah yang dijelaskan sebelumnya.

d. Membuat kesimpulan

Kesimpulan dalam penelitian ini berupa pola faktorisasi yang merupakan hasil faktorisasi pada graf beraturan-*r* dengan order genap.

e. Melaporkan

Langkah terakhir dalam penelitian ini adalah menyusun laporan dari penelitian yang telah dilakukan, yaitu berupa skripsi.

**1.7 Sistemetika Penulisan**

Untuk mempermudah dalam memahami skripsi ini secara keseluruhan, maka penulis menggunakan sistematika penulisan yang terdiri dari 4 bab dan masing-masing akan dijelaskan sebagai berikut:

BAB I. PENDAHULUAN

Dalam bab ini dijelaskan latar belakang masalah, permasalahan, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian dan sistematika penulisan.

BAB II. KAJIAN PUSTAKA

Dalam bab ini terdiri atas konsep-konsep (teori-teori) yang mendukung bagian pembahasan. Konsep-konsep tersebut antara lain membahas tentang pengertian graf, graf sederhana dan tak sederhana, derajat titik, graf terhubung, subgraf, operasi graf, graf teratur, faktorisasi dan representasi graf dalam Islam.

BAB III. PEMBAHASAN

Dalam bab ini dipaparkan penentuan *faktorisasi graf beraturan-r dengan order genap* $(2n)$ *dengan* $n \geq 2$ *dan* $n \in \mathbb{N}$ .

BAB IV. PENUTUP

Dalam bab ini dikemukakan kekesimpulan akhir penelitian dan beberapa saran.

# BAB II
# KAJIAN TEORI

## 2.1 Definisi dan Komponen-komponen Graf

**Definisi 1**

Graf $G$ didefinisikan sebagai pasangan himpunan $(V,E)$ dalam hal ini

$V$ = himpunan berhingga dan tidak kosong dari titik-titik *(vertices)* dan dinotasikan dengan $V = \{v_1,v_2,\dots,v_n\}$

$E$= himpunan sisi atau garis yang menghubungkan antara sepasang titik dan dinotasikan dengan $E= \{e_0,e_1,\dots,e_m\}$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa graf $G$ dapat dinotasikan dengan $G =(V,E)$ (Munir, 2005:356).

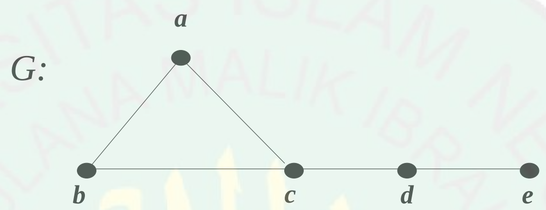
Jadi graf adalah himpunan tidak kosong dari elemen-elemen yang disebut titik dan setiap sisi menghubungkan dua titik.

Titik-titik pada graf dapat dinotasikan dengan huruf-huruf kecil, seperti $a$, $b$, $c$,… atau dengan menggunakan bilangan asli 1,2,3,… atau gabungan keduanya. Sedangkan notasi atau lambang yang digunakan untuk menghubungkan titik $u$ dengan titik $v$ dinyatakan dengan pasangan $(u, v)$ atau dinyatakan dengan lambang $e_1$, $e_2$, $e_3$, …. Dengan kata lain, jika $e$ adalah sisi yang menghubungkan titik $u$ dengan titik $v$, maka $e$ dapat ditulis sebagai $e = (u, v)$.

**Definisi 2**

Banyaknya unsur di *V* disebut order dari graf *G* dan dilambangkan dengan *p(G)*, dan banyaknya unsur di *E* disebut size dari graf *G* dan dilambangkan dengan *q(G)* (Chartrand dan Lesniak, 1986:4).

**Contoh:**




Gambar 2.1 Graf G berorder 5 dengan ukuran 5

Pada Gambar 2.1 graf *G* mempunyai 5 titik sehingga order *G* adalah *p*= 5. Graf *G* mempunyai 5 sisi sehingga ukuran graf *G* adalah *q*=5 dengan

$V(G) = \{a, b, c, d, e\}$

$E(G) = \{(a, b), (a, c), (b, c), (c, d), (d, e)\}$.

Graf *G* juga dapat ditulis dengan

$V(G) = \{a, b, c, d, e\}$

$E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$.

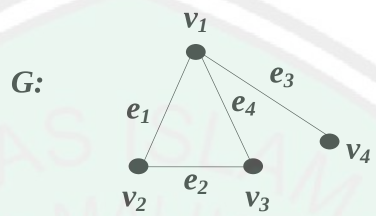
dengan

$e_1 = (a, b), e_2 = (a, c), e_3 = (b, c), e_4 = (c, d), e_5 = (d, e)$.

**Definisi 3**

Sisi $e = (u, v)$ dikatakan menghubungkan titik *u* dan *v*, jika $e = (u, v)$ adalah sisi di graf *G*, maka verteks *u* dikatakan terhubung langsung *(adjacent)* terhadap vertex *v* dan sisi *e* dikatakan terkait langsung *(incident)* pada *u* dan pada *v*. Untuk selanjutnya, sisi *e* = *(u, v)* akan di tulis *e* = *uv* (Chartrand dan Lesniak, 1986:4).

**Contoh:**




Gambar 2.2 Graf *G* untuk mengilustrasikan *Adjecent* dan *Incident*

Pada gambar 2.2 titik $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_1$ dan $v_3$, tetapi titik $v_2$ tidak terhubung langsung dengan titik $v_4$. Sisi $e_1$ terkait langsung dengan titik $v_1$ dan $v_2$, tetapi $e_1$ tidak terkait langsung dengan titik $v_3$ dan $v_4$.

## 2.2 Graf Sederhana *(Simple Graf)* dan Graf Tak-sederhana *(Unsimple-Graf)*

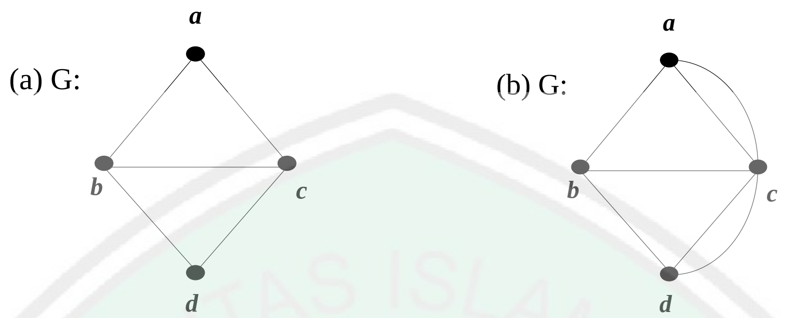
**Definisi 4**

Graf sederhana *(simple graf)* adalah graf yang tidak mengandung gelang *(loop)* maupun sisi ganda (Munir, 2005: 357).

**Definisi 5**

Dua sisi atau lebih yang menghubungkan pasangan titik yang sama disebut sisi ganda, dan sisi yang menghubungkan sebuah titik kepada dirinya sendiri di sebut *loop*. Graf yang mengandung *loop* atau sisi ganda disebut graf tak-sederhana *(unsimple-graf)* (Munir, 2005: 357).

**Contoh:**




Gambar 2.3 Dua buah graf (a) Graf sederhana, (b) Graf tak-sederhana

Kitab suci Al-Qur'an telah membahas tentang kesederhanaan dan ketidaksederhanaan (berlebih-lebihan) seseorang dalam kehidupan sehari-hari baik dalam beramal serta perbuatan seseorang. Allah SWT telah berfirman dalam surat Lukman ayat 19 yang berbunyi:

وَٱقْصِدْ فِى مَشْيِكَ وَٱغْضُضْ مِن صَوْتِكَ ۚ إِنَّ أَنكَرَ ٱلْأَصْوَٰتِ لَصَوْتُ
ٱلْحَمِيرِ ١٩

Artinya: *"Dan sederhanalah kamu dalam berjalan dan lunakkanlah suaramu. Sesungguhnya seburuk-buruk suara ialah suara keledai".*

Allah juga berfirman dalam surat Al-Israa' ayat 26-27 yang berbunyi:

وَءَاتِ ذَا ٱلْقُرْبَىٰ حَقَّهُۥ وَٱلْمِسْكِينَ وَٱبْنَ ٱلسَّبِيلِ وَلَا تُبَذِّرْ تَبْذِيرًا ٢٦ إِنَّ
ٱلْمُبَذِّرِينَ كَانُوٓا۟ إِخْوَٰنَ ٱلشَّيَٰطِينِ ۖ وَكَانَ ٱلشَّيْطَٰنُ لِرَبِّهِۦ كَفُورًا ٢٧

Artinya: 26. *"Dan berikanlah kepada keluarga-keluarga yang dekat akan haknya, kepada orang miskin dan orang yang dalam perjalanan dan janganlah kamu menghambur-hamburkan (hartamu) secara boros"*.

27. *"Sesungguhnya pemboros-pemboros itu adalah Saudara-saudara syaitan dan syaitan itu adalah sangat ingkar kepada Tuhannya"*.

Ayat-ayat di atas menegaskan untuk berbuat atau bersikap sederhana dan jangan berlebih-lebihan dalam mengerjakan segala hal. Ayat 19 dalam surat Lukman, Allah melarang hambanya untuk berjalan dengan cepat, dan hendaknya ketika seseorang berjalan, janganlah terlampau cepat dan jangan pula terlalu lambat, Allah juga melarang untuk bersuara dengan keras, sebagaimana kisah sahabat Rasulullah Sayyidina Abu Bakar dan Umar dalam mengerjakan shalat. Abu Bakar mengerjakan sholat dengan suara terlalu pelan dan Umar mengerjakan sholat dengan suara terlalu keras, setelah Rasulullah mengetahui perbuatan sahabat-sahabatnya, akhirnya beliau menegur Abu Bakar supaya mengeraskan suara ketika sholat dan memelankan suara kepada Umar dan memerintahkan untuk mengerjakan sesuatu tidak berlebih-lebihan. Sedangkan ayat 26 dalam surat Al-Israa' Allah memerintahkan kepada hambanya untuk memberikan hak kepada orang-orang yang berhak, misalnya memberikan harta warisan kepada kerabat terdekat terlebih dahulu, dan apabila mempunyai harta lebih hendaknya memenuhi perintah Allah untuk memberikan zakat kepada orang-orang yang berhak.

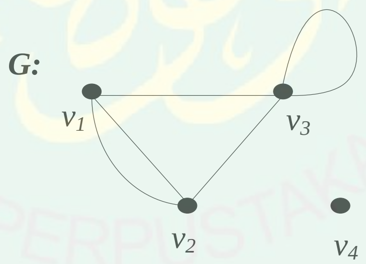
## 2.3 Derajat Titik *(Vertex Degrees)*

**Definisi 6**

Misal *G* adalah suatu graf dan *v* titik di *G*. Derajat titik *v* di *G*, ditulis $d_G(v)$ (*degree*) adalah banyaknya sisi di *G* yang terkait langsung dengan *v*. Jadi $d_G(v)$ adalah banyaknya titik yang terhubung langsung dengan *v*, sedangkan titik yang berderajat satu disebut titik ujung. Titik *v* dikatan genap atau ganjil tergantung dari jumlah $d_G(v)$ genap atau ganjil (Lipschutz dan Lipson. 2002:7).

Derajat minimum (terkecil) dan derajat maksimum (terbesar) pada graf *G* dengan himpunan titik *V(G)* berturut-turut dilambangkan dengan $\delta(G)$ dan $\Delta(G)$ (Bondy dan Murti, 1976: 10).

Berikut contoh derajat suatu titik pada graf *G*.




Gambar 2.4 Graf *G* dengan derajat setiap titik masing-masing 3,3,4,0

Gambar 2.4 terlihat bahwa $d_G(v_1) = d_G(v_2) = 3$, karena banyaknya sisi yang bertemu pada titik $v_1$ dan $v_2$ masing-masing sebanyak 3, $d_G(v_3)=4$ karena banyaknya sisi yang bertemu pada titik $v_3$ sebanyak 4, sedangkan pada titik $v_4$ karena tidak ada sisi yang bertemu titik $v_4$ maka $d_G(v_4) = 0$. Sehingga graf G di atas mempunyai $\delta(G) = 0$ dan $\Delta(G) = 4$.

**Teorema**

Jika *G* graf $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$

maka $\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2q$ (Chartrand dan Lesniak, 1986: 7).

**Bukti:**

Setiap sisi terkait langsung dengan 2 titik, jika setiap derajat titik dijumlahkan, maka setiap sisi dihitung dua kali.

**Akibat**

Pada sembarang graf, banyak derajat titik ganjil adalah genap (Chartrand dan Lesniak, 1986: 7).

**Bukti:**

Misalkan graf *G* dengan ukuran *q*. Ambil *W* yang memuat himpunan titik ganjil pada *G* serta *U* yang memuat himpunan titik genap di *G*.

Dari teorema tersebut maka diperoleh:

$$\sum_{v\in v(G)} d_G(v) = \sum_{v\in W} d_G(v) + \sum_{v\in U} d_G(v) = 2q$$

Karena $\sum_{v\in U} d_G(v)$ genap, maka $\sum_{v\in W} d_G(v)$ juga genap.

Sehingga $|W|$ adalah genap.

## 2.4 Graf Terhubung *(Connected Graf)*

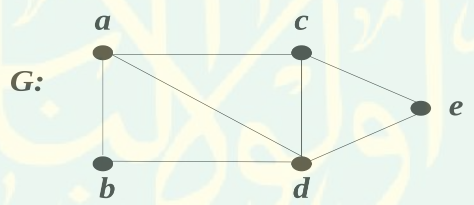
**Definisi 7**

Suatu jalan *(walk)* $u - v$ di graf *G* adalah barisan berhingga (tak kosong). $W : u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_n, v_n = v$ yang berselang seling antara titik dan sisi, yang dimulai dari titik dan diakhiri dengan titik sedemikian hingga untuk $0 \le i \le n$, $e_i = v_{i-1} v_i$ adalah sisi di $G$. $v_0$ disebut titik awal, $v_n$ disebut titik akhir, $v_1$, $v_2$, ..., $v_{n-1}$ disebut titik interval, dan $n$ menyatakan panjang dari $W$ (Chartrand dan Lesniak, 1986: 26).

**Definisi 8**

Jika $v_0 = v_n$ maka $W$ disebut jalan tertutup. Sedangkan jika $v_0 \neq v_n$ maka $W$ disebut jalan terbuka (Chartrand dan Lesniak, 1986: 26).

Perhatikan graf $G$ berikut:




Gambar 2.5 Graf G untuk mengilustrasikan jalan

Dari gambar diatas, maka diperoleh:

$W_1 = a, b, d, c, e, d, a$

adalah jalan tertutup karena jalan pada $W_1$ kembali ke titik semula, yaitu titik $a$. Sedangkan

$W_2 = a, b, d, c, e$

adalah jalan terbuka karena jalan pada $W_2$ tidak kembali ketitik semula.

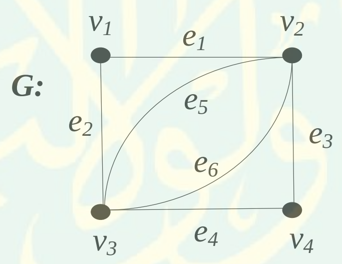
**Definisi 9**

Trail $u-v$ adalah jalan $u-v$ yang semua sisinya berbeda dan boleh mengulang titik (Chartrand dan Lesniak, 1986: 26).

**Definisi 10**

Jalan terbuka yang semua sisi dan titiknya berbeda disebut lintasan. Dengan demikian dapat dikatakan bahwa setiap lintasan pasti trail, tetapi tidak semua trail merupakan lintasan (Wilson and Watkins, 1989: 35).

**Contoh:**




Gambar 2.6 Jejak dan Lintasan pada Graf *G*

Gambar 2.6 terlihat bahwa $v_1$, $e_2$, $v_3$, $e_6$, $v_2$, $e_5$, $v_3$ merupakan sebuah jejak *(trail)* pada graf *G*, karena tidak memuat sisi yang sama, sedangkan $v_1$, $e_1$, $v_2$, $e_6$, $v_3$, $e_4$, $v_4$ merupakan sebuah lintasan *(path)* pada graf *G*, karena tidak memuat titik dan sisi yang sama.

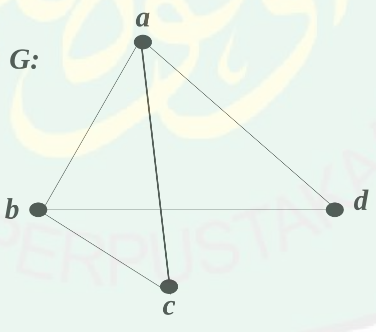
**Definisi 11**

Trail tertutup dan tak trivial pada graf *G* disebut sirkuit di *G*. sedangkan sirkuit yang semua titik internalnya berbeda disebut sikel. Sikel dengan panjang *k* disebut sikel-*k*. Suatu sikel-*k* disebut genap atau ganjil bergantung pada *k* genap atau ganjil (Chartrand dan Lesniak, 1986: 28).

**Definisi 12**

Misal G adalah sebuah graf dan *u*, *v* titik yang berbeda di graf G, maka *u* dan *v* disebut terhubung (*connected*) jika ada lintasan (*path*) *u*-*v* di G. Misal G adalah graf. G disebut terhubung (*connected*) jika untuk setiap titik *u* dan *v* di G terhubung (Chartrand dan Lesniak, 1986:28).

Perhatikan Graf G berikut:




Gambar 2.7 Graf Terhubung *(Connected Graf)*

Dari gambar tersebut, maka diketahui bahwa graf *G* dikatakan terhubung, karena untuk sebarang dua titik berbeda selalu terdapat lintasan yang menghubungkan titik-titik tersebut.

Definisi keterhubungan dapat digunakan dalam hukum waris Islam, khususnya menggambarkan hubungan seseorang yang berhak untuk mendapatkan harta warisan.

Sebab-sebab mendapat warisan ada lima, yaitu:

1. Hubungan kerabat yang hakiki (hubungan darah) baik ke atas, seperti bapak, kakek, ibu, nenek dan seterusnya atau ke arah bawah seperti anak, cucu, maupun kearah samping seperti saudara, paman dan sebagainya.
2. Hubungan pernikahan yang sah, yaitu yang melalui akad nikah sekalipun belum terjadi hubungan suami istri.

   Sebagaimana sabda Rasulullah SAW:

   عَنِ ابْنِ عَبَّاسٍ رَضِيَ اللهُ عَنْهُمَا قَالَ: قَالَ رَسُوْلُ اللهِ صَلَّى اللهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ اَلْحِقُوْا الْفَرَائِضَ بِأَهْلِهَا فَمَا بَقِيَ فَهُوَ لأَوْلَى رَجُلٍ ذَكَرٍ (متفق عليه)

   Dari Ibnu Abbas ia berkata, Rasulullah bersabda: *"Berikanlah harta pusaka kepada orang-orang yang berhak. Sesudah itu sisanya untuk orang laki-laki yang lebih utama (lebih dekat)"*. (HR. Al Bukhori dan Muslim).

   Dari hadits tersebut jelas untuk mengutamakan kerabat yang terdekat (mempunyai hubungan darah) seperti anak, bapak, kakek dan sebagainya. Begitupula dalam hubungan suami istri.
3. Hubungan tuan dan hamba, yaitu hubungan kerabat secara hukum. Hal ini sesuai dengan hadits yang berbunyi:

   الْوِلاَءُ لُحْمَةٌ كَلُحْمَةِ النَّسَبِ لاَيُبَاعُ وَلاَيُوْهَبُ (رواه ابن خزيمة وابن حبان والحاكم)

   Artinya: *"Hubungan orang yang memerdekakan budak dengan budak yang dimerdekakan seperti hubungan nasab, tidak dijual dan tidak dibelikan"* (HR. Ibnu Khuzaimah, Ibnu Hibban dan Al Hakim).

4. Karena hubungan agama. Orang yang meninggal dunia apabila tidak ada ahli warisnya yang berhak menerima warisan, maka harta warisannya diserahkan kepada Baitul mal untuk kepentingan umat Islam. Rasulullah SAW bersabda:

أَناَ وَارِثُ مَنْ لاَ وَارِثَ لَهُ (رواه أحمد وأبو داود)

Artinya: *"Saya (Rasulullah) menjadi waris orang yang tidak mempunyai ahli waris"* (HR. Ahmad dan Abu Daud).

Rasulullah menerima warisan itu bukan untuk kepentingan pribadi melainkan semata-mata untuk kepentingan umat Islam (Abyan, 1993:15).

Terkait dengan kejadian diatas, maka kasus tersebut dapat direpresentasikan pada graf terhubung yang terdiri dari dua titik dan satu sisi


Gambar 2.8 Representasi Graf terhubung Terhadap ahli waris

Gambar 2.8 Merupakan salah satu contoh dari graf terhubung. Titik $v_1$ adalah orang yang meninggal dan titik $v_2$ adalah ahli waris. Sedangka sisinya menggambarkan hubungan orang yang meninggal dengan ahli waris baik dari hubungan darah, pernikahan dan agama.

## 2.5 Subgraf

**Definisi 13**

Graf $H$ disebut subgraf dari $G$ jika himpunan titik di $H$ adalah subset dari himpunan titik-titik di $G$ dan himpunan sisi-sisi di H adalah subset dari himpunan sisi di $G$, atau dapat ditulis $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$. Jika $H$ adalah subgraf $G$, maka dapat ditulis $H \subseteq G$ (Chartrand dan Lesniak, 1986: 28).

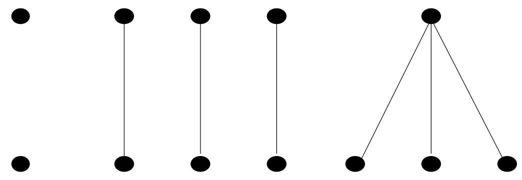
**Contoh:**


Gambar 2.9 (a) Graf $G$, (b) Subgraf dari $G$

## 2.6 Gabungan (Union)

**Definisi 14**

Gabungan dua graf $G_1$ dan $G_2$ yang di notasikan dengan $G = G_1 \cup G_2$ mempunyai himpunan titik $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan himpunan sisi $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2)$. Jika graf $G$ memuat sebanyak $n \geq 2$ graf $H$, maka dinotasikan dengan $G = nH$. Graf $2k_1 \cup 3k_2 \cup k(1,3)$ akan ditunjukkan pada gambar sebagai berikut (Chartrand dan Lesniak, 1986: 11).



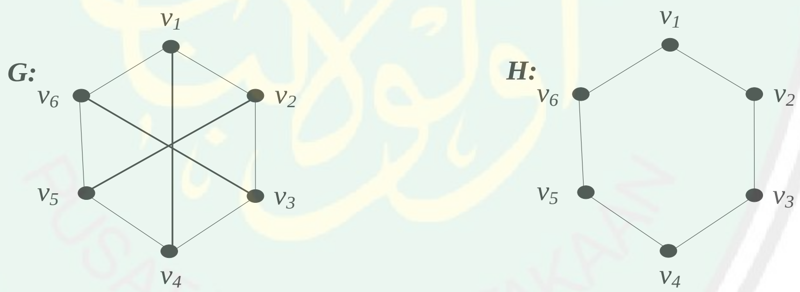
Gambar 2.10 Union Graf

## 2.7 Graf Beraturan *(Regular Graph)*

**Definisi 15**

Graf yang setiap titiknya mempunyai derajat yang sama disebut Graf beraturan. Apabila derajat setiap titik adalah *r*, maka graf tersebut disebut sebagai graf beraturan-*r* (Munir, 2005: 378).

Berikut ilustrasi dari graf regular




Gambar 2.11 Graf *G* barturan-3 dan graf *H* beraturan-2

Tampak pada Gambar 2.11 bahwa setiap titik pada graf *G* mempunyai derajat yang sama yaitu 3 dapat ditulis $d(v_1) = d(v_2) = d(v_3) = d(v_4) = d(v_5) = d(v_6) = 3$, dan setiap titik pada graf *H* juga mempunyai derajat yang sama yaitu 2 dapat ditulis $d(v_1) = d(v_2) = d(v_3) = d(v_4) = d(v_5) = d(v_6) = 2$, sehingga dapat disimpulkan bahwa graf *G* dan graf *H* keduanya merupakan graf regular.

Catatlah bahwa graf komplit $K_n$ juga adalah graf beraturan $(n-1)$. Demikian pula graf lingkaran $C_n$ juga graf beraturan-2. Mudah dihitung bahwa sisi pada graf beraturan-*r* dengan *n* buah titik adalah *nr/2*.

Istilah teratur juga sering digunakan dalam Islam, misalnya keteraturan dalam sistem kewarisan menurut syariat Islam. Agama Islam menetapkan hak pemilikan benda bagi manusia, baik laki-laki maupun perempuan dalam petunjuk syara'. Al-Qur'an juga menjelaskan hukum-hukum, ketentuan-ketentuan dan aturan-aturan bagi setiap ahli waris dengan penjelasan yang lengkap dan sempurna. Al-Qur'an merupakan landasan bagi hukum waris dan aturan serta ketentuan pembagiannya dilengkapi dengan sunah dan ijma'.

Surat An-nisa' ayat 11, 12 dan 176 menjadi dasar dari hukum waris Islam, Allah SWT menjelaskan bagian setiap ahli waris dari para ahli waris yang berhak mendapatkan warisan dan sekaligus menjelaskan besarnya bagian ahli waris tersebut berikut syarat-syaratnya. Pada ketiga ayat di atas juga dapat diketahui enam macam bagian untuk para ahli waris, yaitu $\frac{1}{2}$ (setengah), $\frac{1}{4}$ (seperempat), $\frac{1}{8}$ (seperdelapan), $\frac{1}{3}$ (sepertiga), $\frac{1}{6}$ (seperenam), dan $\frac{2}{3}$ (dua pertiga) (Ashsabuni, 1995: 16).

Pembicaraan mengenai ayat-ayat kewarisan dikemukakan dalam dua tingkat: pertama mengenai ayat-ayat kewarisan dan hal-hal tang diatur didalamnya, kedua mengenai garis hukum dan ayat-ayat kewarisan itu. Ayat-ayat kewarisan dan hal-hal yang diatur di dalamnya meliputi:

1. Surat An-nisa' ayat 11

   Mengatur perolehan anak dengan tiga garis hukum, perolehan ibu dan bapak dengan garis hukum dan soal wasiat dan hutang

2. Surat An-nisa' ayat 12

   Mengatur perolehan duda, janda dan saudara-saudara dalam hal kalalah dengan dua garis hukum, soal wasiat dan hutang

3. Surat An-nisa' ayat 176

   Menerangkan mengenai arti kalalah, dan mengatur mengenai perolehan saudara-saudara dalam hal kalalah

(Tholib, 2002: 4).

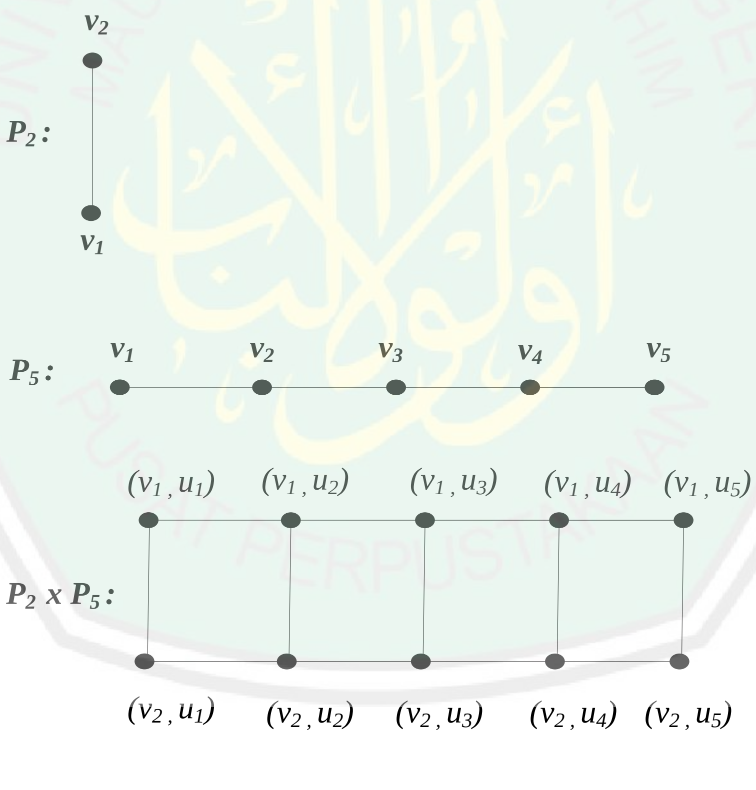
Meskipun hanya tiga ayat Al-Qur'an, namun ketiganya menghimpun dasar-dasar ilmu faraidh (kewarisan) berikut rukun-rukun hukumnya. Barangsiapa yang memahami dan mengerti dua hal di atas, maka dengan mudah akan mengetahui bagian setiap ahli waris dan mengetahui kebijaksanaan Allah dalam menentukan pembagian warisan secara terperinci dan adil. Dalam ketentuannya, Dia tidak melupakan hak seorangpun dan tidak melewatkan satu keadaanpun, baik bagi anak kecil maupun bagi orang dewasa, baik perempuan maupun laki-laki. Pembagian harta diantara ahli waris dilakukan dengan adil dan bijaksana dalam bentuk yang tidak akan menimbulkan cemooh orang-orang teraniaya. Hal itu sekaligus bertujuan menciptakan keadilan dan menghilangkan kezaliman diantara manusia.

## 2.8 Graf Tangga

**Definisi 16**

*Graf* tangga (*ladder*) adalah graf yang dibangun dari hasil kali Kartesius graf lintasan $P_2$ dan $P_n$, yaitu $P_2 \times P_n$. Graf tangga dinotasikan dengan $L_n$ (Cahyono dalam Wati, 2006:24).

