# PELABELAN SUPER SISI AJAIB PADA GRAF-GRAF STAR DENGAN TITIK PUSAT TERHUBUNG OLEH SATU TITIK PENGAIT

SKRIPSI

Oleh:

LIYA FITROTUL CHUSNA
NIM: 07610055

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2011

**PELABELAN SUPER SISI AJAIB PADA GRAF-GRAF STAR DENGAN TITIK PUSAT TERHUBUNG OLEH SATU TITIK PENGAIT**

**SKRIPSI**

**Diajukan kepada:**

**Fakultas Sains dan Teknologi**

**Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahin Malang**

**Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam**

**Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)**

**Oleh:**

**LIYA FITROTUL CHUSNA**

**NIM. 07610055**

**JURUSAN MATEMATIKA**

**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**

**UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM**

**MALANG**

**2011**

**Pelabelan Super Sisi Ajaib Pada Graf-Graf Star dengan Titik Pusat Terhubung oleh Satu Titik Pengait**

**SKRIPSI**

**Oleh:**

**LIYA FITROTUL CHUSNA**
**NIM. 07610055**

**Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji**

**Tanggal: 05 Januari 2011**

**Pembimbing I,**

**Abdussakir, M.Pd**
**NIP. 19751006 200312 1 001**

**Pembimbing II,**

**Dr. H. Ahmad Barizi, M.A**
**NIP. 19731212 199803 1 001**

**Mengetahui,**
**Ketua Jurusan Matematika**

**Abdussakir, M.Pd**
**NIP. 19751006 200312 1 001**

**PELABELAN SUPER SISI AJAIB PADA GRAF-GRAF STAR DENGAN TITIK PUSAT TERHUBUNG OLEH SATU TITIK PENGAIT**

**SKRIPSI**

**Oleh:**
**Liya Fitrotul Chusna**
**NIM. 0761055**

**Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi**
**dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan**
**Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)**
**Tanggal: 21 Januari 2011**

| Susunan Dewan Penguji | | Tanda Tangan |
|---|---|---|
| 1. Penguji Utama | : Wahyu Henky Irawan, M.Pd<br>NIP. 19751006 200312 1 001 | ____________ |
| 2. Ketua Penguji | : Abdul Aziz, M.Si<br>NIP. 19760318 200604 1 002 | ____________ |
| 3. Sekretaris Penguji | : Abdussakir, M.Pd<br>NIP. 19751006 200312 1 001 | ____________ |
| 4. Anggota Penguji | : Dr. H. Ahmad Barizi, M.A<br>NIP. 19731212 199803 1 001 | ____________ |

**Mengesahkan,**
**Ketua Jurusan Matematika,**

**Abdussakir, M.Pd**
**NIP. 19751006 200312 1 001**

## PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Liya Fitrotul Chusna

NIM : 07610055

Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika

Judul Penelitian : Pelabelan Super Sisi Ajaib Pada Graf Star ($S_n$) dengan Titik Pusat Terhubung Oleh Satu Titik Pengait

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 02 Januari 2011

Yang membuat pernyataan,

Liya Fitrotul Chusna

NIM. 07610055

**PERSEMBAHAN**

**Karya ini tidaklah dapat terwujud tanpa ridho dari Allah SWT.**

**Terimakasih ya Allah dengan segala keterbatasan hamba ini, Engkau beri kesempatan untuk mempersembahkan karya yang sederhana ini.**

**Dengan iringan do'a dan rasa syukur yang teramat besar karya ini penulis persembahkan sebagai cinta kasih dan bakti penulis untuk:**

**Umi Sri Hidayati dan Abi Ashari, Kakak Miftahul Ghufron dan Rofikul Masna, Adik Gita Qumil Laila**

**Terimakasih atas segala ketulusan do'a, nasehat, kasih sayang dan slalu menjadi motivator serta penyemangat dalam setiap langkah penulis untuk terus berproses menjadi insan kamil.**

## MOTTO

Ilmu itu lebih baik daripada harta.

Ilmu akan menjaga engkau dan engkau menjaga harta.

Ilmu itu penghukum (hakim) sedangkan harta terhukum.

Kalau harta itu akan berkurang apabila dibelanjakan, tetapi

ilmu akan bertambah apabila dibelanjakan.

*(Sayidina Ali bin Abi Thalib)*

## KATA PENGANTAR

*Bismillahirrohmaanirrohiim*

*Alhamdulillahirobbil'alamiin…* segala puji dan syukur bagi Allah, yang telah memberikan rahmat kepada semua makhluk di bumi, yang Maha Perkasa dan Maha Bijaksana, penguasa alam semesta yang telah memberikan kekuatan dan bimbingan kepada penulis sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis ini.

Shalawat serta salam semoga senantiasa terlantunkan kepada Nabi Muhammad SAW yang telah membimbing kita ke jalan yang lurus dan jalan yang diridhoi-Nya yakni agama islam.

Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu persyaratan guna memperoleh gelar strata satu Sarjana Sains (S.Si) di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Berkat bantuan, bimbingan dan dorongan dari berbagai pihak, maka penulis mengucapkan banyak terima kasih serta ucapan doa, semoga Allah SWT membalas semua kebaikan dan menyinari jalan yang diridhoi-Nya, khususnya kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU, DSc selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.

3. Abdussakir, M.Pd, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang, sekaligus pembimbing penulis dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Atas bimbingan, arahan, saran, motivasi dan kesabarannya, sehingga penulis dapat menyelesaikan ini dengan baik, penulis sampaikan *Jazakumullah Ahsanal Jaza'*.
4. Dr. H. Ahmad Barizi M.A selaku pembimbing penulis dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Atas bimbingan, arahan, saran, motivasi dan kesabarannya, sehingga penulis dapat menyelesaikan ini dengan baik, penulis sampaikan *Jazakumullah Ahsanal Jaza'*.
5. Seluruh dosen Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang, yang telah mendidik, membimbing, mengajarkan dan mencurahkan ilmu-ilmunya kepada penulis. Semoga Allah membalas amal kebaikan Beliau.
6. Umi Sri Hidayati dan Abi Ashari tercinta, yang telah mencurahkan cinta dan kasih-sayang teriring do'a, motivasi, dan materi, sehingga penulis selalu optimis dalam menggapai kesuksesan hidup.
7. Kedua kakak penulis, Miftahul Ghufron dan Rofikul Masna tersayang, dan adik penulis, Gita Qumil Laila yang telah memberikan dukungan, doa, motivasi dan materi bagi penulis.
8. Akhi Ivan Pacivi, yang telah memberikan penyemangat dan motivasi bagi penulis untuk terus berproses menjadi insan kamil.

9. Teman-teman terbaik penulis, Lailiatul, Faridha, Dini, Diyah dan seluruh teman-teman jurusan matematika khususnya angkatan 2007 yang berjuang bersama-sama untuk mencapai kesuksesan yang diimpikan. Terimakasih atas segala pengalaman berharga dan kenangan terindah yang telah terukir.
10. Sahabat setia penulis, Syahidah Masroh, dan semua Sahabat penulis di Miftahul Huda yang telah memberikan motivasi serta mengajariku akan makna hidup yang sebenarnya.
11. Seluruh penghuni "Dahlia" yang telah menjadi penyemangat dan penghibur liku-liku kehidupan penulis.
12. Kepada semua pihak yang telah membantu dalam penyelesaian skripsi ini, yang tidak bisa disebutkan satu per satu.

Akhirnya dengan segala keterbatasan pengetahuan dan waktu penulis, sekiranya ada sesuatu yang kurang berkenan sehubungan dengan penyelesaian skripsi ini, penulis mohon maaf yang sebesar-besarnya. Kritik dan saran dari para pembaca yang budiman demi kebaikan karya ini merupakan harapan besar bagi penulis. Semoga karya ilmiah yang berbentuk skripsi ini dapat bermanfaat dan berguna. Akhirul kalam semoga Allah berkenan membalas kebaikan kita semua. *Amin ya Robbal 'Alamiin....*

*Alhamdulillahirobbil Alamin*

Malang, 02 Januari 2011

Penulis

**DAFTAR ISI**

## BAB IV PENUTUP



## DAFTAR PUSTAKA

## DAFTAR GAMBAR

## DAFTAR TABEL

# ABSTRAK


Chusna, Liya Fitrotul. 2011. *Pelabelan Super Sisi Ajaib Pada Graf-Graf Star dengan Titik Pusat Terhubung oleh Satu Titik Pengait*. Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: (I) Abdussakir, M.Pd
(II) Dr. Ahmad Barizi M.A

**Kata Kunci:** Graf, pelabelan super sisi ajaib, graf star.

Salah satu topik permasalahan dalam teori graf adalah pelabelan graf. Misalkan G = ($V$,$E$) adalah suatu graf dengan himpunan titik $V$ dan himpunan sisi $E$. Pelabelan super sisi ajaib pada graph $G$ merupakan pelabelan total sisi ajaib yang memetakan $V$ ke himpunan $\{1, 2, 3, \dots, p\}$. Pelabelan total sisi ajaib pada suatu graph $G$ dengan order $p$ dan ukuran $q$ adalah fungsi bijektif $f$ dari $V \cup E$ ke himpunan bilangan bulat {1, 2, 3, …, $p + q$} sedemikian hingga untuk masing-masing sisi $xy$ di $G$ berlaku $f(x) + f(xy) + f(y) = k$, dengan k konstanta.

Graf mempunyai jenis yang bermacam-macam, salah satunya yaitu graf star. Dalam penelitian ini pelabelan super sisi ajaib tidak pada graf star yang bersifat tunggal akan tetapi dikembangkan pada graf-graf star dengan titik pusat terhubung oleh satu titik pengait. Permasalahan yang diangkat dalam penelitian ini adalah bagaimana menentukan pelabelan super sisi ajaib pada graf-graf star dengan titik pusat terhubung oleh satu titik pengait. Pelabelan pada graf-graf star dengan titik pusat terhubung oleh satu titik pengait tersebut diamati sehingga diperoleh bentuk umum, yang selanjutnya dinyatakan sebagai konjektur yang dilengkapi dengan bukti-bukti.

Berdasarkan hasil penelitian, diperoleh bilangan ajaib pada graf star sebanyak $m$ dengan masing-masing titik ujung $n$ homogen atau heterogen adalah $k = 3(n_1 + n_2 + \cdots + n_m) + 5m - 2, \forall m \geq 2$, dengan pola pengaitan sebagai berikut:

1. $f(V_i^j) = n_1 + n_2 + \cdots + n_{j-1} + (j-1) + i, 1 \leq i \leq n_j, 1 \leq j \leq m$
2. $f(V_0^j) = n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_m + j + (m-1), 1 \leq j \leq m$
3. $f(V^{\hat{l}}) = n_1 + n_2 + \cdots + n_l + l, 1 \leq l \leq (m-1)$
4. $f(V_0^j V_i^j) = n_1 + n_2 + \cdots + n_{(j-1)} + 2(n_j + n_{j+1} + \cdots + n_m) + 4m - 2j - i, 1 \leq i \leq n_j, 1 \leq j \leq m$
5. $f(V_0^j V^{\hat{l}}) = n_1 + n_2 + \cdots + n_l + 2(n_{l+1} + n_{l+2} + \cdots + n_m) + 4m - (j + l + 1), 1 \leq j \leq m, (j-1) \leq l \leq j$

Penulis menyarankan untuk mengembangkan penelitian dengan mengkaji pada pelabelan graf-graf star dengan titik pusat terhubung oleh dua atau lebih titik pengait.

ABSTRACT

Chusna, Liya Fitrotul. 2011. *Super Edge Magic Labeling on Star Graphs that its Center Vertex are Connected by Single Hook Vertex.* Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, The State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang.
Advisors: (I) Abdussakir, M.Pd
(II) Dr. H. Ahmad Barizi, M.A

Keywords: graph, super edge magic labeling, star graph.

One topic of graph theory is graph labeling. Let $G = (V, E)$ is a graph with vertex set $V$ and edge set $E$. Super Edge Magic Labeling in the graph $G$ is the total edge magic labeling which maps $V$ into the set $\{1, 2, 3, \dots, p\}$. The total edge magic labeling on a graph $G$ which have $p$ order and $q$ size is a $f$ bijection function from $V \cup E$ to the set of integer $\{1, 2, 3, \dots, p + q\}$ such that for each edges of the $xy$ in G force $f(x) + f(xy) + f(y) = k$, with $k$ a constant.

There is various form of graph, one of which is star graph. In this research, not discuss about super edge magic labeling on single star graph, but is developed on the star graphs that its center vertex are connected by single hook vertex. Studied problem in this research is how to determine the super edge magic labeling on star graph that its center vertex are connected by single hook vertex. Labeling on the star graph that its center vertex are connected by single hook vertex is observed in order to obtain the general form, which subsequently expressed as a conjecture that is equipped with the proof.

Pursuant to result of research obtained a magic number on $m$ star graph that has homogeneous or heterogeneous $n$ end-vertex is $k = 3(n_1 + n_2 + \cdots + n_m) + 5m - 2, \forall m \geq 2$, with the pattern below:

6. $f(V_i^j) = n_1 + n_2 + \cdots + n_{j-1} + (j-1) + i, 1 \leq i \leq n_j, 1 \leq j \leq m$
7. $f(V_0^j) = n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_m + j + (m-1), 1 \leq j \leq m$
8. $f(V^{\hat{l}}) = n_1 + n_2 + \cdots + n_l + l, 1 \leq l \leq (m-1)$
9. $f(V_0^j V_i^j) = n_1 + n_2 + \cdots + n_{(j-1)} + 2(n_j + n_{j+1} + \cdots + n_m) + 4m - 2j - i, 1 \leq i \leq n_j, 1 \leq j \leq m$
10. $f(V_0^j V^{\hat{l}}) = n_1 + n_2 + \cdots + n_l + 2(n_{l+1} + n_{l+2} + \cdots + n_m) + 4m - (j + l + 1), 1 \leq j \leq m, (j-1) \leq l \leq j$

The authors suggest to expand the research by studying star graph that its center vertex are connected by double or more hook vertices.

## BAB I
## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Allah Swt telah menurunkan Al-Quran dengan beberapa fungsi yang dimilikinya. Di antaranya fungsi-fungsi al-Quran ialah sebagai petunjuk *(hudan)*, pembeda antara yang benar dan yang salah *(al-furqan)*, penyembuh penyakit hati *(syifa)*, nasihat atau petuah *(mau'izhah)*, dan sumber informasi *(bayan)*. Sebagai sumber informasi, Al Qur'an mengajarkan banyak hal kepada manusia mulai dari persoalaan keyakinan, moral, prinsip ibadah, muamalah, sampai kepada asas-asas ilmu pengetahuan, yang mencakup ilmu kealaman dan matematika (Mas'ud, 28: 11).

Salah satu firman Allah SWT yang memberikan motivasi untuk mempelajari ilmu kealaman dan matematika adalah seperti yang tercantum dalam surat yunus ayat 5 berikut:

هُوَ ٱلَّذِى جَعَلَ ٱلشَّمۡسَ ضِيَآءً وَٱلۡقَمَرَ نُورًا وَقَدَّرَهُۥ مَنَازِلَ لِتَعۡلَمُواْ عَدَدَ
ٱلسِّنِينَ وَٱلۡحِسَابَۚ مَا خَلَقَ ٱللَّهُ ذَٰلِكَ إِلَّا بِٱلۡحَقِّۚ يُفَصِّلُ ٱلۡأٓيَٰتِ لِقَوۡمٖ يَعۡلَمُونَ
٥

Artinya:

"*Dia-lah yang menjadikan matahari bersinar dan bulan bercahaya dan ditetapkan-Nya manzilah-manzilah (tempat-tempat) bagi perjalanan bulan itu, supaya kamu mengetahui bilangan tahun dan perhitungan (waktu). Allah tidak menciptakan yang demikian itu melainkan dengan hak. dia menjelaskan tanda-tanda (kebesaran-Nya) kepada orang-orang yang Mengetahui.*"

Dari ayat di atas tampak bahwa Allah Swt memberi motivasi kepada manusia untuk mempelajari ilmu perhitungan. Bidang ilmu perhitungan yang terinspirasi dengan ayat di atas diantaranya adalah astronomi dan matematika. Matematika merupakan suatu ilmu yang mengkaji tentang cara menghitung atau mengukur sesuatu dengan angka, simbol, atau jumlah.

Matematika sangat berpengaruh dalam berkembangnya ilmu-ilmu yang lainnya. Misalnya dalam ilmu fisika, biologi, dan ilmu-ilmu yang lain. Para ahli dari berbagai disiplin ilmu menggunakan matematika untuk berbagai keperluan yang berkaitan dengan keilmuan mereka.

Alam semesta memuat bentuk-bentuk dan konsep matematika, meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika itu ada. Alam semesta beserta segala isinya diciptakan oleh Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti dengan perhitungan-perhitungan yang mapan, dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi (Abdusyakir, 2007: 79).

Dalam Al-Qur’an surat Al-Qamar disebutkan:

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَٰهُ بِقَدَرٍ ﴿٤٩﴾

Artinya:

“ *Sesungguhnya kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran*”

Allah menciptakan semesta beserta isinya dengan ukuran yang cermat dan teliti. Allah menciptakan gerak udara mempunyai ukuran kecepatan, berapa besar kelajuanya dan kemana arahnya. Kalau besaran-besaran dalam suatu proses alamiah berhubungan satu sama lain, maka hubungan tersebut dapat dirumuskan dalam bentuk matematis.

Dalam ayat lain disebutkan:

ٱلَّذِى لَهُۥ مُلْكُ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضِ وَلَمْ يَتَّخِذْ وَلَدًا وَلَمْ يَكُن لَّهُۥ شَرِيكٌ فِى ٱلْمُلْكِ وَخَلَقَ كُلَّ شَىْءٍ فَقَدَّرَهُۥ تَقْدِيرًا ٢

Artinya:

*"Yang kepunyaan-Nya-lah kerajaan langit dan bumi, dan dia tidak mempunyai anak, dan tidak ada sekutu baginya dalam kekuasaan(Nya), dan dia Telah menciptakan segala sesuatu, dan dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya"(Q.S Al-Furqan: 2)*

Ayat di atas menjelaskan bahwa segala sesuatu yang ada di alam ini ada ukurannya, ada hitungan-hitungannya, ada rumusnya, atau ada persamaanya. Ahli matematika atau fisika tidak membuat suatu rumus atau persamaan. Rumus-rumus yang ada sekarang bukan diciptakan manusia sendiri, tetapi sudah disediakan. Manusia hanya menemukan dan menyimbolkan dalam bahasa matematika (Abdusyakir, 2007: 80).

Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang banyak dimanfaatkan dalam kehidupan sehari-hari. Misalnya dalam pembuatan trayek perjalanan angkutan, pengaturan jadwal, pengaturan jaringan listrik, dan lain sebagainya. Konsep dan hasil teori graf yang sesuai, diperkenalkan dengan maksud membuat simulasi masalah secara matematis. Hal inilah yang menjadikan teori graf menarik dan semakin banyak dikembangkan oleh para matematikawan.

Keunikan teori graf adalah kesederhanaan pokok bahasan yang dipelajarinya, karena dapat disajikan sebagai titik *(verteks)* dan garis *(edge).* Meskipun pokok bahasan dari topik-topik teori graf sangat sederhana, tetapi isi di dalamnya belumlah sesederhana itu. Kerumitan dan masalah selalu ada dan bahkan sampai saat ini masih banyak masalah yang belum terpecahkan (Santoso, 2002: 1)

Banyak topik-topik bahasan yang belum terpecahkan membuat para ilmuan yang ingin menggunakan teori atau teorema tentang bahasan tersebut menjadi terhambat. Karena tidak mungkin menggunakan suatu ilmu yang belum jelas kebenaranya. Seperti yang dijelaskan dalam firman Allah surat Al-Isra' (17) ayat 36 yang berbunyi:

وَلَا تَقۡفُ مَا لَيۡسَ لَكَ بِهِۦ عِلۡمٌۚ إِنَّ ٱلسَّمۡعَ وَٱلۡبَصَرَ وَٱلۡفُؤَادَ كُلُّ أُوْلَـٰٓئِكَ كَانَ عَنۡهُ مَسۡـُٔولٗا ٣٦

Artinya:

> *"Dan janganlah kamu mengikuti apa yang kamu tidak mempunyai pengetahuan tentangnya. Sesungguhnya pendengaran, penglihatan dan hati, semuanya itu akan diminta pertanggungan jawabnya".*

Pelabelan graf merupakan suatu topik dalam teori graf. Objek kajiannya berupa graf yang secara umum direpresentasikan oleh titik dan sisi serta himpunan bagian bilangan asli yang disebut label. Pertama kali diperkenalkan oleh Sadlàček (1964), kemudian Stewart (1966), Kotzig dan Rosa (1970). Hingga saat ini pemanfaatan teori pelabelan graf sangat dirasakan peranannya, terutama pada sektor sistem komunikasi dan transportasi, navigasi geografis, radar, penyimpanan data komputer, dan desain *integrated circuit* pada komponen elektronik (Rosyid, 2009: 1).

Pelabelan merupakan pemetaan bijektif yang memetakan unsur himpunan titik dan atau unsur himpunan sisi ke bilangan asli yang disebut label. Pelabelan titik adalah pelabelan dengan domain himpunan titik, pelabelan sisi adalah pelabelan dengan domain himpunan sisi, dan pelabelan total adalah pelabelan dengan domain gabungan himpunan titik dan himpunan sisi (Park, dkk. 2008: 11).

Hingga kini dikenal beberapa jenis pelabelan pada graf, antara lain pelabelan *gracefull*, pelabelan harmoni, pelabelan total tak beraturan, pelabelan ajaib, dan pelabelan anti ajaib. Dalam pengembangan pelabelan ajaib, dikenal pula pelabelan total titik-ajaib, pelabelan total titik ajaib super, pelabelan total sisi-ajaib, dan pelabelan total sisi-ajaib super.

Pada penelitian yang terdahulu, telah dijumpai beberapa macam pelabelan pada graf star $S_n$. Di antaranya adalah pelabelan konsekutif, total sisi ajaib, dan juga pelabelan graceful. Akan tetapi, belum dijumpai pelabelan pada graf Star $S_n$ yang antara titik pusatnya dihubungkan oleh titik pengait. Sehingga berdasarkan latar belakang di atas maka penulis tertarik untuk meneliti tentang **"Pelabelan Super Sisi Ajaib Pada Graf-Graf Star dengan Titik Pusat Terhubung oleh Satu Titik Pengait".**

## 1.2 Rumusan Masalah

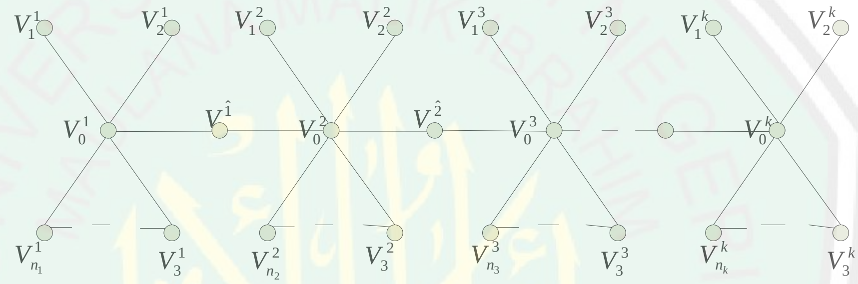
Adapun rumusan masalah yang akan dibahas dalam skripsi ini adalah: bagaimana salah satu cara dan hasil pelabelan super sisi ajaib pada graf-graf dengan titik pusat terhubung oleh satu titik pengait?

## 1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas maka tujuan skripsi ini adalah untuk mengetahui salah satu cara dan hasil bilangan ajaib dari pelabelan super sisi ajaib pada graf-graf star dengan titik pusat terhubung oleh satu titik pengait.

## 1.4 Batasan Masalah

Agar pembahasan pada skripsi ini tidak meluas maka dalam penelitian ini penulis membatasi objek kajian pada pelabelan super sisi ajaib pada graf star sebanyak $m$ dengan jumlah masing-masing kaki $n_1, n_2, n_3 \dots, n_k$ ( boleh sama atau berbeda), dan antara titik pusatnya terhubung oleh satu titik pengait. Dengan $m, n \in \mathbb{N}$ seperti di bawah ini:




Gambar 1.1 Graf-Graf Star dengan Titik Pusat Terhubung oleh 1 Titik Pengait

## 1.5 Manfaat Penelitian

Hasil penelitian ini diharapkan dapat bermanfaat bagi:

1. Bagi Penulis

Penelitian ini merupakan kesempatan bagi penulis untuk menambah informasi dan memperluas wawasan pengetahuan tentang teori-teori yang diterima di bangku kuliah khususnya tentang teori graf.

2. Bagi Pembaca

Sebagai bahan untuk menambah khasanah keilmuan matematika khususnya tentang teori graf, dan diharapkan dapat menjadi rujukan untuk penelitian yang akan datang. Pembaca dapat mengetahui salah satu cara dan hasil bilangan ajaib dari pelabelan super sisi ajaib pada graf star dengan titik pusat terhubung oleh satu titik pengait.

3. Bagi Lembaga

Sebagai tambahan bahan pustaka tentang teori graf dan sebagai tambahan rujukan untuk materi kuliah.

## 1.6 Metode Penelitian

Langkah-langkah yang akan dilakukan dalam penelitian ini adalah:

1. Merumuskan masalah

Sebelum penulis melakukan penelitian, terlebih dahulu penulis menyusun rencana penelitian dari suatu masalah tentang pelabelan super sisi ajaib pada graf-graf star.

2. Mengumpulkan data

Peneliti mengumpulkan data yang berupa data primer dan data sekunder. Data primer dalam penelitian ini diperoleh dari hasil pengamatan langsung yang dilakukan penulis berupa gambar graf, banyak sisi, banyak titik, dan pelabelan super sisi ajaib pada graf-graf star yang dihubungkan dengan satu titik pengait. Sedangkan data sekunder yang digunakan dalam penelitian ini berupa definisi, teorema, sifat-sifat graf dan lain-lain, dari beberapa literatur antara lain buku-buku, dokumen yang ada, skripsi-skripsi sebelumnya, dan lain-lain.

3. Menganalisis data

Langkah-langkah yang diambil untuk menganalisis data dalam penulisan ini adalah :

1. Mencoba melakukan pelabelan super sisi ajaib pada graf-graf star dengan titik pusat terhubung oleh satu titik pengait.

2. Mengamati pola-pola pelabelan super sisi ajaib dari beberapa contoh graf-graf star dengan titik pusat terhubung oleh satu titik pengait tersebut. Pola yang didapatkan masih dianggap sebagai dugaan (konjektur).
3. Konjektur yang dihasilkan dinyatakan dalam kalimat matematis yang dibuktikan.
4. Memberikan kesimpulan akhir dari hasil penelitian.

**1.7 Sistematika Penulisan**

Penulisan skripsi ini akan dibagi dalam beberapa bab. Susunan pembagian bab-bab tersebut adalah:

BAB I: Pendahuluan. Bab ini membahas latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, pembatasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II: Dasar Teori. Bab ini berisi tentang dasar-dasar teori yang akan digunakan pada bab-bab selanjutnya seperti definisi graf, graf $S_n$, pelabelan super sisi ajaib, serta teori-teori lainya yang membantu.

BAB III: Pembahasan. Bab ini membahas mengenai pelabelan super sisi ajaib pada graf-graf star dengan titik pusat terhubung oleh satu titik pengait.

BAB IV: Kesimpulan. Bab ini berisi tentang kesimpulan dari materi-materi yang telah dibahas pada bab sebelumnya.

# BAB II
# KAJIAN TEORI

## 2.1 Bilangan dalam Al-Quran

Pelabelan graf merupakan salah satu topik dalam teori graf yang berbicara tentang bilangan. Karena sesuai dengan definisinya, pelabelan pada suatu graf adalah sebarang pemetaan atau fungsi yang memasangkan unsure-unsur graf (titik atau sisi) dengan bilangan (biasanya bilangan bulat positif).

Berbicara tentang al-Quran sebagai peradaban bukan berarti al-Quran mengandung teori-teori khusus yang dapat diterapkan dalam berbagai eksperimen sains, namun ia memuat prinsip-prinsip dasar ilmu pengetahuan dan peradaban. Al-Quran bukanlah buku ilmiah atau ensiklopedi ilmu, tetapi ia lebih layak disebut sebagai sumber yang memberikan motivasi dan inspirasi untuk melahirkan ilmu pengetahuan dan peradaban dengan berbagai dimensinya. Thabathaba'i mengatakan bahwa ilmu pengetahuan mencakup ilmu kealaman dan matematika (Mas'ud, 2008: 12).

Dalam matematika, terdapat enam himpunan bilangan yang sangat dikenal, di antaranya adalah himpunan bilangan asli dan bilangan rasional.Bilangan asli dimulai dari $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ Bilangan rasional adalah suatu bilangan yang dapat ditunjukkan sebagai suatu pecahan atau perbandingan, yaitu sebagai suatu pecahan $\frac{a}{b}$ dimana $a$ sebagai pembilang dan $b$ sebagai penyebut, keduanya merupakan bilangan bulat, tetapi penyebutnya bukan nol $(b \neq 0)$.

Dalam Al-Quran disebutkan sebanyak 38 bilangan berbeda. Dari 38 bilagan tersebut, 30 bilangan merupakan bilangan asli dan 8 bilangan merupakan bilangan pecahan (rasional) (Abdusyakir, 2007: 116).

Salah satu ayat al-Quran yang mengandung bilangan dua antara lain:

۞ وَقَالَ ٱللَّهُ لَا تَتَّخِذُوٓاْ إِلَٰهَيۡنِ ٱثۡنَيۡنِۖ إِنَّمَا هُوَ إِلَٰهٞ وَٰحِدٞ فَإِيَّٰيَ فَٱرۡهَبُونِ ٥١

Artinya:

> *"Allah berfirman: "Janganlah kamu menyembah dua tuhan; Sesungguhnya dialah Tuhan yang Maha Esa, Maka hendaklah kepada-Ku saja kamu takut". (QS. An-Nahl: 51).*

Sedangkan salah satu ayat dalam al-Quran yang mengandung bilangan rasional berupa pecahan positif adalah:

۞ وَلَكُمۡ نِصۡفُ مَا تَرَكَ أَزۡوَٰجُكُمۡ إِن لَّمۡ يَكُن لَّهُنَّ وَلَدٞۚ فَإِن كَانَ لَهُنَّ وَلَدٞ فَلَكُمُ ٱلرُّبُعُ مِمَّا تَرَكۡنَۚ مِنۢ بَعۡدِ وَصِيَّةٖ يُوصِينَ بِهَآ أَوۡ دَيۡنٖۚ وَلَهُنَّ ٱلرُّبُعُ مِمَّا تَرَكۡتُمۡ إِن لَّمۡ يَكُن لَّكُمۡ وَلَدٞۚ فَإِن كَانَ لَكُمۡ وَلَدٞ فَلَهُنَّ ٱلثُّمُنُ مِمَّا تَرَكۡتُمۚ مِّنۢ بَعۡدِ وَصِيَّةٖ تُوصُونَ بِهَآ أَوۡ دَيۡنٖۗ وَإِن كَانَ رَجُلٞ يُورَثُ كَلَٰلَةً أَوِ ٱمۡرَأَةٞ وَلَهُۥٓ أَخٌ أَوۡ أُخۡتٞ فَلِكُلِّ وَٰحِدٖ مِّنۡهُمَا ٱلسُّدُسُۚ فَإِن كَانُوٓاْ أَكۡثَرَ مِن ذَٰلِكَ فَهُمۡ شُرَكَآءُ فِي ٱلثُّلُثِۚ مِنۢ بَعۡدِ وَصِيَّةٖ يُوصَىٰ بِهَآ أَوۡ دَيۡنٍ غَيۡرَ مُضَآرّٖۚ وَصِيَّةٗ مِّنَ ٱللَّهِۗ وَٱللَّهُ عَلِيمٌ حَلِيمٞ ١٢

Artinya:

> *"Dan bagimu (suami-suami) seperdua dari harta yang ditinggalkan oleh isteri-isterimu, jika mereka tidak mempunyai anak. jika Isteri-isterimu itu mempunyai anak, Maka kamu mendapat seperempat dari harta yang ditinggalkannya sesudah dipenuhi wasiat yang mereka buat atau (dan) seduah dibayar hutangnya. para isteri memperoleh seperempat harta yang kamu tinggalkan jika kamu tidak mempunyai anak. jika kamu mempunyai anak, Maka para isteri memperoleh seperdelapan dari harta yang kamu*

> *tinggalkan sesudah dipenuhi wasiat yang kamu buat atau (dan) sesudah dibayar hutang-hutangmu. jika seseorang mati, baik laki-laki maupun perempuan yang tidak meninggalkan ayah dan tidak meninggalkan anak, tetapi mempunyai seorang saudara laki-laki (seibu saja) atau seorang saudara perempuan (seibu saja), Maka bagi masing-masing dari kedua jenis saudara itu seperenam harta. tetapi jika Saudara-saudara seibu itu lebih dari seorang, Maka mereka bersekutu dalam yang sepertiga itu, sesudah dipenuhi wasiat yang dibuat olehnya atau sesudah dibayar hutangnya dengan tidak memberi mudharat (kepada ahli waris). (Allah menetapkan yang demikian itu sebagai) syari'at yang benar-benar dari Allah, dan Allah Maha mengetahui lagi Maha Penyantun".*

Setelah mengetahui bahwa dalam al-Quran terdapat bilangan-bilangan, maka orang muslim harus mengenal bilangan. Tanpa mengenal bilangan, seorang muslim tidak akan memahami al-Quran dengan baik ketika membaca ayat –ayat yang berbicara tentang bilangan tersebut. Ketika al-Quran berbicara bilangan, yang banyaknya sampai 38 bilangan berbeda, maka tidak diragukan lagi bahwa al-Quran sebenarnya berbicara tentang matematika (Abdusyakir, 2007: 117).

Al-Quran Al-Karim, seluruh isinya merupakan mukjizat. Simbol-simbol maknanya, yaitu lafaz-lafaznya, juga merupakan mukjizat; dan ketika maknanya tersebut dilekatkan kepada sebuah lafaz, ia memberi makna kepada kata. Jumlah kata-kata dalam Al-Qur'an yang yang menegaskan kata-kata yang lain ternyata jumlahnya sama dengan jumlah kata-kata Al-Qur'an yang menjadi lawan atau kebalikan dari kata-kata tersebut (An-Najdi, 1996: 65).

Sebagai contoh, kata "*iblis*" dalam Al-Qur'an disebutkan sebanyak 11 kali, sementara "*isti'adzah*" juga disebutkan sebanyak 11 kali. Kata "*ma'shiyah*" dan derivatnya disebutkan sebanyak 75 kali, sementara kata "*syukr*" dan derivatnya juga disebutkan sebanyak 75 kali. Kata "*al-dunya*" disebutkan sebanyak 115 kali, begitu juga kata "*al-akhirah*". Kata "*al-israf*" dengan berbagai derivatnya disebutkan sebnyak 23 kali, begitu juga *"al-sur'ah"*, dan sebagainya (An-Najdi, 1996: 69).

Kata *"yaum"* (hari) dalam bentuk tunggal disebut sebanyak 365 kali, sebanyak jumlah hari pada tahun Syamsyiyah. Kata *"syahr"* (bulan) disebut sebanyak 12 kali, sama dengan jumlah bulan dalam satu tahun. Begitu juga kata *"yaum"* (hari) dalam bentuk *mutsanna* (dua) dan *jama'* (plural) disebut sebanyak 30 kali sama dengan jumlah hari dalam satu bulan (An-Najdi, 1996: 70).

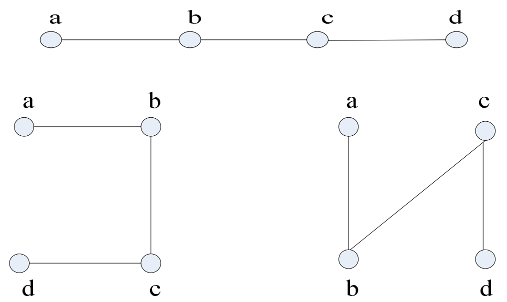
**2.2 Graf**

Definisi:

Graf $G$ adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek , yang disebut titik, dan himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda yang disebut sisi. Himpunan titik $G$ dilambangkan dengan $V(G)$, sedangkan himpunan sisi dilambangkan dengan $E(G)$ (Chartrand dan Lesniak, 1986: 4).

Contoh 1:

Anggap graf $G = (V, E)$ dimana $V = \{a, b, c, d\}$ dan $E = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}\}$. Graf ini dapat direpresentasikan dalam salah satu dari tiga cara yang ditunjukkan dalam gambar berikut:




Gambar 2.1 Graf $G$

Meskipun sketsa terlihat berbeda, kita harus perhatikan bahwa mereka semua memiliki sifat yang sama. jika kedua gambar yang bawah diluruskan, maka hasilnya akan sama dengan gambar yang di atas. Dalam setiap gambar memungkinkan untuk pergi dari $a$ ke $d$ melalui rute yang melalui $b$ dan $c$, dan jika ada salah satu unsur yang rusak, maka tidak akan mungkin lagi untuk pergi dari $a$ ke $d$ (Witala, 1987: 179).

Al Qur'an merupakan sumber segala ilmu. Tidak seorang pun dapat menyangkal bahwa di dalam Al Quran tidak hanya diletakkan dasar-dasar peraturan hidup manusia dalam hubunganya dengan Tuhan Sang Pencipta, dalam interaksinya dengan sesama manusia dan dalam tindakanya terhadap alam di sekitarnya, tetapi juga dinyatakan untuk apa manusia diciptakan.

Titik dalam suatu graf dapat diasumsikan menurut keperluan dalam menyelesaikan suatu permasalahan. Jika dua titik pada suatu graf diasumsikan sebagai suatu benda dan dihubungkan dengan suatu sisi, maka hal ini memiliki artian bahwa dua benda tersebut mempunyai suatu hubungan. Definisi graf dapat direperesentasikan dalam hubungan manusia dan jin dengan Sang pencipta. Di dalam ayat 56 surah Adz Dzariat kita temukan pernyataan Allah SWT sebagai berikut:

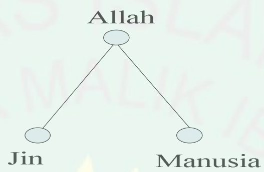
وَمَا خَلَقۡتُ ٱلۡجِنَّ وَٱلۡإِنسَ إِلَّا لِيَعۡبُدُونِ ٥٦

Artinya:

*"Dan Aku tidak menciptakan jin dan manusia melainkan supaya mereka mengabdi kepada-Ku".*

Arti "menyembah" di sini adalah mengabdikan diri; bukan hanya sekedar sembahyang saja, tetapi melakukan semua yang diperintahkanNya dan yang disukaiNya, termasuk pantang segala sesuatu yang dilarangNya dan yang tidak disukaiNya, paling tidak sebagai layaknya seorang 'abdi' atau hamba bertingkah laku terhadap pemilikNya (Baiquni, 1995: 66).

Ayat di atas dapat direpresentasikan dalam definisi graf, dengan ilustasi sebagai berikut:

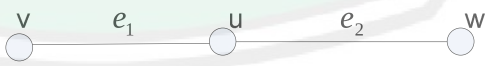



Gambar 2.2 Hubungan antara Allah dan Hamba-Nya

**2.3 Adjacent and incident**

Definisi:

Sisi $e = (uv)$ dikatakan menghubungkan titik $u$ dan $v$. Jika $e = (u, v)$ adalah sisi pada graf G, maka $u$ dan $v$ disebut terhubung langsung *(adjacent)*, sedangkan $u$ dan $e$ disebut terkait langsung *(incident)*, sebagaimana $v$ dan $e$. Dua sisi berbeda $e_1$ dan $e_2$ disebut terhubung langsung *(adjacent)*, jika terkait langsung pada satu titik yang sama. Untuk selanjutnya, sisi $e = (u, v)$ akan ditulis $e = uv$ (Abdussakir, dkk. 2009: 6)




Gambar 2.3 *Adjacent* dan *Incident* pada Graf

Keterangan:

$v$ dan $u$, $u$ dan $w$ terhubung langsung *(adjacent)*

$v$ dan $u$ terkait langsung *( incident)* dengan $e_1$

$u$ dan $w$ terkait langsung *(incident)* dengan $e_2$

$e_1$ dan $e_2$ terhubung langsung *(adjacent)*

Kardinalitas dari himpunan titik pada graf $G$ disebut order $G$ dan dilambangkan dengan $p(G)$, atau lebih sederhana, $p$, sedangkan kardinalitas himpunan sisi adalah ukuran $G$ dan dilambangkan dengan $q(G)$ atau $q$. Sebuah graf $(p, q)$, memiliki order $p$ dan ukuran $q$. Derajat titik adalah jumlah dari sisi yang terkait langsung.

Menurut konteks Islam, *adjacent* dan *incident* dapat direpresentasikan pada ibadah Sa'i. Dalam Surat Al-Baqarah ayat 158 Allah berfirman:

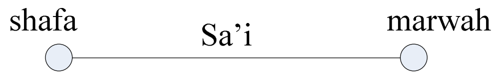
إِنَّ ٱلصَّفَا وَٱلۡمَرۡوَةَ مِن شَعَآئِرِ ٱللَّهِۖ فَمَنۡ حَجَّ ٱلۡبَيۡتَ أَوِ ٱعۡتَمَرَ فَلَا جُنَاحَ عَلَيۡهِ أَن
يَطَّوَّفَ بِهِمَاۚ وَمَن تَطَوَّعَ خَيۡرٗا فَإِنَّ ٱللَّهَ شَاكِرٌ عَلِيمٌ ١٥٨

Artinya:

*"Sesungguhnya Shafaa dan Marwa adalah sebahagian dari syi'ar Allah. Maka barangsiapa yang beribadah haji ke Baitullah atau ber-'umrah, Maka tidak ada dosa baginya mengerjakan sa'i antara keduanya. dan barangsiapa yang mengerjakan suatu kebajikan dengan kerelaan hati, Maka Sesungguhnya Allah Maha Mensyukuri kebaikan lagi Maha Mengetahui".*

Sa'i arti harfiahnya adalah usaha, sedangkan arti syari'ahnya pada ibadah haji dan umroh adalah berbolak-balik sebanyak tujuh kali antara bukit shafa dan marwah demi melaksanakan perintah Allah (Shihab, 2000: 345).

Pelaksanaan Sa'i antara shafa dan marwah ini dapat kita representasikan dalam adjacent. Hal ini dapat digambarkan dengan mengintrepresentasikan dua bukit tersebut yaitu Shafa dan Marwah sebagai dua titik yang adjacent (direpresentasikan dengan melakukan sa'i).

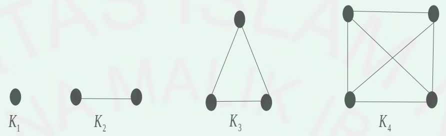



Gambar 2.4 Representasi *Adjacent* terhadap Proses Ibadah

**2.4 Jenis-Jenis Graf:**

1. Graf Lengkap

Graf lengkap adalah graf di mana setiap dua titik berbeda terhubung dengan tepat satu sisi. Grafik lengkap dengan $n$ vertex dilambangkan oleh $K_n$ (Watkins dan Wilson, 1990: 36).




