

**OPERATOR LINIER PEMBANGKIT DARI FUNGSI KOSINUS
COS PADA TRANSFORMASI LAPLACE**

SKRIPSI

oleh:
SITI AFIYAH DINIATI
NIM. 07610054



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2011**

**OPERATOR LINIER PEMBANGKIT DARI FUNGSI KOSINUS
COS PADA TRANSFORMASI LAPLACE**

SKRIPSI

oleh:
SITI AFIYAH DINIATI
NIM. 07610054

Diajukan kepada:
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2011**

**OPERATOR LINIER PEMBANGKIT DARI FUNGSI KOSINUS
COS PADA TRANSFORMASI LAPLACE**

SKRIPSI

oleh:
SITI AFIYAH DINIATI
NIM. 07610054

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal: 12 Maret 2011

Dosen Pembimbing I,

Dosen Pembimbing II,

Hairur Rahman, M.Si
NIP. 19800429 200604 1 003

Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag
NIP. 19720420 200212 1 003

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

OPERATOR LINIER PEMBANGKIT DARI FUNGSI KOSINUS COS PADA TRANSFORMASI LAPLACE

SKRIPSI

oleh:
SITI AFIYAH DINIATI
NIM. 07610054

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal: 25 Maret 2011

Susunan Dewan Penguji:

Tanda Tangan

1. **Penguji Utama** : **Drs. Usman Pagalay, M.Si** ()
NIP. 19650414 200312 1 001
2. **Ketua** : **Abdussakir, M.Pd** ()
NIP. 19751006 200312 1 001
3. **Sekretaris** : **Hairur Rahman, M.Si** ()
NIP. 19800429 200604 1 003
4. **Anggota** : **Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag** ()
NIP. 19720420 200212 1 003

Mengetahui dan Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP.197510062003121001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Siti Afiyah Diniati

Nim : 07610054

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-banar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 12 Maret 2011

Yang membuat pernyataan

Siti Afiyah Diniati
NIM. 07610054

MOTTO

فَإِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٥﴾ إِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٦﴾

Karena Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan,
Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan
(QS. 94: 5-6)

Berusahalah Menggapai Langit Karena Sekalipun Engkau
Terjatuh, Engkau Akan Tetap Berada di Antara Para Bintang

Shoot for the moon and if you miss you will still be among
the stars

(Les Brown)

PERSEMBAHAN

Puji Syukur Alhamdulillah, Karya Ini Penulis Persembahkan Untuk:

Ibu dan Bapak atas Do'a dan Cinta Kasih yang Begitu Tulus
Kakak Penulis, Ahmad Ibnu Salam atas Nasihatnya Yang Penuh
Kebaikan

Adik-Adik Penulis, Si Kembar, Ahmad Hasani dan Ahmad Husaini, serta

Semua Sepupu Penulis atas kepercayaannya

Nenek Penulis, Siti Raulah, Terima Kasih Telah Merawat Penulis

Keluarga Drs. Imam Mahmudin dan Dra. Dzurahtun Mahnun,

Keluarga Nur Hadi YS dan Suryati Yang Senantiasa Memberi Dukungan

Kepada Penulis

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Puji syukur alhamdulillah penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT yang telah memberikan rahmat dan hidayahNya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi sekaligus studi di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang dengan lancar. Shalawat serta salam semoga tetap tercurahkan kepada nabi Muhammad SAW yang telah memberikan bimbingan kepada umatnya di segala zaman.

Pada kesempatan kali ini penulis tidak lupa menyampaikan ucapan terima kasih, *jazakumullahu ahsanal jaza'*, kepada segenap pihak yang telah membantu terselesaikannya skripsi yang berjudul: *Operator Linier Pembangkit dari Fungsi Kosinus Cos pada Transformasi Laplace*. Ucapan terima kasih ini penulis sampaikan kepada:

1. Prof. DR. H. Imam Suprayogo, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, yang telah banyak memberikan inspirasi yang berharga.
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU., D.Sc selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

4. Hairur Rahman, M.Si dan Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag, selaku dosen pembimbing skripsi, yang telah banyak memberikan pengarahan dan pengetahuan yang berharga.
5. Segenap dosen, terima kasih atas ilmu, nasihat dan bimbingannya.
6. Segenap karyawan Jurusan Matematika yang telah banyak membantu.
7. Bapak dan Ibu yang selalu ikhlas memberi cinta, kasih, semangat, dan dukungan.
8. Ahmad Ibnu Salam, Ahmad Hasani, dan Ahmad Husaini yang selalu menjadi semangat agar penulis menjadi lebih baik.
9. Teman-teman Jurusan Matematika yang selalu memberi dukungan.
10. Teman-teman 52/ 58 Community yang telah banyak membantu.
11. Semua pihak yang tidak bisa penulis sebutkan.

Akhirnya, penulis berharap semoga tulisan ini dapat memberikan manfaat kepada pembaca, terlebih kepada penulis sendiri.

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Malang, 01 Maret 2011

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	
MOTTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR	i
DAFTAR ISI	iii
DAFTAR SIMBOL	v
ABSTRAK	vi
ABSTRACT	vii
BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Tujuan Penelitian	3
1.4 Manfaat Penelitian	3
1.5 Metode Penelitian	4
1.6 Sistematika Penulisan	4
BAB II KAJIAN TEORI	
2.1 Himpunan Tertutup	6
2.2 Kontinu Seragam	6
2.3 Ruang Metrik	8
2.4 Ruang Lengkap	9
2.5 Ruang Vektor	10
2.6 Norma	11
2.7 Himpunan Kompak	12
2.8 Ruang Banach	14
2.9 Operator Linier	14
2.10 Integral Bochner	20
2.11 Resolvent	22
2.12 Transformasi Laplace	31
2.13 Syarat-Syarat Cukup Agar Transformasi Laplace Ada	32
2.14 Beberapa Sifat Penting Transformasi Laplace	33
2.15 Transformasi Laplace untuk Fungsi Kosinus	39
2.16 Fungsi Kontinu Kuat (<i>strongly continuous function</i>) dan Fungsi Kosinus Cos	41
2.17 Fungsi Karakteristik	42
2.18 Deret Von Neumann	42
2.19 Transformasi Laplace-Stieltjes	43
2.20 Transformasi Laplace untuk Fungsi Sinus	44
2.21 Masalah Cauchy Orde Kedua	45

BAB III PEMBAHASAN

3.1 Generator Fungsi Kosinus Cos	47
3.2 Kajian Operator Pembangkit dalam Al-Qur'an	57

BAB IV PENUTUP

4.1 Kesimpulan	60
4.2 Saran	61

DAFTAR PUSTAKA



DAFTAR SIMBOL

$abs(T)$: Abscissa dari T	\in : Anggota
\mathbb{C} : Bilangan kompleks	Sup : Supremum
ω : Batas pertumbuhan eksponensial	$Ran(T)$: Range dari T
$\mathcal{L}\{X\}$: Transformasi Laplace dari X	$R(\cdot, A)$: Resolvent dari A
\subset : Sub himpunan	$\ \cdot\ $: Norma
Inf : Infimum	$Ker(T)$: Kernel dari T
\mathbb{R} : Bilangan real	$\rho(A)$: Resolvent set dari A
$<$: Kurang dari	\mathbb{F} : Lapangan
\leq : Kurang dari atau sama dengan	$D(A)$: Daerah asal dari A
$>$: Lebih dari	
\geq : Lebih dari atau sama dengan	
$ \cdot $: Nilai mutlak	
\cup : Gabungan	
\cap : Irisan	
$[]$: Interval tertutup	
$()$: Interval terbuka	
$[)$: Interval tertutup terbuka	
$(]$: Interval terbuka tertutup	
$\mathcal{L}(X)$: Ruang dari seluruh operator linier terbatas dari ruang Banach X ke ruang Banach X	
$C(a, b)$: Ruang dari fungsi-fungsi kontinu pada interval (a, b)	

ABSTRAK

Diniati, SitiAfiyah. 2011. **Operator Linier Pembangkit dari Fungsi Kosinus Cos pada Transformasi Laplace**. Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Pembimbing: (1) Hairur Rahman, M.Si
(2) Dr. H. MunirulAbidin, M.Ag

Kata Kunci: Operator linier, Fungsi Kosinus Cos, Transformasi Laplace

Pemodelan sistem aliran yang tidak beraturan (*Brownian Motion*) biasanya dijelaskan dengan menggunakan model *Kac Walks (Random Walks)*, sehingga diperoleh suatu persamaan *Telegraph*:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2a \frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ atau } u''(t) + 2au'(t) = Au(t)$$

dengan $A = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ operator linier pada ruang Banach X . Persamaan abstrak *Telegraph* tersebut *well-posed* (terdefinisi dengan baik) jika dan hanya jika operator linier A merupakan pembangkit dari fungsi kosinus Cos. Pada penelitian ini, penulis menggunakan metode studi pustaka dengan mencari, mempelajari dan menelaah sumber-sumber informasi dari literatur yang berhubungan dengan operator linier, fungsi kosinus Cos, serta transformasi Laplace sebagai pembangkitnya.

Tujuan penelitian kali ini adalah membahas bagaimana karakteristik suatu operator linier A yang merupakan pembangkit dari fungsi kosinus Cos pada transformasi Laplace. Pada akhir penelitian, diperoleh karakteristik suatu operator A untuk fungsi kosinus Cos yang dibangkitkan dengan transformasi Laplace.

ABSTRACT

Diniati, SitiAfiyah. 2011. **Generator Linear Operator of Cosine Function Cos on Laplace Transform**. Thesis. Mathematics Department Science and Technology Faculty the State Islamic University Maulana Malik Ibrahim of Malang.

Advisor: (1) Hairur Rahman, M.Si

(2) Dr. H. MunirulAbidin, M.Ag

Key Word: Linear Operator, Cosine Function Cos, Laplace Transform

The model of flow random current (Brownian Motion) is explained by Kac Walks model (Random Walks model), such that we know the Telegraph equality:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2a \frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ or } u''(t) + 2au'(t) = Au(t)$$

where $A = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ a linear operator on Banach space X . The Telegraph equality above well-posed (well defined) if and only if a linear operator A is the generator of cosine Cos function. In this thesis, the writer use library study by seek, learn, and analyze the information sources what relate with linear operator, cosine function Cos, and Laplace transform as the generator.

The goal of this thesis is to explain how the characteristic of a linear operator A to be the generator of cosine function Cos on Laplace transform. In the end, we get the characteristic of a linear operator A of cosine function Cos generates by Laplace transform.



BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Menuntut ilmu adalah kewajiban setiap muslim mulai dari lahir sampai mati. Tidak ada agama selain Islam yang demikian tinggi menghargai ilmu pengetahuan, mendorong untuk mencarinya, dan memuji orang-orang yang menguasainya. Hal ini pula yang mendorong umat Islam untuk selalu belajar dan mengajar sehingga tidak heran jika surat yang pertama kali diturunkan oleh Allah adalah Surat Al-Alaq: 1-5 yang berisi tentang perintah membaca yang merupakan alat transformasi ilmu pengetahuan serta tentang penciptaan manusia.

Menurut Imam Raghīb Al-Ashfahani, makna ilmu adalah mengetahui secara hakikat. Seluruh pengetahuan tentang sesuatu yang tidak diketahui, jenis apa pun ia, dalam bidang apa pun ia, hingga hakikatnya diketahui dengan jelas oleh manusia maka ia termasuk dalam lingkup term “ilmu” yang disebutkan dalam Al-Qur’an (Qardhawi, 1998: 54).

Matematika secara ontologi berasal dari bahasa Yunani yaitu “*mathema*” atau mungkin juga “*mathematikos*” yang artinya hal-hal yang dipelajari. Orang Belanda menyebut “*wiskunde*”, yang artinya ilmu pasti. Sedangkan orang Arab menyebutnya dengan “*ilmu al-hisab*”, artinya ilmu berhitung (Abdusysyahir, 2007: 5). Namun secara istilah, sampai saat ini belum ada definisi yang tepat mengenai Matematika. Para ahli filsafat dan Matematika telah mencoba membuat

definisi Matematika, tetapi sampai sekarang belum ada yang menyatakan bahwa jawabannya adalah yang terakhir.

Mulyadhi Kartanegara(2005: 87-88)menulis bahwa pada hakikatnya ilmu-ilmu Matematika merupakan studi tentang pengukuran yang oleh Ibnu Khaldun dibagi menjadi empat sub devisi, yaitu geometri, aritmetika, musik, dan astronomi. Beberapa ahli lain mengatakan bahwa Matematika adalah ilmu mengenai bilangan dan ruang, ilmu tentang besaran, hubungan, bentuk, struktur-struktur yang logik, serta bersifat deduktif. Selain perbedaan sudut pandang yang digunakan, beragamnya definisi mengenai Matematik tidak terlepas dari keluasan kajian Matematika itu sendiri.

Kajian Matematika yang saat ini mengalami perkembangan cukup pesat adalah Pemodelan Matematika (*Mathematical Modelling*) yang termasuk dalam kajian Matematika terapan. Dalam dunia pemodelan dikenal teknik pemodelan sistem gerakan partikel-partikel dalam suatu pola yang tidak beraturan (acak) atau yang lebih dikenal dengan gerak Brown (*Brownian Motion*), misalnya saja aliran darah yang bergerak melalui pembuluh darah, ginjal ataupun melalui paru-paru.

Pemodelan system aliran yang tidak beraturan ini biasanya dijelaskan dengan menggunakan model *Kac Walks (Random Walks)*. Dengan penggunaan model ini, akan diperoleh suatu persamaan *Telegraph* sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2a \frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ atau } u''(t) + 2au'(t) = Au(t)(a)$$

dengan $A = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ operator linier pada ruang Banach X .

Persamaan abstrak *Telegraph* (a) di atas *well-posed* (terdefinisi dengan baik) jika dan hanya jika operator linier A merupakan pembangkit dari fungsi

kosinus Cos (Eckstein dkk. 1999). Dalam penelitian tersebut karakteristik suatu operator linier A agar menjadi pembangkit dari fungsi kosinus Cos belum diteliti. Oleh karena itu, pada penelitian kali ini dianalisis mengenai karakteristik suatu operator linier A merupakan pembangkit dari fungsi kosinus Cos pada transformasi Laplace.

1.2 Rumusan Masalah

Bagaimana karakteristik suatu operator linier A merupakan pembangkit dari fungsi kosinus Cos pada transformasi Laplace?

1.3 Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk membahas karakteristik suatu operator linier A yang merupakan pembangkit dari fungsi kosinus Cos pada transformasi Laplace.

1.4 Manfaat Penelitian

1. Bagi Peneliti

Penelitian ini diharapkan mampu membantu peneliti dalam mengembangkan dan mengaplikasikan keilmuan di bidang analisis maupun pemodelan.

2. Bagi Pembaca

Penelitian ini diharapkan mampu menambah wawasan pembaca tentang operator linier, terutama operator linier yang merupakan pembangkit dari

fungsi kosinus \cos pada transformasi Laplace, sehingga nantinya penelitian ini bisa dikembangkan pada bahasan maupun bidang yang lebih luas.

1.5 Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan metode studi pustaka (*library studies*) atau studi literatur dengan menggunakan referensi-referensi yang berkaitan dengan materi yang akan dibahas.

