

**BILANGAN CLIQUE DAN FAKTORISASI PADA PERKALIAN GRAF
KOMPLIT**

SKRIPSI

Oleh:

**LUTFIANA FATKHIYAH
NIM.06510012**



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2010**

**BILANGAN CLIQUE DAN FAKTORISASI PADA PERKALIAN GRAF
KOMPLIT**

SKRIPSI

**Diajukan kepada:
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)**

Oleh:

**LUTFIANA FATKHIYAH
NIM. 06510012**

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2010**

**BILANGAN CLIQUE DAN FAKTORISASI PADA PERKALIAN GRAF
KOMPLIT**

SKRIPSI

Oleh:

**LUTFIANA FATKHIYAH
NIM. 06510012**

**Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji:
Tanggal: 30 juni 2010**

Pembimbing I,

Pembimbing II,

**Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001**

**Dr. Ahmad Barizi, M.A
NIP. 19731212 199803 1 001**

**Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika**

**Abdussakir, M.Pd
NIP.19751006 200312 1 001**

**BILANGAN CLIQUE DAN FAKTORISASI PADA PERKALIAN GRAF
KOMPLIT**

SKRIPSI

Oleh:

**Lutfiana Fatkhiyah
NIM.06510012**

**Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)**

Tanggal: 21 Juli 2010

Susunan Dewan Penguji

Tanda Tangan

Penguji Utama	: Sri Harini, M.Si NIP.19731014 200112 2 002	(.....)
Ketua Penguji	: Wahyu Henky Irawan, M.Pd NIP.19710420 200003 1 003	(.....)
Sekretaris Penguji	: Abdussakir, M.Pd NIP. 19751006 200312 1 001	(.....)
Anggota Penguji	: Dr. Ahmad Barizi, M.A NIP. 19731212 199803 1 001	(.....)

**Mengetahui dan Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika**

**Abdussakir, M.Pd
NIP.19751006 200312 1 001**

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Lutfiana Fatkhiyah
NIM : 06510012
Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Penelitian : Bilangan Clique dan Faktorisasi pada Perkalian Graf Komplit

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambil alihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 30 Juni 2010
Yang membuat pernyataan,

Lutfiana Fatkhiyah
NIM.06510012

MOTTO

pelajarilah Ilmu, karena mempelajarinya atas nama Allah adalah khashyah,
menuntutnya adalah ibadah,
mempelajarinya adalah Tasbih,
mencarinya adalah Jihad,
mengajarkannya kepada orang yang tidak mengetahui adalah shadaqah,
menyerahkan kepada ahlinya adalah Taqarrub.
Ilmu adalah teman dekat dalam kesendirian dan sahabat dalam kesunyian.

(Muadz bin Jabal Radhiyallahu anhu)

“Bulatkan niat, lakukan usaha, siapkan hati menerima yang terbaik
menurut Allah SWT”

(Arvie)

PERSEMBAHAN

**Karya ini tidaklah dapat terwujud tanpa ridha dari Allah SWT.
Terimakasih ya Allah dengan segala keterbatasan hamba ini, Engkau beri
kesempatan untuk mempersembahkan karya yang sederhana ini.**

**Dengan iringan do'a dan rasa syukur yang teramat besar karya ini penulis
persembahkan sebagai cinta kasih dan bakti penulis
untuk**

Ibunda Dewi Sulisningati dan Ayanda Akhmad Fauzi,

**Terimakasih atas segala ketulusan do'a, nasehat, kasih sayang dan slalu
menjadi motivator serta penyemangat dalam setiap langkah penulis untuk
terus berproses menjadi insan kamil.**

**Adik-adik yang telah menjadikan hidup penulis lebih bermakna dan penuh
warna**

Semoga karya ini dapat menjadi motivator bagi kalian

(Akhmad Zaki Mubarok, Nazmatuzzuhro, Muhammad Ja'fak Shodiq)

Penulis

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb

Alhamdulillahirobbil'alamiin... Tiada kata yang lebih pantas yang dapat penulis ungkapkan selain puji syukur kehadirat Allah SWT yang telah memberikan rahmat, karunia dan Ridho-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini tepat pada waktunya.

Shalawat serta salam semoga tetap tercurah limpahkan kepada Nabi Muhammad SAW yang telah mengajarkan tentang arti kehidupan yang sesungguhnya.

Penulisan skripsi ini dapat terselesaikan berkat jasa-jasa, motivasi dan bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis sampaikan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, S.U, D.Sc selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang, sekaligus pembimbing penulis dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Atas bimbingan, arahan, saran, motivasi dan kesabarannya, sehingga penulis

dapat menyelesaikan ini dengan baik. Penulis sampaikan *Jazakumullah Ahsanal Jaza'*.

4. Dr. A. Barizi M.A selaku pembimbing penulis dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Atas bimbingan, arahan, saran, motivasi dan kesabarannya, sehingga penulis dapat menyelesaikan ini dengan baik. Penulis sampaikan *Jazakumullah Ahsanal Jaza'*.
5. Seluruh dosen Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang, yang telah mendidik, membimbing, mengajarkan dan mencurahkan ilmu-ilmunya kepada penulis. Semoga Allah membalas amal kebaikan beliau.
6. Dewi Sulisningati dan Akhmad Fauzi selaku kedua orang tua penulis, yang telah mencurahkan cinta dan kasih-sayang teriring do'a, motivasi, dan materi, sehingga penulis selalu optimis dalam menggapai kesuksesan hidup.
7. Wahyu Henky Irawan, M.Pd sekeluarga yang telah memberi dukungan moril, maupun materiil serta menyediakan sarana dan prasarana sehingga penulis dapat merampungkan skripsi ini.
8. Adik Ahmad Zaki Mubarak, adik Nazmatuzzuhro, adik Muhammad Ja'far Shodiq. *Syukron* atas bantuan, keceriaan, do'a dan motivasinya.
9. *Akhi* Udin, Terima kasih atas keikhlasannya dalam membantu, memotivasi dan dukungan selama ini.
10. Sahabat-sahabat seperjuangan di jurusan matematika khususnya angkatan 2006 dikampus tercinta yang telah memberikan keceriaan tersendiri dalam hidupku. Terimakasih atas segala pengalaman berharga dan kenangan terindah yang telah terukir.

11. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu-persatu, yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini.

Semoga karya ilmiah yang berbentuk skripsi ini dapat bermanfaat dan berguna. *Amin ya Robbal 'Alamiin....*

Wassalamu 'alaikum Wr. Wb.

Malang, 30 Juni 2010

Penulis



DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	
MOTTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR.....	i
DAFTAR ISI.....	iv
DAFTAR GAMBAR	vi
DAFTAR TABEL	ix
ABSTRAK	x
BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	4
1.3 Tujuan Penelitian.....	4
1.4 Batasan Masalah.....	5
1.5 Manfaat Penelitian.....	5
1.6 Metode Penelitian	6
1.7 Sistematika Penulisan.....	7
BAB II KAJIAN PUSTAKA	
2.1 Graf	
2.1.1 Definisi Graf.....	9
2.1.2 Adjacent dan Incident.....	11
2.1.3 Subgraf	12
2.1.4 Derajat Suatu Titik	14
2.1.5 Graf Komplit	15
2.1.6 Graf Regular	19
2.2 Graf Terhubung	20
2.3 Operasi pada Graf.....	22

2.3.1 Gabungan Dua Graf	22
2.3.2 Penjumlahan Graf.....	22
2.3.3 Perkalian Graf	23
2.4 Matching	25
2.5 Faktorisasi	26
BAB III PEMBAHASAN	
3.1 Clique pada Perkalian Graf Komplit $K_n \times K_n \times \dots \times K_n$ Sebanyak m Faktor.	28
3.2 Faktorisasi pada Perkalian Graf Komplit $K_n \times K_n \times \dots \times K_n$ Sebanyak m Faktor.	36
BAB IV PENUTUP	
4.1 Kesimpulan.....	87
4.2 Saran	87
DAFTAR PUSTAKA	