Gambar 2.5 Graf Lengkap

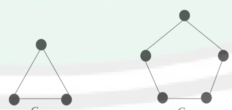
2. Graf Null

Graf null adalah graf yang tidak mengandung sisi. Graf null dengan $n$ vertex dilambangkan oleh $N_n$ (Watkins dan Wilson, 1990: 36).


Gambar 2.6 Graf Null

3. Graf Siklus

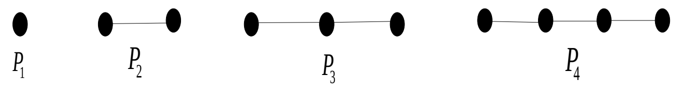
Graf siklus adalah graf yang terdiri dari siklus tunggal. Grafik siklus dengan $n$ vertex dilambangkan oleh $C_n$ (Watkins dan Wilson, 1990: 36).




Gambar 2.7 Graf Siklus

4. Graf Lintasan

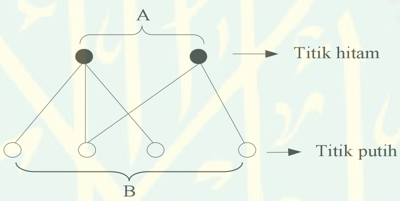
Graf lintasan adalah graf yang terdiri dari sebuah lintasan tunggal. Graf lintasan dengan $n$ vertex dilambangkan oleh $P_n$. Perhatikan bahwa $P_n$ memiliki $n$-tepi, dan dapat diperoleh dari graf siklus $C_n$ dengan menghapus sebuah sisi (Watkins dan Wilson, 1990: 37).




Gambar 2.8 Graf Lintasan

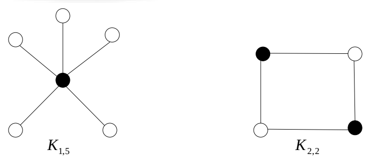
5. Graf bipartit

Graf bipartit adalah adalah graf yang himpunan titiknya dapat dibagi menjadi himpunan $A$ dan $B$, sedemikian rupa sehingga masing-masing sisi pada graf tersebut menghubungkan sebuah titik di $A$ dengan sebuah titik di $B$. Kita dapat membedakan vertex di $A$ dari $B$ dengan menggambar dalam bentuk gambar hitam dan putih, sehingga setiap sisi terhubung dengan titik hitam dan titik putih. Contoh graf bipartit adalah seperti di bawah ini:




Gambar 2.9 Graf Bipartit

Graf bipartit lengkap adalah graf bipartit di mana setiap titik hitam menghubungkan setiap titik putih dengan tepat satu sisi. Graf bipartit lengkap dengan $r$ titik hitam dan $s$ titik putih dilambangkan dengan $K_{(r,s)}$. Sebuah graf bipartit lengkap dari bentuk $K_{(1,s)}$. disebut graf bintang. Beberapa contoh graf bipartit lengkap adalah:




Gambar 2.10 Graf Bipartit Lengkap

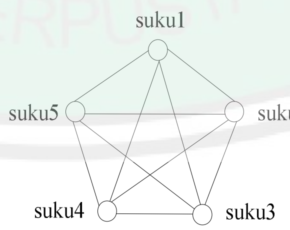
Pengilustrasian graf komplit dapat diambil dari sebuah ayat yang menjelaskan tentang hubungan antar sesama manusia. Firman Allah dalam Q.S Al Hujuraat ayat 13 :

يَٰٓأَيُّهَا ٱلنَّاسُ إِنَّا خَلَقۡنَٰكُم مِّن ذَكَرٖ وَأُنثَىٰ وَجَعَلۡنَٰكُمۡ شُعُوبٗا وَقَبَآئِلَ لِتَعَارَفُوٓاْۚ إِنَّ
أَكۡرَمَكُمۡ عِندَ ٱللَّهِ أَتۡقَىٰكُمۡۚ إِنَّ ٱللَّهَ عَلِيمٌ خَبِيرٞ ١٣

Artinya:

> *"Hai manusia, Sesungguhnya kami menciptakan kamu dari seorang laki-laki dan seorang perempuan dan menjadikan kamu berbangsa - bangsa dan bersuku-suku supaya kamu saling kenal-mengenal. Sesungguhnya orang yang paling mulia diantara kamu disisi Allah ialah orang yang paling taqwa diantara kamu. Sesungguhnya Allah Maha mengetahui lagi Maha Mengenal".*

Hal ini dapat direpresentasikan dalam bentuk graf dengan suku-suku atau bangsa-bangsa sebagai titik. Misalkan ambil *n* macam suku/bangsa, maka mempunyai *n* titik. Sedangkan bentuk hubungan untuk "saling mengenal" dianggap sebagai sebuah garis yang menghubungkan setiap suku/bangsa. Kerena sebagaimana dijelaskan dalam surat Al-Hujuraat ayat 13 bahwa manusia harus saling mengenal, maka antara titik satu dengan titik yang lainnya juga harus saling terhubung. Sehingga jika keterhubungan antar suku itu digambarkan, akan di dapat gambar sebagai berikut:




Gambar 2.11 Representasi Graf Komplit pada Hubungan Sesama Manusia

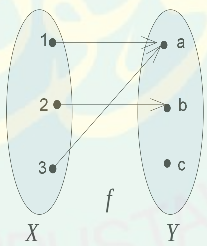
**2.5 Fungsi**

Definisi:

Misal $X$ dan $Y$ adalah dua himpunan yang tidak kosong. Suatu fungsi $f$ dari $X$ ke $Y$, dilambangkan dengan $f: X \to Y$, adalah aturan yang memetakan setiap elemen $X$ tepat satu pada elemen $Y$. $X$ adalah domain dari fungsi dan $Y$ adalah himpunan kodomainnya. Jika $y$ adalah elemen yang tepat satu di $Y$ dipetakan oleh fungsi $f$ ke elemen $x$, kita katakan bahwa $y$ adalah peta dari $x$ dan $x$ adalah prapeta dari $y$ dan kita tulis $y = f(x)$. Himpunan $f(X)$ disebut daerah hasil fungsi. Daerah hasil fungsi adalah himpunan bagian dari kodomainnya (Balakrishnan, 1991: 7).

Contoh 2:

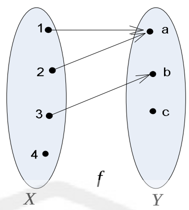
Himpunan $f = \{(1, a), (2, b), (3, a)\}$ merupakan fungsi dari $X = \{1, 2, 3\}$ ke $Y = \{a, b, c\}$. Setiap elemen dari $X$ dipetakan tepat satu pada $Y$, 1 dipetakan tepat satu ke $a$, 2 dipetakan tepat satu ke $b$, 3 dipetakan tepat satu ke $a$. Hal ini dapat ditunjukkan pada gambar 2.12. Gambar seperti pada gambar 2.12 biasa disebut dengan diagram panah.




Gambar 2.12 Diagram Panah Fungsi Contoh 2

Contoh 3:

Himpunan $\{(1, a), (2, a), (3, b)\}$ bukan fungsi dari $X = \{1, 2, 3, 4\}$ ke $Y = \{a, b, c\}$ karena unsur 4 di $X$ tidak dipetakan pada suatu elemen di $Y$. Hal ini juga terlihat dari diagram panah (lihat gambar 2.13), dimana himpunan ini bukan sebuah fungsi karena tidak ada panah dari 4.




Gambar 2.13 Diagram Panah dari Himpunan Contoh 3

Contoh 4:

Misalkan $f$ fungsi yang didefinisikan oleh aturan

$$f(x) = x^2$$

Sebagai contoh,

$$f(2) = 4; \quad f(-3{,}5) = 12{,}25; \quad f(0) = 0$$

Meskipun kita sering menemukan fungsi yang didefinisikan dengan cara ini, definisi tidak lengkap jika domain dan kodomainya tidak ditentukan. Jika diberikan domainya adalah himpunan semua bilangan real dan kodomainya adalah himpunan semua bilangan real non-negatif, dalam notasi pasangan terurut, kita dapatkan:

$$f = \{(x, x^2) | x \text{ adalah bilangan real}\}$$

Daerah hasil dari $f$ adalah himpunan semua bilangan real tak negatif.

Definisi:

Sebuah fungsi $f$ dari $X$ ke $Y$ dikatakan satu- satu (atau injektif) jika untuk setiap $y \in Y$, terdapat paling banyak satu $x \in X$ dengan $f(x) = y$. Dengan kata lain, untuk setiap $x_1, x_2 \in X$, jika $f(x_1) = f(x_2)$, maka $x_1 = x_2$. Secara simbolis, dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\forall x_1 \forall x_2 \left( \left( f(x_1) = f(x_2) \right) \rightarrow (x_1 = x_2) \right)$$

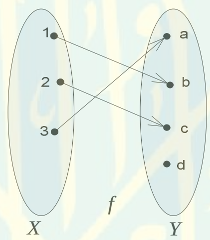
Bentuk definisi seperti di atas sering digunakan untuk membuktikan fungsi injektif (Baugh, 2009: 124-125).

Contoh 5:

Fungsi

$$f = \{(1, b), (3, a), (2, c)\}$$

Dari $X = \{1, 2, 3\}$ ke $Y = \{a, b, c, d\}$ adalah satu-satu. Jika fungsi dari $X$ ke $Y$ adalah satu-satu, setiap elemen di $Y$ pada diagram panah tersebut akan memiliki paling banyak satu panah menunjuk ke Y (lihat gambar 2.14).



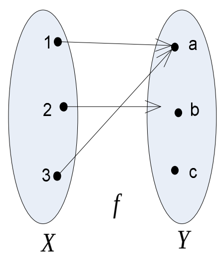

Gambar 2.14 Fungsi Pada Contoh 5

Contoh 6:

Fungsi

$$f = \{(1, a), (2, b), (3, a)\}$$

Bukan fungsi satu- satu karena $f(1) = a = f(3)$. Jika suatu fungsi bukan satu-satu, beberapa elemen di $Y$ pada diagram panah tersebut akan memiliki lebih dari satu anak panah menunjuk ke Y (lihat gambar 2.15).




Gambar 2.15 Sebuah Fungsi yang Tidak Satu-Satu

Definisi:

Jika fungsi dari $X$ ke $Y$ dan range dari $f$ adalah $Y$, $f$ dikatakan onto Y (fungsi onto atau fungsi surjektif). Dengan kata lain, untuk setiap $y \in Y$, terdapat $x \in X$ sedemikian hingga $f(x) = y$. Secara simbolis, dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\forall y \in Y \; \exists x \in X \; (f(x) = y)$$

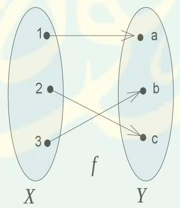
Bentuk definisi seperti di atas sering digunakan untuk membuktikan fungsi surjektif (Baugh, 2009: 126).

Contoh 7:

Fungsi

$$f = \{(1, a), (2, c), (3, b)\}$$

Dari $X = \{1,2,3\}$ ke $Y = \{a, b, c\}$ adalah satu-satu dan onto.



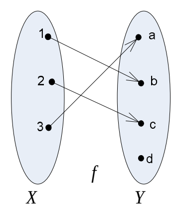

Gambar 2.16 Sebuah Fungsi yang Satu-Satu dan Onto

Contoh 8:

Fungsi

$$f = \{(1, b), (2, c), (3, a)\}$$

Dari $X = \{1,2,3\}$ ke $Y = \{a, b, c, d\}$ tidak onto.




Gambar 2.17 Sebuah Fungsi yang Tidak Onto

Definisi:

Sebuah fungsi yang bersifat satu- satu dan onto disebut fungsi bijektif (Baugh, 2009: 127).

Contoh 9:

Fungsi pada contoh 7 adalah fungsi bijektif.

Contoh 10:

Jika $f$ adalah bijeksi dari himpunan hingga $X$ ke himpunan terhingga $Y$, maka $|X| = |Y|$, yaitu himpunan memiliki kardinalitas yang sama dan ukuran yang sama pula. Sebagai contoh,

$$f = \{(1, a), (2, b), (3, c), (4, d)\}$$

Adalah fungsi bijeksi dari $X = \{1,2,3,4\}$ ke $Y = \{a, b, c, d\}$. Kedua set memiliki empat elemen. Akibatnya, $f$ memetakan unsur-unsur di $Y$: $f(1) = a$ yaitu elemen pertama di $Y$; $f(2) = b$ adalah elemen kedua di Y; dan seterusnya.

**2.6 Pelabelan**

Diberikan graf $G$, $V\ (G) = V$ dan $E\ (G) = E$. Pelabelan pada suatu graf adalah sebarang pemetaan atau fungsi yang memasangkan unsur – unsur graf (titik atau sisi) dengan bilangan (biasanya bilangan bulat positif). Kotzig dan Rosa mendefinisikan pelabelan ajaib menjadi pelabelan total pada titik dan sisi, yang mana pelabelanya adalah bilangan bulat dari 1 sampai $|\ V\ (G)\ | + |\ E\ (G)\ |$. Jumlah label pada sebuah sisi dan titik di kedua ujungnya adalah konstan. Pada tahun 1996 Ringel dan Llado mendefinisikan kembali jenis pelabelan ini sebagai pelabelan sisi ajaib. Juga, Enomoto telah memperkenalkan nama super sisi ajaib untuk pelabelan ajaib, dengan menambahkan sifat bahwa vertex $v$ menerima label yang lebih kecil, $(1, 2, \dots, v)$ (Park, dkk. 2008: 11).

Sebuah pemetaan satu-satu $\lambda$ dari $V \cup E$ ke integer $(1, 2, \dots, V + E)$ disebut pelabelan sisi ajaib jika ada konstanta $k$ sehingga untuk setiap sisi $xy$ ,berlaku $\lambda\,(x) + \lambda\,(xy) + \lambda\,(y) = k$. Konstanta $k$ disebut bilangan sisi ajaib untuk $\lambda$. Sebuah pelabelan sisi ajaib $\lambda$ disebut super-ajaib jika $\lambda\,(V) = (1, 2, \dots, v)$ dan $\lambda\,(E) = (v + 1, v + 2, \dots, v + e)$. Sebuah graf $G$ disebut sisi-ajaib (super sisi ajaib) jika terdapat pelabelan sisi ajaib (super sisi ajaib) pada graf $G$ (Park, dkk. 2008: 11).

Misalkan G graph dengan himpunan titik $V$ dan himpunan sisi $E$. Banyak titik di $G$ adalah $p$ dan banyak sisi di $G$ adalah $q$. Pelabelan total sisi ajaib pada graph $G$ adalah fungsi bijektif $\lambda$ dari $V \cup E$ pada himpunan

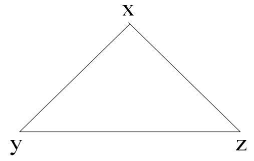
$$\{1, 2, 3, \dots, p + q\}$$

sehingga untuk sebarang sisi $(x, y)$ di $G$ berlaku

$$\lambda(x) + \lambda(xy) + \lambda(y) = k$$

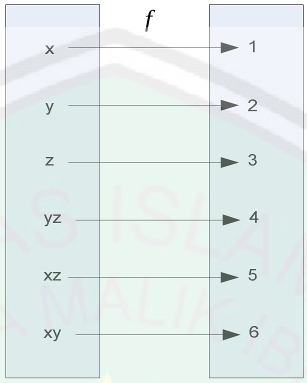
Untuk suatu konstanta $k$. Selanjutnya $k$ disebut bilangan ajaib pada $G$ dan $G$ disebut total sisi ajaib (Wijaya dan Baskoro, 2000: 1-2).

Sebagai contoh, perhatikan graph $G$ berikut dengan $V(G) = \{x, y, z\}$ dan $E(G) = \{xy, yz, xz\}$. Jadi order $G$ adalah $p = 3$ dan ukuran $G$ adalah $q = 3$. Akan ditunjukkan bahwa graph $G$ adalah total sisi ajaib.




Gambar 2.18 Graf $G$

Jika dibuat fungsi $f$ dari $V(G) \cup E(G)$ ke himpunan $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ sebagai berikut:




Gambar 2.19 Fungsi $f$ dari $V(G) \cup E(G)$ ke Himpunan $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

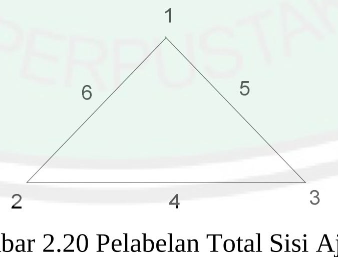
Diperoleh

$f(x) + f(xy) + f(y) = 1 + 6 + 2 = 9$

$f(x) + f(xz) + f(z) = 1 + 5 + 3 = 9$

$f(x) + f(yz) + f(z) = 2 + 4 + 3 = 9$

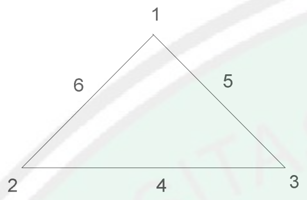
Jadi fungsi f adalah pelabelan total sisi ajaib pada G. Pelabelan pada graph G sehingga diperoleh pelabelan total sisi ajaib dapat digambar sebagai berikut:



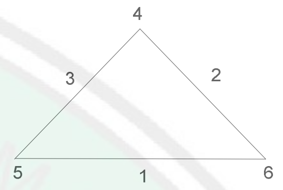

Gambar 2.20 Pelabelan Total Sisi Ajaib

Pelabelan total sisi ajaib yang memetakan himpunan titik suatu graph ke himpunan $\{1, 2, 3, \ldots, order\}$ disebut pelabelan super sisi ajaib. Dengan demikian, pelabelan super sisi ajaib adalah suatu bentuk khusus dari pelabelan total sisi ajaib. Setiap pelabelan super sisi ajaib pasti pelabelan total sisi ajaib tapi tidak sebaliknya. Graph yang dapat dikenai pelabelan super sisi ajaib disebut graph super sisi ajaib (Abdussakir, 2005: 27).

Sebagai contoh, perhatikanlah gambar di bawah ini:




Gambar 2.21 Pelabelan Total Sisi Ajaib




Gambar 2.22 Pelabelan Total Sisi Ajaib

Gambar 2.21 dan 2.22 adalah pelabelan total sisi ajaib. Meskipun demikian, pelabelan pada gambar 2.21 disebut pelabelan super sisi ajaib sedangkan pada gambar 2.22 bukan pelabelan super sisi ajaib. Hal ini karena pada gambar 2.21 himpunan titik dipetakan ke himpunan $\{1, 2, 3\}$ sedangkan pada gambar 2.22 tidak.

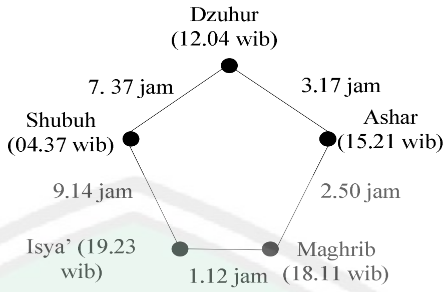
Ibadah sholat fardhu merupakan contoh salah satu ibadah yang dapat direpresentasikan dalam pelabelan graf. Shalat mempunyai kedudukan yang amat penting dalam islam, dan merupakan fondasi yang kokoh bagi tegaknya agama islam. Ibadah shalat dalam islam sangat penting, sehingga harus dilaksanakan pada waktunya.

Al-Quran tidak menerangkan secara terperinci waktu-waktu pelaksanaan shalat fardhu. Tetapi, dalam hadits Rasulullah SAW waktu-waktu sholat telah dinyatakan secara terperinci, batas awal sampai batas akhir waktu setiap sholat. Salah satu hadits yang menerangkan waktu-waktu sholat tersebut adalah hadits yang diriwayatkan oleh Imam Bukhari :

> *"Bahwasanya jibril datang kepada Nabi SAW, lalu berkata kepadanya:"bangun dan bershalatlah" maka nabipun shalat dzuhur diketika telah tergelincir matahari. Kemudian Jibril datang pula kepada*

> *Nabi pada waktu ashar, lalu berkata:"bangun dan bershalatlah". Maka nabi bershalat ketika bayangan segala sesuatu itu sepanjang dirinya. Kemudian Jibril datang pula kepada Nabi pada waktu maghrib, lalu berkata:"bangun dan bershalatlah" maka nabi shalat maghrib diwaktu telah terbenam matahari. Kemudian Jibril datang pada waktu isya', lalu berkata:"bangun dan bershalatlah" maka nabi bersholat isya' diwaktu telah hilang mega-mega merah. Kemudian Jibril datang pula di waktu shubuh, diketika telah cemerlang fajar. Pada keesokan harinya jibril datang lagi untuk shalat dhuhur. Jibril berkata:"bangun dan bershalatlah" maka nabi sholat dzuhur ketika bayangan segala sesuatu telah menjadi sepanjang dirinya. Kemudia Jibril datang lagi pada waktu ashar, lalu berkata: "bangun dan bershalatlah" maka nabi bersholat ashar ketika telah terjadi bayangan segala sesuatu dua kali bayangan darinya. Kemudian Jibril datang lagi pada waktu maghrib sama seperti waktu beliau datang kemarin. Kemudian Jibril datang lagi pada waktu isya' diketika telah berlalu separoh malam, atau sepertiga malam, maka nabipun bersholat isya' Kemudian Jibril datang lagi pada waktu fajar telah bersinar terang, lalu berkata:"bangun dan bershalatlah", maka nabi bangun dan bersholat shubuh. Sesudah itu Jibril berkata:"waktu-waktu di antara kedua waktu ini, itulah waktu shalat" (kitab hadits imam Ahmad, hadits ke 10819)*

Berdasarkan hadits di atas maka dapat diperinci ketentuan waktu sholat fardhu. Untuk waktu dzuhur, dimulai sejak matahari tergelincir yaitu sesaat setelah mencapai titik kulminasi dalam peredaran harianya sampai bayang-bayang sesuatu sama panjangnya. Waktu ashar dimulai sejak bayang-bayang sesuatu sama panjangnya hingga matahari terbenam. Waktu maghrib dimulai sejak matahari terbenam sampai hilangnya mega merah. Waktu isya' dimulai sejak hilangnya mega merah sampai separuh malam (terbit fajar), dan waktu shubuh dimulai sejak fajar terbit hingga matahari terbit. Sehingga jika waktu-waktu sholat fardhu ini direpresentasikan dalam pelabelan graf akan tergambar sebagai berikut:



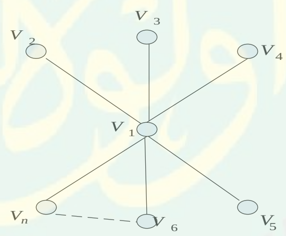

Gambar 2.23 Representasi Pelabelan Graf terhadap Waktu Sholat Fardhu

## 2.7 Graf Star

Definisi:

Graf star adalah graf bipartisi komplit yang terbentuk dari $K_{1,n}$(Wilson dan Watkins, 1990: 37).

Untuk pembahasan selanjutnya graf star dinotasikan dengan $S_n$, dimana $n$ adalah bilangan asli. Berikut ini adalah gambar graf $S_n$:




Gambar 2.24 Graf $S_n$

Suatu graf star ($S_n$), tergambar dalam sebuah Firman Allah yang berkaitan dengan sunatullah. Dalam surat An-Nahl ayat 11 dikatakan bahwa:

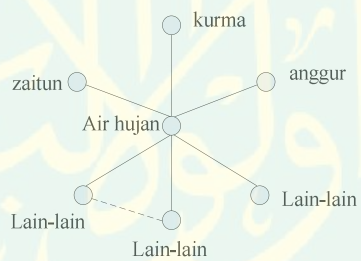
يُنۢبِتُ لَكُم بِهِ ٱلزَّرۡعَ وَٱلزَّيۡتُونَ وَٱلنَّخِيلَ وَٱلۡأَعۡنَٰبَ وَمِن كُلِّ ٱلثَّمَرَٰتِۚ إِنَّ فِي
ذَٰلِكَ لَأٓيَةٗ لِّقَوۡمٖ يَتَفَكَّرُونَ ١١

Artinya:

*"Dia menumbuhkan bagi kamu dengan air hujan itu tanam-tanaman; zaitun, korma, anggur dan segala macam buah-buahan. Sesungguhnya pada yang demikian itu benar-benar ada tanda (kekuasaan Allah) bagi kaum yang memikirkan".*

Alam semesta dan proses-proses di dalamnya yang ada pada ayat tersebut di atas dikatakan sebagai ayatullah itu "dibaca" oleh para pakar fisika dan kelakuan alam yang mereka temukan sebagai kesimpulan itu mereka namakan "hukum alam". Bagi ilmuwan muslim, hukum alam itu tidak lain adalah peraturan Allah SWT, sunnatullah, yang diberlakukan pada alam semesta, pada saat dan sesaat setelah ia diciptakan, untuk diikutinya (Baiquni, 1995: 24).

Dari ayat di atas, maka graf star $(S_n)$ dapat diasumsikan sebagai sunatullah, dengan titik pusat diasumsikan sebagai air hujan dan titik-titik lainya diasumsikan sebagai segala macam tanaman yang tumbuh karena air hujan. Sehingga dengan pengaitan pada graf star $(S_n)$ akan terilustrasi sebagai berikut:




Gambar 2.25 Representasi Sunatullah pada Graf Star $(S_n)$

# BAB III

# PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dibahas mengenai pelabelan super sisi ajaib pada graf star yang antara titik pusatnya dihubungkan oleh satu titik pengait. Penulis memberi label dengan pelabelan super sisi ajaib pada graf star $(S_{n_1}, S_{n_2}, S_{n_3}, \dots, S_{n_j})$, yang mana antara titik pusat $S_{n_1}$ dan $S_{n_2}, S_{n_2}$ dan $S_{n_3}$ , … , $S_{n_{j-1}}$ dan $S_{n_j}$ dihubungkan oleh satu titik pengait.

Misalkan graf $G$ adalah graf $S_n$ sebanyak $m$ yang titik pusatnya dihubungkan oleh satu titik pengait $(\hat{l})$ mempunyai himpunan titik dan himpunan sisi:

$$V(G) = \begin{Bmatrix} V_1^1, V_2^1, \dots, V_{n_1}^1, V_1^2, V_2^2, \dots, V_{n_2}^2, \dots, V_{n_j}^j \\ V_0^1, V_0^{2,}, V_0^3, \dots, V_0^j \\ V^{\hat{1}}, V^{\hat{2}}, V^{\hat{3}}, \dots, V^{\hat{l}} \end{Bmatrix}, 1 \le j \le m, 1 \le \hat{l} \le j-1$$

$$E(G) = \begin{Bmatrix} V_0^1 V_1^1, V_0^1 V_2^1, \dots, V_0^1 V_{n_1}^1, V_0^2 V_1^2, V_0^2 V_2^2, \dots, V_0^2 V_{n_2}^2, \dots, V_0^j V_1^j, V_0^j V_2^j, \dots, V_0^j V_{n_j}^j \\ V_0^1 V^{\hat{1}}, V_0^2 V^{\hat{1}}, V_0^2 V^{\hat{2}}, \dots, V_0^k V^{\hat{l}} \end{Bmatrix}$$

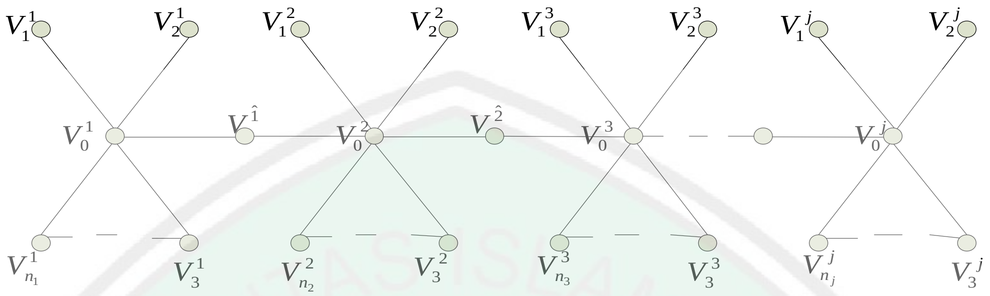
dimana:

$V_{n_j}^j$: titik ujung ke-$j$ dari graf star ke-$j$.

$V_0^j$: titik yang menyatakan titik pusat graf star ke-$j$.

$V^{\hat{l}}$: titik pengait antara titik pusat graf star ke-$j$ dengan ke-$(j+1)$.

Maka graf $G$ dapat digambarkan sebagai berikut:

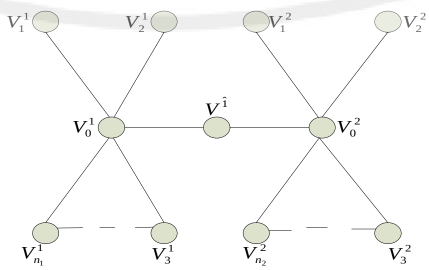


Gambar 3. 1. Graf-Graf Star dengan Titik Pusat Terhubung oleh Satu Titik Pengait

Dengan demikian, graf $S_n$ sebanyak $m$ dengan titik pusat terhubung oleh satu titik pengait memiliki titik sebanyak $n_1 + n_2 + \cdots + n_j + 2m - 1$ dengan $V_1^1$ sebagai titik ujung ke$-1$ dari graf $S_{n_1}$. $V_1^1$ ditetapkan dengan label 1 dan berlaku untuk seterusnya. Dari beberapa kali percobaan, akhirnya penulis menemukan pelabelan super sisi ajaib pada graf $S_n$ yang terhubung oleh titik pengait sebagai berikut:

### 3.1 Pelabelan Pada 2 Graf Star $(S_{n_1}, S_{n_2})$ Dengan Titik Pusat Terhubung Oleh Satu Titik Pengait

Dua graf star $(S_{n_1}, S_{n_2})$ dengan titik pusat terhubung oleh satu titik pengait $(V^{\hat{1}})$ dapat digambarkan sebagai berikut:

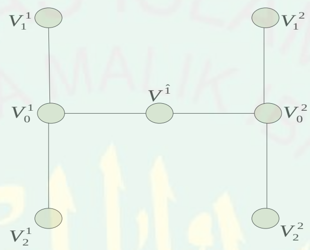


Gambar 3. 2. Dua Graf Star dengan Titik Pusat Terhubung oleh 1 Titik Pengait

### 3.1.1. Pelabelan Super Sisi Ajaib Untuk 2 Graf Star $(S_{n_1}, S_{n_2})$ Dengan $n_1 = 2$, $n_2 = n_2$ Untuk $n_1, n_2$ Bilangan Asli.

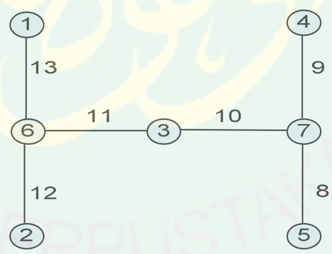
1. Untuk $n_1 = 2, n_2 = 2$.

Dua graf star dengan $n_1 = 2, n_2 = 2$ dapat digambarkan sebagai berikut:




Gambar 3. 3. Dua Graf Star dengan $n_1 = 2, n_2 = 2$

Salah satu pelabelan super sisi ajaib pada 2 graf star $(S_{n_1}, S_{n_2})$ dengan $n_1 = 2, n_2 = 2$ dapat digambarkan sebagai berikut:




Gambar 3. 4. SEM pada Dua Graf Star dengan $n_1 = 2, n_2 = 2$

Bilangan ajaib untuk pelabelan graf di atas adalah $k = 20$.

Jika $f$ adalah pelabelan super sisi ajaib pada 2 graf star $(S_{n_1}, S_{n_2})$ dengan titik pusat terhubung oleh satu titik pengait $(V^{\hat{1}})$, dimana $n_1 = 2, n_2 = 2$ maka diperoleh:

$f(V_1^1) = 1$

$f(V_2^1) = 2$

$f(V_1^2) = 4$

$f(V_2^2) = 5$

$f(V_0^1) = 6$

$f(V_0^2) = 7$

$f(V^{\hat{1}}) = 3$

$f(V_0^1 V_1^1) = 13$

$f(V_0^1 V_2^1) = 12$

$f(V_0^2 V_1^2) = 9$

$f(V_0^2 V_2^2) = 8$

$f(V_0^1 V^{\hat{1}}) = 11$

$f(V_0^2 V^{\hat{1}}) = 10$

Berdasarkan pelabelan tersebut, diperoleh hubungan sebagai berikut:

$f(V_1^1) = 1$

$f(V_2^1) = 2$

$f(V_1^2) = 4 = 2 + 1 + 1$

$f(V_2^2) = 5 = 2 + 1 + 2$

$f(V_0^1) = 6 = 2 + 2 + 2$

$f(V_0^2) = 7 = 2 + 2 + 3$

$f(V^{\hat{1}}) = 3 = 2 + 1$

$f(V_0^1 V_1^1) = 13 = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 6 - 1$

$f(V_0^1 V_2^1) = 12 = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 6 - 2$

$f(V_0^2 V_1^2) = 9 = 2 + 2 \cdot 2 + 4 - 1$

$f(V_0^2 V_2^2) = 8 = 2 + 2 \cdot 2 + 4 - 2$

Jadi diperoleh kesamaan pola pada beberapa indeks berikut:

a. Titik $V_i^1$

$f(V_1^1) = 1$

$f(V_2^1) = 2$

Jadi disimpulkan $f(V_i^1) = i, 1 \leq i \leq n_1$.

b. Titik $V_i^2$:

$f(V_1^2) = 4 = 2 + 1 + 1$

$f(V_2^2) = 5 = 2 + 1 + 2$

Jadi disimpulkan $f(V_i^2) = n_1 + 1 + i, 1 \leq i \leq n_2$.

c. Sisi $V_0^1 V_i^1$:

$f(V_0^1 V_1^1) = 13 = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 6 - 1$

$f(V_0^1 V_2^1) = 12 = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 6 - 2$

Jadi disimpulkan$f(V_0^1 V_i^1) = 2n_1 + 2n_2 + 6 - i, 1 \leq i \leq n_1$.

d. Sisi $V_0^2 V_i^2$:

$f(V_0^2 V_1^2) = 9 = 2 + 2 \cdot 2 + 4 - 1$

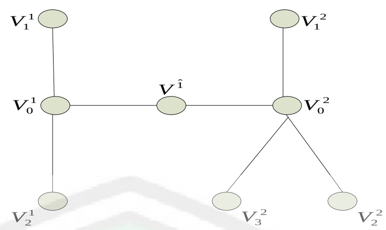
$f(V_0^2 V_2^2) = 8 = 2 + 2 \cdot 2 + 4 - 2$

Jadi disimpulkan $f(V_0^2 V_i^2) = n_1 + 2n_2 + 4 - i, 1 \leq i \leq n_2$.

Untuk titik dan sisi yang lain belum menampakkan pola karena datanya masih tunggal.

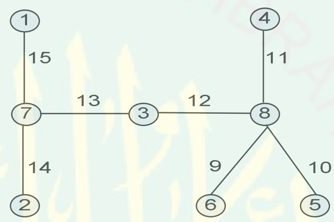
2. Untuk $n_1 = 2, n_2 = 3$.

Dua graf star dengan $n_1 = 2, n_2 = 3$ dapat digambarkan sebagai berikut:




Gambar 3. 5. Dua Graf Star dengan $n_1 = 2, n_2 = 3$

Salah satu pelabelan super sisi ajaib pada 2 graf star $(S_{n_1}, S_{n_2})$ dengan $n_1 = 2, n_2 = 3$ dapat digambarkan sebagai berikut:




Gambar 3. 6. SEM pada Dua Graf Star dengan $n_1 = 2, n_2 = 3$

Bilangan ajaib untuk pelabelan graf di atas adalah $k = 23$.

Jika $f$ adalah pelabelan super sisi ajaib pada 2 graf star $(S_{n_1}, S_{n_2})$ dengan titik pusat terhubung oleh satu titik pengait $(V^{\hat{1}})$, dimana $n_1 = 2, n_2 = 3$ maka diperoleh:

$f(V_1^1) = 1$ $\quad$ $f(V_0^1 V_1^1) = 15$

$f(V_2^1) = 2$ $\quad$ $f(V_0^1 V_2^1) = 14$

$f(V_1^2) = 4$ $\quad$ $f(V_0^2 V_1^2) = 11$

$f(V_2^2) = 5$ $\quad$ $f(V_0^2 V_2^2) = 10$

$f(V_3^2) = 6$ $\quad$ $f(V_0^2 V_3^2) = 9$

$f(V_0^1) = 7$ $\quad$ $f\left(V_0^1 V^{\hat{1}}\right) = 13$

$f(V_0^2) = 8$ $\quad$ $f\left(V_0^2 V^{\hat{1}}\right) = 12$

$f(V^{\hat{1}}) = 3$

Berdasarkan pelabelan tersebut, diperoleh hubungan sebagai berikut:

$f(V_1^1) = 1$

$f(V_2^1) = 2$

$f(V_1^2) = 4 = 2 + 1 + 1$

$f(V_2^2) = 5 = 2 + 1 + 2$

$f(V_3^2) = 6 = 2 + 1 + 3$

$f(V_0^1) = 7 = 2 + 3 + 2$

$f(V_0^2) = 8 = 2 + 3 + 3$

$f(V^{\hat{1}}) = 3 = 2 + 1$

$f(V_0^1 V_1^1) = 15 = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 6 - 1$

$f(V_0^1 V_2^1) = 14 = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 6 - 2$

$f(V_0^2 V_1^2) = 11 = 2 + 2 \cdot 3 + 4 - 1$

$f(V_0^2 V_2^2) = 10 = 2 + 2 \cdot 3 + 4 - 2$

$f(V_0^2 V_3^2) = 9 = 2 + 2 \cdot 3 + 4 - 3$

Jadi diperoleh kesamaan pola pada beberapa indeks berikut:

a. Titik $V_i^1$

$f(V_1^1) = 1$

$f(V_2^1) = 2$

Jadi disimpulkan $f(V_i^1) = i, 1 \leq i \leq n_1$.

b. Titik $V_i^2$:

$f(V_1^2) = 4 = 2 + 1 + 1$

$f(V_2^2) = 5 = 2 + 1 + 2$

$f(V_3^2) = 6 = 2 + 1 + 3$

Jadi disimpulkan $f(V_i^2) = n_1 + 1 + i, 1 \leq i \leq n_2$.

c. Sisi $V_0^1 V_i^1$:

$f(V_0^1 V_1^1) = 15 = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 6 - 1$

$f(V_0^1 V_2^1) = 14 = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 6 - 2$

Jadi disimpulkan$f(V_0^1 V_i^1) = 2n_1 + 2n_2 + 6 - i, 1 \leq i \leq n_1$.

d. Sisi $V_0^2 V_i^2$:

$f(V_0^2 V_1^2) = 11 = 2 + 2 \cdot 3 + 4 - 1$

$f(V_0^2 V_2^2) = 10 = 2 + 2 \cdot 3 + 4 - 2$

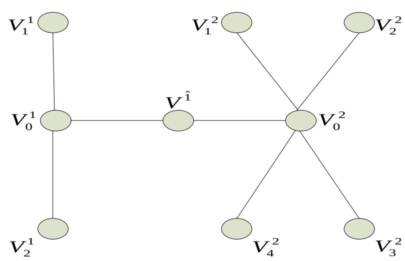
$f(V_0^2 V_3^2) = 9 = 2 + 2 \cdot 3 + 4 - 3$

Jadi disimpulkan $f(V_0^2 V_i^2) = n_1 + 2n_2 + 4 - i, 1 \leq i \leq n_2$.

Untuk titik dan sisi yang lain belum menampakkan pola karena datanya masih tunggal.

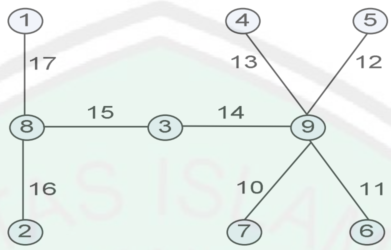
3. Untuk $n_1 = 2, n_2 = 4$.

Dua graf star dengan $n_1 = 2, n_2 = 4$ dapat digambarkan sebagai berikut:




Gambar 3. 7. Dua Graf Star dengan $n_1 = 2, n_2 = 4$

Salah satu pelabelan super sisi ajaib pada 2 graf star $(S_{n_1}, S_{n_2})$ dengan $n_1 = 2, n_2 = 4$ dapat digambarkan sebagai berikut:




Gambar 3. 8. SEM pada Dua Graf Star dengan $n_1 = 2, n_2 = 4$

Bilangan ajaib untuk pelabelan graf di atas adalah $k = 26$.

Jika $f$ adalah pelabelan super sisi ajaib pada 2 graf star $(S_{n_1}, S_{n_2})$ dengan titik pusat terhubung oleh satu titik pengait $(V^{\hat{1}})$, dimana $n_1 = 2, n_2 = 4$ maka diperoleh:

| | |
|---|---|
| $f(V_1^1) = 1$ | $f(V_0^1 V_1^1) = 17$ |
| $f(V_2^1) = 2$ | $f(V_0^1 V_2^1) = 16$ |
| $f(V_1^2) = 4$ | $f(V_0^2 V_1^2) = 13$ |
| $f(V_2^2) = 5$ | $f(V_0^2 V_2^2) = 12$ |
| $f(V_3^2) = 6$ | $f(V_0^2 V_3^2) = 11$ |
| $f(V_4^2) = 7$ | $f(V_0^2 V_4^2) = 10$ |
| $f(V_0^1) = 8$ | $f\left(V_0^1 V^{\hat{1}}\right) = 15$ |
| $f(V_0^2) = 9$ | $f\left(V_0^2 V^{\hat{1}}\right) = 14$ |
| $f\left(V^{\hat{1}}\right) = 3$ | |

Berdasarkan pelabelan tersebut, diperoleh hubungan sebagai berikut:

$f(V_1^1) = 1$

$f(V_2^1) = 2$

$f(V_1^2) = 4 = 2 + 1 + 1$

$f(V_2^2) = 5 = 2 + 1 + 2$

$f(V_3^2) = 6 = 2 + 1 + 3$

$f(V_4^2) = 7 = 2 + 1 + 4$

$f(V_0^1) = 8 = 2 + 4 + 2$

$f(V_0^2) = 9 = 2 + 4 + 3$

$f\left(V^{\hat{1}}\right) = 3 = 2 + 1$

$f(V_0^1 V_1^1) = 17 = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 6 - 1$

$f(V_0^1 V_2^1) = 16 = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 6 - 2$

$f(V_0^2 V_1^2) = 13 = 2 + 2 \cdot 4 + 4 - 1$

$f(V_0^2 V_2^2) = 12 = 2 + 2 \cdot 4 + 4 - 2$

$f(V_0^2 V_3^2) = 11 = 2 + 2 \cdot 4 + 4 - 3$

$f(V_0^2 V_4^2) = 10 = 2 + 2 \cdot 4 + 4 - 4$

Jadi diperoleh kesamaan pola pada beberapa indeks berikut:

a. Titik $V_i^1$

   $f(V_1^1) = 1$

   $f(V_2^1) = 2$

   Jadi disimpulkan $f(V_i^1) = i, 1 \le i \le n_1$.

b. Titik $V_i^2$:

   $f(V_1^2) = 4 = 2 + 1 + 1$

   $f(V_2^2) = 5 = 2 + 1 + 2$

   $f(V_3^2) = 6 = 2 + 1 + 3$

$f(V_4^2) = 7 = 2 + 1 + 4$

Jadi disimpulkan $f(V_i^2) = n_1 + 1 + i, 1 \leq i \leq n_2$.

c. Sisi $V_0^1 V_i^1$:

$f(V_0^1 V_1^1) = 17 = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 6 - 1$

$f(V_0^1 V_2^1) = 16 = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 6 - 2$

Jadi disimpulkan$f(V_0^1 V_i^1) = 2n_1 + 2n_2 + 6 - i, 1 \leq i \leq n_1$.

d. Sisi $V_0^2 V_i^2$:

$f(V_0^2 V_1^2) = 13 = 2 + 2 \cdot 4 + 4 - 1$

$f(V_0^2 V_2^2) = 12 = 2 + 2 \cdot 4 + 4 - 2$

$f(V_0^2 V_3^2) = 11 = 2 + 2 \cdot 4 + 4 - 3$

$f(V_0^2 V_4^2) = 10 = 2 + 2 \cdot 4 + 4 - 4$

Jadi disimpulkan $f(V_0^2 V_i^2) = n_1 + 2n_2 + 4 - i, 1 \leq i \leq n_2$.