Adapun tahapan-tahapan yang dilakukan dalam penulisan skripsi ini adalah sebagai berikut:

1. Mencari, mempelajari dan menelaah sumber-sumber informasi yang berhubungan dengan topik yang diteliti.
2. Memberikan deskripsi dan pembahasan lebih lanjut karakteristik suatu operator linier A merupakan operator pembangkit dari fungsi kosinus \cos pada transformasi Laplace
3. Memberikan kesimpulan akhir dari hasil pembahasan.

1.6 Sistematika Penulisan

Untuk memudahkan melihat dan memahami penelitian ini secara keseluruhan, maka penulis menggambarkan sistematika penulisannya menjadi empat bab, yaitu:

Bab I : berisi latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, serta sistematika pembahasan.

- Bab II : berisi kajian teori, yakni penjelasan-penjelasan tentang ruang Banach, transformasi Laplace, operator linier.
- Bab III : pembahasan, yakni tentang operator linier pembangkit dari fungsi kosinus Cos, serta kajian keagamaan mengenai operator.
- Bab IV : berisi kesimpulan serta saran sebagai masukan untuk penelitian selanjutnya.



BAB II

KAJIAN TEORI

2.1 Himpunan Tertutup

Definisi 2.1.1 (Bartle dan Sherbet, 2000: 313)

Suatu himpunan bagian G di \mathbb{R} dikatakan terbuka di \mathbb{R} jika untuk setiap $x \in G$ terdapat suatu lingkungan V dari x sedemikian sehingga $V \subseteq G$.

Suatu himpunan bagian F di \mathbb{R} dikatakan tertutup di \mathbb{R} jika komplemen dari $C(F) := \mathbb{R} \setminus F$ terbuka di \mathbb{R} .

Contoh:

Interval (a, ∞) dan $(-\infty, a)$ merupakan himpunan-himpunan terbuka dan $[b, \infty)$ dan $(-\infty, b]$ adalah himpunan-himpunan tertutup.

2.2 Kontinu Seragam

Definisi 2.2.1 (Bartle dan Sherbet, 2000: 137)

Misalkan $A \subseteq \mathbb{R}$ dan $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. f dikatakan kontinu seragam pada A jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ dan $u \in A$, terdapat suatu $\delta(\varepsilon) > 0$ sedemikian sehingga untuk $x, u \in A$ yang memenuhi $|x - u| < \delta(\varepsilon)$, maka $|f(x) - f(u)| < \varepsilon$.

Contoh:

Tunjukkan bahwa $f(x) = x^2$ merupakan fungsi kontinu seragam!

Bukti:

Ambil $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta(\varepsilon) > 0$ sedemikian sehingga untuk $x, u \in A$ yang memenuhi $|x - u| < \delta(\varepsilon)$, maka

$$|f(x) - f(u)| = |x^2 - u^2| = |x - u||x + u| < \delta(\varepsilon)|x + u|$$

Jika diambil $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{|x+u|}$, maka

$$|f(x) - f(u)| < \delta(\varepsilon)|x + u| < \frac{\varepsilon}{|x+u|}|x + u| = \varepsilon$$

Jadi, f kontinu seragam.

Teorema 2.2.2 (Bartle dan Sherbet, 2000: 234)

Misalkan (f_n) suatu barisan dari fungsi kontinu pada suatu himpunan $A \subseteq \mathbb{R}$ dan

(f_n) konvergen seragam di A ke suatu fungsi $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, maka f kontinu di A .

Bukti:

Diberikan $\varepsilon > 0$, maka terdapat $H := H(\frac{1}{3}\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga jika $n \geq$

H , maka $|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{3}\varepsilon$ untuk semua $x \in A$. Misalkan diambil sebarang

$c \in A$, ditunjukkan bahwa f kontinu di c . Dengan menggunakan Pertidaksamaan

Segitiga, diperoleh

$$\begin{aligned} |f(x) - f(c)| &\leq |f(x) - f_H(x)| + |f_H(x) - f_H(c)| + |f_H(c) - f(c)| \\ &\leq \frac{1}{3}\varepsilon + |f_H(x) - f_H(c)| + \frac{1}{3}\varepsilon \end{aligned}$$

karena f_H kontinu di c , maka terdapat suatu $\delta := \delta(\frac{1}{3}\varepsilon, c, f_H) > 0$ sedemikian

sehingga jika $|x - c| < \delta$ dan $x \in A$, maka $|f_H(x) - f_H(c)| < \frac{1}{3}\varepsilon$. Oleh karena

itu, jika $|x - c| < \delta$ dan $x \in A$, maka diperoleh $|f_H(x) - f_H(c)| < \varepsilon$. Karena

$\varepsilon > 0$, maka f kontinu pada sebarang $c \in A$.

2.3 Ruang Metrik

Definisi 2.3.1 (Bartle dan Sherbet, 2000: 328)

Metrik pada himpunan S adalah fungsi $d: S \times S \rightarrow \mathbb{R}$ yang memenuhi sifat berikut:

- a) $d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in S$
- b) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- c) $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in S$
- d) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \forall x, y, z \in \mathbb{R}$

Ruang metrik (S, d) adalah himpunan S dengan metrik d pada S .

Contoh:

Diketahui X adalah subset pada bidang $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dan d didefinisikan oleh

$$d(x, y) = [(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2]^{\frac{1}{2}}$$

Di mana $x = (x_1, x_2)$ dan $y = (y_1, y_2)$. Tunjukkan d metrik!

Bukti:

Akan ditunjukkan bahwa d memenuhi aksioma metrik.

a) $\forall x, y \in (R \times R), x \neq 0$ atau $y \neq 0$ maka $[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2]^{\frac{1}{2}} \geq 0$

b) $[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2]^{\frac{1}{2}} = 0$

$$(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 = 0$$

$$(x_1 - y_1)^2 = -(x_2 - y_2)^2$$

$$(x_1 - y_1)^2 = -(x_2 - y_2)(x_2 - y_2)$$

$$(x_1 - y_1)(x_1 - y_1) = (y_2 - x_2)(x_2 - y_2)$$

$$(x_1 - y_1) = (y_2 - x_2)$$

$$x_1 + x_2 = y_1 + y_2$$

karena $x = (x_1, x_2)$ dan $y = (y_1, y_2)$ maka $x = y$

$$\begin{aligned} \text{c) } d(x, y) &= [(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2]^{\frac{1}{2}} \\ &= [((-1)(y_1 - x_1))^2 + ((-1)(y_2 - x_2))^2]^{\frac{1}{2}} \\ &= [(-1)^2(y_1 - x_1)^2 + (-1)^2(y_2 - x_2)^2]^{\frac{1}{2}} \\ &= [(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2]^{\frac{1}{2}} \\ &= d(y, x) \\ \text{d) } d(x, y) &= [(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq [(x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2]^{\frac{1}{2}} + [(z_1 - y_1)^2 + (z_2 - y_2)^2]^{\frac{1}{2}} \\ &= d(x, z) + d(z, y), \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Karena seluruh aksioma pada Definisi 2.3.1 terpenuhi, maka d adalah metrik pada bidang $S \times S$.

2.4 Ruang Lengkap

Definisi 2.4.1 (Bartle dan Sherbet, 2000: 330)

Suatu ruang metrik (S, d) dikatakan lengkap jika setiap barisan Cauchy di S konvergen ke suatu titik di S .

Contoh:

Misalkan diberikan ruang fungsi $C[0,1]$ dengan metrik

$$d_\infty(f, g) := \sup \{|f(x) - g(x)| : x \in [0,1]\}$$

Tunjukkan bahwa $(C[0,1], d_\infty)$ lengkap!

Bukti:

Misalkan (f_n) adalah barisan Cauchy di $C[0,1]$ dengan metrik d_∞ . Misalkan diberikan $\varepsilon > 0$, terdapat H sedemikian sehingga

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad (2.1)$$

untuk semua $x \in [0,1]$ dan $m, n \in H$. Jadi, untuk setiap x , barisan $(f_n(x))$ merupakan barisan Cauchy di \mathbb{R} dan konvergen di \mathbb{R} . Misalkan f suatu titik limit barisan f_n . Ini berarti $f(x) := \lim (f_n(x))$ untuk setiap $x \in [0,1]$. Dari pertidaksamaan (2.1) diperoleh bahwa untuk setiap $x \in [0,1]$ dan setiap $n \geq H$ diperoleh $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$. Akibatnya, barisan (f_n) konvergen ke f di $[0,1]$. Berdasarkan Teorema 2.2.2, limit dari fungsi kontinu seragam juga kontinu. Oleh karena itu, ruang metrik $(C[0,1], d_\infty)$ lengkap.

2.5 Ruang Vektor

Definisi 2.5.1 (Goffman dan Pedrick, 1974: 50)

Ruang vektor X atas suatu field \mathbb{F} adalah himpunan X , pemetaan $(x, y) \Rightarrow x + y$ dari X^2 ke X , dan pemetaan $(a, x) \Rightarrow ax$ dari $\mathbb{F} \times X$ ke X , sedemikian sehingga

- a) X adalah grup abelian dengan operasi $(x, y) \Rightarrow x + y$; $x, y \in X$
- b) $a(bx) = (ab)x$; $a, b \in \mathbb{F}$; $x \in X$ (Hukum Asosiatif)
- c) $(a + b)x = ax + bx$, $a(x + y) = ax + ay$; $a, b \in \mathbb{F}$; $x, y \in X$ (Hukum Distributif)
- d) $1x = x$; $x \in X$ (1 adalah identitas untuk operasi perkalian)

Contoh:

Himpunan R^n dari n -tuple bilangan real $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, pada *field* bilangan real \mathbb{F} dengan operasi standar $[x_1, x_2, \dots, x_n] + [y_1, y_2, \dots, y_n] = [x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n]$ dan $\alpha[x_1, x_2, \dots, x_n] = [\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n]$; $\alpha \in \mathbb{F}$ adalah suatu ruang vektor.

2.6 Norma

Definisi 2.6.1 (Rynne dan Youngson, 2008: 31)

Misalkan X suatu ruang vektor pada \mathbb{F} . Suatu norma pada X adalah suatu fungsi

$\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$ sedemikian sehingga untuk $x, y \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{F}$,

- (a) $\|x\| \geq 0$;
- (b) $\|x\| = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$;
- (c) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$;
- (d) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Contoh:

Misalkan X suatu ruang vektor berdimensi hingga pada \mathbb{F} dengan basis

$\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Sebarang $x \in X$ dapat ditulis $x = \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j$ untuk $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in$

\mathbb{F} . Maka fungsi $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$ didefinisikan dengan:

$$\|x\| = \left(\sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

adalah suatu norma pada X .

Bukti:

Misalkan $x = \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j$ dan $y = \sum_{j=1}^n \mu_j e_j$ dan $\alpha \in \mathbb{F}$. Maka $\alpha x = \sum_{j=1}^n \alpha \lambda_j e_j$.

$$(a) \|x\| = \left(\sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq 0$$

(b) Jika $x = 0$, maka $\|x\| = 0$.

Jika $\|x\| = 0$, maka $\left(\sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} = 0$. Sehingga $\lambda_j = 0$ untuk $1 \leq j \leq n$.

Akibatnya, $x = 0$.

$$(c) \|\alpha x\| = \left(\sum_{j=1}^n |\alpha \lambda_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} = (|\alpha|^2)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^n |\lambda_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} = |\alpha| \|x\|$$

$$(d) \|x + y\| = \left(\sum_{j=1}^n (|\lambda_j + \mu_j|^2)\right)^{\frac{1}{2}}$$

Berdasarkan Pertidaksamaan Segitiga, maka dapat dituliskan

$$\|x + y\| \leq \left(\sum_{j=1}^n (|\lambda_j|^2 + |\mu_j|^2)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sum_{j=1}^n (|\lambda_j|^2)^{\frac{1}{2}} + \sum_{j=1}^n (|\mu_j|^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \|x\| + \|y\|$$

Jadi, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

2.7 Himpunan Kompak

Definisi 2.7.1 (Bartle dan Sherbert, 2000: 319)

Misalkan A himpunan bagian dari \mathbb{R} . Suatu selimut buka dari A adalah suatu

koleksi $\mathcal{G} = \{G_\alpha\}$ dari himpunan-himpunan terbuka di \mathbb{R} yang memuat A ; yaitu

$$A \subseteq \bigcup_{\alpha} G_\alpha$$

Jika \mathcal{G}' merupakan suatu sub koleksi himpunan-himpunan dari \mathcal{G} sedemikian

sehingga gabungan dari himpunan-himpunan di \mathcal{G}' juga memuat A , maka \mathcal{G}'

disebut sub selimut dari \mathcal{G} . Jika \mathcal{G}' terdiri dari himpunan-himpunan berhingga, maka \mathcal{G}' disebut suatu sub selimut berhingga dari \mathcal{G} .

Contoh:

Misal A suatu himpunan dengan $A := [1, \infty)$ dan misalkan

$$\mathcal{G}_1 := \{(r - 1, r + 1) : r \in \mathbb{Q}, r > 0\}$$

$$\mathcal{G}_2 := \{(n - 1, n + 1) : n \in \mathbb{N}\}$$

$$\mathcal{G}_3 := \{(0, n) : n \in \mathbb{N}\}$$

$$\mathcal{G}_4 := \{(0, n) : n \in \mathbb{N}, n \geq 23\}$$

Maka dapat dikatakan bahwa \mathcal{G}_2 merupakan sub selimut dari \mathcal{G}_1 , dan \mathcal{G}_4 merupakan sub selimut dari \mathcal{G}_3 .

Definisi 2.7.2 (Bartle dan Sherbert, 2000: 320)

Suatu himpunan bagian K di \mathbb{R} dikatakan kompak jika setiap selimut buka dari K mempunyai sub selimut berhingga.

Contoh:

Misalkan $K := \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ merupakan suatu himpunan bagian berhingga pada \mathbb{R} . Jika $\mathcal{G} = \{G_\alpha\}$ suatu selimut buka pada K , maka setiap x_i berada di beberapa himpunan G_{α_i} di \mathcal{G} . Maka gabungan dari himpunan-himpunan pada koleksi $\{G_{\alpha_1}, G_{\alpha_2}, \dots, G_{\alpha_n}\}$ memuat K , sehingga merupakan sub selimut berhingga di \mathcal{G} . Karena \mathcal{G} sembarang, maka K kompak.

2.8 Ruang Banach

Definisi 2.8.1 (Rynne dan Youngson, 2008: 48)

Ruang Banach adalah suatu ruang vektor bernorma yang lengkap.

Contoh:

Misalkan X_m suatu barisan Cauchy di X , ruang vektor $l_p, p \geq 1$, pada barisan X_m dengan $\sum_{m=1}^{\infty} |X_m|^p < \infty$, dengan norma $\|x\| = (\sum_{m=1}^{\infty} |X_m|^p)^{\frac{1}{p}}$ merupakan ruang Banach.

Bukti:

Karena $\{X_m\}$ barisan Cauchy, berarti

$$\forall \varepsilon > 0, \exists H(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ni |X_k - X_m| < \varepsilon, \forall k, m \geq H$$

misalkan $L := \lim (X_m)$ untuk setiap $x \in X$. Karena $|X_k - X_m| < \varepsilon$ dan $\forall m \geq H$, diperoleh $|X_m - L| \leq \varepsilon < \varepsilon$. Akibatnya barisan $\{X_m\}$ konvergen ke L di X .

Karena X_m konvergen ke L , maka X lengkap. Jadi, X adalah ruang Banach.