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Graf dan Multigraf	10
Gambar 2.2 Representasi Sisi Rangkap Terhadap Proses Ibadah Sa'i	10
Gambar 2.3 <i>Adjacent</i> dan <i>Incident</i> pada Graf	11
Gambar 2.4 Representasi <i>Adjacent</i> Terhadap Proses Ibadah Sa'i	11
Gambar 2.5 Graf G dengan <i>Order</i> 5 dan <i>Size</i> 6	12
Gambar 2.6 Graf Terhubung G	13
Gambar 2.7 Graf H dan Graf K	13
Gambar 2.8 Graf G dengan Derajat Titik	14
Gambar 2.9 Graf G.....	15
Gambar 2.10 Beberapa Macam Graf Komplit	15
Gambar 2.11 Representasi Graf Komplit.....	17
Gambar 2.12 Clique pada Sebuah Graf	18
Gambar 2.13 Representasi Bilangan Cliuqe	19
Gambar 2.14 Graf Regular-3 Berorder 6	20
Gambar 2.15 <i>Trail</i> dan <i>Path</i> pada Graf G.....	21
Gambar 2.16 Graf <i>Connected</i> dan <i>Disconnected</i>	21
Gambar 2.17 Gabungan Graf $2K_1$, $3K_2$, $1K_{(1,3)}$	22
Gambar 2.18 Penjumlahan Dua Graf	23
Gambar 2.19 Graf G_1 dan Graf G_2	23
Gambar 2.20 Graf Hasil Perkalian Graf G_1 dan Graf G_2	24
Gambar 2.21 Graf yang Memiliki <i>Matching</i>	26
Gambar 2.22 Graf G Beserta Faktor-faktornya.....	27
Gambar 3.1 Graf Komplit Dua (K_2).....	28
Gambar 3.2 Graf Hasil Kali $K_2 \times K_2$	28
Gambar 3.3 Graf Komplit Tiga (K_3).....	29
Gambar 3.4 Graf Hasil Kali $K_3 \times K_3$	29
Gambar 3.5 Graf Komplit Empat (K_4).....	30
Gambar 3.6 Graf Hasil Kali $K_4 \times K_4$	30
Gambar 3.7 Graf Komplit Lima (K_5).....	31

Gambar 3.8 Graf Hasil Kali $K_5 \times K_5$	32
Gambar 3.9 Graf Komplit Dua (K_2)	36
Gambar 3.14 Gambar $G_1 = K_2$ dan $G_2 = K_2$	36
Gambar 3.15 Graf Hasil Kali $K_2 \times K_2$	36
Gambar 3.16 Faktor-1 dari Graf Hasil Perkalian $K_2 \times K_2$	37
Gambar 3.17 Faktor-2 dari Graf Hasil Perkalian $K_2 \times K_2$	37
Gambar 3.18 Gambar $G_1 = K_2 \times K_2$ dan $G_2 = K_2$	38
Gambar 3.19 Graf Hasil Kali $K_2 \times K_2 \times K_2$	38
Gambar 3.20 Faktor-1 dari Graf Hasil Perkalian $K_2 \times K_2 \times K_2$	39
Gambar 3.21 Faktor-3 Graf Hasil Kali $K_2 \times K_2 \times K_2$	39
Gambar 3.22 Gambar $G_1 = K_2 \times K_2 \times K_2$ dan $G_2 = K_2$	40
Gambar 3.23 Graf Hasil Kali $K_2 \times K_2 \times K_2 \times K_2$	40
Gambar 3.24 Faktor-1 dari Graf Hasil Perkalian $K_2 \times K_2 \times K_2 \times K_2$	41
Gambar 3.25 Faktor-2 dari Graf Hasil Perkalian $K_2 \times K_2 \times K_2 \times K_2$	42
Gambar 3.26 Faktor-4 dari Graf Hasil Perkalian $K_2 \times K_2 \times K_2 \times K_2$	42
Gambar 3.27 Komplit Tiga (K_3)	44
Gambar 3.28 Faktor-2 dari Graf K_3	44
Gambar 3.29 Gambar $G_1 = K_3$ dan $G_2 = K_3$	44
Gambar 3.30 Graf Hasil Kali $K_3 \times K_3$	45
Gambar 3.31 Faktor-2 dari Graf Hasil Perkalian $K_3 \times K_3$	45
Gambar 3.32 Faktor-4 dari Graf Hasil Perkalian $K_3 \times K_3$	46
Gambar 3.33 Gambar $G_1 = K_3 \times K_3$ dan $G_2 = K_3$	46
Gambar 3.34 Graf Hasil Kali $K_3 \times K_3 \times K_3$	47
Gambar 3.35 Faktor-2 dari Graf Hasil Perkalian $K_3 \times K_3 \times K_3$	48
Gambar 3.36 Faktor-6 dari Graf Hasil Perkalian $K_3 \times K_3 \times K_3$	49
Gambar 3.37 Gambar $G_1 = K_3 \times K_3 \times K_3$ dan $G_2 = K_3$	49
Gambar 3.38 Graf Hasil Kali $K_3 \times K_3 \times K_3 \times K_3$	50
Gambar 3.39 Faktor-2 dari Graf Hasil Perkalian $K_3 \times K_3 \times K_3 \times K_3$	52
Gambar 3.40 Faktor-4 dari Graf Hasil Perkalian $K_3 \times K_3 \times K_3 \times K_3$	53
Gambar 3.41 Faktor-6 dari Graf Hasil Perkalian $K_3 \times K_3 \times K_3 \times K_3$	54
Gambar 3.42 Graf Komplit Empat (K_4)	56

Gambar 3.43 Faktor-3 dari Graf K_4	56
Gambar 3.44 Gambar $G_1 = K_4$ dan $G_2 = K_4$	57
Gambar 3.45 Graf Hasil Kali $K_4 \times K_4$	57
Gambar 3.46 Faktor-1 dari Graf Hasil Perkalian $K_4 \times K_4$	58
Gambar 3.47 Faktor-2 dari Graf Hasil Perkalian $K_4 \times K_4$	59
Gambar 3.48 Faktor-3 dari Graf Hasil Perkalian $K_4 \times K_4$	60
Gambar 3.49 Faktor-6 dari Graf Hasil Perkalian $K_4 \times K_4$	60
Gambar 3.50 Gambar $G_1 = K_4 \times K_4$ dan $G_2 = K_4$	61
Gambar 3.51 Graf Hasil Kali $K_4 \times K_4 \times K_4$	62
Gambar 3.52 Salah Satu Faktor-1 dari Graf Hasil Perkalian $K_4 \times K_4 \times K_4$...	62
Gambar 3.53 Faktor-3 dari Graf Hasil Perkalian $K_4 \times K_4 \times K_4$	63
Gambar 3.54 Faktor-9 dari Graf Hasil Perkalian $K_4 \times K_4 \times K_4$	64
Gambar 3.55 Komplit Lima (K_5)	66
Gambar 3.56 Faktor-2 dari Graf K_5	66
Gambar 3.57 Faktor-4 dari Graf K_5	67
Gambar 3.58 Gambar $G_1 = K_5$ dan $G_2 = K_5$	67
Gambar 3.59 Graf Hasil Kali $K_5 \times K_5$	67
Gambar 3.60 Faktor-2 dari Graf Hasil Perkalian $K_5 \times K_5$	68
Gambar 3.61 Faktor-4 dari Graf Hasil Perkalian $K_5 \times K_5$	69
Gambar 3.62 Faktor-8 dari Graf Hasil Perkalian $K_5 \times K_5$	70
Gambar 3.63 Gambar $G_1 = K_5 \times K_5$ dan $G_2 = K_5$	70
Gambar 3.64 Graf Hasil Kali $K_5 \times K_5 \times K_5$	71
Gambar 3.65 Faktor-12 dari Graf Hasil Perkalian $K_5 \times K_5 \times K_5$	72
Gambar 3.66 Graf Hasil Kali $K_4 \times K_4$	75
Gambar 3.67 Faktor-1 dari Graf Hasil Perkalian $K_4 \times K_4$	76
Gambar 3.68 Faktor-2 dari Graf Hasil Perkalian $K_4 \times K_4$	77
Gambar 3.69 Faktor-3 dari Graf Hasil Perkalian $K_4 \times K_4$	78
Gambar 3.70 Faktor-6 dari Graf Hasil Perkalian $K_4 \times K_4$	79
Gambar 3.71 Graf Hasil Kali $K_3 \times K_3$	82
Gambar 3.72 Faktor-2 dari Graf $K_3 \times K_3$	83
Gambar 3.73 Faktor-4 dari Graf $K_3 \times K_3$	84

DAFTAR TABEL

Tabel 3.1 Tabel Clique pada Perkalian Graf ($K_n \times K_n$).....	32
Table 3.2 Tabel Faktorisasi pada Graf Hasil Perkalian Graf Komplit 2	43
Table 3.3 Tabel Faktorisasi pada Graf Hasil Perkalian Graf Komplit 3	55
Table 3.4 Tabel Faktorisasi pada Graf Hasil Perkalian Graf Komplit 4	65
Table 3.5 Tabel Faktorisasi pada Graf Hasil Perkalian Graf Komplit 5	73
Table 3.6 Tabel Faktorisasi pada Graf Hasil Perkalian Graf Komplit K_n	74

ABSTRAK

Fatkhiyah, Lutfiana. 2010. **Bilangan Clique dan Faktorisasi pada Perkalian Graf Komplit**. Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Pembimbing: (I) Abdussakir, M.Pd
(II) Dr. Ahmad Barizi M.A

Kata Kunci: Perkalian graf, bilangan *clique*, faktorisasi, graf komplit.