Untuk titik dan sisi yang lain belum menampakkan pola karena datanya masih tunggal.

Dari beberapa contoh di atas, nampak beberapa pola pelabelan super sisi ajaib untuk dua graf star $(S_{n_1}, S_{n_2})$ dengan titik pusat terhubung oleh satu titik pengait $(\widehat{V^1})$ dimana $n_1 = 2, n_2 = n_2$, yaitu:

a. Titik $V_i^1$

$n_1 = 2, n_2 = 2 \Rightarrow f(V_i^1) = i$

$n_1 = 2, n_2 = 3 \Rightarrow f(V_i^1) = i$

$n_1 = 2, n_2 = 4 \Rightarrow f(V_i^1) = i$

Jadi disimpulkan $f(V_i^1) = i, 1 \leq i \leq n_1$.

b. Titik $V_i^2$:

$n_1 = 2, n_2 = 2 \Rightarrow f(V_i^2) = n_1 + 1 + i$

$n_1 = 2, n_2 = 3 \Rightarrow f(V_i^2) = n_1 + 1 + i$

$n_1 = 2, n_2 = 4 \Rightarrow f(V_i^2) = n_1 + 1 + i$

Jadi disimpulkan $f(V_i^2) = n_1 + 1 + i, 1 \leq i \leq n_2$.

c. Titik$V_0^1$:

$n_1 = 2, n_2 = 2 \Rightarrow f(V_0^1) = 6 = 2 + 2 + 2$

$n_1 = 2, n_2 = 3 \Rightarrow f(V_0^1) = 7 = 2 + 3 + 2$

$n_1 = 2, n_2 = 4 \Rightarrow f(V_0^1) = 8 = 2 + 4 + 2$

Jadi disimpulkan $f(V_0^1) = n_1 + n_2 + 2$.

d. Titik$V_0^2$:

$n_1 = 2, n_2 = 2 \Rightarrow f(V_0^2) = 7 = 2 + 2 + 3$

$n_1 = 2, n_2 = 3 \Rightarrow f(V_0^2) = 8 = 2 + 3 + 3$

$n_1 = 2, n_2 = 4 \Rightarrow f(V_0^2) = 9 = 2 + 4 + 3$

Jadi disimpulkan $f(V_0^2) = n_1 + n_2 + 3$.

e. Sisi $V_0^1 V_i^1$:

$n_1 = 2, n_2 = 2 \Rightarrow f(V_0^1 V_i^1) = 2n_1 + 2n_2 + 6 - i$

$n_1 = 2, n_2 = 3 \Rightarrow f(V_0^1 V_i^1) = 2n_1 + 2n_2 + 6 - i$

$n_1 = 2, n_2 = 4 \Rightarrow f(V_0^1 V_i^1) = 2n_1 + 2n_2 + 6 - i$

Jadi disimpulkan $f(V_0^1 V_i^1) = 2n_1 + 2n_2 + 6 - i, 1 \leq i \leq n_1$.

f. Sisi $V_0^2 V_1^2$:

$n_1 = 2, n_2 = 2 \Rightarrow f(V_0^2 V_1^2) = n_1 + 2n_2 + 4 - i$

$n_1 = 2, n_2 = 3 \Rightarrow f(V_0^2 V_1^2) = n_1 + 2n_2 + 4 - i$

$n_1 = 2, n_2 = 4 \Rightarrow f(V_0^2 V_1^2) = n_1 + 2n_2 + 4 - i$

Jadi disimpulkan $f(V_0^2 V_1^2) = n_1 + 2n_2 + 4 - i, 1 \leq i \leq n_2$.

g. Sisi $V_0^1 V^{\hat{1}}$:

$n_1 = 2, n_2 = 2 \Rightarrow f\left( V_0^1 V^{\hat{1}} \right) = 11 = 2 + 2 \cdot 2 + 5$

$n_1 = 2, n_2 = 3 \Rightarrow f\left( V_0^1 V^{\hat{1}} \right) = 13 = 2 + 2 \cdot 3 + 5$

$n_1 = 2, n_2 = 4 \Rightarrow f\left( V_0^1 V^{\hat{1}} \right) = 15 = 2 + 2 \cdot 4 + 5$

Jadi disimpulkan $f\left(V_0^1 V^{\hat{1}}\right) = n_1 + 2n_2 + 5$.

h. Sisi $V_0^2 V^{\hat{1}}$:

$n_1 = 2, n_2 = 2 \Rightarrow f\left(V_0^2 V^{\hat{1}}\right) = 10 = 2 + 2 \cdot 2 + 4$

$n_1 = 2, n_2 = 3 \Rightarrow f\left(V_0^2 V^{\hat{1}}\right) = 12 = 2 + 2 \cdot 3 + 4$

$n_1 = 2, n_2 = 4 \Rightarrow f\left(V_0^2 V^{\hat{1}}\right) = 14 = 2 + 2 \cdot 4 + 4$

Jadi disimpulkan $f\left(V_0^2 V^{\hat{1}}\right) = n_1 + 2n_2 + 4$.

i. Bilangan ajaib $k$:

$n_1 = 2, n_2 = 2 \Rightarrow k = 20 = 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 8$

$n_1 = 2, n_2 = 3 \Rightarrow k = 23 = 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 8$

$n_1 = 2, n_2 = 4 \Rightarrow k = 26 = 3 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 8$

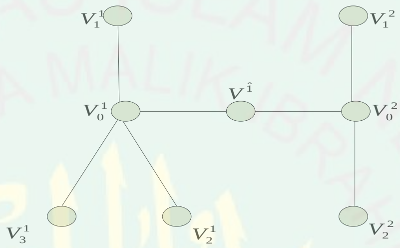
Jadi disimpulkan $k = 3(n_1 + n_2) + 8$.

Untuk titik $V^{\hat{1}}$ belum menampakkan pola $f\ (V^{\hat{1}})$ karena datanya masih tunggal.

3.1.2 Pelabelan Super Sisi Ajaib Untuk 2 Graf Star $(S_{n_1}, S_{n_2})$ Dengan $n_1 = 3$, $n_2 = n_2$Untuk $n_1, n_2$ Bilangan Asli.

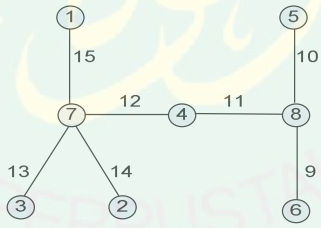
1. Untuk $n_1 = 3, n_2 = 2$.

Dua graf star dengan $n_1 = 3, n_2 = 2$ dapat digambarkan sebagai berikut:




Gambar 3. 9. Dua Graf Star dengan $n_1 = 3, n_2 = 2$

Salah satu pelabelan super sisi ajaib pada 2 graf star $(S_{n_1}, S_{n_2})$ dengan $n_1 = 3, n_2 = 2$ dapat digambarkan sebagai berikut:




Gambar 3. 10. SEM pada Dua Graf Star dengan $n_1 = 3, n_2 = 2$

Bilangan ajaib untuk pelabelan graf di atas adalah $k = 23$.

Jika $f$ adalah pelabelan super sisi ajaib pada 2 graf star $(S_{n_1}, S_{n_2})$ dengan titik pusat terhubung oleh satu titik pengait $(V^{\hat{1}})$, dimana $n_1 = 3, n_2 = 2$ maka diperoleh:

$f(V_1^1) = 1$ $\qquad\qquad$ $f(V_0^1 V_1^1) = 15$

$f(V_2^1) = 2$

$f(V_3^1) = 3$

$f(V_1^2) = 5$

$f(V_2^2) = 6$

$f(V_0^1) = 7$

$f(V_0^2) = 8$

$f(V^{\hat{1}}) = 4$

$f(V_0^1 V_2^1) = 14$

$f(V_0^1 V_3^1) = 13$

$f(V_0^2 V_1^2) = 10$

$f(V_0^2 V_2^2) = 9$

$f(V_0^1 V^{\hat{1}}) = 12$

$f(V_0^2 V^{\hat{1}}) = 11$

Berdasarkan pelabelan tersebut, diperoleh hubungan sebagai berikut:

$f(V_1^1) = 1$

$f(V_2^1) = 2$

$f(V_3^1) = 3$

$f(V_1^2) = 5 = 3 + 1 + 1$

$f(V_2^2) = 6 = 3 + 1 + 2$

$f(V_0^1) = 7 = 3 + 2 + 2$

$f(V_0^2) = 8 = 3 + 2 + 3$

$f(V^{\hat{1}}) = 4 = 3 + 1$

$f(V_0^1 V_1^1) = 15 = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 6 - 1$

$f(V_0^1 V_2^1) = 14 = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 6 - 2$

$f(V_0^1 V_3^1) = 13 = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 6 - 3$

$f(V_0^2 V_1^2) = 10 = 3 + 2 \cdot 2 + 4 - 1$

$f(V_0^2 V_2^2) = 9 = 3 + 2 \cdot 2 + 4 - 2$

Jadi diperoleh kesamaan pola pada beberapa indeks berikut:

a. Titik $V_i^1$

$f(V_1^1) = 1$

$f(V_2^1) = 2$

$f(V_3^1) = 3$

Jadi disimpulkan $f(V_i^1) = i, 1 \leq i \leq n_1$.

b. Titik $V_i^2$:

$f(V_1^2) = 5 = 3 + 1 + 1$

$f(V_2^2) = 6 = 3 + 1 + 2$

Jadi disimpulkan $f(V_i^2) = n_1 + 1 + i, 1 \leq i \leq n_2$.

c. Sisi $V_0^1 V_i^1$:

$f(V_0^1 V_1^1) = 15 = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 6 - 1$

$f(V_0^1 V_2^1) = 14 = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 6 - 2$

$f(V_0^1 V_3^1) = 13 = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 6 - 3$

Jadi disimpulkan$f(V_0^1 V_i^1) = 2n_1 + 2n_2 + 6 - i, 1 \leq i \leq n_1$.

d. Sisi $V_0^2 V_i^2$:

$f(V_0^2 V_1^2) = 10 = 3 + 2 \cdot 2 + 4 - 1$

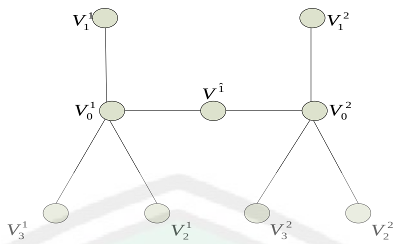
$f(V_0^2 V_2^2) = 9 = 3 + 2 \cdot 2 + 4 - 2$

Jadi disimpulkan $f(V_0^2 V_i^2) = n_1 + 2n_2 + 4 - i, 1 \leq i \leq n_2$.

Untuk titik dan sisi yang lain belum menampakkan pola karena datanya masih tunggal.

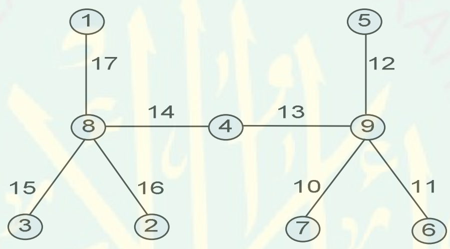
2. Untuk $n_1 = 3, n_2 = 3$.

Dua graf star dengan $n_1 = 3, n_2 = 3$ dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3. 11. Dua Graf Star dengan $n_1 = 3, n_2 = 3$

Salah satu pelabelan super sisi ajaib pada 2 graf star $(S_{n_1}, S_{n_2})$ dengan $n_1 = 3, n_2 = 3$ dapat digambarkan sebagai berikut:




Gambar 3. 12. SEM pada Dua Graf Star dengan $n_1 = 3, n_2 = 3$

Bilangan ajaib untuk pelabelan graf di atas adalah $k = 26$.

Jika $f$ adalah pelabelan super sisi ajaib pada 2 graf star $(S_{n_1}, S_{n_2})$ dengan titik pusat terhubung oleh satu titik pengait $(V^{\hat{1}})$, dimana $n_1 = 3, n_2 = 3$ maka diperoleh:

$f(V_1^1) = 1$ $\quad$ $f(V_0^1 V_1^1) = 17$

$f(V_2^1) = 2$ $\quad$ $f(V_0^1 V_2^1) = 16$

$f(V_3^1) = 3$ $\quad$ $f(V_0^1 V_3^1) = 15$

$f(V_1^2) = 5$ $\quad$ $f(V_0^2 V_1^2) = 12$

$f(V_2^2) = 6$ $\quad$ $f(V_0^2 V_2^2) = 11$

$f(V_3^2) = 7$ $\quad$ $f(V_0^2 V_3^2) = 10$

$f(V_0^1) = 8$ $f(V_0^1 V^{\hat{1}}) = 14$

$f(V_0^2) = 9$ $f(V_0^2 V^{\hat{1}}) = 13$

$f(V^{\hat{1}}) = 4$

Berdasarkan pelabelan tersebut, diperoleh hubungan sebagai berikut:

$f(V_1^1) = 1$

$f(V_2^1) = 2$

$f(V_3^1) = 3$

$f(V_1^2) = 5 = 3 + 1 + 1$

$f(V_2^2) = 6 = 3 + 1 + 2$

$f(V_3^2) = 7 = 3 + 1 + 3$

$f(V_0^1) = 8 = 3 + 3 + 2$

$f(V_0^2) = 9 = 3 + 3 + 3$

$f(V^{\hat{1}}) = 4 = 3 + 1$

$f(V_0^1 V_1^1) = 17 = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 6 - 1$

$f(V_0^1 V_2^1) = 16 = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 6 - 2$

$f(V_0^1 V_3^1) = 15 = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 6 - 3$

$f(V_0^2 V_1^2) = 12 = 3 + 2 \cdot 3 + 4 - 1$

$f(V_0^2 V_2^2) = 11 = 3 + 2 \cdot 3 + 4 - 2$

$f(V_0^2 V_3^2) = 10 = 3 + 2 \cdot 3 + 4 - 3$

Jadi diperoleh kesamaan pola pada beberapa indeks berikut:

a. Titik $V_i^1$:

$f(V_1^1) = 1$

$f(V_2^1) = 2$

$f(V_3^1) = 3$

Jadi disimpulkan $f(V_i^1) = i, 1 \leq i \leq n_1$.

b. Titik $V_i^2$:

$f(V_1^2) = 5 = 3 + 1 + 1$

$f(V_2^2) = 6 = 3 + 1 + 2$

$f(V_3^2) = 7 = 3 + 1 + 3$

Jadi disimpulkan $f(V_1^2) = n_1 + 1 + i, 1 \leq i \leq n_2$.

c. Sisi$V_0^1V_i^1$:

$f(V_0^1V_1^1) = 17 = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 6 - 1$

$f(V_0^1V_2^1) = 16 = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 6 - 2$

$f(V_0^1V_3^1) = 15 = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 6 - 3$

Jadi disimpulkan $f(V_0^1V_i^1) = 2n_1 + 2n_2 + 6 - i, 1 \leq i \leq n_1$.

d. Sisi $V_0^2V_i^2$:

$f(V_0^2V_1^2) = 12 = 3 + 2 \cdot 3 + 4 - 1$

$f(V_0^2V_2^2) = 11 = 3 + 2 \cdot 3 + 4 - 2$

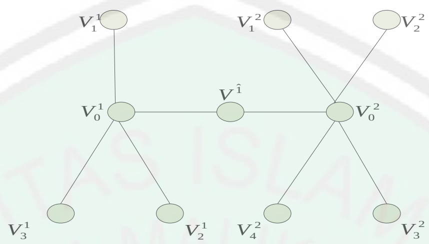
$f(V_0^2V_3^2) = 10 = 3 + 2 \cdot 3 + 4 - 3$

Jadi disimpulkan $f(V_0^2V_i^2) = n_1 + 2n_2 + 4 - i, 1 \leq i \leq n_2$.

Untuk titik dan sisi yang lain belum menampakkan pola karena datanya masih tunggal.

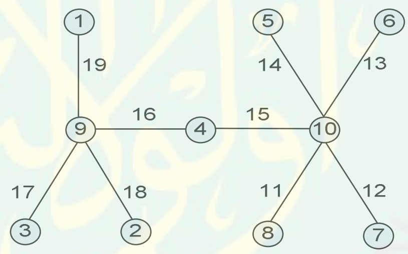
3. Untuk $n_1 = 3, n_2 = 4$.

Dua graf star dengan $n_1 = 3, n_2 = 4$ dapat digambarkan sebagai berikut:




Gambar 3. 13. Dua Graf Star dengan $n_1 = 3, n_2 = 4$

Salah satu pelabelan super sisi ajaib pada 2 graf star $(S_{n_1}, S_{n_2})$ dengan $n_1 = 3, n_2 = 4$ dapat digambarkan sebagai berikut:




Gambar 3. 14. SEM pada Dua Graf Star dengan $n_1 = 3, n_2 = 4$

Bilangan ajaib untuk pelabelan graf di atas adalah $k = 29$.

Jika $f$ adalah pelabelan super sisi ajaib pada 2 graf star $(S_{n_1}, S_{n_2})$ dengan titik pusat terhubung oleh satu titik pengait $(V^{\hat{1}})$, dimana $n_1 = 3, n_2 = 4$ maka diperoleh:

$f(V_1^1) = 1$ $\qquad$ $f(V_0^1 V_1^1) = 19$

$f(V_2^1) = 2$ $\qquad$ $f(V_0^1 V_2^1) = 18$

$f(V_3^1) = 3$ $\qquad$ $f(V_0^1 V_3^1) = 17$

$f(V_1^2) = 5$ $f(V_0^2V_1^2) = 14$

$f(V_2^2) = 6$ $f(V_0^2V_2^2) = 13$

$f(V_3^2) = 7$ $f(V_0^2V_3^2) = 12$

$f(V_4^2) = 8$ $f(V_0^2V_4^2) = 11$

$f(V_0^1) = 9$ $f(V_0^1V^{\hat{1}}) = 16$

$f(V_0^2) = 10$ $f(V_0^2V^{\hat{1}}) = 15$

$f(V^{\hat{1}}) = 4$

Berdasarkan pelabelan tersebut, diperoleh hubungan sebagai berikut:

$f(V_1^1) = 1$

$f(V_2^1) = 2$

$f(V_3^1) = 3$

$f(V_1^2) = 5 = 3 + 1 + 1$

$f(V_2^2) = 6 = 3 + 1 + 2$

$f(V_3^2) = 7 = 3 + 1 + 3$

$f(V_4^2) = 8 = 3 + 1 + 4$

$f(V_0^1) = 9 = 3 + 4 + 2$

$f(V_0^2) = 10 = 3 + 4 + 3$

$f(V^{\hat{1}}) = 4 = 3 + 1$

$f(V_0^1V_1^1) = 19 = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 6 - 1$

$f(V_0^1V_2^1) = 18 = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 6 - 2$

$f(V_0^1V_3^1) = 17 = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 6 - 3$

$f(V_0^2V_1^2) = 14 = 3 + 2 \cdot 4 + 4 - 1$

$f(V_0^2V_2^2) = 13 = 3 + 2 \cdot 4 + 4 - 2$

$f(V_0^2V_3^2) = 12 = 3 + 2 \cdot 4 + 4 - 3$

$f(V_0^2V_4^2) = 11 = 3 + 2 \cdot 4 + 4 - 4$

Jadi diperoleh kesamaan pola pada beberapa indeks berikut:

a. Titik $V_i^1$

$f(V_1^1) = 1$

$f(V_2^1) = 2$

$f(V_3^1) = 3$

Jadi disimpulkan $f(V_i^1) = i, 1 \leq i \leq n_1$.

b. Titik $V_i^2$:

$f(V_1^2) = 5 = 3 + 1 + 1$

$f(V_2^2) = 6 = 3 + 1 + 2$

$f(V_3^2) = 7 = 3 + 1 + 3$

$f(V_4^2) = 8 = 3 + 1 + 4$

Jadi disimpulkan $f(V_i^2) = n_1 + 1 + i, 1 \leq i \leq n_2$.

c. Sisi $V_0^1V_i^1$:

$f(V_0^1V_1^1) = 19 = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 6 - 1$

$f(V_0^1V_2^1) = 18 = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 6 - 2$

$f(V_0^1V_3^1) = 17 = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 6 - 3$

Jadi disimpulkan$f(V_0^1V_i^1) = 2n_1 + 2n_2 + 6 - i, 1 \leq i \leq n_1$.

d. Sisi $V_0^2V_i^2$:

$f(V_0^2V_1^2) = 14 = 3 + 2 \cdot 4 + 4 - 1$

$f(V_0^2V_2^2) = 13 = 3 + 2 \cdot 4 + 4 - 2$

$f(V_0^2V_3^2) = 12 = 3 + 2 \cdot 4 + 4 - 3$

$f(V_0^2V_4^2) = 11 = 3 + 2 \cdot 4 + 4 - 4$

Jadi disimpulkan $f(V_0^2V_i^2) = n_1 + 2n_2 + 4 - i, 1 \leq i \leq n_2$.

Untuk titik dan sisi yang lain belum menampakkan pola karena datanya masih tunggal.

Dari beberapa contoh di atas, nampak beberapa pola pelabelan super sisi ajaib untuk dua graf star $(S_{n_1}, S_{n_2})$ dengan titik pusat terhubung oleh satu titik pengait $\left(V^{\hat{1}}\right)$ dimana $n_1 = 3, n_2 = n_2$, yaitu:

a. Titik $V_i^1$

$n_1 = 3, n_2 = 2 \Rightarrow f(V_i^1) = i$

$n_1 = 3, n_2 = 3 \Rightarrow f(V_i^1) = i$

$n_1 = 3, n_2 = 4 \Rightarrow f(V_i^1) = i$

Jadi disimpulkan $f(V_i^1) = i, 1 \leq i \leq n_1$.

b. Titik $V_i^2$:

$n_1 = 3, n_2 = 2 \Rightarrow f(V_i^2) = n_1 + 1 + i$

$n_1 = 3, n_2 = 3 \Rightarrow f(V_i^2) = n_1 + 1 + i$

$n_1 = 3, n_2 = 4 \Rightarrow f(V_i^2) = n_1 + 1 + i$

Jadi disimpulkan $f(V_i^2) = n_1 + 1 + i, 1 \leq i \leq n_2$.

c. Titik$V_0^1$:

$n_1 = 3, n_2 = 2 \Rightarrow f(\alpha_0) = 7 = 3 + 2 + 2$

$n_1 = 3, n_2 = 3 \Rightarrow f(\alpha_0) = 8 = 3 + 3 + 2$

$n_1 = 3, n_2 = 4 \Rightarrow f(\alpha_0) = 9 = 3 + 4 + 2$

Jadi disimpulkan $f(V_0^1) = n_1 + n_2 + 2$.

d. Titik$V_0^2$:

$n = 3, m = 2 \Rightarrow \ f(\beta_0) = 8 = 3 + 2 + 3$

$n = 3, m = 3 \Rightarrow f(\beta_0) = 9 = 3 + 3 + 3$

$n = 3, m = 4 \Rightarrow f(\beta_0) = 10 = 3 + 4 + 3$

Jadi disimpulkan $f(V_0^2) = n_1 + n_2 + 3$.

e. Sisi $V_0^1 V_i^1$:

$n_1 = 3, n_2 = 2 \ \Rightarrow f(V_0^1 V_i^1) = 2n_1 + 2n_2 + 6 - i$

$n_1 = 3, n_2 = 3 \ \Rightarrow f(V_0^1 V_i^1) = 2n_1 + 2n_2 + 6 - i$

$n_1 = 3, n_2 = 4 \ \Rightarrow f(V_0^1 V_i^1) = 2n_1 + 2n_2 + 6 - i$

Jadi disimpulkan $f(V_0^1 V_i^1) = 2n_1 + 2n_2 + 6 - i, 1 \leq i \leq n_1$.

f. Sisi $V_0^2 V_1^2$:

$n_1 = 3, n_2 = 2 \Rightarrow f(V_0^2 V_1^2) = n_1 + 2n_2 + 4 - i$

$n_1 = 3, n_2 = 3 \Rightarrow f(V_0^2 V_1^2) = n_1 + 2n_2 + 4 - i$

$n_1 = 3, n_2 = 4 \Rightarrow f(V_0^2 V_1^2) = n_1 + 2n_2 + 4 - i$

Jadi disimpulkan $f(V_0^2 V_1^2) = n_1 + 2n_2 + 4 - i, 1 \leq i \leq n_2$.

g. Sisi $V_0^1 V^{\hat{1}}$:

$n_1 = 3, n_2 = 2 \Rightarrow f(\alpha_0 u) = 12 = 3 + 2 \cdot 2 + 5$

$n_1 = 3, n_2 = 3 \Rightarrow f(\alpha_0 u) = 14 = 3 + 2 \cdot 3 + 5$

$n_1 = 3, n_2 = 4 \Rightarrow f(\alpha_0 u) = 16 = 3 + 2 \cdot 4 + 5$

Jadi disimpulkan $f\left(V_0^1 V^{\hat{1}}\right) = n_1 + 2n_2 + 5$.

h. Sisi $V_0^2 V^{\hat{1}}$:

$n_1 = 3, n_2 = 2 \Rightarrow \ f(\beta_0 u) = 11 = 3 + 2 \cdot 2 + 4$

$n_1 = 3, n_2 = 3 \Rightarrow \ f(\beta_0 u) = 13 = 3 + 2 \cdot 3 + 4$

$n_1 = 3, n_2 = 4 \Rightarrow \ f(\beta_0 u) = 15 = 3 + 2 \cdot 4 + 4$

Jadi disimpulkan $f\left(V_0^2 V^{\hat{1}}\right) = n_1 + 2n_2 + 4$.

i. Bilangan ajaib $k$:

$n_1 = 3, n_2 = 2 \Rightarrow k = 23 = 3 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 8$

$n_1 = 3, n_2 = 3 \Rightarrow k = 26 = 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 8$

$n_1 = 3, n_2 = 4 \Rightarrow k = 29 = 3 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 8$

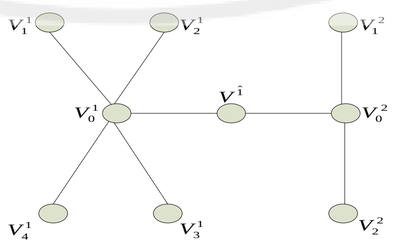
Jadi disimpulkan $k = 3(n_1 + n_2) + 8$.

Untuk titik $V^{\hat{1}}$ belum menampakkan pola $f\ (V^{\hat{1}})$ karena datanya masih tunggal.

### 3.1.3 Pelabelan Super Sisi Ajaib Untuk 2 Graf Star $(S_{n_1}, S_{n_2})$ Dengan $n_1 = 4$, $n_2 = n_2$ Untuk $n_1, n_2$ Bilangan Asli.

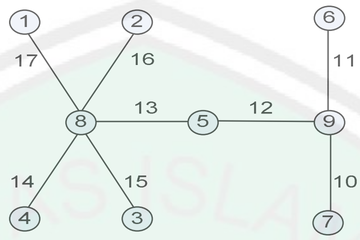
1. Untuk $n_1 = 4, n_2 = 2$.

Dua graf star dengan $n_1 = 4, n_2 = 2$ dapat digambarkan sebagai berikut:




Gambar 3. 15. Dua Graf Star dengan $n_1 = 4, n_2 = 2$

Salah satu pelabelan super sisi ajaib pada 2 graf star $(S_{n_1}, S_{n_2})$ dengan $n_1 = 4, n_2 = 2$ dapat digambarkan sebagai berikut:




Gambar 3. 16. SEM pada Dua Graf Star dengan $n_1 = 4, n_2 = 2$

Bilangan ajaib untuk pelabelan graf di atas adalah $k = 26$.

Jika $f$ adalah pelabelan super sisi ajaib pada 2 graf star $(S_{n_1}, S_{n_2})$ dengan titik pusat terhubung oleh satu titik pengait $(V^{\hat{1}})$, dimana $n_1 = 4, n_2 = 2$ maka diperoleh:

| | |
|---|---|
| $f(V_1^1) = 1$ | $f(V_0^1 V_1^1) = 17$ |
| $f(V_2^1) = 2$ | $f(V_0^1 V_2^1) = 16$ |
| $f(V_3^1) = 3$ | $f(V_0^1 V_3^1) = 15$ |
| $f(V_4^1) = 4$ | $f(V_0^1 V_4^1) = 14$ |
| $f(V_1^2) = 6$ | $f(V_0^2 V_1^2) = 11$ |
| $f(V_2^2) = 7$ | $f(V_0^2 V_2^2) = 10$ |
| $f(V_0^1) = 8$ | $f\left(V_0^1 V^{\hat{1}}\right) = 13$ |
| $f(V_0^2) = 9$ | $f\left(V_0^2 V^{\hat{1}}\right) = 12$ |
| $f\left(V^{\hat{1}}\right) = 5$ | |

Berdasarkan pelabelan tersebut, diperoleh hubungan sebagai berikut:

$f(V_1^1) = 1$

$f(V_2^1) = 2$

$f(V_3^1) = 3$

$f(V_4^1) = 4$

$f(V_1^2) = 6 = 4 + 1 + 1$

$f(V_2^2) = 7 = 4 + 1 + 2$

$f(V_0^1) = 8 = 4 + 2 + 2$

$f(V_0^2) = 9 = 4 + 2 + 3$

$f\left(V^{\hat{1}}\right) = 5 = 4 + 1$

$f(V_0^1 V_1^1) = 17 = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 6 - 1$

$f(V_0^1 V_2^1) = 16 = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 6 - 2$

$f(V_0^1 V_3^1) = 15 = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 6 - 3$

$f(V_0^1 V_4^1) = 14 = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 6 - 4$

$f(V_0^2 V_1^2) = 11 = 4 + 2 \cdot 2 + 4 - 1$

$f(V_0^2 V_2^2) = 10 = 4 + 2 \cdot 2 + 4 - 2$

Jadi diperoleh kesamaan pola pada beberapa indeks berikut:

a. Titik $V_i^1$

   $f(V_1^1) = 1$

   $f(V_2^1) = 2$

   $f(V_3^1) = 3$

   $f(V_4^1) = 4$

   Jadi disimpulkan $f(V_i^1) = i, 1 \leq i \leq n_1$.

b. Titik $V_i^2$:

   $f(V_1^2) = 6 = 4 + 1 + 1$

$f(V_2^2) = 7 = 4 + 1 + 2$

Jadi disimpulkan $f(V_i^2) = n_1 + 1 + i, 1 \leq i \leq n_2$.

c. Sisi $V_0^1 V_i^1$:

$f(V_0^1 V_1^1) = 17 = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 6 - 1$

$f(V_0^1 V_2^1) = 16 = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 6 - 2$

$f(V_0^1 V_3^1) = 15 = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 6 - 3$

$f(V_0^1 V_4^1) = 14 = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 6 - 4$

Jadi disimpulkan$f(V_0^1 V_i^1) = 2n_1 + 2n_2 + 6 - i, 1 \leq i \leq n_1$.

d. Sisi $V_0^2 V_i^2$:

$f(V_0^2 V_1^2) = 11 = 4 + 2 \cdot 2 + 4 - 1$

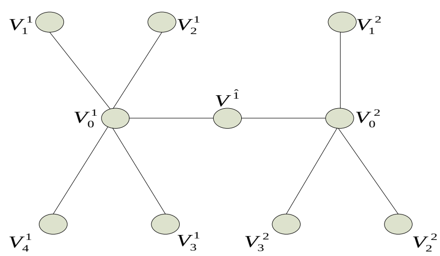
$f(V_0^2 V_2^2) = 10 = 4 + 2 \cdot 2 + 4 - 2$

Jadi disimpulkan $f(V_0^2 V_i^2) = n_1 + 2n_2 + 4 - i, 1 \leq i \leq n_2$.

Untuk titik dan sisi yang lain belum menampakkan pola karena datanya masih tunggal.

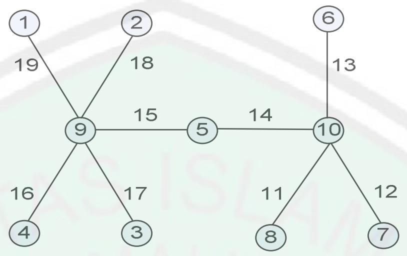
2. Untuk $n_1 = 4, n_2 = 3$.

Dua graf star dengan $n_1 = 4, n_2 = 3$ dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3. 17. Dua Dua Graf Star dengan $n_1 = 4, n_2 = 3$

Salah satu pelabelan super sisi ajaib pada 2 graf star $(S_{n_1}, S_{n_2})$, dengan $n_1 = 4, n_2 = 3$ dapat digambarkan sebagai berikut:




Gambar 3. 18. SEM pada Dua Graf Star dengan $n_1 = 4, n_2 = 3$

Bilangan ajaib untuk pelabelan graf di atas adalah $k = 29$.

Jika $f$ adalah pelabelan super sisi ajaib pada 2 graf star $(S_{n_1}, S_{n_2})$ dengan titik pusat terhubung oleh satu titik pengait $(V^{\hat{1}})$, dimana $n_1 = 4, n_2 = 3$ maka diperoleh:

$f(V_1^1) = 1$ $\quad$ $f(V_0^1 V_1^1) = 19$

$f(V_2^1) = 2$ $\quad$ $f(V_0^1 V_2^1) = 18$

$f(V_3^1) = 3$ $\quad$ $f(V_0^1 V_3^1) = 17$

$f(V_4^1) = 4$ $\quad$ $f(V_0^1 V_4^1) = 16$

$f(V_1^2) = 6$ $\quad$ $f(V_0^2 V_1^2) = 13$

$f(V_2^2) = 7$ $\quad$ $f(V_0^2 V_2^2) = 12$

$f(V_3^2) = 8$ $\quad$ $f(V_0^2 V_3^2) = 11$

$f(V_0^1) = 9$ $\quad$ $f(V_0^1 V^{\hat{1}}) = 15$

$f(V_0^2) = 10$ $\quad$ $f(V_0^2 V^{\hat{1}}) = 14$

$f(V^{\hat{1}}) = 5$

Berdasarkan pelabelan tersebut, diperoleh hubungan sebagai berikut:

$f(V_1^1) = 1$

$f(V_2^1) = 2$

$f(V_3^1) = 3$

$f(V_4^1) = 4$

$f(V_1^2) = 6 = 4 + 1 + 1$

$f(V_2^2) = 7 = 4 + 1 + 2$

$f(V_3^2) = 8 = 4 + 1 + 3$

$f(V_0^1) = 9 = 4 + 3 + 2$

$f(V_0^2) = 10 = 4 + 3 + 3$

$f\left(V^{\hat{1}}\right) = 5 = 4 + 1$

$f(V_0^1 V_1^1) = 19 = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 6 - 1$

$f(V_0^1 V_2^1) = 18 = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 6 - 2$

$f(V_0^1 V_3^1) = 17 = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 6 - 3$

$f(V_0^1 V_4^1) = 16 = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 6 - 4$

$f(V_0^2 V_1^2) = 13 = 4 + 2 \cdot 3 + 4 - 1$

$f(V_0^2 V_2^2) = 12 = 4 + 2 \cdot 3 + 4 - 2$

$f(V_0^2 V_3^2) = 11 = 4 + 2 \cdot 3 + 4 - 3$

Jadi diperoleh kesamaan pola pada beberapa indeks berikut:

a. Titik $V_i^1$

$f(V_1^1) = 1$

$f(V_2^1) = 2$

$f(V_3^1) = 3$

$f(V_4^1) = 4$

Jadi disimpulkan $f(V_i^1) = i, 1 \leq i \leq n_1$.

b. Titik $V_i^2$:

$f(V_1^2) = 6 = 4 + 1 + 1$

$f(V_2^2) = 7 = 4 + 1 + 2$

$f(V_3^2) = 8 = 4 + 1 + 3$

Jadi disimpulkan $f(V_i^2) = n_1 + 1 + i, 1 \leq i \leq n_2$.

c. Sisi $V_0^1 V_i^1$:

$f(V_0^1 V_1^1) = 19 = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 6 - 1$

$f(V_0^1 V_2^1) = 18 = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 6 - 2$

$f(V_0^1 V_3^1) = 17 = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 6 - 3$

$f(V_0^1 V_4^1) = 16 = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 6 - 4$

Jadi disimpulkan$f(V_0^1 V_i^1) = 2n_1 + 2n_2 + 6 - i, 1 \leq i \leq n_1$.

d. Sisi $V_0^2 V_i^2$:

$f(V_0^2 V_1^2) = 13 = 4 + 2 \cdot 3 + 4 - 1$

$f(V_0^2 V_2^2) = 12 = 4 + 2 \cdot 3 + 4 - 2$

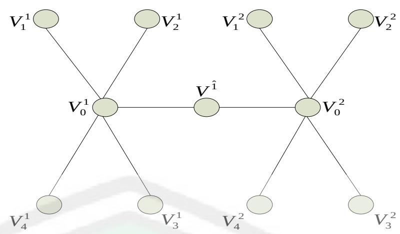
$f(V_0^2 V_3^2) = 11 = 4 + 2 \cdot 3 + 4 - 3$

Jadi disimpulkan $f(V_0^2 V_i^2) = n_1 + 2n_2 + 4 - i, 1 \leq i \leq n_2$.

Untuk titik dan sisi yang lain belum menampakkan pola karena datanya masih tunggal.

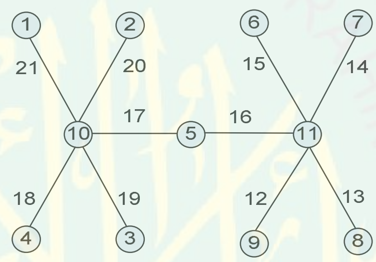
3. Untuk $n_1 = 4, n_2 = 4$.

Dua graf star dengan $n_1 = 4, n_2 = 4$ dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3. 19. Dua Graf Star dengan $n_1 = 4, n_2 = 4$

Salah satu pelabelan super sisi ajaib pada 2 graf star $(S_{n_1}, S_{n_2})$, dengan $n_1 = 4, n_2 = 4$ dapat digambarkan sebagai berikut:




Gambar 3. 20. SEM pada Dua Graf Star dengan $n_1 = 4, n_2 = 4$

Bilangan ajaib untuk pelabelan graf di atas adalah $k = 32$.

Jika $f$ adalah pelabelan super sisi ajaib pada 2 graf star $(S_{n_1}, S_{n_2})$ dengan titik pusat terhubung oleh satu titik pengait $(V^{\hat{1}})$, dimana $n_1 = 4, n_2 = 4$ maka diperoleh:

| | |
|---|---|
| $f(V_1^1) = 1$ | $f(V_0^1 V_1^1) = 21$ |
| $f(V_2^1) = 2$ | $f(V_0^1 V_2^1) = 20$ |
| $f(V_3^1) = 3$ | $f(V_0^1 V_3^1) = 19$ |
| $f(V_4^1) = 4$ | $f(V_0^1 V_4^1) = 18$ |
| $f(V_1^2) = 6$ | $f(V_0^2 V_1^2) = 15$ |
| $f(V_2^2) = 7$ | $f(V_0^2 V_2^2) = 14$ |

$f(V_3^2) = 8$

$f(V_4^2) = 9$

$f(V_0^1) = 10$

$f(V_0^2) = 11$

$f(V^{\hat{1}}) = 5$

$f(V_0^2 V_3^2) = 13$

$f(V_0^2 V_4^2) = 12$

$f(V_0^1 V^{\hat{1}}) = 17$

$f(V_0^2 V^{\hat{1}}) = 16$

Berdasarkan pelabelan tersebut, diperoleh hubungan sebagai berikut:

$f(V_1^1) = 1$

$f(V_2^1) = 2$

$f(V_3^1) = 3$

$f(V_4^1) = 4$

$f(V_1^2) = 6 = 4 + 1 + 1$

$f(V_2^2) = 7 = 4 + 1 + 2$

$f(V_3^2) = 8 = 4 + 1 + 3$

$f(V_4^2) = 9 = 4 + 1 + 4$

$f(V_0^1) = 10 = 4 + 4 + 2$

$f(V_0^2) = 11 = 4 + 4 + 3$

$f(V^{\hat{1}}) = 5 = 4 + 1$

$f(V_0^1 V_1^1) = 21 = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 + 6 - 1$

$f(V_0^1 V_2^1) = 20 = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 + 6 - 2$

$f(V_0^1 V_3^1) = 19 = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 + 6 - 3$

$f(V_0^1 V_4^1) = 18 = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 + 6 - 4$

$f(V_0^2 V_1^2) = 15 = 4 + 2 \cdot 4 + 4 - 1$

$f(V_0^2 V_2^2) = 14 = 4 + 2 \cdot 4 + 4 - 2$

$f(V_0^2 V_3^2) = 13 = 4 + 2 \cdot 4 + 4 - 3$

$f(V_0^2 V_4^2) = 12 = 4 + 2 \cdot 4 + 4 - 4$

Jadi diperoleh kesamaan pola pada beberapa indeks berikut:

a. Titik $V_i^1$

$f(V_1^1) = 1$

$f(V_2^1) = 2$

$f(V_3^1) = 3$

$f(V_4^1) = 4$

Jadi disimpulkan $f(V_i^1) = i, 1 \leq i \leq n_1$.

b. Titik $V_i^2$:

$f(V_1^2) = 6 = 4 + 1 + 1$

$f(V_2^2) = 7 = 4 + 1 + 2$

$f(V_3^2) = 8 = 4 + 1 + 3$

$f(V_4^2) = 9 = 4 + 1 + 4$

Jadi disimpulkan $f(V_i^2) = n_1 + 1 + i, 1 \leq i \leq n_2$.

c. Sisi $V_0^1 V_i^1$:

$f(V_0^1 V_1^1) = 21 = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 + 6 - 1$

$f(V_0^1 V_2^1) = 20 = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 + 6 - 2$

$f(V_0^1 V_3^1) = 19 = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 + 6 - 3$

$f(V_0^1 V_4^1) = 18 = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 + 6 - 4$

Jadi disimpulkan$f(V_0^1 V_i^1) = 2n_1 + 2n_2 + 6 - i, 1 \leq i \leq n_1$.

d. Sisi $V_0^2 V_i^2$:

$f(V_0^2 V_1^2) = 15 = 4 + 2 \cdot 4 + 4 - 1$

$f(V_0^2 V_2^2) = 14 = 4 + 2 \cdot 4 + 4 - 2$

$f(V_0^2 V_3^2) = 13 = 4 + 2 \cdot 4 + 4 - 3$

$f(V_0^2 V_4^2) = 12 = 4 + 2 \cdot 4 + 4 - 4$

Jadi disimpulkan $f(V_0^2 V_i^2) = n_1 + 2n_2 + 4 - i, 1 \leq i \leq n_2$.