**Contoh:**




Gambar 2.12 Graf Tangga $P_2 \times P_5$

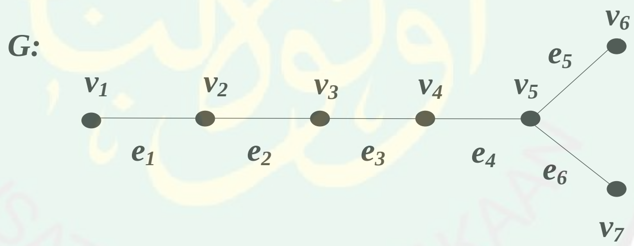
## 2.9 Matching

**Definisi 17**

Pasangan *(matching)* pada graf G adalah himpunan dua buah titik atau suatu sisi pada graf G yang bebas jika sisinya tidak saling adjacent pada G (Chartrand dan Lesniak, 1986: 225).

M disebut sebagai matching sempurna *(perfect matching)* pada graf G, jika M merupakan suatu matching pada graf G, yang mana titik-titik pada G berincident dengan sisi-sisi pada M.

**Contoh:**




Gambar 2.13 Matching dan Maksimum Matching

Gambar 2.13 himpunan $M_1 = \{e_1, e_4\}$ adalah matching tapi bukan matching maksimum. Tapi $M_1 = \{e_1, e_3, e_5\}$ adalah matching maksimum dan merupakan *matching perfect*.

## 2.10 Faktorisasi

**Definisi 18**

Faktor dari graf G adalah suatu subgraf merentang (*spanning subgraph*) dari graf G (Chartand dan Lesniak, 1986: 229).

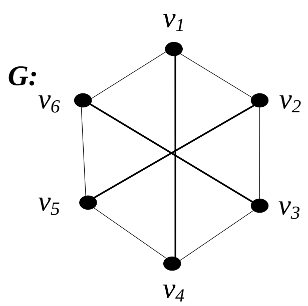
Jika $G_1, G_2, G_3 ... G_n$ adalah faktor yang disjoint sisi dari graf G sedemikian hingga $\bigcup_{i=1}^{n} E(G_i) = E(G)$, ditulis $G = G_1 \oplus G_2 \oplus ... \oplus G_n$ disebut sebagai penjumlahan sisi dari faktor-faktor $G_1, G_2 ... G_n$.

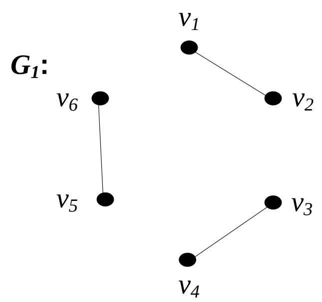
**Definisi 19 :**

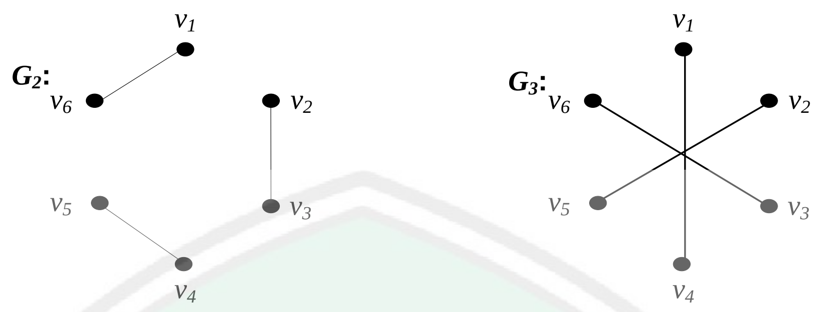
Faktorisasi dari graf G adalah penjumlahan sisi dari faktor-faktor graf G (Chartand dan Lesniak, 1986: 229).

Suatu faktor beraturan-*r* dari graf *G* dapat dinyatakan sebagi faktor-*r* dari *G*. oleh sebab itu, suatu graf memiliki faktor-1 jika dan hanya jika mengandung suatu matching sempurna. Jika suatu faktorisasi ada pada graf *G* dengan demikian setiap faktor adalah faktor-*r*, maka *G* perlu beraturan-*k* untuk suatu *k* yang merupakan kelipatan dari *r* (Chartrand,G dan Ortrud, 1993: 187).

**Contoh:**






Gambar 2.14 Graf G dan faktor-faktornya

Gambar 2.14 memperlihatkan bahwa graf G memiliki 6 titik, yaitu $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$ dan $v_6$, dan memiliki 9 sisi. Sedangkan $G_1, G_2$ dan $G_3$ merupakan faktor-faktor pada graf G. sehingga graf G dapat difaktorkan menggunakan faktor-1 dan $G_1 \oplus G_2 \oplus G_3 = G$ disebut sebagai penjumlahan sisi dari faktor-faktor graf G. sehingga faktorisasi dari graf G adalah penjumlahan dari faktor-faktornya.

# BAB III
# PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas mengenai faktorisasi graf beraturan-*r* $(r \geq 2)$ dengan order genap $(2n)$ dimana $n \geq 2$ dan $n \in \mathbb{N}$. Adapun langkah-langkah menentukan faktorisasi pada graf beraturan-*r* dengan order genap adalah sebagai berikut:

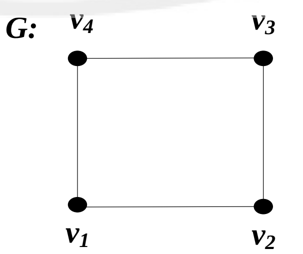
1. Menggambar beberapa graf beraturan-*r* dengan order genap $(2n)$ dengan $n \geq 2$ dan $n \in \mathbb{N}$ sampai dengan order sepuluh
2. Menentukan faktor-faktornya
3. Menentukan pola faktor-faktornya
4. Merumuskan pola ke dalam teorema
5. Membuktikan teorema.

## 3.1 Faktorisasi Graf Beraturan-*r* $(r \geq 2)$ yang Memiliki Faktor-1

### 3.1.1 Graf ($C_{2n}$)

1. Graf beraturan-2 dengan order 4

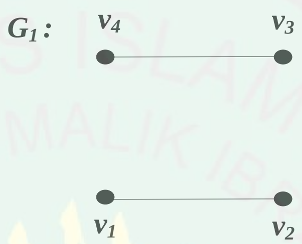
   Gambar graf $C_4$ sebagai berikut:




Gambar 3.1 Graf $C_4$

Gambar 3.1 memperlihatkan bahwa graf $C_4$ memiliki 4 titik, yaitu $v_1, v_2, v_3$ dan $v_4$, dan memiliki 4 sisi. Graf $C_4$ jika difaktorkan menggunakan faktor-1 akan diperoleh:

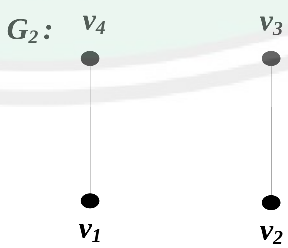
a. Faktor pertama




Gambar 3.2 Faktor pertama dari graf $C_4$

Gambar 3.2 adalah faktor pertama dari graf $C_4$ jika difaktorkan menggunakan faktor-1. Gambar di atas memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_2$ dan titik $v_3$ terhubung langsung dengan titik $v_4$. Sedangkan titik $v_1$ dan $v_3$, $v_3$ dan $v_2$, $v_2$ dan $v_4$, $v_4$ dan $v_1$ tidak terhubung.

b. Faktor kedua




Gambar 3.3 Faktor kedua dari graf $C_4$

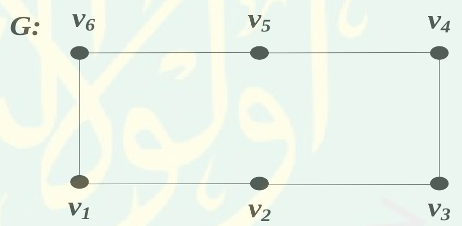
Gambar 3.3 adalah faktor kedua dari graf $C_4$ jika difaktorkan menggunakan faktor-1. Gambar di atas memperlihatkan bahwa titik

$v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_4$ dan titik $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_3$. Sedangkan titik $v_1$ dan $v_2$, $v_2$ dan $v_4$, $v_4$ dan $v_3$, $v_3$ dan $v_1$ tidak terhubung.

Gambar 3.2 dan 3.3 adalah faktor-faktor graf $C_4$, sehingga graf $C_4$ mempunyai faktor-1 sebanyak 2, yaitu $G_1$ dan $G_2$. Sedemikian hingga $G_1 \oplus G_2 = G$ merupakan faktorisasi dari graf $C_4$, yakni penjumlahan sisi dari faktor-faktor graf $C_4$.

2. Graf beraturan-2 dengan order 6

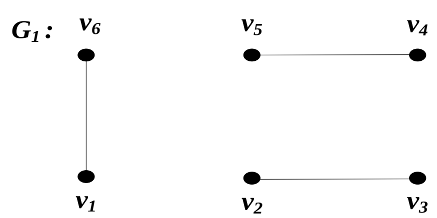
Gambar graf $C_6$ sebagai berikut:




Gambar 3.4 Graf $C_6$

Gambar 3.4 memperlihatkan bahwa graf $C_6$ memiliki 6 titik, yaitu $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$ dan $v_6$, dan memiliki 6 sisi. Graf $C_6$ jika difaktorkan menggunakan faktor-1 akan diperoleh:

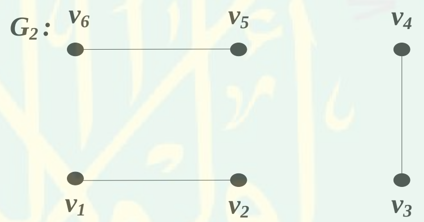
a. Faktor pertama




Gambar 3.5 Faktor pertama dari graf $C_6$

Gambar 3.5 adalah faktor pertama dari graf $C_6$ jika difaktorkan menggunakan faktor-1. Gambar di atas memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_6$, titik $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_3$ dan titik $v_4$ terhubung langsung dengan titik $v_5$. Sedangkan titik $v_1$ dan $v_2$, $v_2$ dan $v_4$, $v_4$ dan $v_3$, $v_3$ dan $v_5$, $v_5$ dan $v_6$, $v_6$ dan $v_2$, $v_2$ dan $v_5$, $v_5$ dan $v_1$, $v_1$ dan $v_4$, $v_4$ dan $v_6$, $v_6$ dan $v_3$, $v_3$ dan $v_1$ tidak terhubung.

b. Faktor kedua



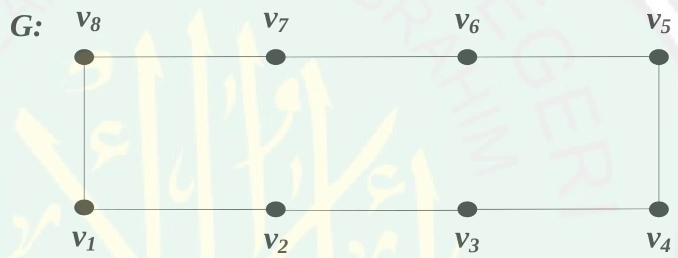

Gambar 3.6 Faktor kedua dari graf $C_6$

Gambar 3.6 adalah faktor kedua dari graf $C_6$ jika difaktorkan menggunakan faktor-1. Gambar di atas memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_2$, titik $v_3$ terhubung langsung dengan titik $v_4$ dan titik $v_5$ terhubung langsung dengan titik $v_6$. Sedangkan titik $v_1$ dan $v_6$, $v_6$ dan $v_2$, $v_2$ dan $v_3$, $v_3$ dan $v_5$, $v_5$ dan $v_4$, $v_4$ dan $v_2$, $v_2$ dan $v_5$, $v_5$ dan $v_1$, $v_1$ dan $v_4$, $v_4$ dan $v_6$, $v_6$ dan $v_3$, $v_3$ dan $v_1$ tidak terhubung.

Gambar 3.5 dan 3.6 adalah faktor-faktor graf $C_6$, sehingga graf $C_6$ mempunyai faktor-1 sebanyak 2, yaitu $G_1$ dan $G_2$. Sedemikian hingga $G_1 \oplus G_2 = G$ merupakan faktorisasi dari graf $C_6$, yakni penjumlahan sisi dari faktor-faktor graf $C_6$.

3. Graf beraturan-2 dengan order 8

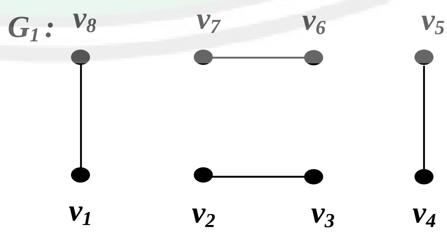
Gambar graf $C_8$ sebagai berikut:




Gambar 3.7 Graf $C_8$

Gambar 3.7 memperlihatkan bahwa graf $C_8$ memiliki 8 titik, yaitu $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7$ dan $v_8$, dan memiliki 8 sisi. Graf $C_8$ jika difaktorkan menggunakan faktor-1 akan diperoleh:

a. Faktor pertama

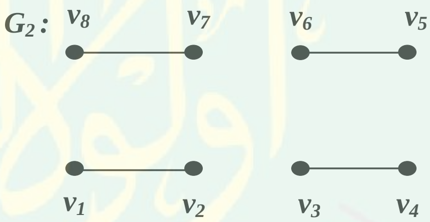



Gambar 3.8 Faktor pertama dari graf $C_8$

Gambar 3.8 adalah faktor pertama dari graf $C_8$ jika difaktorkan menggunakan faktor-1. Gambar di atas memperlihatkan bahwa titik

$v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_8$, titik $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_3$, titik $v_4$ terhubung langsung dengan titik $v_5$ dan titik $v_6$ terhubung langsung dengan titik $v_7$. Sedangkan titik $v_1$ dan $v_2$, $v_2$ dan $v_5$, $v_5$ dan $v_3$, $v_3$ dan $v_4$, $v_4$ dan $v_6$, $v_6$ dan $v_3$, $v_3$ dan $v_7$, $v_7$ dan $v_8$, $v_8$ dan $v_4$, $v_2$ dan $v_7$, $v_7$ dan $v_1$, $v_1$ dan $v_5$, $v_5$ dan $v_6$, $v_6$ dan $v_1$, $v_1$ dan $v_3$, $v_3$ dan $v_8$, $v_8$ dan $v_6$, $v_6$ dan $v_2$, $v_2$ dan $v_7$, $v_7$ dan $v_5$, $v_5$ dan $v_8$, $v_8$ dan $v_2$, $v_2$ dan $v_4$, $v_4$ dan $v_1$ tidak terhubung.

b. Faktor kedua



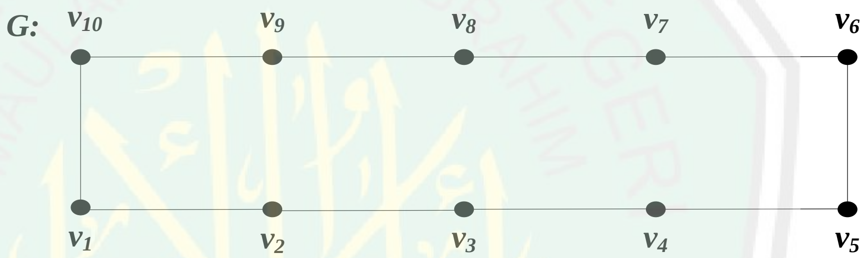

Gambar 3.9 Faktor kedua dari graf $C_8$

Gambar 3.9 adalah faktor kedua dari graf $C_8$ jika difaktorkan menggunakan faktor-1. Gambar di atas memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_2$, titik $v_3$ terhubung langsung dengan titik $v_4$, titik $v_5$ terhubung langsung dengan titik $v_6$ dan titik $v_7$ terhubung langsung dengan titik $v_8$. Sedangkan titik-titik selainnya tidak terhubung.

Gambar 3.8 dan 3.9 adalah faktor-faktor graf $C_8$, sehingga graf $C_8$ mempunyai faktor-1 sebanyak 2, yaitu $G_1$ dan $G_2$. Sedemikian hingga $G_1 \oplus G_2 = G$ merupakan faktorisasi dari graf $C_8$, yakni penjumlahan sisi dari faktor-faktor graf $C_8$.

4. Graf beraturan-2 dengan order 10

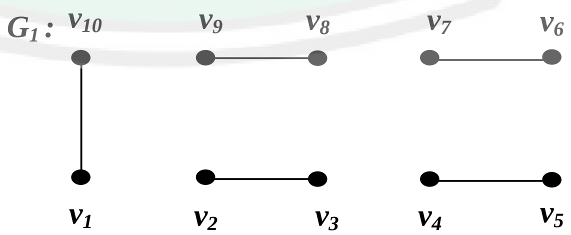
   Gambar graf $C_{10}$ sebagai berikut:




Gambar 3.10 Graf $C_{10}$

Gambar 3.10 memperlihatkan bahwa graf $C_{10}$ memiliki 10 titik, yaitu $v_1, v_2, v_3, v_4$, $v_5, v_6, v_7, v_8, v_9$ dan $v_{10}$, dan memiliki 10 sisi. Graf $C_{10}$ jika difaktorkan menggunakan faktor-1 akan diperoleh:

a. Faktor pertama

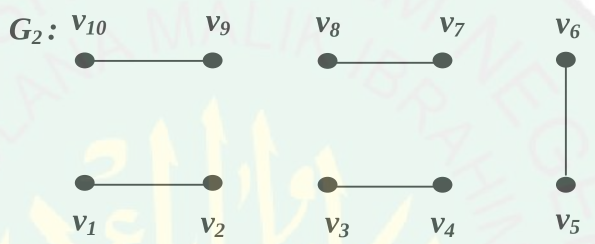



Gambar 3.11 Faktor pertama dari graf $C_{10}$

Gambar 3.11 adalah faktor pertama dari graf $C_{10}$ jika difaktorkan menggunakan faktor-1. Gambar di atas memperlihatkan bahwa titik

$v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_{10}$, $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_3$, titik $v_4$ terhubung langsung dengan titik $v_5$, titik $v_6$ terhubung langsung dengan titik $v_7$ dan titik $v_8$ terhubung langsung dengan titik $v_9$. Sedangkan titik-titik selainnya tidak terhubung.

b. Faktor kedua




Gambar 3.12 Faktor kedua dari graf $C_{10}$

Gambar 3.9 adalah faktor kedua dari graf $C_8$ jika difaktorkan menggunakan faktor-1. Gambar di atas memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_2$, titik $v_3$ terhubung langsung dengan titik $v_4$, titik $v_5$ terhubung langsung dengan titik $v_6$, titik $v_7$ terhubung langsung dengan titik $v_8$ dan titik $v_9$ terhubung langsung dengan titik $v_{10}$. Sedangkan titik-titik selainnya tidak terhubung.

Gambar 3.11 dan 3.12 adalah faktor-faktor graf $C_{10}$, sehingga graf $C_{10}$ mempunyai faktor-1 sebanyak 2, yaitu $G_1$ dan $G_2$. Sedemikian hingga $G_1 \oplus G_2 = G$ merupakan faktorisasi dari graf $C_{10}$, yakni penjumlahan sisi dari faktor-faktor graf $C_{10}$.

Tabel 3.1 Faktorisasi graf $(C_{2n})$ menggunakan faktor-1

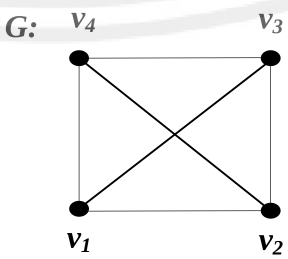
| $p(G)$ | $G$ beraturan-2 | $q(G)$ | Banyak komponen | Banyak faktor-1 |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 2 | $\frac{4\times 2}{2}=4$ | $\frac{4}{2}=2$ | $\frac{4}{2}=2$ |
| 6 | | $\frac{6\times 2}{2}=6$ | $\frac{6}{2}=3$ | $\frac{6}{3}=2$ |
| 8 | | $\frac{8\times 2}{2}=8$ | $\frac{8}{2}=4$ | $\frac{8}{4}=2$ |
| 10 | | $\frac{10\times 2}{2}=10$ | $\frac{10}{2}=5$ | $\frac{10}{5}=2$ |
| $2n$ | | $2n$ | $n$ | 2 |

Dari tabel 3.1 dapat ditarik kesimpulan bahwa graf $C_{2n}$ dengan order genap $(2n)$ dimana $n \geq 2$ dan $n \in \mathbb{N}$ memiliki faktor-1 sebanyak 2.

### 3.1.2 Graf Beraturan-3 dengan Order Genap

1. Graf beraturan-3 dengan order 4

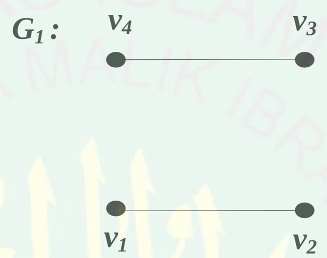
   Gambar graf beraturan-3 dengan order 4 sebagai berikut:




Gambar 3.13 Graf beraturan-3 berorder 4

Gambar 3.10 memperlihatkan bahwa graf beraturan-3 berorder 4 memiliki 4 titik, yaitu $v_1, v_2, v_3$ dan $v_4$, dan memiliki 6 sisi. Graf beraturan-3 berorder 4 jika difaktorkan menggunakan faktor-1 akan diperoleh:

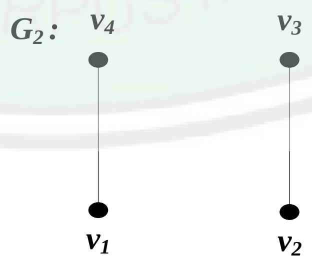
a. Faktor pertama




Gambar 3.14 Faktor pertama dari graf beraturan-3 berorder 4

Gambar 3.14 adalah faktor pertama dari graf beraturan-3 berorder 4 jika difaktorkan menggunakan faktor-1. Gambar di atas memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_2$ dan $v_3$ terhubung langsung dengan titik $v_4$.

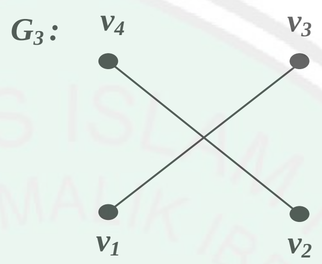
b. Faktor kedua




Gambar 3.15 Faktor kedua dari graf beraturan-3 berorder 4

Gambar 3.15 adalah faktor kedua dari graf beraturan-3 berorder 4 jika difaktorkan menggunakan faktor-1. Gambar di atas memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_4$ dan titik $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_3$.

c. Faktor ketiga



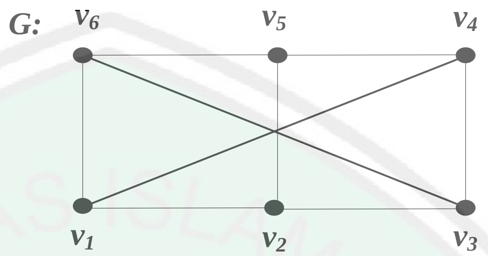

Gambar 3.16 Faktor ketiga dari graf beraturan-3 berorder 4

Gambar 3.16 adalah faktor ketiga dari graf beraturan-3 berorder 4 jika difaktorkan menggunakan faktor-1. Gambar di atas memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_3$ dan titik $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_4$. Sedangkan titik $v_1$ dan $v_2$, $v_2$ dan $v_3$, $v_3$ dan $v_4$, $v_4$ dan $v_1$ tidak terhubung.

Gambar 3.14, 3.15 dan 3.16 adalah faktor-faktor graf beraturan-3 berorder 4, sehingga graf beraturan-3 berorder 4 mempunyai faktor-1 sebanyak 3, yaitu $G_1$, $G_2$ dan $G_3$. Sedemikian hingga $G_1 \oplus G_2 \oplus G_3 = G$ merupakan faktorisasi dari graf beraturan-3 berorder 4, yakni penjumlahan sisi dari faktor-faktornya.

2. Graf beraturan-3 dengan order 6

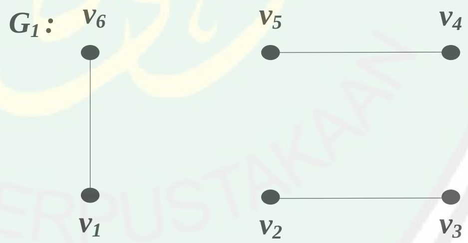
Gambar graf beraturan-3 dengan order 6 sebagai berikut:




Gambar 3.17 Graf beraturan-3 berorder 6

Gambar 3.17 memperlihatkan bahwa graf beraturan-3 berorder 6 memiliki 6 titik, yaitu $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$ dan $v_6$, dan memiliki 9 sisi. Graf beraturan-3 berorder 6 jika difaktorkan menggunakan faktor-1 akan diperoleh:

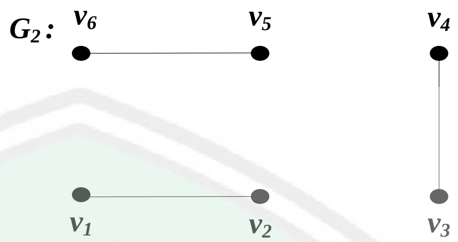
a. Faktor pertama




Gambar 3.18 Faktor pertama dari graf beraturan-3 berorder 6

Gambar 3.18 adalah faktor pertama dari graf beraturan-3 berorder 6 jika difaktorkan menggunakan faktor-1. Gambar di atas memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_6$, titik $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_3$ dan titik $v_4$ terhubung langsung dengan titik $v_5$.

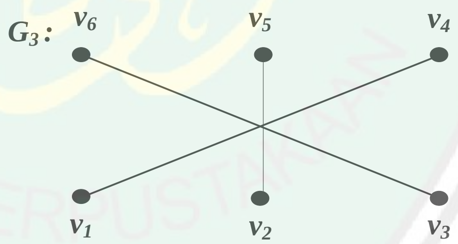
b. Faktor kedua




Gambar 3.19 Faktor kedua dari graf beraturan-3 berorder 6

Gambar 3.19 adalah faktor kedua dari graf beraturan-3 berorder 6 jika difaktorkan menggunakan faktor-1. Gambar di atas memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_2$, titik $v_3$ terhubung langsung dengan titik $v_4$ dan titik $v_5$ terhubung langsung dengan titik $v_6$.

c. Faktor ketiga




Gambar 3.20 Faktor ketiga dari graf beraturan-3 berorder 6

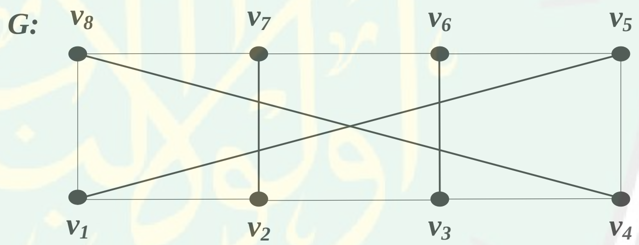
Gambar 3.20 adalah faktor ketiga dari graf beraturan-3 berorder 6 jika difaktorkan menggunakan faktor-1. Gambar di atas memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_4$, titik $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_5$ dan titik $v_3$ terhubung langsung dengan titik $v_6$. Sedangkan titik $v_1$ dan $v_2$, $v_2$ dan $v_3$, $v_3$

dan $v_4$, $v_4$ dan $v_5$, $v_5$ dan $v_6$, $v_6$ dan $v_2$, $v_2$ dan $v_4$, $v_4$ dan $v_6$, $v_6$ dan $v_1$, $v_1$ dan $v_5$, $v_5$ dan $v_3$, $v_3$ dan $v_1$ tidak terhubung.

Gambar 3.18, 3.19 dan 3.20 adalah faktor-faktor graf beraturan-3 berorder 6, sehingga graf beraturan-3 berorder 6 mempunyai faktor-1 sebanyak 3, yaitu $G_1$, $G_2$ dan $G_3$. Sedemikian hingga $G_1 \oplus G_2 \oplus G_3 = G$ merupakan faktorisasi dari graf beraturan-3 berorder 6, yakni penjumlahan sisi dari faktor-faktornya.

3. Graf beraturan-3 dengan order 8

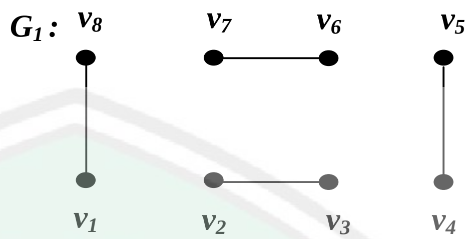
Gambar graf beraturan-3 dengan order 8 sebagai berikut:




Gambar 3.21 Graf beraturan-3 berorder 8

Gambar 3.21 memperlihatkan bahwa graf beraturan-3 berorder 8 memiliki 8 titik, yaitu $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7$ dan $v_8$, dan memiliki 12 sisi. Graf beraturan-3 berorder 8 jika difaktorkan menggunakan faktor-1 akan diperoleh:

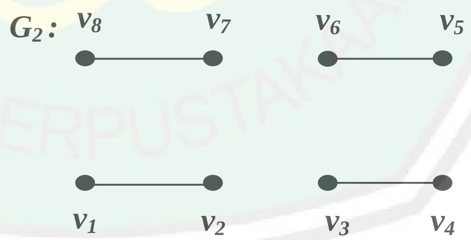
a. Faktor pertama




Gambar 3.22 Faktor pertama dari graf beraturan-3 berorder 8

Gambar 3.22 adalah faktor pertama dari graf beraturan-3 berorder 8 jika difaktorkan menggunakan faktor-1. Gambar di atas memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_8$, titik $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_3$, titik $v_4$ terhubung langsung dengan titik $v_5$ dan titik $v_6$ terhubung langsung dengan titik $v_7$.

b. Faktor kedua

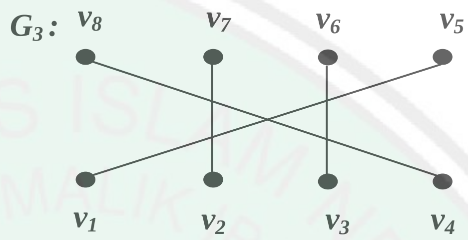



Gambar 3.23 Faktor kedua dari graf beraturan-3 berorder 8

Gambar 3.23 adalah faktor kedua dari graf beraturan-3 berorder 8 jika difaktorkan menggunakan faktor-1. Gambar di atas memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_2$, titik $v_3$ terhubung langsung dengan titik $v_4$, titik $v_5$ terhubung

langsung dengan titik $v_6$ dan titik $v_7$ terhubung langsung dengan titik $v_8$.

c. Faktor ketiga



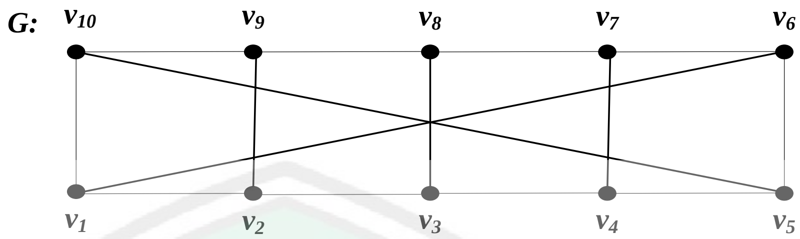

Gambar 3.24 Faktor ketiga dari graf beraturan-3 berorder 8

Gambar 3.24 adalah faktor pertama dari graf beraturan-3 berorder 8 jika difaktorkan menggunakan faktor-1. Gambar di atas memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_5$, titik $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_7$, titik $v_3$ terhubung langsung dengan titik $v_6$ dan titik $v_4$ terhubung langsung dengan titik $v_8$.