2.9 Operator Linier

Lemma 2.9.1 (Rynne dan Youngson, 2008: 88)

Misalkan X dan Y adalah *Ruang Linier Bernorma* dan $T: X \rightarrow Y$ suatu transformasi linier, maka pernyataan-pernyataan berikut ini ekuivalen:

- (a) T kontinu seragam;
- (b) T kontinu;
- (c) T kontinu di $t = 0$;
- (d) Terdapat suatu bilangan real positif k sedemikian sehingga $\|T\| \leq k$ dimana $x \in X$ dan $\|x\| \leq 1$;

(e) Terdapat suatu bilangan real positif k sedemikian sehingga $\|T\| \leq k\|x\|$ untuk semua $x \in X$.

Bukti:

(a) \Rightarrow (b). T kontinu seragam sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga untuk sebarang $x, t \in X$ yang memenuhi $\|x - t\| \leq \delta$, maka $\|T(x) - T(t)\| < \varepsilon$. Oleh karena itu, jika diambil suatu titik $m \in X$ yang juga memenuhi $\|x - m\| \leq \delta$, maka $\|T(x) - T(m)\| < \varepsilon$. Jadi T kontinu di titik m .

(b) \Rightarrow (c). Karena T kontinu, maka $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga untuk $t \in X$ dan $\|x - t\| \leq \delta$, maka $\|T(x) - T(t)\| < \varepsilon$. Jika diambil $t = 0$ dengan $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga $\|x\| \leq \delta$, maka $\|T(x) - T(0)\| = \|T(x)\| < \varepsilon$ karena $\|T(0)\| = 0$. Oleh karena itu, T kontinu di $t = 0$.

(c) \Rightarrow (d). Sebagaimana T kontinu pada 0, ambil $\varepsilon = 1$ terdapat suatu $\delta > 0$ sedemikian sehingga $\|T(x)\| < 1$ untuk $x \in X$ dan $\|x\| \leq \delta$. Misalkan $w \in X$ dengan $\|w\| \leq 1$. Selain itu, $\left\| \frac{\delta w}{2} \right\| = \frac{\delta}{2} \|w\| \leq \delta$, $\left\| T\left(\frac{\delta w}{2}\right) \right\| < 1$ dan T sebuah transformasi linier $T\left(\frac{\delta w}{2}\right) = \frac{\delta}{2} T(w)$. Maka, $\frac{\delta}{2} T\|w\| < 1$ dan $T\|w\| < \frac{2}{\delta}$.

Oleh karena itu, kondisi (d) memenuhi dengan $k = \frac{2}{\delta}$.

(d) \Rightarrow (e). Misalkan ada k sedemikian sehingga $T\|x\| \leq k$ untuk setiap $x \in X$ dan $\|x\| < 1$. Sehingga, $T(0) = 0$ jelas bahwa $T\|(0)\| \leq k\|0\|$. Misalkan $y \in X$ dan $y \neq 0$. Sebagaimana $\left\| \frac{y}{\|y\|} \right\| = 1$ maka $\left\| T\left(\frac{y}{\|y\|}\right) \right\| \leq k$. Sehingga T merupakan suatu transformasi linier

$$\frac{1}{\|y\|} \|T(y)\| = \left\| \left(\frac{1}{\|y\|} \right) T(y) \right\| = \left\| T \left(\frac{y}{\|y\|} \right) \right\| \leq k,$$

dan $\|T(y)\| \leq k\|y\|$. Sehingga, $\|T(y)\| \leq k\|y\|$ untuk setiap $x \in X$.

(e) \Rightarrow (a). T adalah suatu transformasi linier,

$$\|T(x) - T(y)\| = \|T(x - y)\| \leq k\|x - y\|$$

untuk setiap $x, y \in X$. Misalkan $\varepsilon > 0$ dan $\delta = \frac{\varepsilon}{k} > 0$, sehingga saat $x, y \in X$ dan $\|x - y\| < \delta$, maka

$$\|T(x) - T(y)\| \leq k\|x - y\| < k \left(\frac{\varepsilon}{k} \right) = \varepsilon.$$

Oleh karena itu, T adalah kontinu seragam.

Definisi 2.9.2 (Rynne dan Youngson, 2008: 91)

Misalkan X dan Y ruang linier bernorma dan $T: X \rightarrow Y$ adalah transformasi linier. T dikatakan terbatas jika terdapat suatu bilangan real positif k sedemikian sehingga $\|T(x)\| \leq k\|x\|$ untuk semua $x \in X$.

Himpunan semua transformasi linier kontinu dari X ke Y dinotasikan dengan $B(X, Y)$. Elemen dari $B(X, Y)$ disebut '*operator linier terbatas*', '*operator linier*', atau terkadang hanya '*operator*' atau bisa juga disebut '*transformasi*' saja. Dengan kata lain '*operator*' merupakan pemetaan dari X ke Y , dengan X dan Y adalah ruang linier bernorma.

Definisi 2.9.3 (Ghozali, 2001: 7)

Misalkan X dan Y masing-masing adalah ruang bernorma. Suatu pemetaan A yang mengaitkan setiap unsur di domain $D(A) \subseteq X$ dengan unsur tunggal $y \in Y$ disebut operator. Suatu operator A dikatakan linier jika memenuhi:

1. $A(u + v) = A(u) + A(v); \forall u, v \in D(A)$
2. $A(\alpha u) = \alpha A(u); \forall u \in D(A), \alpha \in \mathbb{R}$

Atau secara sederhana operator A dikatakan linier jika memenuhi

$$A(cu + dv) = \alpha A(u) + \beta A(v), \forall u, v \in D(A), \text{ dan } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Pada pembahasan selanjutnya diasumsikan $D(A) = X$.

Contoh:

Misal $u_i = 2a_i + b_i, \forall u, a, b \in X$, tunjukkan bahwa pemetaan $A : X \rightarrow Y$ adalah operator linier!

Bukti:

Misal $c, d \in \mathbb{R}$. Berdasarkan Definisi 2.9.3, A dikatakan operator linier jika memenuhi $A(cu + dv) = \alpha A(u) + \beta A(v), \forall u, v \in X$.

Misal $u = u_m$ dan $v = u_n$

$$\begin{aligned} A(cu_m + du_n) &= A(c(2a_m + b_m) + d(2a_n + b_n)) \\ &= A(c(2a_m + b_m)) + A(d(2a_n + b_n)) \\ &= c A(2a_m + b_m) + dA(2a_n + b_n) \\ &= cA(u_m) + dA(u_n) \end{aligned}$$

Dengan demikian karena terbukti bahwa

$$A(cu_m + du_n) = cA(u_m) + dA(u_n)$$

Jadi, A adalah operator linier.

Lemma 2.9.4 (Rynne dan Youngson, 2008: 94)

Jika X dan Y adalah ruang linier bernorma dan $T: X \rightarrow Y$ adalah transformasi linier kontinu, maka *Kernel* dari T disimbolkan $Ker(T)$ tertutup.

Bukti:

Karena T kontinu, $Ker(T) = \{x \in X; T(x) = 0\} = \{0\}$ dan $\{0\}$ tertutup di X mengakibatkan $Ker(T)$ tertutup.

Definisi 2.9.5 (Rynne dan Youngson, 2008: 94)

Jika X dan Y merupakan ruang bernorma dan $T: X \rightarrow Y$ suatu transformasi linier, *graph* pada T merupakan sub ruang linier $\mathcal{G}(T)$ pada $X \times Y$ didefinisikan oleh $\mathcal{G}(T) = \{(x, Tx): x \in X\}$.

Lemma 2.9.6 (Rynne dan Youngson, 2008: 95)

Jika X dan Y merupakan ruang bernorma dan $T: X \rightarrow Y$ suatu transformasi linier, maka $\mathcal{G}(T)$ tertutup.

Bukti:

Misalkan $\{(x_n, y_n)\}$ merupakan barisan di $\mathcal{G}(T)$ yang konvergen ke (x, y) di $X \times Y$, maka $\{x_n\}$ konvergen ke x di X dan $\{y_n\}$ konvergen ke y di Y . Sehingga, $y_n = T(x_n)$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$ karena $(x_n, y_n) \in \mathcal{G}(T)$. Karenanya, seperti T kontinu, $y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) = T(x)$. Oleh karena itu, $(x, y) = (x, T(x)) \in \mathcal{G}(T)$ dan $\mathcal{G}(T)$ tertutup.

Lemma 2.9.7 (Rynne dan Youngson, 2008: 95)

Misalkan X dan Y merupakan ruang linier bernorma dan $S, T \in B(X, Y)$ dengan $\|S(x)\| \leq k_1\|x\|$ dan $\|T(x)\| \leq k_2\|x\|$ untuk semua $x \in X$. Misalkan $\lambda \in \mathbb{F}$.

Maka

- (a) $\|(S + T)(x)\| \leq (k_1 + k_2)\|x\|$ untuk semua $x \in X$;
- (b) $\|(\lambda S)(x)\| \leq |\lambda|k_1\|x\|$ untuk semua $x \in X$;
- (c) $B(X, Y)$ adalah suatu sub ruang linier pada $L(X, Y)$ dan $B(X, Y)$ suatu ruang vektor.

Bukti:

- (a) Jika $x \in X$ maka $\|(S + T)(x)\| \leq \|S(x)\| + \|T(x)\| \leq k_1\|x\| + k_2\|x\| = (k_1 + k_2)\|x\|$
- (b) Jika $x \in X$ maka $\|(\lambda S)(x)\| = |\lambda|\|S(x)\| \leq |\lambda|k_1\|x\|$.
- (c) Dengan bagian (a) dan (b), $S+T$ dan λS di $B(X, Y)$ sehingga $B(X, Y)$ adalah suatu sub ruang linier pada $L(X, Y)$. Karenanya $B(X, Y)$ merupakan suatu ruang vektor.

Lemma 2.9.8 (Rynne dan Youngson, 2008: 97)

Misalkan X dan Y merupakan ruang bernorma. Jika $\|\cdot\|: B(X, Y) \rightarrow \mathbb{R}$ didefinisikan oleh $\|T\| = \sup\{\|T(x)\|: \|x\| \leq 1\}$ maka $\|\cdot\|$ merupakan suatu norma di $B(X, Y)$.

Bukti:

Misalkan $S, T \in B(X, Y)$ dan $\lambda \in \mathbb{F}$.

- (i) Jelas $\|T\| \geq 0$ untuk semua $T \in B(X, Y)$.

(ii) Ingat bahwa transformasi linier nol R memenuhi $R(x) = 0$ untuk semua $x \in X$.

Karenanya, $\|T\| = 0 \Leftrightarrow \|Tx\| = 0$ untuk semua $x \in X$.

$\Leftrightarrow Tx = 0$ untuk semua $x \in X$

$\Leftrightarrow T$ merupakan transformasi linier nol.

(iii) Misal $\|T(x)\| \leq \|T\|\|x\|$, berdasarkan Lemma 2.9.6 (b) didapatkan

$\|(\lambda T)(x)\| \leq |\lambda|\|T\|\|x\|$ untuk semua $x \in X$. Karenanya, $\|\lambda T\| \leq |\lambda|\|T\|$.

Jika $\lambda = 0$, maka $\|\lambda T\| = |\lambda|\|T\|$, sementara jika $\lambda \neq 0$ maka

$$\|T\| = \|\lambda^{-1}\lambda T\| \leq |\lambda^{-1}|\|\lambda T\| \leq |\lambda^{-1}|\lambda\|T\| = \|T\|.$$

Sehingga, $\|T\| = |\lambda|^{-1}\|\lambda T\|$ dan

$$\|\lambda T\| = |\lambda|\|T\|.$$

(iv) Sifat terakhir dicek dengan Pertidaksamaan Segitiga.

$$\begin{aligned} \|(S + T)(x)\| &\leq \|S(x)\| + \|T(x)\| \\ &\leq \|S\|\|x\| + \|T\|\|x\| \\ &= (\|S\| + \|T\|)\|x\| \end{aligned}$$

Oleh karena itu,

$$\|(S + T)\| \leq \|S\| + \|T\|$$

Jadi, $\|\cdot\|$ adalah norma di $B(X, Y)$.

2.10 Integral Bochner

Pada sub bab ini akan dibahas himpunan fungsi-fungsi terintegral Bochner pada $[0, \tau]$ untuk setiap $\tau \in \mathbb{R}_+$, dinotasikan dengan $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+, X)$. Berikut ini diberikan definisi yang terkait dengan fungsi f yang terintegral Bochner yang akan diperlukan pada pendefinisian proposisi-proposisi selanjutnya.

Definisi 2.10.1 (Arendt dkk, 2001: 6)

Diketahui ruang Banach X atas \mathbb{C} dan interval $I \subset \mathbb{R}$.

Fungsi $f : I \rightarrow X$ disebut fungsi sederhana jika fungsi f berbentuk $f(t) = \sum_{r=1}^n x_r \chi_{\Omega_r}(t)$, untuk suatu $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$, $x_r \in X$ dan himpunan terukur Lebesgue $\Omega_r \subset I$ dengan ukuran Lebesgue hingga $M(\Omega_r)$.

Definisi 2.10.2 (Arendt dkk, 2001: 9)

Diketahui ruang Banach X atas \mathbb{C} .

Fungsi $f : I \rightarrow X$ dikatakan terintegral Bochner jika terdapat barisan fungsi sederhana $f_n : I \rightarrow X$, untuk $n \in \mathbb{N}$ sehingga

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = f(t) \text{ dan } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I \|f(t) - f_n(t)\| dt = 0$$

Jika $f : I \rightarrow X$ terintegral Bochner, maka integral Bochner dari f pada I adalah

$$\int_I f(t) dt := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n(t) dt$$

Definisi 2.10.3 (Arendt dkk, 2001: 29)

Diketahui ruang Banach X atas \mathbb{C} dan $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+, X) := \{f : \mathbb{R}_+ \rightarrow X : f \text{ terintegral Bochner pada } [\tau, 0] \text{ untuk setiap } \tau \in \mathbb{R}_+\}$. Selanjutnya didefinisikan integral Laplace dari $f(t)$ sebagai

$$\hat{f}(\lambda) := \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t) dt := \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^\tau e^{-\lambda t} f(t) dt \text{ dengan } f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+, X) \text{ dan } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Absissa dari f , ditulis $abs(f)$ didefinisikan sebagai

$$abs(f) := \inf\{Re \lambda \mid \hat{f}(\lambda) \text{ ada}\}$$

Definisi 2.10.4 (Arendt dkk, 2001: 29)

Diketahui ruang Banach X atas \mathbb{C} .

Diberikan $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$. Batas pertumbuhan eksponensial (*exponential growth bound*) dari f didefinisikan sebagai

$$\omega(f) := \inf \{ \omega \in \mathbb{R} : \sup_{t \geq 0} \|e^{-\omega t} f(t)\| < \infty \}$$

Jadi, $\text{abs}(f) \leq \text{abs}\|f\| \leq \omega(f)$.

2.11 Resolvent

Dalam sub bab ini dijelaskan definisi dari *resolvent set*, *resolvent* dari operator A , persamaan *resolvent* dan definisi–definisi yang terkait dengan *resolvent* serta proposisi–proposisi yang diperlukan pada sub bab selanjutnya.