Untuk titik dan sisi yang lain belum menampakkan pola karena datanya masih tunggal.

Dari beberapa contoh di atas, nampak beberapa pola pelabelan super sisi ajaib untuk dua graf star ($S_{n_1}$ dan $S_{n_2}$) dengan titik pusat terhubung oleh satu titik pengait ($V^{\hat{1}}$), dimana $n_1 = 4, n_2 = n_2$, yaitu:

a. Titik $V_i^1$:

$n_1 = 4, n_2 = 2 \Rightarrow f(V_i^1) = i$

$n_1 = 4, n_2 = 3 \Rightarrow f(V_i^1) = i$

$n_1 = 4, n_2 = 4 \Rightarrow f(V_i^1) = i$

Jadi disimpulkan $f(V_i^1) = i, 1 \leq i \leq n_1$.

b. Titik $V_i^2$:

$n_1 = 4, n_2 = 2 \Rightarrow f(V_i^2) = n_1 + 1 + i$

$n_1 = 4, n_2 = 3 \Rightarrow f(V_i^2) = n_1 + 1 + i$

$n_1 = 4, n_2 = 4 \Rightarrow f(V_i^2) = n_1 + 1 + i$

Jadi disimpulkan$f(V_i^2) = n_1 + 1 + i, 1 \leq i \leq n_2$.

c. Titik $V_0^1$:

$n_1 = 4, n_2 = 2 \Rightarrow f(V_0^1) = 8 = 4 + 2 + 2$

$n_1 = 4, n_2 = 3 \Rightarrow f(V_0^1) = 9 = 4 + 3 + 2$

$n_1 = 4, n_2 = 4 \Rightarrow f(V_0^1) = 10 = 4 + 4 + 2$

Jadi disimpulkan $f(V_0^1) = n_1 + n_2 + 2$.

d. Titik $V_0^2$:

$n_1 = 4, n_2 = 2 \Rightarrow f(V_0^2) = 9 = 4 + 2 + 3$

$n_1 = 4, n_2 = 3 \Rightarrow f(V_0^2) = 10 = 4 + 3 + 3$

$n_1 = 4, n_2 = 4 \Rightarrow f(V_0^2) = 11 = 4 + 4 + 3$

Jadi disimpulkan $f(V_0^2) = n_1 + n_2 + 3$.

e. Sisi $V_0^1 V_i^1$:

$n_1 = 4, n_2 = 2 \Rightarrow f(V_0^1 V_i^1) = 2n_1 + 2n_2 + 6 - i$

$n_1 = 4, n_2 = 3 \Rightarrow f(V_0^1 V_i^1) = 2n_1 + 2n_2 + 6 - i$

$n_1 = 4, n_2 = 4 \Rightarrow f(V_0^1 V_i^1) = 2n_1 + 2n_2 + 6 - i$

Jadi disimpulkan $f(V_0^1 V_i^1) = 2n_1 + 2n_2 + 6 - i, 1 \leq i \leq n_1$.

f. Sisi $V_0^2 V_1^2$:

$n_1 = 4, n_2 = 2 \Rightarrow f(V_0^2 V_1^2) = n_1 + 2n_2 + 4 - i$

$n_1 = 4, n_2 = 3 \Rightarrow f(V_0^2 V_1^2) = n_1 + 2n_2 + 4 - i$

$n_1 = 4, n_2 = 4 \Rightarrow f(V_0^2 V_1^2) = n_1 + 2n_2 + 4 - i$

Jadi disimpulkan $f(V_0^2 V_1^2) = n_1 + 2n_2 + 4 - i, 1 \leq i \leq n_2$.

g. Sisi $V_0^1 V^{\hat{1}}$:

$n_1 = 4, n_2 = 2 \Rightarrow f\left( V_0^1 V^{\hat{1}} \right) = 13 = 4 + 2 \cdot 2 + 5$

$n_1 = 4, n_2 = 3 \Rightarrow f\left( V_0^1 V^{\hat{1}} \right) = 15 = 4 + 2 \cdot 3 + 5$

$n_1 = 4, n_2 = 4 \Rightarrow f\left( V_0^1 V^{\hat{1}} \right) = 17 = 4 + 2 \cdot 4 + 5$

Jadi disimpulkan $f\left( V_0^1 V^{\hat{1}} \right) = n_1 + 2n_2 + 5$.

h. Sisi $V_0^2 V^{\hat{1}}$:

$n_1 = 4, n_2 = 2 \Rightarrow f\left(V_0^2 V^{\hat{1}}\right) = 12 = 4 + 2 \cdot 2 + 4$

$n_1 = 4, n_2 = 3 \Rightarrow f\left(V_0^2 V^{\hat{1}}\right) = 14 = 4 + 2 \cdot 3 + 4$

$n_1 = 4, n_2 = 4 \Rightarrow f\left(V_0^2 V^{\hat{1}}\right) = 16 = 4 + 2 \cdot 4 + 4$

Jadi disimpulkan $f\left(V_0^2 V^{\hat{1}}\right) = n_1 + 2n_2 + 4$.

i. Bilangan ajaib $k$:

$n_1 = 4, n_2 = 2 \Rightarrow k = 26 = 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 8$

$n_1 = 4, n_2 = 3 \Rightarrow k = 29 = 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 8$

$n_1 = 4, n_2 = 4 \Rightarrow k = 32 = 3 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 8$

Jadi disimpulkan $k = 3(n_1 + n_2) + 8$.

Untuk titik $V^{\hat{1}}$ belum menampakkan pola $f(V^{\hat{1}})$ karena datanya masih tunggal.

Dengan demikian, kita dapatkan pola pelabelan super sisi ajaib untuk dua graf star $(S_{n_1}, S_{n_2})$ dengan titik pusat terhubung oleh 1 titik pengait $(V^{\hat{1}})$, seperti berikut:

a. Bilangan ajaib $k$:

$n_1 = 2, n_2 = n_2 \Rightarrow k = 3(n_1 + n_2) + 8$

$n_1 = 3, n_2 = n_2 \Rightarrow k = 3(n_1 + n_2) + 8$

$n_1 = 4, n_2 = n_2 \Rightarrow k = 3(n_1 + n_2) + 8$

Jadi disimpulkan $k = 3(n_1 + n_2) + 8$.

b. Titik pada $G$:

Tabel 3.1 Pola Pelabelan Titik pada Dua Graf Star

| JUMLAH TITIK UJUNG $S_n$ | TITIK $V_i^1$: | TITIK $V_i^2$: | TITIK $V_0^1$: | TITIK $V_0^2$: | TITIK $V^{\hat{1}}$: |
|---|---|---|---|---|---|
| $n_1 = 2, n_2 = n_2$ | $f(V_i^1) = i$ | $f(V_i^2) = n_1 + 1 + i$ | $f(V_0^1) = n_1 + n_2 + 2$ | $f(V_0^2) = n_1 + n_2 + 3$ | $f(V^{\hat{1}}) = 3 = 2 + 1$ |
| $n_1 = 3, n_2 = n_2$ | $f(V_i^1) = i$ | $f(V_i^2) = n_1 + 1 + i$ | $f(V_0^1) = n_1 + n_2 + 2$ | $f(V_0^2) = n_1 + n_2 + 3$ | $f(V^{\hat{1}}) = 4 = 3 + 1$ |
| $n_1 = 4, n_2 = n_2$ | $f(V_i^1) = i$ | $f(V_i^2) = n_1 + 1 + i$ | $f(V_0^1) = n_1 + n_2 + 2$ | $f(V_0^2) = n_1 + n_2 + 3$ | $f(V^{\hat{1}}) = 5 = 4 + 1$ |
| Disimpulkan | $f(V_i^1) = i$ | $f(V_i^2) = n_1 + 1 + i$ | $f(V_0^1) = n_1 + n_2 + 2$ | $f(V_0^2) = n_1 + n_2 + 3$ | $f(V^{\hat{1}}) = n_1 + 1$ |

c. Sisi pada $G$:

Tabel 3.2 Pola Pelabelan Sisi pada Dua Graf Star

| JUMLAH TITIK UJUNG $S_n$ | SISI $V_0^1V_i^1$: | SISI $V_0^2V_i^2$: | SISI $V_0^1V^{\hat{1}}$: | SISI $V_0^2V^{\hat{1}}$: |
|---|---|---|---|---|
| $n_1 = 2, n_2 = n_2$ | $f(V_0^1V_i^1) = 2n_1 + 2n_2 + 6 - i$ | $f(V_0^2V_i^2) = n_1 + 2n_2 + 4 - i$ | $f(V_0^1V^{\hat{1}}) = n_1 + 2n_2 + 5$ | $f(V_0^2V^{\hat{1}}) = n_1 + 2n_2 + 4$ |
| $n_1 = 3, n_2 = n_2$ | $f(V_0^1V_i^1) = 2n_1 + 2n_2 + 6 - i$ | $f(V_0^2V_i^2) = n_1 + 2n_2 + 4 - i$ | $f(V_0^1V^{\hat{1}}) = n_1 + 2n_2 + 5$ | $f(V_0^2V^{\hat{1}}) = n_1 + 2n_2 + 4$ |
| $n_1 = 4, n_2 = n_2$ | $f(V_0^1V_i^1) = 2n_1 + 2n_2 + 6 - i$ | $f(V_0^2V_i^2) = n_1 + 2n_2 + 4 - i$ | $f(V_0^1V^{\hat{1}}) = n_1 + 2n_2 + 5$ | $f(V_0^2V^{\hat{1}}) = n_1 + 2n_2 + 4$ |
| Disimpulkan | $f(V_0^1V_i^1) = 2n_1 + 2n_2 + 6 - i$ | $f(V_0^2V_i^2) = n_1 + 2n_2 + 4 - i$ | $f(V_0^1V^{\hat{1}}) = n_1 + 2n_2 + 5$ | $f(V_0^2V^{\hat{1}}) = n_1 + 2n_2 + 4$ |

Dari pola yang telah di dapatkan di atas, dapat disederhanakan dalam pola dibawah:

a. Titik $V_i^j$

$j = 1 \Longrightarrow\ f(V_i^1) = i, \qquad 1 \le i \le n_1$

$j = 2 \Rightarrow f(V_i^2) = n_1 + 1 + i, \qquad 1 \le i \le n_2$

Jadi disimpulkan $f\left(V_i^j\right) = n_{j-1} + (j-1) + i,\ 1 \le i \le n_j,\ 1 \le j \le 2.$

b. Titik $V_0^j$

$j = 1 \Longrightarrow\ f(V_0^1) = n_1 + n_2 + 2$

$j = 2 \Longrightarrow\ f(V_0^2) = n_1 + n_2 + 3$

Jadi disimpulkan $f\left(V_0^j\right) = n_1 + n_2 + (j+1),\ 1 \le j \le 2.$

c. Titik $V^{\hat{l}}$

$\hat{l} = 1 \Longrightarrow f\left(V^{\hat{1}}\right) = n_1 + 1$

Jadi disimpulkan $f\left(V^{\hat{l}}\right) = n_{\hat{l}} + \hat{l},\ \hat{l} = 1.$

d. Sisi $V_0^1 V_i^1$

Diperoleh pola untuk $f(V_0^1 V_i^1) = 2n_1 + 2n_2 + 6 - i,\ 1 \le i \le n_1.$

e. Sisi $V_0^2 V_i^2$

Diperoleh pola untuk $f(V_0^2 V_i^2) = n_1 + 2n_2 + 4 - i,\ 1 \le i \le n_2.$

f. Sisi $V_0^j V^{\hat{l}}$

$j = 1, \hat{l} = 1 \Longrightarrow f\left(V_0^1 V^{\hat{l}}\right) = n_1 + 2n_2 + 5$

$j = 2, \hat{l} = 1 \Longrightarrow f\left(V_0^2 V^{\hat{l}}\right) = n_1 + 2n_2 + 4$

Jadi disimpulkan $f\left(V_0^j V^{\hat{l}}\right) = n_1 + 2n_{\hat{l}+1} + 7 - \left(j + \hat{l}\right),\ 1 \le j \le 2, \hat{l} = 1.$

Dari beberapa contoh di atas, dapat diambil sebuah konjektur sebagai berikut:

Teorema 3.1:

Dua graf star ($S_{n_1}$, $S_{n_2}$) dengan titik pusat terhubung oleh satu titik pengait, untuk setiap $n_1, n_2$ bilangan asli adalah super sisi ajaib dengan konstanta ajaib $k = 3(n_1 + n_2) + 8$.

Bukti:

Pelabelan super sisi ajaib pada graph $G$ merupakan pelabelan total sisi ajaib yang memetakan $V$ ke himpunan $\{1, 2, 3, \dots, p\}$. Pelabelan total sisi ajaib pada suatu graph $G$ dengan order $p$ dan ukuran $q$ adalah fungsi bijektif $f$ dari $V \cup E$ ke himpunan bilangan bulat {1, 2, 3, …, $p + q$} sedemikian hingga untuk masing-masing sisi $xy$ di $G$ berlaku $f(x) + f(xy) + f(y) = k$, dengan $k$ konstanta. Maka untuk membuktikan teorema 3.1 perlu ditunjukkan bahwa :

i) Pola pelabelan dari $V(G)$ dan $U(G)$ adalah fungsi.

ii) Pola pelabelan dari $V(G)$ dan $U(G)$ adalah fungsi bijektif $f$ dari $V \cup E$ ke himpunan bilangan bulat {1, 2, 3, …, $p + q$}.

iii) Untuk masing-masing sisi $xy$ di $G$ berlaku $f(x) + f(xy) + f(y) = k$.

iv) Pola pelabelan $G$ memetakan $V$ ke himpunan $\{1, 2, 3, \dots, p\}$.

Misalkan:

$$V(G) = \{V_1^1, V_2^1, V_3^1, \dots, V_{n_1}^1; V_1^2, V_2^2, V_3^2, \dots, V_{n_2}^2; V_0^1, V_0^2; V^{\hat{1}}\}$$

dimana:

$V_0^1$: titik pusat $V^1(G)$

$V_1^1, V_2^1, V_3^1, \dots, V_{n_1}^1$: titik ujung $V^1(G)$

$V_0^2$: titik pusat $V^2(G)$

$V_1^2, V_2^2, V_3^2, \dots, V_{n_2}^2$: titik ujung $V^2(G)$

$V^{\hat{1}}$: titik pengait antara $V_0^1$ dan $V_0^2$.

$E(G) = \left\{V_0^1V_1^1, V_0^1V_2^1, \dots, V_0^1V_{n_1}^1;\ V_0^2V_1^2, V_0^2V_2^2, \dots, V_0^2V_{n_2}^2; V_0^1V^{\hat{1}}, V_0^2V^{\hat{1}}\right\}$

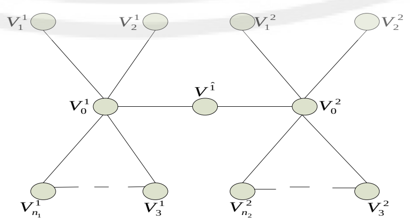
Sehingga diperoleh:

$p = n_1 + n_2 + 3,\ q = n_1 + n_2 + 2.$

dan $$p + q = (n_1 + n_2 + 3) + (n_1 + n_2 + 2)$$

$$= 2(n_1 + n_2) + 5$$

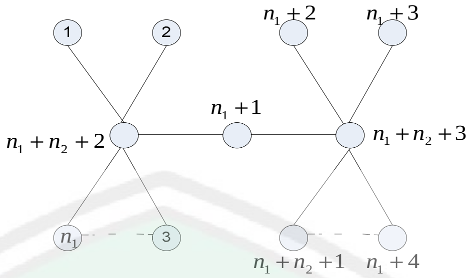
Graf $(S_{n_1}, S_{n_2})$ dapat digambarkan sebagai berikut:




Gambar 3. 21. Dua Graf Star dengan Titik Pusat

Terhubung oleh 1 Titik Pengait

Dengan pelabelan sebagai berikut:




Gambar 3. 22. SEM pada 2 Graf Star dengan Titik Pusat Terhubung oleh 1 Titik Pengait

Terdapat pola pelabelan graf $G$ sebagai berikut:

1. $f\left(V_i^j\right) = n_{j-1} + (j-1) + i, 1 \le i \le n_j, 1 \le j \le 2$
2. $f\left(V_0^j\right) = n_1 + n_2 + (j+1), 1 \le j \le 2$
3. $f\left(V^{\hat{l}}\right) = n_l + l, l = 1$
4. $f(V_0^1 V_i^1) = 2n_1 + 2n_2 + 6 - i, 1 \le i \le n_1$
5. $f(V_0^2 V_i^2) = n_1 + 2n_2 + 4 - i, 1 \le i \le n_2$
6. $f\left(V_0^j V^{\hat{l}}\right) = n_1 + 2n_{l+1} + 7 - (j+l), 1 \le j \le 2, l = 1$

i) Akan ditunjukkan bahwa pola pelabelan $V(G)$ dan $U(G)$ adalah fungsi.

Sesuai dengan definisi fungsi, suatu fungsi $f$ dari $X$ ke $Y$, adalah aturan yang memetakan setiap tepat satu elemen $X$ pada elemen $Y$. Sehingga dari definisi tersebut sudah jelas membuktikan bahwa pola pelabelan $V(G)$ dan $U(G)$ adalah fungsi.

ii) Akan ditunjukkan bahwa pola pelabelan $V(G)$ dan $U(G)$ adalah fungsi bijektif $f$ dari $V(G) \cup E(G)$ ke himpunan bilangan bulat {1, 2, 3, …, $p+q$}.

1. Fungsi injektif.

A. Untuk titik di $G$.

1. Titik $V_i^j$:

Akan ditunjukkan untuk setiap bilangan bulat positif $i_1$ dan $i_2$, $j_1$ dan $j_2$, jika $f\left(V_{i_1}^{j_1}\right) = f\left(V_{i_2}^{j_2}\right)$ maka $i_1 = i_2, j_1 = j_2$.

Diketahui $f\left(V_i^j\right) = n_{j-1} + (j-1) + i$,dengan $1 \leq i \leq n_j$, $1 \leq j \leq 2$.

Untuk $1 \leq i_1 \leq n_j, 1 \leq i_2 \leq n_j$ dan $1 \leq j_1 \leq 2, 1 \leq j_2 \leq 2$.

Karena $f\left(V_{i_1}^{j_1}\right) = f\left(V_{i_2}^{j_2}\right)$, maka diperoleh:

$$n_{j_1-1} + (j_1 - 1) + i_1 = n_{j_2-1} + (j_2 - 1) + i_2$$

$$n_{j_{1-1}} + j_1 + i_1 = n_{j_{2-1}} + j_2 + i_2$$

$$j_1 = j_2, i_1 = i_2$$

2. Titik $V_0^j$:

Akan ditunjukkan untuk setiap bilangan bulat positif $j_1$ dan $j_2$, jika $f\left(V_0^{j_1}\right) = f\left(V_0^{j_2}\right)$ maka $j_1 = j_2$.

Diketahui $f\left(V_0^j\right) = n_1 + n_2 + (j+1)$, dengan $1 \leq j \leq 2$ .

Untuk $1 \leq j_1 \leq 2, 1 \leq j_2 \leq 2$.

Karena $f\left(V_0^{j_1}\right) = f\left(V_0^{j_2}\right)$, maka diperoleh:

$$n_1 + n_2 + j_1 + 1 = n_1 + n_2 + j_2 + 1$$

$$j_1 = j_2$$

3. Titik $V^{\hat{l}}$:

Diketahui $f\left(V^{\hat{l}}\right) = n_l + l$, dan $l = 1$.

Karena $l = 1$, pola untuk titik $V^{\hat{l}}$ bisa ditulis $f\left(V^{\hat{1}}\right) = n_1 + 1$, sehingga sudah jelas injektif.

B. Untuk sisi di $G$

1. Sisi $V_0^1 V_i^1$

Akan ditunjukkan untuk setiap bilangan bulat positif $i_1$ dan $i_2$, jika $f\left(V_0^1 V_{i_1}^1\right) = f\left( V_0^1 V_{i_2}^1 \right)$ maka $i_1 = i_2$.

Diketahui $f(V_0^1 V_i^1) = 2n_1 + 2n_2 + 6 - i$, dengan $1 \leq i \leq n_1$.

Untuk $1 \leq i_1 \leq n_1$, dan $1 \leq i_2 \leq n_1$.

Karena $f(V_0^1 V_{i_1}^1) = f(V_0^1 V_{i_2}^1)$, maka diperoleh:

$$2n_1 + 2n_2 + 6 - i_1 = 2n_1 + 2n_2 + 6 - i_2$$

$$i_1 = i_2$$

2. Sisi $V_0^2 V_i^2$

Akan ditunjukkan untuk setiap bilangan bulat positif $i_1$ dan $i_2$, jika $f(V_0^2 V_{i_1}^2) = f(V_0^2 V_{i_2}^2)$ maka $i_1 = i_2$.

Diketahui $f(V_0^2 V_i^2) = n_1 + 2n_2 + 4 - i$, dengan $1 \leq i \leq n_2$.

Untuk $1 \leq i_1 \leq n_2$, dan $1 \leq i_2 \leq n_2$.

Karena $f(V_0^2 V_{i_1}^2) = f(V_0^2 V_{i_2}^2)$, maka diperoleh:

$$n_1 + 2n_2 + 4 - i_1 = n_1 + 2n_2 + 4 - i_2$$

$$i_1 = i_2$$

3. Sisi $V_0^j V^{\hat{l}}$

Akan ditunjukkan untuk setiap bilangan bulat positif $j_1$ dan $j_2$, $\hat{l}_1$ dan $\hat{l}_2$, jika $f\left(V_0^{j_1} V^{\hat{l}_1}\right) = f\left(V_0^{j_2} V^{\hat{l}_2}\right)$ maka $j_1 = j_2$, $\hat{l}_1 = \hat{l}_2$.

Diketahui $f\left(V_0^j V^{\hat{l}}\right) = n_1 + 2n_{l+1} + 7 - (j + l)$, dengan $1 \leq j \leq 2$, dan $l = 1$,

atau $f\left(V_0^j V^{\hat{1}}\right) = n_1 + 2n_2 + 7 - (j + 1)$.

Untuk $1 \leq j_1 \leq 2, 1 \leq j_2 \leq 2$.

Karena $f\left(V_0^{j_1} V^{\hat{1}}\right) = f\left(V_0^{j_2} V^{\hat{1}}\right)$, maka diperoleh:

$$n_1 + 2n_2 + 7 - (j_1 + 1) = n_1 + 2n_2 + 7 - (j_2 + 1)$$

$$j_1 = j_2$$

Dengan demikian, $f$ merupakan fungsi injektif dari $V(G) \cup E(G)$ ke $\{1, 2, 3, \ldots, p + q\}$.

2. Fungsi surjektif.

Sesuai dengan definisi surjektif, suatu $f: X \to Y$ dikatakan surjektif jika untuk setiap $y \in Y$, terdapat $x \in X$ sedemikian hingga $f(x) = y$. Prapeta untuk pelabelan $V(G)$ dan $U(G)$ adalah $\{1, 2, 3, \ldots, p + q\}$. Sehingga, untuk setiap bilangan asli $\mathbb{N}$ pasti mempunyai pasangan di kodomainnya. Dengan demikian, sudah jelas menunjukkan bahwa pola pelabelan $V(G)$ dan $U(G)$ adalah surjektif.

Karena pola pelabelan $V(G)$ dan $U(G)$ injektif juga sekaligus surjektif, maka pola pelabelan $V(G)$ dan $U(G)$ bijektif.

iii) Akan ditunjukkan bahwa untuk masing-masing sisi $xy$ di $G$ berlaku $f(x) + f(xy) + f(y) = k$.

a. Untuk sisi $V_0^1 V_i^1$ di $G$ diperoleh:

$$f(V_0^1) + f(V_0^1 V_i^1) + f(V_i^1)$$

$$= (n_1 + n_2 + 2) + (2n_1 + 2n_2 + 6 - i) + i$$

$$= 3n_1 + 3n_2 + 8$$

b. Untuk sisi $V_0^2 V_i^2$ di $G$ diperoleh:

$$f(V_0^2) + f(V_0^2 V_i^2) + f(V_i^2)$$

$$= (n_1 + n_2 + 3) + (n_1 + 2n_2 + 4 - i) + (n_1 + 1 + i)$$

$$= 3n_1 + 3n_2 + 8$$

c. Untuk sisi $V_0^j V^1$ di $G$ diperoleh:

$$f(V_0^j) + f(V_0^j V^1) + f(V^1)$$

$$= [n_1 + n_2 + (j + 1)] + [n_1 + 2n_2 + 7 - (j + 1)] + [n_1 + 1]$$

$$= 3n_1 + 3n_2 + 8$$

Jadi $G$ adalah super sisi ajaib dengan bilangan ajaib:

$$k = 3n_1 + 3n_2 + 8$$

iv) Akan ditunjukkan bahwa $f(V)$ memetakan $V$ ke $\{1, 2, 3, \dots, p\}$.

a) Titik $V_i^j$

Diketahui $f(V_i^j) = n_{j-1} + (j-1) + i$, dengan $1 \le i \le n_j$, $1 \le j \le 2$.

Karena $1 \le i \le n_j$, maka diperoleh:

$$[n_{j-1} + (j-1)] + 1 \le [n_{j-1} + (j-1)] + i$$

$$\le [n_{j-1} + (j-1)] + n_j$$

$$n_{j-1} + j \le n_{j-1} + (j-1) + i \le n_{j-1} + (j-1) + n_j$$

$$1 \le n_{j-1} + j \le n_{j-1} + (j-1) + i \le n_{j-1} + (j-1) + n_j$$

$$< n_1 + n_2 + 3$$

$$1 \le n_{j-1} + (j-1) + i < n_1 + n_2 + 3$$

Jadi $1 \le f(V_i^j) < p$.

b) Titik $V_0^j$

Diketahui $f(V_0^j) = n_1 + n_2 + (j+1)$, dengan $1 \le j \le 2$.

Karena $1 \le j \le 2$, maka diperoleh:

$$(n_1 + n_2 + 1) + 1 \le (n_1 + n_2 + 1) + j \le (n_1 + n_2 + 1) + 2$$

$$n_1 + n_2 + 2 \le n_1 + n_2 + (j+1) \le n_1 + n_2 + 3$$

$$n_1 + n_2 + 2 \le n_1 + n_2 + (j+1) \le n_1 + n_2 + 3$$

$$1 < n_1 + n_2 + 2 \le n_1 + n_2 + (j+1) \le n_1 + n_2 + 3$$

$$1 < n_1 + n_2 + (j+1) \le n_1 + n_2 + 3$$

Jadi $1 < f(V_0^j) \le p$.

c. Titik $V^{\hat{l}}$

Diketahui $f\left(V^{\hat{l}}\right) = n_l + l$, dan $l = 1$.

Dengan $l = 1$, pola untuk titik $V^{\hat{l}}$ bisa ditulis $f\left(V^{\hat{1}}\right) = n_1 + 1$.

Karena $1 < n_1 + 1 < n_1 + n_2 + 3$, maka diperoleh:

$$1 < f\left(V^{\hat{l}}\right) < p$$

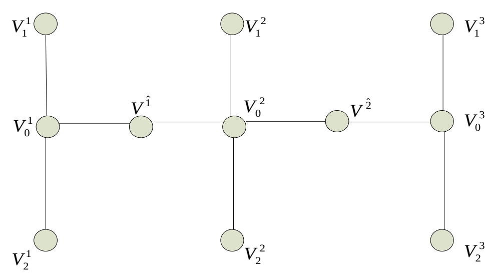
Jadi terbukti bahwa $f$ memetakan $V$ ke $\{1, 2, 3, \dots, p\}$.

Dari point (i), (ii), (iii) dan (iv) telah terbukti bahwa graf $G$ memenuhi syarat-syarat pelabelan super sisi ajaib. Sehingga graf $G$ merupakan super sisi ajaib.

### 3.2 Pelabelan Pada 3 Graf Star $(S_{n_1}, S_{n_2}, S_{n_3})$ Dengan Titik Pusat Terhubung Oleh Satu Titik Pengait

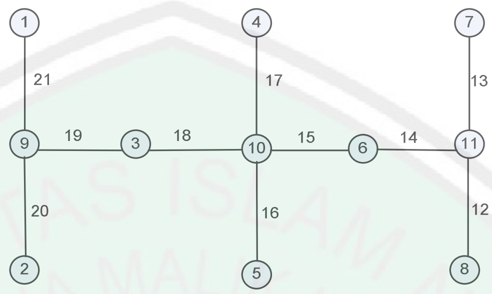
1. Untuk $n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2$.

Tiga graf star dengan $n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2$ dapat digambarkan sebagai berikut:




Gambar 3. 23. Tiga Graf Star dengan $n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2$

Salah satu pelabelan super sisi ajaib pada 3 graf star $(S_{n_1}, S_{n_2}, S_{n_3})$ dengan $n_1 = 2,\ n_2 = 2, n_3 = 2$ dapat digambarkan sebagai berikut:




Gambar 3. 24. SEM pada 3 Graf Star dengan $n_1 = 2, n_2 = 2, n_2 = 2$

Bilangan ajaib untuk pelabelan graf di atas adalah $k = 31$.

Jika $f$ adalah pelabelan super sisi ajaib pada 3 graf star $(S_{n_1}, S_{n_2}, S_{n_3})$ yang antara titik pusatnya dihubungkan dengan satu titik pengait, dimana $n_1 = 2, n_2 = 2, n_2 = 2$ maka diperoleh:

$f(V_1^1) = 1$

$f(V_2^1) = 2$

$f(V_1^2) = 4 = 2 + 1 + 1$

$f(V_2^2) = 5 = 2 + 1 + 2$

$f(V_1^3) = 7 = 2 + 2 + 2 + 1$

$f(V_1^4) = 8 = 2 + 2 + 2 + 2$

$f(V_0^1 V_1^1) = 21 = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 10 - 1$

$f(V_0^1 V_2^1) = 20 = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 10 - 2$

$f(V_0^2 V_1^2) = 17 = 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 8 - 1$

$f(V_0^2 V_2^2) = 16 = 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 8 - 2$

$f(V_0^3V_1^3) = 13 = 2 + 2 + 2 \cdot 2 + 6 - 1$

$f(V_0^3V_2^3) = 12 = 2 + 2 + 2 \cdot 2 + 6 - 2$

$f\left(V_0^1V^{\hat{1}}\right) = 19 = 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 9$

$f\left(V_0^2V^{\hat{1}}\right) = 18 = 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 8$

$f\left(V_0^2V^{\hat{2}}\right) = 15 = 2 + 2 + 2 \cdot 2 + 7$

$f\left(V_0^3V^{\hat{2}}\right) = 14 = 2 + 2 + 2 \cdot 2 + 6$

$f(V_0^1) = 9 = 2 + 2 + 2 + 3$

$f(V_0^2) = 10 = 2 + 2 + 2 + 4$

$f(V_0^3) = 11 = 2 + 2 + 2 + 5$

$f\left(V^{\hat{1}}\right) = 3 \ = 2 + 1$

$f\left(V^{\hat{2}}\right) = 6 = 2 + 2 + 2$

Jadi diperoleh kesamaan pola pada beberapa indeks berikut:

a. Titik $V_i^1$:

   $f(V_1^1) = 1$

   $f(V_2^1) = 2$

   Jadi disimpulkan $f(V_i^1) = i, 1 \leq i \leq n_1$.

b. Titik $V_i^2$:

   $f(V_1^2) = 4 = 2 + 1 + 1$

   $f(V_2^2) = 5 = 2 + 1 + 2$

   Jadi disimpulkan $f(V_i^2) = n_1 + 1 + i, 1 \leq i \leq n_2$.

c. Titik $V_i^3$:

   $f(V_1^3) = 7 = 2 + 2 + 2 + 1$

$f(V_2^3) = 8 = 2 + 2 + 2 + 2$

Jadi disimpulkan $f(V_i^3) = n_1 + n_2 + 2 + i, 1 \leq i \leq n_3$.

d. Sisi $V_0^1 V_i^1$

$f(V_0^1 V_1^1) = 21 = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 10 - 1$

$f(V_0^1 V_2^1) = 20 = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 10 - 2$

Jadi disimpulkan $f(V_0^1 V_i^1) = 2n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 10 - i, 1 \leq i \leq n_1$.

e. Sisi $V_0^2 V_i^2$:

$f(V_0^2 V_1^2) = 17 = 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 8 - 1$

$f(V_0^2 V_2^2) = 16 = 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 8 - 2$

Jadi disimpulkan $f(V_0^2 V_i^2) = n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 8 - i, 1 \leq i \leq n_2$.

f. Sisi $V_0^3 V_i^3$:

$f(V_0^3 V_1^3) = 13 = 2 + 2 + 2 \cdot 2 + 6 - 1$

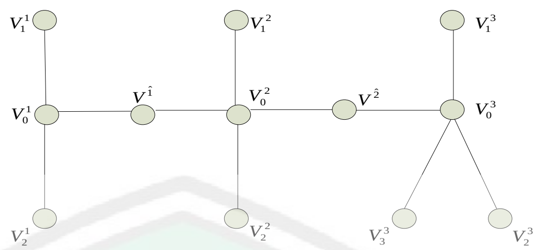
$f(V_0^3 V_2^3) = 12 = 2 + 2 + 2 \cdot 2 + 6 - 2$

Jadi disimpulkan $f(V_0^3 V_i^3) = n_1 + n_2 + 2n_3 + 6 - i, 1 \leq i \leq n_3$.

Untuk titik dan sisi yang lain belum menampakkan pola karena datanya masih tunggal.

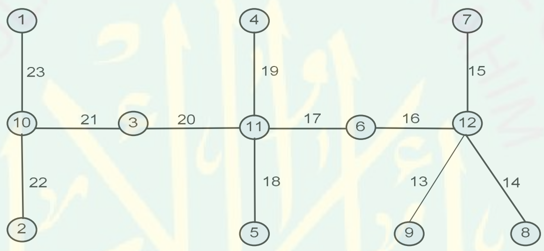
2. Untuk $n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 3$.

Tiga graf star dengan $n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 3$ dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3. 25. Tiga Graf Star dengan $n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 3$

Salah satu pelabelan super sisi ajaib pada 3 graf star $(S_{n_1}, S_{n_2}, S_{n_3})$ dengan $n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 3$ dapat digambarkan sebagai berikut:




Gambar 3. 26. SEM pada 3 Graf Star dengan $n_1 = 2, n_2 = 2, n_2 = 3$

Bilangan ajaib untuk pelabelan graf di atas adalah $k = 34$.

Jika $f$ adalah pelabelan super sisi ajaib pada 3 graf star $(S_{n_1}, S_{n_2}, S_{n_3})$ yang antara titik pusatnya dihubungkan dengan satu titik pengait, dimana $n_1 = 2, n_2 = 2, n_2 = 3$ maka diperoleh:

$f(V_1^1) = 1$

$f(V_2^1) = 2$

$f(V_1^2) = 4 = 2 + 1 + 1$

$f(V_2^2) = 5 = 2 + 1 + 2$

$f(V_1^3) = 7 = 2 + 2 + 2 + 1$

$f(V_2^3) = 8 = 2 + 2 + 2 + 2$

$f(V_3^3) = 9 = 2 + 2 + 2 + 3$

$f(V_0^1 V_1^1) = 23 = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 10 - 1$

$f(V_0^1 V_2^1) = 22 = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 10 - 2$

$f(V_0^2 V_1^2) = 19 = 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 8 - 1$

$f(V_0^2 V_2^2) = 18 = 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 8 - 2$

$f(V_0^3 V_1^3) = 15 = 2 + 2 + 2 \cdot 3 + 6 - 1$

$f(V_0^3 V_2^3) = 14 = 2 + 2 + 2 \cdot 3 + 6 - 2$

$f(V_0^3 V_3^3) = 13 = 2 + 2 + 2 \cdot 3 + 6 - 3$

$f\left(V_0^1 V^{\hat{1}}\right) = 21 = 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 9$

$f\left(V_0^2 V^{\hat{1}}\right) = 20 = 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 8$

$f\left(V_0^2 V^{\hat{2}}\right) = 17 = 2 + 2 + 2 \cdot 3 + 7$

$f\left(V_0^3 V^{\hat{2}}\right) = 16 = 2 + 2 + 2 \cdot 3 + 6$

$f(V_0^1) = 10 = 2 + 2 + 3 + 3$

$f(V_0^2) = 11 = 2 + 2 + 3 + 4$

$f(V_0^3) = 12 = 2 + 2 + 3 + 5$

$f\left(V^{\hat{1}}\right) = 3 = 2 + 1$

$f\left(V^{\hat{2}}\right) = 6 = 2 + 2 + 2$

Jadi diperoleh kesamaan pola pada beberapa indeks berikut:

a. Titik $V_i^1$:

   $f(V_1^1) = 1$

   $f(V_2^1) = 2$

   Jadi disimpulkan $f(V_i^1) = i, 1 \le i \le n_1$.

b. Titik $V_i^2$:

$f(V_1^2) = 4 = 2 + 1 + 1$

$f(V_2^2) = 5 = 2 + 1 + 2$

Jadi disimpulkan $f(V_i^2) = n_1 + 1 + i, 1 \leq i \leq n_2$.

c. Titik $V_i^3$:

$f(V_1^3) = 7 = 2 + 2 + 2 + 1$

$f(V_2^3) = 8 = 2 + 2 + 2 + 2$

$f(V_3^3) = 9 = 2 + 2 + 2 + 3$

Jadi disimpulkan $f(V_i^3) = n_1 + n_2 + 2 + i, 1 \leq i \leq n_3$.

d. Sisi $V_0^1 V_1^1$:

$f(V_0^1 V_1^1) = 23 = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 10 - 1$

$f(V_0^1 V_2^1) = 22 = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 10 - 2$

Jadi disimpulkan $f(V_0^1 V_2^1) = 2n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 10 - i, 1 \leq i \leq n_1$.

e. Sisi $V_0^2 V_1^2$:

$f(V_0^2 V_1^2) = 19 = 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 8 - 1$

$f(V_0^2 V_2^2) = 18 = 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 8 - 2$

Jadi disimpulkan $f(V_0^2 V_i^2) = n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 8 - i, 1 \leq i \leq n_2$.

f. Sisi $V_0^3 V_i^3$:

$f(V_0^3 V_1^3) = 15 = 2 + 2 + 2 \cdot 3 + 6 - 1$

$f(V_0^3 V_2^3) = 14 = 2 + 2 + 2 \cdot 3 + 6 - 2$

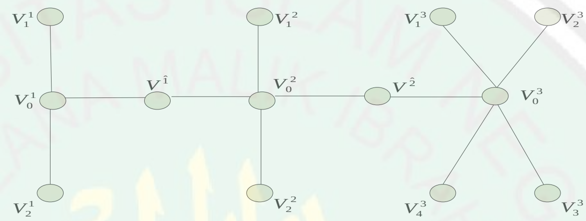
$f(V_0^3 V_3^3) = 13 = 2 + 2 + 2 \cdot 3 + 6 - 3$

Jadi disimpulkan $f(V_0^3 V_i^3) = n_1 + n_2 + 2n_3 + 6 - i, 1 \leq i \leq n_3$.

Untuk titik dan sisi yang lain belum menampakkan pola karena datanya masih tunggal.

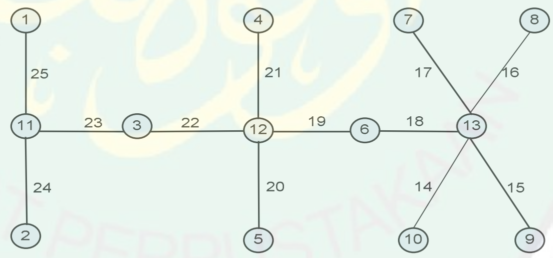
3. Untuk $n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 4$.

Tiga graf star dengan $n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2$ dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3. 27. Tiga Graf Star dengan $n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 4$

Salah satu pelabelan super sisi ajaib pada 3 graf star $(S_{n_1}, S_{n_2}, S_{n_3})$ dengan $n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 4$ dapat digambarkan sebagai berikut:




Gambar 3. 28. SEM pada 3 Graf Star dengan $n_1 = 2, n_2 = 2, n_2 = 4$

Bilangan ajaib untuk pelabelan graf di atas adalah $k = 37$.