Gambar 3.22, 3.23 dan 3.24 adalah faktor-faktor graf beraturan-3 berorder 8, sehingga graf beraturan-3 berorder 8 mempunyai faktor-1 sebanyak 3, yaitu $G_1$, $G_2$ dan $G_3$. Sedemikian hingga $G_1 \oplus G_2 \oplus G_3 = G$ merupakan faktorisasi dari graf beraturan-3 berorder 8, yakni penjumlahan sisi dari faktor-faktornya.

4. Graf beraturan-3 dengan order 10

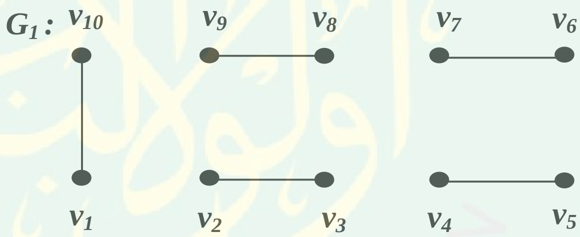
Gambar graf beraturan-3 dengan order 10 sebagai berikut:




Gambar 3.25 Graf beraturan-3 berorder 10

Gambar 3.25 memperlihatkan bahwa graf beraturan-3 berorder 10 memiliki 10 titik, yaitu $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9$ dan $v_{10}$, dan memiliki 15 sisi. Graf beraturan-3 berorder 10 jika difaktorkan menggunakan faktor-1 akan diperoleh:

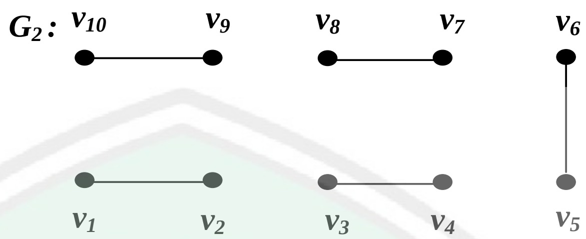
a. Faktor pertama




Gambar 3.26 Faktor pertama dari graf beraturan-3 berorder 10

Gambar 3.26 adalah faktor pertama dari graf beraturan-3 berorder 10 jika difaktorkan menggunakan faktor-1. Gambar di atas memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_{10}$, $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_3$, titik $v_4$ terhubung langsung dengan titik $v_5$, titik $v_6$ terhubung langsung dengan titik $v_7$ dan titik $v_8$ terhubung langsung dengan titik $v_9$.

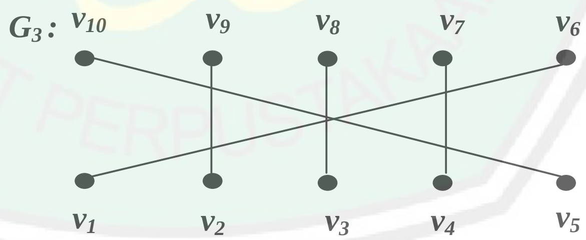
b. Faktor kedua




Gambar 3.27 Faktor kedua dari graf beraturan-3 berorder 10

Gambar 3.27 adalah faktor kedua dari graf beraturan-3 berorder 10 jika difaktorkan menggunakan faktor-1. Gambar di atas memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_2$, titik $v_3$ terhubung langsung dengan titik $v_4$, titik $v_5$ terhubung langsung dengan titik $v_6$, titik $v_7$ terhubung langsung dengan titik $v_8$ dan titik $v_9$ terhubung langsung dengan titik $v_{10}$.

c. Faktor ketiga




Gambar 3.28 Faktor ketiga dari graf beraturan-3 berorder 10

Gambar 3.28 adalah faktor ketiga dari graf beraturan-3 berorder 10 jika difaktorkan menggunakan faktor-1. Gambar di atas memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_6$, titik $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_9$, titik $v_3$ terhubung

langsung dengan titik $v_8$, titik $v_4$ terhubung langsung dengan titik $v_7$ dan titik $v_5$ terhubung langsung dengan titik $v_{10}$.

Gambar 3.26, 3.27 dan 3.28 adalah faktor-faktor graf beraturan-3 berorder 10, sehingga graf beraturan-3 berorder 10 mempunyai faktor-1 sebanyak 3, yaitu $G_1$, $G_2$ dan $G_3$. Sedemikian hingga $G_1 \oplus G_2 \oplus G_3 = G$ merupakan faktorisasi dari graf beraturan-3 berorder 10, yakni penjumlahan sisi dari faktor-faktornya.

Tabel 3.2 Faktorisasi graf beraturan-3 menggunakan faktor-1

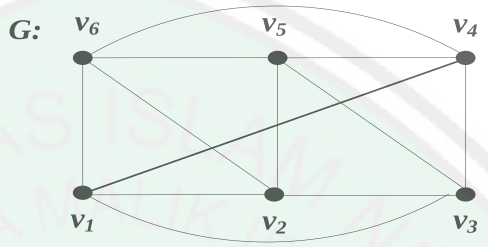
| $p(G)$ | $G$ beraturan-3 | $q(G)$ | Banyak komponen | Banyak faktor-1 |
|---|---|---|---|---|
| 4 | | $\frac{4\times3}{2}=6$ | $\frac{6}{3}=2$ | $\frac{6}{2}=3$ |
| 6 | | $\frac{6\times3}{2}=9$ | $\frac{9}{3}=3$ | $\frac{9}{3}=3$ |
| 8 | 3 | $\frac{8\times3}{2}=12$ | $\frac{12}{3}=4$ | $\frac{12}{4}=3$ |
| 10 | | $\frac{10\times3}{2}=15$ | $\frac{15}{3}=5$ | $\frac{15}{5}=3$ |
| $2n$ | | $3n$ | $n$ | 3 |

Dari tabel 3.2 dapat ditarik kesimpulan bahwa graf beraturan-3 dengan order genap $(2n)$ dimana $n \geq 2$ dan $n \in \mathbb{N}$ memiliki faktor-1 sebanyak 3.

### 3.1.3 Graf Beraturan-4 dengan Order Genap

1. Graf beraturan-4 dengan order 6

   Gambar graf beraturan-4 dengan order 6 sebagai berikut:




Gambar 3.29 Graf beraturan-4 berorder 6

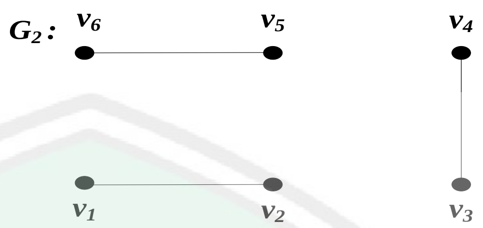
Gambar 3.29 memperlihatkan bahwa graf beraturan-4 berorder 6 memiliki 6 titik, yaitu $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$ dan $v_6$, dan memiliki 12 sisi. Graf beraturan-3 berorder 6 jika difaktorkan menggunakan faktor-1 akan diperoleh:

a. Faktor pertama


Gambar 3.30 Faktor pertama dari graf beraturan-4 berorder 6

Gambar 3.30 adalah faktor pertama dari graf beraturan-4 berorder 6 jika difaktorkan menggunakan faktor-1. Gambar di atas memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_6$, titik $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_3$ dan titik $v_4$ terhubung langsung dengan titik $v_5$.

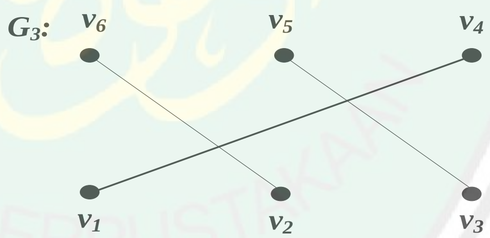
b. Faktor kedua




Gambar 3.31 Faktor kedua dari graf beraturan-4 berorder 6

Gambar 3.31 adalah faktor kedua dari graf beraturan-4 berorder 6 jika difaktorkan menggunakan faktor-1. Gambar di atas memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_2$, titik $v_3$ terhubung langsung dengan titik $v_4$ dan titik $v_5$ terhubung langsung dengan titik $v_6$.

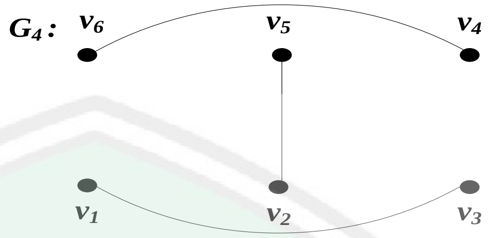
c. Faktor ketiga




Gambar 3.32 Faktor ketiga dari graf beraturan-4 berorder 6

Gambar 3.32 adalah faktor ketiga dari graf beraturan-4 berorder 6 jika difaktorkan menggunakan faktor-1. Gambar di atas memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_4$, titik $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_6$ dan titik $v_3$ terhubung langsung dengan titik $v_5$.

d. Faktor keempat



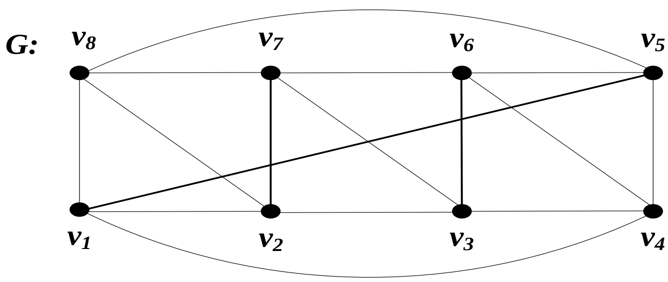

Gambar 3.33 Faktor keempat dari graf beraturan-4 berorder 6

Gambar 3.33 adalah faktor keempat dari graf beraturan-4 berorder 6 jika difaktorkan menggunakan faktor-1. Gambar di atas memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_3$, titik $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_5$ dan titik $v_4$ terhubung langsung dengan titik $v_6$.

Gambar 3.30 sampai 3.33 adalah faktor-faktor graf beraturan-4 berorder 6, sehingga graf beraturan-4 berorder 6 mempunyai faktor-1 sebanyak 4, yaitu $G_1$, $G_2$, $G_3$ dan $G_4$. Sedemikian hingga $G_1 \oplus G_2 \oplus G_3 \oplus G_4 = G$ merupakan faktorisasi dari graf beraturan-4 berorder 6, yakni penjumlahan sisi dari faktor-faktornya.

2. Graf beraturan-4 dengan order 8

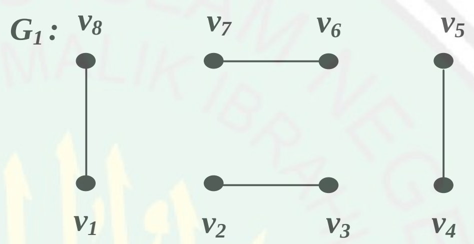
Gambar graf beraturan-4 dengan order 8 sebagai berikut:




Gambar 3.34 Graf beraturan-4 berorder 8

Gambar 3.34 memperlihatkan bahwa graf beraturan-4 berorder 8 memiliki 8 titik, yaitu $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7$ dan $v_8$, dan memiliki 16 sisi. Graf beraturan-4 berorder 8 jika difaktorkan menggunakan faktor-1 akan diperoleh:

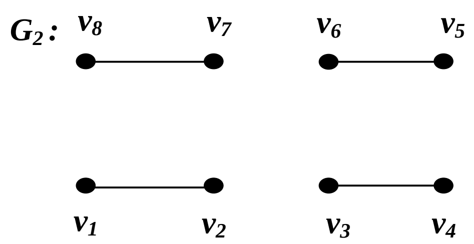
a. Faktor pertama




Gambar 3.35 Faktor pertama dari graf beraturan-4 berorder 8

Gambar 3.35 adalah faktor pertama dari graf beraturan-4 berorder 8 jika difaktorkan menggunakan faktor-1. Gambar di atas memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_8$, titik $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_3$, titik $v_4$ terhubung langsung dengan titik $v_5$ dan titik $v_6$ terhubung langsung dengan titik $v_7$.

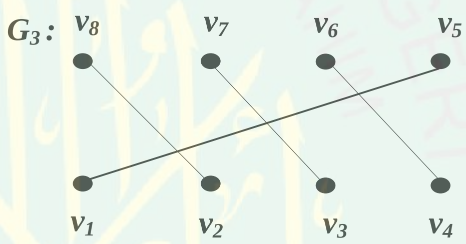
b. Faktor kedua




Gambar 3.36 Faktor kedua dari graf beraturan-4 berorder 8

Gambar 3.36 adalah faktor kedua dari graf beraturan-4 berorder 8 jika difaktorkan menggunakan faktor-1. Gambar di atas memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_2$, titik $v_3$ terhubung langsung dengan titik $v_4$, titik $v_5$ terhubung langsung dengan titik $v_6$ dan titik $v_7$ terhubung langsung dengan titik $v_8$.

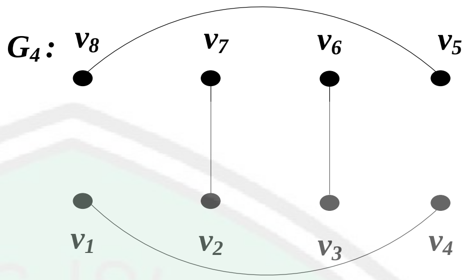
c. Faktor ketiga




Gambar 3.37 Faktor ketiga dari graf beraturan-4 berorder 8

Gambar 3.37 adalah faktor ketiga dari graf beraturan-4 berorder 8 jika difaktorkan menggunakan faktor-1. Gambar di atas memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_5$, titik $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_8$, titik $v_3$ terhubung langsung dengan titik $v_7$ dan titik $v_4$ terhubung langsung dengan titik $v_6$.

d. Faktor keempat



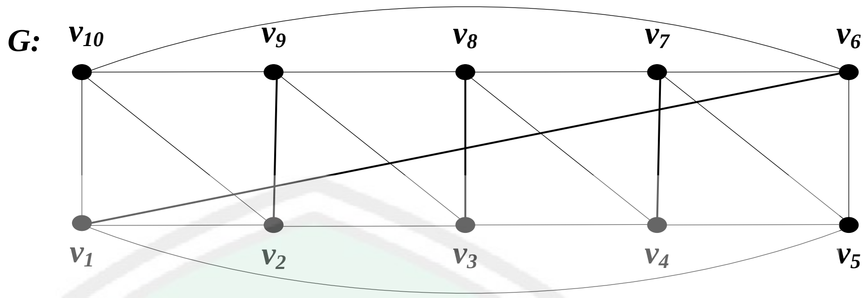

Gambar 3.38 Faktor keempat dari graf beraturan-4 berorder 8

Gambar 3.38 adalah faktor keempat dari graf beraturan-4 berorder 8 jika difaktorkan menggunakan faktor-1. Gambar di atas memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_4$, titik $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_7$, titik $v_3$ terhubung langsung dengan titik $v_6$ dan titik $v_5$ terhubung langsung dengan titik $v_8$.

Gambar 3.35 sampai 3.38 adalah faktor-faktor graf beraturan-4 berorder 8, sehingga graf beraturan-4 berorder 8 mempunyai faktor-1 sebanyak 4, yaitu $G_1$, $G_2$, $G_3$ dan $G_4$. Sedemikian hingga $G_1 \oplus G_2 \oplus G_3 \oplus G_4 = G$ merupakan faktorisasi dari graf beraturan-4 berorder 8, yakni penjumlahan sisi dari faktor-faktornya.

3. Graf beraturan-4 dengan order 10

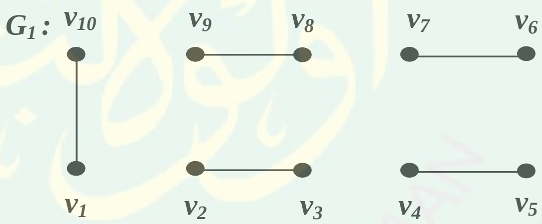
Gambar graf beraturan-4 dengan order 10 sebagai berikut:




Gambar 3.39 Graf beraturan-4 berorder 10

Gambar 3.39 memperlihatkan bahwa graf beraturan-4 berorder 10 memiliki 10 titik, yaitu $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9$ dan $v_{10}$, dan memiliki 20 sisi. Graf beraturan-4 berorder 10 jika difaktorkan menggunakan faktor-1 akan diperoleh:

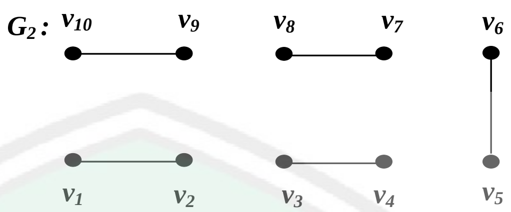
a. Faktor pertama




Gambar 3.40 Faktor pertama dari graf beraturan-4 berorder 10

Gambar 3.40 adalah faktor pertama dari graf beraturan-4 berorder 10 jika difaktorkan menggunakan faktor-1. Gambar di atas memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_{10}$, $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_3$, titik $v_4$ terhubung langsung dengan titik $v_5$, titik $v_6$ terhubung langsung dengan titik $v_7$ dan titik $v_8$ terhubung langsung dengan titik $v_9$.

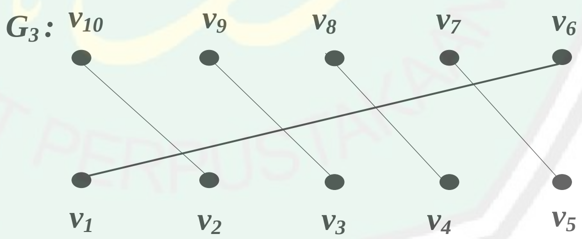
b. Faktor kedua




Gambar 3.41 Faktor kedua dari graf beraturan-4 berorder 10

Gambar 3.41 adalah faktor kedua dari graf beraturan-4 berorder 10 jika difaktorkan menggunakan faktor-1. Gambar di atas memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_2$, titik $v_3$ terhubung langsung dengan titik $v_4$, titik $v_5$ terhubung langsung dengan titik $v_6$, titik $v_7$ terhubung langsung dengan titik $v_8$ dan titik $v_9$ terhubung langsung dengan titik $v_{10}$.

c. Faktor ketiga

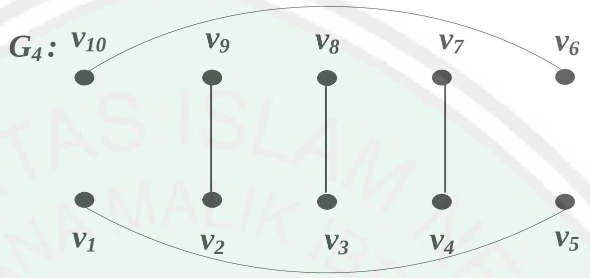



Gambar 3.42 Faktor ketiga dari graf beraturan-4 berorder 10

Gambar 3.42 adalah faktor ketiga dari graf beraturan-4 berorder 10 jika difaktorkan menggunakan faktor-1. Gambar di atas memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_6$, titik $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_{10}$, titik $v_3$ terhubung

langsung dengan titik $v_9$, titik $v_4$ terhubung langsung dengan titik $v_8$ dan titik $v_5$ terhubung langsung dengan titik $v_7$.

d. Faktor keempat




Gambar 3.43 Faktor keempat dari graf beraturan-4 berorder 10

Gambar 3.43 adalah faktor keempat dari graf beraturan-4 berorder 10 jika difaktorkan menggunakan faktor-1. Gambar di atas memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_5$, titik $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_9$, titik $v_3$ terhubung langsung dengan titik $v_8$, titik $v_4$ terhubung langsung dengan titik $v_7$ dan titik $v_6$ terhubung langsung dengan titik $v_{10}$.

Gambar 3.40 sampai 3.43 adalah faktor-faktor graf beraturan-4 berorder 10, sehingga graf beraturan-4 berorder 10 mempunyai faktor-1 sebanyak 4, yaitu $G_1$, $G_2$, $G_3$ dan $G_4$. Sedemikian hingga $G_1 \oplus G_2 \oplus G_3 \oplus G_4 = G$ merupakan fakorisasi dari graf beraturan-4 berorder 10, yakni penjumlahan sisi dari faktor-faktornya.

Tabel 3.3 Faktorisasi graf beraturan-4 menggunakan faktor-1

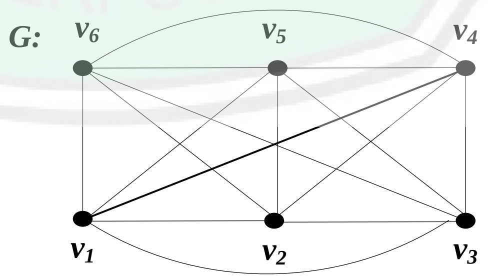
| $p(G)$ | $G$ beraturan-4 | $q(G)$ | Banyak komponen | Banyak faktor-1 |
|---|---|---|---|---|
| 6 | 4 | $\frac{6\times 4}{2}=12$ | $\frac{12}{4}=3$ | $\frac{12}{3}=4$ |
| 8 | | $\frac{8\times 4}{2}=16$ | $\frac{16}{4}=4$ | $\frac{16}{4}=4$ |
| 10 | | $\frac{10\times 4}{2}=20$ | $\frac{20}{4}=5$ | $\frac{20}{5}=4$ |
| $2n$ | | $4n$ | $n$ | 4 |

Dari tabel 3.3 dapat ditarik kesimpulan bahwa graf beraturan-4 dengan order genap $(2n)$ dimana $n\geq 3$ dan $n\in \mathbb{N}$ memiliki faktor-1 sebanyak 4.

### 3.1.4 Graf Beraturan-5 dengan Order Genap

1. Graf beraturan-5 dengan order 6

Gambar graf beraturan-5 dengan order 6 sebagai berikut:

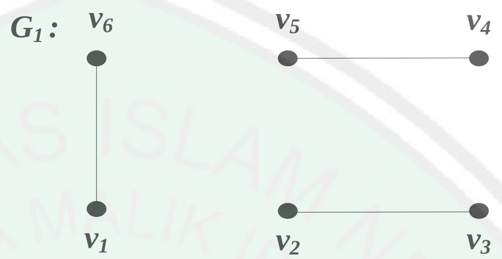



Gambar 3.44 Graf beraturan-5 berorder 6

Gambar 3.44 memperlihatkan bahwa graf beraturan-5 berorder 6 memiliki 6 titik, yaitu $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$ dan $v_6$, dan memiliki 15 sisi.

Graf beraturan-5 berorder 6 jika difaktorkan menggunakan faktor-1 akan diperoleh:

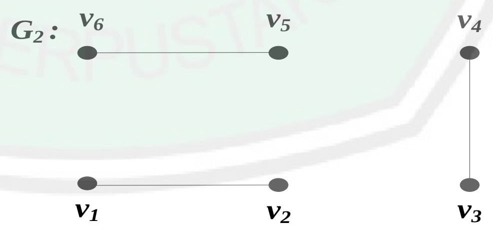
a. Faktor pertama




Gambar 3.45 Faktor pertama dari graf beraturan-5 berorder 6

Gambar 3.45 adalah faktor pertama dari graf beraturan-5 berorder 6 jika difaktorkan menggunakan faktor-1. Gambar di atas memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_6$, titik $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_3$ dan titik $v_4$ terhubung langsung dengan titik $v_5$.

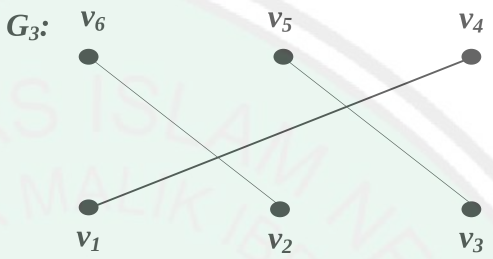
b. Faktor kedua




Gambar 3.46 Faktor kedua dari graf beraturan-5 berorder 6

Gambar 3.46 adalah faktor kedua dari graf beraturan-5 berorder 6 jika difaktorkan menggunakan faktor-1. Gambar di atas memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_2$, titik $v_3$ terhubung langsung dengan titik $v_4$ dan titik $v_5$ terhubung langsung dengan titik $v_6$.

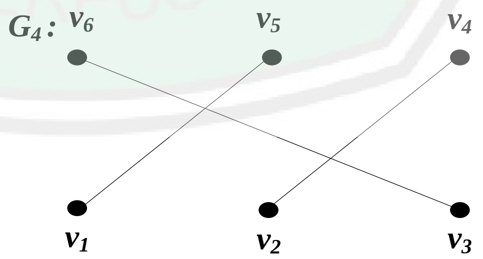
c. Faktor ketiga




Gambar 3.47 Faktor ketiga dari graf beraturan-5 berorder 6

Gambar 3.47 adalah faktor ketiga dari graf beraturan-5 berorder 6 jika difaktorkan menggunakan faktor-1. Gambar di atas memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_4$, titik $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_6$ dan titik $v_3$ terhubung langsung dengan titik $v_5$.

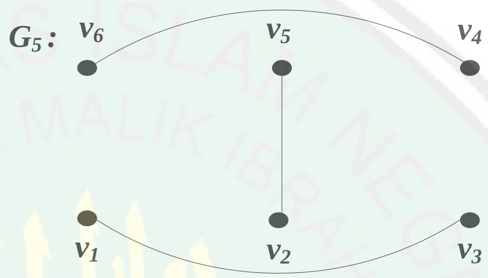
d. Faktor keempat




Gambar 3.48 Faktor keempat dari graf beraturan-5 berorder 6

Gambar 3.48 adalah faktor keempat dari graf beraturan-5 berorder 6 jika difaktorkan menggunakan faktor-1. Gambar di atas memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_5$, titik $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_4$ dan titik $v_3$ terhubung langsung dengan titik $v_6$.

e. Faktor kelima



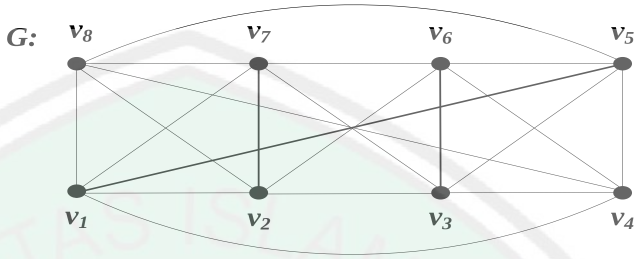

Gambar 3.49 Faktor kelima dari graf beraturan-5 berorder 6

Gambar 3.49 adalah faktor kelima dari graf beraturan-5 berorder 6 jika difaktorkan menggunakan faktor-1. Gambar di atas memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_3$, titik $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_5$ dan titik $v_4$ terhubung langsung dengan titik $v_6$.

Gambar 3.45 sampai 3.49 adalah faktor-faktor graf beraturan-5 berorder 6, sehingga graf beraturan-5 berorder 6 mempunyai faktor-1 sebanyak 5, yaitu $G_1$, $G_2$, $G_3$, $G_4$ dan $G_5$. Sedemikian hingga $G_1 \oplus G_2 \oplus G_3 \oplus G_4 \oplus G_5 = G$ merupakan faktorisasi dari graf beraturan-5 berorder 6, yakni penjumlahan sisi dari faktor-faktornya.

2. Graf beraturan-5 dengan order 8

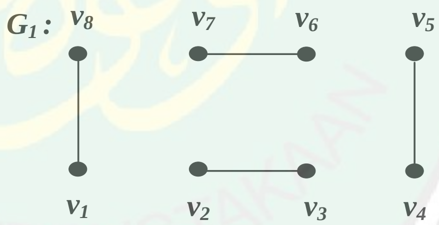
Gambar graf beraturan-5 dengan order 8 sebagai berikut:




Gambar 3.50 Graf beraturan-5 berorder 8

Gambar 3.50 memperlihatkan bahwa graf beraturan-5 berorder 8 memiliki 8 titik, yaitu $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7$ dan $v_9$, dan memiliki 20 sisi. Graf beraturan-5 berorder 8 jika difaktorkan menggunakan faktor-1 akan diperoleh:

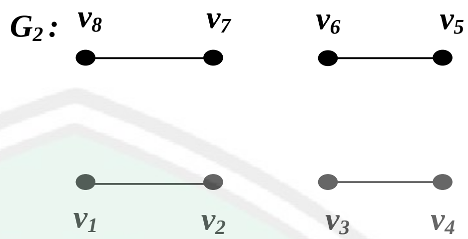
a. Faktor pertama




Gambar 3.51 Faktor pertama dari graf beraturan-5 berorder 8

Gambar 3.51 adalah faktor pertama dari graf beraturan-5 berorder 8 jika difaktorkan menggunakan faktor-1. Gambar di atas memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_8$, titik $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_3$, titik $v_4$ terhubung langsung dengan titik $v_5$ dan titik $v_6$ terhubung langsung dengan titik $v_7$.