Ruang dari seluruh operator linier terbatas dari ruang Banach X ke ruang Banach Y dinotasikan dengan $\mathcal{L}(X, Y)$ atau secara sederhana dapat dinotasikan dengan $\mathcal{L}(X)$ ketika $Y = X$.

Definisi 2.11.1 (Arendt dkk, 2001: 462)

Diberikan ruang Banach X atas \mathbb{C} dan operator $A: D(A) \rightarrow X$, dimana $D(A)$ suatu sub ruang linier pada X adalah daerah asal (domain) A .

Resolvent set dari A , ditulis $\rho(A)$ didefinisikan sebagai:

$$\rho(A) := \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid (\lambda I - A)^{-1} \text{ ada dan terbatas pada } X \}$$

Fungsi $R(\cdot, A): \rho(A) \rightarrow \mathcal{L}(X)$ disebut *resolvent* dari A .

Dalam hal ini

$$\text{Jika } \lambda \in \rho(A) \text{ maka } R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X) \quad (2.2)$$

Contoh:

Misalkan $Ax(t) = x^2(t)$ suatu operator kuadrat pada suatu ruang $C(0,1)$. A suatu operator dan I merupakan identitas dari operator dengan $I = 1$. Jika $\lambda \in \rho(A)$ dengan $\rho(A)$ *resolvent set* dari A , maka resolvent dari A ditulis $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$.

Proposisi 2.11.2 (Arendt dkk, 2001: 464)

Diberikan A suatu operator pada X . Jika $\lambda, \mu \in \rho(A)$, maka

$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda)R(\lambda, A)R(\mu, A) \quad (2.3)$$

Bukti:

Diketahui $\lambda, \mu \in \rho(A)$ maka diperoleh:

$$\begin{aligned} R(\lambda, A) - R(\mu, A) &= (\lambda I - A)^{-1} - (\mu I - A)^{-1} \\ &= \frac{1}{(\lambda I - A)} - \frac{1}{(\mu I - A)} \\ &= \frac{(\mu I - A) - (\lambda I - A)}{(\lambda I - A)(\mu I - A)} \\ &= (\lambda I - A)^{-1}((\mu I - A) - (\lambda I - A))(\mu I - A)^{-1} \end{aligned}$$

atau

$$(\mu I - A)((\lambda I - A)^{-1} - (\mu I - A)^{-1}) = (\mu I - A)(\mu I - A)^{-1}(\mu - \lambda)(\lambda I - A)^{-1}$$

diperoleh

$$((\lambda I - A)^{-1} - (\mu I - A)^{-1})(\mu I - A) = (\mu - \lambda)(\lambda I - A)^{-1}$$

$$((\lambda I - A)^{-1} - (\mu I - A)^{-1})(\mu I - A)(\mu I - A)^{-1} = (\mu - \lambda)(\lambda I - A)^{-1}(\mu I - A)^{-1}$$

$$((\lambda I - A)^{-1} - (\mu I - A)^{-1}) = (\mu - \lambda)(\lambda I - A)^{-1}(\mu I - A)^{-1}$$

Karena $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ dan $R(\mu, A) = (\mu I - A)^{-1}$, maka diperoleh

$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda)R(\lambda, A)R(\mu, A)$$

Proposisi 2.11.3 (Arendt dkk, 2001: 464)

Misalkan A adalah suatu operator di X , dan U adalah himpunan bagian buka yang terhubung di \mathbb{C} . Anggap $U \cap \rho(A) \neq \emptyset$ dan terdapat fungsi analitik $F : U \rightarrow \mathcal{L}(X)$ sedemikian sehingga,

$$\hat{U} = \{\lambda \in U \cap \rho(A) : F(\lambda) = R(\lambda, A)\} \quad (2.4)$$

mempunyai titik limit di dalam U , maka $U \subset \rho(A)$ dan $F(\lambda) = R(\lambda, A)$, untuk setiap $\lambda \in U$.

Bukti:

Diambil $V = \{\lambda \in U \cap \rho(A) : F(\lambda) = R(\lambda, A)\}$, $\mu \in \rho(A)$, $x \in D(A)$, dan $y \in X$.

Jika $\lambda \in V$ berarti $\lambda \in U \cap \rho(A)$ dengan sifat $F(\lambda) = R(\lambda, A)$ dan karena $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$, maka

$$F(\lambda)(\lambda I - A)x = x, \text{ untuk setiap } x \in D(A) \quad (2.5)$$

Berdasarkan Proposisi (2.11.2) dengan sifat $F(\lambda) = R(\lambda, A)$, diperoleh

$$F(\lambda) = R(\lambda, A) = R(\mu, A) + (\mu - \lambda)R(\lambda, A)R(\mu, A) \quad (2.6)$$

Akibatnya, untuk setiap $y \in X$ berlaku

$$F(\lambda)y = R(\mu, A)y - (\lambda - \mu)F(\lambda)R(\mu, A)y \quad (2.7)$$

sehingga

$$F(\lambda)y \in D(A)$$

dan untuk setiap $y \in X$ berlaku

$$F(\lambda)y + (\lambda - \mu)F(\lambda)R(\mu, A)y = R(\mu, A)y \quad (2.8)$$

karena $\mu, \lambda \in \rho(A)$, dengan mensubstitusi

$$(\lambda - \mu) = \frac{R(\lambda, A) - R(\mu, A)}{R(\lambda, A)R(\mu, A)}$$

ke (2.8), diperoleh

$$R(\mu, A)(\lambda I - A)F(\lambda)y = R(\mu, A)y \quad (2.9)$$

untuk setiap $y \in X$.

Karena $R(\mu, A)$ injektif, untuk setiap $\lambda \in U$ berlaku

$$(\lambda I - A)F(\lambda)y = y \quad (2.10)$$

untuk setiap $y \in X$.

Akibatnya dari (2.5) dan (2.10) didapat

$$\lambda \in \rho(A) \text{ dan } F(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1} \text{ atau } F(\lambda) = R(\lambda, A) \quad (2.11)$$

Dari definisi *resolvent set* diketahui bahwa

$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (\lambda I - A)^{-1} \text{ ada dan terbatas pada } X\}$ dan dari persamaan (2.4)

$\lambda \in U \cap \rho(A)$ sehingga dapat disimpulkan bahwa $U \subset \rho(A)$.

Definisi 2.11.4 (Kato, 1976: 428)

Diberikan $U \subseteq \mathbb{C}$. Fungsi $R : U \rightarrow \mathcal{L}(X)$ disebut *pseudo-resolvent* jika R memenuhi persamaan resolvent yaitu,

$$R(\lambda) - R(\mu) = (\mu - \lambda)R(\lambda)R(\mu), \quad \forall \lambda, \mu \in U \quad (2.12)$$

Contoh:

Misalkan $Ax(t) = x^2(t)$ suatu operator kuadrat pada suatu ruang $C(0,1)$. A suatu operator dan I merupakan identitas dari operator dengan $I = 1$. Jika $\lambda \in \rho(A)$ dengan $\rho(A)$ *resolvent set* dari A , maka resolvent dari A ditulis $R(\lambda, A) =$

$(\lambda - x)^{-1}$. Misalkan diambil sebarang $\mu, \lambda \in U$ dan $R(\lambda, A) = (\lambda - x)^{-1}$ dan $R(\mu, A) = (\mu - x)^{-1}$. Maka

$$\begin{aligned}
 R(\lambda) - R(\mu) &= (\lambda - x)^{-1} - (\mu - x)^{-1} \\
 &= \frac{1}{\lambda - x} - \frac{1}{\mu - x} \\
 &= \frac{(\mu - x) - (\lambda - x)}{(\lambda - x)(\mu - x)} \\
 &= (\mu - \lambda) \left(\frac{1}{\lambda - x} \right) \left(\frac{1}{\mu - x} \right) \\
 &= (\mu - \lambda)(\lambda - x)^{-1}(\mu - x)^{-1} \\
 &= (\mu - \lambda)R(\lambda)R(\mu), \quad \forall \lambda, \mu \in U
 \end{aligned}$$

Jadi, R merupakan *pseudo-resolvent*.

Lemma 2.11.5 (Baumgärtel, 1985: 58)

Diberikan *pseudo-resolvent* $R : U \rightarrow \mathcal{L}(X)$. Untuk setiap $\mu, \lambda \in U$ berlaku

$$R(\lambda)R(\mu) = R(\mu)R(\lambda)$$

Bukti:

Diambil sebarang $\mu, \lambda \in U$.

Karena R *pseudo-resolvent*, maka

$$R(\mu) - R(\lambda) = (\lambda - \mu)R(\mu)R(\lambda)$$

atau

$$R(\lambda) - R(\mu) = (\mu - \lambda)R(\lambda)R(\mu) = -(\lambda - \mu)R(\lambda)R(\mu)$$

sehingga diperoleh

$$R(\lambda)R(\mu) = \frac{R(\lambda) - R(\mu)}{(\mu - \lambda)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-(R(\mu)-R(\lambda))}{-(\lambda-\mu)} \\
&= \frac{R(\mu)-R(\lambda)}{(\lambda-\mu)} \\
&= R(\mu) R(\lambda)
\end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa

$$R(\lambda)R(\mu) = R(\mu) R(\lambda)$$

Proposisi 2.11.6 (Kato, 1976: 428)

Diketahui U himpunan bagian dari \mathbb{C} . Jika $R : U \rightarrow \mathcal{L}(X)$ *pseudo-resolvent*, maka:

- Kernel* dari λ disimbolkan $Ker R(\lambda)$ dan *range* dari λ disimbolkan $Ran R(\lambda)$ independen terhadap $\lambda \in U$.
- Terdapat operator A dalam X sehingga $R(\lambda) = R(\lambda, A)$ untuk setiap $\lambda \in U$ jika dan hanya jika $Ker R(\lambda) = \{0\}$

Bukti:

- Diambil sebarang $\lambda \in U$. Karena R *pseudo-resolvent*, maka untuk setiap $x \in D(R(\lambda)) = X$, berlaku

$$R(\lambda)x = R(\mu)x + (\mu - \lambda)R(\lambda)R(\mu)x \quad (2.14)$$

$$Ker R(\mu) = \{x \in D(R(\mu)) = X \mid R(\mu)x = 0\}$$

Akibatnya dari (2.14) didapat

$x \in Ker R(\mu) \Leftrightarrow x \in Ker R(\lambda)$ atau $Ker R(\mu) = Ker R(\lambda)$. Dengan kata lain terbukti $Ker R(\lambda)$ independen terhadap $\lambda \in U$.

Akan dibuktikan $Ran R(\lambda)$ independen terhadap $\lambda \in U$.

$$\text{Ran } R(\mu) = \{y \in X \mid y = R(\mu)x, x \in X\}$$

Diambil sebarang $y \in \text{Ran } R(\mu)$, berarti terdapat $x \in X$ sehingga $y = R(\mu)x$.

Didefinisikan $z = x - (\lambda - \mu)y \in X$, maka

$$\begin{aligned} R(\lambda)z &= R(\lambda)(x - (\lambda - \mu)y) \\ &= R(\lambda)x + (\mu - \lambda)R(\lambda)y \\ &= R(\lambda)x + (\mu - \lambda)R(\lambda)R(\mu)x \end{aligned}$$

Berdasarkan (2.14) didapat $R(\lambda)z = R(\mu)x = y$

Jadi $y \in \text{Ran } R(\lambda)$.

Sebaliknya, diambil sebarang $y \in \text{Ran } R(\lambda)$, berarti terdapat $x \in X$ sehingga $y = R(\lambda)x$.

Didefinisikan $z = x + (\mu - \lambda)y \in X$, maka

$$\begin{aligned} R(\mu)z &= R(\mu)(x + (\mu - \lambda)y) \\ &= R(\mu)x + (\mu - \lambda)yR(\mu) \\ &= R(\mu)x + (\mu - \lambda)R(\lambda)R(\mu)x \end{aligned}$$

Berdasarkan (2.14) didapat $R(\mu)z = R(\lambda)x = y$

Jadi $y \in \text{Ran } R(\mu)$. Dengan kata lain terbukti $\text{Ran } R(\lambda)$ independen terhadap $\lambda \in U$.

b. (\Rightarrow) Diketahui terdapat operator A sedemikian sehingga untuk setiap $\lambda \in U$ berlaku

$$R(\lambda) = R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$$

Kemudian ambil sebarang $x \in \text{Ker } R(\lambda)$, berarti $R(\lambda)x = 0$. Karena

$$R(\lambda)x = (\lambda I - A)^{-1}x = 0$$

Maka $(\lambda I - A)R(\lambda)x = R(\lambda)(\lambda I - A)^{-1}x = 0$ atau $x = 0$.

Jadi $\text{Ker } R(\lambda) = \{0\}$.

(\Leftarrow) Diketahui $\text{Ker } R(\lambda) = \{0\}$. Akan ditunjukkan terdapat operator A dalam X sehingga $R(\lambda) = R(\lambda, A)$, untuk setiap $\lambda \in U$.

Diambil $y \in \text{Ran } R(\lambda)$, karena $\text{Ker } R(\lambda) = \{0\}$ maka terdapat dengan tunggal $x(\lambda) \in X$ sehingga

$$R(\lambda)x(\lambda) = y \quad (2.15)$$

Dari (2.14) dan (2.15) didapat

$$R(\lambda)R(\mu)(x(\lambda) - x(\mu)) = R(\mu)y - R(\lambda)y = (\lambda - \mu)R(\lambda)R(\mu)y$$

$$R(\lambda)R(\mu)(x(\lambda) - x(\mu)) = (\lambda - \mu)R(\lambda)R(\mu)y$$

Jika dioperasikan terhadap $R(\lambda)^{-1}$ dan $R(\mu)^{-1}$, maka di dapat

$$(x(\lambda) - x(\mu)) = (\lambda - \mu)y \text{ atau } \lambda y - x(\lambda) = \mu y - x(\mu)$$

Jadi $\lambda y - x(\lambda)$ independen terhadap λ .

Dinotasikan $Ay = \lambda y - x(\lambda)$, dengan A operator linier dalam X , dengan

$D(A) = \text{Ran } R(\lambda) \subset X$, sehingga diperoleh

$$x(\lambda) = \lambda y - Ay \text{ atau } x(\lambda) = (\lambda - A)y$$

Karena $(\lambda I - A) = R(\lambda, A)^{-1}$, maka dapat ditulis $x(\lambda) = R(\lambda, A)^{-1}y$

Dari (2.15) diperoleh

$$R(\lambda)^{-1}y = R(\lambda, A)^{-1}y$$

atau

$$R(\lambda) = R(\lambda, A)$$

Definisi 2.11.7 (Arendt dkk, 2001: 112)

Diberikan $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ dan fungsi $R: (\lambda_0, \infty) \rightarrow \mathcal{L}(X)$. Radalah transformasi Laplace jika terdapat suatu fungsi kontinu kuat $T: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{L}(X)$ sedemikian sehingga $abs(T) \leq \lambda_0$ dan

$$R(\lambda) = \hat{T}(\lambda), \quad (\lambda > 0)$$

Proposisi 2.11.8 (Arendt dkk, 2001: 112-113)

Diberikan $T: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{L}(X)$ adalah fungsi kontinu kuat sedemikian sehingga $abs(T) < \infty$. Misal $\omega > abs(T)$. Maka berlaku:

- Jika $B \in \mathcal{L}(X)$ sedemikian sehingga $B\hat{T}(\lambda) = \hat{T}(\lambda)B$ untuk setiap $\lambda > \omega$, maka $BT(t) = T(t)B$ untuk semua $t \geq 0$.
- Secara khusus, Jika $\hat{T}(\mu)\hat{T}(\lambda) = \hat{T}(\lambda)\hat{T}(\mu)$ untuk setiap $\lambda, \mu > 0$, maka $T(t)T(s) = T(s)T(t)$ untuk setiap $t, s \geq 0$.