Salah satu topik permasalahan dalam graf adalah bilangan clique dan faktorisasi dalam suatu graf. Bilangan *clique* merupakan order subgraf komplit terbesar dari suatu graf G , sedangkan faktorisasi pada graf G merupakan penjumlahan sisi dari faktor-faktor yang dimiliki graf G . Graf mempunyai jenis yang bermacam-macam, salah satunya yaitu graf komplit. Dalam penelitian ini bilangan *clique* dan faktorisasi tidak pada graf komplit yang bersifat tunggal akan tetapi dikembangkan pada perkalian graf komplit. Perkalian graf $G_1 \times G_2$ merupakan operasi pada graf yang mempunyai himpunan titik $V(G) = V(G_1) \times V(G_2)$ yang terhubung apabila $u_1 = v_1$ dan $[u_2, v_2] \in E(G_2)$ atau $u_2 = v_2$ dan $[u_1, v_1] \in E(G_1)$.

Permasalahan yang diangkat dalam penelitian ini adalah bagaimana menentukan bilangan clique dan faktorisasi pada perkalian graf komplit. Dari definisi bilangan clique dan faktorisasi akan diberikan beberapa contoh perkalian graf komplit. *Clique* dan faktorisasi pada graf hasil perkalian tersebut diamati sehingga diperoleh bentuk umum dari bilangan *clique* pada perkalian graf komplit dan faktorisasi pada perkalian graf komplit, yang selanjutnya dinyatakan sebagai konjektur yang dilengkapi dengan bukti-bukti.

Berdasarkan hasil penelitian diperoleh bilangan *clique* pada perkalian graf (K_n) sebanyak m kali adalah n . Graf hasil perkalian graf komplit (K_n) sebanyak m kali dapat dekomposisikan dengan menggunakan faktor- i dengan i adalah faktor bilangan positif dari $(n - 1) \times m$ untuk n genap dan untuk n ganjil i adalah faktor bilangan genap positif dari $(n - 1) \times m$. Penulis menyarankan untuk mengembangkan penelitian dengan mengkaji pada perkalian graf komplit yang heterogen yakni $(K_n \times K_m \times \dots \times K_z)$ sebanyak m faktor

ABSTRAK

Fatkhiyah, Lutfiana. 2010. Clique Numbers and Factorization on the Cartesian product of Complete Graphs. Thesis. Mathematics departement Faculty of Science and Technology The State of Islamic University Maulana Malik Ibrahim Malang.
 Advisor : (I) Abdussakir, M. Pd
 (II) Dr. Ahmad Barizi M.A

Keywords: Cartesian product, clique numbers, factorization, graph complete.

One topic is the problem in graph clique numbers and factorization in a graph. Clique numbers is a largest order of complete subgraph of graph G . A factorization of graph G is the sum of edges of factors from graf G . Graf has a variety of types, one of that is complete graph. In this tesis clique numbers and factorization is not on a single graph but on Cartesian product of complete graph. Cartesian product of graf $G = G_1 \times G_2$ is an operation on graphs that have vertex set $V(G) = V(G_1) \times V(G_2)$ connected if $u_1 = v_1$ and $[u_2, v_2] \in E(G_2)$ or $u_2 = v_2$ and $[u_1, v_1] \in E(G_1)$.

The problem in this research is how to determine the clique numbers and factorization on Cartesian product of complete graph. From the definition of clique numbers and factorization will be given some examples in order to obtain the general form of the clique number of graphs on the Cartesian product and factorization on Cartesian product of complete graph, writer will give some examples, so can found the general shape from clique numbers on Cartesian product of complete graph and factorization on Cartesian product of complete graph.

Based on this examination, the number clique on Cartesian product of complete graphs (K_n) counted m times is n . and factorization on Cartesian product of complete graph (K_n) m times as much as can be factorized by using the factor- i with i is a positive number of factor $(n-1) \times m$ for n even, and n odd i is an even number of positive factor of $(n-1) \times m$. The author recommends to expand research by reviewing the complete graph on a heterogeneous multiplication $(K_n \times K_m \times \dots \times K_z)$ of m factors.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Kemajuan dan kemajemukan di era globalisasi tentunya disertai dengan semakin kompleksnya permasalahan yang ada pada kehidupan sehari-hari. Banyaknya permasalahan dalam kehidupan sehari-hari mendorong manusia untuk mencari solusi yang mampu mendorong berkembangnya ilmu pengetahuan dan teknologi. Matematika adalah salah satu ilmu yang banyak memberikan dasar bagi berkembangnya ilmu pengetahuan dan teknologi. Matematika sangat berpengaruh dalam berkembangnya ilmu-ilmu yang lainnya. Misalnya dalam ilmu fisika, biologi, dan ilmu-ilmu yang lain.

Pada hakekatnya, seluruh yang ada pada alam semesta memuat konsep-konsep yang ada pada matematika. Allah menciptakan semesta beserta isinya dengan ukuran yang cermat dan teliti. Penciptaan bumi, bulan dan seisi galaksi tentunya sudah dengan perhitungan yang sangat matang, hal ini dapat dilihat dari tersusunnya benda-benda tersebut dengan rapi menurut orbitnya sehingga tidak saling bertabrakan. Semua yang ada di alam ini, ada hitungannya, ada rumusnya atau ada teoremanya, dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang. Allah berfirman dalam surat Al-Qamar (54) ayat 49 sebagai berikut:

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَاهُ بِقَدَرٍ ﴿٤٩﴾

“Sesungguhnya kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran”

Selain itu, firman Allah di atas juga dipertegas dengan surat Al-Furqan (25) ayat 2:

الَّذِي لَهُ مُلْكُ السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضِ وَلَمْ يَتَّخِذْ وَلَدًا وَلَمْ يَكُنْ لَهُ شَرِيكٌ فِي الْمُلْكِ وَخَلَقَ كُلَّ شَيْءٍ فَقَدَرَهُ تَقْدِيرًا ﴿٢﴾

Artinya:

” Yang kepunyaan-Nya-lah kerajaan langit dan bumi, dan dia tidak mempunyai anak, dan tidak ada sekutu bagiNya dalam kekuasaan(Nya) dan dia telah menciptakan segala sesuatu, dan dia menciptakan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya”

Maka tidaklah salah jika dikatakan bahwa Allah adalah Mahamatematis. (Abdussyakir, 2007 : 79-80). Pada hakikatnya, Allah adalah sebagai pengatur semua yang ada di alam semesta, ahli matematika atau fisika dan para ilmuwan lain adalah sebagai perantara dalam penemuan-penemuan dalam perkembangan ilmu pengetahuan. Para ahli matematika tidak membuat rumus sedikitpun, tetapi mereka hanya menemukan rumus atau teorema tersebut.

Salah satu cabang ilmu matematika yang ditemukan oleh seorang matematikawan Swiss, L. Euler adalah teori graf. Teori graf merupakan salah satu ilmu yang berkembang pesat, bahkan dalam perkembangannya dapat disejajarkan dengan ilmu aljabar yang terlebih dahulu berkembang.

Teori graf sebenarnya sangat sederhana untuk dipelajari, karena dapat disajikan sebagai titik (*verteks*) dan garis (*edge*). Teori graf banyak dimanfaatkan dalam kehidupan sehari-hari. Misalnya dalam pembuatan trayek perjalanan angkutan kota, pengaturan jaringan telepon atau listrik dan lain sebagainya.

Meskipun pokok bahasan dari topik-topik teori graf sangat sederhana tetapi isi didalamnya tidaklah sesederhana itu. Kerumitan demi kerumitan, masalah demi

masalah selalu ada dan bahkan sampai saat ini masih ada masalah yang belum terpecahkan (R.Gunawan S, 2002: 1). Banyak topik-topik bahasan teori graf yang belum terpecahkan membuat para ilmuwan yang ingin menggunakan teori atau teorema tentang bahasan tersebut menjadi terhambat, karena tidak mungkin menggunakan suatu ilmu yang belum jelas kebenarannya. Hal ini dijelaskan dalam firman Allah surat Al-Isra' (17) ayat 36 yang berbunyi:

وَلَا تَقْفُ مَا لَيْسَ لَكَ بِهِ عِلْمٌ

Artinya:

“Dan janganlah kamu mengikuti apa yang kamu tidak mempunyai pengetahuan tentangnya.”