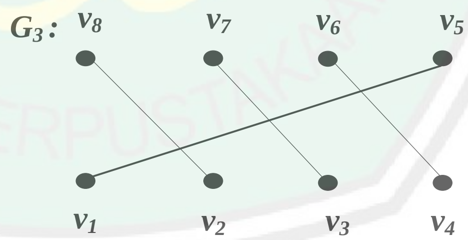
b. Faktor kedua




Gambar 3.52 Faktor kedua dari graf beraturan-5 berorder 8

Gambar 3.52 adalah faktor kedua dari graf beraturan-5 berorder 8 jika difaktorkan menggunakan faktor-1. Gambar di atas memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_2$, titik $v_3$ terhubung langsung dengan titik $v_4$, titik $v_5$ terhubung langsung dengan titik $v_6$ dan titik $v_7$ terhubung langsung dengan titik $v_8$.

c. Faktor ketiga

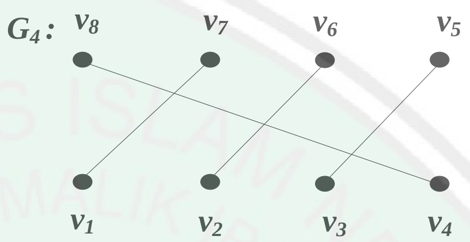



Gambar 3.53 Faktor ketiga dari graf beraturan-5 berorder 8

Gambar 3.53 adalah faktor ketiga dari graf beraturan-5 berorder 8 jika difaktorkan menggunakan faktor-1. Gambar di atas memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_5$, titik $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_8$, titik $v_3$ terhubung

langsung dengan titik $v_7$ dan titik $v_4$ terhubung langsung dengan titik $v_6$.

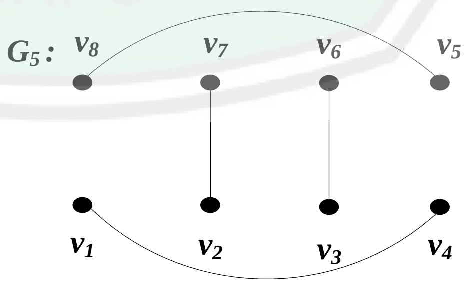
d. Faktor keempat




Gambar 3.54 Faktor keempat dari graf beraturan-5 berorder 8

Gambar 3.54 adalah faktor keempat dari graf beraturan-5 berorder 8 jika difaktorkan menggunakan faktor-1. Gambar di atas memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_7$, titik $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_6$, titik $v_3$ terhubung langsung dengan titik $v_5$ dan titik $v_4$ terhubung langsung dengan titik $v_8$.

e. Faktor kelima




Gambar 3.55 Faktor kelima dari graf beraturan-5 berorder 8

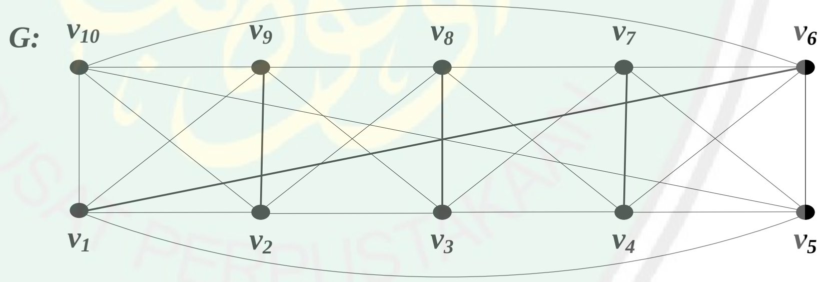
Gambar 3.55 adalah faktor kelima dari graf beraturan-5 berorder 8 jika difaktorkan menggunakan faktor-1. Gambar di atas

memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_4$, titik $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_7$, titik $v_3$ terhubung langsung dengan titik $v_6$ dan titik $v_5$ terhubung langsung dengan titik $v_8$.

Gambar 3.51 sampai 3.55 adalah faktor-faktor graf beraturan-5 berorder 8, sehingga graf beraturan-5 berorder 8 mempunyai faktor-1 sebanyak 5, yaitu $G_1$, $G_2$, $G_3$, $G_4$ dan $G_5$. Sedemikian hingga $G_1 \oplus G_2 \oplus G_3 \oplus G_4 \oplus G_5 = G$ merupakan faktorisasi dari graf beraturan-5 berorder 8, yakni penjumlahan sisi dari faktor-faktornya.

3. Graf beraturan-5 dengan order 10

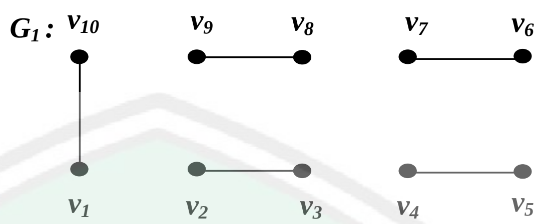
Gambar graf beraturan-5 dengan order 10 sebagai berikut:




Gambar 3.56 Graf beraturan-5 berorder 10

Gambar 3.56 memperlihatkan bahwa graf beraturan-5 berorder 10 memiliki 10 titik, yaitu $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9$ dan $v_{10}$, dan memiliki 25 sisi. Graf beraturan-5 berorder 10 jika difaktorkan menggunakan faktor-1 akan diperoleh:

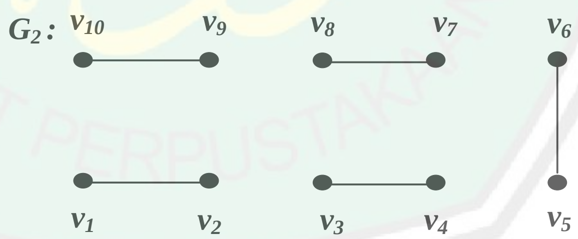
a. Faktor pertama




Gambar 3.57 Faktor pertama dari graf beraturan-5 berorder 10

Gambar 3.57 adalah faktor pertama dari graf beraturan-5 berorder 10 jika difaktorkan menggunakan faktor-1. Gambar di atas memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_{10}$, $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_3$, titik $v_4$ terhubung langsung dengan titik $v_5$, titik $v_6$ terhubung langsung dengan titik $v_7$ dan titik $v_8$ terhubung langsung dengan titik $v_9$.

b. Faktor kedua

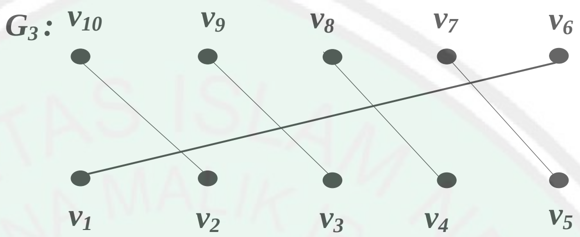



Gambar 3.58 Faktor kedua dari graf beraturan-5 berorder 10

Gambar 3.58 adalah faktor kedua dari graf beraturan-5 berorder 10 jika difaktorkan menggunakan faktor-1. Gambar di atas memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_2$, titik $v_3$ terhubung langsung dengan titik $v_4$, titik $v_5$ terhubung

langsung dengan titik $v_6$, titik $v_7$ terhubung langsung dengan titik $v_8$ dan titik $v_9$ terhubung langsung dengan titik $v_{10}$.

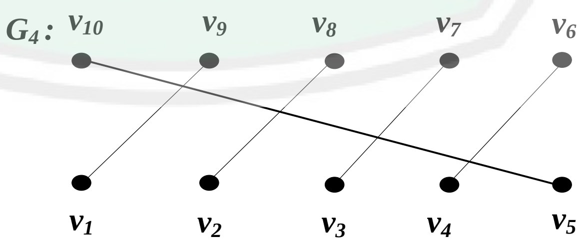
c. Faktor ketiga




Gambar 3.59 Faktor ketiga dari graf beraturan-5 berorder 10

Gambar 3.59 adalah faktor ketiga dari graf beraturan-5 berorder 10 jika difaktorkan menggunakan faktor-1. Gambar di atas memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_6$, titik $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_{10}$, titik $v_3$ terhubung langsung dengan titik $v_9$, titik $v_4$ terhubung langsung dengan titik $v_8$ dan titik $v_5$ terhubung langsung dengan titik $v_7$.

d. Faktor keempat

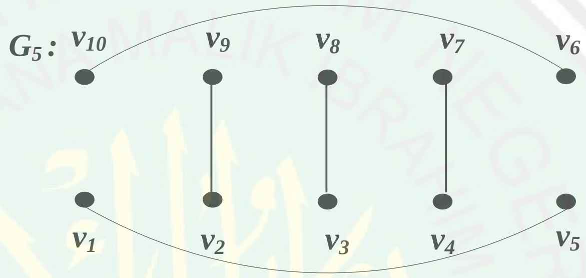



Gambar 3.60 Faktor keempat dari graf beraturan-5 berorder 10

Gambar 3.57 adalah faktor kelima dari graf beraturan-5 berorder 10 jika difaktorkan menggunakan faktor-1. Gambar di atas

memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_9$, titik $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_8$, titik $v_3$ terhubung langsung dengan titik $v_7$, titik $v_4$ terhubung langsung dengan titik $v_6$ dan titik $v_5$ terhubung langsung dengan titik $v_{10}$.

e. Faktor kelima




Gambar 3.61 Faktor kelima dari graf beraturan-5 berorder 10

Gambar 3.57 adalah faktor kelima dari graf beraturan-5 berorder 10 jika difaktorkan menggunakan faktor-1. Gambar di atas memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_5$, titik $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_9$, titik $v_3$ terhubung langsung dengan titik $v_8$, titik $v_4$ terhubung langsung dengan titik $v_7$ dan titik $v_6$ terhubung langsung dengan titik $v_{10}$.

Gambar 3.57 sampai 3.61 adalah faktor-faktor graf beraturan-5 berorder 10, sehingga graf beraturan-5 berorder 10 mempunyai faktor-1 sebanyak 5, yaitu $G_1$, $G_2$, $G_3$, $G_4$ dan $G_5$. Sedemikian hingga $G_1 \oplus G_2 \oplus G_3 \oplus G_4 \oplus G_5 = G$ merupakan faktorisasi dari graf beraturan-5 berorder 10, yakni penjumlahan sisi dari faktor-faktornya.

Tabel 3.4 Faktorisasi graf beraturan-5 menggunakan faktor-1

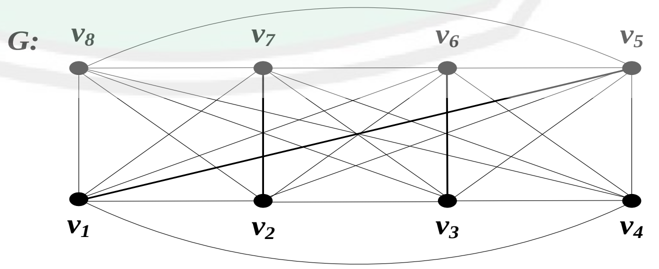
| $p(G)$ | $G$ beraturan-5 | $q(G)$ | Banyak komponen | Banyak faktor-1 |
|---|---|---|---|---|
| 6 | 5 | $\frac{6\times5}{2}=15$ | $\frac{15}{5}=3$ | $\frac{15}{3}=5$ |
| 8 | | $\frac{8\times5}{2}=20$ | $\frac{20}{5}=4$ | $\frac{20}{4}=5$ |
| 10 | | $\frac{10\times5}{2}=25$ | $\frac{25}{5}=5$ | $\frac{25}{5}=5$ |
| $2n$ | | $5n$ | $n$ | 5 |

Dari tabel 3.4 dapat ditarik kesimpulan bahwa graf beraturan-5 dengan order genap $(2n)$ dimana $n\geq3$ dan $n\in\mathbb{N}$ memiliki faktor-1 sebanyak 5.

### 3.1.5 Graf Beraturan-6 dengan Order Genap

1. Graf beraturan-6 dengan order 8

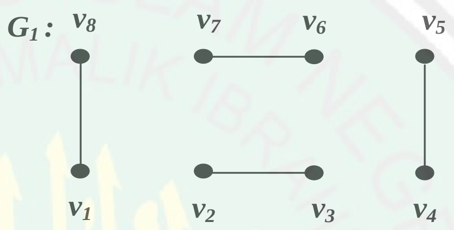
   Gambar graf beraturan-6 dengan order 8 sebagai berikut:




Gambar 3.62 Graf beraturan-6 berorder 8

Gambar 3.10 memperlihatkan bahwa graf beraturan-6 berorder 8 memiliki 8 titik, yaitu $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7$ dan $v_8$, dan memiliki 24 sisi. Graf beraturan-6 berorder 8 jika difaktorkan menggunakan faktor-1 akan diperoleh:

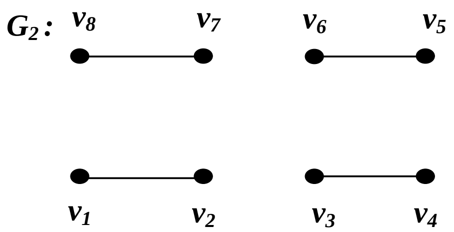
a. Faktor pertama




Gambar 3.63 Faktor pertama dari graf beraturan-6 berorder 8

Gambar 3.63 adalah faktor pertama dari graf beraturan-6 berorder 8 jika difaktorkan menggunakan faktor-1. Gambar di atas memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_8$, titik $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_3$, titik $v_4$ terhubung langsung dengan titik $v_5$ dan titik $v_6$ terhubung langsung dengan titik $v_7$.

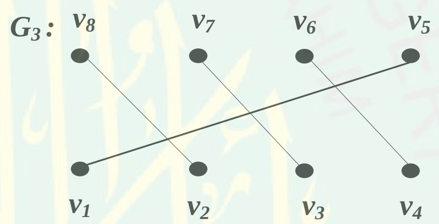
b. Faktor kedua




Gambar 3.64 Faktor kedua dari graf beraturan-6 berorder 8

Gambar 3.64 adalah faktor kedua dari graf beraturan-6 berorder 8 jika difaktorkan menggunakan faktor-1. Gambar di atas memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_2$, titik $v_3$ terhubung langsung dengan titik $v_4$, titik $v_5$ terhubung langsung dengan titik $v_6$ dan titik $v_7$ terhubung langsung dengan titik $v_8$.

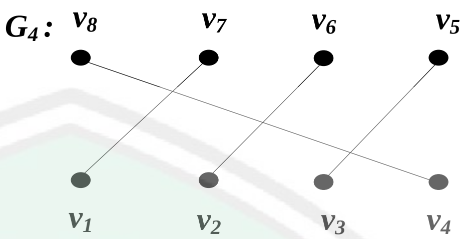
c. Faktor ketiga




Gambar 3.65 Faktor ketiga dari graf beraturan-6 berorder 8

Gambar 3.65 adalah faktor ketiga dari graf beraturan-6 berorder 8 jika difaktorkan menggunakan faktor-1. Gambar di atas memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_5$, titik $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_8$, titik $v_3$ terhubung langsung dengan titik $v_7$ dan titik $v_4$ terhubung langsung dengan titik $v_6$.

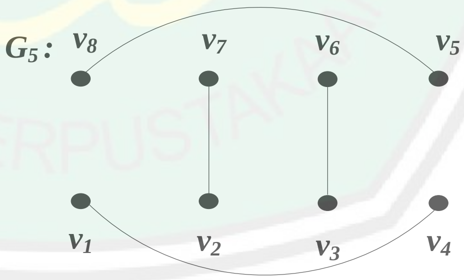
d. Faktor keempat




Gambar 3.66 Faktor keempat dari graf beraturan-6 berorder 8

Gambar 3.66 adalah faktor keempat dari graf beraturan-6 berorder 8 jika difaktorkan menggunakan faktor-1. Gambar di atas memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_7$, titik $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_6$, titik $v_3$ terhubung langsung dengan titik $v_5$ dan titik $v_4$ terhubung langsung dengan titik $v_8$.

e. Faktor kelima

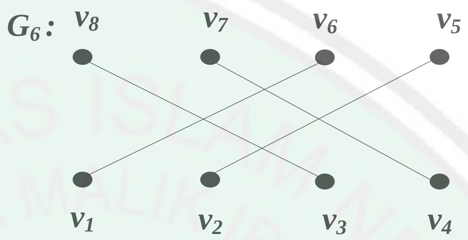



Gambar 3.67 Faktor kelima dari graf beraturan-6 berorder 8

Gambar 3.67 adalah faktor kelima dari graf beraturan-6 berorder 8 jika difaktorkan menggunakan faktor-1. Gambar di atas memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_4$, titik $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_7$, titik $v_3$ terhubung

langsung dengan titik $v_6$ dan titik $v_5$ terhubung langsung dengan titik $v_8$.

f. Faktor keenam



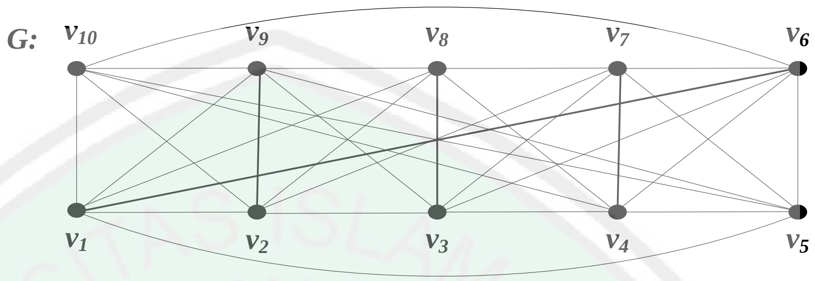

Gambar 3.68 Faktor keenam dari graf beraturan-6 berorder 8

Gambar 3.68 adalah faktor keenam dari graf beraturan-6 berorder 8 jika difaktorkan menggunakan faktor-1. Gambar di atas memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_6$, titik $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_5$, titik $v_3$ terhubung langsung dengan titik $v_8$ dan titik $v_4$ terhubung langsung dengan titik $v_7$.

Gambar 3.63 sampai 3.68 adalah faktor-faktor graf beraturan-6 berorder 8, sehingga graf beraturan-6 berorder 8 mempunyai faktor-1 sebanyak 6, yaitu $G_1$, $G_2$, $G_3$, $G_4$, $G_5$ dan $G_6$. Sedemikian hingga $G_1 \oplus G_2 \oplus G_3 \oplus G_4 \oplus G_5 \oplus G_6 = G$ merupakan faktorisasi dari graf beraturan-6 berorder 8, yakni penjumlahan sisi dari faktor-faktornya.

2. Graf beraturan-6 dengan order 10

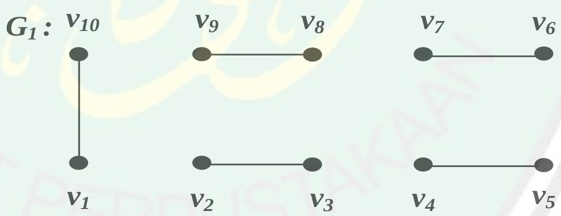
Gambar graf beraturan-6 dengan order 10 sebagai berikut:




Gambar 3.69 Graf beraturan-6 berorder 10

Gambar 3.69 memperlihatkan bahwa graf beraturan-6 berorder 10 memiliki 10 titik, yaitu $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9$ dan $v_{10}$, dan memiliki 30 sisi. Graf beraturan-6 berorder 10 jika difaktorkan menggunakan faktor-1 akan diperoleh:

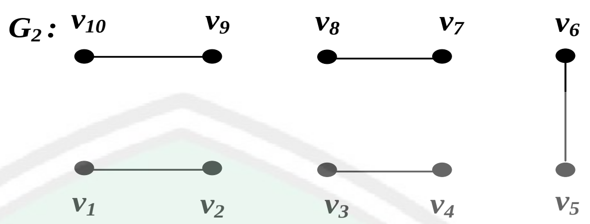
a. Faktor pertama




Gambar 3.70 Faktor pertama dari graf beraturan-6 berorder 10

Gambar 3.70 adalah faktor pertama dari graf beraturan-6 berorder 10 jika difaktorkan menggunakan faktor-1. Gambar di atas memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_{10}$, $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_3$, titik $v_4$ terhubung langsung dengan titik $v_5$, titik $v_6$ terhubung langsung dengan titik $v_7$ dan titik $v_8$ terhubung langsung dengan titik $v_9$.

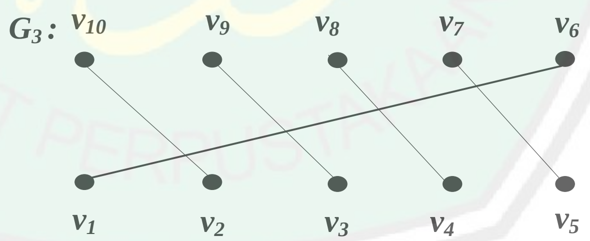
b. Faktor kedua




Gambar 3.71 Faktor kedua dari graf beraturan-6 berorder 10

Gambar 3.71 adalah faktor kedua dari graf beraturan-6 berorder 10 jika difaktorkan menggunakan faktor-1. Gambar di atas memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_2$, titik $v_3$ terhubung langsung dengan titik $v_4$, titik $v_5$ terhubung langsung dengan titik $v_6$, titik $v_7$ terhubung langsung dengan titik $v_8$ dan titik $v_9$ terhubung langsung dengan titik $v_{10}$.

c. Faktor ketiga

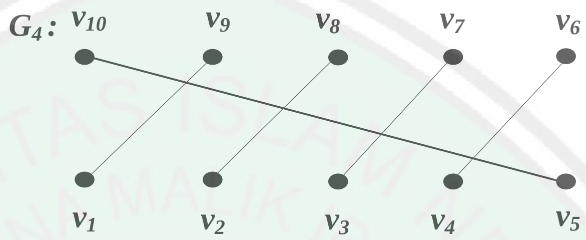



Gambar 3.72 Faktor ketiga dari graf beraturan-6 berorder 10

Gambar 3.72 adalah faktor ketiga dari graf beraturan-6 berorder 10 jika difaktorkan menggunakan faktor-1. Gambar di atas memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_6$, titik $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_{10}$, titik $v_3$ terhubung

langsung dengan titik $v_9$, titik $v_4$ terhubung langsung dengan titik $v_8$ dan titik $v_5$ terhubung langsung dengan titik $v_7$.

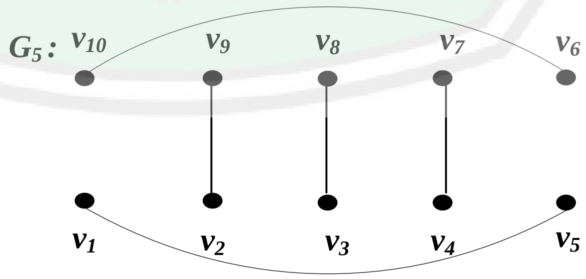
d. Faktor keempat




Gambar 3.73 Faktor keempat dari graf beraturan-6 berorder 10

Gambar 3.73 adalah faktor keempat dari graf beraturan-6 berorder 10 jika difaktorkan menggunakan faktor-1. Gambar di atas memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_9$, titik $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_8$, titik $v_3$ terhubung langsung dengan titik $v_7$, titik $v_4$ terhubung langsung dengan titik $v_6$ dan titik $v_5$ terhubung langsung dengan titik $v_{10}$.

e. Faktor kelima

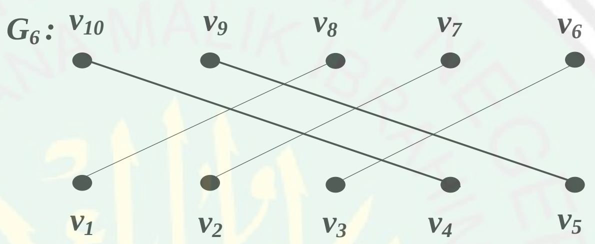



Gambar 3.74 Faktor kelima dari graf beraturan-6 berorder 10

Gambar 3.74 adalah faktor kelima dari graf beraturan-6 berorder 10 jika difaktorkan menggunakan faktor-1. Gambar di atas

memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_5$, titik $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_9$, titik $v_3$ terhubung langsung dengan titik $v_8$, titik $v_4$ terhubung langsung dengan titik $v_7$ dan titik $v_6$ terhubung langsung dengan titik $v_{10}$.

f. Faktor keenam




Gambar 3.75 Faktor keenam dari graf beraturan-6 berorder 10

Gambar 3.75 adalah faktor keenam dari graf beraturan-6 berorder 10 jika difaktorkan menggunakan faktor-1. Gambar di atas memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_8$, titik $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_7$, titik $v_3$ terhubung langsung dengan titik $v_6$, titik $v_4$ terhubung langsung dengan titik $v_{10}$ dan titik $v_5$ terhubung langsung dengan titik $v_9$.

Gambar 3.70 sampai 3.75 adalah faktor-faktor graf beraturan-6 berorder 10, sehingga graf beraturan-6 berorder 10 mempunyai faktor-1 sebanyak 6, yaitu $G_1$, $G_2$, $G_3$, $G_4$, $G_5$ dan $G_6$. Sedemikian hingga $G_1 \oplus G_2 \oplus G_3 \oplus G_4 \oplus G_5 \oplus G_6 = G$ merupakan faktorisasi dari graf beraturan-6 berorder 10, yakni penjumlahan sisi dari faktor-faktornya.

Tabel 3.5 Faktorisasi graf beraturan-6 menggunakan faktor-1

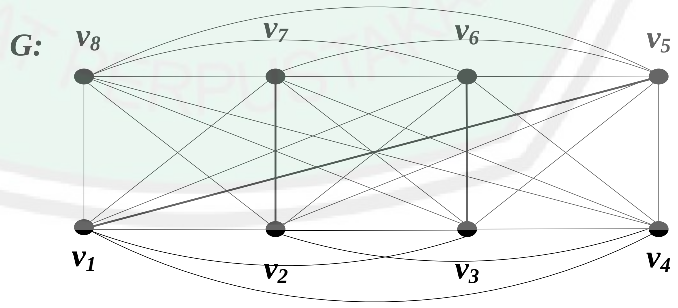
| $p(G)$ | $G$ beraturan-6 | $q(G)$ | Banyak komponen | Banyak faktor-1 |
|---|---|---|---|---|
| 8 | 6 | $\frac{8\times 6}{2}=24$ | $\frac{24}{6}=4$ | $\frac{24}{4}=6$ |
| 10 | | $\frac{10\times 6}{2}=30$ | $\frac{30}{6}=5$ | $\frac{30}{5}=6$ |
| $2n$ | | $6n$ | $n$ | 6 |

Dari tabel 3.4 dapat ditarik kesimpulan bahwa graf beraturan-6 dengan order genap $(2n)$ dimana $n \geq 4$ dan $n \in \mathbb{N}$ memiliki faktor-1 sebanyak 6.

### 3.1.6 Graf Beraturan-7 dengan Order Genap

1. Graf beraturan-7 dengan order 8

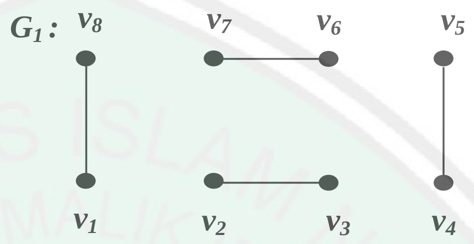
   Gambar graf beraturan-7 dengan order 8 sebagai berikut:




Gambar 3.76 Graf beraturan-7 berorder 8

Gambar 3.76 memperlihatkan bahwa graf beraturan-7 berorder 8 memiliki 8 titik, yaitu $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7$ dan $v_8$, dan memiliki 28 sisi. Graf beraturan-7 berorder 8 jika difaktorkan menggunakan faktor-1 akan diperoleh:

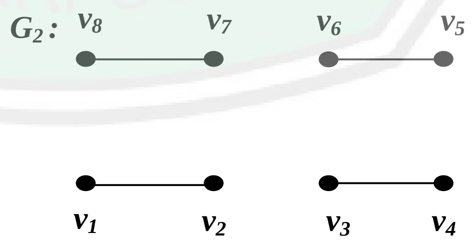
a. Faktor pertama




Gambar 3.77 Faktor pertama dari graf beraturan-7 berorder 8

Gambar 3.77 adalah faktor pertama dari graf beraturan-7 berorder 8 jika difaktorkan menggunakan faktor-1. Gambar di atas memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_8$, titik $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_3$, titik $v_4$ terhubung langsung dengan titik $v_5$ dan titik $v_6$ terhubung langsung dengan titik $v_7$.

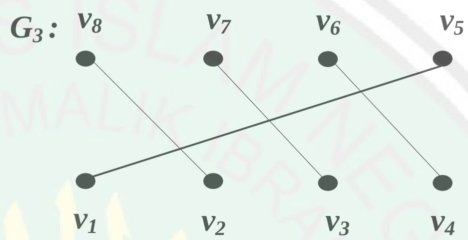
b. Faktor kedua




Gambar 3.78 Faktor kedua dari graf beraturan-7 berorder 8

Gambar 3.78 adalah faktor kedua dari graf beraturan-7 berorder 8 jika difaktorkan menggunakan faktor-1. Gambar di atas memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_2$, titik $v_3$ terhubung langsung dengan titik $v_4$, titik $v_5$ terhubung langsung dengan titik $v_6$ dan titik $v_7$ terhubung langsung dengan titik $v_8$.

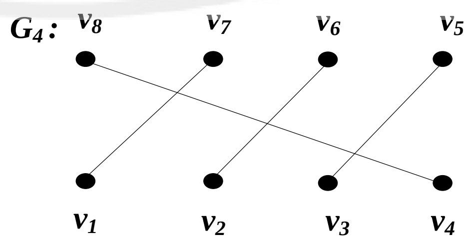
c. Faktor ketiga




Gambar 3.79 Faktor ketiga dari graf beraturan-7 berorder 8

Gambar 3.79 adalah faktor ketiga dari graf beraturan-7 berorder 8 jika difaktorkan menggunakan faktor-1. Gambar di atas memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_5$, titik $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_8$, titik $v_3$ terhubung langsung dengan titik $v_7$ dan titik $v_4$ terhubung langsung dengan titik $v_6$.