Bukti:

- Untuk $x \in X$ dan $\lambda > \omega$, maka

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} T(t)Bx dt &= \hat{T}(\lambda)Bx \\ &= B\hat{T}(\lambda)x \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} BT(t)x dt \end{aligned}$$

Berdasarkan teorema keunikan bahwa $T(t)Bx = BT(t)x$ untuk setiap $t \geq 0$.

- Ambil $\mu > \omega$. Berdasarkan poin a) di atas bahwa $\hat{T}(\mu)T(t) = T(t)\hat{T}(\mu)$ untuk setiap $t \geq 0$. Keterangan $t \geq 0$ dan penerapan a) ke $B := T(t)$ menunjukkan bahwa $T(s)T(t) = T(t)T(s)$ untuk setiap $s \geq 0$.

2.12 Transformasi Laplace

Definisi 2.12.1 (Nagle dan Saff, 1993: 278)

Misalkan $f(t)$ suatu fungsi pada $[0, \infty)$. Maka *transformasi Laplace* pada f merupakan suatu fungsi F yang didefinisikan dengan integral,

$$F(s) := \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (2.16)$$

Daerah asal dari $F(s)$ merupakan semua nilai dari s dimana integral (2.16) ada.

Transformasi Laplace dari f dinotasikan dengan F dan $\mathcal{L}\{f\}$.

Contoh:

Tentukan transformasi Laplace dari fungsi konstan $f(t) = 1, t \geq 0$.

Solusi:

Dengan menggunakan definisi transformasi Laplace, diperoleh

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} 1 dt \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N e^{-st} dt \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[-\frac{e^{-st}}{s} \right]_{t=0}^{t=N} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{s} - \frac{e^{-sN}}{s} \right] \end{aligned}$$

Karena $e^{-sN} \rightarrow 0$ saat $s > 0$ tetap dan $N \rightarrow \infty$, diperoleh

$F(s) = \frac{1}{s}$ untuk $s > 0$. Dimana $s \leq 0$, integral $\int_0^N e^{-st} dt$ divergen. Sedemikian

sehingga $F(s) = \frac{1}{s}$, dengan daerah asal $F(s)$ untuk semua $s > 0$.

2.13 Syarat-Syarat Cukup Agar Transformasi Laplace Ada

Definisi 2.13.1 (Nagle dan Saff, 1993: 282)

Suatu fungsi $f(t)$ dikatakan kontinu sebagian-sebagian pada interval berhingga $[a, b]$ jika $f(t)$ kontinu pada setiap titik di $[a, b]$ kecuali kemungkinan untuk bilangan berhingga dari titik-titik dimana $f(t)$ mempunyai suatu *jump discontinuity*.

Suatu fungsi $f(t)$ dikatakan kontinu sebagian-sebagian pada $[0, \infty)$ jika $f(t)$ kontinu sebagian-sebagian di $[0, N]$ untuk semua $N > 0$.

Definisi 2.13.2 (Nagle dan Saff, 1993: 283)

Suatu fungsi $f(t)$ dikatakan eksponensial berorde α jika terdapat konstanta positif T dan M sedemikian sehingga

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t} \quad (2.17)$$

untuk semua $t \geq T$.

Teorema 2.13.3 (Nagle dan Saff, 1993: 284)

Jika $f(t)$ kontinu secara sebagian-sebagian di $[0, \infty)$ dan eksponensial berorde α , maka $\mathcal{L}\{f\}(s)$ ada untuk semua $s > \alpha$.

Bukti:

Sebelumnya perlu ditunjukkan bahwa integral

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

konvergen ke $s > \alpha$. Dimulai dengan memisahkan integral ini menjadi dua integral terpisah:

$$F(s) = \int_0^T e^{-st} f(t) dt + \int_T^\infty e^{-st} f(t) dt, \quad (2.18)$$

Dimana T dipilih sedemikian sehingga ketaksamaan (2.17) terpenuhi. Integral pertama pada (2.18) ada karena $f(t)$ dan sehingga $e^{-st} f(t)$ kontinu sebagian-sebagian pada interval $[0, T]$ untuk sebarang s yang tetap. Untuk melihat integral kedua di (2.18) konvergen, digunakan uji perbandingan untuk integral tak wajar.

Karena $f(t)$ eksponen berorde α , untuk $t \geq T$ berlaku $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$, dan karenanya $|e^{-st} f(t)| = e^{-st} |f(t)| \leq Me^{-(s-\alpha)t}$, untuk semua $t \geq T$. Sekarang untuk $s > \alpha$,

$$\int_T^\infty Me^{-(s-\alpha)t} dt = M \int_T^\infty e^{-(s-\alpha)t} dt = \frac{Me^{-(s-\alpha)T}}{s - \alpha} < \infty.$$

Karena $|e^{-st} f(t)| \leq Me^{-(s-\alpha)t}$ untuk $t \geq T$ dan integral tak wajar dari fungsi konvergen yang lebih besar untuk $s > \alpha$, maka, dengan uji perbandingan, integral

$$\int_T^\infty e^{-st} f(t) dt$$

konvergen untuk $s > \alpha$. Akhirnya, karena dua integral pada (2.18) ada, transformasi Laplace $\mathcal{L}\{f\}(s)$ ada untuk $s > \alpha$.

2.14 Beberapa Sifat Penting Transformasi Laplace

1. Sifat linier

Teorema 2.14.1 (Nagle dan Saff, 1993: 281)

Misalkan f_1 dan f_2 adalah fungsi-fungsi yang mempunyai transformasi-transformasi untuk $s > \alpha$, dan c merupakan konstanta, maka

$$\mathcal{L}\{f_1 + f_2\} = \mathcal{L}\{f_1\} + \mathcal{L}\{f_2\} \quad (2.19)$$

$$\mathcal{L}\{cf_1\} = c\mathcal{L}\{f_1\} \quad (2.20)$$

Bukti:

Menggunakan sifat kelinieran integral, untuk $s > \alpha$, maka diperoleh:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f_1 + f_2\}(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} [f_1(t) + f_2(t)] dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-st} [f_1(t)] dt + \int_0^{\infty} e^{-st} f_2(t) dt \\ &= \mathcal{L}\{f_1\}(s) + \mathcal{L}\{f_2\}(s) \end{aligned}$$

Sehingga persamaan (2.4) terpenuhi. Dengan cara yang sama diperoleh

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{cf_1\}(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} [cf_1(t)] dt = c \int_0^{\infty} e^{-st} f_1(t) dt \\ &= c\mathcal{L}\{f_1\}(s) \end{aligned}$$

2. Sifat translasi atau pergeseran pertama

Teorema 2.14.2 (Nagle dan Saff, 1993: 287)

Jika $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$ ada untuk $s > \alpha$, maka

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\}(s) = F(s - a) \quad (2.21)$$

Untuk $s > \alpha + a$.

Bukti:

Dihitung

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{e^{at} f(t)\}(s) &= F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} f(t) dt \\ &= F(s - a). \end{aligned}$$

Contoh:

Karena $\mathcal{L}\{\cos 2t\} = \frac{s}{s^2+4}$, diperoleh

$$\mathcal{L}\{e^{-t} \cos 2t\} = \frac{s+1}{(s+1)^2 + 4} = \frac{s+1}{s^2 + 2s - 5}$$

3. Transformasi Laplace dari turunan-turunan

Teorema 2.14.3 (Nagle dan Saff, 1993: 287)

Jika $f(t)$ kontinu pada $[0, \infty)$ dan $f'(t)$ kontinu sebagian-sebagian pada $[0, \infty)$, dengan eksponen berorde α . Maka untuk $s > \alpha$,

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) = s\mathcal{L}\{f\}(s) - f(0) \quad (2.22)$$

Bukti:

Karena $\mathcal{L}\{f'(t)\}(s)$ ada, maka digunakan integral parsial ($u = e^{-st}$ dan $dv = f'(t)dt$) untuk menemukan

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f'\}(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} f'(t) dt = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N e^{-st} f'(t) dt & (2.23) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} [e^{-st} f(t)]_0^N + s \int_0^N e^{-st} f(t) dt \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} e^{-sN} f(N) - f(0) + s \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N e^{-st} f(t) dt \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} e^{-sN} f(N) - f(0) + s\mathcal{L}\{f\}(s) \end{aligned}$$

Untuk menghitung $\lim_{N \rightarrow \infty} e^{-sN} f(N)$, ditinjau bahwa $f(t)$ eksponen berorde α , terdapat suatu kontanta M sedemikian sehingga untuk N besar,

$$|e^{-sN} f(N)| \leq e^{-sN} M e^{-\alpha N} = M e^{-(s-\alpha)N}.$$

Karenanya, untuk $s > \alpha$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |e^{-sN} f(N)| \leq \lim_{N \rightarrow \infty} M e^{-(s-\alpha)N} = 0,$$

dan juga

$$\lim_{N \rightarrow \infty} e^{-sN} f(N) = 0$$

Untuk semua $s > \alpha$. Persamaan (2.23) direduksi ke

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) = s\mathcal{L}\{f\}(s) - F(0).$$

Teorema terakhir untuk order turunan yang lebih tinggi pada $f(t)$ dapat diperluas dengan menggunakan induksi.

Contoh:

Bila $F(t) = \cos 3t$, maka $\mathcal{L}\{F(t)\} = \frac{3}{s^2+9}$ dan diperoleh

$$\mathcal{L}\{F'(t)\} = \mathcal{L}\{-3\sin 3t\} = s \left(\frac{s}{s^2+9} \right) - 1 = -\frac{9}{s^2+9}$$

Teorema 2.14.4 (Nagle dan Saff, 1993: 288)

Jika $f(t), f'(t), \dots, f^{(n-1)}(t)$ adalah kontinu untuk $[0, \infty)$ dan $f^{(n)}(t)$ kontinu secara sebagian-sebagian pada $[0, \infty)$, dengan semua fungsi-fungsinya eksponensial berorde α , maka untuk $s > \alpha$, maka berlaku

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}\}(s) = s^n \mathcal{L}\{f\}(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - sF^{(n-2)}(0) - F^{(n-1)}(0) \quad (2.24)$$

4. Perkalian dengan t^n

Teorema 2.14.5 (Nagle dan Saff, 1993: 289)

Jika $F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)$, dan asumsikan bahwa $f(t)$ kontinu sebagian-sebagian pada $[0, \infty)$ dan eksponensial berorde α . Maka untuk $s > \alpha$,

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s) \quad (2.25)$$

Bukti:

Perhatikan identitas

$$\frac{dF(s)}{ds} = \frac{d}{ds} \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

Karena asumsi-asumsi pada $f(t)$, dapat diaplikasikan aturan Leibniz untuk menukar order integral dan turunan:

$$\frac{dF(s)}{ds} = \int_0^{\infty} \frac{d}{ds} (e^{-st}) f(t) dt = - \int_0^{\infty} e^{-st} t f(t) dt = -\mathcal{L}\{tf(t)\}(s)$$

Sehingga $-\mathcal{L}\{tf(t)\}(s) = (-1) \frac{dF(s)}{ds}$.

Hasil umum dari (2.25) diperluas dengan induksi pada n .

Akibat dari teorema di atas adalah jika $f(t)$ kontinu sebagian-sebagian dan eksponen berorde, maka transformasi $f(s)$ mempunyai turunan untuk semua order.

Contoh:

Karena $\mathcal{L}\{e^{2t}\} = \frac{1}{s-2}$, diperoleh

$$\mathcal{L}\{te^{2t}\} = -\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s-2} \right) = \frac{1}{(s-2)^2}$$

$$\mathcal{L}\{t^2 e^{2t}\} = -\frac{d^2}{ds^2} \left(\frac{1}{s-2} \right) = \frac{2}{(s-2)^3}$$

5. Fungsi-fungsi periodik

Definisi 2.14.6 (Nagle dan Saff, 1993: 314)

Suatu fungsi $f(t)$ dikatakan periodik pada periode $T > 0$ jika $f(t+T) = f(t)$, untuk semua t di daerah asal dari f .

Teorema 2.14.7 (Nagle dan Saff, 1993: 316)

Jika f mempunyai periode T dan kontinu secara sebagian-sebagian pada $[0, T]$, maka

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \frac{\int_0^T e^{-st} f(t) dt}{1 - e^{-sT}} \quad (2.26)$$

Bukti:

Diketahui $f(t)$ mempunyai periode $T > 0$, maka:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f\}(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \\ &= \int_0^T e^{-st} f(t) dt + \int_T^{2T} e^{-st} f(t) dt + \int_{2T}^{3T} e^{-st} f(t) dt + \dots \end{aligned}$$

Jika dipilih $v = t$ untuk integral yang pertama, $v = t - T$ untuk integral yang kedua, $v = t - 2T$ untuk integral yang ketiga, dan seterusnya, maka diperoleh:

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^T e^{-sv} f(v) dv + \int_0^T e^{-s(v+T)} f(v) dv + \int_0^T e^{-s(v+2T)} f(v) dv + \dots$$

Karena $f(v) = f(v + T) = f(v + 2T) = \dots$, maka diperoleh:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f\}(s) &= \int_0^T e^{-sv} f(v) dv + e^{-sT} \int_0^T e^{-sv} f(v) dv + e^{-2sT} \int_0^T e^{-sv} f(v) dv + \dots \\ &= (1 + e^{-sT} + e^{-2sT} + \dots) \int_0^T e^{-sv} f(v) dv \end{aligned}$$

Dengan menggunakan Deret Geometri dengan rasio $r = e^{-sT}$, diperoleh:

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \frac{\int_0^T e^{-sv} f(v) dv}{1 - e^{-sT}}$$

Karena $v = t$, maka:

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \frac{\int_0^T e^{-st} f(t) dt}{1 - e^{-sT}}$$

2.15 Transformasi Laplace untuk Fungsi Kosinus

Untuk menentukan karakteristik suatu operator A terlebih dahulu dicari transformasi Laplace untuk fungsi cos. Berdasarkan definisi, maka:

$$\mathcal{L}\{\cos at\} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \cos(at) dt$$

Kemudian menyelesaikan bentuk integral di atas

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \cos at dt &= \frac{e^{-\lambda t} \sin at}{a} - \int_0^{\infty} \left(\frac{\sin at}{a}\right) (-\lambda e^{-\lambda t}) dt \\ &= \frac{e^{-\lambda t} \sin at}{a} + \frac{\lambda}{a} \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \sin at dt \\ &= \frac{e^{-\lambda t} \sin at}{a} + \frac{\lambda}{a} \left(\frac{-e^{-\lambda t} \cos at}{a} - \int_0^{\infty} \left(-\frac{\cos at}{a}\right) (-\lambda e^{-\lambda t}) dt \right) \\ &= \frac{e^{-\lambda t} \sin at}{a} + \frac{\lambda}{a} \left(-\frac{e^{-\lambda t} \cos at}{a} - \frac{\lambda}{a} \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \cos at dt \right) \\ &= \frac{e^{-\lambda t} \sin at}{a} - \frac{\lambda e^{-\lambda t} \cos at}{a^2} - \frac{\lambda^2}{a^2} \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \cos at dt \end{aligned}$$