Benar tidaknya suatu ilmu pengetahuan tentunya perlu adanya pembuktian agar dapat dipertanggung jawabkan kebenarannya. Hal ini ditegaskan Allah dalam firmanNya surat Al-Baqarah (1) ayat 111:

قُلْ هَاتُوا بُرْهَانَكُمْ إِن كُنْتُمْ صَادِقِينَ

Artinya:

“ Tunjukkanlah bukti kebenaranmu jika kamu adalah orang yang benar “.

Pembuktian dalam ilmu matematika dapat dilakukan dalam berbagai cara, misalkan dengan cara Induksi, kontradiksi dan lain-lain.

Seiring dengan perkembangan teori tentang graf, jenis-jenis graf pun semakin banyak. Dimulai dari graf sederhana, graf ganda dan hingga ditemukannya graf komplit. Suatu graf komplit didefinisikan sebagai graf dengan setiap pasang titik yang berbeda dihubungkan oleh satu sisi (Purwanto, 1998: 21). Pada suatu graf G , order maksimum diantara subgraf komplit di G disebut clique, yang dinyatakan dengan $\omega(G)$. Graf komplit merupakan penggabungan atau hasil penjumlahan

dari beberapa graf yang merupakan faktor-faktor dari graf komplit tersebut. Karena graf komplit mewakili graf secara umum, sehingga penulis ingin meneliti clique dan faktorisasi pada graf komplit. Akan tetapi, pembahasan graf komplit yang tunggal sudah ada beberapa peneliti yang membahasnya, maka peneliti mengembangkannya dengan menggunakan graf hasil perkalian graf komplit. Perkalian pada graf pada penelitian-penelitian sebelumnya sangat jarang ditemui, padahal masih banyak bahasan yang dapat dikembangkan dari perkalian graf, antara lain bahasan mengenai bilangan clique dan faktorisasi dalam perkalian graf. Berdasarkan latar belakang di atas maka penulis tertarik menulis tentang **“Bilangan Clique dan Faktorisasi pada Perkalian Graf Komplit”**.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas dapat ditarik rumusan masalah yang akan dibahas dalam skripsi ini adalah:

1. Berapa bilangan clique pada perkalian graf komplit $(K_n \times K_n \times \dots \times K_n)$ sebanyak m faktor ?
2. Faktor apa yang dimiliki dan berapa banyak faktor tersebut pada graf hasil perkalian graf komplit $(K_n \times K_n \times \dots \times K_n)$ sebanyak m faktor?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas maka tujuan skripsi ini adalah:

1. Mengetahui nilai bilangan clique pada perkalian graf komplit $(K_n \times K_n \times \dots \times K_n)$ sebanyak m faktor
2. Mengetahui faktor dan banyaknya faktor yang dimiliki graf hasil perkalian graf komplit $(K_n \times K_n \times \dots \times K_n)$ sebanyak m faktor.

1.4 Batasan Masalah

Agar pembahasan pada skripsi ini tidak meluas maka dalam penelitian ini penulis membatasi objek kajian pada perkalian graf komplit K_n sebanyak m faktor dengan $m \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Hal ini dikarenakan pada graf komplit 1 (K_1) tidak memiliki sisi sedangkan menurut definisi perkalian graf salah satu unsur yang perlu diketahui adalah sisi pada graf yang akan dikalikan.

1.5 Manfaat Penelitian

Hasil penelitian ini diharapkan dapat bermanfaat bagi:

1. Bagi Penulis

Penelitian ini merupakan kesempatan bagi penulis untuk menambah informasi dan memperluas wawasan pengetahuan tentang teori-teori yang diterima di bangku kuliah khususnya tentang teori graf.

2. Bagi Pembaca

Sebagai bahan untuk menambah khasanah keilmuan yang dapat dikembangkan. Skripsi ini juga diharapkan dapat menjadi rujukan untuk penelitian yang akan datang.

3. Bagi Lembaga

Sebagai tambahan bahan pustaka tentang graf dan sebagai tambahan rujukan untuk materi kuliah.

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode literatur kepustakaan. Metode penelitian kepustakaan yaitu penelitian yang dilakukan

terhadap beberapa literatur yang berhubungan dengan topik bahasan yang bertujuan untuk mengumpulkan data dan informasi (Hasan, 2002:45).

Langkah-langkah yang akan dilakukan dalam penelitian ini adalah:

1. Merumuskan masalah

Sebelum peneliti melakukan penelitian, terlebih dahulu peneliti menyusun rencana penelitian dari suatu masalah tentang clique dan faktorisasi pada perkalian graf.

2. Mengumpulkan data

Peneliti mengumpulkan data yang berupa data primer dan data sekunder. Data primer dalam penelitian ini diperoleh dari hasil pengamatan langsung yang dilakukan penulis berupa gambar graf, banyak sisi, banyak titik, bilangan clique dan faktor serta banyaknya faktor yang dimiliki graf hasil perkalian graf komplit ($K_n \times K_n \times \dots \times K_n$) sebanyak m faktor. Sedangkan data sekunder yang digunakan dalam penelitian ini berupa definisi, teorema, sifat-sifat graf dan lain-lain, dari beberapa literatur antara lain buku-buku, dokumen yang ada, skripsi-skripsi sebelumnya, dan lain-lain.

3. Menganalisis data

Langkah-langkah yang diambil untuk menganalisis data dalam penulisan ini adalah :

1. Menentukan bilangan clique pada beberapa contoh graf hasil perkalian graf komplit.
2. Mengamati pola bilangan clique yang terdapat pada beberapa contoh sebelumnya.

3. Menentukan konjektur tentang bilangan clique pada perkalian graf komplit.
4. Konjektur tentang bilangan clique pada perkalian graf komplit tersebut dinyatakan sebagai kalimat matematis yang dibuktikan.
5. Menentukan faktorisasi pada beberapa contoh graf hasil perkalian graf komplit.
6. Mengamati pola faktorisasi yang terdapat pada beberapa contoh sebelumnya.
7. Menentukan konjektur tentang pola faktorisasi pada perkalian graf komplit.
8. Konjektur tentang faktorisasi pada perkalian graf komplit tersebut dinyatakan sebagai kalimat matematis yang dibuktikan.
4. Membuat kesimpulan
Kesimpulan dalam penelitian ini berupa kajian dan teorema-teorema dari hasil pembahasan yang berlaku untuk bilangan clique dan faktorisasi pada perkalian (*Cartesian product*) graf komplit $(K_n \times K_n \times \dots \times K_n)$ sebanyak m faktor.

1.7 Sistematika Penulisan

Penulisan skripsi ini akan dibagi dalam beberapa bab. Susunan pembagian bab-bab tersebut adalah:

BAB I: Pendahuluan. Bab ini membahas latar belakang, rumusan masalah dan tujuan, pembatasan masalah, metode penulisan dan sistematika penulisan.

BAB II: Dasar teori. Bab ini berisi tentang dasar-dasar teori yang akan digunakan pada bab-bab selanjutnya seperti definisi graf, graf komplit, clique, faktorisasi serta teori-teori lainnya yang membantu.

BAB III: Pembahasan. Bab ini membahas mengenai clique dan faktorisasi yang terbentuk dari graf perkalian graf komplit K_n sebanyak m kali.

BAB IV: Kesimpulan. Bab ini berisi kesimpulan dari materi-materi yang telah dibahas pada bab sebelumnya.



BAB II KAJIAN PUSTAKA

2.1 Graf

2.1.1 Definisi Graf

Graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang banyak digunakan untuk menggambarkan berbagai macam struktur yang ada. Graf menggambarkan struktur tersebut dalam beberapa objek yang dinyatakan dengan noktah, bulatan atau titik. Sedangkan hubungan antara objek dinyatakan dengan garis.

Secara matematis graf didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 1:

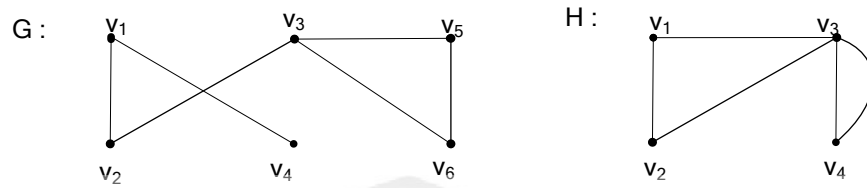
Graf (*Graf*) G adalah pasangan (V, E) dengan V adalah himpunan yang tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut titik (*vertex*), dan E himpunan (*mungkin kosong*) pasangan tidak berurutan dari titik berbeda di V yang disebut sisi (*edge*). Himpunan titik di graf G dilambangkan dengan $V(G)$ dan himpunan sisi di graf G dilambangkan dengan $E(G)$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:4).