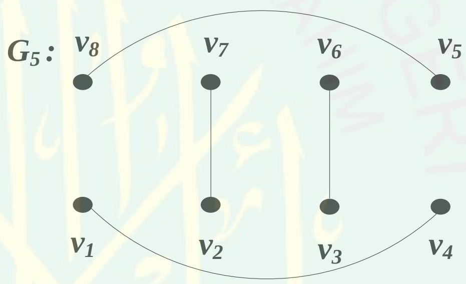
d. Faktor keempat




Gambar 3.80 Faktor keempat dari graf beraturan-7 berorder 8

Gambar 3.80 adalah faktor keempat dari graf beraturan-7 berorder 8 jika difaktorkan menggunakan faktor-1. Gambar di atas memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_7$, titik $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_6$, titik $v_3$ terhubung langsung dengan titik $v_5$ dan titik $v_4$ terhubung langsung dengan titik $v_8$.

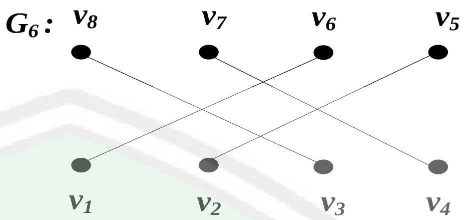
e. Faktor kelima




Gambar 3.81 Faktor kelima dari graf beraturan-7 berorder 8

Gambar 3.81 adalah faktor kelima dari graf beraturan-7 berorder 8 jika difaktorkan menggunakan faktor-1. Gambar di atas memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_4$, titik $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_7$, titik $v_3$ terhubung langsung dengan titik $v_6$ dan titik $v_5$ terhubung langsung dengan titik $v_8$.

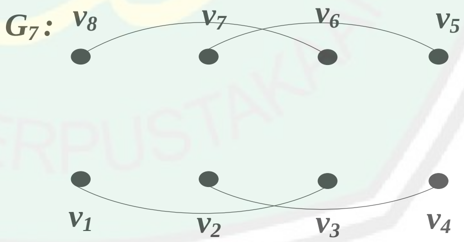
f. Faktor keenam




Gambar 3.82 Faktor keenam dari graf beraturan-7 berorder 8

Gambar 3.82 adalah faktor keenam dari graf beraturan-7 berorder 8 jika difaktorkan menggunakan faktor-1. Gambar di atas memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_6$, titik $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_5$, titik $v_3$ terhubung langsung dengan titik $v_8$ dan titik $v_4$ terhubung langsung dengan titik $v_7$.

g. Faktor ketujuh




Gambar 3.83 Faktor ketujuh dari graf beraturan-7 berorder 8

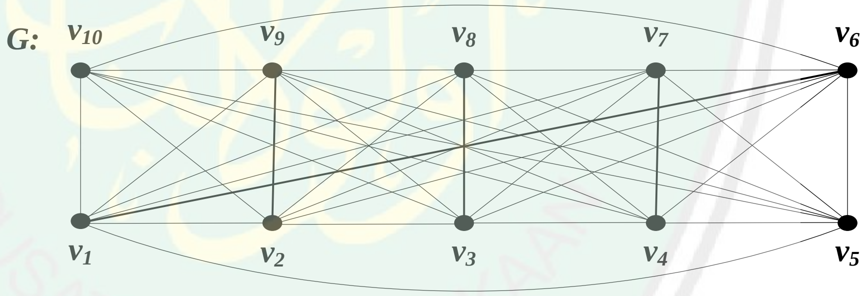
Gambar 3.83 adalah faktor ketujuh dari graf beraturan-7 berorder 8 jika difaktorkan menggunakan faktor-1. Gambar di atas memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_3$, titik $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_4$, titik $v_5$ terhubung

langsung dengan titik $v_7$ dan titik $v_6$ terhubung langsung dengan titik $v_8$.

Gambar 3.77 sampai 3.83 adalah faktor-faktor graf beraturan-7 berorder 8, sehingga graf beraturan-7 berorder 8 mempunyai faktor-1 sebanyak 7, yaitu $G_1$, $G_2$, $G_3$, $G_4$, $G_5$, $G_6$ dan $G_7$. Sedemikian hingga $G_1 \oplus G_2 \oplus G_3 \oplus G_4 \oplus G_5 \oplus G_6 \oplus G_7 = G$ merupakan faktorisasi dari graf beraturan-7 berorder 8, yakni penjumlahan sisi dari faktor-faktornya.

2. Graf beraturan-7 dengan order 10

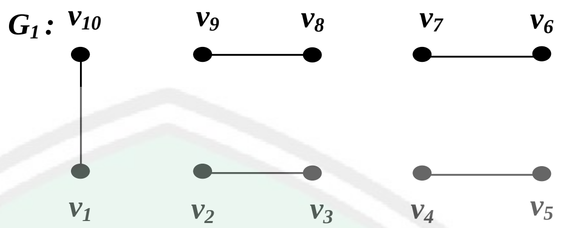
Gambar graf beraturan-7 dengan order 10 sebagai berikut:




Gambar 3.84 Graf beraturan-7 berorder 10

Gambar 3.84 memperlihatkan bahwa graf beraturan-7 berorder 10 memiliki 10 titik, yaitu $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9$ dan $v_{10}$, dan memiliki 35 sisi. Graf beraturan-7 berorder 10 jika difaktorkan menggunakan faktor-1 akan diperoleh:

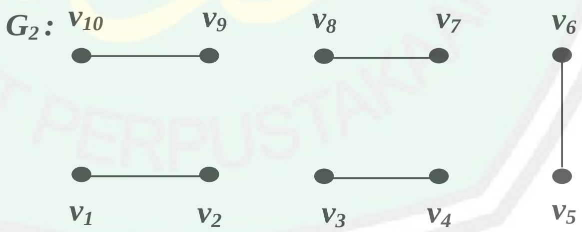
a. Faktor pertama




Gambar 3.85 Faktor pertama dari graf beraturan-7 berorder 10

Gambar 3.85 adalah faktor pertama dari graf beraturan-7 berorder 10 jika difaktorkan menggunakan faktor-1. Gambar di atas memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_{10}$, $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_3$, titik $v_4$ terhubung langsung dengan titik $v_5$, titik $v_6$ terhubung langsung dengan titik $v_7$ dan titik $v_8$ terhubung langsung dengan titik $v_9$.

b. Faktor kedua

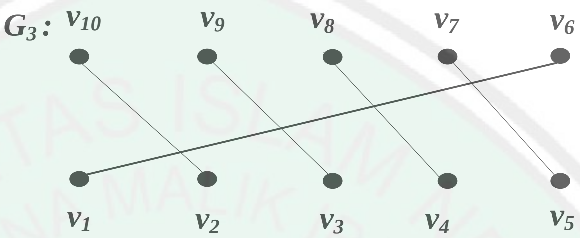



Gambar 3.86 Faktor kedua dari graf beraturan-7 berorder 10

Gambar 3.86 adalah faktor kedua dari graf beraturan-7 berorder 10 jika difaktorkan menggunakan faktor-1. Gambar di atas memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_2$, titik $v_3$ terhubung langsung dengan titik $v_4$, titik $v_5$ terhubung

langsung dengan titik $v_6$, titik $v_7$ terhubung langsung dengan titik $v_8$ dan titik $v_9$ terhubung langsung dengan titik $v_{10}$.

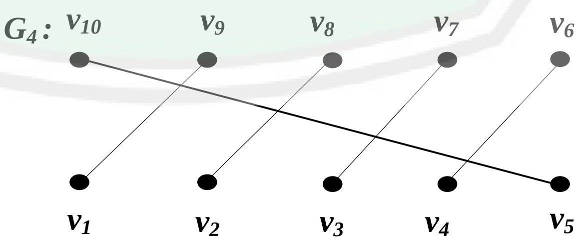
c. Faktor ketiga




Gambar 3.87 Faktor ketiga dari graf beraturan-7 berorder 10

Gambar 3.87 adalah faktor ketiga dari graf beraturan-7 berorder 10 jika difaktorkan menggunakan faktor-1. Gambar di atas memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_6$, titik $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_{10}$, titik $v_3$ terhubung langsung dengan titik $v_9$, titik $v_4$ terhubung langsung dengan titik $v_8$ dan titik $v_5$ terhubung langsung dengan titik $v_7$.

d. Faktor keempat

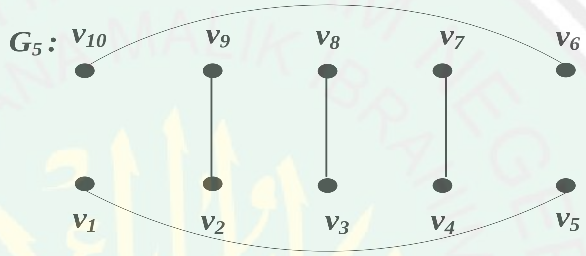



Gambar 3.88 Faktor keempat dari graf beraturan-7 berorder 10

Gambar 3.88 adalah faktor keampat dari graf beraturan-7 berorder 10 jika difaktorkan menggunakan faktor-1. Gambar diatas

memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_9$, titik $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_8$, titik $v_3$ terhubung langsung dengan titik $v_7$, titik $v_4$ terhubung langsung dengan titik $v_6$ dan titik $v_5$ terhubung langsung dengan titik $v_{10}$.

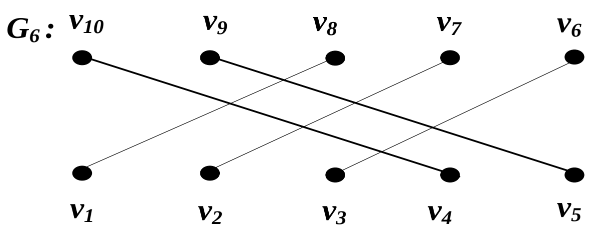
e. Faktor kelima




Gambar 3.89 Faktor kelima dari graf beraturan-7 berorder 10

Gambar 3.89 adalah faktor kelima dari graf beraturan-7 berorder 10 jika difaktorkan menggunakan faktor-1. Gambar di atas memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_5$, titik $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_9$, titik $v_3$ terhubung langsung dengan titik $v_8$, titik $v_4$ terhubung langsung dengan titik $v_7$ dan titik $v_6$ terhubung langsung dengan titik $v_{10}$.

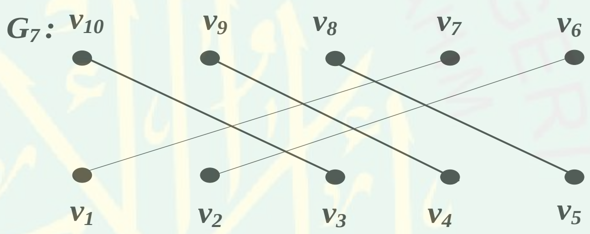
f. Faktor keenam




Gambar 3.90 Faktor keenam dari graf beraturan-7 berorder 10

Gambar 3.90 adalah faktor keenam dari graf beraturan-7 berorder 10 jika difaktorkan menggunakan faktor-1. Gambar di atas memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_8$, titik $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_7$, titik $v_3$ terhubung langsung dengan titik $v_6$, titik $v_4$ terhubung langsung dengan titik $v_{10}$ dan titik $v_5$ terhubung langsung dengan titik $v_9$.

g. Faktor ketujuh




Gambar 3.91 Faktor ketujuh dari graf beraturan-7 berorder 10

Gambar 3.91 adalah faktor ketujuh dari graf beraturan-7 berorder 10 jika difaktorkan menggunakan faktor-1. Gambar diatas memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_7$, titik $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_6$, titik $v_3$ terhubung langsung dengan titik $v_{10}$, titik $v_4$ terhubung langsung dengan titik $v_9$ dan titik $v_5$ terhubung langsung dengan titik $v_8$.

Gambar 3.85 sampai 3.91 adalah faktor-faktor graf beraturan-7 berorder 10, sehingga graf beraturan-7 berorder 10 mempunyai faktor-1 sebanyak 7, yaitu $G_1$, $G_2$, $G_3$, $G_4$, $G_5$, $G_6$ dan $G_7$. Sedemikian hingga $G_1 \oplus G_2 \oplus G_3 \oplus G_4 \oplus G_5 \oplus G_6 \oplus G_7 = G$

merupakan faktorisasi dari graf beraturan-7 berorder 10, yakni penjumlahan sisi dari faktor-faktornya.

Tabel 3.6 Faktorisasi graf beraturan-7 menggunakan faktor-1

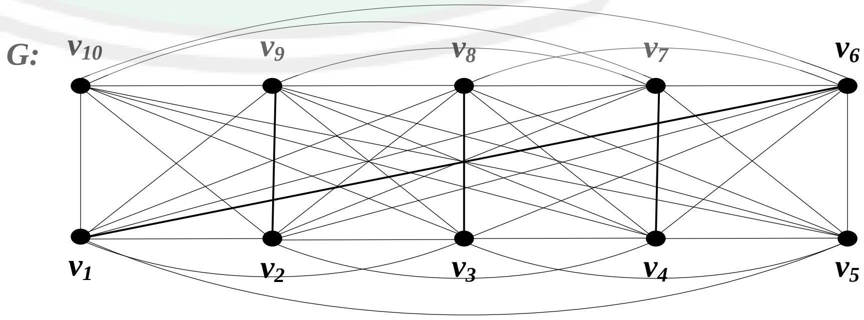
| $p(G)$ | $G$ beraturan-7 | $q(G)$ | Banyak komponen | Banyak faktor-1 |
|---|---|---|---|---|
| 8 | 7 | $\frac{8\times 7}{2}=28$ | $\frac{28}{7}=4$ | $\frac{28}{4}=7$ |
| 10 | | $\frac{10\times 7}{2}=35$ | $\frac{35}{7}=5$ | $\frac{35}{5}=7$ |
| $2n$ | | $7n$ | $n$ | 7 |

Dari tabel 3.6 dapat ditarik kesimpulan bahwa graf beraturan-7 dengan order genap $(2n)$ dimana $n \geq 4$ dan $n \in \mathbb{N}$ memiliki faktor-1 sebanyak 7.

### 3.1.7 Graf Beraturan-8 dengan Order Genap

Graf beraturan-8 dengan order 10

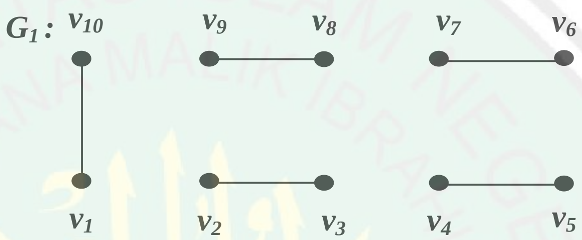
Gambar graf beraturan-8 dengan order 10 sebagai berikut:




Gambar 3.92 Graf beraturan-8 berorder 10

Gambar 3.84 memperlihatkan bahwa graf beraturan-8 berorder 10 memiliki 10 titik, yaitu $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9$ dan $v_{10}$, dan memiliki 40 sisi. Graf beraturan-8 berorder 10 jika difaktorkan menggunakan faktor-1 akan diperoleh:

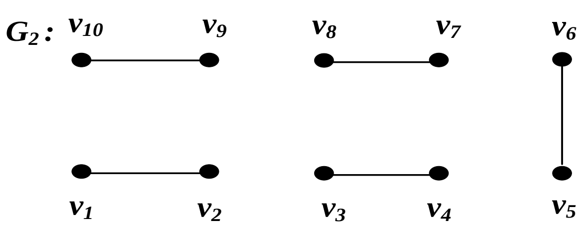
a. Faktor pertama




Gambar 3.93 Faktor pertama dari graf beraturan-8 berorder 10

Gambar 3.93 adalah faktor pertama dari graf beraturan-8 berorder 10 jika difaktorkan menggunakan faktor-1. Gambar di atas memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_{10}$, $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_3$, titik $v_4$ terhubung langsung dengan titik $v_5$, titik $v_6$ terhubung langsung dengan titik $v_7$ dan titik $v_8$ terhubung langsung dengan titik $v_9$.

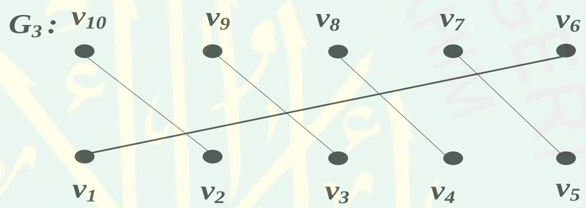
b. Faktor kedua




Gambar 3.94 Faktor kedua dari graf beraturan-8 berorder 10

Gambar 3.94 adalah faktor kedua dari graf beraturan-8 berorder 10 jika difaktorkan menggunakan faktor-1. Gambar di atas memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_2$, titik $v_3$ terhubung langsung dengan titik $v_4$, titik $v_5$ terhubung langsung dengan titik $v_6$, titik $v_7$ terhubung langsung dengan titik $v_8$ dan titik $v_9$ terhubung langsung dengan titik $v_{10}$.

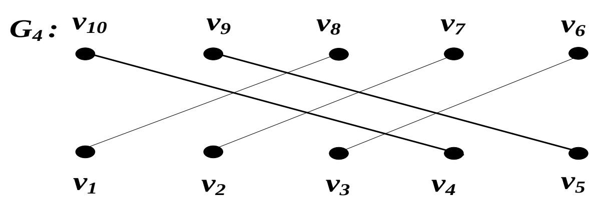
c. Faktor ketiga




Gambar 3.95 Faktor ketiga dari graf beraturan-8 berorder 10

Gambar 3.95 adalah faktor ketiga dari graf beraturan-8 berorder 10 jika difaktorkan menggunakan faktor-1. Gambar di atas memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_6$, titik $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_{10}$, titik $v_3$ terhubung langsung dengan titik $v_9$, titik $v_4$ terhubung langsung dengan titik $v_8$ dan titik $v_5$ terhubung langsung dengan titik $v_7$.

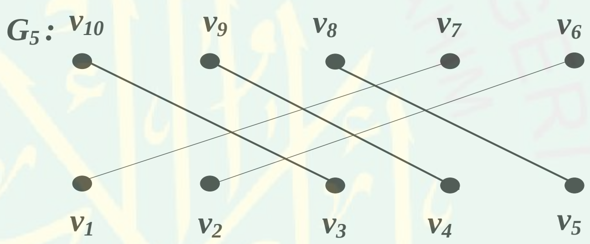
d. Faktor keempat




Gambar 3.96 Faktor keempat dari graf beraturan-8 berorder 10

Gambar 3.96 adalah faktor keempat dari graf beraturan-8 berorder 10 jika difaktorkan menggunakan faktor-1. Gambar di atas memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_8$, titik $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_7$, titik $v_3$ terhubung langsung dengan titik $v_6$, titik $v_4$ terhubung langsung dengan titik $v_{10}$ dan titik $v_5$ terhubung langsung dengan titik $v_9$.

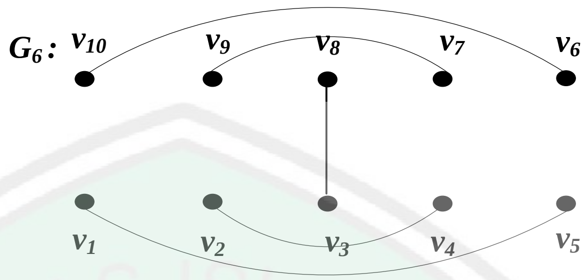
e. Faktor kelima




Gambar 3.97 Faktor kelima dari graf beraturan-8 berorder 10

Gambar 3.97 adalah faktor kelima dari graf beraturan-8 berorder 10 jika difaktorkan menggunakan faktor-1. Gambar di atas memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_7$, titik $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_6$, titik $v_3$ terhubung langsung dengan titik $v_{10}$, titik $v_4$ terhubung langsung dengan titik $v_9$ dan titik $v_5$ terhubung langsung dengan titik $v_8$.

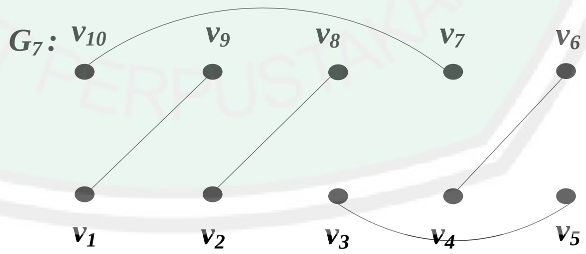
f. Faktor keenam




Gambar 3.98 Faktor keenam dari graf beraturan-8 berorder 10

Gambar 3.98 adalah faktor keenam dari graf beraturan-8 berorder 10 jika difaktorkan menggunakan faktor-1. Gambar di atas memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_5$, titik $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_4$, titik $v_3$ terhubung langsung dengan titik $v_8$, titik $v_7$ terhubung langsung dengan titik $v_9$ dan titik $v_6$ terhubung langsung dengan titik $v_{10}$.

g. Faktor ketujuh

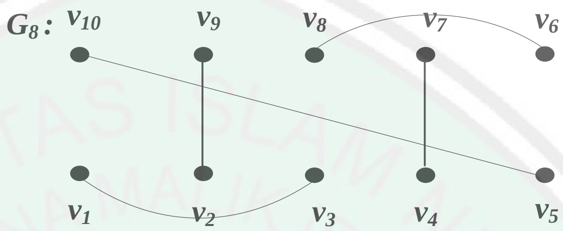



Gambar 3.99 Faktor ketujuh dari graf beraturan-8 berorder 10

Gambar 3.99 adalah faktor ketujuh dari graf beraturan-8 berorder 10 jika difaktorkan menggunakan faktor-1. Gambar di atas memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_9$, titik $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_8$, titik $v_3$ terhubung

langsung dengan titik $v_5$, titik $v_4$ terhubung langsung dengan titik $v_6$ dan titik $v_7$ terhubung langsung dengan titik $v_{10}$.

h. Faktor kedelapan




Gambar 3.100 Faktor kedelapan dari graf beraturan-8 berorder 10

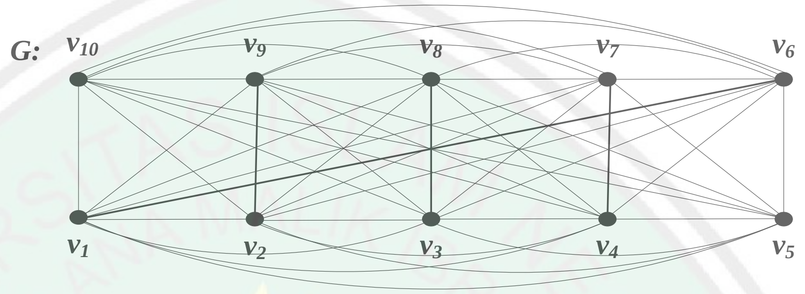
Gambar 3.100 adalah faktor kedelapan dari graf beraturan-8 berorder 10 jika difaktorkan menggunakan faktor-1. Gambar di atas memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_3$, titik $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_9$, titik $v_4$ terhubung langsung dengan titik $v_7$, titik $v_5$ terhubung langsung dengan titik $v_{10}$ dan titik $v_6$ terhubung langsung dengan titik $v_8$.

Gambar 3.93 sampai 3.100 adalah faktor-faktor graf beraturan-8 berorder 10, sehingga graf beraturan-8 berorder 10 mempunyai faktor-1 sebanyak 8, yaitu $G_1$, $G_2$, $G_3$, $G_4$, $G_5$, $G_6$, $G_7$ dan $G_8$. Sedemikian hingga $G_1 \oplus G_2 \oplus G_3 \oplus G_4 \oplus G_5 \oplus G_6 \oplus G_7 \oplus G_8 = G$ merupakan faktorisasi dari graf beraturan-8 berorder 10, yakni penjumlahan sisi dari faktor-faktornya.

### 3.1.8 Graf Beraturan-9 dengan Order Genap

Graf beraturan-9 dengan order 10

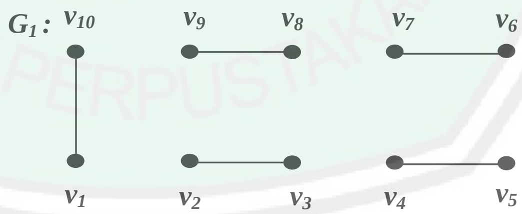
Gambar graf beraturan-9 dengan order 10 sebagai berikut:




Gambar 3.101 Graf beraturan-9 berorder 10

Gambar 3.101 memperlihatkan bahwa graf beraturan-9 berorder 10 memiliki 10 titik, yaitu $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9$ dan $v_{10}$, dan memiliki 45 sisi. Graf beraturan-9 berorder 10 jika difaktorkan menggunakan faktor-1 akan diperoleh:

a. Faktor pertama

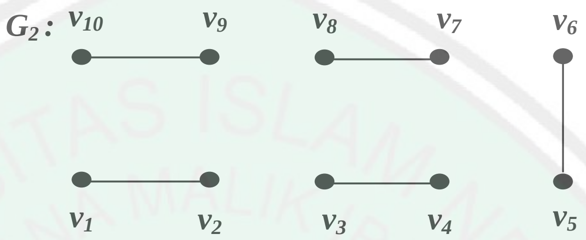



Gambar 3.102 Faktor pertama dari graf beraturan-9 berorder 10

Gambar 3.102 adalah faktor pertama dari graf beraturan-9 berorder 10 jika difaktorkan menggunakan faktor-1. Gambar di atas memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_{10}$, $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_3$, titik $v_4$ terhubung

langsung dengan titik $v_5$, titik $v_6$ terhubung langsung dengan titik $v_7$ dan titik $v_8$ terhubung langsung dengan titik $v_9$.

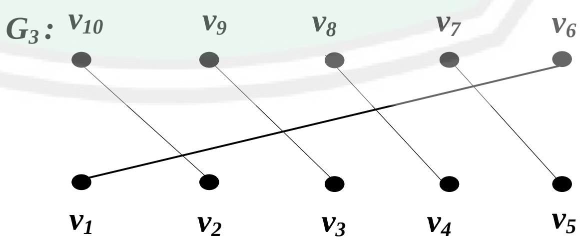
b. Faktor kedua




Gambar 3.103 Faktor kedua dari graf beraturan-9 berorder 10

Gambar 3.103 adalah faktor kedua dari graf beraturan-9 berorder 10 jika difaktorkan menggunakan faktor-1. Gambar di atas memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_2$, titik $v_3$ terhubung langsung dengan titik $v_4$, titik $v_5$ terhubung langsung dengan titik $v_6$, titik $v_7$ terhubung langsung dengan titik $v_8$ dan titik $v_9$ terhubung langsung dengan titik $v_{10}$.

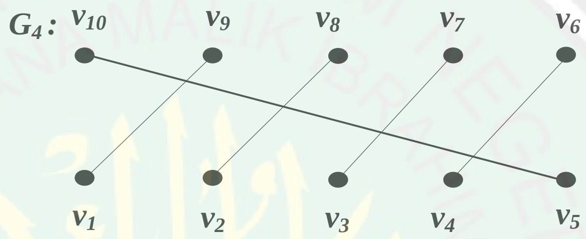
c. Faktor ketiga




Gambar 3.104 Faktor ketiga dari graf beraturan-9 berorder 10

Gambar 3.104 adalah faktor ketiga dari graf beraturan-9 berorder 10 jika difaktorkan menggunakan faktor-1. Gambar di atas memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_6$, titik $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_{10}$, titik $v_3$ terhubung langsung dengan titik $v_9$, titik $v_4$ terhubung langsung dengan titik $v_8$ dan titik $v_5$ terhubung langsung dengan titik $v_7$.

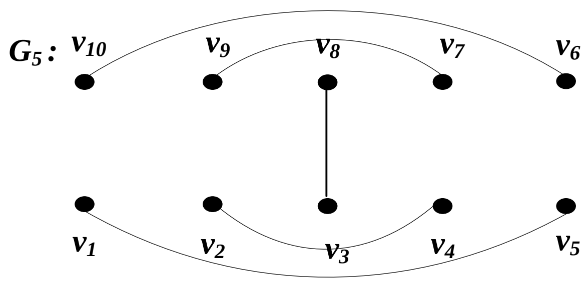
d. Faktor keempat




Gambar 3.105 Faktor keempat dari graf beraturan-9 berorder 10

Gambar 3.105 adalah faktor keempat dari graf beraturan-9 berorder 10 jika difaktorkan menggunakan faktor-1. Gambar di atas memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_9$, titik $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_8$, titik $v_3$ terhubung langsung dengan titik $v_7$, titik $v_4$ terhubung langsung dengan titik $v_6$ dan titik $v_5$ terhubung langsung dengan titik $v_{10}$.

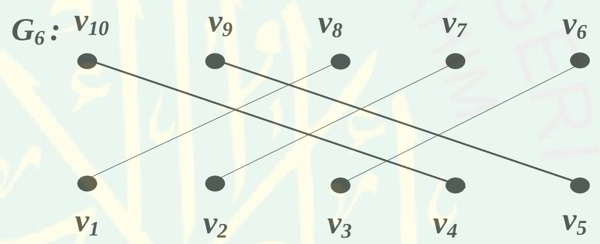
e. Faktor kelima




Gambar 3.106 Faktor kelima dari graf beraturan-9 berorder 10

Gambar 3.106 adalah faktor kelima dari graf beraturan-9 berorder 10 jika difaktorkan menggunakan faktor-1. Gambar di atas memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_5$, titik $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_4$, titik $v_3$ terhubung langsung dengan titik $v_8$, titik $v_7$ terhubung langsung dengan titik $v_9$ dan titik $v_6$ terhubung langsung dengan titik $v_{10}$.

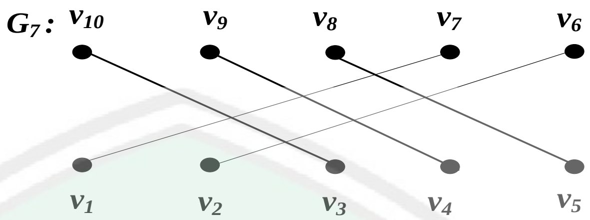
f. Faktor keenam




Gambar 3.107 Faktor keenam dari graf beraturan-9 berorder 10

Gambar 3.107 adalah faktor keenam dari graf beraturan-9 berorder 10 jika difaktorkan menggunakan faktor-1. Gambar di atas memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_8$, titik $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_7$, titik $v_3$ terhubung langsung dengan titik $v_6$, titik $v_4$ terhubung langsung dengan titik $v_{10}$ dan titik $v_5$ terhubung langsung dengan titik $v_9$.