Dengan mengumpulkan suku-suku yang mengandung $\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \cos at dt$ ke sebelah kiri, diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{\lambda^2}{a^2} \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \cos at dt + \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \cos at dt &= \frac{e^{-\lambda t} \sin at}{a} - \frac{\lambda e^{-\lambda t} \cos at}{a^2} \\ \left(\frac{\lambda^2}{a^2} + 1\right) \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \cos at dt &= \frac{e^{-\lambda t}}{a^2} (a \sin at - \lambda \cos at) \\ \left(\frac{\lambda^2 + a^2}{a^2}\right) \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \cos at dt &= \frac{e^{-\lambda t}}{a^2} (a \sin at - \lambda \cos at) \\ \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \cos at dt &= \left(\frac{a^2}{\lambda^2 + a^2}\right) \left(\frac{e^{-\lambda t}}{a^2}\right) \\ &\quad (a \sin at - \lambda \cos at) \end{aligned}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \cos at dt = \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda^2 + a^2} (a \sin at - \lambda \cos at)$$

Integral tak wajar di atas dapat dapat diketahui limitnya sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \int_0^R e^{-\lambda t} \cos at dt &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda^2 + a^2} (a \sin at - \lambda \cos at) \right]_0^R \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{-\lambda R}}{\lambda^2 + a^2} (a \sin aR - \lambda \cos aR) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{-\lambda \cdot 0}}{\lambda^2 + a^2} (a \sin a \cdot 0 - \lambda \cos a \cdot 0) \right] \\
& = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{e^{-\lambda R}}{\lambda^2 + a^2} (a \sin at - \lambda \cos at) - \frac{-\lambda}{\lambda^2 + a^2}
\end{aligned}$$

Karena $e^{-\lambda R} \rightarrow 0$ ketika $\lambda > 0$ adalah tetap dan $R \rightarrow \infty$ maka diperoleh

$$\int_0^R e^{-\lambda t} \cos(t) dt = 0 + \frac{\lambda}{\lambda^2 + a^2} = \frac{\lambda}{\lambda^2 + a^2}; \lambda > 0$$

Jadi, transformasi Laplace untuk fungsi cos adalah,

$$\mathcal{L}\{\cos at\} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \cos at dt = \frac{\lambda}{\lambda^2 + a^2}; \quad (\lambda > 0) \quad (2.27)$$

2.16 Fungsi Kontinu Kuat (*strongly continuous function*) dan Fungsi Kosinus

Cos

Dalam sub bab ini akan dijelaskan definisi dari fungsi kontinu kuat (*strongly continuous function*) yang digunakan untuk mendefinisikan fungsi kosinus Cos. Ruang dari seluruh operator linier terbatas dari ruang Banach X ke ruang Banach Y dinotasikan dengan $\mathcal{L}(X, Y)$ atau secara sederhana dapat dinotasikan dengan $\mathcal{L}(X)$ ketika $Y = X$.

Definisi 2.16.1 (Arendt dkk, 2001: 24)

Suatu fungsi $T: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ adalah kontinu kuat jika $t \mapsto T(t)x$ kontinu untuk setiap $x \in X$.

Definisi 2.16.2 (Arendt dkk, 2001: 207)

Suatu fungsi kontinu kuat (*strongly continuous function*) $\text{Cos} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{L}(X)$

disebut suatu fungsi kosinus jika $\text{Cos}(0) = I$ dan

$$2 \text{Cos}(t)\text{Cos}(s) = \text{Cos}(t + s) + \text{Cos}(t - s); \quad (t \geq s \geq 0) \quad (2.28)$$

Lemma 2.16.3 (Arendt dkk, 2001: 207)

Misalkan Cos merupakan suatu fungsi kosinus, maka $\omega(\text{Cos}) < \infty$.

Bukti:

Karena $\text{Cos}(s) \in \mathcal{L}(X)$, maka dapat didefinisikan $M := \text{Sup}_{0 \leq s \leq 2} \|\text{Cos}(s)\| < \infty$.

Dipilih $\omega > 0$ sedemikian sehingga $2\|\text{Cos}(1)\|e^{-\omega} + e^{-2\omega} \leq 1$. Dianggap

$\|\text{Cos}(t)\| \leq Me^{-\omega t}$; $t \geq 0$, berlaku untuk $t \in [0, 2]$. Asumsikan untuk $t \in [0, n]$,

dengan $n \in \mathbb{N}$; $n \geq 2$ terpenuhi. Dianggap untuk $t \in [0, n + 1]$ terpenuhi. Jika

$t \in (n - 1, n)$, maka

$$\begin{aligned} \|\text{Cos}(t + 1)\| &= 2\|\text{Cos}(t)\text{Cos}(1) - \text{Cos}(t - 1)\| \\ &\leq 2\|\text{Cos}(1)\|Me^{\omega t} + Me^{\omega(t-1)} \\ &= (2\|\text{Cos}(1)\|e^{-\omega} + e^{-2\omega})Me^{\omega(t+1)} \\ &\leq Me^{\omega(t+1)} \end{aligned}$$

Karena pada saat $t \in (n - 1, n)$ berlaku $\|\text{Cos}(t + 1)\| \leq Me^{\omega(t+1)}$. Berdasarkan

definisi ω dengan $M := \text{Sup}_{0 \leq s \leq 2} \|\text{Cos}(s)\| < \infty$, maka terbukti bahwa $\omega(\text{Cos}) <$

∞ .

2.17 Fungsi Karakteristik

Definisi 2.17.1 (Anonymous, 2011)

Misalkan $A \subset X$. Suatu fungsi $\chi_A: X \rightarrow \mathbb{R}$. Suatu fungsi χ_A dikatakan fungsi karakteristik jika

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{jika } x \in A \\ 0, & \text{jika } x \notin A \end{cases}$$

2.18 Deret Von Neumann

Definisi 2.18.1 (Baumgärtel, 1985: 54)

Misalkan A operator terbatas pada ruang vektor bernorma X . Maka Deret Von Neumann adalah sebagai berikut:

$$\sum_{n=0}^{\infty} A^n = I + A + \dots + A^n$$

dengan $A^0 = I$ adalah identitas operator di X .

Definisi 2.18.2 (Baumgärtel, 1985: 54)

Deret Von Neumann selalu konvergen pada suatu operator bernorma dan $(I - A)$ memiliki invers, sehingga berlaku:

$$(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$$

dengan I merupakan operator identitas di X .

2.19 Transformasi Laplace-Stieltjes

Teorema 2.19.1. (Rynne dan Youngson, 2008: 100-101)

Misalkan X dan Y adalah ruang linier bernorma dan misal $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Jika $\|T(x)\| = \|x\|$ untuk setiap $x \in X$, maka T disebut isometri. Pada setiap ruang bernorma terdapat paling sedikit satu isometri.

Contoh:

Misal X adalah ruang bernorma dan I adalah identitas transformasi linier pada X , maka I adalah suatu isometri.

Bukti:

Jika $x \in X$ maka $I(x) = x$ sehingga $\|I(x)\| = \|x\|$. Jadi, I adalah isometri.

Definisi 2.19.3 (Rynne dan Youngson, 2008: 102)

Jika X dan Y adalah ruang linier bernorma dan T adalah suatu isometri dari X pada Y maka T disebut *isometrik isomorfisme* sedangkan X dan Y disebut *isometrically isomorfisme*.

Definisi 2.19.4 (Arendt dkk, 2001: 81)

Diberikan $\omega \in \mathbb{R}$. Transformasi Laplace-Stieltjes adalah suatu isometrik isomorfisme dari $Lip_\omega(\mathbb{R}_+, X)$ onto $C_W^\infty((\omega, \infty), X)$. Untuk $M > 0$ dan $r \in C_W^\infty((\omega, \infty), X)$. Pernyataan berikut ekuivalen:

$$i) \quad \left\| (\lambda - \omega)^{k+1} \frac{1}{k!} r^{(k)}(\lambda) \right\| \leq M \quad (\lambda > \omega, k \in \mathbb{N}_0).$$

- ii) Terdapat $G: \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ yang memenuhi $G(0) = 0$ dan $\|G(t+h) - G(t)\| \leq M \int_t^{t+h} e^{\omega r} dr$ ($t, h \geq 0$), sedemikian sehingga $r(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} dG(t)$ untuk setiap $\lambda > \omega$.

2.20 Transformasi Laplace untuk Fungsi Sinus

Anggap suatu fungsi f didefinisikan $f(t) = \sin at$ maka transformasi Laplacinya adalah $\mathcal{L}\{\sin at\} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \sin at dt$. Selanjutnya integral tersebut diselesaikan menggunakan integral parsial sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\lambda t} \sin at dt &= -\frac{e^{-\lambda t} \cos at}{a} - \int_0^\infty \left(-\frac{\cos at}{a}\right) (-\lambda e^{-\lambda t}) dt \\ &= -\frac{e^{-\lambda t} \cos at}{a} - \frac{\lambda}{a} \int_0^\infty e^{-\lambda t} \cos at dt \\ &= -\frac{e^{-\lambda t} \cos at}{a} - \frac{\lambda}{a} \left(\frac{e^{-\lambda t} \sin at}{a} - \int_0^\infty \left(\frac{\sin at}{a}\right) (-\lambda e^{-\lambda t}) dt \right) \\ &= -\frac{e^{-\lambda t} \cos at}{a} - \frac{\lambda}{a} \left(\frac{e^{-\lambda t} \sin at}{a} + \frac{\lambda}{a} \int_0^\infty e^{-\lambda t} \sin at dt \right) \\ &= -\frac{e^{-\lambda t} \cos at}{a} - \frac{\lambda e^{-\lambda t} \sin at}{a^2} - \frac{\lambda^2}{a^2} \int_0^\infty e^{-\lambda t} \sin at dt \end{aligned}$$

$$\frac{\lambda^2}{a^2} \int_0^\infty e^{-\lambda t} \sin at dt + \int_0^\infty e^{-\lambda t} \sin at dt = -\frac{e^{-\lambda t} \cos at}{a} - \frac{\lambda e^{-\lambda t} \sin at}{a^2}$$

$$\left(\frac{\lambda^2 + a^2}{a^2}\right) \int_0^\infty e^{-\lambda t} \sin at dt = -\frac{e^{-\lambda t}}{a^2} (a \cos at + \lambda \sin at)$$

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} \sin at dt = -\left(\frac{a^2}{\lambda^2 + a^2}\right) \left(\frac{e^{-\lambda t}}{a^2}\right) (a \cos at + \lambda \sin at)$$

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} \sin at dt = -\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda^2 + a^2} (a \cos at + \lambda \sin at)$$

Menurut persamaan (2.16) integral tak wajar di atas dapat dicari limitnya. Karena diketahui $\lim_{R \rightarrow \infty} e^{-\lambda R} = 0$, maka

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \sin at \, dt &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-\lambda t} \sin at \, dt \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left[-\frac{e^{-\lambda R}}{\lambda^2 + a^2} (\lambda \sin aR + a \cos aR) \right] \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\frac{a}{\lambda^2 + a^2} - \frac{e^{-\lambda R}}{\lambda^2 + a^2} (\lambda \sin aR + a \cos aR) \right] \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{a}{\lambda^2 + a^2} - \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{e^{-\lambda R}}{\lambda^2 + a^2} (\lambda \sin aR + a \cos aR) \\ &= \frac{a}{\lambda^2 + a^2} \end{aligned}$$

Jadi, transformasi Laplace untuk fungsi sinus adalah,

$$\mathcal{L}\{\sin at\} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \sin at \, dt = \frac{a}{\lambda^2 + a^2} \quad (\lambda > 0) \quad (2.29)$$

2.21 Masalah Cauchy Orde Kedua

Definisi 2.21.1 (Arendt dkk, 2001: 206)

Jika A adalah operator tertutup pada suatu ruang Banach X dan $x, y \in X$. Maka masalah $P^2(x, y)$ didefinisikan sebagai:

$$P^2(x, y) \begin{cases} u''(t) = Au(t) \quad (t \geq 0) \\ u(0) = x \\ u'(0) = y \end{cases} \quad (2.30)$$

Solusi dari $P^2(x, y)$ adalah suatu fungsi $u \in C(\mathbb{R}_+, X)$ sedemikian sehingga untuk setiap $t \geq 0$ berlaku:

$$\int_0^t \int_0^s u(r) dr ds = \int_0^t (t-s)u(s)ds \in D(A)$$

dan

$$u(t) = x + ty + A \int_0^t (t-s)u(s)ds \quad (2.31)$$



BAB III

PEMBAHASAN

Berikut diberikan proposisi yang menjelaskan tentang karakteristik suatu operator A merupakan generator dari fungsi kosinus Cos .

3.1 Generator Fungsi Kosinus

Proposisi 3.1.1 (Arendt dkk, 2001: 208)

Diberikan fungsi kontinu kuat $\text{Cos}: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{L}(X)$.

Pernyataan-pernyataan berikut ekuivalen :

- a. Fungsi Cos adalah fungsi kosinus.
- b. i) $\text{abs}(\text{Cos}) < \infty$.
- ii) Terdapat ω dengan $\omega > \text{maks}\{\text{abs}(\text{Cos}), 0\}$.
- iii) Terdapat operator A sehingga $(\omega^2, \infty) \subset \rho(A)$ dan

$$\lambda R(\lambda^2, A) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \text{Cos}(t) dt; \quad \lambda > \omega$$

Bukti:

$(a \Rightarrow b)$

Diketahui fungsi Cos merupakan fungsi kosinus. Sehingga memenuhi persamaan berikut:

$$2 \text{Cos}(t)\text{Cos}(s) = \text{Cos}(t + s) + \text{Cos}(t - s); \quad (t \geq s \geq 0) \quad (2.28)$$

Berdasarkan Lemma 2.16.2, jika Cos merupakan fungsi kosinus, maka $\omega(\text{Cos}) < \infty$. Berdasarkan Definisi 2.10.4 dan karena $\omega(\text{Cos}) < \infty$, maka berlaku $\text{abs}(\text{Cos}) < \infty$ dan $\omega > \text{maks}\{\text{abs}(\text{Cos}), 0\}$. Kemudian akan ditunjukkan

$$\lambda R(\lambda^2, A) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \text{Cos}(t) dt; \quad \lambda > \omega$$