Contoh:

Misalkan: $G(V, E)$ dengan $V(G) : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$E(G) : \{(1,2); (1,4); (2,3); (3,5); (3,6); (5,6)\}$$

Jadi graf G digambarkan sebagai berikut:



Gambar 2.1. Graf dan Multigraf

Berdasarkan definisi di atas, maka suatu graf sederhana tidak boleh mempunyai sisi rangkap (*multiple edges*) dan *loop*. Sisi rangkap dari suatu graf adalah jika dua titik yang dihubungkan oleh lebih dari satu sisi. Sedangkan yang disebut dengan *loop* adalah suatu sisi yang menghubungkan suatu titik dengan dirinya sendiri (Suryanto, 1986:14). Graf yang membolehkan adanya sisi rangkap disebut multigraf (gambar 2.1 pada multigraf H) sedangkan graf yang membolehkan sisi rangkap dan *loop* disebut pseudograf (Abdussakir, 2009:8)

Menurut konteks Islam sisi rangkap dapat direpresentasikan pada ibadah Sa'i. Secara harfiah Sa'i diartikan sebagai usaha. Sedangkan arti syari'ahnya pada ibadah haji dan umrah adalah berbolak-balik sebanyak 7 kali antara bukit Shafa dan Marwah demi melaksanakan perintah Allah. Ibadah sa'i merupakan salah satu rukun haji dan umrah yang harus dikerjakan agar haji dan umrah dapat sah.



Gambar 2.2. Representasi Sisi Rangkap terhadap Proses Ibadah Sa'i

2.1.2 Adjacent dan Incident

Definisi 2

Sisi $e = (u, v)$ dikatakan menghubungkan titik u dan v . Jika $e = (u, v)$ adalah sisi di graf G , maka u dan v disebut terhubung langsung (*adjacent*), u dan e serta v dan e disebut terkait langsung (*incident*) (Chartrand dan Lesniak, 1986:4).

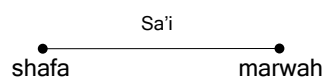
Sesuai definisi di atas, maka dapat diilustrasikan sebagai berikut:



Gambar 2.3. Adjacent dan Incident pada Graf

Sisi $e = (u, v)$ yang menghubungkan titik u dan v . Karena $e = (u, v)$ sisi di G , maka u dan v disebut terhubung langsung (*adjacent*) sedangkan e dan u serta e dan v disebut terkait langsung (*incident*).

Umat Islam pasti tidak asing lagi dengan mana dua bukit yang sangat terkenal yakni bukit Shafa dan Marwah. Dua bukit tersebut berperan penting dalam ibadah haji. Ibadah haji merupakan rukun islam yang terakhir. Dalam ibadah haji, diwajibkan melakukan Sa'i. Bukit Shafa dan Marwa merupakan dua tempat yang diantara tempat tersebut orang Islam berlari-lari kecil untuk melakukan Sa'i. Hal ini dapat digambarkan dengan mengintrepresentasikan dua bukit tersebut yaitu Shafa dan Marwah sebagai dua titik yang adjacent (direpresentasikan dengan melakukan sa'i).

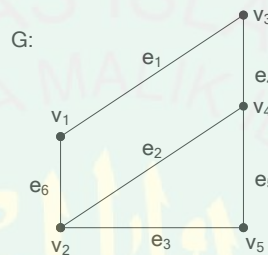


Gambar 2.4. Representasi *Adjacent* terhadap Proses Ibadah

Definisi 3

Banyaknya titik di V disebut order dari graf G dan dilambangkan dengan $p(G)$, dan banyaknya sisi di E disebut size dari graf G dan dilambangkan dengan $q(G)$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:4).

Contoh :



Gambar 2.5. Graf G dengan Order 5 dan Size 6

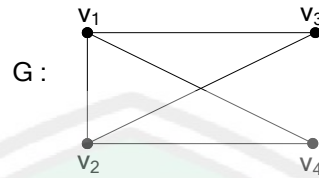
Gambar 2.5 di atas menunjukkan bahwa graf G mempunyai 5 titik, sehingga order graf G adalah $p(G) = 5$ yaitu $V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Selain itu, graf G juga mempunyai enam sisi sehingga size graf G adalah $q(G) = 6$ yaitu $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$.

2.1.3 Subgraf

Definisi 4 :

Graf H disebut subgraf dari graf G jika himpunan titik di H adalah subset dari himpunan titik di G dan himpunan sisi di H adalah subset dari himpunan sisi di G {dapat ditulis $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$ }. Jika H adalah subgraf G , maka dapat ditulis $H \subset G$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:8).

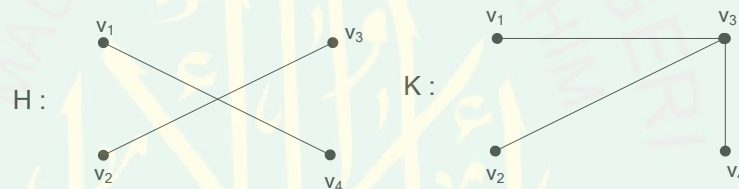
Contoh :



Gambar 2.6. Graf Terhubung G

Menurut Gambar 2.6 didapatkan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

$$E(G) = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_2, v_3), (v_2, v_4)\}$$



Gambar 2.7. Graf H dan Graf K

Graf H mempunyai $V(H) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

$$E(H) = \{(v_2, v_3), (v_2, v_4)\}$$

Graf K mempunyai $V(H) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

$$E(H) = \{(v_1, v_3), (v_3, v_4), (v_2, v_3)\}$$

Gambar 2.7 menunjukkan dua graf yakni graf H dan graf K serta menunjukkan bahwa graf H merupakan subgraf dari graf G . Sedangkan graf K bukan merupakan subgraf dari G , karena sisi (v_3, v_4) bukan merupakan subset sisi dari graf G .

Bentuk sederhana subgraf dari graf G adalah dibentuk dengan menghapus titik atau sisi.

2.1.4 Derajat Suatu Titik

Definisi 5 :

Misalkan G adalah suatu graf dan v titik di G . Derajat titik v di G , ditulis $der_G(v)$ (*degree*) adalah banyaknya sisi di G yang terkait langsung dengan v . Jadi $der_G(v)$ adalah banyaknya titik yang terhubung langsung dengan v , sedangkan titik yang berderajat satu disebut titik ujung. Titik v dikatakan genap atau ganjil tergantung dari jumlah $der_G(v)$ genap atau ganjil (Lipschutz dan Lipson, 2002:7).

Contoh :



Gambar 2.8. Graf G dengan Derajat Titik

Derajat titik-titik dari graf pada gambar 2.8 adalah

$$Der_G(v_1) = 1$$

$$Der_G(v_3) = 2$$

$$Der_G(v_2) = 3$$

$$Der_G(v_4) = 2$$

Teorema 1 :

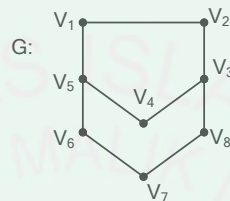
Jika G graf dan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ maka jumlah semua derajat semua titik pada semua graf sama dengan 2 kali banyak sisinya

$$\sum_{i=1}^n der_G(v_i) = 2q$$

Bukti:

Setiap sisi adalah terkait langsung dengan dua titik jika setiap derajat titik dijumlahkan, maka setiap sisi dihitung dua kali.

Contoh:



Gambar 2.9. Graf G

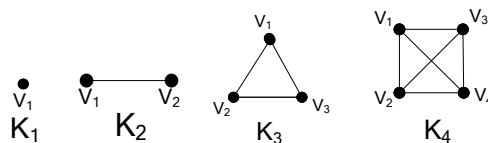
Teorema di atas telah menyebutkan bahwa setiap sisi yang terkait langsung dengan titik maka jika derajatnya dijumlahkan maka dihitung 2 kali jumlah sisinya. Karena pada gambar 2.9 graf G mempunyai 6 titik yang berderajat 2 dan 2 titik yang berderajat 3 jadi graf tersebut derajatnya berjumlah 18 sehingga menurut teorema diatas banyak sisinya adalah 9.

2.1.5 Graf Komplit (Complete Graf)

Definisi 6 :

Graf komplit (*complete graf*) adalah graf yang setiap dua titik berbeda saling *adjacent*. Graf komplit dengan n titik dinyatakan dengan K_n (Chartrand dan Lesniak, 1986:9).

Contoh:



Gambar 2.10. Beberapa Macam Graf Komplit

Gambar diatas menunjukkan K_1 , K_2 , K_3 , dan K_4 adalah graf komplit karena setiap titik dalam graf tersebut selalu *adjacent* dengan semua titik lain, maka banyaknya sisi yang terkait pada suatu titik v pada K_n adalah $n-1$ yang dapat dilambangkan dengan $der_G = n-1$.