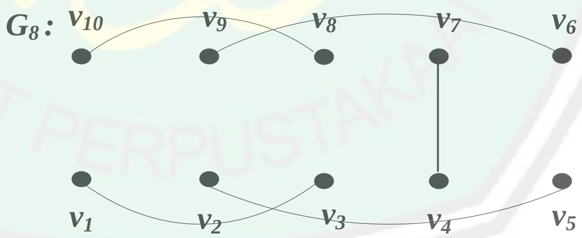
g. Faktor ketujuh




Gambar 3.108 Faktor ketuhuh dari graf beraturan-9 berorder 10

Gambar 3.108 adalah faktor ketujuh dari graf beraturan-9 berorder 10 jika difaktorkan menggunakan faktor-1. Gambar di atas memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_7$, titik $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_6$, titik $v_3$ terhubung langsung dengan titik $v_{10}$, titik $v_4$ terhubung langsung dengan titik $v_9$ dan titik $v_5$ terhubung langsung dengan titik $v_8$.

h. Faktor kedelapan

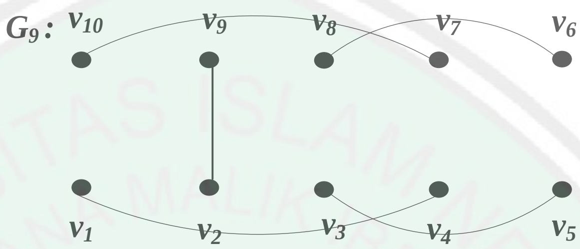



Gambar 3.109 Faktor kedelapan dari graf beraturan-9 berorder 10

Gambar 3.109 adalah faktor kedelapan dari graf beraturan-9 berorder 10 jika difaktorkan menggunakan faktor-1. Gambar diatas memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_3$, titik $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_5$, titik $v_4$ terhubung

langsung dengan titik $v_7$, titik $v_6$ terhubung langsung dengan titik $v_9$ dan titik $v_8$ terhubung langsung dengan titik $v_{10}$.

i. Faktor kesembilan




Gambar 3.110 Faktor kesembilan dari graf beraturan-9 berorder 10

Gambar 3.110 adalah faktor kesembilan dari graf beraturan-9 berorder 10 jika difaktorkan menggunakan faktor-1. Gambar di atas memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_4$, titik $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_9$, titik $v_3$ terhubung langsung dengan titik $v_5$, titik $v_6$ terhubung langsung dengan titik $v_8$ dan titik $v_7$ terhubung langsung dengan titik $v_{10}$.

Gambar 3.102 sampai 3.110 adalah faktor-faktor graf beraturan-9 berorder 10, sehingga graf beraturan-9 berorder 10 mempunyai faktor-1 sebanyak 9, yaitu $G_1$, $G_2$, $G_3$, $G_4$, $G_5$, $G_6$, $G_7$, $G_8$ dan $G_9$. Sedemikian hingga $G_1 \oplus G_2 \oplus G_3 \oplus G_4 \oplus G_5 \oplus G_6 \oplus G_7 \oplus G_8 \oplus G_9 = G$ merupakan faktorisasi dari graf beraturan-9 berorder 10, yakni penjumlahan sisi dari faktor-faktornya.

Dari proses pemfaktoran graf beraturan-$r$ $(r \geq 2)$ dengan order genap $(2n)$ dimana $n \geq 2$ dan $n \in \mathbb{N}$ yang memiliki faktor-1, diperoleh suatu pola sebagai berikut:

Table 3.7 Faktorisasi graf beraturan-$r$ dimana $r \geq 2$ yang memiliki faktor-1

| $p(G)$ | $G$ beraturan-$r$ | $q(G)$ | Banyak komponen | Banyak faktor-1 |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 2 | $\frac{4 \times 2}{2} = 4$ | $\frac{4}{2} = 2$ | $\frac{4}{2} = 2$ |
| | 3 | $\frac{4 \times 3}{2} = 6$ | $\frac{6}{3} = 2$ | $\frac{6}{2} = 3$ |
| 6 | 2 | $\frac{6 \times 2}{2} = 6$ | $\frac{6}{2} = 3$ | $\frac{6}{3} = 2$ |
| | 3 | $\frac{6 \times 3}{2} = 9$ | $\frac{9}{3} = 3$ | $\frac{9}{3} = 3$ |
| | 4 | $\frac{6 \times 4}{2} = 12$ | $\frac{12}{4} = 3$ | $\frac{12}{3} = 4$ |
| | 5 | $\frac{6 \times 5}{2} = 15$ | $\frac{15}{5} = 3$ | $\frac{15}{3} = 5$ |
| 8 | 2 | $\frac{8 \times 2}{2} = 8$ | $\frac{8}{2} = 4$ | $\frac{8}{4} = 2$ |
| | 3 | $\frac{8 \times 3}{2} = 12$ | $\frac{12}{3} = 4$ | $\frac{12}{4} = 3$ |
| | 4 | $\frac{8 \times 4}{2} = 16$ | $\frac{16}{4} = 4$ | $\frac{16}{4} = 4$ |
| | 5 | $\frac{8 \times 5}{2} = 20$ | $\frac{20}{5} = 4$ | $\frac{20}{4} = 5$ |
| | 6 | $\frac{8 \times 6}{2} = 24$ | $\frac{24}{6} = 4$ | $\frac{24}{4} = 6$ |
| | 7 | $\frac{8 \times 7}{2} = 28$ | $\frac{28}{7} = 4$ | $\frac{28}{4} = 7$ |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 10 | 2 | $\frac{10\times 2}{2}=10$ | $\frac{10}{2}=5$ | $\frac{10}{5}=2$ |
| | 3 | $\frac{10\times 3}{2}=15$ | $\frac{15}{3}=5$ | $\frac{15}{5}=3$ |
| | 4 | $\frac{10\times 4}{2}=20$ | $\frac{20}{4}=5$ | $\frac{20}{5}=4$ |
| | 5 | $\frac{10\times 5}{2}=25$ | $\frac{25}{5}=5$ | $\frac{25}{5}=5$ |
| | 6 | $\frac{10\times 6}{2}=30$ | $\frac{30}{6}=5$ | $\frac{30}{5}=6$ |
| | 7 | $\frac{10\times 7}{2}=35$ | $\frac{35}{7}=5$ | $\frac{35}{5}=7$ |
| | 8 | $\frac{10\times 8}{2}=40$ | $\frac{40}{8}=5$ | $\frac{40}{5}=8$ |
| | 9 | $\frac{10\times 9}{2}=45$ | $\frac{45}{9}=5$ | $\frac{45}{5}=9$ |
| $2n$ | $2\le r\le 2n-1$ | $q(G)=nr$ | $n$ | $r$ |

**Teorema:**

Jika G graf beraturan-$r$ $(r\ge 2)$ dengan $2\le r\le 2n-1$ dan $p(G)=2n$ maka G memiliki faktor-1 sebanyak $r$, untuk $n\ge 2$ dan $n\in \mathbb{N}$.

**Bukti:**

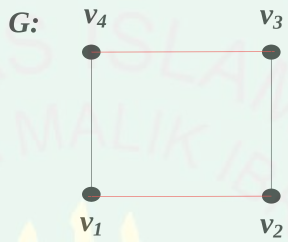
Diberikan $p(G)=2n$ dan graf beraturan-$r$ dengan $2\le r\le 2n-1$ $(r\ge 2)$ dan $q(G)=nr$, untuk $n\ge 2$ dan $n\in \mathbb{N}$.

Akan dibuktikan jumlah faktor-1 adalah $r$.

Teorema tersebut akan dibuktikan dengan menggunakan induksi matematika.

Ambil $n = 2$ maka $p(G) = 4$ sehingga memiliki graf beraturan-2 dan graf beraturan-3 dengan masing-masing sisi sebanyak 4 dan 6, sehingga dapat digambarkan sebagai berikut:

a. Graf beraturan-2 dengan order 4



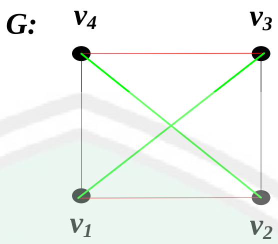

Dari gambar tersebut dapat dilihat bahwa graf beraturan-2 memiliki faktor-1 sebanyak 2, hal tersebut diketahui dari:

1. Faktor-1 minimal memiliki 2 titik. Jika diberikan graf beraturan-2 dengan $p(G) = 4$ maka mempunyai 2 komponen pada setiap faktor-1, yakni setiap komponen memiliki 2 pasang titik dan setiap titik berderajat 1.
2. Pada graf beraturan-2 setiap titik berderajat 2, sehingga setiap titik memiliki 2 pasang. Jika $p(G) = 4$ maka 4x2=8 (Jumlah derajat graf beraturan-2). Menurut teorema lemma jabat tangan jika $q(G) = 4$ maka $\sum d_G(v) = 8$.

   Sehingga jumlah faktor-1 adalah $\dfrac{\sum d_G(v)}{p(G)} = \dfrac{8}{4} = 2$.

$\therefore$ Untuk graf beraturan-2 dengan $p(G) = 4$ memiliki faktor-1 sebanyak 2.

b. Graf beraturan-3




Dari gambar tersebut dapat dilihat bahwa graf beraturan-3 memiliki faktor-1 sebanyak 3, hal tersebut diketahui dari:

1. Faktor-1 minimal memiliki 2 titik. Jika diberikan graf beraturan-3 dengan $p(G)=4$ maka mempunyai 2 komponen pada setiap faktor-1, yakni setiap komponen memiliki 2 pasang titik dan setiap titik berderajat 1.
2. Pada graf beraturan-3 setiap titik berderajat 3, sehingga setiap titik memiliki 3 pasang. Jika $p(G)=4$ maka 4x3=12 (Jumlah derajat graf tangga beraturan-3). Menurut teorema lemma jabat tangan jika $q(G)=6$ maka $\sum d_G(v)=12$.

   Sehingga jumlah faktor-1 adalah $\frac{\sum d_G(v)}{p(G)}=\frac{12}{4}=3$

$\therefore$ untuk graf tangga beraturan-3 dengan $p(G)=4$ memiliki faktor-1 sebanyak 3.

Jadi untuk $n=2$ benar.

Akan ditunjukkan jika untuk $n=k$ benar maka untuk $n=k+1$ juga benar.

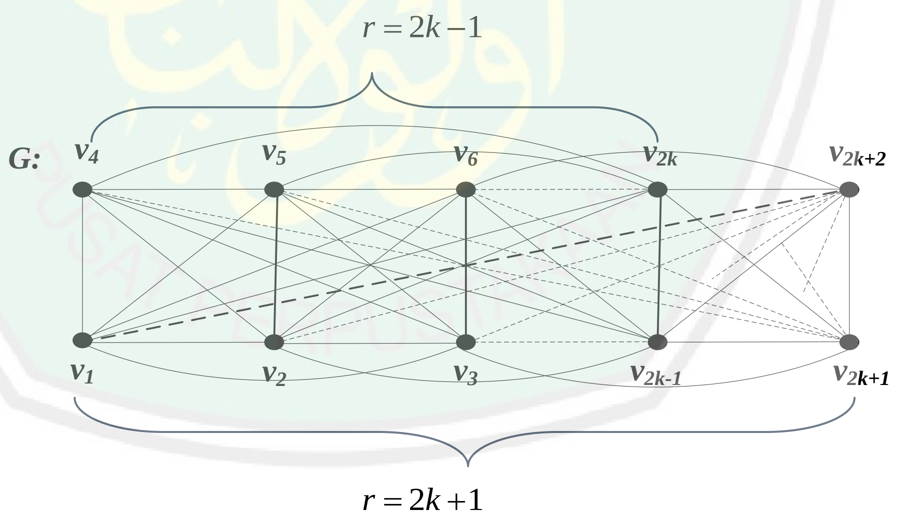
Asumsikan untuk $n = k$ benar. Artinya $p(G) = 2k$ dan graf beraturan-*r* dengan $2 \le r \le 2k-1$ untuk $(r \ge 2)$ dan $q(G) = kr$ maka memiliki faktor-1 sebanyak $r$. Ambil *r* yang minimal dan maksimal.

Untuk $r = 2$ maka jumlah faktor-1 adalah $2$, benar

Untuk $r = 2k-1$ maka jumlah faktor-1 adalah $2k-1$, dianggap benar.

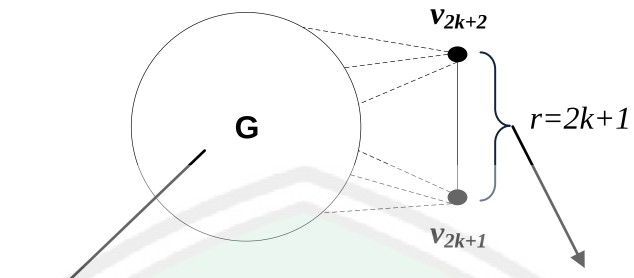
Akan ditunjukkan benar untuk $n = k+1$ maka $p(G) = 2(k+1)$ dan graf beraturan-*r* dengan $2 \le r \le 2(k+1)-1 = 2k+1$ dan $q(G) = (k+1)r$.

Ilustrasi tersebut dapat digambar dengan mengambil graf beraturan-*r* yang maksimal dimana $r = 2k-1$ dan $p(G) = 2k$ dengan menambah 2 titik sehingga $r = 2k+1$ dan $p(G) = 2k+2$.




Dari gambar tersebut dapat dilihat untuk $p(G) = 2k$ dengan graf beraturan-$2k-1$ maka memiliki faktor-1 sebanyak $2k-1$ (sesuai asumsi).

Untuk $p(G) = 2k+2$ dengan graf beraturan-$2k+1$ maka memiliki faktor-1 sebanyak $2k+1$, sesuai ilustrasi grambar sebagai berikut:




G graf beraturan- $2k+1$ maka memiliki faktor-1 sebanyak $2k+1$

G graf beraturan- $2k-1$ maka memiliki faktor-1 sebanyak $2k-1$

Sehingga diperoleh jumlah faktor-1 adalah:

Jumlah faktor-1 $= 2k+1$

Jumlah faktor-1 $= 2k-1+2$

Jumlah faktor-1 = Jumlah faktor-1 + 2, dengan 2 adalah penambahan titik pada graf sehingga menambah faktor-1 sebanyak dua.

$\therefore$ Jumlah faktor-1 = Jumlah faktor-1 $\oplus (G_1) \oplus (G_2)$

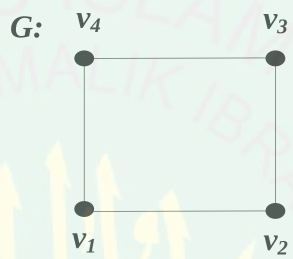
Sesuai prinsip induksi matematika, jika $p(G) = 2n$ dengan graf beraturan-*r* dengan $2 \le r \le 2n-1$ untuk $(r \ge 2)$ maka memiliki faktor-1 sebanyak *r*, untuk $n \ge 2$ dan $n \in \mathbb{N}$ .

## 3.2 Faktorisasi Graf Beraturan-*r* yang Memiliki Faktor-2

### 3.2.1 Graf ($C_{2n}$)

1. Graf beraturan-2 dengan order 4

   Gambar graf $C_4$ sebagai berikut:

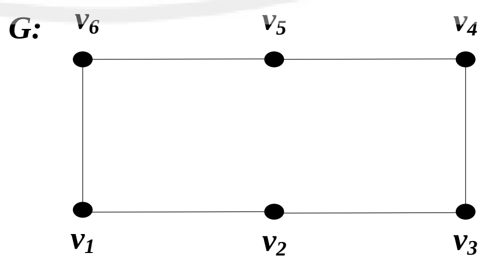



Gambar 3.111 Graf $C_4$

Gambar 3.111 memperlihatkan bahwa graf $C_4$ memiliki 4 titik, yaitu $v_1, v_2, v_3$ dan $v_4$, dan memiliki 4 sisi. Faktor dari graf $C_4$ adalah graf $C_4$ itu sendiri. Sehingga faktorisasi dari graf $C_4$ adalah graf $C_4$ itu sendiri tanpa di operasikan dengan graf lain.

2. Graf beraturan-2 dengan order 6

   Gambar graf $C_6$ sebagai berikut:

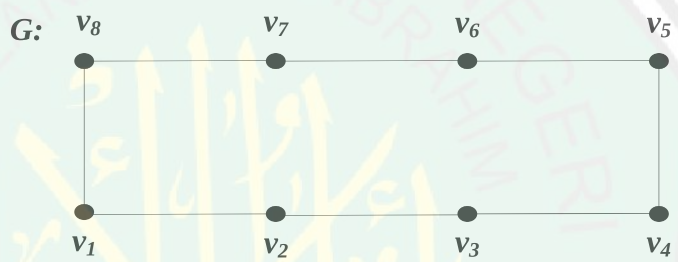



Gambar 3.112 Graf $C_6$

Gambar 3.112 memperlihatkan bahwa graf $C_6$ memiliki 6 titik, yaitu $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$ dan $v_6$, dan memiliki 6 sisi. Faktor dari graf $C_6$ adalah graf $C_6$ itu sendiri. Sehingga faktorisasi dari graf $C_6$ adalah graf $C_6$ itu sendiri tanpa di operasikan dengan graf lain.

3. Graf beraturan-2 dengan order 8

Gambar graf $C_8$ sebagai berikut:

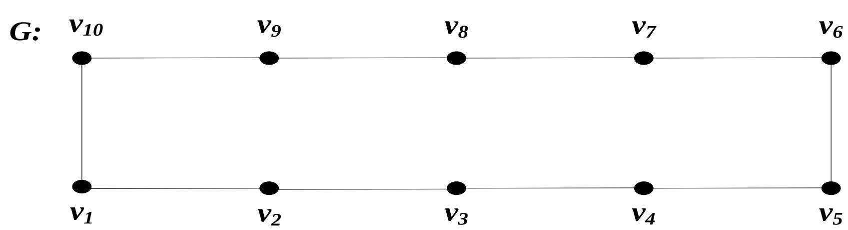



Gambar 3.113 Graf $C_8$

Gambar 3.113 memperlihatkan bahwa graf $C_8$ memiliki 8 titik, yaitu $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$, $v_7$ dan $v_8$, dan memiliki 8 sisi. Faktor dari graf $C_8$ adalah graf $C_8$ itu sendiri. Sehingga faktorisasi dari graf $C_8$ adalah graf $C_8$ itu sendiri tanpa di operasikan dengan graf lain.

4. Graf beraturan-2 dengan order 10

Gambar graf $C_{10}$ sebagai berikut:




Gambar 3.114 Graf $C_{10}$

Gambar 3.114 memperlihatkan bahwa graf $C_{10}$ memiliki 10 titik, yaitu $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5,\ v_6, v_7, v_8, v_9$ dan $v_{10}$, dan memiliki 10 sisi. Faktor dari graf $C_{10}$ adalah graf $C_{10}$ itu sendiri. Sehingga faktorisasi dari graf $C_{10}$ adalah graf $C_{10}$ itu sendiri tanpa di operasikan dengan graf lain.

Tabel 3.8 Faktorisasi graf beraturan-2 menggunakan faktor-2

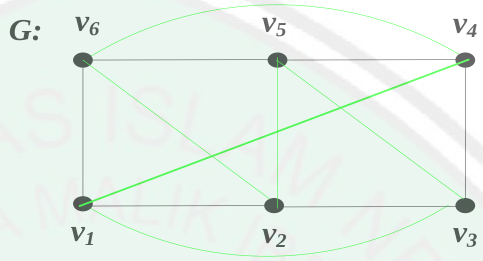
<table>
<tr><th>$p(G)$</th><th>$G$ beraturan-2</th><th>$q(G)$</th><th>Banyak faktor-2</th></tr>
<tr><td>4</td><td rowspan="5">2</td><td>$\frac{4\times 2}{2}=4$</td><td>$\frac{4}{4}=1$</td></tr>
<tr><td>6</td><td>$\frac{6\times 2}{2}=6$</td><td>$\frac{6}{6}=1$</td></tr>
<tr><td>8</td><td>$\frac{8\times 2}{2}=8$</td><td>$\frac{8}{8}=1$</td></tr>
<tr><td>10</td><td>$\frac{10\times 2}{2}=10$</td><td>$\frac{10}{10}=1$</td></tr>
<tr><td>$2n$</td><td>$2n$</td><td>1</td></tr>
</table>

Dari tabel 3.8 ditarik kesimpulan bahwa graf ($C_{2n}$) dengan order genap $(2n)$ dimana $n \geq 2$ dan $n \in \mathbb{N}$ memiliki faktor-1 sebanyak 1.

### 3.2.2 Graf Beraturan-4 dengan Order Genap

1. Graf beraturan-4 dengan order 6

Gambar graf beraturan-4 dengan order 6 sebagai berikut:




Gambar 3.115 Graf beraturan-4 berorder 6

Gambar 3.115 jika difaktorkan menggunakan faktor-2 akan diperoleh:

a. Faktor pertama

Sisi yang bewarna hitam pada gambar 3.115 adalah faktor pertama $(G_1)$ pada graf beraturan-4 berorder 6 jika menggunakan faktor-2. Gambar tersebut memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_2$, titik $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_3$, titik $v_3$ terhubung langsung dengan titik $v_4$, titik $v_4$ terhubung langsung dengan titik $v_5$, titik $v_5$ terhubung langsung dengan titik $v_6$, titik $v_6$ terhubung langsung dengan titik $v_1$.

b. Faktor kedua

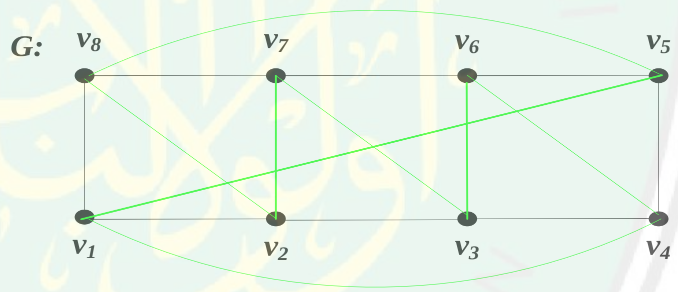
Sisi yang bewarna hijau pada gambar 3.115 adalah faktor kedua $(G_2)$ pada graf beraturan-4 berorder 6 jika menggunakan faktor-2. Gambar tersebut memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_3$, titik $v_3$ terhubung langsung dengan titik

$v_5$, titik $v_5$ terhubung langsung dengan titik $v_2$, titik $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_6$, titik $v_6$ terhubung langsung dengan titik $v_4$, titik $v_4$ terhubung langsung dengan titik $v_1$.

Jika $G_1$ dan $G_2$ adalah faktor-faktor graf beraturan-4 berorder 6 yang mana sisi-sisinya saling disjoint, sedemikian hingga $G_1 \oplus G_2 = G$ merupakan faktorisasi dari graf beraturan-4 berorder 6, yakni penjumlahan sisi dari faktor-faktornya.

2. Graf beraturan-4 dengan order 8

Gambar graf beraturan-4 dengan order 8 sebagai berikut:




Gambar 3.116 Graf beraturan-4 berorder 8

Gambar 3.116 jika difaktorkan menggunakan faktor-2 akan diperoleh:

a. Faktor pertama

Sisi yang bewarna hitam pada gambar 3.116 adalah faktor pertama $(G_1)$ pada graf beraturan-4 berorder 8 jika menggunakan faktor-2. Gambar tersebut memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_2$, titik $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_3$, titik $v_3$ terhubung langsung dengan titik $v_4$, titik $v_4$ terhubung langsung dengan titik $v_5$, titik $v_5$ terhubung langsung dengan titik

$v_6$, titik $v_6$ terhubung langsung dengan titik $v_7$, titik $v_7$ terhubung langsung dengan titik $v_8$, titik $v_8$ terhubung langsung dengan titik $v_1$.

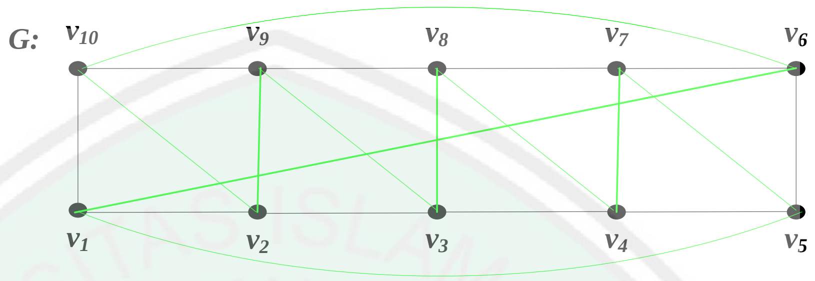
b. Faktor kedua

Sisi yang bewarna hijau pada gambar 3.116 adalah faktor kedua $(G_2)$ pada graf beraturan-4 berorder 8 jika menggunakan faktor-2. Gambar tersebut memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_4$, titik $v_4$ terhubung langsung dengan titik $v_6$, titik $v_6$ terhubung langsung dengan titik $v_3$, titik $v_3$ terhubung langsung dengan titik $v_7$, titik $v_7$ terhubung langsung dengan titik $v_2$, titik $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_8$, titik $v_8$ terhubung langsung dengan titik $v_5$, titik $v_5$ terhubung langsung dengan titik $v_1$.

Jika $G_1$ dan $G_2$ adalah faktor-faktor graf beraturan-4 berorder 8 yang mana sisi-sisinya saling disjoint, sedemikian hingga $G_1 \oplus G_2 = G$ merupakan faktorisasi dari graf beraturan-4 berorder 8, yakni penjumlahan sisi dari faktor-faktornya.

3. Graf beraturan-4 dengan order 10

Gambar graf beraturan-4 dengan order 10 sebagai berikut:




Gambar 3.117 Graf beraturan-4 berorder 10

Gambar 3.117 jika difaktorkan menggunakan faktor-2 akan diperoleh:

a. Faktor pertama

Sisi yang bewarna hitam pada gambar 3.117 adalah faktor pertama $(G_1)$ pada graf beraturan-4 berorder 10 jika menggunakan faktor-2. Gambar tersebut memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_2$, titik $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_3$, titik $v_3$ terhubung langsung dengan titik $v_4$, titik $v_4$ terhubung langsung dengan titik $v_5$, titik $v_5$ terhubung langsung dengan titik $v_6$, titik $v_6$ terhubung langsung dengan titik $v_7$, titik $v_7$ terhubung langsung dengan titik $v_8$, titik $v_8$ terhubung langsung dengan titik $v_9$, titik $v_9$ terhubung langsung dengan titik $v_{10}$, titik $v_{10}$ tetrhubung langsung dengan titik $v_1$.

b. Faktor kedua

Sisi yang bewarna hijau pada gambar 3.117 adalah faktor kedua $(G_2)$ pada graf beraturan-4 berorder 10 jika menggunakan faktor-2.

Gambar tersebut memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_5$, titik $v_5$ terhubung langsung dengan titik $v_7$, titik $v_7$ terhubung langsung dengan titik $v_4$, titik $v_4$ terhubung langsung dengan titik $v_8$, titik $v_8$ terhubung langsung dengan titik $v_3$, titik $v_3$ terhubung langsung dengan titik $v_9$, titik $v_9$ terhubung langsung dengan titik $v_2$, titik $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_{10}$, titik $v_{10}$ terhubung langsung dengan titik $v_6$, titik $v_6$ tetrhubung langsung dengan titik $v_1$.

Jika $G_1$ dan $G_2$ adalah faktor-faktor graf beraturan-4 berorder 10 yang mana sisi-sisinya saling disjoint, sedemikian hingga $G_1 \oplus G_2 = G$ merupakan faktorisasi dari graf beraturan-4 berorder 10, yakni penjumlahan sisi dari faktor-faktornya.

Tabel 3.9 Faktorisasi graf beraturan-4 menggunakan faktor-2

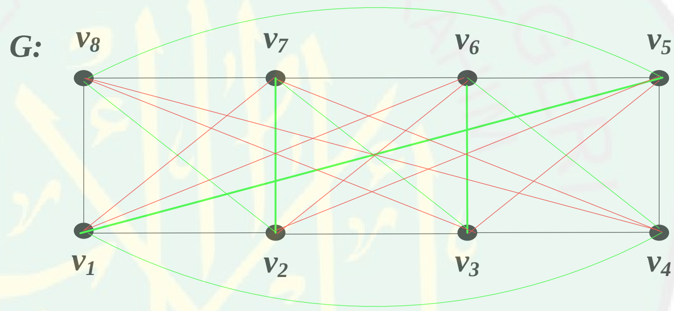
| $p(G)$ | $G$ beraturan-4 | $q(G)$ | Banyak faktor-2 |
|---|---|---|---|
| 6 | 4 | $\frac{6\times 4}{2}=12$ | $\frac{12}{6}=2$ |
| 8 | | $\frac{8\times 4}{2}=16$ | $\frac{16}{8}=2$ |
| 10 | | $\frac{10\times 4}{2}=20$ | $\frac{20}{10}=2$ |
| $2n$ | | $4n$ | 2 |

Dari tabel 3.9 dapat ditarik kesimpulan bahwa graf beraturan-4 dengan order genap $(2n)$ dimana $n \geq 3$ dan $n \in \mathbb{N}$ memiliki faktor-2 sebanyak 2.