Karena persamaan (2.28) terpenuhi, persamaan tersebut dikenai transformasi

Laplace, sehingga

$$\begin{aligned} & 2 \int_0^\infty e^{-\lambda t} \text{Cos}(t) \int_0^\infty e^{-\mu s} \text{Cos}(s) ds dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \int_0^\infty e^{-\mu s} 2 \text{Cos}(t) \text{Cos}(s) ds dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \int_0^\infty e^{-\mu s} (\text{Cos}(t+s) + \text{Cos}(t-s)) ds dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \left\{ \int_0^\infty e^{-\mu s} \text{Cos}(t+s) + \text{Cos}(t-s) ds \right\} dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \left\{ \int_t^\infty e^{-\mu(r-t)} \text{Cos}(r) dr + \int_{-\infty}^t e^{-\mu(t-r)} \text{Cos}(r) dr \right\} dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \int_t^\infty e^{-\mu(r-t)} \text{Cos}(r) dr dt + \int_0^\infty e^{-\lambda t} \int_{-\infty}^t e^{-\mu(t-r)} \text{Cos}(r) dr dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \int_t^\infty e^{-\mu(r-t)} \text{Cos}(r) dr dt + \int_0^\infty e^{-\lambda t} \int_{-\infty}^0 e^{-\mu(t-r)} \text{Cos}(r) dr dt \\ &\quad + \int_0^\infty e^{-\lambda t} \int_0^t e^{-\mu(t-r)} \text{Cos}(r) dr dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} \int_t^\infty e^{-\mu r} e^{\mu t} \text{Cos}(r) dr dt + \int_0^\infty e^{-\lambda t} \int_{-\infty}^0 e^{-\mu t} e^{\mu r} \text{Cos}(r) dr dt \\ &\quad + \int_0^\infty e^{-\lambda t} \int_0^t e^{-\mu t} e^{\mu r} \text{Cos}(r) dr dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\mu r} \int_0^r e^{(\mu-\lambda)t} dt \text{Cos}(r) dr + \int_{-\infty}^0 e^{\mu r} \int_0^\infty e^{-(\mu+\lambda)t} dt \text{Cos}(r) dr \\ &\quad + \int_0^\infty e^{\mu r} \int_r^\infty e^{-(\mu+\lambda)t} dt \text{Cos}(r) dr \\ &= \int_0^\infty e^{-\mu r} \int_0^r e^{(\mu-\lambda)t} dt \text{Cos}(r) dr + \int_{-\infty}^0 e^{\mu r} \int_0^\infty e^{-(\mu+\lambda)t} dt \text{Cos}(r) dr \\ &\quad + \int_0^\infty e^{\mu r} \int_r^R e^{-(\mu+\lambda)t} dt \text{Cos}(r) dr \\ &= \frac{1}{\mu-\lambda} \int_0^\infty e^{-\mu r} e^{(\mu-\lambda)r} \text{Cos}(r) dr \Big|_0^r + \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{-(\mu+\lambda)} \int_{-\infty}^0 e^{\mu r} e^{-(\mu+\lambda)t} \text{Cos}(r) dr \Big|_0^R \\ &\quad + \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{-(\mu+\lambda)} \int_0^\infty e^{\mu r} e^{-(\mu+\lambda)t} \text{Cos}(r) dr \Big|_r^R \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\mu-\lambda} \int_0^{\infty} e^{-\mu r} (e^{(\mu-\lambda)r} - e^{(\mu-\lambda)0}) \cos(r) dr \\
&\quad + \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{-(\mu+\lambda)} \int_{-\infty}^0 e^{\mu r} (e^{-(\mu+\lambda)R} - e^{-(\mu+\lambda)0}) \cos(r) dr \\
&\quad + \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{-(\mu+\lambda)} \int_0^{\infty} e^{\mu r} (e^{-(\mu+\lambda)R} - e^{-(\mu+\lambda)r}) \cos(r) dr
\end{aligned}$$

Karena $e^{-(\mu+\lambda)R} \rightarrow 0$ untuk $R \rightarrow \infty$, maka diperoleh:

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\mu-\lambda} \int_0^{\infty} e^{-\mu r} (e^{(\mu-\lambda)r} - 1) \cos(r) dr + \frac{1}{-(\mu+\lambda)} \int_{-\infty}^0 e^{\mu r} (0 - 1) \cos(r) dr \\
&\quad + \frac{1}{-(\mu+\lambda)} \int_0^{\infty} e^{\mu r} (0 - e^{-(\mu+\lambda)r}) \cos(r) dr \\
&= \frac{1}{\mu-\lambda} \int_0^{\infty} e^{-\mu r} e^{(\mu-\lambda)r} \cos(r) dr - \frac{1}{\mu-\lambda} \int_0^{\infty} e^{-\mu r} \cos(r) dr \\
&\quad + \frac{1}{\mu+\lambda} \int_{-\infty}^0 e^{\mu r} \cos(r) dr + \frac{1}{\mu+\lambda} \int_0^{\infty} e^{\mu r} e^{-(\mu+\lambda)r} \cos(r) dr \\
&= \frac{1}{\mu-\lambda} \int_0^{\infty} e^{-\lambda r} \cos(r) dr - \frac{1}{\mu-\lambda} \int_0^{\infty} e^{-\mu r} \cos(r) dr + \frac{1}{\mu+\lambda} \int_0^{\infty} e^{-\mu r} \cos(r) dr \\
&\quad + \frac{1}{\mu+\lambda} \int_0^{\infty} e^{-\lambda r} \cos(r) dr
\end{aligned}$$

Misalkan $Q(\lambda) := \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \cos(t) dt$, maka persamaan di atas dapat diubah menjadi:

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\mu-\lambda} Q(\lambda) - \frac{1}{\mu-\lambda} Q(\mu) + \frac{1}{\mu+\lambda} Q(\mu) + \frac{1}{\mu+\lambda} Q(\lambda) \\
&= \frac{1}{\mu-\lambda} (Q(\lambda) - Q(\mu)) + \frac{1}{\mu+\lambda} (Q(\lambda) + Q(\mu)) \\
&= \frac{(\mu+\lambda)(Q(\lambda) - Q(\mu)) + (\mu-\lambda)(Q(\lambda) + Q(\mu))}{\mu^2 - \lambda^2} \\
&= \frac{\mu Q(\lambda) + \lambda Q(\lambda) - \mu Q(\mu) - \lambda Q(\mu) + \mu Q(\lambda) - \lambda Q(\lambda) + \mu Q(\mu) - \lambda Q(\mu)}{\mu^2 - \lambda^2} \\
&= \frac{2\mu Q(\lambda) - 2\lambda Q(\mu)}{\mu^2 - \lambda^2} \\
&= \frac{2(\mu Q(\lambda) - \lambda Q(\mu))}{\mu^2 - \lambda^2}
\end{aligned}$$

Jadi,

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-\mu s} (\cos(t+s) + \cos(t-s)) ds dt \\ &= \frac{2}{\mu^2 - \lambda^2} (\mu Q(\lambda) - \lambda Q(\mu)) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Diberikan $R(\lambda) := \frac{1}{\sqrt{\lambda}} Q(\sqrt{\lambda})$, sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} R(\lambda)R(\mu) &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}\sqrt{\mu}} Q(\sqrt{\lambda})Q(\sqrt{\mu}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}\sqrt{\mu}} \int_0^\infty e^{-\sqrt{\lambda}t} \cos(t) dt \int_0^\infty e^{-\sqrt{\mu}s} \cos(s) ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}\sqrt{\mu}} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\sqrt{\lambda}t} e^{-\sqrt{\mu}s} \cos(t)\cos(s) ds dt \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\lambda}\sqrt{\mu}} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\sqrt{\lambda}t} e^{-\sqrt{\mu}s} (\cos(t+s) + \cos(t-s)) ds dt \end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan (3.1), maka:

$$\begin{aligned} R(\lambda)R(\mu) &= \frac{1}{2\sqrt{\lambda}\sqrt{\mu}} \frac{2}{\mu - \lambda} (\sqrt{\mu}Q(\sqrt{\lambda}) - \sqrt{\lambda}Q(\sqrt{\mu})) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}\sqrt{\mu}} \frac{1}{\mu - \lambda} (\sqrt{\mu}Q(\sqrt{\lambda}) - \sqrt{\lambda}Q(\sqrt{\mu})) \\ &= \frac{1}{\mu - \lambda} \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} Q(\sqrt{\lambda}) - \frac{1}{\sqrt{\mu}} Q(\sqrt{\mu}) \right) \\ &= \frac{1}{\mu - \lambda} (R(\sqrt{\lambda}) - R(\sqrt{\mu})), \text{ untuk setiap } \lambda, \mu \in (\omega^2, \infty) \subset \rho(A) \end{aligned}$$

Karena memenuhi Proposisi (2.11.4), dengan $\lambda > \omega^2$, maka $R(\lambda)$ merupakan *pseudo resolvent*.

Karena $\cos(0) = I$, $R(\lambda)x = 0$, $\lambda > \omega^2$, akibatnya $x = 0$. Atau dengan kata lain $\ker R(\lambda) = \{0\}$. Akibatnya menurut Proposisi (2.11.6) terdapat operator A sehingga $(\omega^2, \infty) \subset \rho(A)$ dan

$$\lambda R(\lambda^2, A) = \lambda R(\lambda^2) = Q(\sqrt{\lambda}) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \cos(t) dt \text{ untuk } \lambda > \omega.$$

Selanjutnya dari proposisi di atas didefinisikan generator fungsi kosinus Cos .

Diberikan $\omega > \max\{\text{abs}(\text{Cos}), 0\}$. Operator A disebut generator dari fungsi kosinus Cos jika terdapat $\omega > 0$ sehingga $(\omega^2, \infty) \subset \rho(A)$ dan

$$\lambda R(\lambda^2, A) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \text{Cos}(t) dt; \quad \lambda > \omega$$

($b \Rightarrow a$)

Diketahui $\text{abs}(\text{Cos}) < \infty$, terdapat ω dengan $\omega > \max\{\text{abs}(\text{Cos}), 0\}$, dan terdapat operator A , sehingga $(\omega^2, \infty) \subset \rho(A)$ dan

$$\lambda R(\lambda^2, A) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \text{Cos}(t) dt; \quad \lambda > \omega$$

Akan ditunjukkan fungsi Cos merupakan fungsi kosinus. Dengan kata lain,

$$2 \text{Cos}(t)\text{Cos}(s) = \text{Cos}(t + s) + \text{Cos}(t - s); \quad (t \geq s \geq 0)$$

Menurut yang diketahui terdapat ω dengan $\omega > \max\{\text{abs}(\text{Cos}), 0\}$, akibatnya:

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \int_0^{\infty} e^{-\mu s} (\text{Cos}(t + s) + \text{Cos}(t - s)) ds dt = \lambda R(\lambda^2, A), \quad \text{untuk } \lambda, \mu > \omega,$$

dengan $\lambda \neq \mu$.

Menurut persamaan (3.1)

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} e^{-\mu s} (\text{Cos}(t + s) + \text{Cos}(t - s)) ds dt = \frac{2}{\mu^2 - \lambda^2} (\mu Q(\lambda) - \lambda Q(\mu))$$

Menurut yang diketahui $Q(\sqrt{\lambda}) = \lambda R(\lambda^2, A)$, untuk setiap $\lambda > \omega$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{2}{\mu^2 - \lambda^2} (\mu Q(\lambda) - \lambda Q(\mu)) &= \frac{2}{\mu^2 - \lambda^2} (\lambda \mu R(\lambda^2, A) - \lambda \mu R(\mu^2, A)) \\ &= 2\lambda\mu \frac{R(\lambda^2, A) - R(\mu^2, A)}{\mu^2 - \lambda^2} \end{aligned}$$

Dengan menggunakan persamaan *resolvent*, didapat

$$\begin{aligned} \frac{2}{\mu^2 - \lambda^2} (\mu Q(\lambda) - \lambda Q(\mu)) &= \frac{2\lambda\mu(\mu^2 - \lambda^2)R(\lambda^2, A)R(\mu^2, A)}{\mu^2 - \lambda^2} \\ &= 2\lambda\mu R(\lambda^2, A)R(\mu^2, A) \\ &= 2 \int_0^\infty e^{-\lambda t} \text{Cos}(t) dt \int_0^\infty e^{-\mu s} \text{Cos}(s) ds \end{aligned}$$

Jadi,

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-\mu s} (\text{Cos}(t+s) + \text{Cos}(t-s)) ds dt \\ &= 2 \int_0^\infty e^{-\lambda t} \text{Cos}(t) dt \int_0^\infty e^{-\mu s} \text{Cos}(s) ds \end{aligned}$$

untuk $\lambda, \mu > \omega$.

Diambil fungsi $f(t) = \int_0^\infty e^{-\mu s} (\text{Cos}(t+s) + \text{Cos}(t-s)) ds$

$$g(t) = \int_0^\infty e^{-\mu s} 2 \text{Cos}(t) \text{Cos}(s) ds$$

$f, g \in L^1_{loc}(R^+, X)$ dengan $\text{abs}(f) < \infty$, $\text{abs}(g) < \infty$

dan $\omega > \text{maks}\{\text{abs}(f), \text{abs}(g)\}$.

Jika $\hat{f}(\lambda) = \hat{g}(\lambda)$ untuk sebarang $\lambda > \omega$, maka $f(t) = g(t)$.

Selanjutnya, $h(t) = \text{Cos}(t+s) + \text{Cos}(t-s)$

$$k(t) = 2 \text{Cos}(t) \text{Cos}(s)$$

$f(t) = \hat{h}(\mu)$ dan $g(t) = \hat{k}(\mu)$

Akibatnya, $\hat{h}(\mu) = \hat{k}(\mu)$ untuk setiap $\mu > \text{maks}\{\text{abs}(h), \text{abs}(k)\}$.

Jadi diperoleh

$$2 \text{Cos}(t) \text{Cos}(s) = \text{Cos}(t+s) + \text{Cos}(t-s); (t \geq s \geq 0)$$

Contoh:

Diketahui operator $A \in \mathcal{L}(X)$, dengan $\sqrt{\|A\|} < \lambda$ dan $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} A^n$, $A^0 =$

I. Buktikan bahwa fungsi tersebut merupakan fungsi kosinus!

Bukti:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} f(t) dt &= \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{t^{2n}}{(2n)!} A^n dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{t^{2n}}{(2n)!} A^n dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{(2n)!} \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} t^{2n} dt \\ \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} t^{2n} dt &= -\frac{t^{2n}}{\lambda} e^{-\lambda t} - 2n \frac{t^{2n-1}}{\lambda^2} e^{-\lambda t} - (2n-1)(2n) \frac{t^{2n-2}}{\lambda^3} e^{-\lambda t} - \dots \\ &\quad - (2) \dots (2n-1)(2n) \frac{t}{\lambda^{2n}} e^{-\lambda t} - \frac{(2n)!}{\lambda^{2n+1}} e^{-\lambda t} \Big]_0^{\infty} \\ &= -\left(\frac{t^{2n}}{\lambda} + 2n \frac{t^{2n-1}}{\lambda^2} + (2n-1)(2n) \frac{t^{2n-2}}{\lambda^3} + \dots \right. \\ &\quad \left. + (2) \dots (2n-1)(2n) \frac{t}{\lambda^{2n}} + \frac{(2n)!}{\lambda^{2n+1}} \right) e^{-\lambda t} \Big]_0^{\infty} \end{aligned}$$

Karena $e^{-\lambda t} \rightarrow 0$ untuk $t \rightarrow \infty$, maka

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} t^{2n} dt = \frac{(2n)!}{\lambda^{2n+1}}$$

Sehingga untuk contoh di atas diperoleh

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{(2n)!} \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} t^{2n} dt &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{(2n)!} \frac{(2n)!}{\lambda^{2n+1}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{2n+1}} \\ &= \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{2n}} \end{aligned}$$

Dengan menggunakan deret Von Neumann, yaitu:

$$\left(I - \frac{A}{\lambda^2}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{2n}}, \text{ untuk } |\lambda| > \sqrt{\|A\|}$$

diperoleh

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} f(t) dt &= \frac{1}{\lambda} \left(I - \frac{A}{\lambda^2}\right)^{-1} \\ &= \frac{1}{\lambda} \left(\frac{I\lambda^2 - A}{\lambda^2}\right)^{-1} \\ &= \frac{1}{\lambda} \lambda^2 (I\lambda^2 - A)^{-1} \\ &= \lambda R(\lambda^2, A) \end{aligned}$$

Jadi, $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} A^n$ merupakan salah satu contoh dari fungsi kosinus Cos.