Jika $f$ adalah pelabelan super sisi ajaib pada 3 graf star $(S_{n_1}, S_{n_2}, S_{n_3})$ yang antara titik pusatnya dihubungkan dengan satu titik pengait, dimana $n_1 = 2, n_2 = 2, n_2 = 4$ maka diperoleh:

$f(V_1^1) = 1$

$f(V_2^1) = 2$

$f(V_1^2) = 4 = 2 + 1 + 1$

$f(V_2^2) = 5 = 2 + 1 + 2$

$f(V_1^3) = 7 = 2 + 2 + 2 + 1$

$f(V_2^3) = 8 = 2 + 2 + 2 + 2$

$f(V_3^3) = 9 = 2 + 2 + 2 + 3$

$f(V_4^3) = 10 = 2 + 2 + 2 + 4$

$f(V_0^1 V_1^1) = 25 = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 10 - 1$

$f(V_0^1 V_2^1) = 24 = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 10 - 2$

$f(V_0^2 V_1^2) = 21 = 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 8 - 1$

$f(V_0^2 V_2^2) = 20 = 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 8 - 2$

$f(V_0^3 V_1^3) = 17 = 2 + 2 + 2 \cdot 4 + 6 - 1$

$f(V_0^3 V_2^3) = 16 = 2 + 2 + 2 \cdot 4 + 6 - 2$

$f(V_0^3 V_3^3) = 15 = 2 + 2 + 2 \cdot 4 + 6 - 3$

$f(V_0^3 V_4^3) = 14 = 2 + 2 + 2 \cdot 4 + 6 - 4$

$f\left(V_0^1 V^{\hat{1}}\right) = 23 = 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 9$

$f\left(V_0^2 V^{\hat{1}}\right) = 22 = 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 8$

$f\left(V_0^2 V^{\hat{2}}\right) = 19 = 2 + 2 + 2 \cdot 4 + 7$

$f\left(V_0^3 V^{\hat{2}}\right) = 18 = 2 + 2 + 2 \cdot 4 + 6$

$f(V_0^1) = 11 = 2 + 2 + 4 + 3$

$f(V_0^2) = 12 = 2 + 2 + 4 + 4$

$f(V_0^3) = 13 = 2 + 2 + 4 + 5$

$f\left(V^{\hat{1}}\right) = 3 = 2 + 1$

$f\left(V^{\hat{2}}\right) = 6 = 2 + 2 + 2$

Jadi diperoleh kesamaan pola pada beberapa indeks berikut:

a. Titik $V_i^1$:

   $f(V_1^1) = 1$

   $f(V_2^1) = 2$

   Jadi disimpulkan $f(V_i^1) = i, 1 \leq i \leq n_1$.

b. Titik $V_i^2$:

   $f(V_1^2) = 4 = 2 + 1 + 1$

   $f(V_2^2) = 5 = 2 + 1 + 2$

   Jadi disimpulkan $f(V_i^2) = n_1 + 1 + i, 1 \leq i \leq n_2$.

c. Titik $V_i^3$:

   $f(V_1^3) = 7 = 2 + 2 + 2 + 1$

   $f(V_2^3) = 8 = 2 + 2 + 2 + 2$

   $f(V_3^3) = 9 = 2 + 2 + 2 + 3$

   $f(V_4^3) = 10 = 2 + 2 + 2 + 4$

   Jadi disimpulkan $f(V_i^3) = n_1 + n_2 + 2 + i, 1 \leq i \leq n_3$.

d. Sisi $V_0^1V_i^1$:

   $f(V_0^1V_1^1) = 25 = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 10 - 1$

   $f(V_0^1V_2^1) = 24 = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 10 - 2$

   Jadi disimpulkan $f(V_0^1V_i^1) = 2n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 10 - i, 1 \leq i \leq n_1$.

e. Sisi $V_0^2V_i^2$:

$f(V_0^2V_1^2) = 21 = 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 8 - 1$

$f(V_0^2V_2^2) = 20 = 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 8 - 2$

Jadi disimpulkan $f(V_0^2V_i^2) = n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 8 - i, 1 \leq i \leq n_2$.

f. Sisi $V_0^3V_i^3$:

$f(V_0^3V_1^3) = 17 = 2 + 2 + 2 \cdot 4 + 6 - 1$

$f(V_0^3V_2^3) = 16 = 2 + 2 + 2 \cdot 4 + 6 - 2$

$f(V_0^3V_3^3) = 15 = 2 + 2 + 2 \cdot 4 + 6 - 3$

$f(V_0^3V_4^3) = 14 = 2 + 2 + 2 \cdot 4 + 6 - 4$

Jadi disimpulkan $f(V_0^3V_i^3) = n_1 + n_2 + 2n_3 + 6 - i, 1 \leq i \leq n_3$.

Untuk titik dan sisi yang lain belum menampakkan pola karena datanya masih tunggal.

Dari beberapa contoh di atas, nampak beberapa pola pelabelan super sisi ajaib untuk tiga graf star $(S_{n_1}, S_{n_2}, S_{n_3})$ dengan titik pusat terhubung oleh satu titik pengait dimana $n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = n_3$, yaitu:

a. Titik $V_i^1$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2 \Rightarrow f(V_i^1) = i$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 3 \Rightarrow f(V_i^1) = i$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 4 \Rightarrow f(V_i^1) = i$

Jadi disimpulkan $f(V_i^1) = i, 1 \leq i \leq n_1$.

b. Titik $V_i^2$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2 \Rightarrow f(V_i^2) = n_1 + 1 + i$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 3 \Rightarrow f(V_i^2) = n_1 + 1 + i$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 4 \Rightarrow \ f(V_i^2) = n_1 + 1 + i$

Jadi disimpulkan $f(V_i^2) = n_1 + 1 + i, 1 \leq i \leq n_2$.

c. Titik $V_i^3$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2 \Rightarrow \ f(V_i^3) = n_1 + n_2 + 2 + i$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 3 \Rightarrow \ f(V_i^3) = n_1 + n_2 + 2 + i$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 4 \Rightarrow \ f(V_i^3) = n_1 + n_2 + 2 + i$

Jadi disimpulkan $f(V_i^3) = n_1 + n_2 + 2 + i, 1 \leq i \leq n_3$.

d. Titik $V_0^1$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2 \Rightarrow f(V_0^1) = 9 = 2 + 2 + 2 + 3$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 3 \Rightarrow f(V_0^1) = 10 = 2 + 2 + 3 + 3$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 4 \Rightarrow f(V_0^1) = 11 = 2 + 2 + 4 + 3$

Jadi disimpulkan $f(V_0^1) = n_1 + n_2 + n_3 + 3$.

e. Titik $V_0^2$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2 \Rightarrow \ f(V_0^2) = 10 = 2 + 2 + 2 + 4$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 3 \Rightarrow f(V_0^2) = 11 = 2 + 2 + 3 + 4$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 4 \Rightarrow f(V_0^2) = 12 = 2 + 2 + 4 + 4$

Jadi disimpulkan $f(V_0^2) = n_1 + n_2 + n_3 + 4$.

f. Titik $V_0^3$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2 \Rightarrow \ f(V_0^3) = 11 = 2 + 2 + 2 + 5$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2 \Rightarrow \ f(V_0^3) = 12 = 2 + 2 + 3 + 5$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2 \Rightarrow \ f(V_0^3) = 13 = 2 + 2 + 4 + 5$

Jadi disimpulkan $f(V_0^3) = n_1 + n_2 + n_3 + 5$.

g. Sisi $V_0^1V_i^1$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2 \Rightarrow f(V_0^1V_i^1) = 2n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 10 - i$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 3 \Rightarrow f(V_0^1V_i^1) = 2n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 10 - i$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 4 \Rightarrow f(V_0^1V_i^1) = 2n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 10 - i$

Jadi disimpulkan $f(V_0^1V_i^1) = 2n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 10 - i, 1 \leq i \leq n_1$.

h. Sisi $V_0^2V_i^2$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2 \Rightarrow f(V_0^2V_i^2) = n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 8 - i$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 3 \Rightarrow f(V_0^2V_i^2) = n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 8 - i$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 4 \Rightarrow f(V_0^2V_i^2) = n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 8 - i$

Jadi disimpulkan $f(V_0^2V_i^2) = n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 8 - i, 1 \leq i \leq n_2$.

i. Sisi $V_0^3V_i^3$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2 \Rightarrow f(V_0^3V_i^3) = n_1 + n_2 + 2n_3 + 6 - i$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 3 \Rightarrow f(V_0^3V_i^3) = n_1 + n_2 + 2n_3 + 6 - i$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 4 \Rightarrow f(V_0^3V_i^3) = n_1 + n_2 + 2n_3 + 6 - i$

Jadi disimpulkan$f(V_0^3V_i^3) = n_1 + n_2 + 2n_3 + 6 - i, 1 \leq i \leq n_3$.

j. Sisi $V_0^1V^{\hat{1}}$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2 \Rightarrow f\left(V_0^1V^{\hat{1}}\right) = 19 = 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 9$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 3 \Rightarrow f\left(V_0^1V^{\hat{1}}\right) = 21 = 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 9$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 4 \Rightarrow f\left(V_0^1V^{\hat{1}}\right) = 23 = 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 9$

Jadi disimpulkan $f\left(V_0^1V^{\hat{1}}\right) = n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 9$.

k. Sisi $V_0^2V^{\hat{1}}$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2 \Rightarrow \ f\left(V_0^2V^{\hat{1}}\right) = 18 = 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 8$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 3 \Rightarrow f(V_0^2 V^{\hat{1}}) = 20 = 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 8$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 4 \Rightarrow f(V_0^2 V^{\hat{1}}) = 22 = 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 8$

Jadi disimpulkan $f(V_0^2 V^{\hat{1}}) = n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 8$.

l. Sisi $V_0^2 V^{\hat{2}}$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2 \Rightarrow f(V_0^2 V^{\hat{2}}) = 15 = 2 + 2 + 2 \cdot 2 + 7$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 3 \Rightarrow f(V_0^2 V^{\hat{2}}) = 17 = 2 + 2 + 2 \cdot 3 + 7$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 4 \Rightarrow f(V_0^2 V^{\hat{2}}) = 19 = 2 + 2 + 2 \cdot 4 + 7$

Jadi disimpulkan $f(V_0^2 V^{\hat{2}}) = n_1 + n_2 + 2n_3 + 7$.

m. Sisi $V_0^3 V^{\hat{2}}$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2 \Rightarrow f(V_0^3 V^{\hat{2}}) = 14 = 2 + 2 + 2 \cdot 2 + 6$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 3 \Rightarrow f(V_0^3 V^{\hat{2}}) = 16 = 2 + 2 + 2 \cdot 3 + 6$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 4 \Rightarrow f(V_0^3 V^{\hat{2}}) = 18 = 2 + 2 + 2 \cdot 4 + 6$

Jadi disimpulkan $f(V_0^3 V^{\hat{2}}) = n_1 + n_2 + 2n_3 + 6$.

n. Bilangan ajaib $k$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2 \Rightarrow k = 31 = 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 13$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 3 \Rightarrow k = 34 = 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 13$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 4 \Rightarrow k = 37 = 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 13$

Jadi disimpulkan $k = 3(n_1 + n_2 + n_3) + 13$.

Untuk titik $V^{\hat{1}}$ dan $V^{\hat{2}}$ belum menampakkan pola $f(V^{\hat{1}})$ dan $f(V^{\hat{2}})$karena datanya masih tunggal.

Penulis melajutkan dengan cara yang sama untuk mendapatkan pola pelabelan pada tiga graf star $(S_{n_1}, S_{n_2}, S_{n_3})$ dengan titik pusat terhubung oleh satu titik pengait dimana $n_1 = 2, n_2 = 3, n_3 = n_3$ dan $n_1 = 2, n_2 = 4, n_3 = n_3$. Sehingga di dapatkan pola untuk $n_1 = 2, n_2 = n_2, n_3 = n_3$ sebagai berikut:

a. Titik $V_i^1$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = n_3 \Rightarrow f(V_i^1) = i$

$n_1 = 2, n_2 = 3, n_3 = n_3 \Rightarrow f(V_i^1) = i$

$n_1 = 2, n_2 = 4, n_3 = n_3 \Rightarrow f(V_i^1) = i$

Jadi disimpulkan $f(V_i^1) = i, 1 \leq i \leq n_1$.

b. Titik $V_i^2$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = n_3 \Rightarrow f(V_i^2) = n_1 + 1 + i$

$n_1 = 2, n_2 = 3, n_3 = n_3 \Rightarrow f(V_i^2) = n_1 + 1 + i$

$n_1 = 2, n_2 = 4, n_3 = n_3 \Rightarrow f(V_i^2) = n_1 + 1 + i$

Jadi disimpulkan $f(V_i^2) = n_1 + 1 + i, 1 \leq i \leq n_2$.

c. Titik $V_i^3$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = n_3 \Rightarrow f(V_i^3) = n_1 + n_2 + 2 + i$

$n_1 = 2, n_2 = 3, n_3 = n_3 \Rightarrow f(V_i^3) = n_1 + n_2 + 2 + i$

$n_1 = 2, n_2 = 4, n_3 = n_3 \Rightarrow f(V_i^3) = n_1 + n_2 + 2 + i$

Jadi disimpulkan $f(V_i^3) = n_1 + n_2 + 2 + i, 1 \leq i \leq n_3$.

d. Titik $V_0^1$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = n_3 \Rightarrow f(V_0^1) = n_1 + n_2 + n_3 + 3$

$n_1 = 2, n_2 = 3, n_3 = n_3 \Rightarrow f(V_0^1) = n_1 + n_2 + n_3 + 3$

$n_1 = 2, n_2 = 4, n_3 = n_3 \Rightarrow f(V_0^1) = n_1 + n_2 + n_3 + 3$

Jadi disimpulkan $f(V_0^1) = n_1 + n_2 + n_3 + 3$.

e. Titik $V_0^2$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = n_3 \Rightarrow f(V_0^2) = n_1 + n_2 + n_3 + 4$

$n_1 = 2, n_2 = 3, n_3 = n_3 \Rightarrow f(V_0^2) = n_1 + n_2 + n_3 + 4$

$n_1 = 2, n_2 = 4, n_3 = n_3 \Rightarrow f(V_0^2) = n_1 + n_2 + n_3 + 4$

Jadi disimpulkan $f(V_0^2) = n_1 + n_2 + n_3 + 4$.

f. Titik $V_0^3$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = n_3 \Rightarrow f(V_0^3) = n_1 + n_2 + n_3 + 5$

$n_1 = 2, n_2 = 3, n_3 = n_3 \Rightarrow f(V_0^3) = n_1 + n_2 + n_3 + 5$

$n_1 = 2, n_2 = 4, n_3 = n_3 \Rightarrow f(V_0^3) = n_1 + n_2 + n_3 + 5$

Jadi disimpulkan $f(V_0^3) = n_1 + n_2 + n_3 + 5$.

g. Sisi $V_0^1 V_i^1$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = n_3 \Rightarrow f(V_0^1 V_i^1) = 2n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 10 - i$

$n_1 = 2, n_2 = 3, n_3 = n_3 \Rightarrow f(V_0^1 V_i^1) = 2n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 10 - i$

$n_1 = 2, n_2 = 4, n_3 = n_3 \Rightarrow f(V_0^1 V_i^1) = 2n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 10 - i$

Jadi disimpulkan $f(V_0^1 V_i^1) = 2n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 10 - i, 1 \leq i \leq n_1$.

h. Sisi $V_0^2 V_i^2$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = n_3 \Rightarrow f(V_0^2 V_i^2) = n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 8 - i$

$n_1 = 2, n_2 = 3, n_3 = n_3 \Rightarrow f(V_0^2 V_i^2) = n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 8 - i$

$n_1 = 2, n_2 = 4, n_3 = n_3 \Rightarrow f(V_0^2 V_i^2) = n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 8 - i$

Jadi disimpulkan $f(V_0^2 V_i^2) = n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 8 - i, 1 \leq i \leq n_2$.

i. Sisi $V_0^3 V_i^3$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = n_3 \Rightarrow f(V_0^3 V_i^3) = n_1 + n_2 + 2n_3 + 6 - i$

$n_1 = 2, n_2 = 3, n_3 = n_3 \Rightarrow f(V_0^3 V_i^3) = n_1 + n_2 + 2n_3 + 6 - i$

$n_1 = 2, n_2 = 4, n_3 = n_3 \Rightarrow f(V_0^3 V_i^3) = n_1 + n_2 + 2n_3 + 6 - i$

Jadi disimpulkan $f(V_0^3 V_i^3) = n_1 + n_2 + 2n_3 + 6 - i, 1 \leq i \leq n_3$.

j. Sisi $V_0^1 V^{\hat{1}}$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = n_3 \Rightarrow f\left(V_0^1 V^{\hat{1}}\right) = n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 9$

$n_1 = 2, n_2 = 3, n_3 = n_3 \Rightarrow f\left(V_0^1 V^{\hat{1}}\right) = n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 9$

$n_1 = 2, n_2 = 4, n_3 = n_3 \Rightarrow f\left(V_0^1 V^{\hat{1}}\right) = n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 9$

Jadi disimpulkan $f\left(V_0^1 V^{\hat{1}}\right) = n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 9$.

k. Sisi $V_0^2 V^{\hat{1}}$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = n_3 \Rightarrow f\left(V_0^2 V^{\hat{1}}\right) = n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 8$

$n_1 = 2, n_2 = 3, n_3 = n_3 \Rightarrow f\left(V_0^2 V^{\hat{1}}\right) = n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 8$

$n_1 = 2, n_2 = 4, n_3 = n_3 \Rightarrow f\left(V_0^2 V^{\hat{1}}\right) = n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 8$

Jadi disimpulkan $f\left(V_0^2 V^{\hat{1}}\right) = n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 8$.

l. Sisi $V_0^2 V^{\hat{2}}$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = n_3 \Rightarrow f\left(V_0^2 V^{\hat{2}}\right) = n_1 + n_2 + 2n_3 + 7$

$n_1 = 2, n_2 = 3, n_3 = n_3 \Rightarrow f\left(V_0^2 V^{\hat{2}}\right) = n_1 + n_2 + 2n_3 + 7$

$n_1 = 2, n_2 = 4, n_3 = n_3 \Rightarrow f\left(V_0^2 V^{\hat{2}}\right) = n_1 + n_2 + 2n_3 + 7$

Jadi disimpulkan $f\left(V_0^2 V^{\hat{2}}\right) = n_1 + n_2 + 2n_3 + 7$.

m. Sisi $V_0^3 V^{\hat{2}}$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = n_3 \Rightarrow\ f\left(V_0^3 V^{\hat{2}}\right) = n_1 + n_2 + 2n_3 + 6$

$n_1 = 2, n_2 = 3, n_3 = n_3 \Rightarrow\ f\left(V_0^3 V^{\hat{2}}\right) = n_1 + n_2 + 2n_3 + 6$

$n_1 = 2, n_2 = 4, n_3 = n_3 \Rightarrow\ f\left(V_0^3 V^{\hat{2}}\right) = n_1 + n_2 + 2n_3 + 6$

Jadi disimpulkan $f\left(V_0^3 V^{\hat{2}}\right) = n_1 + n_2 + 2n_3 + 6$.

n. Titik $V^{\hat{2}}$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = n_3 \Rightarrow\ f\left(V^{\hat{2}}\right) = 6 = 2 + 2 + 2$

$n_1 = 2, n_2 = 3, n_3 = n_3 \Rightarrow f\left(V^{\hat{2}}\right) = 7 = 2 + 3 + 2$

$n_1 = 2, n_2 = 4, n_3 = n_3 \Rightarrow\ f\left(V^{\hat{2}}\right) = 8 = 2 + 4 + 2$

Jadi disimpulkan $f\left(V^{\hat{2}}\right) = n_1 + n_2 + 2$.

o. Bilangan ajaib $k$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = n_3 \Rightarrow\ k = 3(n_1 + n_2 + n_3) + 13$

$n_1 = 2, n_2 = 3, n_3 = n_3 \Rightarrow\ k = 3(n_1 + n_2 + n_3) + 13$

$n_1 = 2, n_2 = 4, n_3 = n_3 \Rightarrow\ k = 3(n_1 + n_2 + n_3) + 13$

Jadi disimpulkan $k = 3(n_1 + n_2 + n_3) + 13$.

p. Titik $V^{\hat{1}}$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = n_3 \Rightarrow\ f\left(V^{\hat{1}}\right) = 3$

$n_1 = 2, n_2 = 3, n_3 = n_3 \Rightarrow\ f\left(V^{\hat{1}}\right) = 3$

$n_1 = 2, n_2 = 4, n_3 = n_3 \Rightarrow\ f\left(V^{\hat{1}}\right) = 3$

Untuk titik $V^{\hat{1}}$, belum dapat ditentukan polanya karena datanya masih tunggal.

Penulis mengulangi cara seperti di atas, untuk mendapatkan pola pelabelan super sisi ajaib untuk 3 graf star $(S_{n_1}, S_{n_2}, S_{n_3})$ dengan titik pusat terhubung oleh satu titik pengait dimana $n_1 = 3, n_2 = n_2, n_3 = n_3$, dan $n_1 = 4, n_2 = n_2, n_3 = n_3$. Ditemukan pola pelabelan yang sama dengan pola pelabelan super sisi ajaib untuk 3 graf star $(S_{n_1}, S_{n_2}, S_{n_3})$ dengan titik pusat terhubung oleh satu titik pengait dimana $n_1 = 2, n_2 = n_2, n_3 = n_3$, kecuali untuk titik $V^{\hat{1}}$. Pola pelabelan titik $V^{\hat{1}}$ yang diperoleh untuk:

- $n_1 = 3, n_2 = n_2, n_3 = n_3 \Rightarrow f(V^{\hat{1}}) = 4$
- $n_1 = 4, n_2 = n_2, n_3 = n_3 \Rightarrow f(V^{\hat{1}}) = 5$

Sehingga, dapat dikonstruksi pola pelabelan super sisi ajaib untuk 3 graf star $(S_{n_1}, S_{n_2}, S_{n_3})$ dengan titik pusat terhubung oleh satu titik pengait seperti berikut:

a. Bilangan ajaib $k$:

$n_1 = 2, n_2 = n_2, n_3 = n_3 \Rightarrow k = 3(n_1 + n_2 + n_3) + 13$

$n_1 = 3, n_2 = n_2, n_3 = n_3 \Rightarrow k = 3(n_1 + n_2 + n_3) + 13$

$n_1 = 4, n_2 = n_2, n_3 = n_3 \Rightarrow k = 3(n_1 + n_2 + n_3) + 13$

Jadi disimpulkan $k = 3(n_1 + n_2 + n_3) + 13$.

b. Titik pada $G$:

Tabel 3.3 Tabel Pola Pelabelan Titik pada Tiga Graf Star

| JUMLAH TITIK UJUNG $\boldsymbol{S_n}$ | $\boldsymbol{f(V_i^1)}$: | $\boldsymbol{f(V_i^2)}$: | $\boldsymbol{f(V_i^3)}$: | $\boldsymbol{f(V_0^1)}$: | $\boldsymbol{f(V_0^2)}$: | $\boldsymbol{f(V_0^3)}$: | $\boldsymbol{f(V^{\hat{1}})}$: | $\boldsymbol{f(V^{\hat{2}})}$: |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_1 = 2, n_2 = n_2, n_3 = n_3$ | $i$ | $n_1 + 1 + i$ | $= n_1 + n_2 + 2 + i$ | $n_1 + n_2 + n_3 + 3$ | $n_1 + n_2 + n_3 + 4$ | $n_1 + n_2 + n_3 + 5$ | $3 = 2 + 1$ | $n_1 + n_2 + 2$ |
| $n_1 = 3, n_2 = n_2, n_3 = n_3$ | $i$ | $n_1 + 1 + i$ | $n_1 + n_2 + 2 + i$ | $n_1 + n_2 + n_3 + 3$ | $n_1 + n_2 + n_3 + 4$ | $n_1 + n_2 + n_3 + 5$ | $4 = 3 + 1$ | $n_1 + n_2 + 2$ |
| $n_1 = 4, n_2 = n_2, n_3 = n_3$ | $i$ | $n_1 + 1 + i$ | $n_1 + n_2 + 2 + i$ | $n_1 + n_2 + n_3 + 3$ | $n_1 + n_2 + n_3 + 4$ | $n_1 + n_2 + n_3 + 5$ | $5 = 4 + 1$ | $n_1 + n_2 + 2$ |
| Disimpulkan | $i$ | $n_1 + 1 + i$ | $n_1 + n_2 + 2 + i$ | $n_1 + n_2 + n_3 + 3$ | $n_1 + n_2 + n_3 + 4$ | $n_1 + n_2 + n_3 + 5$ | $n_1 + 1$ | $n_1 + n_2 + 2$ |

c. Sisi pada $G$:

Tabel 3.4 Tabel Pola Pelabelan Sisi pada Tiga Graf Star

| JUMLAH TITIK UJUNG $\boldsymbol{S_n}$ | $f(V_0^1V_i^1)$: | $f(V_0^2V_i^2)$: | $f(V_0^3V_i^3)$: | $f(\boldsymbol{V_0^1V^{\hat{1}}})$: | $\boldsymbol{f(V_0^2V^{\hat{1}})}$: | $\boldsymbol{f(V_0^2V^{\hat{2}})}$: | $\boldsymbol{f(V_0^3V^{\hat{2}})}$: |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_1 = 2, n_2 = n_2, n_3 = n_3$ | $2(n_1 + n_2 + n_3) + 10 - i$ | $n_1 + 2(n_2 + n_3) + 8 - i$ | $n_1 + n_2 + 2n_3 + 6 - i$ | $n_1 + 2(n_2 + n_3) + 9$ | $n_1 + 2(n_2 + n_3) + 8$ | $n_1 + n_2 + 2n_3 + 7$ | $n_1 + n_2 + 2n_3 + 6$ |
| $n_1 = 3, n_2 = n_2, n_3 = n_3$ | $2(n_1 + n_2 + n_3) + 10 - i$ | $n_1 + 2(n_2 + n_3) + 8 - i$ | $n_1 + n_2 + 2n_3 + 6 - i$ | $n_1 + 2(n_2 + n_3) + 9$ | $n_1 + 2(n_2 + n_3) + 8$ | $n_1 + n_2 + 2n_3 + 7$ | $n_1 + n_2 + 2n_3 + 6$ |
| $n_1 = 4, n_2 = n_2, n_3 = n_3$ | $2(n_1 + n_2 + n_3) + 10 - i$ | $n_1 + 2(n_2 + n_3) + 8 - i$ | $n_1 + n_2 + 2n_3 + 6 - i$ | $n_1 + 2(n_2 + n_3) + 9$ | $n_1 + 2(n_2 + n_3) + 8$ | $n_1 + n_2 + 2n_3 + 7$ | $n_1 + n_2 + 2n_3 + 6$ |
| Disimpulkan | $2(n_1 + n_2 + n_3) + 10 - i$ | $n_1 + 2(n_2 + n_3) + 8 - i$ | $n_1 + n_2 + 2n_3 + 6 - i$ | $n_1 + 2(n_2 + n_3) + 9$ | $n_1 + 2(n_2 + n_3) + 8$ | $n_1 + n_2 + 2n_3 + 7$ | $n_1 + n_2 + 2n_3 + 6$ |

Dari pola yang telah di dapatkan di atas, dapat disederhanakan dalam pola dibawah:

a. Titik $V_i^j$

$j = 1 \Longrightarrow \; f(V_i^1) = i, \qquad\qquad 1 \leq i \leq n_1$

$j = 2 \Rightarrow f(V_i^2) = n_1 + 1 + i, \qquad 1 \leq i \leq n_2$

$j = 3 \Rightarrow f(V_i^3) = n_1 + n_2 + 2 + i, \quad 1 \leq i \leq n_3$

Jadi disimpulkan

$f\left(V_i^j\right) = n_{j-2} + \cdots + n_{j-1} + (j-1) + i, 1 \leq j \leq 3, 1 \leq i \leq n_j.$

b. Titik $V_0^j$

$j = 1 \Longrightarrow \; f(V_0^1) = n_1 + n_2 + n_3 + 3$

$j = 2 \Longrightarrow f(V_0^2) = n_1 + n_2 + n_3 + 4$

$j = 3 \Longrightarrow \; f(V_0^3) = n_1 + n_2 + n_3 + 5$

Jadi disimpulkan $f\left(V_0^j\right) = n_1 + n_2 + n_3 + (j+2), 1 \leq j \leq 2.$

c. Titik $V^{\hat{l}}$

$\hat{l} = 1 \Longrightarrow f\left(V^{\hat{1}}\right) = n_1 + 1$

$\hat{l} = 2 \Longrightarrow f\left(V^{\hat{2}}\right) = n_1 + n_2 + 2$

Jadi disimpulkan $f\left(V^{\hat{l}}\right) = n_1 + \cdots + n_l + l, 1 \leq l \leq 2.$

d. Sisi $V_0^1 V_i^1$

Diperoleh pola untuk $f(V_0^1 V_i^1) = 2n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 10 - i, 1 \leq i \leq n_1.$

e. Sisi $V_0^2 V_i^2$

Diperoleh pola untuk $f(V_0^2 V_i^2) = n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 8 - i, 1 \leq i \leq n_2.$

f. Sisi $V_0^3 V_i^3$

Diperoleh pola untuk $f(V_0^3 V_i^3) = n_1 + n_2 + 2n_3 + 6 - i, 1 \leq i \leq n_3$.

g. Sisi $V_0^j V^{\hat{l}}$

$j = 1, \hat{l} = 1 \Rightarrow f\left(V_0^1 V^{\hat{1}}\right) = n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 9$

$j = 2, \hat{l} = 1 \Rightarrow f\left(V_0^2 V^{\hat{1}}\right) = n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 8$

$j = 2, \hat{l} = 2 \Rightarrow f\left(V_0^2 V^{\hat{2}}\right) = n_1 + n_2 + 2n_3 + 7$

$j = 3, \hat{l} = 2 \Rightarrow f\left(V_0^3 V^{\hat{2}}\right) = n_1 + n_2 + 2n_3 + 6$

Jadi disimpulkan $f\left(V_0^j V^{\hat{l}}\right) = n_1 + n_2 + \cdots + n_l + 2n_{l+1} + \cdots + 2n_3 + 11 - (j + l), 1 \leq j \leq 3, (j - 1) \leq l \leq j$.

Dari beberapa contoh di atas, dapat diambil sebuah konjektur sebagai berikut:

Teorema 3.2:

Tiga graf star $(S_{n_1}, S_{n_2}, S_{n_3})$ dengan titik pusat terhubung oleh satu titik pengait, untuk setiap $n_1, n_2, n_3$ bilangan asli adalah super sisi ajaib dengan konstanta ajaib $k = 3(n_1 + n_2 + n_3) + 13$.

Bukti:

Pelabelan super sisi ajaib pada graph $G$ merupakan pelabelan total sisi ajaib yang memetakan $V$ ke himpunan $\{1, 2, 3, \ldots, p\}$. Pelabelan total sisi ajaib pada suatu graph $G$ dengan order $p$ dan ukuran $q$ adalah fungsi bijektif $f$ dari $V \cup E$ ke himpunan bilangan bulat $\{1, 2, 3, \ldots, p + q\}$ sedemikian hingga untuk masing-masing sisi $xy$ di $G$ berlaku $f(x) +$

$f(xy) + f(y) = k$, dengan k konstanta. Maka untuk membuktikan teorema 3.2 perlu ditunjukkan bahwa :

i) Pola pelabelan dari $V(G)$ dan $E(G)$ adalah fungsi.

ii) Pola pelabelan dari $V(G)$ dan $E(G)$ adalah fungsi bijektif $f$ dari $V \cup E$ ke himpunan bilangan bulat $\{1, 2, 3, \ldots, p + q\}$.

iii) untuk masing-masing sisi $xy$ di $G$ berlaku $f(x) + f(xy) + f(y) = k$.

iv) Pola pelabelan $G$ memetakan $V$ ke himpunan $\{1, 2, 3, \ldots, p\}$.

Misalkan:

$V(G) = \{V_1^1, V_2^1, \ldots, V_{n_1}^1; V_1^2, V_2^2, \ldots, V_{n_2}^2; V_1^3, V_2^3, \ldots, V_{n_3}^3; V_0^1, V_0^2, V_0^3; V^{\hat{1}}, V^{\hat{2}}\}$

dimana:

| | |
|---|---|
| $V_0^1$ | : titik pusat $V^1(G)$ |
| $V_1^1, V_2^1, V_3^1, \ldots, V_{n_1}^1$ | : titik ujung $V^1(G)$ |
| $V_0^2$ | : titik pusat $V^2(G)$ |
| $V_1^2, V_2^2, V_3^2, \ldots, V_{n_2}^2$ | : titik ujung $V^2(G)$ |
| $V_0^3$ | : titik pusat $V^3(G)$ |
| $V_1^3, V_2^2, V_3^2, \ldots, V_{n_3}^2$ | : titik ujung $V^3(G)$ |
| $V^{\hat{1}}$ | : titik pengait antara $V_0^1$dan $V_0^2$ |
| $V^{\hat{2}}$ | : titik pengait antara $V_0^2$dan $V_0^3$ |

$$E(G) = \begin{Bmatrix} V_0^1V_1^1, V_0^1V_2^1, \dots, V_0^1V_{n_1}^1;\ V_0^2V_1^2, V_0^2V_2^2, \dots, V_0^2V_{n_2}^2; V_0^3V_1^3, V_0^3V_2^3, \dots, V_0^3V_{n_3}^3; \\ V_0^1V^{\hat{1}}, V_0^2V^{\hat{1}}, V_0^2V^{\hat{2}}, V_0^3V^{\hat{2}} \end{Bmatrix}$$

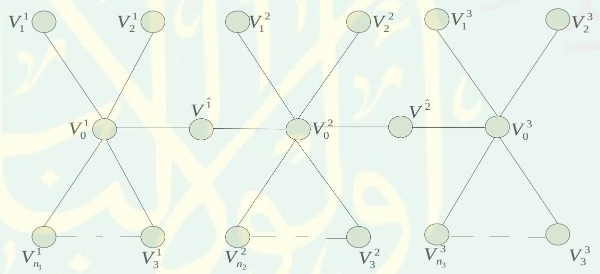
sehingga diperoleh:

$p = n_1 + n_2 + n_3 + 5,\ q = n_1 + n_2 + n_3 + 4.$

dan $\quad p + q = (n_1 + n_2 + n_3 + 5) + (n_1 + n_2 + n_3 + 4)$

$$= 2(n_1 + n_2 + n_3) + 9$$

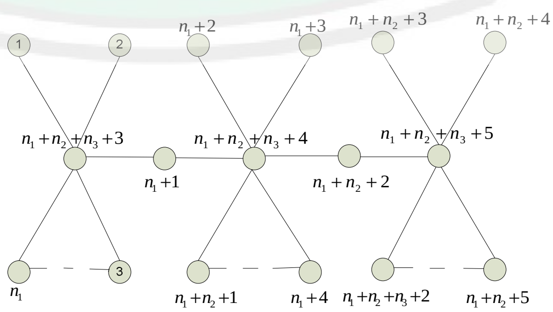
Graf $(S_{n_1}, S_{n_2}, S_{n_3})$ dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3. 29. Tiga Graf Star dengan Titik Pusat

Terhubung 1 Titik Pengait

Dengan pelabelan sebagai berikut:




Gambar 3. 30. SEM pada 3 Graf Star dengan Titik Pusat

Terhubung 1 Titik Pengait

Terdapat pola pelabelan graf $G$ sebagai berikut:

1. $f(V_i^j) = n_{j-2} + n_{j-1} + (j-1) + i, 1 \leq i \leq n_j, 1 \leq j \leq 3$
2. $f(V_0^j) = n_1 + n_2 + n_3 + (j+2), 1 \leq j \leq 3$
3. $f(V^{\hat{l}}) = n_1 + \cdots + n_l + l, 1 \leq l \leq 2$
4. $f(V_0^1 V_i^1) = 2n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 10 - i, 1 \leq i \leq n_1$
5. $f(V_0^2 V_i^2) = n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 8 - i, 1 \leq i \leq n_2$
6. $f(V_0^3 V_i^3) = n_1 + n_2 + 2n_3 + 6 - i, 1 \leq i \leq n_3$
7. $f(V_0^j V^{\hat{l}}) = n_1 + n_2 + \cdots + n_l + 2n_{(l+1)} + \cdots + 2n_3 + 11 - (j+l),$

   $1 \leq j \leq 3, (j-1) \leq l \leq j$

i) Akan ditunjukkan bahwa pola pelabelan $V(G)$ dan $E(G)$ adalah fungsi.

Sesuai dengan definisi fungsi, suatu fungsi $f$ dari $X$ ke $Y$, adalah aturan yang memetakan setiap elemen $X$ tepat satu pada elemen $Y$. Sehingga dari definisi tersebut sudah jelas membuktikan bahwa pola pelabelan $V(G)$ dan $E(G)$ adalah fungsi.

ii) Akan ditunjukkan bahwa pola pelabelan $V(G)$ dan $E(G)$ adalah fungsi bijektif $f$ dari $V(G) \cup E(G)$ ke himpunan bilangan bulat $\{1, 2, 3, \ldots, p+q\}$.

1. Fungsi injektif.

A. Untuk titik di $G$.

1. Titik $V_i^j$:

Akan ditunjukkan untuk setiap bilangan bulat positif $i_1$ dan $i_2$, $j_1$ dan $j_2$, jika $f\left(V_{i_1}^{j_1}\right) = f\left(V_{i_2}^{j_2}\right)$ maka $i_1 = i_2, j_1 = j_2$.

Diketahui $f\left(V_i^j\right) = n_{j-2} + n_{j-1} + (j-1) + i$, dengan $1 \leq i \leq n_j$, dan $1 \leq j \leq 3$.

Untuk $1 \leq i_1 \leq n_j, 1 \leq i_2 \leq n_j$ dan $1 \leq j_1 \leq 3, 1 \leq j_2 \leq 3$.

Karena $f\left(V_{i_1}^{j_1}\right) = f\left(V_{i_2}^{j_2}\right)$, maka diperoleh:

$$n_{j_1-2} + n_{j_1-1} + (j_1 - 1) + i_1 = n_{j_2-2} + n_{j_2-1} + (j_2 - 1) + i_2$$

$$n_{j_1-2} + n_{j_{1-1}} + j_1 + i_1 = n_{j_2-2} + n_{j_{2-1}} + j_2 + i_2$$

$$j_1 = j_2, i_1 = i_2$$

2.Titik $V_0^j$:

Akan ditunjukkan untuk setiap bilangan bulat positif $j_1$ dan $j_2$, jika $f\left(V_0^{j_1}\right) = f\left(V_0^{j_2}\right)$ maka $j_1 = j_2$.

Diketahui $f\left(V_0^j\right) = n_1 + n_2 + n_3 + (j+2)$, dengan $1 \leq j \leq 3$.

Untuk $1 \leq j_1 \leq 3, 1 \leq j_2 \leq 3$.

Karena $f\left(V_0^{j_1}\right) = f\left(V_0^{j_2}\right)$, maka diperoleh:

$$n_1 + n_2 + n_3 + (j_1 + 2) = n_1 + n_2 + n_3 + (j_2 + 2)$$

$$j_1 = j_2$$

3. Titik $V^{\hat{l}}$:

   Akan ditunjukkan untuk setiap bilangan bulat positif $\hat{l}_1$ dan $\hat{l}_2$, jika $f\left(V^{\hat{l}_1}\right) = f\left(V^{\hat{l}_2}\right)$ maka $\hat{l}_1 = \hat{l}_2$.

   Diketahui $f\left(V^{\hat{l}}\right) = n_1 + \cdots + n_l + l$, dengan $1 \leq l \leq 2$.

   Untuk $1 \leq \hat{l}_1 \leq 2$, $1 \leq \hat{l}_2 \leq 2$.

   Karena $f\left(V^{\hat{l}_1}\right) = f\left(V^{\hat{l}_2}\right)$, maka diperoleh:

$$n_1 + \cdots + n_{l_1} + l_1 = n_1 + \cdots + n_{l_2} + l_2$$

$$n_{l_1} + l_1 = n_{l_2} + l_2$$

$$l_1 = l_2$$

B. Untuk sisi di $G$.

1. Sisi $V_0^1 V_i^1$.

   Akan ditunjukkan untuk setiap bilangan bulat positif $i_1$ dan $i_2$, jika $f(V_0^1 V_{i_1}^1) = f(V_0^1 V_{i_2}^1)$ maka $i_1 = i_2$.

   Diketahui $f(V_0^1 V_i^1) = 2n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 10 - i$, dengan $1 \leq i \leq n_1$.

   Untuk $1 \leq i_1 \leq n_1$, dan $1 \leq i_2 \leq n_1$.

   Karena $f(V_0^1 V_{i_1}^1) = f(V_0^1 V_{i_2}^1)$ , maka diperoleh:

$$2n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 10 - i_1 = 2n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 10 - i_2$$

$$i_1 = i_2$$

2. Sisi $V_0^2 V_i^2$

   Akan ditunjukkan untuk setiap bilangan bulat positif $i_1$ dan $i_2$, jika $f(V_0^2 V_{i_1}^2) = f(V_0^2 V_{i_2}^2)$ maka $i_1 = i_2$.

   Diketahui $f(V_0^2 V_i^2) = n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 8 - i$, dengan $1 \leq i \leq n_2$.

Untuk $1 \leq i_1 \leq n_2$, dan $1 \leq i_2 \leq n_2$.

Karena $f(V_0^2 V_{i_1}^2) = f(V_0^2 V_{i_2}^2)$ , maka diperoleh:

$n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 8 - i_1 = n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 8 - i_2$

$$i_1 = i_2$$

3. Sisi $V_0^3 V_i^3$

Akan ditunjukkan untuk setiap bilangan bulat positif $i_1$ dan $i_2$, jika $f(V_0^3 V_{i_1}^3) = f(V_0^3 V_{i_2}^3)$ maka $i_1 = i_2$.

Diketahui $f(V_0^3 V_i^3) = n_1 + n_2 + 2n_3 + 6 - i$, dengan $1 \leq i \leq n_3$.

Untuk $1 \leq i_1 \leq n_2$, dan $1 \leq i_2 \leq n_2$.

Karena $f(V_0^3 V_{i_1}^3) = f(V_0^3 V_{i_2}^3)$ , maka diperoleh:

$n_1 + n_2 + 2n_3 + 6 - i_1 = n_1 + n_2 + 2n_3 + 6 - i_2$

$$i_1 = i_2$$

4. Sisi $V_0^j V^{\hat{l}}$

Akan ditunjukkan untuk setiap bilangan bulat positif $j_1$ dan $j_2$, $l_1$ dan $l_2$, jika $f\left(V_0^{j_1} V^{\hat{l}_1}\right) = f\left(V_0^{j_2} V^{\hat{l}_2}\right)$ maka $j_1 = j_2$, $l_1 = l_2$.

Diketahui $f\left(V_0^j V^{\hat{l}}\right) = n_1 + n_2 + \cdots + n_l + 2n_{(l+1)} + \cdots + 2n_3 + 11 - (j + l)$, degan $1 \leq j \leq 3$, dan $(j-1) \leq l \leq j$.

Untuk $1 \leq j_1 \leq 3, 1 \leq j_2 \leq 3, 1 \leq \hat{l}_1 \leq 2, 1 \leq \hat{l}_2 \leq 2$.

Karena $f\left(V_0^{j_1} V^{\hat{l}_1}\right) = f\left(V_0^{j_2} V^{\hat{l}_2}\right)$, maka diperoleh:

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_{l_1} + 2n_{(l_1+1)} + \cdots + 2n_3 + 11 - (j_1 + l_1)$$
$$= n_1 + n_2 + \cdots + n_{l_2} + 2n_{(l_2+1)} + \cdots + 2n_3 + 11 - (j_2 + l_2)$$

$$n_{l_1} + 2n_{(l_1+1)} - (j_1 + l_1) = n_{l_2} + 2n_{(l_2+1)} - (j_2 + l_2)$$
$$l_1 = l_2, j_1 = j_2$$

Dengan demikian, $f$ merupakan fungsi injektif dari $V(G) \cup E(G)$ ke $\{1, 2, 3, \dots, p + q\}$.