### 3.2.3 Graf Beraturan-6 dengan Order Genap

1. Graf beraturan-6 dengan order 8

   Gambar graf beraturan-6 dengan order 8 sebagai berikut:




Gambar 3.118 Graf beraturan-8 berorder 8

Gambar 3.117 jika difaktorkan menggunakan faktor-2 akan diperoleh:

a. Faktor pertama

   Sisi yang bewarna hitam pada gambar 3.118 adalah faktor pertama $(G_1)$ pada graf beraturan-6 berorder 8 jika menggunakan faktor-2. Gambar tersebut memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_2$, titik $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_3$, titik $v_3$ terhubung langsung dengan titik $v_4$, titik $v_4$ terhubung langsung dengan titik $v_5$, titik $v_5$ terhubung langsung dengan titik $v_6$, titik $v_6$ terhubung langsung dengan titik $v_7$, titik $v_7$ terhubung langsung dengan titik $v_8$, titik $v_8$ terhubung langsung dengan titik $v_1$.

b. Faktor kedua

Sisi yang bewarna hijau pada gambar 3.118 adalah faktor kedua $(G_2)$ pada graf beraturan-6 berorder 8 jika menggunakan faktor-2. Gambar tersebut memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_4$, titik $v_4$ terhubung langsung dengan titik $v_6$, titik $v_6$ terhubung langsung dengan titik $v_3$, titik $v_3$ terhubung langsung dengan titik $v_7$, titik $v_7$ terhubung langsung dengan titik $v_2$, titik $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_8$, titik $v_8$ terhubung langsung dengan titik $v_5$, titik $v_5$ terhubung langsung dengan titik $v_1$.

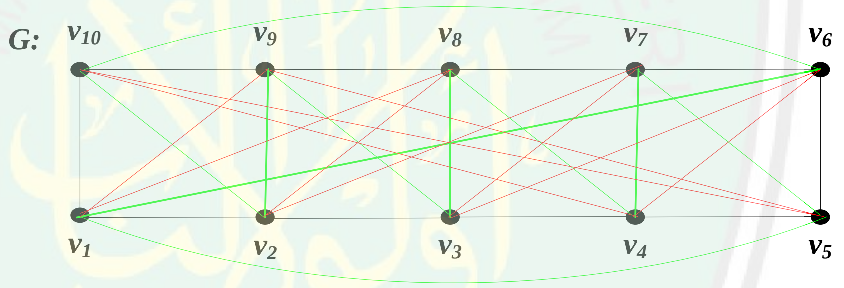
c. Faktor ketiga

Sisi yang bewarna merah pada gambar 3.118 adalah faktor ketiga $(G_3)$ pada graf beraturan-6 berorder 8 jika menggunakan faktor-2. Gambar tersebut memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_7$, titik $v_7$ terhubung langsung dengan titik $v_4$, titik $v_4$ terhubung langsung dengan titik $v_8$, titik $v_8$ terhubung langsung dengan titik $v_3$, titik $v_3$ terhubung langsung dengan titik $v_5$, titik $v_5$ terhubung langsung dengan titik $v_2$, titik $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_6$, titik $v_6$ terhubung langsung dengan titik $v_1$.

Jika $G_1$, $G_2$ dan $G_3$ adalah faktor-faktor graf beraturan-6 berorder 8 yang mana sisi-sisinya saling disjoint, sedemikian hingga $G_1 \oplus G_2 \oplus G_3 = G$ merupakan faktorisasi dari graf beraturan-6 berorder 8, yakni penjumlahan sisi dari faktor-faktornya

2. Graf beraturan-6 dengan order 10

Gambar graf beraturan-6 dengan order 10 sebagai berikut:




Gambar 3.119 Graf beraturan-6 berorder 10

Gambar 3.119 jika difaktorkan menggunakan faktor-2 akan diperoleh:

a. Faktor pertama

Sisi yang bewarna hitam pada gambar 3.119 adalah faktor pertama $(G_1)$ pada graf beraturan-6 berorder 10 jika menggunakan faktor-2. Gambar tersebut memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_2$, titik $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_3$, titik $v_3$ terhubung langsung dengan titik $v_4$, titik $v_4$ terhubung langsung dengan titik $v_5$, titik $v_5$ terhubung langsung dengan titik $v_6$, titik $v_6$ terhubung langsung dengan titik $v_7$, titik $v_7$ terhubung langsung dengan titik $v_8$, titik $v_8$ terhubung langsung dengan titik $v_9$, titik $v_9$ terhubung langsung dengan titik $v_{10}$, titik $v_{10}$ tetrhubung langsung dengan titik $v_1$.

b. Faktor kedua

Sisi yang bewarna hijau pada gambar 3.119 adalah faktor kedua $(G_2)$ pada graf beraturan-6 berorder 10 jika menggunakan faktor-2. Gambar tersebut memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_5$, titik $v_5$ terhubung langsung dengan titik $v_7$, titik $v_7$ terhubung langsung dengan titik $v_4$, titik $v_4$ terhubung langsung dengan titik $v_8$, titik $v_8$ terhubung langsung dengan titik $v_3$, titik $v_3$ terhubung langsung dengan titik $v_9$, titik $v_9$ terhubung langsung dengan titik $v_2$, titik $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_{10}$, titik $v_{10}$ terhubung langsung dengan titik $v_6$, titik $v_6$ terhubung langsung dengan titik $v_1$.

c. Faktor ketiga

Sisi yang bewarna merah pada gambar 3.119 adalah faktor ketiga $(G_3)$ pada graf beraturan-6 berorder 10 jika menggunakan faktor-2. Gambar tersebut memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_9$, titik $v_9$ terhubung langsung dengan titik $v_5$, titik $v_5$ terhubung langsung dengan titik $v_{10}$, titik $v_{10}$ terhubung langsung dengan titik $v_4$, titik $v_4$ terhubung langsung dengan titik

$v_6$, titik $v_6$ terhubung langsung dengan titik $v_3$, titik $v_3$ terhubung langsung dengan titik $v_7$, titik $v_7$ terhubung langsung dengan titik $v_2$, titik $v_2$ terhubung langsunng dengn titik $v_8$, titik $v_8$ terhubung langsung dengan titik $v_1$.

Jika $G_1$, $G_2$ dan $G_3$ adalah faktor-faktor graf beraturan-6 berorder 10 yang mana sisi-sisinya saling disjoint, sedemikian hingga $G_1 \oplus G_2 \oplus G_3 = G$ merupakan faktorisasi dari graf beraturan-6 berorder 10, yakni penjumlahan sisi dari faktor-faktornya.

Tabel 3.10 Faktorisasi graf beraturan-6 menggunakan faktor-2

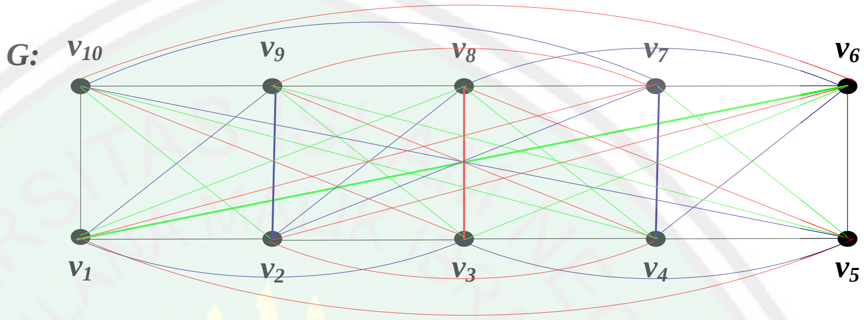
| $p(G)$ | $G$ beraturan-6 | $q(G)$ | Banyak faktor-2 |
|---|---|---|---|
| 8 | 6 | $\frac{8 \times 6}{2} = 24$ | $\frac{24}{8} = 3$ |
| 10 | | $\frac{10 \times 6}{2} = 30$ | $\frac{30}{10} = 3$ |
| $2n$ | | $6n$ | 3 |

Dari penjelasan diatas dapat ditarik kesimpulan bahwa graf beraturan-6 dengan order genap $(2n)$ dimana $n \geq 4$ dan $n \in \mathbb{N}$ memiliki faktor-2 sebanyak 3.

### 3.2.4 Graf Beraturan-8 dengan Order Genap

1. Graf beraturan-8 dengan order 10

Gambar graf beraturan-8 dengan order 10 sebagai berikut:




Gambar 3.120 Graf beraturan-8 berorder 10

Gambar 3.120 jika difaktorkan menggunakan faktor-2 akan diperoleh:

a. Faktor pertama

Sisi yang bewarna hitam pada gambar 3.120 adalah faktor pertama $(G_1)$ pada graf beraturan-8 berorder 10 jika menggunakan faktor-2. Gambar tersebut memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_2$, titik $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_3$, titik $v_3$ terhubung langsung dengan titik $v_4$, titik $v_4$ terhubung langsung dengan titik $v_5$, titik $v_5$ terhubung langsung dengan titik $v_6$, titik $v_6$ terhubung langsung dengan titik $v_7$, titik $v_7$ terhubung langsung dengan titik $v_8$, titik $v_8$ terhubung langsung dengan titik $v_9$, titik $v_9$ terhubung langsung dengan titik $v_{10}$, titik $v_{10}$ tetrhubung langsung dengan titik $v_1$.

b. Faktor kedua

Sisi yang bewarna hijau pada gambar 3.120 adalah faktor kedua $(G_2)$ pada graf beraturan-8 berorder 10 jika menggunakan faktor-2. Gambar tersebut memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_6$, titik $v_6$ terhubung langsung dengan titik $v_3$, titik $v_3$ terhubung langsung dengan titik $v_9$, titik $v_9$ terhubung langsung dengan titik $v_5$, titik $v_5$ terhubung langsung dengan titik $v_7$, titik $v_7$ terhubung langsung dengan titik $v_2$, titik $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_{10}$, titik $v_{10}$ terhubung langsung dengan titik $v_4$, titik $v_4$ terhubung langsung dengan titik $v_8$, titik $v_8$ terhubung langsung dengan titik $v_1$.

c. Faktor ketiga

Sisi yang bewarna merah pada gambar 3.120 adalah faktor ketiga $(G_3)$ pada graf beraturan-8 berorder 10 jika menggunakan faktor-2. Gambar tersebut memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_5$, titik $v_5$ terhubung langsung dengan titik $v_8$, titik $v_8$ terhubung langsung dengan titik $v_3$, titik $v_3$ terhubung langsung dengan titik $v_{10}$, titik $v_{10}$ terhubung langsung dengan titik $v_6$, titik $v_6$ terhubung langsung dengan titik $v_2$, titik $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_4$, titik $v_4$ terhubung langsung dengan titik

$v_9$, titik $v_9$ terhubung langsunng dengn titik $v_7$, titik $v_7$ terhubung langsung dengan titik $v_1$.

d. Faktor keempat

Sisi yang bewarna biru pada gambar 3.120 adalah faktor keempat $(G_4)$ pada graf beraturan-8 berorder 10 jika menggunakan faktor-2. Gambar tersebut memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_3$, titik $v_3$ terhubung langsung dengan titik $v_5$, titik $v_5$ terhubung langsung dengan titik $v_{10}$, titik $v_{10}$ terhubung langsung dengan titik $v_7$, titik $v_7$ terhubung langsung dengan titik $v_4$, titik $v_4$ terhubung langsung dengan titik $v_6$, titik $v_6$ terhubung langsung dengan titik $v_8$, titik $v_8$ terhubung langsung dengan titik $v_2$, titik $v_2$ terhubung langsunng dengn titik $v_9$, titik $v_9$ terhubung langsung dengan titik $v_1$.

Jika $G_1$, $G_2$, $G_3$ dan $G_4$ adalah faktor-faktor graf beraturan-8 berorder 10 yang mana sisi-sisinya saling disjoint, sedemikian hingga $G_1 \oplus G_2 \oplus G_3 \oplus G_4 = G$ merupakan faktorisasi dari graf beraturan-8 berorder 10, yakni penjumlahan sisi dari faktor-faktornya.

Dari proses pemfaktoran graf beraturan-$r$ $(r \geq 2)$ dengan order genap $(2n)$ dimana $n \geq 2$ dan $n \in \mathbb{N}$ yang memiliki faktor-2, diperoleh suatu pola sebagai berikut:

Table 3.11 Faktorisasi graf beraturan-*r* yang memiliki faktor-2

| $p(G)$ | $G$ beraturan-$r$ | $q(G)$ | Banyak faktor-2 |
|---|---|---|---|
| 4 | 2 | $\frac{4\times 2}{2}=4$ | $\frac{4}{4}=1$ |
| 6 | 2 | $\frac{6\times 2}{2}=6$ | $\frac{6}{6}=1$ |
|  | 4 | $\frac{6\times 4}{2}=12$ | $\frac{12}{6}=2$ |
| 8 | 2 | $\frac{8\times 2}{2}=8$ | $\frac{8}{8}=1$ |
|  | 4 | $\frac{8\times 4}{2}=16$ | $\frac{16}{8}=2$ |
|  | 6 | $\frac{8\times 6}{2}=24$ | $\frac{24}{8}=3$ |
| 10 | 2 | $\frac{10\times 2}{2}=10$ | $\frac{10}{10}=1$ |
|  | 4 | $\frac{10\times 4}{2}=20$ | $\frac{20}{10}=2$ |
|  | 6 | $\frac{10\times 6}{2}=30$ | $\frac{30}{10}=3$ |
|  | 8 | $\frac{10\times 8}{2}=40$ | $\frac{40}{10}=4$ |
| $2n$ | $2\le r\le 2n-2$, $r\equiv 0(\bmod 2)$ | $q(G)=nr$ | $\frac{1}{2}r$ |

**Teorema:**

Jika G graf beraturan-*r* dengan $2\le r\le 2n-2$ dengan syarat $r\equiv 0(\bmod 2)$ dan $p(G)=2n$ maka *G* memiliki faktor-2 sebanyak $\frac{1}{2}r$, untuk $n\ge 2$ dan $n\in \mathbb{N}$ .

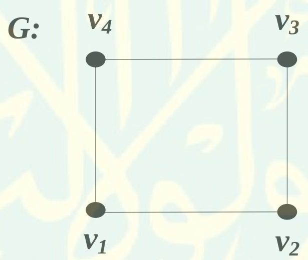
**Bukti:**

Diberikan $p(G)=2n$ dengan graf beraturan-*r* dimana $2 \le r \le 2n-2$ dengan syarat $r \equiv 0 (\bmod 2)$ dan $q(G)=nr$, untuk $n \ge 2$ dan $n \in \mathbb{N}$.

Akan dibuktikan jumlah faktor-2 adalah $\frac{1}{2}r$.

Teorema tersebut akan dibuktikan dengan menggunakan induksi matematika.

Ambil $n=2$ maka $p(G)=4$ sehingga memiliki graf beraturan-2 dengan $q(G)=4$, sehingga dapat digambarkan sebagai berikut:




Graf beraturan-2 $(C_4)$

Dari gambar tersebut dapat dilihat bahwa pada graf beraturan-2 setiap titik berderajat 2, sehingga setiap titik memiliki 2 pasang. Jika $p(G)=4$ maka 4x2=8 (Jumlah derajat graf beraturan-2).

Menurut teorema lemma jabat tangan jika $q(G)=4$ maka $\sum d_G(v)=8$.

Sehingga jumlah faktor-2 adalah $\frac{\sum d_G(v)}{2p(G)} = \frac{8}{8} = 1$.

$\therefore$ Untuk graf beraturan-2 dengan $p(G)=4$ memiliki faktor-2 sebanyak 1.

Jadi untuk $n=2$ benar.

Akan ditunjukkan jika untuk $n = k$ benar maka untuk $n = k+1$ juga benar.

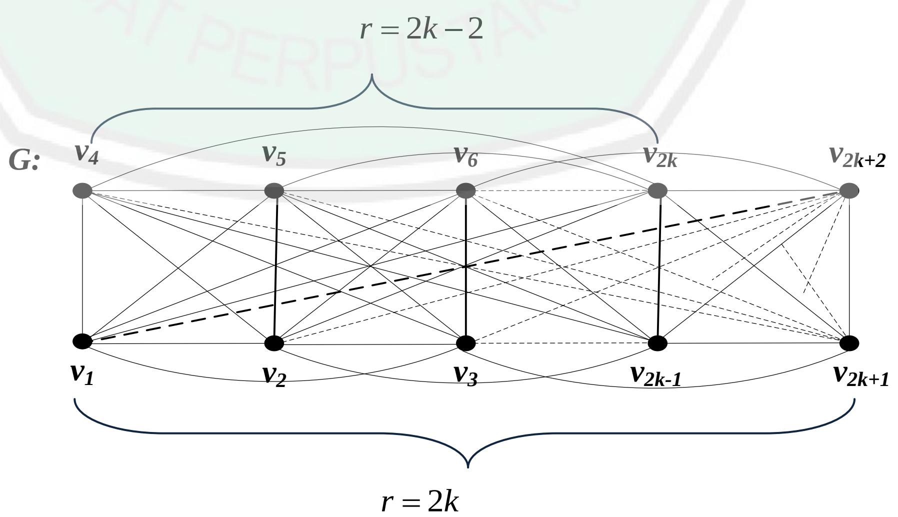
Asumsikan untuk $n = k$ benar. Artinya $p(G) = 2k$ dengan graf beraturan-$r$ dimana $2 \le r \le 2k-2$ dengan syarat $r \equiv 0(\bmod 2)$ dan $q(G) = kr$ maka memiliki faktor-2 sebanyak $\frac{1}{2}r$. Ambil $r$ yang minimal dan maksimal.

Untuk $r = 2$ maka jumlah faktor-2 adalah 1, benar

Untuk $r = 2k-2$ maka jumlah faktor-2 adalah $k-1$, dianggap benar.

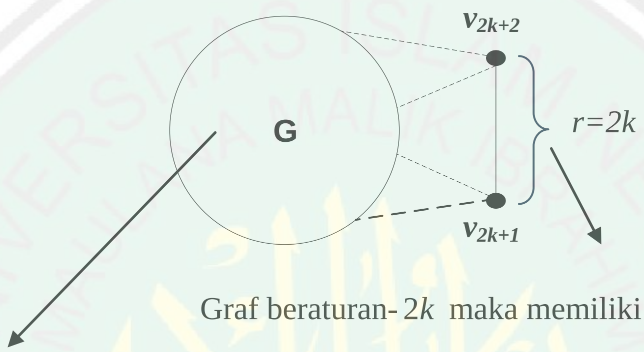
Akan ditunjukkan benar untuk $n = k+1$ maka $p(G) = 2(k+1)$ dengan graf beraturan-$r$ dimana $2 \le r \le 2(k+1)-2 = 2k$ dengan syarat $r \equiv 0 \bmod 2$ dan $q(G) = (k+1)r$.

Ilustrasi tersebut dapat digambar dengan mengambil graf beraturan-$r$ yang maksimal dimana $r = 2k-2$ dan $p(G) = 2k$ dengan menambah 2 titik sehingga $r = 2k$ dan $p(G) = 2k+2$.



Dari gambar tersebut dapat dilihat untuk $p(G)=2k$ dengan graf beraturan-$2k-2$ maka memiliki faktor-2 sebanyak $k-1$ (sesuai asumsi).

Untuk $p(G)=2k+2$ dengan graf beraturan-$2k$ maka memiliki faktor-2 sebanyak $k$, sesuai ilustrasi grambar sebagai berikut:




Graf beraturan-$2k$ maka memiliki faktor-2 sebanyak $k$

Graf beraturan-$2k-2$ maka memiliki faktor-2 sebanyak $k-1$

Sehingga diperoleh jumlah faktor-2 adalah

Jumlah faktor-2 $=k$

Jumlah faktor-2 $=k-1+1$

Jumlah faktor-2 = Jumlah faktor-2$+1$, dengan 1 adalah penambahan jumlah faktor-2 sebanyak 1.

$\therefore$ Jumlah faktor-2 = Jumlah faktor-2$\oplus(G_1)$

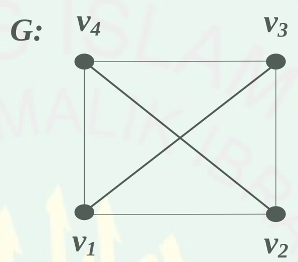
Sesuai prinsip induksi matematika, jika $p(G)=2n$ dengan beraturan-$r$ dimana $2\le r\le 2n-2$ dengan syarat $r\equiv 0 \bmod 2$ maka memiliki faktor-2 sebanyak $\frac{1}{2}r$, untuk $n\ge 2$ dan $n\in \mathbb{N}$.

## 3.3 Faktorisasi Graf beraturan-*r* yang Memiliki Faktor-3

### 3.3.1 Graf Beraturan-3 dengan Order Genap

1. Graf beraturan-3 dengan order 4

   Gambar graf beraturan-3 dengan order 4 sebagai berikut:

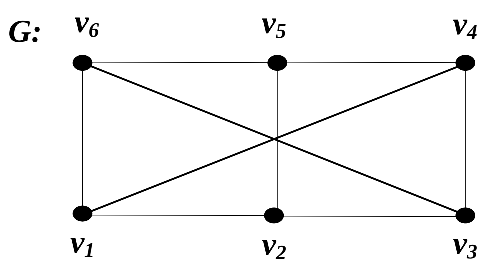



Gambar 3.121 Graf beraturan-3 berorder 4

   Gambar 3.121 memperlihatkan bahwa graf beraturan-3 berorder 4 memiliki 4 titik, yaitu $v_1, v_2, v_3$ dan $v_4$, dan memiliki 6 sisi. Faktor dari graf beraturan-3 berorder 4 adalah graf itu sendiri jika difaktorkan menggunakan faktor-3. Sehingga faktorisasi dari graf beraturan-3 berorder 4 adalah graf beraturan-3 berorder 4 itu sendiri tanpa di operasikan dengan graf lain.

2. Graf beraturan-3 dengan order 6

   Gambar graf beraturan-3 dengan order 6 sebagai berikut:

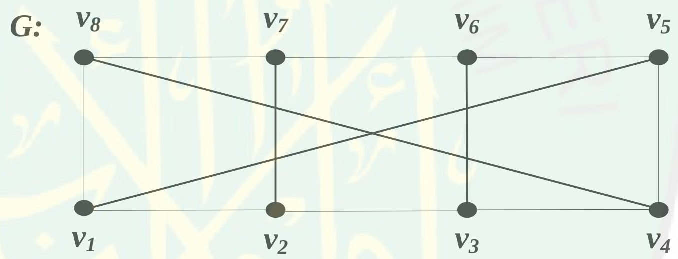



Gambar 3.122 Graf beraturan-3 berorder 6

Gambar 3.122 memperlihatkan bahwa graf beraturan-3 berorder 6 memiliki 6 titik, yaitu $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$ dan $v_6$, dan memiliki 9 sisi. Faktor dari graf beraturan-3 berorder 6 adalah graf itu sendiri jika difaktorkan menggunakan faktor-3. Sehingga faktorisasi dari graf beraturan-3 berorder 6 adalah graf beraturan-3 berorder 6 itu sendiri tanpa di operasikan dengan graf lain.

3. Graf beraturan-3 dengan order 8

   Gambar graf beraturan-3 dengan order 8 sebagai berikut:

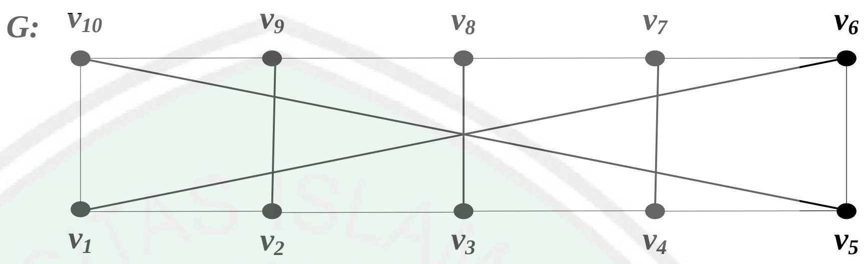



Gambar 3.123 Graf beraturan-3 berorder 8

Gambar 3.123 memperlihatkan bahwa graf beraturan-3 berorder 8 memiliki 8 titik, yaitu $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7$ dan $v_8$, dan memiliki 12 sisi. Faktor dari graf beraturan-3 berorder 8 adalah graf itu sendiri jika difaktorkan menggunakan faktor-3. Sehingga faktorisasi dari graf beraturan-3 berorder 8 adalah graf beraturan-3 berorder 8 itu sendiri tanpa di operasikan dengan graf lain.

4. Graf beraturan-3 dengan order 10

Gambar graf beraturan-3 dengan order 10 sebagai berikut:




Gambar 3.124 Graf beraturan-3 berorder 10

Gambar 3.124 memperlihatkan bahwa graf beraturan-3 berorder 10 memiliki 10 titik, yaitu $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9$ dan $v_{10}$, dan memiliki 15 sisi. Faktor dari graf beraturan-3 berorder 10 adalah graf itu sendiri jika difaktorkan menggunakan faktor-3. Sehingga faktorisasi dari graf beraturan-3 berorder 10 adalah graf beraturan-3 berorder 10 itu sendiri tanpa di operasikan dengan graf lain.

Tabel 3.12 Faktorisasi graf beraturan-3 menggunakan faktor-3

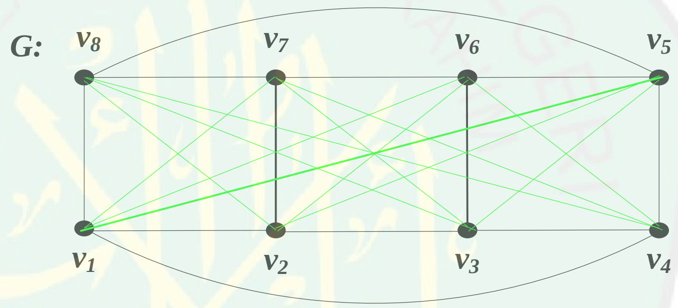
| $p(G)$ | $G$ beraturan-3 | $q(G)$ | Banyak faktor-3 |
|---|---|---|---|
| 4 | | $\frac{4\times 3}{2}=6$ | $\frac{6}{6}=1$ |
| 6 | | $\frac{6\times 3}{2}=9$ | $\frac{9}{9}=1$ |
| 8 | 3 | $\frac{8\times 3}{2}=12$ | $\frac{12}{12}=1$ |
| 10 | | $\frac{10\times 3}{2}=15$ | $\frac{15}{15}=1$ |
| $2n$ | | $3n$ | 1 |

Dari tabel 3.12 dapat ditarik kesimpulan bahwa graf beraturan-3 dengan order genap $(2n)$ dimana $n \geq 2$ dan $n \in \mathbb{N}$ memiliki faktor-3 sebanyak 1.

### 3.3.2 Graf Beraturan-6 dengan Order Genap

1. Graf beraturan-6 dengan order 8

Gambar graf beraturan-6 dengan order 8 sebagai berikut:




Gambar 3.125 Graf beraturan-6 berorder 8

Gambar 3.125 jika difaktorkan menggunakan faktor-3 akan diperoleh:

a. Faktor pertama

Sisi yang bewarna hitam pada gambar 3.125 adalah faktor pertama $(G_1)$ pada graf beraturan-6 berorder 8 jika menggunakan faktor-3. Gambar tersebut memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_2$, $v_4$ dan $v_8$, titik $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_1$, $v_3$ dan $v_7$, titik $v_3$ terhubung langsung dengan titik $v_2$, $v_4$ dan $v_6$, titik $v_4$ terhubung langsung dengan titik $v_1$, $v_3$ dan $v_5$, titik $v_5$ terhubung langsung dengan titik $v_4$, $v_6$, dan $v_8$, titik

$v_6$ terhubung langsung dengan titik $v_3$, $v_5$ dan $v_7$, titik $v_7$ terhubung langsung dengan titik $v_2$, $v_6$ dan $v_8$, titik $v_8$ terhubung langsung dengan titik $v_1$, $v_5$ dan $v_7$.

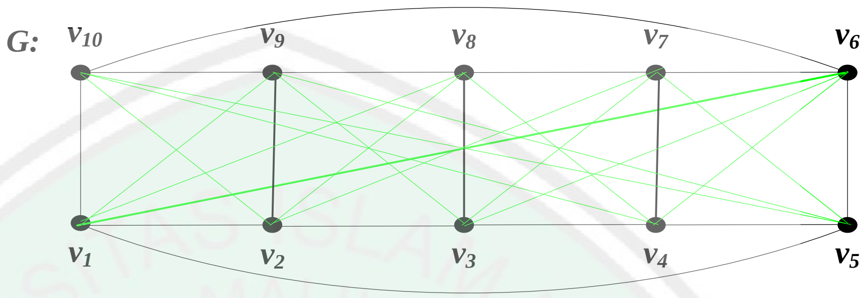
b. Faktor kedua

Sisi yang bewarna hijau pada gambar 3.125 adalah faktor kedua $(G_2)$ pada graf beraturan-6 berorder 8 jika menggunakan faktor-3. Gambar tersebut memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_5$, $v_6$ dan $v_7$, titik $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_5$, $v_6$ dan $v_8$, titik $v_3$ terhubung langsung dengan titik $v_5, v_7$ dan $v_8$, titik $v_4$ terhubung langsung dengan titik $v_6$, $v_7$ dan $v_8$, titik $v_5$ terhubung langsung dengan titik $v_1$, $v_2$ dan $v_3$, titik $v_6$ terhubung langsung dengan titik $v_1$, $v_2$ dan $v_4$, titik $v_7$ terhubung langsung dengan titik $v_1$, $v_3$ dan $v_4$, titik $v_8$ terhubung langsung dengan titik $v_2$, $v_3$ dan $v_4$.

Jika $G_1$ dan $G_2$ adalah faktor-faktor graf beraturan-6 berorder 8 yang mana sisi-sisinya saling disjoint, sedemikian hingga $G_1 \oplus G_2 = G$ merupakan faktorisasi dari graf beraturan-6 berorder 8, yakni penjumlahan sisi dari faktor-faktornya.