Definisi tentang generator fungsi kosinus Cos di atas di antaranya dapat digunakan untuk menentukan syarat cukup dan syarat perlu agar suatu persamaan Telegraph *well posed*.

Definisi 3.1.2 (Arendt dkk, 2001: 222)

Jika A merupakan generator fungsi kosinus Cos , maka untuk $\lambda > \omega(Cos)$ berlaku

$$\begin{aligned} \lambda R(\lambda^2, A) &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} Cos(t) dt \\ R(\lambda^2, A) &= \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} Cos(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \int_0^t Cos(s) ds dt \quad (3.2) \end{aligned}$$

Jadi A adalah generator fungsi sinus Sin . Karena $Sin(t) = \int_0^t Cos(s) ds$ dan Sin adalah fungsi kontinu kuat maka $Sin(t)x := \int_0^t Cos(s)x ds$.

Teorema 3.1.3 (Arendt dkk, 2001: 222-223)

Misalkan A adalah operator yang terdefinisi pada ruang Banach X maka pernyataan-pernyataan di bawah ini ekuivalen:

- A adalah generator fungsi kosinus.
- Terdapat $\omega, M \geq 0$ sedemikian sehingga $(\omega^2, \infty) \subset \rho(A)$ dan

$$\frac{1}{k!} \|(\lambda - \omega)^{k+1} (\lambda R(\lambda^2, A))^{(k)}\| \leq M$$

untuk setiap $\lambda > \omega$ dan $k \in \mathbb{N}_0$.

Bukti:

($a \Rightarrow b$)

Diketahui A adalah generator dari fungsi kosinus Cos berarti terdapat $M, \omega \geq 0$ sedemikian sehingga $(\omega^2, \infty) \subset \rho(A)$ dan $\|\text{Cos}(t)\| \leq Me^{\omega t}$. Karena berdasarkan (3.2), $\lambda R(\lambda^2, A) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \text{Cos}(t) dt$; $\lambda > \omega$. Maka sesuai dengan teorema 2.19.1, berlaku

$$\frac{1}{k!} \|(\lambda - \omega)^{k+1} (\lambda R(\lambda^2, A))^{(k)}\| \leq M, \quad (\forall \lambda > \omega, k \in \mathbb{N}_0)$$

($b \Rightarrow a$)

Asumsikan (b) terpenuhi. Berdasarkan teorema 2.19.4 terdapat fungsi $S : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{L}(X)$ yang memenuhi

$$\|S(t+h) - S(t)\| \leq M \int_0^{t+h} e^{\omega s} ds \quad (t, h \geq 0)$$

Sedemikian sehingga

$$R(\lambda^2, A) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) dt \quad (\lambda > \omega)$$

Oleh karena itu, S adalah fungsi sinus dengan generator A dan proposisi 3.1 terpenuhi, sehingga

$$S(t)x - tx = \int_0^t (t-s)S(s)Ax ds, (t \geq 0)$$

Berakibat $S(\cdot)x \in C^1(\mathbb{R}_+, X)$, untuk setiap $x \in X$. Misal $C(t)x = \frac{d}{dt}S(t)x$, $x \in$

$X, t \geq 0$. Dengan transformasi Laplace di kedua ruas diperoleh

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} C(t)x dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} dS(t)x$$

Untuk ruas kiri dapat diselesaikan sebagai berikut

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\lambda t} dS(t)x &= e^{-\lambda t}S(t)x + \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x dt \\ &= e^{-\lambda t}S(t)x + \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x dt \\ &= e^{-\lambda t}S(t)x + \lambda x \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) dt \end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan (2.29) jika $S(t)$ merupakan fungsi sinus maka

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) dt &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-\lambda t} S(t) dt \\ &= \frac{1}{\lambda^2 + 1} \end{aligned}$$

Dan karena $e^{-\lambda t} \rightarrow 0$ ketika $\lambda > 0$ adalah tetap dan $R \rightarrow \infty$, maka diperoleh

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\lambda t} dS(t)x &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R e^{-\lambda t} dS(t)x \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left[e^{-\lambda t}S(t)x + \lambda \int_0^R e^{-\lambda t} S(t)x dt \right] \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} e^{-\lambda t}S(t)x + \lim_{R \rightarrow \infty} \lambda \int_0^R e^{-\lambda t} S(t)x dt \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} e^{-\lambda t}S(t)x + \lim_{R \rightarrow \infty} \lambda x \int_0^R e^{-\lambda t} S(t) dt \\ &= 0 + \lambda x \left(\frac{1}{\lambda^2 + 1} \right) = \frac{\lambda x}{\lambda^2 + 1} \end{aligned}$$

Sesuai dengan persamaan (2.30) dan (2.31) diketahui $A = -1$, berarti

$$\frac{\lambda x}{\lambda^2 + 1} = \frac{\lambda x}{\lambda^2 - A}$$

Sehingga

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dS(t)x = \lambda x \cdot \frac{1}{\lambda^2 - A}$$

Karena $R(\lambda^2, A) = \frac{1}{\lambda^2 - A}$ berakibat

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dS(t)x = \lambda x \cdot R(\lambda^2, A) = \lambda R(\lambda^2, A)x$$

dan karena $\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} C(t)x dt = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dS(t)x$ maka

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} C(t)x dt = \lambda R(\lambda^2, A)x$$

Sesuai dengan persamaan (3.2) diperoleh

$$\lambda R(\lambda^2, A)x = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \text{Cos}(t)x dt$$

Jadi, C adalah fungsi kosinus Cos dengan generator A .

3.4 Kajian Operator Pembangkit dalam Al-Qur'an

Operator linier merupakan pemetaan dari dua ruang linier bernorma. Pemetaan atau fungsi merupakan relasi yang menghubungkan tepat satu anggota daerah asal X (domain) ke anggota daerah lawan Y (kodomain). Tentu saja dalam hal ini domain dan kodomainnya adalah ruang linier bernorma, misalnya saja fungsi yang terbentuk antara dua ruang Banach X dan Y .

Operator linier yang dibahas pada skripsi ini adalah operator yang merupakan pembangkit dari fungsi kosinus Cos yang disebut 'operator pembangkit' pada transformasi Laplace. Suatu fungsi cos dibangkitkan dengan

transformasi Laplace sehingga diperoleh fungsi Cos. Nama lain dari operator atau operator linier ini adalah ‘transformasi linier’ atau ‘transformasi’ saja.

Makna transformasi dalam kehidupan sehari-hari sering disamakan dengan makna dari kata ‘perubahan’ atau ‘pergantian’. Perubahan sendiri adalah suatu keadaan dimana kondisi awal dan akhir ‘sesuatu’ itu berbeda. Dari suatu kondisi *A* berubah menjadi kondisi *B* karena suatu sebab tertentu. Contoh untuk masalah transformasi dapat dilihat pada peran Nabi Muhammad SAW dalam menyebarkan agama Islam dan menyampaikan isi Al-Qur’an. Beliau berjuang sedemikian kerasnya untuk menyelamatkan manusia dari kegelapan (*jahiliyah*) menuju jalan yang terang benderang, yaitu agama Islam.

Dalam QS. Ibrahim ayat 1, Allah menjelaskan tentang salah satu tujuan diturunkannya Al-Qur’an kepada umat manusia melalui Nabi SAW, yakni sebagai berikut,

الرَّ كِتَابٌ أَنْزَلْنَاهُ إِلَيْكَ لِتُخْرِجَ النَّاسَ مِنَ الظُّلُمَاتِ إِلَى النُّورِ بِإِذْنِ رَبِّهِمْ إِلَى صِرَاطٍ الْعَزِيزِ
الْحَمِيدِ

Artinya:

Alif, laam raa. (Ini adalah) Kitab yang kami turunkan kepadamu supaya kamu mengeluarkan manusia dari gelap gulita kepada cahaya terang benderang dengan izin Tuhan mereka, (yaitu) menuju jalan Tuhan yang Maha Perkasa lagi Maha Terpuji.

Dalam ayat di atas, terdapat salah satu tujuan Allah menurunkan Al-Qur’an, yakni sebagai *cahaya* yang membimbing manusia dari gelap gulita (kegelapan, kemaksiatan, kekufuran) menuju cahaya terang benderang (agama

Islam) yang penuh keselamatan, perdamaian, dan kasih sayang melalui Nabi Muhammad SAW sebagai utusanNya.

Pada zaman jahiliyah, sebelum Al-Qur'an diturunkan kepada Nabi Muhammad SAW, kondisi masyarakat Arab sangat kacau. Tradisi masyarakatnya sangat buruk. Mereka masih menyembah berhala, gemar mabuk-mabukan, berperang, berjudi, berzina, menjual perempuan layaknya binatang, bahkan para orang tua tega mengubur bayi perempuan mereka hidup-hidup. Keadaan ini pun diperparah dengan kondisi negara Arab yang panas, tandus, dan gersang sehingga masyarakat hidup dalam lingkungan yang sulit dan berperangai keras.

Saat kemaksiatan, kedzaliman, kekufuran, dan kebatilan di negara Arab semakin merajalela, datanglah Nabi SAW membawa wahyu dari Allah SWT untuk menolong mereka menuju jalan yang lebih terang, menuju arah kebenaran. Beliau melewati berbagai hambatan, rintangan, perlawanan, dan pemberontakan, yang bertubi-tubi. Akhirnya, dengan perjuangan dan pengorbanan yang luar biasa, Nabi SAW berhasil menyebarkan ajaran Islam yang penuh kedamaian hingga dapat sampai sekarang.

Perubahan kondisi masyarakat dari zaman jahiliyah menuju agama Islam inilah yang merupakan salah satu dari contoh transformasi dalam kehidupan. Dari suatu kondisi yang buruk berubah menjadi suatu kondisi yang baik.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Dari pembahasan pada Bab III dapat disimpulkan mengenai karakteristik suatu operator A yang merupakan generator dari fungsi kosinus Cos pada transformasi Laplace, yakni jika memenuhi proposisi berikut.

1. Misalkan diberikan fungsi kontinu kuat $\text{Cos} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{L}(X)$.

Pernyataan–pernyataan berikut ekuivalen :

- c. Fungsi Cos adalah fungsi kosinus.
- d. i) $\text{abs}(\text{Cos}) < \infty$.
ii) Terdapat ω dengan $\omega > \text{maks} \{\text{abs}(\text{Cos}), 0\}$.
iii) Terdapat operator A sehingga $(\omega^2, \infty) \subset \rho(A)$ dan

$$\lambda R(\lambda^2, A) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \text{Cos}(t) dt; \quad \lambda > \omega$$

2. Misalkan A adalah operator yang terdefinisi pada ruang Banach X maka pernyataan-pernyataan di bawah ini ekuivalen:

- c. A adalah generator fungsi kosinus.
- d. Terdapat $\omega, M \geq 0$ sedemikian sehingga $(\omega^2, \infty) \subset \rho(A)$ dan

$$\frac{1}{k!} \|(\lambda - \omega)^{k+1} (\lambda R(\lambda^2, A))^{(k)}\| \leq M$$

Untuk setiap $\lambda > \omega$ dan $k \in \mathbb{N}_0$.

4.2 Saran

Penulis sadar penelitian ini masih jauh dari sempurna. Oleh karena itu, penulis berharap penelitian ini dapat dilanjutkan pada pembahasan sifat-sifat operator linier pembangkit dari fungsi kosinus Cos pada transformasi Laplace.



DAFTAR PUSTAKA

- Abdusysykir. 2006. *Ada Matematika dalam Al-Qur'an*. Malang: UIN Malang Press.
- Abdusysykir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press.
- Anonymous. 2011. *Characteristic Function (Convex Analysis)*.
[http://en.wikipedia.org/wiki/Characteristic function %28convex analysis %29](http://en.wikipedia.org/wiki/Characteristic_function%28convex_analysis%29) (diakses tanggal 6 April 2011).
- Arendt, Wolfgang, Charles J. K. Batty, Matthias Hieber, dan Frank Neubrander. 2001. *Vector-valued Laplace Transforms and Cauchy Problems*. Berlin: Birkhauser Verlag.
- Bartle, Robert G dan Sherbert, Donald R. 2000. *Introduction to Real Analysis, 3th Edition*. New York: JohnWiley and Sons.
- Baumgärtel, Hellmut. 1985. *Analytic Perturbation Theory for Matrices and Operators*. Basel: Akademi Verlag Berlin.
- Eckstein, Eugene C, Goldstein, Jerome A, dan Leggas, Mark. 1999. *The Mathematics of Suspensions: Kac Walks and Asymptotic Analyticity*. Fourth Mississippi State Conference on Dierential Equations and Computational Simulations, Electronic Journal of Differential Equations: 44.
- Ghozali, Sumanang Muhtar. 2009. *Ruang Banach*. Disampaikan pada Seminar Nasional Matematika UNJ: Universitas Pendidikan Indonesia. Tanggal 10 Oktober 2009.
- Goffman, Casper dan Pedrick, George. 1974. *First Course In Functional Analysis*. New Delhi: Prentice-Hall.

Kartanegara, Mulyadhi. 2005. *Integrasi Ilmu: Sebuah Rekonstruksi Holistik*. Jakarta: Arasy Mizan Pustaka.

Kato, Tosio. 1976. *Perturbation Theory for Linear Operators*. New York: Springer.

Nagle, R. Kent dan Saff, Edward B. 1993. *Fundamentals of Differential Equations and Boundary Value Problems*. Florida: Addison-Wesley.

Rynne, Bryan P dan Youngson, Martin A. 2008. *Linear Functional Analysis, 2nd edition*. London: Springer.

Qardhawi, Yusuf. 1998. *Al-Qur'an Berbicara tentang Akal dan Ilmu Pengetahuan*. Jakarta: Gema Insani.





**KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang (0341) 551345
Fax. (0341)572533**

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Siti Afiyah Diniati
NIM : 07610054
Fakultas / Jurusan : Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi : Operator Linier Pembangkit dari Fungsi Kosinus Cos pada Transformasi Laplace
Dosen Pembimbing I : Hairur Rahman, M.Si
Dosen Pembimbing II : Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag

No	Tanggal	Materi Konsultasi	Tanda Tangan
1.	15 Juli 2010	Konsultasi Masalah	1.
2.	19 Oktober 2010	Konsultasi Bab I	2.
3.	25 Oktober 2010	Konsultasi Bab II	3.
4.	17 November 2010	Revisi Bab I dan II	4.
5.	29 November 2010	Revisi Bab I dan II	5.
6.	30 November 2010	Konsultasi Keagamaan	6.
7.	29 Januari 2011	Revisi Bab II dan III	7.
8.	14 Februari 2011	Revisi Bab II	8.
9.	16 Februari 2011	Revisi Bab III	9.
10.	18 Februari 2011	Revisi Bab II dan III	10.
11.	21 Februari 2011	Revisi Bab III	11.
12.	2 Maret 2011	Revisi Bab III	12.
13.	2 Maret 2011	Revisi Keagamaan	13.
14.	10 Maret 2011	ACC Bab I, II, III dan IV	14.
15.	12 Maret 2011	Revisi Keagamaan	15.
16.	12 Maret 2011	ACC Keagamaan	16.
17.	12 Maret 2011	ACC Keseluruhan	17.

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001