2. Fungsi surjektif.

Sesuai dengan definisi surjektif, suatu $f: X \to Y$ dikatakan surjektif jika untuk setiap $y \in Y$, terdapat $x \in X$ sedemikian hingga $f(x) = y$. Prapeta untuk pelabelan $V(G)$ dan $U(G)$ adalah $\{1, 2, 3, \dots, p + q\}$. Sehingga, untuk setiap bilangan asli $\mathbb{N}$ pasti mempunyai pasangan di kodomainnya. Dengan demikian, sudah jelas menunjukkan bahwa pola pelabelan $V(G)$ dan $U(G)$ adalah surjektif.

Karena pola pelabelan $V(G)$ dan $U(G)$ injektif juga sekaligus surjektif, maka pola pelabelan $V(G)$ dan $U(G)$ bijektif.

iii) Akan ditunjukkan bahwa untuk masing-masing sisi $xy$ di $G$ berlaku $f(x) + f(xy) + f(y) = k$

a. Untuk sisi $V_0^1 V_i^1$ di $G$ diperoleh:

$$f(V_0^1) + f(V_0^1 V_i^1) + f(V_i^1) = (n_1 + n_2 + n_3 + 3) + (2n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 10 - i) + i$$

$$= 3(n_1 + n_2 + n_3) + 13$$

b. Untuk sisi $V_0^2 V_i^2$ di $G$ diperoleh:

$$f(V_0^2) + f(V_0^2 V_i^2) + f(V_i^2)$$

$$= (n_1 + n_2 + n_3 + 4) + (n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 8 - i) + (n_1$$
$$+ 1 + i)$$
$$= 3(n_1 + n_2 + n_3) + 13$$

c. Untuk sisi $V_0^3 V_i^3$ di $G$ diperoleh:

$$f(V_0^3) + f(V_0^3 V_i^3) + f(V_i^3)$$

$$= (n_1 + n_2 + n_3 + 5) + (n_1 + n_2 + 2n_3 + 6 - i) + (n_1$$
$$+ n_2 + 2 + i)$$
$$= 3(n_1 + n_2 + n_3) + 13$$

d. Untuk sisi $V_0^j V^{\hat{l}}$ di $G$ diperoleh:

$$f(V_0^j) + f(V_0^j V^{\hat{l}}) + f(V^{\hat{l}})$$

$$= [n_1 + n_2 + n_3 + (j + 2)]$$
$$+ [n_1 + n_2 + \cdots + n_l + 2n_{(l+1)} + \cdots + 2n_3 + 11$$
$$- (j + l)] + [n_1 + \cdots + n_l + l]$$

$$= 3(n_1 + n_2 + n_3) + 13$$

Jadi $G$ adalah super sisi ajaib dengan bilangan ajaib:

$$k = 3(n_1 + n_2 + n_3) + 13$$

iv) Akan ditunjukkan bahwa $f(V)$ memetakan $V$ ke $\{1, 2, 3, \dots, p\}$.

a. Titik $V_i^j$

Diketahui $f(V_i^j) = n_{j-2} + n_{j-1} + (j-1) + i$, $1 \leq i \leq n_j$, $1 \leq j \leq 3$.

Karena $1 \leq i \leq n_j$, maka diperoleh:

$$[n_{j-2} + n_{j-1} + (j-1)] + 1 \leq [n_{j-2} + n_{j-1} + (j-1)] + i$$
$$\leq [n_{j-2} + n_{j-1} + (j-1)] + n_j$$

$$n_{j-2} + n_{j-1} + j \leq n_{j-2} + n_{j-1} + (j-1) + i \leq n_{j-2} + n_{j-1} + (j-1) + n_j$$

$$1 \leq n_{j-2} + n_{j-1} + j \leq n_{j-2} + n_{j-1} + (j-1) + i \leq n_{j-2} + n_{j-1} + (j-1) + n_j$$
$$< n_1 + n_2 + n_3 + 5$$

$$1 \leq n_{j-2} + n_{j-1} + (j-1) + i < n_1 + n_2 + n_3 + 5$$

Jadi $1 \leq f(V_i^j) < p$.

b. Titik $V_0^j$

Diketahui $f(V_0^j) = n_1 + n_2 + n_3 + (j+2)$, $1 \leq j \leq 3$.

Karena $1 \leq j \leq 3$, maka diperoleh:

$$(n_1 + n_2 + n_3 + 2) + 1 \leq (n_1 + n_2 + n_3 + 2) + j \leq (n_1 + n_2 + n_3 + 2) + 3$$

$$n_1 + n_2 + n_3 + 3 \leq n_1 + n_2 + n_3 + (j+2) \leq n_1 + n_2 + n_3 + 5$$

$$1 < n_1 + n_2 + n_3 + 3 \leq n_1 + n_2 + n_3 + (j+2) \leq n_1 + n_2 + n_3 + 5$$

$$1 < n_1 + n_2 + n_3 + (j+2) \leq n_1 + n_2 + n_3 + 5$$

Jadi $1 < f(V_0^j) \leq p$.

c. Titik $V^{\hat{l}}$

Diketahui $f(V^{\hat{l}}) = n_1 + \cdots + n_l + l$, $1 \leq l \leq 2$.

Karena $1 \leq l \leq 2$, maka diperoleh:

$$n_1 + \cdots + n_l + 1 \leq n_1 + \cdots + n_l + l \leq n_1 + \cdots + n_l + 2$$

$$1 < n_1 + \cdots + n_l + 1 \leq n_1 + \cdots + n_l + l \leq n_1 + \cdots + n_l + 2$$
$$< n_1 + n_2 + n_3 + 5$$

Jadi $1 < f(V^{\hat{l}}) < p$.

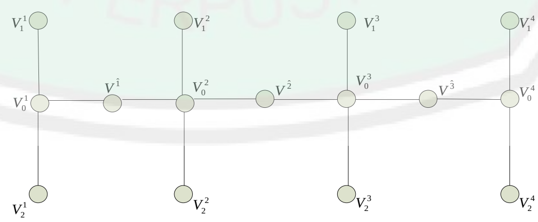
Sehingga terbukti bahwa $f$ memetakan $V$ ke $\{1, 2, 3, \ldots, p\}$.

Dari point (i), (ii), (iii) dan (iv) telah terbukti bahwa graf $G$ memenuhi syarat-syarat pelabelan super sisi ajaib. Sehingga graf $G$ merupakan super sisi ajaib.

## 3.3 Pelabelan Pada 4 Graf Star $(S_{n_1}, S_{n_2}, S_{n_3}, S_{n_4})$ Dengan Titik Pusat Terhubung Oleh Satu Titik Pengait

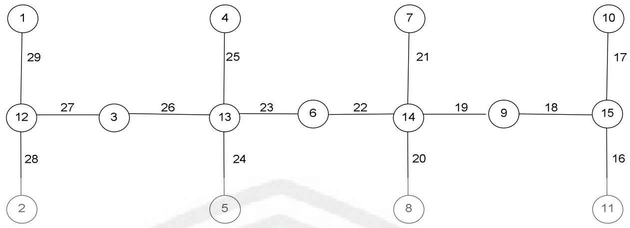
1. Untuk $n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = 2$.

Tiga graf star dengan $n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = 2$ dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3. 31. Empat Graf Star dengan $n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = 2$

Salah satu pelabelan super sisi ajaib pada 4 graf star $(S_{n_1}, S_{n_2}, S_{n_3}, S_{n_4})$ dengan $n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = 2$ dapat digambarkan sebagai berikut:




Gambar 3. 32. SEM pada 4 Graf Star dengan $n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = 2$

Bilangan ajaib untuk pelabelan graf di atas adalah $k = 42$.

Jika $f$ adalah pelabelan super sisi ajaib pada 4 graf star $(S_{n_1}, S_{n_2}, S_{n_3}, S_{n_4})$ dengan titik pusat terhubung oleh satu titik pengait, dimana $n_1 = 2, n_2 = 2$, $n_3 = 2, n_4 = 2$ maka diperoleh:

$f(V_1^1) = 1$

$f(V_2^1) = 2$

$f(V_1^2) = 4 = 2 + 1 + 1$

$f(V_2^2) = 5 = 2 + 1 + 2$

$f(V_1^3) = 7 = 2 + 2 + 2 + 1$

$f(V_2^3) = 8 = 2 + 2 + 2 + 2$

$f(V_1^4) = 10 = 2 + 2 + 2 + 3 + 1$

$f(V_2^4) = 11 = 2 + 2 + 2 + 3 + 2$

$f(V_0^1 V_1^1) = 29 = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 14 - 1$

$f(V_0^1 V_2^1) = 28 = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 14 - 2$

$f(V_0^2 V_1^2) = 25 = 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 12 - 1$

$f(V_0^2 V_2^2) = 24 = 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 12 - 2$

$f(V_0^3 V_1^3) = 21 = 2 + 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 10 - 1$

$f(V_0^3V_2^3) = 20 = 2 + 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 10 - 2$

$f(V_0^4V_1^4) = 17 = 2 + 2 + 2 + 2 \cdot 2 + 8 - 1$

$f(V_0^4V_2^4) = 16 = 2 + 2 + 2 + 2 \cdot 2 + 8 - 2$

$f\left(V_0^1V^{\hat{1}}\right) = 27 = 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 13$

$f\left(V_0^2V^{\hat{1}}\right) = 26 = 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 12$

$f\left(V_0^2V^{\hat{2}}\right) = 23 = 2 + 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 11$

$f\left(V_0^3V^{\hat{2}}\right) = 22 = 2 + 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 10$

$f\left(V_0^3V^{\hat{3}}\right) = 19 = 2 + 2 + 2 + 2 \cdot 2 + 9$

$f\left(V_0^4V^{\hat{3}}\right) = 18 = 2 + 2 + 2 + 2 \cdot 2 + 8$

$f(V_0^1) = 12 = 2 + 2 + 2 + 2 + 4$

$f(V_0^2) = 13 = 2 + 2 + 2 + 2 + 5$

$f(V_0^3) = 14 = 2 + 2 + 2 + 2 + 6$

$f(V_0^4) = 15 = 2 + 2 + 2 + 2 + 7$

$f\left(V^{\hat{1}}\right) = 3$

$f\left(V^{\hat{2}}\right) = 6$

$f\left(V^{\hat{3}}\right) = 9$

Jadi diperoleh kesamaan pola pada beberapa indeks berikut:

a. Titik $V_i^1$:

   $f(V_1^1) = 1$

   $f(V_2^1) = 2$

   Jadi disimpulkan $f(V_i^1) = i, 1 \leq i \leq n_1$.

b. Titik $V_i^2$:

$f(V_1^2) = 4 = 2 + 1 + 1$

$f(V_2^2) = 5 = 2 + 1 + 2$

Jadi disimpulkan $f(V_i^2) = n_1 + 1 + i, 1 \leq i \leq n_2$.

c. Titik $V_i^3$:

$f(V_1^3) = 7 = 2 + 2 + 2 + 1$

$f(V_2^3) = 8 = 2 + 2 + 2 + 2$

Jadi disimpulkan $f(V_i^3) = n_1 + n_2 + 2 + i, 1 \leq i \leq n_3$.

d. Titik $V_i^4$:

$f(V_1^4) = 10 = 2 + 2 + 2 + 3 + 1$

$f(V_2^4) = 11 = 2 + 2 + 2 + 3 + 2$

Jadi disimpulkan $f(V_i^4) = n_1 + n_2 + n_3 + 3 + i, 1 \leq i \leq n_4$.

e. Sisi $V_0^1 V_i^1$:

$f(V_0^1 V_1^1) = 29 = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 14 - 1$

$f(V_0^1 V_2^1) = 28 = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 14 - 2$

Jadi disimpulkan $f(V_0^1 V_i^1) = 2n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 14 - i, 1 \leq i \leq n_1$.

f. Sisi $V_0^2 V_i^2$:

$f(V_0^2 V_1^2) = 25 = 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 12 - 1$

$f(V_0^2 V_2^2) = 24 = 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 12 - 2$

Jadi disimpulkan $f(V_0^2 V_i^2) = n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 12 - i, 1 \leq i \leq n_2$.

g. Sisi $V_0^3 V_i^3$:

$f(V_0^3 V_1^3) = 21 = 2 + 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 10 - 1$

$f(V_0^3 V_2^3) = 20 = 2 + 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 10 - 2$

Jadi disimpulkan $f(V_0^3V_i^3) = n_1 + n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 10 - i, 1 \le i \le n_3$.

h. Sisi $V_0^4V_i^4$:

$f(V_0^4V_1^4) = 17 = 2 + 2 + 2 + 2 \cdot 2 + 8 - 1$

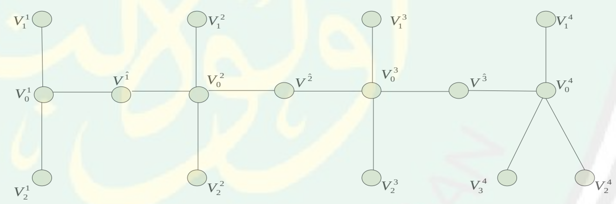
$f(V_0^4V_2^4) = 16 = 2 + 2 + 2 + 2 \cdot 2 + 8 - 2$

Jadi disimpulkan $f(V_0^4V_i^4) = n_1 + n_2 + n_3 + 2n_4 + 8 - i, 1 \le i \le n_4$.

Untuk titik dan sisi yang lain belum menampakkan pola karena datanya masih tunggal.

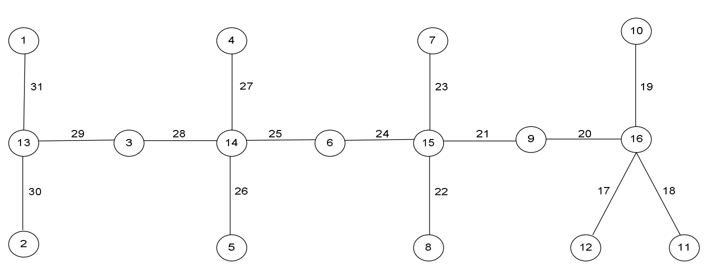
2. Untuk $n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = 3$.

Tiga graf star dengan $n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = 3$ dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3. 33. Empat Graf Star dengan $n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = 3$

Salah satu pelabelan super sisi ajaib pada 4 graf star $(S_{n_1}, S_{n_2}, S_{n_3}, S_{n_4})$ dengan $n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = 3$ dapat digambarkan sebagai berikut:




Gambar 3. 34. SEM pada 4 Graf Star dengan $n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = 3$

Bilangan ajaib untuk pelabelan graf di atas adalah $k = 45$.

Jika $f$ adalah pelabelan super sisi ajaib pada 4 graf star $(S_{n_1}, S_{n_2}, S_{n_3}, S_{n_4})$ dengan titik pusat terhubung oleh satu titik pengait, dimana $n_1 = 2, n_2 = 2$, $n_3 = 2, n_4 = 3$ maka diperoleh:

$f(V_1^1) = 1$

$f(V_2^1) = 2$

$f(V_1^2) = 4 = 2 + 1 + 1$

$f(V_2^2) = 5 = 2 + 1 + 2$

$f(V_1^3) = 7 = 2 + 2 + 2 + 1$

$f(V_2^3) = 8 = 2 + 2 + 2 + 2$

$f(V_1^4) = 10 = 2 + 2 + 2 + 3 + 1$

$f(V_2^4) = 11 = 2 + 2 + 2 + 3 + 2$

$f(V_3^4) = 12 = 2 + 2 + 2 + 3 + 3$

$f(V_0^1 V_1^1) = 31 = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 14 - 1$

$f(V_0^1 V_2^1) = 30 = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 14 - 2$

$f(V_0^2 V_1^2) = 27 = 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 12 - 1$

$f(V_0^2 V_2^2) = 26 = 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 12 - 2$

$f(V_0^3 V_1^3) = 23 = 2 + 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 10 - 1$

$f(V_0^3 V_2^3) = 22 = 2 + 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 10 - 2$

$f(V_0^4 V_1^4) = 19 = 2 + 2 + 2 + 2 \cdot 3 + 8 - 1$

$f(V_0^4 V_2^4) = 18 = 2 + 2 + 2 + 2 \cdot 3 + 8 - 2$

$f(V_0^4 V_3^4) = 17 = 2 + 2 + 2 + 2 \cdot 3 + 8 - 3$

$f\left(V_0^1 V^{\hat{1}}\right) = 29 = 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 13$

$f\left(V_0^2 V^{\hat{1}}\right) = 28 = 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 12$

$f\left(V_0^2 V^{\hat{2}}\right) = 25 = 2 + 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 11$

$f\left(V_0^3 V^{\hat{2}}\right) = 24 = 2 + 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 10$

$f\left(V_0^3 V^{\hat{3}}\right) = 21 = 2 + 2 + 2 + 2 \cdot 3 + 9$

$f\left(V_0^4 V^{\hat{3}}\right) = 20 = 2 + 2 + 2 + 2 \cdot 3 + 8$

$f(V_0^1) = 13 = 2 + 2 + 2 + 3 + 4$

$f(V_0^2) = 14 = 2 + 2 + 2 + 3 + 5$

$f(V_0^3) = 15 = 2 + 2 + 2 + 3 + 6$

$f(V_0^4) = 16 = 2 + 2 + 2 + 3 + 7$

$f\left(V^{\hat{1}}\right) = 3$

$f\left(V^{\hat{2}}\right) = 6$

$f\left(V^{\hat{3}}\right) = 9$

Jadi diperoleh kesamaan pola pada beberapa indeks berikut:

a. Titik $V_i^1$:

$f(V_1^1) = 1$

$f(V_2^1) = 2$

Jadi disimpulkan $f(V_i^1) = i, 1 \leq i \leq n_1$.

b. Titik $V_i^2$:

$f(V_1^2) = 4 = 2 + 1 + 1$

$f(V_2^2) = 5 = 2 + 1 + 2$

Jadi disimpulkan $f(V_i^2) = n_1 + 1 + i, 1 \leq i \leq n_2$.

c. Titik $V_i^3$:

$f(V_1^3) = 7 = 2 + 2 + 2 + 1$

$f(V_2^3) = 8 = 2 + 2 + 2 + 2$

Jadi disimpulkan $f(V_i^3) = n_1 + n_2 + 2 + i, 1 \leq i \leq n_3$.

d. Titik $V_i^4$:

$f(V_1^4) = 10 = 2 + 2 + 2 + 3 + 1$

$f(V_2^4) = 11 = 2 + 2 + 2 + 3 + 2$

$f(V_3^4) = 12 = 2 + 2 + 2 + 3 + 3$

Jadi disimpulkan $f(V_i^4) = n_1 + n_2 + n_3 + 3 + i, 1 \leq i \leq n_4$.

e. Sisi $V_0^1V_i^1$:

$f(V_0^1V_1^1) = 31 = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 14 - 1$

$f(V_0^1V_2^1) = 30 = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 14 - 2$

Jadi disimpulkan $f(V_0^1V_i^1) = 2n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 14 - i, 1 \leq i \leq n_1$.

f. Sisi $V_0^2V_i^2$:

$f(V_0^2V_1^2) = 27 = 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 12 - 1$

$f(V_0^2V_2^2) = 26 = 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 12 - 2$

Jadi disimpulkan $f(V_0^2V_i^2) = n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 12 - i, 1 \leq i \leq n_2$.

g. Sisi $V_0^3V_i^3$:

$f(V_0^3V_1^3) = 23 = 2 + 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 10 - 1$

$f(V_0^3V_2^3) = 22 = 2 + 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 10 - 2$

Jadi disimpulkan $f(V_0^3V_i^3) = n_1 + n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 10 - i, 1 \leq i \leq n_3$.

h. Sisi $V_0^4V_i^4$:

$f(V_0^4V_1^4) = 19 = 2 + 2 + 2 + 2 \cdot 3 + 8 - 1$

$f(V_0^4 V_2^4) = 18 = 2 + 2 + 2 + 2 \cdot 3 + 8 - 2$

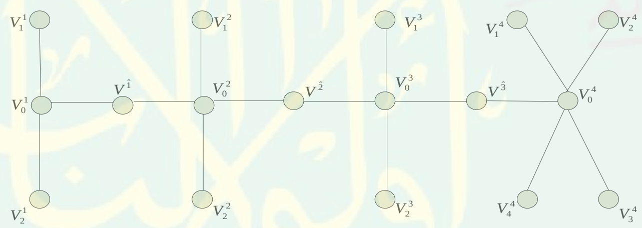
$f(V_0^4 V_3^4) = 17 = 2 + 2 + 2 + 2 \cdot 3 + 8 - 3$

Jadi disimpulkan $f(V_0^4 V_i^4) = n_1 + n_2 + n_3 + 2n_4 + 8 - i, 1 \leq i \leq n_4$.

Untuk titik dan sisi yang lain belum menampakkan pola karena datanya masih tunggal.

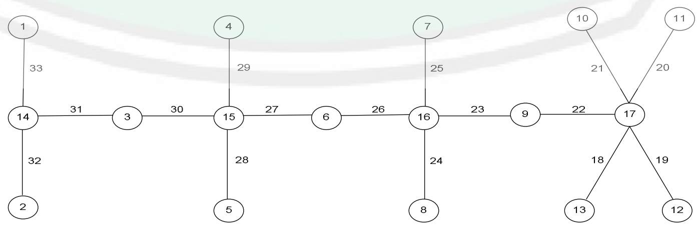
3. Untuk $n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = 4$.

Tiga graf star dengan $n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = 4$ dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3. 35. Tiga Graf Star dengan $n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = 4$

Salah satu pelabelan super sisi ajaib pada 4 graf star $(S_{n_1}, S_{n_2}, S_{n_3}, S_{n_4})$ dengan $n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = 4$ dapat digambarkan sebagai berikut:




Gambar 3. 36. SEM pada 4 Graf Star dengan $n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = 4$

Bilangan ajaib untuk pelabelan graf di atas adalah $k = 48$.

Jika $f$ adalah pelabelan super sisi ajaib pada 4 graf star $(S_{n_1}, S_{n_2}, S_{n_3}, S_{n_4})$ dengan titik pusat terhubung oleh satu titik pengait, dimana $n_1 = 2, n_2 = 2$, $n_3 = 2, n_4 = 4$ maka diperoleh:

$f(V_1^1) = 1$

$f(V_2^1) = 2$

$f(V_1^2) = 4 = 2 + 1 + 1$

$f(V_2^2) = 5 = 2 + 1 + 2$

$f(V_1^3) = 7 = 2 + 2 + 2 + 1$

$f(V_2^3) = 8 = 2 + 2 + 2 + 2$

$f(V_1^4) = 10 = 2 + 2 + 2 + 3 + 1$

$f(V_2^4) = 11 = 2 + 2 + 2 + 3 + 2$

$f(V_3^4) = 12 = 2 + 2 + 2 + 3 + 3$

$f(V_4^4) = 13 = 2 + 2 + 2 + 3 + 4$

$f(V_0^1 V_1^1) = 33 = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 14 - 1$

$f(V_0^1 V_2^1) = 32 = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 14 - 2$

$f(V_0^2 V_1^2) = 29 = 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 12 - 1$

$f(V_0^2 V_2^2) = 28 = 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 12 - 2$

$f(V_0^3 V_1^3) = 25 = 2 + 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 10 - 1$

$f(V_0^3 V_2^3) = 24 = 2 + 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 10 - 2$

$f(V_0^4 V_1^4) = 21 = 2 + 2 + 2 + 2 \cdot 4 + 8 - 1$

$f(V_0^4 V_2^4) = 20 = 2 + 2 + 2 + 2 \cdot 4 + 8 - 2$

$f(V_0^4 V_3^4) = 19 = 2 + 2 + 2 + 2 \cdot 4 + 8 - 2$

$f(V_0^4 V_4^4) = 18 = 2 + 2 + 2 + 2 \cdot 4 + 8 - 2$

$f(V_0^1 V^{\hat{1}}) = 31 = 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 13$

$f(V_0^2 V^{\hat{1}}) = 30 = 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 12$

$f(V_0^2 V^{\hat{2}}) = 27 = 2 + 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 11$

$f(V_0^3 V^{\hat{2}}) = 26 = 2 + 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 10$

$f(V_0^3 V^{\hat{3}}) = 23 = 2 + 2 + 2 + 2 \cdot 4 + 9$

$f(V_0^4 V^{\hat{3}}) = 22 = 2 + 2 + 2 + 2 \cdot 4 + 8$

$f(V_0^1) = 14 = 2 + 2 + 2 + 4 + 4$

$f(V_0^2) = 15 = 2 + 2 + 2 + 4 + 5$

$f(V_0^3) = 16 = 2 + 2 + 2 + 4 + 6$

$f(V_0^4) = 17 = 2 + 2 + 2 + 4 + 7$

$f(V^{\hat{1}}) = 3$

$f(V^{\hat{2}}) = 6$

$f(V^{\hat{3}}) = 9$

Jadi diperoleh kesamaan pola pada beberapa indeks berikut:

a. Titik $V_i^1$:

   $f(V_1^1) = 1$

   $f(V_2^1) = 2$

   Jadi disimpulkan $f(V_i^1) = i, 1 \leq i \leq n_1$.

b. Titik $V_i^2$:

   $f(V_1^2) = 4 = 2 + 1 + 1$

   $f(V_2^2) = 5 = 2 + 1 + 2$

Jadi disimpulkan $f(V_i^2) = n_1 + 1 + i, 1 \leq i \leq n_2$.

c. Titik $V_i^3$:

$f(V_1^3) = 7 = 2 + 2 + 2 + 1$

$f(V_2^3) = 8 = 2 + 2 + 2 + 2$

Jadi disimpulkan $f(V_i^3) = n_1 + n_2 + 2 + i, 1 \leq i \leq n_3$.

d. Titik $V_i^4$:

$f(V_1^4) = 10 = 2 + 2 + 2 + 3 + 1$

$f(V_2^4) = 11 = 2 + 2 + 2 + 3 + 2$

$f(V_3^4) = 12 = 2 + 2 + 2 + 3 + 3$

$f(V_4^4) = 13 = 2 + 2 + 2 + 3 + 4$

Jadi disimpulkan $f(V_i^4) = n_1 + n_2 + n_3 + 3 + i, 1 \leq i \leq n_4$.

e. Sisi $V_0^1 V_i^1$:

$f(V_0^1 V_1^1) = 33 = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 14 - 1$

$f(V_0^1 V_2^1) = 32 = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 14 - 2$

Jadi disimpulkan $f(V_0^1 V_i^1) = 2n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 14 - i, 1 \leq i \leq n_1$.

f. Sisi $V_0^2 V_i^2$:

$f(V_0^2 V_1^2) = 29 = 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 12 - 1$

$f(V_0^2 V_2^2) = 28 = 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 12 - 2$

Jadi disimpulkan $f(V_0^2 V_i^2) = n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 12 - i, 1 \leq i \leq n_2$.

g. Sisi$V_0^3 V_i^3$:

$f(V_0^3 V_1^3) = 25 = 2 + 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 10 - 1$

$f(V_0^3 V_2^3) = 24 = 2 + 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 10 - 2$

Jadi disimpulkan $f(V_0^3 V_i^3) = n_1 + n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 10 - i, 1 \leq i \leq n_3$.

h. Sisi $V_0^4V_i^4$:

$f(V_0^4V_1^4) = 21 = 2 + 2 + 2 + 2 \cdot 4 + 8 - 1$

$f(V_0^4V_2^4) = 20 = 2 + 2 + 2 + 2 \cdot 4 + 8 - 2$

$f(V_0^4V_3^4) = 19 = 2 + 2 + 2 + 2 \cdot 4 + 8 - 2$

$f(V_0^4V_4^4) = 18 = 2 + 2 + 2 + 2 \cdot 4 + 8 - 2$

Jadi disimpulkan $f(V_0^4V_i^4) = n_1 + n_2 + n_3 + 2n_4 + 8 - i, 1 \leq i \leq n_4$.

Untuk titik dan sisi yang lain belum menampakkan pola karena datanya masih tunggal.

Dari beberapa contoh di atas, nampak beberapa pola pelabelan super sisi ajaib untuk 4 graf star $(S_{n_1}, S_{n_2}, S_{n_3}, S_{n_4})$ dengan titik pusat terhubung oleh satu titik pengait dimana $n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = n_4$, yaitu:

a. Titik $V_i^1$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = 2 \Rightarrow f(V_i^1) = i$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = 3 \Rightarrow f(V_i^1) = i$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = 4 \Rightarrow f(V_i^1) = i$

Jadi disimpulkan $f(V_i^1) = i, 1 \leq i \leq n_1$.

b. Titik $V_i^2$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = 2 \Rightarrow f(V_i^2) = n_1 + 1 + i$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = 3 \Rightarrow f(V_i^2) = n_1 + 1 + i$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = 4 \Rightarrow f(V_i^2) = n_1 + 1 + i$

Jadi disimpulkan $f(V_i^2) = n_1 + 1 + i, 1 \leq i \leq n_2$.

c. Titik $V_i^3$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = 2 \Rightarrow f(V_i^3) = n_1 + n_2 + 2 + i$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = 3 \Rightarrow f(V_i^3) = n_1 + n_2 + 2 + i$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = 4 \Rightarrow f(V_i^3) = n_1 + n_2 + 2 + i$

Jadi disimpulkan $f(V_i^3) = n_1 + n_2 + 2 + i, 1 \leq i \leq n_3$.

d. Titik $V_i^4$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = 2 \Rightarrow f(V_i^4) = n_1 + n_2 + n_3 + 3 + i$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = 3 \Rightarrow f(V_i^4) = n_1 + n_2 + n_3 + 3 + i$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = 4 \Rightarrow f(V_i^4) = n_1 + n_2 + n_3 + 3 + i$

Jadi disimpulkan $f(V_i^4) = n_1 + n_2 + n_3 + 3 + i, 1 \leq i \leq n_4$.

e. Titik $V_0^1$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = 2 \Rightarrow f(V_0^1) = 12 = 2 + 2 + 2 + 2 + 4$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = 3 \Rightarrow f(V_0^1) = 13 = 2 + 2 + 2 + 3 + 4$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = 4 \Rightarrow f(V_0^1) = 14 = 2 + 2 + 2 + 4 + 4$

Jadi disimpulkan $f(V_0^1) = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 4$.

f. Titik $V_0^2$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = 2 \Rightarrow f(V_0^2) = 13 = 2 + 2 + 2 + 2 + 5$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = 3 \Rightarrow f(V_0^2) = 14 = 2 + 2 + 2 + 3 + 5$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = 4 \Rightarrow f(V_0^2) = 15 = 2 + 2 + 2 + 4 + 5$

Jadi disimpulkan $f(V_0^2) = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 5$.

g. Titik $V_0^3$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = 2 \Rightarrow f(V_0^3) = 14 = 2 + 2 + 2 + 2 + 6$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = 3 \Rightarrow\ f(V_0^3) = 15 = 2 + 2 + 2 + 3 + 6$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = 4 \Rightarrow\ f(V_0^3) = 16 = 2 + 2 + 2 + 4 + 6$

Jadi disimpulkan $f(V_0^3) = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 6$.

h. Titik $V_0^4$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = 2 \Rightarrow\ f(V_0^4) = 14 = 2 + 2 + 2 + 2 + 7$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = 3 \Rightarrow\ f(V_0^4) = 15 = 2 + 2 + 2 + 3 + 7$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = 4 \Rightarrow\ f(V_0^4) = 16 = 2 + 2 + 2 + 4 + 7$

Jadi disimpulkan $f(V_0^4) = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 7$.

i. Titik $V^{\widehat{3}}$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = 2 \Rightarrow\ f\left(V^{\widehat{3}}\right) = 9$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = 3 \Rightarrow\ f\left(V^{\widehat{3}}\right) = 9$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = 4 \Rightarrow\ f\left(V^{\widehat{3}}\right) = 9$

Jadi disimpulkan $f\left(V^{\widehat{3}}\right) = 9$.

j. Sisi $V_0^1 V_i^1$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = 2 \Rightarrow f(V_0^1 V_i^1)$

$$= 2n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 14 - i$$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = 3 \Rightarrow f(V_0^1 V_i^1)$

$$= 2n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 14 - i$$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = 4 \Rightarrow f(V_0^1 V_i^1)$

$$= 2n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 14 - i$$

Jadi disimpulkan $f(V_0^1 V_i^1) = 2n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 14 - i, 1 \le i \le n_1$.

k. Sisi $V_0^2V_i^2$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = 2 \Rightarrow f(V_0^2V_i^2)$

$= n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 12 - i$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = 3 \Rightarrow f(V_0^2V_i^2)$

$= n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 12 - i$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = 4 \Rightarrow f(V_0^2V_i^2)$

$= n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 12 - i$

Jadi disimpulkan $f(V_0^2V_i^2) = n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 12 - i, 1 \leq i \leq n_2$.

l. Sisi $V_0^3V_i^3$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = 2 \Rightarrow f(V_0^3V_i^3)$

$= n_1 + n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 10 - i$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = 3 \Rightarrow f(V_0^3V_i^3)$

$= n_1 + n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 10 - i$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = 4 \Rightarrow f(V_0^3V_i^3)$

$= n_1 + n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 10 - i$

Jadi disimpulkan$f(V_0^3V_i^3) = n_1 + n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 10 - i, 1 \leq i \leq n_3$.

m. Sisi $V_0^4V_i^4$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = 2 \Rightarrow f(V_0^4V_i^4)$

$= n_1 + n_2 + n_3 + 2n_4 + 8 - i$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = 3 \Rightarrow f(V_0^4V_i^4)$

$= n_1 + n_2 + n_3 + 2n_4 + 8 - i$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = 4 \Rightarrow f(V_0^4V_i^4)$

$= n_1 + n_2 + n_3 + 2n_4 + 8 - i$

Jadi disimpulkan $f(V_0^4 V_i^4) = n_1 + n_2 + n_3 + 2n_4 + 8 - i, 1 \leq i \leq n_4$.

n. Sisi $V_0^1 V^{\hat{1}}$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = 2 \Rightarrow f\left(V_0^1 V^{\hat{1}}\right) = 27$

$= 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 13$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = 3 \Rightarrow f\left(V_0^1 V^{\hat{1}}\right) = 29$

$= 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 13$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = 4 \Rightarrow f\left(V_0^1 V^{\hat{1}}\right) = 31$

$= 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 13$

Jadi disimpulkan $f\left(V_0^1 V^{\hat{1}}\right) = n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 13$.

o. Sisi $V_0^2 V^{\hat{1}}$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = 2 \Rightarrow f\left(V_0^2 V^{\hat{1}}\right) = 26$

$= 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 12$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = 3 \Rightarrow f\left(V_0^2 V^{\hat{1}}\right) = 28$

$= 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 12$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = 4 \Rightarrow f\left(V_0^2 V^{\hat{1}}\right) = 30$

$= 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 12$

Jadi disimpulkan $f\left(V_0^2 V^{\hat{1}}\right) = n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 12$.

p. Sisi $V_0^2 V^{\hat{2}}$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = 2 \Rightarrow f\left(V_0^2 V^{\hat{2}}\right) = 23$

$= 2 + 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 11$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = 3 \Rightarrow f\left(V_0^2 V^{\hat{2}}\right) = 25$

$= 2 + 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 11$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = 4 \Rightarrow f\left(V_0^2 V^{\hat{2}}\right) = 27$

$$= 2 + 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 11$$

Jadi disimpulkan $f\left(V_0^2 V^{\hat{2}}\right) = n_1 + n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 11.$

q. Sisi $V_0^3 V^{\hat{2}}$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = 2 \Rightarrow f\left(V_0^3 V^{\hat{2}}\right) = 22$

$$= 2 + 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 10$$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = 3 \Rightarrow f\left(V_0^3 V^{\hat{2}}\right) = 24$

$$= 2 + 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 10$$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = 4 \Rightarrow f\left(V_0^3 V^{\hat{2}}\right) = 26$

$$= 2 + 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 10$$

Jadi disimpulkan $f\left(V_0^3 V^{\hat{2}}\right) = n_1 + n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 10.$

r. Sisi $V_0^3 V^{\hat{3}}$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = 2 \Rightarrow f\left(V_0^3 V^{\hat{3}}\right) = 19$

$$= 2 + 2 + 2 + 2 \cdot 2 + 9$$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = 3 \Rightarrow f\left(V_0^3 V^{\hat{3}}\right) = 21$

$$= 2 + 2 + 2 + 2 \cdot 3 + 9$$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = 4 \Rightarrow f\left(V_0^3 V^{\hat{3}}\right) = 23$

$$= 2 + 2 + 2 + 2 \cdot 4 + 9$$

Jadi disimpulkan $f\left(V_0^3 V^{\hat{3}}\right) = n_1 + n_2 + n_3 + 2n_4 + 9.$

s. Sisi $V_0^4 V^{\hat{3}}$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = 2 \Rightarrow f\left(V_0^4 V^{\hat{3}}\right) = 18$

$$= 2 + 2 + 2 + 2 \cdot 2 + 8$$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = 3 \Rightarrow \ f\left(V_0^4 V^{\hat{3}}\right) = 20$

$= 2 + 2 + 2 + 2 \cdot 3 + 8$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = 4 \Rightarrow \ f\left(V_0^4 V^{\hat{3}}\right) = 22$

$= 2 + 2 + 2 + 2 \cdot 4 + 8$

Jadi disimpulkan $f\left(V_0^4 V^{\hat{3}}\right) = n_1 + n_2 + n_3 + 2n_4 + 8$.

t. Bilangan ajaib $k$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = 2 \Rightarrow \ k = 42 = 3(2 + 2 + 2 + 2) + 18$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = 3 \Rightarrow \ k = 45 = 3(2 + 2 + 2 + 3) + 18$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = 4 \Rightarrow \ k = 48 = 3(2 + 2 + 2 + 4) + 18$

Jadi disimpulkan $k = 3(n_1 + n_2 + n_3 + n_4) + 18$.

Untuk titik $V^{\hat{1}}, V^{\hat{2}}$ dan $V^{\hat{3}}$ belum menampakkan pola $f(V^{\hat{1}})$, $f(V^{\hat{2}})$ dan $f(V^{\hat{3}})$ karena datanya masih tunggal.