2. Graf beraturan-6 dengan order 10

Gambar graf beraturan-6 dengan order 10 sebagai berikut:




Gambar 3.126 Graf beraturan-6 berorder 10

Gambar 3.126 jika difaktorkan menggunakan faktor-3 akan diperoleh:

a. Faktor pertama

Sisi yang bewarna hitam pada gambar 3.126 adalah faktor pertama $(G_1)$ pada graf beraturan-6 berorder 10 jika menggunakan faktor-3. Gambar tersebut memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_2, v_5$ dan $v_{10}$, titik $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_1, v_3$ dan $v_9$, titik $v_3$ terhubung langsung dengan titik $v_2, v_4$ dan $v_8$, titik $v_4$ terhubung langsung dengan titik $v_3$, $v_5$ dan $v_7$, titik $v_5$ terhubung langsung dengan titik $v_1$, $v_4$, dan $v_6$, titik $v_6$ terhubung langsung dengan titik $v_5$, $v_7$ dan $v_{10}$, titik $v_7$ terhubung langsung dengan titik $v_4$, $v_6$ dan $v_8$, titik $v_8$ terhubung langsung dengan titik $v_3$, $v_7$ dan $v_9$, titik $v_9$ terhubung langsung dengan titik $v_2$, $v_8$ dan $v_{10}$, titik $v_{10}$ terhubung langsung dengan titik $v_1$, $v_6$ dan $v_9$.

b. Faktor kedua

Sisi yang bewarna hijau pada gambar 3.126 adalah faktor kedua $(G_2)$ pada graf beraturan-6 berorder 10 jika menggunakan faktor-3. Gambar tersebut memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_6, v_8$ dan $v_9$, titik $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_7, v_8$ dan $v_{10}$, titik $v_3$ terhubung langsung dengan titik $v_6, v_7$ dan $v_9$, titik $v_4$ terhubung langsung dengan titik $v_6$, $v_8$ dan $v_{10}$, titik $v_5$ terhubung langsung dengan titik $v_7$, $v_9$ dan $v_{10}$, titik $v_6$ terhubung langsung dengan titik $v_1$, $v_3$ dan $v_4$, titik $v_7$ terhubung langsung dengan titik $v_2$, $v_3$ dan $v_5$, titik $v_8$ terhubung langsung dengan titik $v_1$, $v_2$ dan $v_4$, titik $v_9$ terhubung langsung dengan titik $v_1$, $v_7$ dan $v_5$, titik $v_{10}$ terhubung langsung dengan titik $v_2$, $v_4$ dan $v_5$.

Jika $G_1$ dan $G_2$ adalah faktor-faktor graf beraturan-6 berorder 10 yang mana sisi-sisinya saling disjoint, sedemikian hingga $G_1 \oplus G_2 = G$ merupakan faktorisasi dari graf beraturan-6 berorder 10, yakni penjumlahan sisi dari faktor-faktornya.

Tabel 3.13 Faktorisasi graf beraturan-6 menggunakan faktor-3

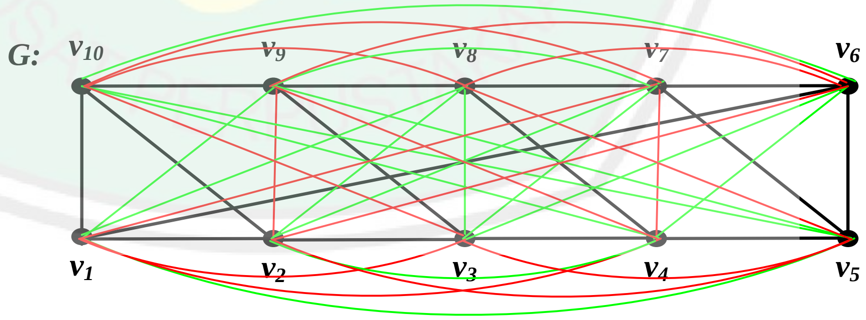
| $p(G)$ | $G$ beraturan-6 | $q(G)$ | Banyak faktor-3 |
|---|---|---|---|
| 8 | 6 | $\frac{8\times6}{2}=24$ | $\frac{24}{12}=2$ |
| 10 | | $\frac{10\times6}{2}=30$ | $\frac{30}{15}=2$ |
| $2n$ | | $6n$ | 2 |

Dari tabel 3.13 dapat ditarik kesimpulan bahwa graf beraturan-6 dengan order genap $(2n)$ dimana $n \geq 4$ dan $n \in \mathbb{N}$ memiliki faktor-3 sebanyak 2.

### 3.3.3 Graf Beraturan-9 dengan Order Genap

Graf beraturan-9 dengan order 10

Gambar graf beraturan-9 dengan order 10 sebagai berikut:




Gambar 3.127 Graf beraturan-9 berorder 10

Gambar 3.127 jika difaktorkan menggunakan faktor-3 akan diperoleh:

a. Faktor pertama

Sisi yang bewarna hitam pada gambar 3.127 adalah faktor pertama $(G_1)$ pada graf beraturan-9 berorder 10 jika menggunakan faktor-3. Gambar tersebut memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_2, v_6$ dan $v_{10}$, titik $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_1, v_3$ dan $v_{10}$, titik $v_3$ terhubung langsung dengan titik $v_2, v_4$ dan $v_9$, titik $v_4$ terhubung langsung dengan titik $v_3$, $v_5$ dan $v_8$, titik $v_5$ terhubung langsung dengan titik $v_4$, $v_6$, dan $v_7$, titik $v_6$ terhubung langsung dengan titik $v_1$, $v_5$ dan $v_7$, titik $v_7$ terhubung langsung dengan titik $v_5$, $v_6$ dan $v_8$, titik $v_8$ terhubung langsung dengan titik $v_4$, $v_7$ dan $v_9$, titik $v_9$ terhubung langsung dengan titik $v_3$, $v_8$ dan $v_{10}$, titik $v_{10}$ terhubung langsung dengan titik $v_1$, $v_2$ dan $v_9$.

b. Faktor kedua

Sisi yang bewarna hijau pada gambar 3.127 adalah faktor kedua $(G_2)$ pada graf beraturan-9 berorder 10 jika menggunakan faktor-3. Gambar tersebut memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_5, v_8$ dan $v_9$, titik $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_4$, $v_7$ dan $v_8$, titik $v_3$ terhubung langsung dengan titik $v_6, v_7$ dan $v_8$, titik $v_4$ terhubung langsung dengan titik $v_3$, $v_6$ dan $v_{10}$, titik $v_5$ terhubung langsung dengan titik $v_1$, $v_9$ dan $v_{10}$, titik $v_6$

terhubung langsung dengan titik $v_3$, $v_4$ dan $v_{10}$, titik $v_7$ terhubung langsung dengan titik $v_2$, $v_3$ dan $v_9$, titik $v_8$ terhubung langsung dengan titik $v_1$, $v_2$ dan $v_3$, titik $v_9$ terhubung langsung dengan titik $v_1$, $v_7$ dan $v_5$, titik $v_{10}$ terhubung langsung dengan titik $v_4$, $v_5$ dan $v_6$.

c. Faktor ketiga

Sisi yang bewarna merah pada gambar 3.127 adalah faktor ketiga $(G_3)$ pada graf beraturan-9 berorder 10 jika menggunakan faktor-3. Gambar tersebut memperlihatkan bahwa titik $v_1$ terhubung langsung dengan titik $v_3, v_4$ dan $v_7$, titik $v_2$ terhubung langsung dengan titik $v_5$, $v_6$ dan $v_9$, titik $v_3$ terhubung langsung dengan titik $v_1, v_5$ dan $v_{10}$, titik $v_4$ terhubung langsung dengan titik $v_1$, $v_7$ dan $v_9$, titik $v_5$ terhubung langsung dengan titik $v_2$, $v_3$ dan $v_8$, titik $v_6$ terhubung langsung dengan titik $v_2$, $v_8$ dan $v_9$, titik $v_7$ terhubung langsung dengan titik $v_1$, $v_4$ dan $v_{10}$, titik $v_8$ terhubung langsung dengan titik $v_5$, $v_6$ dan $v_{10}$, titik $v_9$ terhubung langsung dengan titik $v_2$, $v_4$ dan $v_6$, titik $v_{10}$ terhubung langsung dengan titik $v_3$, $v_7$ dan $v_8$.

Jika $G_1$, $G_2$ dan $G_3$ adalah faktor-faktor graf beraturan-9 berorder 10 yang mana sisi-sisinya saling disjoint, sedemikian hingga

$G_1 \oplus G_2 \oplus G_3 = G$ merupakan faktorisasi dari graf beraturan-9 berorder 10, yakni penjumlahan sisi dari faktor-faktornya.

Dari proses pemfaktoran graf beraturan-$r$ dengan order genap $(2n)$ dimana $n \geq 2$ dan $n \in \mathbb{N}$ menggunakan faktor-3, diperoleh suatu pola sebagai berikut:

Tabel 3.14 Faktorisasi graf beraturan-$r$ yang memiliki faktor-3

| $p(G)$ | $G$ beraturan-$r$ | $q(G)$ | Banyak faktor-3 |
|---|---|---|---|
| 4 | 3 | $\frac{4\times 3}{2}=6$ | $\frac{6}{6}=1$ |
| 6 | 3 | $\frac{6\times 3}{2}=9$ | $\frac{9}{9}=1$ |
| 8 | 3 | $\frac{8\times 3}{2}=12$ | $\frac{12}{12}=1$ |
| | 6 | $\frac{8\times 6}{2}=24$ | $\frac{24}{12}=2$ |
| 10 | 3 | $\frac{10\times 3}{2}=15$ | $\frac{15}{15}=1$ |
| | 6 | $\frac{10\times 6}{2}=30$ | $\frac{30}{15}=2$ |
| | 9 | $\frac{10\times 9}{2}=45$ | $\frac{45}{15}=3$ |
| $2n$ | $3 \leq r \leq 2n-1$, $r \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3)$ | $nr$ | $\frac{1}{3}r$ |
| | $3 \leq r \leq 2n-3$, $r \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3)$ | | |
| | $3 \leq r \leq 2n-2$, $r \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3)$ | | |

**Teorema:**

Jika G graf beraturan-*r* dengan

$3 \le r \le 2n-1,\ n = 2+3p$ untuk $p \ge 0$

$3 \le r \le 2n-3,\ n = 3+3p$ untuk $p \ge 0$

$3 \le r \le 2n-2,\ n = 0+3p$ untuk $p \ge 0$

Dengan syarat $r \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3)$

dan $p(G) = 2n$ maka $G$ memiliki faktor-3 sebanyak $\frac{1}{3}r$. Untuk $n \ge 2$ dan $n \in \mathbb{N}$.

**Bukti:**

Diberikan $p(G) = 2n$ dengan graf beraturan-*r* dimana

$3 \le r \le 2n-1,\ n = 2+3p$ untuk $p \ge 0$

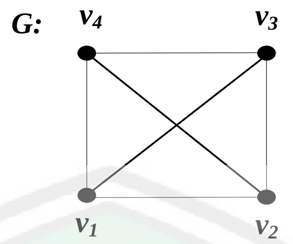
$3 \le r \le 2n-3,\ n = 3+3p$ untuk $p \ge 0$

$3 \le r \le 2n-2,\ n = 0+3p$ untuk $p \ge 0$

Dengan syarat $r \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3)$, dan sisi sebanyak $nr$, untuk $n \ge 2$ dan $n \in \mathbb{N}$.

Teorema tersebut akan dibuktikan dengan menggunakan induksi matematika.

Ambil $n = 2$ maka $p(G) = 4$ sehingga memiliki graf beraturan-3 dengan $q(G) = 6$, sehingga dapat digambarkan sebagai berikut:




Graf beraturan-3

Dari gambar tersebut dapat dilihat bahwa pada graf beraturan-3 setiap titik berderajat 3, sehingga setiap titik memiliki 3 pasang. Jika $p(G)=4$ maka 4x3=12 (Jumlah derajat graf beraturan-3).

Menurut teorema lemma jabat tangan jika $q(G)=6$ maka $\sum d_G(v)=12$.

Sehingga jumlah faktor-3 adalah $\frac{\sum d_G(v)}{3p(G)}=\frac{12}{12}=1$.

$\therefore$ Untuk graf beraturan-3 dengan $p(G)=4$ memiliki faktor-3 sebanyak 1.

Jadi untuk $n=2$ benar.

Akan ditunjukkan jika untuk $n=k$ benar maka untuk $n=k+1$ juga benar.

1. Untuk graf beraturan-*r* dengan $3 \le r \le 2k-1$

   Asumsikan untuk $n=k$ benar. Artinya $p(G)=2k$ dengan graf beraturan-*r* dimana $3 \le r \le 2k-1$, $k=2+3p$ untuk $p \ge 0$, dengan syarat $r \equiv 0 (\bmod 3)$, dan sisi sebanyak $kr$ maka memiliki faktor-3 sebanyak $\frac{1}{3}r$.

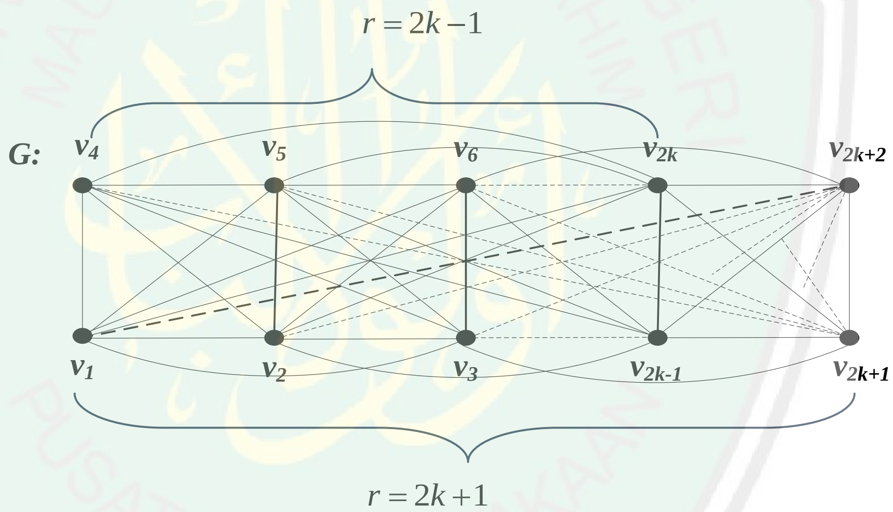
   Ambil *r* yang minimal dan maksimal.

   Untuk $r=3$ maka jumlah faktor-3 adalah 1, benar

   Untuk $r=2k-1$ maka jumlah faktor-3 adalah $\frac{2k-1}{3}$, dianggap benar

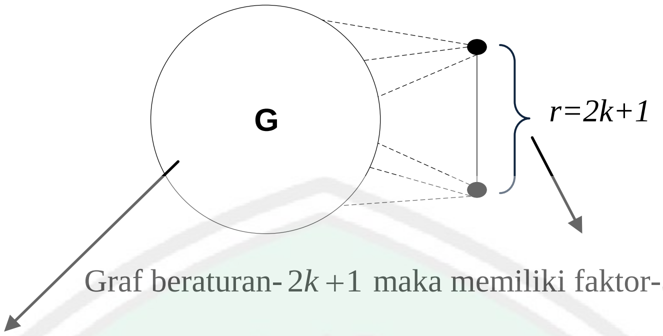
Akan ditunjukkan benar untuk $n = k + 1$ maka $p(G) = 2(k+1)$ dengan graf beraturan-$r$ dimana $3 \le r \le 2(k+1) - 1 = 2k+1$, $k = 1 + 3p$ untuk $p \ge 0$, dengan syarat $r \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3)$ dan sisi sebanyak $(k+1)r = kr + r$.

Ilustrasi tersebut dapat digambar dengan mengambil graf beraturan-$r$ yang maksimal dimana $r = 2k-1$ dan $p(G) = 2k$ dengan menambah 2 titik sehingga $r = 2k+1$ dan $p(G) = 2k+2$.




Dari gambar tersebut dapat dilihat untuk $p(G) = 2k$ dengan graf beraturan-$2k-1$, $k = 2 + 3p$ untuk $p \ge 0$ maka memiliki faktor-3 sebanyak $\frac{2k-1}{3}$ (sesuai asumsi).

Untuk $p(G) = 2k+2$ dengan graf beraturan-$2k+1$, $k = 1 + 3p$ $(p \ge 0)$ maka memiliki faktor-3 sebanyak $\frac{2k+1}{3}$, sesuai ilustrasi grambar sebagai berikut:




Graf beraturan-$2k+1$ maka memiliki faktor-3 sebanyak $\frac{2k+1}{3}$

Graf beraturan-$2k-1$ maka memiliki faktor-3 sebanyak $\frac{2k-1}{3}$

2. Untuk graf beraturan-*r* dengan $3 \le r \le 2k-3$

Asumsikan untuk $n=k$ benar. Artinya $p(G)=2k$ dengan graf beraturan-*r* dimana $3 \le r \le 2k-3$, $k=3+3p$ untuk $p \ge 0$, dengan syarat $r \equiv 0(\mathrm{mod}\, 3)$, dan sisi sebanyak $kr$ maka memiliki faktor-3 sebanyak $\frac{1}{3}r$.

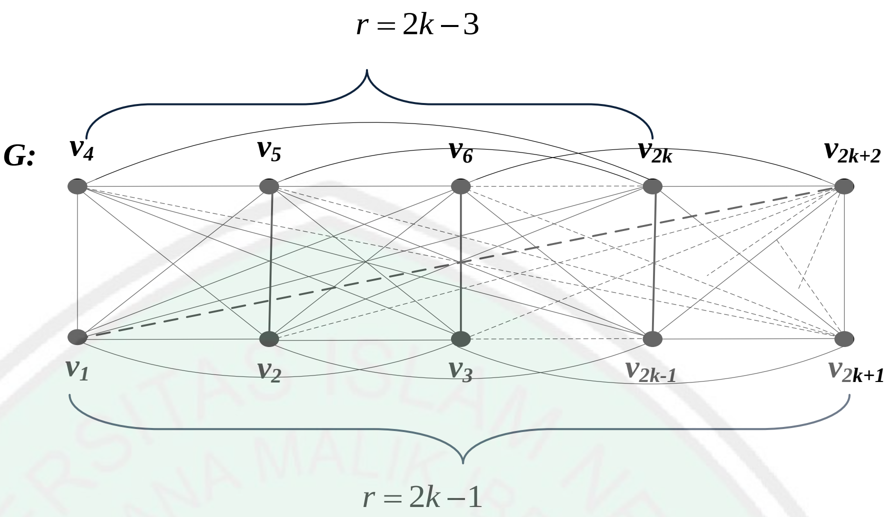
Ambil *r* yang minimal dan maksimal.

Untuk $r=3$ maka jumlah faktor-3 adalah 1, benar

Untuk $r=2k-3$ maka jumlah faktor-3 adalah $\frac{2k-3}{3}$, dianggap benar

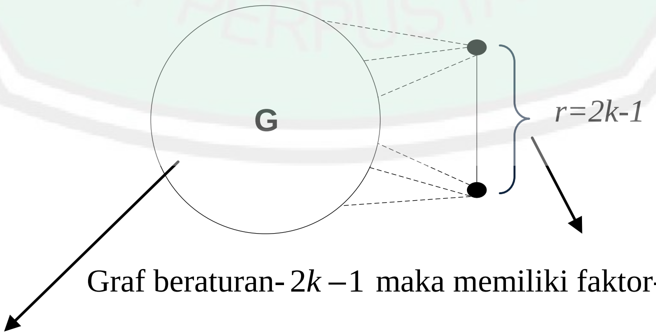
Akan ditunjukkan benar untuk $n=k+1$ maka $p(G)=2(k+1)$ dengan graf beraturan-*r* dimana $3 \le r \le 2(k+1)-3 = 2k-1$, $k=2+3p$ untuk $p \ge 0$, dengan syarat $r \equiv 0(\mathrm{mod}\, 3)$ dan sisi sebanyak $(k+1)r = kr + r$.

Ilustrasi tersebut dapat digambar dengan mengambil graf beraturan-*r* yang maksimal dimana $r=2k-3$ dan $p(G)=2k$ dengan menambah 2 titik sehingga $r=2k-1$ dan $p(G)=2k+2$.




Dari gambar tersebut dapat dilihat untuk $p(G) = 2k$ dengan graf beraturan-$2k-3$, $k = 3+3p$ untuk $p \geq 0$ maka memiliki faktor-3 sebanyak $\frac{2k-3}{3}$ (sesuai asumsi).

Untuk $p(G) = 2k+2$ dengan graf beraturan-$2k-1$, $k = 2+3p$ ($p \geq 0$) maka memiliki faktor-3 sebanyak $\frac{2k-1}{3}$, sesuai ilustrasi grambar sebagai berikut:




Graf beraturan-$2k-1$ maka memiliki faktor-3 sebanyak $\frac{2k-1}{3}$

Graf beraturan-$2k-3$ maka memiliki faktor-3 sebanyak $\frac{2k-3}{3}$

3. Untuk graf beraturan-*r* dengan $3 \le r \le 2k-2$

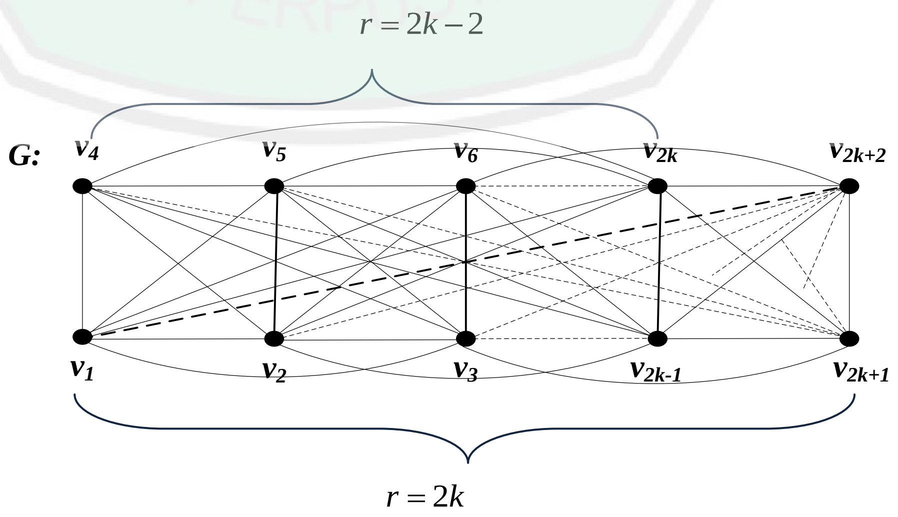
Asumsikan untuk $n = k$ benar. Artinya $p(G) = 2k$ dengan graf beraturan-*r* dimana $3 \le r \le 2k-2$, $k = 0+3p$ untuk $p \ge 0$, dengan syarat $r \equiv 0(\bmod 3)$, dan sisi sebanyak $kr$ maka memiliki faktor-3 sebanyak $\frac{1}{3}r$. Ambil *r* yang minimal dan maksimal.

Untuk $r = 3$ maka jumlah faktor-3 adalah 1, benar

Untuk $r = 2k-2$ maka jumlah faktor-3 adalah $\frac{2k-2}{3}$, dianggap benar

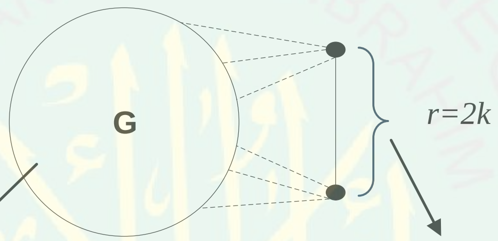
Akan ditunjukkan benar untuk $n = k+1$ maka $p(G) = 2(k+1)$ dengan graf beraturan-*r* dimana $3 \le r \le 2(k+1)-2 = 2k$, $k = 3+3p$ untuk $p \ge 0$, dengan syarat $r \equiv 0(\bmod 3)$ dan sisi sebanyak $(k+1)r = kr + r$.

Ilustrasi tersebut dapat digambar dengan mengambil graf beraturan-*r* yang maksimal dimana $r = 2k-2$ dan $p(G) = 2k$ dengan menambah 2 titik sehingga $r = 2k$ dan $p(G) = 2k+2$.



Dari gambar tersebut dapat dilihat untuk $p(G)=2k$ dengan graf beraturan-$2k-2$, $k=0+3p$ untuk $p\geq 0$ maka memiliki faktor-3 sebanyak $\frac{2k-2}{3}$ (sesuai asumsi).

Untuk $p(G)=2k+2$ dengan graf beraturan-$2k$, $k=3+3p$ $(p\geq 0)$ maka memiliki faktor-3 sebanyak $\frac{2k}{3}$, sesuai ilustrasi grambar sebagai berikut:




Graf beraturan-$2k$ maka memiliki faktor-3 sebanyak $\frac{2k}{3}$

Graf beraturan-$2k-2$ maka memiliki faktor-3 sebanyak $\frac{2k-2}{3}$

Sesuai prinsip induksi matematika, jika $p(G)=2n$ dengan graf beraturan-*r* dimana

$3\leq r\leq 2n-1$, $n=2+3p$ untuk $p\geq 0$

$3\leq r\leq 2n-3$, $n=3+3p$ untuk $p\geq 0$

$3\leq r\leq 2n-2$, $n=0+3p$ untuk $p\geq 0$

dengan syarat $r\equiv 0(\bmod 3)$ maka maka memiliki faktor-3 sebanyak $\frac{1}{3}r$, untuk $n\geq 2$ dan $n\in\mathbb{N}$.

# BAB IV

# PENUTUP

## 4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan Bab III, maka dapat diambil kesimpulan, antara lain:

1. Pola umum untuk menentukan jumlah faktor-faktor dari graf beraturan-*r* $(r \geq 2)$ dengan $2 \leq r \leq 2n-1$ dan order genap maka memiliki faktor-1 sebanyak $r$. Untuk $n \geq 2$ dan $n \in \mathbb{N}$.
2. Pola umum untuk menentukan jumlah faktor-faktor dari graf beraturan-*r* dimana $2 \leq r \leq 2n-2$ dengan syarat $r \equiv 0 (\bmod 2)$ dan order genap maka memiliki faktor-2 sebanyak $\frac{1}{2}r$. Untuk $n \geq 2$ dan $n \in \mathbb{N}$.
3. Pola umum untuk menentukan jumlah faktor-faktor dari graf beraturan-*r* dimana: $3 \leq r \leq 2n-1$, $n = 2+3p$ untuk $p \geq 0$

   $3 \leq r \leq 2n-3$, $n = 3+3p$ untuk $p \geq 0$

   $3 \leq r \leq 2n-2$, $n = 0+3p$ untuk $p \geq 0$

   dengan syarat $r \equiv 0 (\bmod 3)$, dan order genap maka memiliki faktor-3 sebanyak $\frac{1}{3}r$. Untuk $n \geq 2$ dan $n \in \mathbb{N}$.

## 4.2 Saran

Hasil penelitian tentang faktorisasi graf beraturan-*r* dengan order genap ini bisa dilanjutkan kajiannya oleh peneliti selanjutnya, yaitu mengenai graf beraturan-r dengan order ganjil sampai faktor ke-*n* dengan $n \in \mathbb{N}$ . selain itu, berdasarkan permasalahan-permasalahan yang muncul di luar fokus kajian ini, diharapkan bisa menjadi inspirasi bagi pengembangan ilmu matematika, khususnya teori graf.

## DAFTAR PUSTAKA


Abyan, H. Amir. 1993. *Fiqih*. Semarang: CV. Toha Putra.

Bondi, J. A and Murti, U. S. R. 1982. *Graph Theori with Application*. New York: Elsevier Science Publishing Co, Inc.

Chartrand, Gary and Lesniak, Linda. 1986. *Graphs and Digraphs*. California: a Division of Wadsworth, Inc.

Chartrand, Gary and Ortrud, R.O. 1993. *Applied and Algorithmic Graph Theory*. New York: Mc Graw-Hill, Inc.

Falaqiyah, A. 2004. *Pelabelan Total Titik Ajaib pada Graf Komplit*. Skripsi.

Hasan, Iqbal. 2002. *Metodologi Penelitian dan Aplikasinya.* Jakarta: Ghalia Indonesia

Lipschutz, Seymour dan Lipson, Marc Lars. 2002. *Matematika Diskrit 2*. Jakarta: Salemba tentika.

Munir, Rinaldi. 2005. *Matematika Diskrit edisi Ketiga*. Bandung: Informatika Bandung.

Purwanto. 1998. *Matematika Diskrit*. Malang: Ikip Malang.

Thalib, Sajuti. 2002. *Hukum Kewarisan Islam di Indonesia*. Jakarta: Sinar Grafika.

Wati, *Sutrisna*. 2006. Digraf Eksentrik Dari Graf Tangga $L_n$ Dan Graf Bipartisi Lengkap $K_{m,n}$. Universitas Muhammadiyah Malang: Skripsi, tidak diterbitkan.

Wilson. Robin J dan Walkins, John J. 1990. *Graphs An Introductory Approach*: *A first* Course *in Discrete Mathematic*. New York: John Wiley & Sons, Inc.

KEMENTRIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN)
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
# FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jln. Gajayana No. 50 Malang Telp. (0341) 551354 Fax. (0341) 572533

## BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Asna Bariroh
NIM : 06510013
Fakultas/ Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Fktorisasi Graf Beraturan-r dengan Order Genap
Pembimbing I : Wahyu Henky Irawan, M.Pd
Pembimbing II : Dr. Ahmad Barizi M.A

| No | Tanggal | Hal yang Dikonsultasikan | Tanda Tangan | |
|---|---|---|---|---|
| 1. | 20 Desember 2009 | Konsultasi Masalah | 1. | |
| 2. | 12 Januari 2010 | Konsultasi BAB III | | 2. |
| 3. | 24 Maret 2010 | Konsultasi BAB I, II | 3. | |
| 4. | 9 April 2010 | Konsultasi Agama BAB I, II | | 4. |
| 5. | 13 April 2010 | Revisi BAB I, II | 5. | |
| 6. | 7 Mei 2010 | Konsultasi BAB III | | 6. |
| 7. | 22 Mei 2010 | Revisi BAB III | 7. | |
| 8. | 10 Juni 2010 | Konsultasi BAB III | | 8. |
| 9. | 18 Juni 2010 | Konsultasi BAB III | 9. | |
| 10. | 28 Juni 2010 | Konsultasi BAB I, II, III | | 10. |
| 11. | 1 Juli 2010 | Revisi Keagamaan | 11. | |
| 12. | 6 Juli 2010 | Revisi Keseluruhan | | 12. |

Malang, 07 Juli 2010

Mengetahui
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP.19751006 200312 1 001