Banyak sisi pada graf komplit yang terdiri dari n titik adalah $\frac{n \times (n-1)}{2}$. Rumus ini diperoleh sebagai berikut: untuk 1 titik di G terdapat $(n-1)$ sisi ke $(n-1)$ titik lainnya. Maka untuk n titik terdapat $n \times (n-1)$ sisi. Karena setiap sisi terhitung dua kali untuk pasangan titik bersisian dengannya. Maka banyak sisi seluruhnya dibagi 2 yaitu $\frac{n \times (n-1)}{2}$.

Agama Islam memerintahkan agar setiap manusia untuk saling asih kepada sesama, karena pada dasarnya walaupun jasmani manusia berbeda-beda dan berasal dari berbagai suku-suku bangsa, budaya, adat-istiadat yang berbeda akan tetapi pada hakekatnya sesama manusia adalah saudara. Agama Islam sangat tidak mengajarkan adanya permusuhan, pertengkaran, sehingga mengakibatkan bercerai berai. Seperti yang dijelaskan Allah dalam firmanNya Q.S Al Hujuraat(49) ayat 13 :

يَتَأْتِيهَا النَّاسُ إِنَّا خَلَقْنَاهُمْ مِنْ ذَكَرٍ وَأُنْثَىٰ وَجَعَلْنَاهُمْ شُعُوبًا وَقَبَائِلَ لِتَعَارَفُوا ۚ

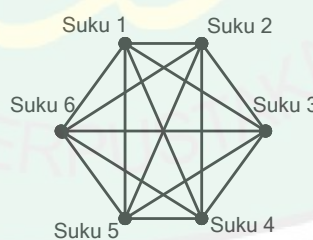
Artinya:

“ Hai manusia, sesungguhnya kami menciptakan kamu dari seorang laki-laki dan seorang perempuan dan menjadikan kamu berbangsa-bangsa dan bersuku-suku supaya kamu saling kenal mengenal... “

Dalam surat Al-Hujuraat ayat 13 menjelaskan bahwa Allah menciptakan manusia berbangsa-bangsa dan bersuku-suku, sudah pasti Allah menciptakan hal

semacam itu pasti mempunyai tujuan, yakni agar mereka saling mengenal. Sebagai saudara sudah selayaknyalah sesama manusia saling menyayangi sehingga dapat saling tolong menolong. Sehingga tidak tercipta peperangan didunia ini. Karena sesungguhnya Allah sangat tidak menyukai umat yang bercerai-berai.

Hal ini dapat direpresentasikan dalam bentuk graf dengan suku-suku atau bangsa-bangsa sebagai titik. Misalkan ambil n macam suku/bangsa, maka mempunyai n titik. Sedangkan bentuk hubungan untuk “saling mengenal” dianggap sebagai sebuah garis yang menghubungkan setiap suku/bangsa. Kerena sebagaimana dijelaskan dalam surat Al-Hujuraat ayat 13 bahwa manusia harus saling mengenal, maka antara titik satu dengan titik yang lainnya juga harus saling terhubung. Sehingga jika keterhubungan antar suku itu digambarkan, akan di dapat gambar sebagai berikut:



Gambar 2.11. Representasi Graf Komplit Terhadap Hubungan Sesama Manusia

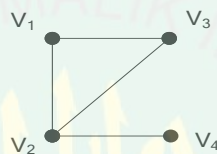
Gambar tersebut merupakan pemisalan lima suku, graf diatas mempunyai ciri-ciri graf komplit yakni setiap titik pada graf tersebut selalu *adjacent*. Apabila dengan banyak suku/bangsa n maka akan menjadi graf komplit dengan titik n .

Sehingga surat Al-Hujuraat ayat 13 dapat di gambarkan sebagai graf komplit dengan n titik (K_n).

Definisi 7 :

Bilangan clique $\omega(G)$ dari graf G adalah order maksimum diantara subgraf komplit di G (Chartrand dan Lesniak, 1986:279).

Contoh :



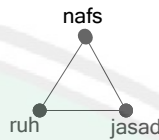
Gambar 2.12. Clique pada Sebuah Graf

Graf G mempunyai clique 3 karena pada graf G titik v_1 , v_2 , dan v_3 membentuk suatu graf komplit tiga (K_3).

Sebagai hamba Allah pastinya setiap mukmin ingin menjadi insan kamil sebagai jalan mendekatkan diri pada Allah. Ada tiga elemen dari struktur insan kamil yaitu 'Jasad' yang meliputi tubuh, mental, unsur-unsur psikologis, termasuk syahwat dan hawa nafsu. Kemudian 'Nafs' yang meliputi jiwa, diri manusia yang sejati, diri manusia sebenarnya yang diturunkan ke bumi untuk menyetir jasad ini. terakhir adalah 'Ruh'. Jika manusia dapat mengendalikan ketiganya untuk selalu dijalan Allah maka manusia tersebut akan mencapai suatu kesempurnaan sebagai insan kamil.

Gambaran di atas dapat dipresentasikan dengan sebuah graf, dengan 3 elemen yang saling berhubungan agar hidup insan dapat berjalan dengan seimbang dan

kesempurnaan sebagai insan kamil. Sehingga dapat digambarkan sebagai graf komplit.



Gambar 2.13. Representasi Clique Terhadap Hubungan Antara Nafs, Ruh dan Jasad

Saat seorang mu'min dapat menjalankan dan menyeimbangkan tiga elemen tersebut dengan baik, maka dia akan mencapai titik tertinggi (maksimum) sebagai hamba yang dekat dengan Allah. Seorang insan kamil akan kembali kepada kesejatian dirinya seperti saat penciptaan permulaan, setelah itu baru dia kembali (menghadap) kepada-Nya. Hal ini sesuai dengan clique pada graf komplit 3 yang adalah dirinya sendiri.

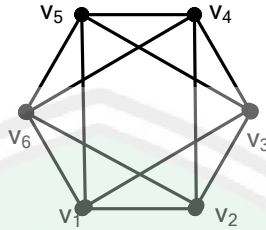
2.1.6. Graf Regular

Definisi 8:

Graf yang setiap simpul-simpulnya mempunyai derajat yang sama disebut graf teratur (regular). Apabila derajat setiap simpul adalah r , maka graf tersebut disebut sebagai graf teratur derajat r yang disimbolkan dengan *regular- r* (Munir, 2005:378)

Pada definisi diatas yang dimaksud dengan simpul adalah titik (*vertex*) yang ada pada sebuah graf.

Contoh:



Gambar 2.14. Graf Regular-3 Berorder 6

2.2 Graf Terhubung

Definisi 9 :

Sebuah jalan (*walk*) $u-v$ di graf G adalah barisan berhingga (tak kosong). $W : u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_n, v_n = v$ yang berselang seling antara titik dan sisi, yang dimulai dari titik dan diakhiri dengan titik sedemikian hingga untuk $0 \leq i \leq n$. Dengan $e_i = v_{i-1}v_i$, adalah sisi di G . v_0 disebut titik awal, v_n disebut titik akhir, $v_1, v_2, v_3, \dots, v_{n-1}$ disebut titik interval, dan n menyatakan panjang dari W (Chartrand dan Lesniak, 1986:26).

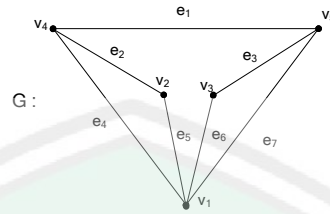
Definisi 10 :

Jalan $u-v$ yang semua sisinya berbeda disebut *trail* $u-v$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:26).

Definisi 11 :

Jalan $u-v$ yang semua titiknya berbeda disebut lintasan (*path*) $u-v$. Dengan demikian, semua lintasan adalah *trail* (Chartrand dan Lesniak, 1986:26).

Contoh :



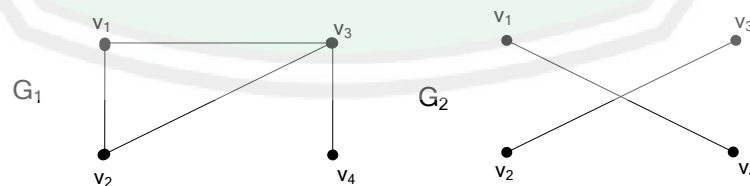
Gambar 2.15. *Trail dan Path* pada Graf G

Gambar 2.15 menunjukkan bahwa jalan yang melewati titik v_1, v_2, v_4, v_5, v_3 disebut lintasan (*path*) karena melewati semua titik yang berbeda. Dengan demikian, maka jalan tersebut juga merupakan *trail*, karena pada jalan tersebut melewati semua sisi yang berbeda yakni e_5, e_2, e_1, e_3 .