Dengan cara seperti di atas, penulis melanjutkan pelabelan super sisi ajaib pada 4 graf star $\left(S_{n_1}, S_{n_2}, S_{n_3}, S_{n_4}\right)$ dengan titik pusat terhubung oleh satu titik pengait dimana $n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 3, n_4 = n_4$ dan $n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 4, n_4 = n_4$. Sehingga akan diperoleh pola pelabelan pelabelan super sisi ajaib untuk 4 graf star $\left(S_{n_1}, S_{n_2}, S_{n_3}, S_{n_4}\right)$ dengan titik pusat terhubung oleh satu titik pengait dimana $n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = n_3, n_4 = n_4$ sebagai berikut:

a. Titik $V_i^1$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = n_4 \Rightarrow \ f(V_i^1) = i$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 3, n_4 = n_4 \Rightarrow \ f(V_i^1) = i$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 4, n_4 = n_4 \Rightarrow \ f(V_i^1) = i$

Jadi disimpulkan $f(V_i^1) = i, 1 \leq i \leq n_1$.

b. Titik $V_i^2$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = n_4 \Rightarrow \; f(V_i^2) = n_1 + 1 + i$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 3, n_4 = n_4 \Rightarrow \; f(V_i^2) = n_1 + 1 + i$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 4, n_4 = n_4 \Rightarrow \; f(V_i^2) = n_1 + 1 + i$

Jadi disimpulkan $f(V_i^2) = n_1 + 1 + i, 1 \leq i \leq n_2$.

c. Titik $V_i^3$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = n_4 \Rightarrow \; f(V_i^3) = n_1 + n_2 + 2 + i$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 3, n_4 = n_4 \Rightarrow \; f(V_i^3) = n_1 + n_2 + 2 + i$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 4, n_4 = n_4 \Rightarrow \; f(V_i^3) = n_1 + n_2 + 2 + i$

Jadi disimpulkan $f(V_i^3) = n_1 + n_2 + 2 + i, 1 \leq i \leq n_3$.

d. Titik $V_i^4$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = n_4 \Rightarrow \; f(V_i^4) = n_1 + n_2 + n_3 + 3 + i$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 3, n_4 = n_4 \Rightarrow \; f(V_i^4) = n_1 + n_2 + n_3 + 3 + i$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 4, n_4 = n_4 \Rightarrow \; f(V_i^4) = n_1 + n_2 + n_3 + 3 + i$

Jadi disimpulkan $f(V_i^4) = n_1 + n_2 + n_3 + 3 + i, 1 \leq i \leq n_4$.

e. Titik $V_0^1$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = n_4 \Rightarrow f(V_0^1) = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 4$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 3, n_4 = n_4 \Rightarrow f(V_0^1) = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 4$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 4, n_4 = n_4 \Rightarrow f(V_0^1) = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 4$

Jadi disimpulkan $f(V_0^1) = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 4$.

f. Titik $V_0^2$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = n_4 \Rightarrow \ f(V_0^2) = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 5$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 3, n_4 = n_4 \Rightarrow \ f(V_0^2) = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 5$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 4, n_4 = n_4 \Rightarrow \ f(V_0^2) = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 5$

Jadi disimpulkan $f(V_0^2) = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 5$.

g. Titik $V_0^3$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = n_4 \Rightarrow \ f(V_0^3) = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 6$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 3, n_4 = n_4 \Rightarrow \ f(V_0^3) = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 6$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 4, n_4 = n_4 \Rightarrow \ f(V_0^3) = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 6$

Jadi disimpulkan $(V_0^3) = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 6$ .

h. Titik $V_0^4$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = n_4 \Rightarrow \ f(V_0^4) = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 7$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 3, n_4 = n_4 \Rightarrow \ f(V_0^4) = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 7$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 4, n_4 = n_4 \Rightarrow \ f(V_0^4) = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 7$

Jadi disimpulkan $f(V_0^4) = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 7$.

i. Titik $V^{\hat{3}}$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = n_4 \Rightarrow \ f\left(V^{\hat{3}}\right) = 9$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 3, n_4 = n_4 \Rightarrow \ f\left(V^{\hat{3}}\right) = 10$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 4, n_4 = n_4 \Rightarrow \ f\left(V^{\hat{3}}\right) = 11$

Jadi disimpulkan $f\left(V^{\hat{3}}\right) = n_1 + n_2 + n_3 + 3$.

j. Titik $V^{\hat{2}}$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = n_4 \Rightarrow \ f\left(V^{\hat{3}}\right) = 6$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 3, n_4 = n_4 \Rightarrow \ f\left(V^{\hat{3}}\right) = 6$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 4, n_4 = n_4 \Rightarrow \; f\left(V^{\hat{3}}\right) = 6$

Jadi disimpulkan $f\left(V^{\hat{2}}\right) = 6$.

k. Sisi $V_0^1 V_i^1$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = n_4 \Rightarrow f(V_0^1 V_i^1)$

$$= 2n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 14 - i$$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 3, n_4 = n_4 \Rightarrow f(V_0^1 V_i^1)$

$$= 2n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 14 - i$$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 4, n_4 = n_4 \Rightarrow f(V_0^1 V_i^1)$

$$= 2n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 14 - i$$

Jadi disimpulkan $f(V_0^1 V_i^1) = 2n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 14 - i, 1 \le i \le n_1$.

l. Sisi $V_0^2 V_i^2$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = n_4 \Rightarrow f(V_0^2 V_i^2)$

$$= n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 12 - i$$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 3, n_4 = n_4 \Rightarrow f(V_0^2 V_i^2)$

$$= n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 12 - i$$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 4, n_4 = n_4 \Rightarrow f(V_0^2 V_i^2)$

$$= n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 12 - i$$

Jadi disimpulkan $f(V_0^2 V_i^2) = n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 12 - i, 1 \le i \le n_2$.

m. Sisi $V_0^3 V_i^3$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = n_4 \Rightarrow f(V_0^3 V_i^3)$

$$= n_1 + n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 10 - i$$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 3, n_4 = n_4 \Rightarrow f(V_0^3 V_i^3)$

$= n_1 + n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 10 - i$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 4, n_4 = n_4 \Rightarrow f(V_0^3 V_i^3)$

$= n_1 + n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 10 - i$

Jadi disimpulkan $f(V_0^3 V_i^3) = n_1 + n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 10 - i, 1 \leq i \leq n_3$.

n. Sisi $V_0^4 V_i^4$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = n_4 \Rightarrow f(V_0^4 V_i^4)$

$= n_1 + n_2 + n_3 + 2n_4 + 8 - i$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 3, n_4 = n_4 \Rightarrow f(V_0^4 V_i^4)$

$= n_1 + n_2 + n_3 + 2n_4 + 8 - i$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 4, n_4 = n_4 \Rightarrow f(V_0^4 V_i^4)$

$= n_1 + n_2 + n_3 + 2n_4 + 8 - i$

Jadi disimpulkan $f(V_0^4 V_i^4) = n_1 + n_2 + n_3 + 2n_4 + 8 - i, 1 \leq i \leq n_4$.

o. Sisi $V_0^1 V^{\hat{1}}$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = n_4 \Rightarrow f\left(V_0^1 V^{\hat{1}}\right)$

$= n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 13$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 3, n_4 = n_4 \Rightarrow f\left(V_0^1 V^{\hat{1}}\right)$

$= n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 13$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 4, n_4 = n_4 \Rightarrow f\left(V_0^1 V^{\hat{1}}\right)$

$= n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 13$

Jadi disimpulkan $f\left(V_0^1 V^{\hat{1}}\right) = n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 13$.

p. Sisi $V_0^2V^{\hat{1}}$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = n_4 \Rightarrow f(V_0^2V^{\hat{1}})$

$= n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 12$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 3, n_4 = n_4 \Rightarrow f(V_0^2V^{\hat{1}})$

$= n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 12$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 4, n_4 = n_4 \Rightarrow f(V_0^2V^{\hat{1}})$

$= n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 12$

Jadi disimpulkan $f(V_0^2V^{\hat{1}}) = n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 12$.

q. Sisi $V_0^2V^{\hat{2}}$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = n_4 \Rightarrow f(V_0^2V^{\hat{2}})$

$= n_1 + n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 11$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 3, n_4 = n_4 \Rightarrow f(V_0^2V^{\hat{2}})$

$= n_1 + n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 11$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 4, n_4 = n_4 \Rightarrow f(V_0^2V^{\hat{2}})$

$= n_1 + n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 11$

Jadi disimpulkan $f(V_0^2V^{\hat{2}}) = n_1 + n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 11$.

r. Sisi $V_0^3V^{\hat{2}}$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = n_4 \Rightarrow f(V_0^3V^{\hat{2}})$

$= n_1 + n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 10$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 3, n_4 = n_4 \Rightarrow f(V_0^3V^{\hat{2}})$

$= n_1 + n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 10$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 4, n_4 = n_4 \Rightarrow\ f\left(V_0^3 V^{\hat{2}}\right)$

$= n_1 + n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 10$

Jadi disimpulkan $f\left(V_0^3 V^{\hat{2}}\right) = n_1 + n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 10$.

s. Sisi $V_0^3 V^{\hat{3}}$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = n_4 \Rightarrow\ f\left(V_0^3 V^{\hat{3}}\right) = n_1 + n_2 + n_3 + 2n_4 + 9$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 3, n_4 = n_4 \Rightarrow\ f\left(V_0^3 V^{\hat{3}}\right) = n_1 + n_2 + n_3 + 2n_4 + 9$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 4, n_4 = n_4 \Rightarrow\ f\left(V_0^3 V^{\hat{3}}\right) = n_1 + n_2 + n_3 + 2n_4 + 9$

Jadi disimpulkan$f\left(V_0^3 V^{\hat{3}}\right) = n_1 + n_2 + n_3 + 2n_4 + 9$.

t. Sisi $V_0^4 V^{\hat{3}}$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = n_4 \Rightarrow\ f\left(V_0^4 V^{\hat{3}}\right) = n_1 + n_2 + n_3 + 2n_4 + 8$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 3, n_4 = n_4 \Rightarrow\ f\left(V_0^4 V^{\hat{3}}\right) = n_1 + n_2 + n_3 + 2n_4 + 8$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 4, n_4 = n_4 \Rightarrow\ f\left(V_0^4 V^{\hat{3}}\right) = n_1 + n_2 + n_3 + 2n_4 + 8$

Jadi disimpulkan $f\left(V_0^4 V^{\hat{3}}\right) = n_1 + n_2 + n_3 + 2n_4 + 8$.

u. Titik $V^{\hat{3}}$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = n_4 \Rightarrow\ f\left(V^{\hat{3}}\right) = 9 = 2 + 2 + 2 + 3$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 3, n_4 = n_4 \Rightarrow f\left(V^{\hat{3}}\right) = 10 = 2 + 2 + 3 + 3$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 4, n_4 = n_4 \Rightarrow\ f\left(V^{\hat{3}}\right) = 11 = 2 + 2 + 4 + 3$

Jadi disimpulkan $f\left(V^{\hat{3}}\right) = n_1 + n_2 + n_3 + 3$.

v. Bilangan ajaib $k$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2, n_4 = n_4 \Rightarrow\ k = 3(n_1 + n_2 + n_3 + n_4) + 18$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 3, n_4 = n_4 \Rightarrow k = 3(n_1 + n_2 + n_3 + n_4) + 18$

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 4, n_4 = n_4 \Rightarrow\ k = 3(n_1 + n_2 + n_3 + n_4) + 18$

Jadi disimpulkan $k = 3(n_1 + n_2 + n_3 + n_4) + 18$.

Untuk titik $V^{\hat{1}}$ dan $V^{\hat{2}}$, belum dapat ditentukan polanya karena datanya masih tunggal.

Dengan cara yang sama, penulis memperoleh pola pelabelan super sisi ajaib untuk 4 graf star $(S_{n_1}, S_{n_2}, S_{n_3}, S_{n_4})$ dengan titik pusat terhubung oleh satu titik pengait dimana $n_1 = 2, n_2 = 3, n_3 = n_3, n_4 = n_4$. Dengan cara tersebut, akan diperoleh pola sebagai berikut:

a. $f(V_i^1) = i, 1 \leq i \leq n_1$

b. $f(V_i^2) = n_1 + 1 + i, 1 \leq i \leq n_2$

c. $f(V_i^3) = n_1 + n_2 + 2 + i, 1 \leq i \leq n_3$

d. $f(V_i^4) = n_1 + n_2 + n_3 + 3 + i, 1 \leq i \leq n_4$

e. $f(V_0^1) = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 4$

f. $f(V_0^2) = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 5$

g. $f(V_0^3) = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 6$

h. $f(V_0^4) = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 7$

i. $f(V_0^1 V_i^1) = 2n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 14 - i, 1 \leq i \leq n_1$

j. $f(V_0^2 V_i^2) = n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 12 - i, 1 \leq i \leq n_2$

k. $f(V_0^3 V_i^3) = n_1 + n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 10 - i, 1 \leq i \leq n_3$

l. $f(V_0^4 V_i^4) = n_1 + n_2 + n_3 + 2n_4 + 8 - i, 1 \leq i \leq n_4$

m. $f\left(V_0^1 V^{\hat{1}}\right) = n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 13$

n. $f\left(V_0^2 V^{\hat{1}}\right) = n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 12$

o. $f\left(V_0^2 V^{\hat{2}}\right) = n_1 + n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 11$

p. $f\left(V_0^3 V^{\hat{2}}\right) = n_1 + n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 10$

q. $f\left(V_0^3 V^{\hat{3}}\right) = n_1 + n_2 + n_3 + 2n_4 + 9$

r. $f\left(V_0^4 V^{\hat{3}}\right) = n_1 + n_2 + n_3 + 2n_4 + 8$

s. $f\left(V^{\hat{3}}\right) = n_1 + n_2 + n_3 + 3$

t. $n_1 = 2, n_2 = 3, n_3 = n_3, n_4 = n_4 \Rightarrow f\left(V^{\hat{2}}\right) = 7$

$n_1 = 2, n_2 = 4, n_3 = n_3, n_4 = n_4 \Rightarrow f\left(V^{\hat{2}}\right) = 8$

u. Bilangan ajaib $k$:

$k = 3(n_1 + n_2 + n_3 + n_4) + 18$

Sehingga, pola pelabelan super sisi ajaib pada 4 graf star $\left(S_{n_1}, S_{n_2}, S_{n_3}, S_{n_4}\right)$ dengan titik pusat terhubung oleh satu titik pengait dimana $n_1 = 2, n_2 = n_2$, $n_3 = n_3, n_4 = n_4$ dapat kita simpulkan sebagai berikut:

a. Titik $V_i^1$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = n_3, n_4 = n_4 \Rightarrow f(V_i^1) = i$

$n_1 = 2, n_2 = 3, n_3 = n_3, n_4 = n_4 \Rightarrow f(V_i^1) = i$

$n_1 = 2, n_2 = 4, n_3 = n_3, n_4 = n_4 \Rightarrow f(V_i^1) = i$

Jadi disimpulkan $f(V_i^1) = i, 1 \leq i \leq n_1$.

b. Titik $V_i^2$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = n_3, n_4 = n_4 \Rightarrow f(V_i^2) = n_1 + 1 + i$

$n_1 = 2, n_2 = 3, n_3 = n_3, n_4 = n_4 \Rightarrow f(V_i^2) = n_1 + 1 + i$

$n_1 = 2, n_2 = 4, n_3 = n_3, n_4 = n_4 \Rightarrow f(V_i^2) = n_1 + 1 + i$

Jadi disimpulkan $f(V_i^2) = n_1 + 1 + i, 1 \leq i \leq n_2$.

c. Titik $V_i^3$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = n_3, n_4 = n_4 \Rightarrow f(V_i^3) = n_1 + n_2 + 2 + i$

$n_1 = 2, n_2 = 3, n_3 = n_3, n_4 = n_4 \Rightarrow f(V_i^3) = n_1 + n_2 + 2 + i$

$n_1 = 2, n_2 = 4, n_3 = n_3, n_4 = n_4 \Rightarrow f(V_i^3) = n_1 + n_2 + 2 + i$

Jadi disimpulkan $f(V_i^3) = n_1 + n_2 + 2 + i, 1 \leq i \leq n_3$.

d. Titik $V_i^4$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = n_3, n_4 = n_4 \Rightarrow f(V_i^4) = n_1 + n_2 + n_3 + 3 + i$

$n_1 = 2, n_2 = 3, n_3 = n_3, n_4 = n_4 \Rightarrow f(V_i^4) = n_1 + n_2 + n_3 + 3 + i$

$n_1 = 2, n_2 = 4, n_3 = n_3, n_4 = n_4 \Rightarrow f(V_i^4) = n_1 + n_2 + n_3 + 3 + i$

Jadi disimpulkan $f(V_i^4) = n_1 + n_2 + n_3 + 3 + i, 1 \leq i \leq n_4$.

e. Titik $V_0^1$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = n_3, n_4 = n_4 \Rightarrow f(V_0^1) = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 4$

$n_1 = 2, n_2 = 3, n_3 = n_3, n_4 = n_4 \Rightarrow f(V_0^1) = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 4$

$n_1 = 2, n_2 = 4, n_3 = n_3, n_4 = n_4 \Rightarrow f(V_0^1) = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 4$

Jadi disimpulkan $f(V_0^1) = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 4$.

f. Titik $V_0^2$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = n_3, n_4 = n_4 \Rightarrow f(V_0^2) = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 5$

$n_1 = 2, n_2 = 3, n_3 = n_3, n_4 = n_4 \Rightarrow f(V_0^2) = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 5$

$n_1 = 2, n_2 = 4, n_3 = n_3, n_4 = n_4 \Rightarrow f(V_0^2) = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 5$

Jadi disimpulkan $f(V_0^2) = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 5$.

g. Titik $V_0^3$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = n_3, n_4 = n_4 \Rightarrow f(V_0^3) = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 6$

$n_1 = 2, n_2 = 3, n_3 = n_3, n_4 = n_4 \Rightarrow f(V_0^3) = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 6$

$n_1 = 2, n_2 = 4, n_3 = n_3, n_4 = n_4 \Rightarrow f(V_0^3) = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 6$

Jadi disimpulkan $f(V_0^3) = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 6$.

h. Titik $V_0^4$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = n_3, n_4 = n_4 \Rightarrow f(V_0^4) = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 7$

$n_1 = 2, n_2 = 3, n_3 = n_3, n_4 = n_4 \Rightarrow f(V_0^4) = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 7$

$n_1 = 2, n_2 = 4, n_3 = n_3, n_4 = n_4 \Rightarrow f(V_0^4) = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 7$

Jadi disimpulkan $f(V_0^4) = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 7$.

i. Sisi $V_0^1 V_i^1$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = n_3, n_4 = n_4 \Rightarrow f(V_0^1 V_i^1)$

$= 2n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 14 - i$

$n_1 = 2, n_2 = 3, n_3 = n_3, n_4 = n_4 \Rightarrow f(V_0^1 V_i^1)$

$= 2n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 14 - i$

$n_1 = 2, n_2 = 4, n_3 = n_3, n_4 = n_4 \Rightarrow f(V_0^1 V_i^1)$

$= 2n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 14 - i$

Jadi disimpulkan $f(V_0^1 V_i^1) = 2n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 14 - i, 1 \leq i \leq n_1$.

j. Sisi $V_0^2 V_i^2$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = n_3, n_4 = n_4 \Rightarrow f(V_0^2 V_i^2)$

$= n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 12 - i$

$n_1 = 2, n_2 = 3, n_3 = n_3, n_4 = n_4 \Rightarrow f(V_0^2 V_i^2)$

$= n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 12 - i$

$n_1 = 2, n_2 = 4, n_3 = n_3, n_4 = n_4 \Rightarrow f(V_0^2 V_i^2)$

$= n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 12 - i$

Jadi disimpulkan $f(V_0^2 V_i^2) = n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 12 - i, 1 \leq i \leq n_2$.

k. Sisi $V_0^3 V_i^3$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = n_3, n_4 = n_4 \Rightarrow f(V_0^3 V_i^3)$

$= n_1 + n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 10 - i$

$n_1 = 2, n_2 = 3, n_3 = n_3, n_4 = n_4 \Rightarrow f(V_0^3 V_i^3)$

$= n_1 + n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 10 - i$

$n_1 = 2, n_2 = 4, n_3 = n_3, n_4 = n_4 \Rightarrow f(V_0^3 V_i^3)$

$= n_1 + n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 10 - i$

Jadi disimpulkan $f(V_0^3 V_i^3) = n_1 + n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 10 - i, 1 \leq i \leq n_3$.

l. Sisi $V_0^4 V_i^4$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = n_3, n_4 = n_4 \Rightarrow f(V_0^4 V_i^4)$

$= n_1 + n_2 + n_3 + 2n_4 + 8 - i$

$n_1 = 2, n_2 = 3, n_3 = n_3, n_4 = n_4 \Rightarrow f(V_0^4 V_i^4)$

$= n_1 + n_2 + n_3 + 2n_4 + 8 - i$

$n_1 = 2, n_2 = 4, n_3 = n_3, n_4 = n_4 \Rightarrow f(V_0^4 V_i^4)$

$= n_1 + n_2 + n_3 + 2n_4 + 8 - i$

Jadi disimpulkan $f(V_0^4 V_i^4) = n_1 + n_2 + n_3 + 2n_4 + 8 - i, 1 \leq i \leq n_4$.

m. Sisi $V_0^1 V^{\hat{1}}$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = n_3, n_4 = n_4 \Rightarrow f\left(V_0^1 V^{\hat{1}}\right)$

$= n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 13$

$n_1 = 2, n_2 = 3, n_3 = n_3, n_4 = n_4 \Rightarrow f\left(V_0^1 V^{\hat{1}}\right)$

$= n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 13$

$n_1 = 2, n_2 = 4, n_3 = n_3, n_4 = n_4 \Rightarrow f\left(V_0^1 V^{\hat{1}}\right)$

$$= n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 13$$

Jadi disimpulkan $f\left(V_0^1 V^{\hat{1}}\right) = n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 13$.

n. Sisi $V_0^2 V^{\hat{1}}$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = n_3, n_4 = n_4 \Rightarrow f\left(V_0^2 V^{\hat{1}}\right)$

$$= n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 12$$

$n_1 = 2, n_2 = 3, n_3 = n_3, n_4 = n_4 \Rightarrow f\left(V_0^2 V^{\hat{1}}\right)$

$$= n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 12$$

$n_1 = 2, n_2 = 4, n_3 = n_3, n_4 = n_4 \Rightarrow f\left(V_0^2 V^{\hat{1}}\right)$

$$= n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 12$$

Jadi disimpulkan $f\left(V_0^2 V^{\hat{1}}\right) = n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 12$.

o. Sisi $V_0^2 V^{\hat{2}}$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = n_3, n_4 = n_4 \Rightarrow f\left(V_0^2 V^{\hat{2}}\right)$

$$= n_1 + n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 11$$

$n_1 = 2, n_2 = 3, n_3 = n_3, n_4 = n_4 \Rightarrow f\left(V_0^2 V^{\hat{2}}\right)$

$$= n_1 + n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 11$$

$n_1 = 2, n_2 = 4, n_3 = n_3, n_4 = n_4 \Rightarrow f\left(V_0^2 V^{\hat{2}}\right)$

$$= n_1 + n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 11$$

Jadi disimpulkan $f\left(V_0^2 V^{\hat{2}}\right) = n_1 + n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 11$.

p. Sisi $V_0^3 V^{\hat{2}}$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = n_3, n_4 = n_4 \Rightarrow f\left(V_0^3 V^{\hat{2}}\right)$

$$= n_1 + n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 10$$

$n_1 = 2, n_2 = 3, n_3 = n_3, n_4 = n_4 \Rightarrow f\left(V_0^3 V^{\hat{2}}\right)$

$= n_1 + n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 10$

$n_1 = 2, n_2 = 4, n_3 = n_3, n_4 = n_4 \Rightarrow f\left(V_0^3 V^{\hat{2}}\right)$

$= n_1 + n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 10$

Jadi disimpulkan $f\left(V_0^3 V^{\hat{2}}\right) = n_1 + n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 10.$

q. Sisi $V_0^3 V^{\hat{3}}$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = n_3, n_4 = n_4 \Rightarrow f\left(V_0^3 V^{\hat{3}}\right) = n_1 + n_2 + n_3 + 2n_4 + 9$

$n_1 = 2, n_2 = 3, n_3 = n_3, n_4 = n_4 \Rightarrow f\left(V_0^3 V^{\hat{3}}\right) = n_1 + n_2 + n_3 + 2n_4 + 9$

$n_1 = 2, n_2 = 4, n_3 = n_3, n_4 = n_4 \Rightarrow f\left(V_0^3 V^{\hat{3}}\right) = n_1 + n_2 + n_3 + 2n_4 + 9$

Jadi disimpulkan$f\left(V_0^3 V^{\hat{3}}\right) = n_1 + n_2 + n_3 + 2n_4 + 9.$

r. Sisi $V_0^4 V^{\hat{3}}$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = n_3, n_4 = n_4 \Rightarrow f\left(V_0^4 V^{\hat{3}}\right) = n_1 + n_2 + n_3 + 2n_4 + 8$

$n_1 = 2, n_2 = 3, n_3 = n_3, n_4 = n_4 \Rightarrow f\left(V_0^4 V^{\hat{3}}\right) = n_1 + n_2 + n_3 + 2n_4 + 8$

$n_1 = 2, n_2 = 4, n_3 = n_3, n_4 = n_4 \Rightarrow f\left(V_0^4 V^{\hat{3}}\right) = n_1 + n_2 + n_3 + 2n_4 + 8$

Jadi disimpulkan $f\left(V_0^4 V^{\hat{3}}\right) = n_1 + n_2 + n_3 + 2n_4 + 8.$

s. Titik $V^{\hat{3}}$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = n_3, n_4 = n_4 \Rightarrow f\left(V^{\hat{3}}\right) = n_1 + n_2 + n_3 + 3$

$n_1 = 2, n_2 = 3, n_3 = n_3, n_4 = n_4 \Rightarrow f\left(V^{\hat{3}}\right) = n_1 + n_2 + n_3 + 3$

$n_1 = 2, n_2 = 4, n_3 = n_3, n_4 = n_4 \Rightarrow f\left(V^{\hat{3}}\right) = n_1 + n_2 + n_3 + 3$

Jadi disimpulkan $f\left(V^{\hat{3}}\right) = n_1 + n_2 + n_3 + 3.$

t. Bilangan ajaib $k$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = n_3, n_4 = n_4 \Rightarrow\ k = 3(n_1 + n_2 + n_3 + n_4) + 18$

$n_1 = 2, n_2 = 3, n_3 = n_3, n_4 = n_4 \Rightarrow k = 3(n_1 + n_2 + n_3 + n_4) + 18$

$n_1 = 2, n_2 = 4, n_3 = n_3, n_4 = n_4 \Rightarrow\ k = 3(n_1 + n_2 + n_3 + n_4) + 18$

Jadi disimpulkan $k = 3(n_1 + n_2 + n_3 + n_4) + 18$.

u. Titik $V^{\hat{2}}$:

$n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = n_3, n_4 = n_4 \Rightarrow\ f\left(V^{\hat{2}}\right) = 6 = 2 + 2 + 2$

$n_1 = 2, n_2 = 3, n_3 = n_3, n_4 = n_4 \Rightarrow f\left(V^{\hat{2}}\right) = 7 = 2 + 3 + 2$

$n_1 = 2, n_2 = 4, n_3 = n_3, n_4 = n_4 \Rightarrow\ f\left(V^{\hat{2}}\right) = 8 = 2 + 4 + 2$

Jadi disimpulkan $f\left(V^{\hat{2}}\right) = n_1 + n_2 + 2$.

v. Titik $V^{\hat{1}}$:

Belum dapat ditentukan untuk $f(V^{\hat{1}})$ karena datanya masih tunggal.

Dengan cara seperti di atas, penulis menemukan pola pelabelan yang sama dengan pola pelabelan super sisi ajaib untuk pada 4 graf star $\left(S_{n_1}, S_{n_2}, S_{n_3}, S_{n_4}\right)$ dengan titik pusat terhubung oleh satu titik pengait dimana $n_1 = 3, n_2 = n_2$, $n_3 = n_3, n_4 = n_4$, dan $n_1 = 4, n_2 = n_2, n_3 = n_3, n_4 = n_4$ kecuali untuk titik $V^{\hat{1}}$. Pola pelabelan titik $V^{\hat{1}}$ yang diperoleh untuk:

- $n_1 = 3, n_2 = n_2, n_3 = n_3, n_4 = n_4 \Rightarrow f\left(V^{\hat{1}}\right) = 4$
- $n_1 = 4, n_2 = n_2, n_3 = n_3, n_4 = n_4 \Rightarrow f\left(V^{\hat{1}}\right) = 5$

Sehingga, dapat kita konstruksi pola pelabelan super sisi ajaib untuk 4 graf star $(S_{n_1}, S_{n_2}, S_{n_3}, S_{n_4})$ dengan titik pusat terhubung oleh satu titik pengait seperti berikut:

a. Bilangan ajaib $k$:

$n_1 = 2, n_2 = n_2, n_3 = n_3, n_4 = n_4 \Rightarrow k = 3(n_1 + n_2 + n_3 + n_4) + 18$

$n_1 = 2, n_2 = n_2, n_3 = n_3, n_4 = n_4 \Rightarrow k = 3(n_1 + n_2 + n_3 + n_4) + 18$

$n_1 = 2, n_2 = n_2, n_3 = n_3, n_4 = n_4 \Rightarrow k = 3(n_1 + n_2 + n_3 + n_4) + 18$

Jadi disimpulkan $k = 3(n_1 + n_2 + n_3 + n_4) + 18$.

b. Titik pada $G$:

Tabel 3.5 Tabel Pola Pelabelan Titik pada Empat Graf Star

| JUMLAH TITIK UJUNG $\boldsymbol{S_n}$ | $\boldsymbol{f(V_i^1)}$ | $\boldsymbol{f(V_i^2)}$: | $\boldsymbol{f(V_i^3)}$: | $\boldsymbol{f(V_i^4)}$: | $\boldsymbol{f(V_0^1)}$: | $\boldsymbol{f(V_0^2)}$: | $\boldsymbol{f(V_0^3)}$: | $\boldsymbol{f(V_0^4)}$: | $\boldsymbol{f(\hat{V^1})}$: | $\boldsymbol{f(\hat{V^2})}$: | $\boldsymbol{f(\hat{V^3})}$: |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_1 = 2, n_2 = n_2, n_3 = n_3, n_4 = n_4$ | $i$ | $n_1 + 1 + i$ | $= n_1 + n_2 + 2 + i$ | $n_1 + n_2 + n_3 + 3 + i$ | $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 4$ | $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 5$ | $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 6$ | $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 7$ | $3 = 2 + 1$ | $n_1 + n_2 + 2$ | $n_1 + n_2 + n_3 + 3$ |
| $n_1 = 3, n_2 = n_2, n_3 = n_3, n_4 = n_4$ | $i$ | $n_1 + 1 + i$ | $n_1 + n_2 + 2 + i$ | $n_1 + n_2 + n_3 + 3 + i$ | $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 4$ | $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 5$ | $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 6$ | $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 7$ | $4 = 3 + 1$ | $n_1 + n_2 + 2$ | $n_1 + n_2 + n_3 + 3$ |
| $n_1 = 4, n_2 = n_2, n_3 = n_3, n_4 = n_4$ | $i$ | $n_1 + 1 + i$ | $n_1 + n_2 + 2 + i$ | $n_1 + n_2 + n_3 + 3 + i$ | $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 4$ | $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 5$ | $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 6$ | $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 7$ | $5 = 4 + 1$ | $n_1 + n_2 + 2$ | $n_1 + n_2 + n_3 + 3$ |
| Disimpulkan | $i$ | $n_1 + 1 + i$ | $n_1 + n_2 + 2 + i$ | $n_1 + n_2 + n_3 + 3 + i$ | $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 4$ | $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 5$ | $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 6$ | $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 7$ | $n_1 + 1$ | $n_1 + n_2 + 2$ | $n_1 + n_2 + n_3 + 3$ |

c. Sisi pada $G$:

Tabel 3.6 Tabel Pola Pelabelan Sisi pada Empat Graf Star

| JUMLAH TITIK UJUNG $S_n$ | $f(V_0^1V_i^1)$: | $f(V_0^2V_i^2)$: | $f(V_0^3V_i^3)$: | $f(V_0^4V_i^4)$ | $f(V_0^1V^{\hat{1}})$: | $f(V_0^2V^{\hat{1}})$: | $f(V_0^2V^{\hat{2}})$: | $f(V_0^3V^{\hat{2}})$: | $f(V_0^3V^{\hat{3}})$ : | $f(V_0^4V^{\hat{3}})$ : |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_1 = 2, n_2 = n_2, n_3 = n_3, n_4 = n_4$ | $2(n_1 + n_2 + n_3 + n_4) + 14 - i$ | $n_1 + 2(n_2 + n_3 + n_4) + 12 - i$ | $n_1 + n_2 + 2(n_3 + n_4) + 10 - i$ | $n_1 + n_2 + n_3 + 2n_4 + 8 - i$ | $n_1 + 2(n_2 + n_3 + n_4) + 13$ | $n_1 + 2(n_2 + n_3 + n_4) + 12$ | $n_1 + n_2 + 2(n_3 + n_4) + 11$ | $n_1 + n_2 + 2(n_3 + n_4) + 10$ | $n_1 + n_2 + n_3 + 2n_4 + 9$ | $n_1 + n_2 + n_3 + 2n_4 + 8$ |
| $n_1 = 3, n_2 = n_2, n_3 = n_3, n_4 = n_4$ | $2(n_1 + n_2 + n_3 + n_4) + 14 - i$ | $n_1 + 2(n_2 + n_3 + n_4) + 12 - i$ | $n_1 + n_2 + 2(n_3 + n_4) + 10 - i$ | $n_1 + n_2 + n_3 + 2n_4 + 8 - i$ | $n_1 + 2(n_2 + n_3 + n_4) + 13$ | $n_1 + 2(n_2 + n_3 + n_4) + 12$ | $n_1 + n_2 + 2(n_3 + n_4) + 11$ | $n_1 + n_2 + 2(n_3 + n_4) + 10$ | $n_1 + n_2 + n_3 + 2n_4 + 9$ | $n_1 + n_2 + n_3 + 2n_4 + 8$ |
| $n_1 = 4, n_2 = n_2, n_3 = n_3, n_4 = n_4$ | $2(n_1 + n_2 + n_3 + n_4) + 14 - i$ | $n_1 + 2(n_2 + n_3 + n_4) + 12 - i$ | $n_1 + n_2 + 2(n_3 + n_4) + 10 - i$ | $n_1 + n_2 + n_3 + 2n_4 + 8 - i$ | $n_1 + 2(n_2 + n_3 + n_4) + 13$ | $n_1 + 2(n_2 + n_3 + n_4) + 12$ | $n_1 + n_2 + 2(n_3 + n_4) + 11$ | $n_1 + n_2 + 2(n_3 + n_4) + 10$ | $n_1 + n_2 + n_3 + 2n_4 + 9$ | $n_1 + n_2 + n_3 + 2n_4 + 8$ |
| Disimpulkan | $2(n_1 + n_2 + n_3 + n_4) + 14 - i$ | $n_1 + 2(n_2 + n_3 + n_4) + 12 - i$ | $n_1 + n_2 + 2(n_3 + n_4) + 10 - i$ | $n_1 + n_2 + n_3 + 2n_4 + 8 - i$ | $n_1 + 2(n_2 + n_3 + n_4) + 13$ | $n_1 + 2(n_2 + n_3 + n_4) + 12$ | $n_1 + n_2 + 2(n_3 + n_4) + 11$ | $n_1 + n_2 + 2(n_3 + n_4) + 10$ | $n_1 + n_2 + n_3 + 2n_4 + 9$ | $n_1 + n_2 + n_3 + 2n_4 + 8$ |

Dari pola yang telah di dapatkan di atas, dapat disederhanakan dalam pola dibawah:

h. Titik $V_i^j$

$j = 1 \Longrightarrow f(V_i^1) = i, \quad 1 \leq i \leq n_1$

$j = 2 \Rightarrow f(V_i^2) = n_1 + 1 + i, \quad 1 \leq i \leq n_2$

$j = 3 \Rightarrow f(V_i^3) = n_1 + n_2 + 2 + i, \quad 1 \leq i \leq n_3$

$j = 4 \Rightarrow f(V_i^4) = n_1 + n_2 + n_3 + 3 + i, \quad 1 \leq i \leq n_4$

Jadi disimpulkan $f\left(V_i^j\right) = n_{j-3} + \cdots + n_{j-1} + (j-1) + i$, $1 \leq j \leq 4, 1 \leq i \leq n_j$.

i. Titik $V_0^j$

$j = 1 \Longrightarrow f(V_0^1) = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 4$

$j = 2 \Longrightarrow f(V_0^2) = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 5$

$j = 3 \Longrightarrow f(V_0^2) = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 6$

$j = 4 \Longrightarrow f(V_0^2) = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 7$

Jadi disimpulkan $f\left(V_0^j\right) = n_1 + n_2 + \cdots + n_4 + (j+3)$, $1 \leq j \leq 4$.

j. Titik $V^{\hat{l}}$

$\hat{l} = 1 \Longrightarrow f\left(V^{\hat{1}}\right) = n_1 + 1$

$\hat{l} = 2 \Longrightarrow f\left(V^{\hat{2}}\right) = n_1 + n_2 + 2$

$\hat{l} = 3 \Longrightarrow f\left(V^{\hat{3}}\right) = n_1 + n_2 + n_3 + 3$

Jadi disimpulkan $f\left(V^{\hat{l}}\right) = n_1 + n_2 + \cdots + n_l + l$, $1 \leq l \leq 3$.

k. Sisi $V_0^1V_i^1$

Diperoleh pola untuk $f(V_0^1V_i^1) = 2n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 14 - i, 1 \leq i \leq n_1$.

l. Sisi $V_0^2V_i^2$

Diperoleh pola untuk $f(V_0^2V_i^2) = n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 12 - i, 1 \leq i \leq n_2$.

m. Sisi $V_0^3V_i^3$

Diperoleh pola untuk $f(V_0^3V_i^3) = n_1 + n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 10 - i, 1 \leq i \leq n_3$.

n. Sisi $V_0^4V_i^4$

Diperoleh pola untuk $f(V_0^4V_i^4) = n_1 + n_2 + n_3 + 2n_4 + 8 - i, 1 \leq i \leq n_4$.

o. Sisi $V_0^jV^{\hat{l}}$

$j = 1, \hat{l} = 1 \Longrightarrow f\left(V_0^1V^{\hat{1}}\right) = n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 13$

$j = 2, \hat{l} = 1 \Longrightarrow f\left(V_0^2V^{\hat{1}}\right) = n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 12$

$j = 2, \hat{l} = 2 \Longrightarrow f\left(V_0^2V^{\hat{2}}\right) = n_1 + n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 11$

$j = 3, \hat{l} = 2 \Longrightarrow f\left(V_0^3V^{\hat{2}}\right) = n_1 + n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 10$

$j = 3, \hat{l} = 3 \Longrightarrow f\left(V_0^3V^{\hat{3}}\right) = n_1 + n_2 + n_3 + 2n_4 + 9$

$j = 4, \hat{l} = 3 \Longrightarrow f\left(V_0^4V^{\hat{3}}\right) = n_1 + n_2 + n_3 + 2n_4 + 8$

Jadi disimpulkan $f\left(V_0^jV^{\hat{l}}\right) = n_1 + n_2 + \cdots + n_l + 2n_{l+1} + \cdots + 2n_4 + 15 - (j + l), 1 \leq j \leq 4, (j - 1) \leq l \leq j$.

Dari beberapa contoh di atas, dapat diambil sebuah konjektur sebagai berikut:

Teorema 3.3:

Empat graf star $(S_{n_1}, S_{n_2}, S_{n_3}, S_{n_4})$ yang dihubungkan dengan titik pengait, untuk setiap $n_1, n_2, n_3, n_4$ bilangan asli adalah super sisi ajaib dengan kostanta ajaib $k = 3(n_1 + n_2 + n_3 + n_4) + 18$.

Bukti:

Pelabelan super sisi ajaib pada graph $G$ merupakan pelabelan total sisi ajaib yang memetakan $V$ ke himpunan $\{1, 2, 3, \ldots, p\}$. Pelabelan total sisi ajaib pada suatu graph $G$ dengan order $p$ dan ukuran $q$ adalah fungsi bijektif $f$ dari $V \cup E$ ke himpunan bilangan bulat $\{1, 2, 3, \ldots, p + q\}$ sedemikian hingga untuk masing-masing sisi $xy$ di $G$ berlaku $f(x) + f(xy) + f(y) = k$, dengan k konstanta. Maka untuk membuktikan teorema 3.3 perlu ditunjukkan bahwa :

i) Pola pelabelan dari $V(G)$ dan $E(G)$ adalah fungsi.

ii) Pola pelabelan dari $V(G)$ dan $E(G)$ adalah fungsi bijektif $f$ dari $V \cup E$ ke himpunan bilangan bulat $\{1, 2, 3, \ldots, p + q\}$.

iii) Untuk masing-masing sisi $xy$ di $G$ berlaku $f(x) + f(xy) + f(y) = k$.

iv) Pola pelabelan $G$ memetakan $V$ ke himpunan $\{1, 2, 3, \ldots, p\}$.

Misalkan:

$$V(G) = \left\{ \begin{matrix} V_1^1, V_2^1, \ldots, V_{n_1}^1; V_1^2, V_2^2, \ldots, V_{n_2}^2; V_1^3, V_2^3, \ldots, V_{n_3}^3; V_1^4, V_2^4, \ldots, V_{n_4}^4 \\ V_0^1, V_0^2, V_0^3, V_0^4; V^{\hat{1}}, V^{\hat{2}}, V^{\hat{3}} \end{matrix} \right\}$$

dimana:

| | |
|---|---|
| $V_0^1$ | : titik pusat $V^1(G)$ |
| $V_1^1, V_2^1, V_3^1, \ldots, V_{n_1}^1$ | : titik ujung $V^1(G)$ |
| $V_0^2$ | : titik pusat $V^2(G)$ |
| $V_1^2, V_2^2, V_3^2, \ldots, V_{n_2}^2$ | : titik ujung $V^2(G)$ |
| $V_0^3$ | : titik pusat $V^3(G)$ |
| $V_1^3, V_2^2, V_3^2, \ldots, V_{n_3}^2$ | : titik ujung $V^3(G)$ |
| $V_0^4$ | : titik pusat $V^4(G)$ |
| $V_1^4, V_2^4, V_3^4, \ldots, V_{n_4}^4$ | : titik ujung $V^4(G)$ |
| $V^{\hat{1}}$ | : titik pengait antara $V_0^1$dan $V_0^2$ |
| $V^{\hat{2}}$ | : titik pengait antara $V_0^2$dan $V_0^3$ |
| $V^{\hat{3}}$ | : titik pengait antara $V_0^3$dan $V_0^4$ |

$$E(G) = \left\{ \begin{array}{c} V_0^1V_1^1, V_0^1V_2^1, \ldots, V_0^1V_{n_1}^1;\ V_0^2V_1^2, V_0^2V_2^2, \ldots, V_0^2V_{n_2}^2; \\ V_0^3V_1^3, V_0^3V_2^3, \ldots, V_0^3V_{n_3}^3; V_0^4V_1^4, V_0^4V_2^4, \ldots, V_0^4V_{n_4}^4 \\ V_0^1V^{\hat{1}}, V_0^2V^{\hat{1}}, V_0^2V^{\hat{2}}, V_0^3V^{\hat{2}}, V_0^3V^{\hat{3}}, V_0^4V^{\hat{3}} \end{array} \right\}$$

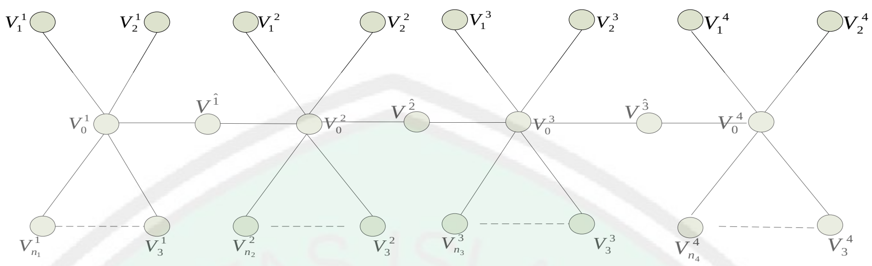
sehingga diperoleh:

$p = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 7,\ \ q = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 6.$

dan $\quad p + q = (\,n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 7) + (\,n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 6)$

$$= 2(n_1 + n_2 + n_3 + n_4) + 13$$

Graf $(S_{n_1}, S_{n_2}, S_{n_3}, S_{n_4})$ dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3. 37. Empat Graf Star dengan Titik Pusat Terhubung 1 Titik Pengait

Terdapat pola pelabelan graf $G$ sebagai berikut:

1. $f(V_i^j) = n_{j-3} + n_{j-2} + n_{j-1} + (j-1) + i, 1 \leq i \leq n_j, 1 \leq j \leq 4$
2. $f(V_0^j) = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + (j+3), 1 \leq j \leq 4$
3. $f(V^{\hat{l}}) = n_1 + n_2 + \cdots + n_l + l, 1 \leq l \leq 3$
4. $f(V_0^1 V_i^1) = 2n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 14 - i, 1 \leq i \leq n_1$
5. $f(V_0^2 V_i^2) = n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 12 - i, 1 \leq i \leq n_2$
6. $f(V_0^3 V_i^3) = n_1 + n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 10 - i, 1 \leq i \leq n_3$
7. $f(V_0^4 V_i^4) = n_1 + n_2 + n_3 + 2n_4 + 8 - i, 1 \leq i \leq n_4$
8. $f(V_0^j V^{\hat{l}}) = n_1 + n_2 + \cdots + n_l + 2n_{(l+1)} + 2n_{(l+2)} + \cdots + 2n_4 + 15 - (j + \hat{l}), 1 \leq j \leq 4, (j-1) \leq l \leq j$

i) Akan ditunjukkan bahwa pola pelabelan $V(G)$ dan $U(G)$ adalah fungsi.

Sesuai dengan definisi fungsi, suatu fungsi $f$ dari $X$ ke $Y$, adalah aturan yang memetakan setiap elemen $X$ tepat satu pada elemen $Y$. Sehingga dari definisi tersebut sudah jelas membuktikan bahwa pola pelabelan $V(G)$ dan $U(G)$ adalah fungsi.

ii) Akan ditunjukkan bahwa pola pelabelan $V(G)$ dan $U(G)$ adalah fungsi bijektif dari $V(G) \cup E(G)$ ke himpunan bilangan bulat $\{1, 2, 3, \dots, p+q\}$.

1. Fungsi injektif.

A. Untuk titik di $G$.

1. Titik $V_i^j$:

Akan ditunjukkan untuk setiap bilangan bulat positif $i_1$ dan $i_2$, $j_1$ dan $j_2$, jika $f\left(V_{i_1}^{j_1}\right) = f\left(V_{i_2}^{j_2}\right)$ maka $i_1 = i_2, j_1 = j_2$.

Diketahui $\left(V_i^j\right) = n_{j-3} + n_{j-2} + n_{j-1} + (j-1) + i$, dengan $1 \le i \le n_j$, dan $1 \le j \le 4$.

Untuk $1 \le i_1 \le n_j, 1 \le i_2 \le n_j$ dan $1 \le j_1 \le 4, 1 \le j_2 \le 4$.

Karena $f\left(V_{i_1}^{j_1}\right) = f\left(V_{i_2}^{j_2}\right)$, maka diperoleh:

$$n_{j_1-3} + n_{j_1-2} + n_{j_1-1} + (j_1 - 1) + i_1 = n_{j_{2-3}} + n_{j_2-2} + n_{j_2-1} + (j_2 - 1) + i_2$$

$$n_{j_1-3} + n_{j_1-2} + n_{j_{1-1}} + j_1 + i_1 = n_{j_{2-3}} + n_{j_2-2} + n_{j_{2-1}} + j_2 + i_2$$

$$j_1 = j_2, i_1 = i_2$$

2. Titik $V_0^j$:

Akan ditunjukkan untuk setiap bilangan bulat positif $j_1$ dan $j_2$, jika $f\left(V_0^{j_1}\right) = f\left(V_0^{j_2}\right)$ maka $j_1 = j_2$.

Diketahui $f\left(V_0^j\right) = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + (j+3)$, dengan $1 \le j \le 4$.

Untuk $1 \leq j_1 \leq 4, 1 \leq j_2 \leq 4$.

Karena $f\left(V_0^{j_1}\right) = f\left(V_0^{j_2}\right)$, maka diperoleh:

$$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + (j_1 + 3) = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + (j_2 + 3)$$

$$j_1 = j_2$$

4. Titik $V^{\hat{l}}$:

Akan ditunjukkan untuk setiap bilangan bulat positif $l_1$ dan $l_2$, jika $f\left(V^{\hat{l}_1}\right) = f\left(V^{\hat{l}_2}\right)$ maka $l_1 = l_2$.

Diketahui $f\left(V^{\hat{l}}\right) = n_1 + n_2 + \cdots + n_l + l$, dengan $1 \leq l \leq 3$.

Untuk $1 \leq l_1 \leq 3$, $1 \leq l_2 \leq 3$.

Karena $f\left(V^{\hat{l}_1}\right) = f\left(V^{\hat{l}_2}\right)$, maka diperoleh:

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_{l_1} + l_1 = n_1 + n_2 + \cdots + n_{l_2} + l_2$$

$$n_{l_1} + l_1 = n_{l_2} + l_2$$

$$l_1 = l_2$$

C. Untuk sisi di $G$

1. Sisi $V_0^1 V_i^1$

Akan ditunjukkan untuk setiap bilangan bulat positif $i_1$ dan $i_2$, jika $f\left(V_0^1 V_{i_1}^1\right) = f\left(V_0^1 V_{i_2}^1\right)$ maka $i_1 = i_2$.

Diketahui $2n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 14 - i$, dengan $1 \leq i \leq n_1$.

Untuk $1 \leq i_1 \leq n_1$, dan $1 \leq i_2 \leq n_1$.

Karena $f(V_0^1 V_{i_1}^1) = f(V_0^1 V_{i_2}^1)$ , maka diperoleh:

$$2n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 14 - i_1 = 2n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 14 - i_2$$

$$i_1 = i_2$$

5. Sisi $V_0^2 V_i^2$

Akan ditunjukkan untuk setiap bilangan bulat positif $i_1$ dan $i_2$, jika $f(V_0^2 V_{i_1}^2) = f(V_0^2 V_{i_2}^2)$ maka $i_1 = i_2$.

Diketahui $f(V_0^2 V_i^2) = n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 12 - i$, $1 \leq i \leq n_2$.

Untuk $1 \leq i_1 \leq n_2$, dan $1 \leq i_2 \leq n_2$.

Karena $f(V_0^2 V_{i_1}^2) = f(V_0^2 V_{i_2}^2)$ , maka diperoleh:

$$n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 12 - i_1 = n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 12 - i_2$$

$$i_1 = i_2$$

6. Sisi $V_0^3 V_i^3$

Akan ditunjukkan untuk setiap bilangan bulat positif $i_1$ dan $i_2$, jika $f(V_0^3 V_{i_1}^3) = f(V_0^3 V_{i_2}^3)$ maka $i_1 = i_2$.

Diketahui $f(V_0^3 V_i^3) = n_1 + n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 10 - i$, dengan $1 \leq i \leq n_3$.

Untuk $1 \leq i_1 \leq n_2$, dan $1 \leq i_2 \leq n_2$.

Karena $f(V_0^3 V_{i_1}^3) = f(V_0^3 V_{i_2}^3)$ , maka diperoleh:

$$n_1 + n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 10 - i_1 = n_1 + n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 10 - i_2$$

$$i_1 = i_2$$

7. Sisi $V_0^4 V_i^4$

Akan ditunjukkan untuk setiap bilangan bulat positif $i_1$ dan $i_2$, jika $f(V_0^4 V_{i_1}^4) = f(V_0^4 V_{i_2}^4)$ maka $i_1 = i_2$.

Diketahui $f(V_0^4 V_i^4) = n_1 + n_2 + n_3 + 2n_4 + 8 - i$, dengan $1 \leq i \leq n_4$.

Untuk $1 \leq i_1 \leq n_2$, dan $1 \leq i_2 \leq n_2$.

Karena $f(V_0^4 V_{i_1}^4) = f(V_0^4 V_{i_2}^4)$ , maka diperoleh:

$$n_1 + n_2 + n_3 + 2n_4 + 8 - i_1 = n_1 + n_2 + n_3 + 2n_4 + 8 - i_2$$

$$i_1 = i_2$$

8. Sisi $V_0^j V^{\hat{l}}$

Akan ditunjukkan untuk setiap bilangan bulat positif $j_1$ dan $j_2$, $l_1$ dan $l_2$, jika $f\left(V_0^{j_1} V^{\hat{l}_1}\right) = f\left(V_0^{j_2} V^{\hat{l}_2}\right)$ maka $j_1 = j_2$, $l_1 = l_2$.

Diketahui $n_1 + n_2 + \cdots + n_{\hat{l}} + 2n_{(l+1)} + 2n_{(l+2)} + \cdots + 2n_4 + 15 - (j + l)$, dengan $1 \leq j \leq 4$, $(j-1) \leq l \leq j$.

Untuk $1 \leq j_1 \leq 3, 1 \leq j_2 \leq 3, 1 \leq l_1 \leq 2, 1 \leq l_2 \leq 2$.

Karena $f\left(V_0^{j_1} V^{\hat{l}_1}\right) = f\left(V_0^{j_2} V^{\hat{l}_2}\right)$, maka diperoleh:

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_{l_1} + 2n_{(l_1+1)} + 2n_{(l_1+2)} + \cdots + 2n_4 + 15 - (j_1 + l_1)$$
$$= n_1 + n_2 + \cdots + n_{l_2} + 2n_{(l_2+1)} + 2n_{(l_2+2)} + \cdots + 2n_4$$
$$+ 15 - (j_2 + l_2)$$

$$n_{l_1} + 2n_{(l_1+1)} + 2n_{(l_1+2)} - (j_1 + l_1)$$
$$= n_{l_2} + 2n_{(l_2+1)} + 2n_{(l_2+2)} - (j_2 + l_2)$$
$$l_1 = l_2, j_1 = j_2$$

Dengan demikian, $f$ merupakan fungsi injektif dari $V(G) \cup E(G)$ ke $\{1, 2, 3, \ldots, p + q\}$.

2. Fungsi surjektif.

Sesuai dengan definisi surjektif, suatu $f: X \to Y$ dikatakan surjektif jika untuk setiap $y \in Y$, terdapat $x \in X$ sedemikian hingga $f(x) = y$. Prapeta untuk pelabelan $V(G)$ dan $U(G)$ adalah $\{1, 2, 3, \dots, p+q\}$. Sehingga, untuk setiap bilangan asli $\mathbb{N}$ pasti mempunyai pasangan di kodomainnya. Dengan demikian, sudah jelas menunjukkan bahwa pola pelabelan $V(G)$ dan $U(G)$ adalah surjektif.

Karena pola pelabelan $V(G)$ dan $U(G)$ injektif juga sekaligus surjektif, maka pola pelabelan $V(G)$ dan $U(G)$ bijektif.

iii) Akan ditunjukkan bahwa untuk masing-masing sisi $xy$ di $G$ berlaku $f(x) + f(xy) + f(y) = k$.

a. Untuk sisi $V_0^1 V_i^1$ di $G$ diperoleh:

$$f(V_0^1) + f(V_0^1 V_i^1) + f(V_i^1)$$

$$= (n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 4)$$

$$+ (2n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 14 - i) + i$$

$$= 3(n_1 + n_2 + n_3 + n_4) + 18$$

b. Untuk sisi $V_0^2 V_i^2$ di $G$ diperoleh:

$$f(V_0^2) + f(V_0^2 V_i^2) + f(V_i^2) = (n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 5) +$$

$$(n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 12 - i) + (n_1 + 1 + i)$$

$$= 3(n_1 + n_2 + n_3 + n_4) + 18$$

c. Untuk sisi $V_0^3 V_i^3$ di $G$ diperoleh:

$$f(V_0^3) + f(V_0^3 V_i^3) + f(V_i^3)$$

$$= (n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 6)$$

$$+ (n_1 + n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 10 - i) + (n_1 + n_2 + 2 + i)$$

$$= 3(n_1 + n_2 + n_3 + n_4) + 18$$

d. Untuk sisi $V_0^4 V_i^4$ di $G$ diperoleh:

$$f(V_0^4) + f(V_0^4 V_i^4) + f(V_i^4)$$

$$= (n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 7)$$

$$+ (n_1 + n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 8 - i) + (n_1 + n_2 + n_3 + 3$$

$$+ i)$$

$$= 3(n_1 + n_2 + n_3 + n_4) + 18$$

e. Untuk sisi $V_0^j V^{\hat{l}}$ di $G$ diperoleh:

$$f(V_0^j) + f(V_0^j V^{\hat{l}}) + f(V^{\hat{l}})$$

$$= [n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + (j + 3)]$$

$$+ [n_1 + n_2 + \cdots + n_l + 2n_{(l+1)} + 2n_{(l+2)} + \cdots + 2n_4 + 15$$

$$- (j + l)] + [n_1 + n_2 + \cdots + n_l + l]$$

$$= 3(n_1 + n_2 + n_3 + n_4) + 18$$

Jadi $G$ adalah super sisi ajaib dengan bilangan ajaib:

$$k = 3(n_1 + n_2 + n_3 + n_4) + 18$$

iv) Akan ditunjukkan bahwa $f$ memetakan $V$ ke $\{1, 2, 3, \ldots, p\}$.

a. Titik $V_i^j$

Diketahui $f(V_i^j) = n_{j-3} + n_{j-2} + n_{j-1} + (j - 1) + i$, $1 \leq i \leq n_j$,

$1 \leq j \leq 4$.

Karena $1 \leq i \leq n_j$, maka diperoleh:

$$[n_{j-3}+n_{j-2}+n_{j-1}+(j-1)]+1 \leq [n_{j-3}+n_{j-2}+n_{j-1}+(j-1)]+i$$

$$\leq [n_{j-3}+n_{j-2}+n_{j-1}+(j-1)]+n_j$$

$$n_{j-3}+n_{j-2}+n_{j-1}+j \leq n_{j-3}+n_{j-2}+n_{j-1}+(j-1)+i$$

$$\leq n_{j-3}+n_{j-2}+n_{j-1}+(j-1)+n_j$$

$$1 \leq n_{j-3}+n_{j-2}+n_{j-1}+j \leq n_{j-3}+n_{j-2}+n_{j-1}+(j-1)+i$$

$$\leq n_{j-3}+n_{j-2}+n_{j-1}+(j-1)+n_j$$

$$< n_1+n_2+n_3+n_4+7$$

$$1 \leq n_{j-3}+n_{j-2}+n_{j-1}+(j-1)+i < n_1+n_2+n_3+n_4+7$$

Jadi $1 \leq f(V_i^j) < p$.

b. Titik $V_0^j$

Diketahui $f(V_0^j) = n_1+n_2+n_3+n_4+(j+3),\ 1 \leq j \leq 4$

Karena $1 \leq j \leq 4$, maka diperoleh:

$$(n_1+n_2+n_3+n_4+3)+1 \leq (n_1+n_2+n_3+n_4+3)+j$$

$$\leq (n_1+n_2+n_3+n_4+3)+4$$

$$n_1+n_2+n_3+n_4+4 \leq n_1+n_2+n_3+n_4+(j+3)$$

$$\leq n_1+n_2+n_3+n_4+7$$

$$1 < n_1+n_2+n_3+n_4+4 \leq n_1+n_2+n_3+n_4+(j+3)$$

$$\leq n_1+n_2+n_3+n_4+7$$

Jadi $1 < f(V_0^j) \leq p$.

c. Titik $V^{\hat{l}}$

Diketahui $f(V^{\hat{l}}) = n_1+n_2+\cdots+n_l+l, 1 \leq l \leq 3$.

Karena $1 \leq l \leq 3$, maka diperoleh:

$$n_1+n_2+\cdots+n_l+1 \leq n_1+n_2+\cdots+n_l+l \leq n_1+n_2+\cdots+n_l+3$$

$$1 < n_1 + n_2 + \cdots + n_l + 1 \leq n_1 + n_2 + \cdots + n_l + l \leq n_1 + n_2 + \cdots + n_l + 3$$

$$< n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 7$$

Jadi $1 < f(V^{\hat{l}}) < p$.

Jadi terbukti bahwa $f$ memetakan $V$ ke $\{1, 2, 3, \ldots, p\}$.

Dari point (i), (ii), (iii) dan (iv) telah terbukti bahwa graf $G$ memenuhi syarat-syarat pelabelan super sisi ajaib. Sehingga graf $G$ merupakan super sisi ajaib.

## 3.4 Pelabelan Pada $m$ Graf Star $(S_{n_1}, S_{n_2}, \ldots, S_{n_j})$ Dengan Titik Pusat Terhubung Oleh Satu Titik Pengait

Berdasarkan pola pelabelan titik dan sisi dari 2, 3, dan 4 graf star yang dihubungkan dengan titik pengait di atas, maka dapat diambil suatu generalisasi untuk pola pelabelan titik dan sisi pada $m$ graf star yang dihubungkan dengan $\hat{l}$ titik pengait, sebagai berikut:

a. Titik $V_i^j$

$m = 2 \Longrightarrow f(V_i^j) = n_{j-1} + (j-1) + i$

$m = 3 \Longrightarrow f(V_i^j) = n_{j-2} + n_{j-1} + (j-1) + i$

$m = 4 \Longrightarrow f(V_i^j) = n_{j-3} + n_{j-2} + n_{j-1} + (j-1) + i$

Jadi disimpulkan:

$f(V_i^j) = n_{j-(j-1)} + n_{j-(j-2)} + \cdots + n_{j-1} + (j-1) + i$

$f(V_i^j) = n_1 + n_2 + \cdots + n_{j-1} + (j-1) + i,\ 1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq n_j$.

b. Titik $V_0^j$

$m = 2 \Longrightarrow f\left(V_0^j\right) = n_1 + n_2 + (j+1)$

$m = 3 \Longrightarrow f\left(V_0^j\right) = n_1 + n_2 + n_3 + (j+2)$

$m = 4 \Longrightarrow f\left(V_0^j\right) = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + (j+3)$

Jadi disimpulkan:

$f\left(V_0^j\right) = n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_m + j + (m-1)$, $1 \leq j \leq m, m \geq 2$.

c. Titik $V^{\hat{l}}$

$m = 2 \Longrightarrow f\left(V^{\hat{l}}\right) = n_1 + \cdots + n_l + l$

$m = 3 \Longrightarrow f\left(V^{\hat{l}}\right) = n_1 + \cdots + n_l + l$

$m = 4 \Longrightarrow f\left(V^{\hat{l}}\right) = n_1 + n_2 + \cdots + n_l + l$

Jadi disimpulkan: $f\left(V^{\hat{l}}\right) = n_1 + n_2 + \cdots + n_l + l, 1 \leq l \leq m-1$.

d. Sisi $V_0^j V_i^j$:

1. Sisi $V_0^1 V_i^1$

$m = 2 \Longrightarrow f(V_0^1 V_i^1) = 2n_1 + 2n_2 + 6 - i$

$m = 3 \Longrightarrow f(V_0^1 V_i^1) = 2n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 10 - i$

$m = 4 \Longrightarrow f(V_0^1 V_i^1) = 2n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 14 - i$

Jadi disimpulkan: $f(V_0^1 V_i^1) = 2(n_1 + n_2 + \cdots + n_m) + 4m - 2 - i, 1 \leq i \leq n_1$.

2. Sisi $V_0^2 V_i^2$

$m = 2 \Longrightarrow f(V_0^2 V_i^2) = n_1 + 2n_2 + 4 - i$

$m = 3 \Longrightarrow f(V_0^2 V_i^2) = n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 8 - i$

$m = 4 \Longrightarrow f(V_0^2 V_i^2) = n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 12 - i$

Jadi disimpulkan: $f(V_0^2 V_i^2) = n_1 + 2(n_2 + n_3 + \cdots + n_m) + 4m - 4 - i, 1 \leq i \leq n_2$.

3. Sisi $V_0^3 V_i^3$

   $m = 2 \Longrightarrow f(V_0^3 V_i^3) =$tidak ada

   $m = 3 \Longrightarrow f(V_0^3 V_i^3) = n_1 + n_2 + 2n_3 + 6 - i$

   $m = 4 \Longrightarrow f(V_0^3 V_i^3) = n_1 + n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 10 - i$

   Jadi disimpulkan: $f(V_0^3 V_i^3) = n_1 + n_2 + 2(n_3 + \cdots + n_m) + 4m - 6 - i, 1 \leq i \leq n_3$.

4. Sisi $V_0^4 V_i^4$

   $m = 2 \Longrightarrow f(V_0^4 V_i^4) =$ tidak ada

   $m = 3 \Longrightarrow f(V_0^4 V_i^4) =$ tidak ada

   $m = 4 \Longrightarrow f(V_0^4 V_i^4) = n_1 + n_2 + n_3 + 2n_4 + 8 - i$

   Jadi disimpulkan:

   $f(V_0^4 V_i^4) = n_1 + n_2 + n_3 + 2(n_4 + \cdots + n_m) + 4m - 8 - i, 1 \leq i \leq n_4$.

Sehingga, untuk sisi $V_0^k V_i^k$:

$f(V_0^1 V_i^1) = 2(n_1 + n_2 + \cdots + n_m) + 4m - 2 - i, 1 \leq i \leq n_1$

$f(V_0^2 V_i^2) = n_1 + 2(n_2 + n_3 + \cdots + n_m) + 4m - 4 - i, 1 \leq i \leq n_2$

$f(V_0^3 V_i^3) = n_1 + n_2 + 2(n_3 + \cdots + n_m) + 4m - 6 - i, 1 \leq i \leq n_3$

$f(V_0^4 V_i^4) = n_1 + n_2 + n_3 + 2(n_4 + \cdots + n_m) + 4m - 8 - i, 1 \leq i \leq n_4$

Jadi disimpulkan:

$f(V_0^j V_i^j) = n_1 + n_2 + \cdots + n_{(j-1)} + 2(n_j + n_{j+1} + \cdots + n_m) + 4m - 2j - i, \quad 1 \leq j \leq m, 1 \leq i \leq n_j, m \geq 2$.

e. Sisi $V_0^j V^{\hat{l}}$

$m = 2 \Longrightarrow\ f\left(V_0^j V^{\hat{l}}\right) = n_1 + 2n_{l+1} + 7 - (j + l)$

$m = 3 \Longrightarrow f\left(V_0^j V^{\hat{l}}\right) = n_1 + n_2 + \cdots + n_l + 2n_{(l+1)} + \cdots + 2n_3 + 11 - (j + l)$

$m = 4 \Longrightarrow\ f\left(V_0^j V^{\hat{l}}\right) = n_1 + n_2 + \cdots + n_l + 2n_{(l+1)} + \cdots + 2n_4 + 15 - (j + l)$

Jadi disimpulkan:

$f\left(V_0^j V^{\hat{l}}\right) = n_1 + n_2 + \cdots + n_l + 2(n_{l+1} + n_{l+2} + \cdots + n_m) + 4m - (j + l + 1),$

$m \geq 2, (j-1) \leq l \leq j.$

f. Bilangan ajaib $k$:

$m = 2 \Longrightarrow\ f(k) = 3(n_1 + n_2) + 8$

$m = 3 \Longrightarrow\ f(k) = 3(n_1 + n_2 + n_3) + 13$

$m = 4 \Longrightarrow\ f(k) = 3(n_1 + n_2 + n_3 + n_4) + 18$

Jadi disimpulkan: $f(k) = 3(n_1 + n_2 + \cdots + n_m) + 5m - 2,\ m \geq 2.$

Dari beberapa pola di atas, maka dapat dibuat generalisasi dalam bentuk teorema berikut:

Teorema 3.4:

Graf star sebanyak $m$ dengan titik pusat terhubungkan oleh satu titik pengait $(l)$ adalah super sisi ajaib dengan konstanta ajaib $k = 3(n_1 + n_2 + \cdots + n_m) + 5m - 2,\ m \geq 2.$

Bukti:

Pelabelan super sisi ajaib pada graph $G$ merupakan pelabelan total sisi ajaib yang memetakan $V$ ke himpunan $\{1, 2, 3, \ldots, p\}$. Pelabelan total sisi ajaib pada suatu graph $G$ dengan order $p$ dan ukuran $q$ adalah fungsi bijektif $f$ dari $V \cup E$ ke himpunan bilangan bulat $\{1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ p+q\}$ sedemikian hingga untuk masing-masing sisi $xy$ di $G$ berlaku $f(x) + f(xy) + f(y) = k$, dengan k konstanta. Maka untuk membuktikan teorema 3.4 perlu ditunjukkan bahwa :

i) Pola pelabelan dari $V(G)$ dan $E(G)$ adalah fungsi.

ii) Pola pelabelan dari $V(G)$ dan $E(G)$ adalah fungsi bijektif $f$ dari $V \cup E$ ke himpunan bilangan bulat $\{1, 2, 3, \dots, p+q\}$.

iii) Untuk masing-masing sisi $xy$ di $G$ berlaku $f(x) + f(xy) + f(y) = k$.

iv) Pola pelabelan $G$ memetakan $V$ ke himpunan $\{1, 2, 3, \dots, p\}$.

Misalkan:

$$V(G) = \left\{ \begin{matrix} V_1^1, V_2^1, \dots, V_{n_1}^1, V_1^2, V_2^2, \dots, V_{n_2}^2, \dots, V_{n_j}^j \\ V_0^1, V_0^{2,}, V_0^3, \dots, V_0^j \\ V^{\hat{1}}, V^{\hat{2}}, V^{\hat{3}}, \dots, V^{\hat{l}} \end{matrix} \right\}, 1 \le \hat{l} \le j-1$$

dimana:

| | |
|---|---|
| $V_0^1$ | : titik pusat $V_1(G)$ |
| $V_1^1, V_2^1, V_3^1, \dots, V_{n_1}^1$ | : titik ujung $V_1(G)$ |
| $V_0^2$ | : titik pusat $V_2(G)$ |
| $V_1^2, V_2^2, V_3^2, \dots, V_{n_2}^2$ | : titik ujung $V_2(G)$ |
| $V_0^j$ | : titik pusat $V_j(G)$ |

$V_1^j, V_2^j, V_3^j, \dots, V_{n_j}^j$ : titik ujung $V_j(G)$

$V^{\hat{1}}$ : titik pengait antara $V_0^1$dan $V_0^2$

$V^{\hat{2}}$ : titik pengait antara $V_0^2$dan $V_0^3$

$V^{\hat{\imath}}$ : titik pengait antara $V_0^j$dan $V_0^{(j+1)}$

$E(G)$

$$= \begin{Bmatrix} V_0^1V_1^1, V_0^1V_2^1, \dots, V_0^1V_{n_1}^1, V_0^2V_1^2, V_0^2V_2^2, \dots, V_0^2V_{n_2}^2, \dots, V_0^jV_1^j, V_0^jV_2^j, \dots, V_0^jV_{n_j}^j \\ V_0^1V^{\hat{1}}, V_0^2V^{\hat{1}}, V_0^2V^{\hat{2}}, \dots, V_0^jV^{\hat{\imath}} \end{Bmatrix}$$

sehingga diperoleh:

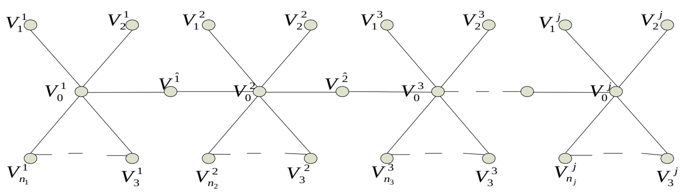
$p = n_1 + n_2 + \cdots + n_m + 2m - 1,$

$q = n_1 + n_2 + \cdots + n_m + 2m - 3$

dan $p + q = (\,n_1 + n_2 + \cdots + n_m + 2m - 1) + (n_1 + n_2 + \cdots + n_m + 2m - 2)$

$= 2(n_1 + n_2 + \cdots + n_m) + 4m - 3$

Graf $G$ dapat digambarkan sebagai berikut:




Gambar 3.38. $m$ Graf Star dengan Titik Pusat Terhubung 1 Titik Pengait

Terdapat pola pelabelan graf $G$ sebagai berikut:

1. $f(V_i^j) = n_1 + n_2 + \cdots + n_{j-1} + (j-1) + i, 1 \leq i \leq n_j, 1 \leq j \leq m$
2. $f(V_0^j) = n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_m + j + (m-1), 1 \leq j \leq m$
3. $f(V^{\hat{l}}) = n_1 + n_2 + \cdots + n_l + l, 1 \leq l \leq (m-1)$
4. $f(V_0^j V_i^j) = n_1 + n_2 + \cdots + n_{(j-1)} + 2(n_j + n_{j+1} + \cdots + n_m) + 4m - 2j - i, 1 \leq i \leq n_j, 1 \leq j \leq m$
5. $f(V_0^j V^{\hat{l}}) = n_1 + n_2 + \cdots + n_l + 2(n_{l+1} + n_{l+2} + \cdots + n_m) + 4m - (j + l + 1), 1 \leq j \leq m, (j-1) \leq l \leq j$

i) Akan ditunjukkan bahwa pola pelabelan $V(G)$ dan $U(G)$ adalah fungsi.

Sesuai dengan definisi fungsi, suatu fungsi $f$ dari $X$ ke $Y$, adalah aturan yang memetakan setiap elemen $X$ tepat satu pada elemen $Y$. Sehingga dari definisi tersebut sudah jelas membuktikan bahwa pola pelabelan $V(G)$ dan $U(G)$ adalah fungsi.

ii) Akan ditunjukkan bahwa $G$ adalah fungsi bijektif $f$ dari $V(G) \cup E(G)$ ke himpunan bilangan bulat $\{1, 2, 3, \ldots, p + q\}$.

1. Fungsi injektif.

A. Untuk titik di $G$.

1. Titik $V_i^j$:

Akan ditunjukkan untuk setiap bilangan bulat positif $i_1$ dan $i_2$, $j_1$ dan $j_2$, jika $f\left(V_{i_1}^{j_1}\right) = f\left(V_{i_2}^{j_2}\right)$ maka $i_1 = i_2, j_1 = j_2$.

Diketahui $f\left(V_i^j\right) = n_1 + n_2 + \cdots + n_{j-1} + (j-1) + i$, dengan $1 \leq i \leq n_j$, dan $1 \leq j \leq m$.

Untuk $1 \leq i_1 \leq n_j, 1 \leq i_2 \leq n_j$ dan $1 \leq j_1 \leq m, 1 \leq j_2 \leq m$.

Karena $f\left(V_{i_1}^{j_1}\right) = f\left(V_{i_2}^{j_2}\right)$, maka diperoleh:

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_{j_1-1} + (j_1 - 1) + i_1 = n_1 + n_2 + \cdots + n_{j_2-1} + (j_2 - 1) + i_2$$

$$n_{j_1-1} + j_1 - 1 + i_1 = n_{j_2-1} + j_2 - 1 + i_2$$

$$n_{j_1-1} + j_1 + i_1 = n_{j_2-1} + k_2 + i_2$$

$$j_1 = j_2, i_1 = i_2$$

2. Titik $V_0^j$:

Akan ditunjukkan untuk setiap bilangan bulat positif $j_1$ dan $j_2$, jika $f\left(V_0^{j_1}\right) = f\left(V_0^{j_2}\right)$ maka $j_1 = j_2$.

Diketahui

$f\left(V_0^j\right) = n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_m + j + (m-1)$, dengan $1 \leq j \leq m$.

Untuk $1 \leq j_1 \leq m, 1 \leq j_2 \leq m$.

Karena $f\left(V_0^{j_1}\right) = f\left(V_0^{j_2}\right)$, maka diperoleh:

$$n_1 + n_2 + n_3 \ldots + n_m + j_1 + (m-1)$$

$$= n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_m + j_2 + (m-1)$$

$$j_1 = j_2$$

3. Titik$V^{\hat{l}}$:

Akan ditunjukkan untuk setiap bilangan bulat positif $l_1$ dan $l_2$, jika $f(V^{\hat{l}_1}) = f(V^{\hat{l}_2})$ maka $l_1 = l_2$.

Diketahui $f(V^{\hat{l}}) = n_1 + n_2 + \cdots + n_l + l$, dengan $1 \leq l \leq (m-1)$.

Untuk $1 \leq l_1 \leq m, 1 \leq l_2 \leq m$.

Karena $f(V^{\hat{l}_1}) = f(V^{\hat{l}_2})$, maka diperoleh:

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_{l_1} + l_1 = n_1 + n_2 + \cdots + n_{l_2} + l_2$$

$$l_1 = l_2$$

A. Untuk sisi di $G$.

1. Sisi $V_0^j V_i^j$

Akan ditunjukkan untuk setiap bilangan bulat positif $i_1$ dan $i_2$, $j_1$ dan $j_2$, jika $f\left(V_0^{j_1} V_{i_1}^{k_1}\right) = f\left(V_0^{j_2} V_{i_2}^{j_2}\right)$ maka $i_1 = i_2, j_1 = j_2$.

Diketahui $f(V_0^j V_i^j) = n_1 + n_2 + \cdots + n_{(j-1)} + 2(n_j + n_{j+1} + \cdots + n_m) + 4m - 2j - i$, dengan $1 \leq j \leq m$, dan $1 \leq i \leq n_j$.

Untuk $1 \leq i_1 \leq n_j, 1 \leq i_2 \leq n_j$ dan $1 \leq j_1 \leq m, 1 \leq j_2 \leq m$.

Karena $f\left(V_0^{j_1} V_{i_1}^{j_1}\right) = f\left(V_0^{j_2} V_{i_2}^{j_2}\right)$, maka diperoleh:

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_{(j_1-1)} + 2(n_{j_1} + n_{j_1+1} + \cdots + n_m) + 4m - 2j_1 - i_1$$
$$= n_1 + n_2 + \cdots + n_{(j_2-1)} + 2(n_{j_2} + n_{j_2+1} + \cdots + n_m)$$
$$+ 4m - 2j_2 - i_2$$

$$n_{(j_1-1)} + 2\left(n_{j_1} + n_{j_1+1} + \cdots + n_m\right) - 2j_1 - i_1$$

$$= n_{(j_2-1)} + 2\left(n_{j_2} + n_{j_2+1} + \cdots + n_m\right) - 2j_2 - i_2$$

$$j_1 = j_2, \quad i_1 = i_2$$

2. Sisi $V_0^j V^{\hat{l}}$

Akan ditunjukkan untuk setiap bilangan bulat positif $j_1$ dan $j_2$, $l_1$ dan $l_2$, jika $f\left(V_0^{j_1} V^{\hat{l}_1}\right) = f\left(V_0^{j_2} V^{\hat{l}_2}\right)$ maka $j_1 = j_2$, $l_1 = l_2$.

Diketahui $f\left(V_0^j V^{\hat{l}}\right) = n_1 + n_2 + \cdots + n_l + 2(n_{l+1} + n_{l+2} + \cdots + n_m) + 4m - (j + l + 1)$, dengan $1 \le j \le m$,dan $(j-1) \le l \le j$

Untuk $1 \le j_1 \le m, 1 \le j_2 \le m$ dan $( j-1) \le l_1 \le j, (j-1) \le l_2 \le j$.

Karena $f\left(V_0^{j_1} V^{\hat{l}_1}\right) = f\left(V_0^{j_2} V^{\hat{l}_2}\right)$, maka diperoleh:

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_{l_1} + 2\left(n_{l_1+1} + n_{l_1+2} + \cdots + n_m\right) + 4m - (j_1 + l_1 + 1)$$

$$= n_1 + n_2 + \cdots + n_{l_2} + 2\left(n_{l_2+1} + n_{l_2+2} + \cdots + n_m\right) + 4m - (j_2 + l_2 + 1)$$

$$n_{l_1} + 2\left(n_{l_1+1} + n_{l_1+2} + \cdots + n_m\right) - (j_1 + l_1)$$

$$= n_{l_2} + 2\left(n_{l_2+1} + n_{l_2+2} + \cdots + n_m\right) - (j_2 + l_2)$$

$$j_1 = j_2, \quad l_1 = l_2$$

Dengan demikian, $f$ merupakan fungsi injektif dari $V(G) \cup E(G)$ ke $\{1, 2, 3, \dots, p + q\}$.

2. Fungsi surjektif.

Sesuai dengan definisi surjektif, suatu $f: X \to Y$ dikatakan surjektif jika untuk setiap $y \in Y$, terdapat $x \in X$ sedemikian hingga $f(x) = y$. Prapeta untuk pelabelan $V(G)$ dan $U(G)$ adalah $\{1, 2, 3, \dots, p+q\}$. Sehingga, untuk setiap bilangan asli $\mathbb{N}$ pasti mempunyai pasangan di kodomainnya. Dengan demikian, sudah jelas menunjukkan bahwa pola pelabelan $V(G)$ dan $U(G)$ adalah surjektif.

Karena pola pelabelan $V(G)$ dan $U(G)$ injektif juga sekaligus surjektif, maka pola pelabelan $V(G)$ dan $U(G)$ bijektif.

iii) Akan ditunjukkan bahwa untuk masing-masing sisi $xy$ di $G$ berlaku $f(x) + f(xy) + f(y) = k$.

a. Untuk sisi $V_0^j V_i^j$ di $G$ diperoleh:

$$f(V_0^j) + f(V_0^j V_i^j) + f(V_i^j)$$

$$= [n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_m + j + (m-1)]$$

$$+ \left[n_1 + n_2 + \cdots + n_{(j-1)} + 2(n_j + n_{j+1} + \cdots + n_m)\right.$$

$$\left.+ 4m - 2j - i\right] + \left[n_1 + n_2 + \cdots + n_{j-1} + (j-1) + i\right]$$

$$= 3(n_1 + n_2 + \cdots + n_m) + 5m - 2$$

b. Untuk sisi $V_0^j V^{\hat{l}}$ di $G$ diperoleh:

$$f(V_0^j) + f(V_0^j V^{\hat{l}}) + f(V^{\hat{l}})$$

$$= [n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_m + j + (m-1)]$$

$$+ [n_1 + n_2 + \cdots + n_{\hat{l}} + 2(n_{\hat{l}+1} + n_{\hat{l}+2} + \cdots + n_m)$$

$$+ 4m - (j + \hat{l} + 1)] + [n_1 + n_2 + \cdots + n_{\hat{l}} + \hat{l}]$$

$$= 3(n_1 + n_2 + \cdots + n_m) + 5m - 2$$

Jadi $G$ adalah super sisi ajaib dengan bilangan ajaib:

$$k = 3(n_1 + n_2 + \cdots + n_m) + 5m - 2$$

iv) Akan ditunjukkan bahwa $f$ memetakan $V$ ke $\{1, 2, 3, \ldots, p\}$. Akan dibuktikan $1 \leq f(V_i^j) \leq p$.

a. Titik $V_i^j$

Diketahui $f(V_i^j) = n_1 + n_2 + \cdots + n_{j-1} + (j-1) + i, 1 \leq i \leq n_j, 1 \leq j \leq m$.

Karena $1 \leq i \leq n_j, 1 \leq j \leq m$, maka diperoleh:

$$1 \leq i \leq n_j$$

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_{j-1} + (j-1) + 1 \leq n_1 + n_2 + \cdots + n_{j-1} + (j-1) + i \leq n_1 + n_2 + \cdots + n_{j-1} + (j-1) + n_j$$

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_{j-1} + j \leq n_1 + n_2 + \cdots + n_{j-1} + (j-1) + i \leq n_1 + n_2 + \cdots + n_{j-1} + (j-1) + n_j$$

$$1 \leq n_1 + n_2 + \cdots + n_{j-1} + j \leq n_1 + n_2 + \cdots + n_{j-1} + (j-1) + i \leq n_1 + n_2 + \cdots + n_{j-1} + (j-1) + n_j < n_1 + n_2 + \cdots + n_m + 2m - 1$$

$$1 \leq n_1 + n_2 + \cdots + n_{j-1} + (j-1) + i < n_1 + n_2 + \cdots + n_m + 2m - 1$$

Jadi $1 \leq f(V^{\hat{l}}) \leq p$.

b. Titik $V_0^j$

Diketahui $f(V_0^j) = n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_m + j + (m-1), 1 \leq j \leq m$.

Karena $1 \leq j \leq m$, maka diperoleh:

$$n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_m + (m-1) + 1$$
$$\leq n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_m + (m-1) + j$$
$$\leq n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_m + (m-1) + m$$
$$n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_m + m \leq n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_m + j + (m-1)$$
$$\leq n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_m + 2m - 1$$
$$1 < n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_m + m$$
$$\leq n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_m + j + (m-1)$$
$$\leq n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_m + 2m - 1$$
$$1 < n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_m + j + (m-1) \leq n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_m + 2m - 1$$

Jadi $1 < f(V^{\hat{l}}) \leq p$.

c. Titik $V^{\hat{l}}$

Diketahui $f(V^{\hat{l}}) = n_1 + n_2 + \cdots + n_l + l, 1 \leq l \leq (m-1)$.

Karena $1 \leq l \leq (m-1)$, maka diperoleh:

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_l + 1 \leq n_1 + n_2 + \cdots + n_l + l$$
$$\leq n_1 + n_2 + \cdots + n_l + (m-1)$$

$$1 < n_1 + n_2 + \cdots + n_l + 1 \le n_1 + n_2 + \cdots + n_l + l$$
$$\le n_1 + n_2 + \cdots + n_l + (m-1)$$
$$< n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_m + 2m - 1$$
$$1 < n_1 + n_2 + \cdots + n_l + 1 \le n_1 + n_2 + \cdots + n_l + l$$
$$< n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_m + 2m - 1$$

Jadi $1 < f(V^{\hat{l}}) < p$.

Jadi terbukti bahwa $f$ memetakan $V$ ke $\{1, 2, 3, \ldots, p\}$.

Dari point (i), (ii), (iii) dan (iv) telah terbukti bahwa graf $G$ memenuhi syarat-syarat pelabelan super sisi ajaib. Sehingga graf $G$ merupakan super sisi ajaib.

# DAFTAR PUSTAKA


Abdussakir, 2005. *Edge-Magic Total Labeling pada graf $mP_2$ (m bilangan asli ganjil)*. Jurnal Saintika, Edisi Khusus Dies Natalies I UIN Malang, Juli. Halaman 22-27.

Abdussakir, dkk. 2009. *Teori graf*. Malang: UIN Malang Perss

Abdusyakir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press.

An-Najdi, Abu Zahra'. 1996. *Al-Quran dan rahasia angka-angka*. Bandung: Pustaka Hidayah.

Baiquni, Ahmad. 1995. *Al-Quran ilmu Pengetahuan dan Teknologi*. Yogyakarta: PT Dana Bhakti Prima Yasa.

Balakrishnan, V. K. 1991. *Introductory Discrete Mathematics*. New Jersey: Prentice-Hall, Inc.

Chartrand, G. and Lesniak, L.1986. *Graph and Digraph second Edition*. California: Wadsworth. Inc

Gallian, A. Joseph. 2009. A Dynamic Survey of Graph Labeling. *http://www.Combinatorics.org/Survey/ds6.pdf*. (diakses 27 agustus 2010)

Baugh, Richard Jhonson. 2009. *Discrete Mathematics 7 Edition*. New Jersey: Prentice-Hall, Inc.

Mas'ud, Muhammad. 2008. *Subhanallah...Quantum Bilangan-Bilangan Al-Quran*. Jogjakarta: Diva Press

Park, Ji Yeon; Choi, Jin Hyuk, and Bae, Jae-hyeong. 2008. On Super Edge Magic labeling Of Some Graphs. *http://icms.kaist.ac.kr/mathnet/thesis_file/02_B05-1206.pdf.* (diakses 27 agustus 2010)

Rosyid, A. 2009. Pelabelan total Titik Ajaib Pada Graf Petersen. *http%3A%2F%2Feprints.undip.ac.id%2F2836%2F1%2FBab_I_dan_Bab_II.pdf*. (diakses 30 agustus 2010)

Santosa, R.Gunawan. 2002. *Aplikasi Teorema Polya Enomerasi Graf Sederhana.* (Online): http//Home.Unpar.ac.id/ integral/ Volume 8/ integral 8 no 1/ Aplikasi Teorema Polya.pdf. (diakses tanggal 27 agustus 2010)

Wijaya, K & Baskoro, E. T. 2000. Pelabelan Total-Sisi Ajaib pada Hasil Kali Dua Graf. *http://personal.fmipa.itb.ac.id/ebaskoro/files/2007/11/procmathnatscisemi narfmipaitb2000140-144.pdf*. (diakses 27 agustus 2010)

Wilson, R.J. dan Watkins, J. J. 1990. *Graphs An Introductory Approach*. Canada: John Wiley and Sons, Inc.

Wiitala, Stephen A. 1987. *Discrete Mathematics A Unified Approach.* Singapore: Mc. Graw-Hill, Inc.

**KEMENTERIAN AGAMA RI**
**UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MALANG**
**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**
**Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang (0341)551345**
**Fax. (0341)572533**

# BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

**Nama** : **Liya Fitrotul Chusna**
**Nim** : **07610055**
**Fakultas/ jurusan** : **Sains Dan Teknologi/ Matematika**
**Judul skripsi** : **Pelabelan Super Sisi Ajaib Pada Graf-Graf Star dengan Titik Pusat Terhubung oleh Satu Titik Pengait**
**Pembimbing I** : **Abdussakir, M.Pd**
**Pembimbing II** : **Dr. H. Ahmad Barizi, M.A**

| No | Tanggal | HAL | Tanda Tangan | |
|---|---|---|---|---|
| 1. | 30 Oktober 2010 | Konsultasi BAB III | 1. | |
| 2. | 9 November 2010 | Konsultasi BAB I dan II | | 2. |
| 3. | 17 November 2010 | revisi BAB I dan II | 3 | |
| 4. | 19 November 2010 | Konsultasi BAB III | | 4. |
| 5. | 19 Novemer 2010 | ACC seminar proposal | 5. | |
| 6. | 26 November 2010 | Konsultasi BAB III | | 6. |
| 7. | 14 Desember 2010 | Konsultasi Kajian Agama | 7. | |
| 8. | 17 Desember 2010 | Konsultasi BAB III | | 8. |
| 9. | 23 Desember 2010 | Revisi Kajian Agama | 9. | |
| 10. | 24 Desember 2010 | Revisi BAB III | | 10. |
| 11. | 01 Januari 2010 | Konsultasi Keseluruhan | 11. | |
| 12. | 05 Januari 2011 | ACC Keseluruhan | | 12. |

Malang, 05 Januari 2011
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

**Abdussakir, M.Pd**
**NIP. 19751006 200312 1 001**