Definisi 12 :

Misalkan G adalah sebuah graf dan u, v titik di graf G maka u dan v disebut terhubung (*connected*) jika ada lintasan (*path*) $u-v$ di G . Misalkan G adalah graf. G disebut terhubung (*connected*) jika untuk setiap titik u dan v di G terhubung (Chartrand dan Lesniak, 1986:28).

Contoh:



Gambar 2.16. Graf *Connected* dan *Disconnected*

Pada gambar 2.16, G_1 adalah graf terhubung karena setiap titiknya terhubung (*connected*), yaitu terdapat lintasan dari setiap titik ke titik yang lain. Sedangkan G_2

adalah graf tidak terhubung karena terdapat titik yang tidak terhubung (*disconnected*) dengan titik yang lain yaitu titik v_1 dan v_4 tidak terhubung dengan titik v_2 dan v_3 .

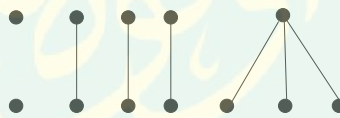
2.3 Operasi Pada Graf

2.3.1 Gabungan Dua Graf

Definisi 13:

Gabungan dua graf G_1 dengan G_2 yang dinotasikan dengan $G = G_1 \cup G_2$ mempunyai himpunan titik $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan himpunan sisi $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2)$ (Chartand dan Lesniak, 1986:11).

Jika graf G merupakan gabungan dari $H_1, H_2, H_3, \dots, H_n$, maka dinotasikan dengan $G = nH$. Graf $2K_1 \cup 3K_2 \cup K_{(1,3)}$ akan ditunjukkan pada gambar sebagai berikut



Gambar 2.17. Gabungan Graf $2K_1, 3K_2, K_{(1,3)}$

2.3.2 Penjumlahan graf

Definisi 14 :

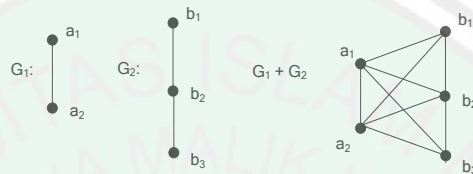
Penjumlahan graf G_1 dan G_2 yang dinotasikan dengan $G = G_1 + G_2$ mempunyai himpunan titik $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan himpunan sisi $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{uv \mid u \in V(G_1) \text{ dan } v \in V(G_2)\}$ (Chartand dan Lesniak, 1986:11).

Contoh : $V(G_1) = \{a_1, a_2\}$

$V(G_2) = \{b_1, b_2, b_3\}$

Maka sisi yang terbentuk : $E(G) =$

$\{(a_1a_2) \cup (b_1b_2, b_2b_3) \cup \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_1, b_3), (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_2, b_3)\}\}$.



Gambar 2.18. Penjumlahan Dua Graf

2.3.3 Perkalian Graf

Definisi 15:

Perkalian graf (*cartesius product*) $G = G_1 \times G_2$, mempunyai himpunan titik $V(G) = V(G_1) \times V(G_2) = (u_1, v_1, \dots) \times (u_2, v_2, \dots)$ dan 2 titik (v_1, v_2) dan (u_1, u_2) pada graf G terhubung langsung jika dan hanya jika:

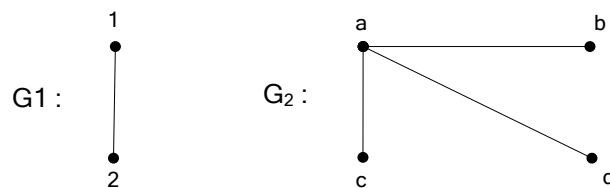
$$u_1 = v_1 \text{ dan } [u_2, v_2] \in E(G_2)$$

atau

$$u_2 = v_2 \text{ dan } [u_1, v_1] \in E(G_1)$$

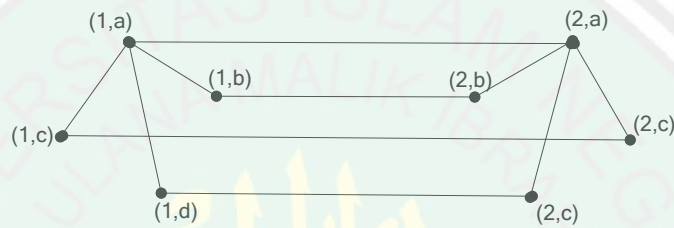
(Chartand dan Lesniak, 1986:11).

Contoh :



Gambar 2.19. Graf G_1 dan Graf G_2

Gambar 2.19 menunjukkan bahwa dari graf G_1 dan G_2 diperoleh $V(G) = V(G_1) \times V(G_2) = \{(1,a), (1,b), (1,c), (1,d), (2,a), (2,b), (2,c), (2,d), (3,a), (3,b), (3,c), (3,d)\}$ dan titik-titik yang terhubung langsung adalah $E(G) = \{(1,a)(1,b), (1,a)(1,c), (1,a)(1,d), (2,a)(2,b), (2,a)(2,c), (2,a)(2,d), (1,a)(2,a), (1,b)(2,b), (1,c)(2,c), (1,d)(2,d)\}$ sehingga gambar G adalah sebagai berikut:



Gambar 2.20. Graf G Hasil Perkalian Graf G_1 dan Graf G_2

Teorema 2:

Misalkan graf $G = G_1 \times G_2$, maka clique dari graf G adalah

$$\omega(G) = \max\{\omega(G_1), \omega(G_2)\}$$

(Claude, 1991:379)

Bukti:

Misalkan G adalah graf hasil kali graf komplit $G_1 \times G_2$ maka ada $x \in V(G_1)$, $y \in V(G_2)$, dan misalnya $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$ adalah titik-titik (*verteks*) pada subgraf komplit terbesar pada graf G_1 dan $D_1, D_2, D_3, \dots, D_n$ adalah titik-titik (*verteks*) pada subgraf komplit terbesar pada graf G_2 . Karena pada perkalian graf berlaku $V(G) = V(G_1) \times V(G_2)$, maka terdapat perkalian titik-titik subgraf komplit terbesar pada graf G_1 dengan semua titik yang ada di graf G_2 yang dapat ditulis dengan $(C_i \times \{y_j\})$ dan perkalian titik-titik subgraf komplit terbesar pada graf G_2 dengan semua titik yang ada di graf G_1 yang dapat ditulis dengan $(\{x_j\} \times D_i)$. Pada titik yang

dibentuk oleh persamaan $(C_i \times \{y_j\})$ jika i bergerak dari 1 sampai ke n dan j tetap, maka dari titik tersebut akan terbentuk graf komplit terbesar pada graf G_1 . Jika i bergerak dan j pun bergerak dari 1 sampai ke m maka akan terbentuk graf komplit terbesar di graf G_1 sebanyak m . Pada titik yang dibentuk oleh persamaan $(\{x_j\} \times D_i)$ jika i bergerak dari 1 sampai ke n dan j tetap, maka dari titik tersebut akan terbentuk graf komplit terbesar pada graf G_2 . Jika i bergerak dan j pun bergerak dari 1 sampai ke m maka akan terbentuk graf komplit terbesar di graf G_2 sebanyak m . Maka subgraf komplit terbesar dari graf G adalah

$$\begin{aligned}\omega(G_1 \times G_2) &= \max \{|\{x\} \times D_i|, |C_i \times \{y_j\}|\} \\ &= \max \{\omega(G_1), \omega(G_2)\}\end{aligned}$$

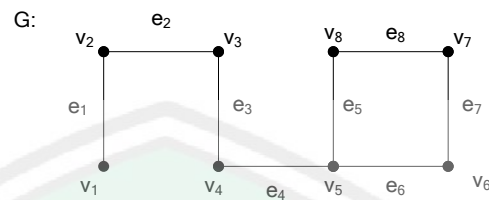
2.4 Matching

Definisi 16 :

Matching pada graf G adalah himpunan dua buah titik atau satu sisi pada graf G yang bebas jika sisinya tidak saling *adjacent*. (Chartand dan Lesniak, 1986:225)

Jika M adalah *matching* pada graf G yang memiliki sifat bahwa setiap titik dari G adalah terkait langsung (*incedent*) dengan sisi dari M , maka M pemasangan sempurna (*matching perfect*) di G . Graf G mempunyai pemasangan sempurna (*matching perfect*) M jika G mempunyai order genap dan (M) adalah 1-reguler subgraf merentang dari graf G .

Contoh:



Gambar 2.21. Graf yang Memiliki *Matching*

Gambar 2.21 menunjukkan M_1 mempunyai himpunan sisi yaitu $\{e_1, e_3, e_8\}$, jadi M_1 adalah *matching* tetapi bukan *matching* maksimum. Sedangkan M_2 yang mempunyai himpunan sisi $\{e_1, e_3, e_5, e_7\}$ adalah *matching* maksimum dan merupakan *matching perfect*, karena M_2 mengandung titik maksimal yang dimiliki graf G dan tidak ada titik yang tidak menjadi titik di M_2 .

2.5 Faktorisasi

Definisi 17 :

Faktor dari graf G adalah suatu subgraf merentang (*spanning subgraf*) dari graf G . (Chartand dan Lesniak, 1986:229)

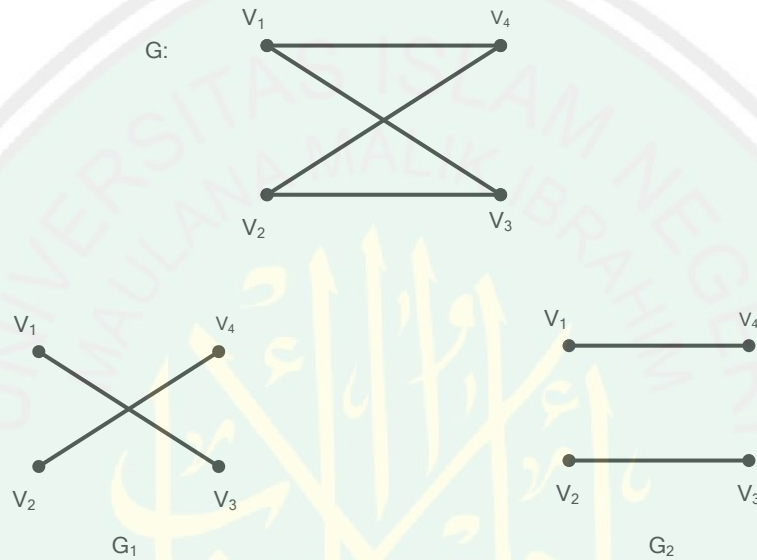
Jika $G_1, G_2, \dots, G_n$ adalah faktor yang disjoint sisi dari graf G sedemikian hingga $\bigcup_{i=1}^n E(G_i) = E(G)$, ditulis $G = G_1 \oplus G_2 \oplus \dots \oplus G_n$ disebut sebagai penjumlahan sisi dari faktor-faktor $G_1, G_2, \dots, G_n$.

Definisi 18 :

Faktorisasi dari graf G adalah penjumlahan sisi dari faktor-faktor graf G . (Chartand dan Lesniak, 1986:229)

Suatu r -reguler faktor dari graf G dapat dinyatakan sebagai faktor- r dari G . oleh karena itu, suatu graf memiliki faktor-1 jika dan hanya jika mengandung

suatu *matching* sempurna. Jika suatu faktorisasi ada pada graf G dengan demikian setiap faktor adalah faktor- r (untuk setiap r tetap), maka G dapat difaktorkan faktor- r . Jika G adalah suatu graf yang dapat difaktorkan faktor- r , maka G perlu k -reguler untuk suatu k yang merupakan kelipatan dari r .



Gambar 2.22. Graf G Beserta Faktor-faktornya

Gambar 2.22 menunjukkan sebuah graf G yang memiliki 4 titik dan 4 sisi. Graf G jika difaktorkan menggunakan faktor-1 akan menghasilkan dua graf baru yaitu G_1 dan G_2 . Graf G_1 dan graf G_2 disebut sebagai faktor-faktor dari graf G dan dapat ditulis $G = G_1 \oplus G_2$.

BAB III PEMBAHASAN

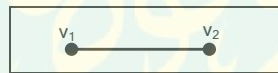
3.1 Bilangan *Clique* pada Perkalian Graf Komplit ($K_n \times K_n \times \dots \times K_n$)

Sebanyak m Faktor.

Pertama akan menentukan bilangan *clique* pada graf hasil perkalian dua graf komplit ($K_n \times K_n$). Berikut ini adalah beberapa contoh bilangan *clique* pada graf hasil perkalian dua graf komplit:

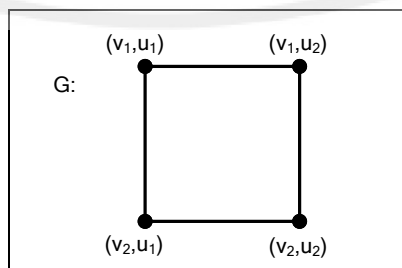
1. Menentukan bilangan *clique* dari perkalian graf komplit dua ($K_2 \times K_2$)

Sesuai dengan kajian teori pada bab II, graf komplit dua memiliki 2 titik dan 1 sisi. Karena subgraf terbesar dari graf komplit dua adalah dirinya sendiri, maka *Clique* dari graf komplit dua adalah 2 yang dilambangkan dengan $\omega(K_2) = 2$. Berikut ini adalah gambar graf komplit dua:



Gambar 3.1. Graf Komplit Dua (K_2)

Misalkan graf G adalah hasil perkalian graf komplit dua ($K_2 \times K_2$). Maka hasil perkalian graf $K_2 \times K_2$ adalah:

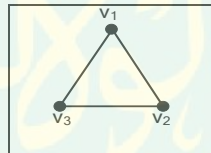


Gambar 3.2. Graf Hasil perkalian $K_2 \times K_2$

Gambar 3.2 menunjukkan bahwa graf G mengandung subgraf komplit berorder satu (K_1), subgraf komplit berorder dua (K_2) yang terdapat pada semua sisi-sisinya. Karena pada graf G mempunyai subgraf komplit maksimumnya adalah K_2 , maka *clique* untuk graf hasil perkalian dua graf komplit $K_2 \times K_2$ adalah 2 yang dilambangkan dengan $\omega(G) = 2$ yang salah satu subgraf komplit terbesarnya dibentuk oleh titik-titik $((v_1, u_1), (v_1, u_2))$:

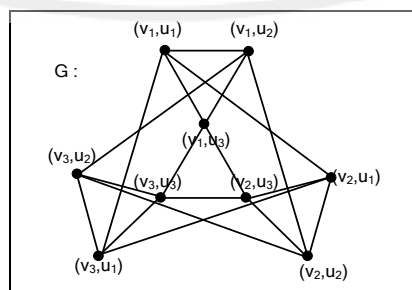
2. Menentukan bilangan *clique* dari perkalian graf komplit tiga ($K_3 \times K_3$)

Graf komplit tiga memiliki 3 titik dan 3 sisi. Karena subgraf terbesar dari graf komplit tiga adalah dirinya sendiri, maka *Clique* dari graf komplit tiga adalah 3 yang dilambangkan dengan $\omega(K_3) = 3$. Berikut ini adalah gambar graf komplit tiga :



Gambar 3.3. Graf Komplit Tiga (K_3)

Misalkan graf G adalah hasil perkalian graf komplit tiga ($K_3 \times K_3$). Maka hasil perkalian graf $K_3 \times K_3$ adalah:

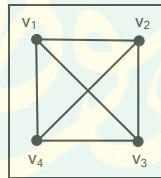


Gambar 3.4. Graf Hasil perkalian $K_3 \times K_3$

Gambar 3.4 menunjukkan bahwa graf G mengandung subgraf komplit berorder satu (K_1), subgraf komplit berorder dua (K_2) yang terdapat pada semua sisi-sisinya dan subgraf beroder tiga (K_3). Karena pada graf G mempunyai subgraf komplit maksimumnya adalah K_3 , maka *clique* untuk graf hasil perkalian dua graf komplit K_3 adalah 3 yang dilambangkan dengan $\omega(G) = 3$ yang salah satu subgraf komplit terbesarnya dibentuk oleh titik-titik $((v_1, u_1), (v_1, u_2), (v_1, u_3))$.

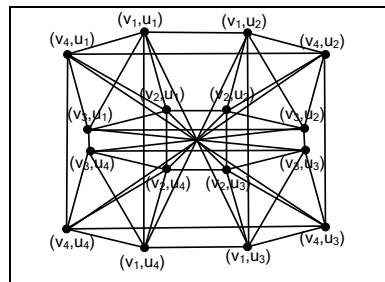
3. Menentukan bilangan *clique* dari perkalian graf komplit empat ($K_4 \times K_4$)

Graf komplit empat memiliki 4 titik dan 6 sisi. Karena subgraf terbesar dari graf komplit empat adalah dirinya sendiri, maka *Clique* dari graf komplit empat adalah 4 yang dilambangkan dengan $\omega(K_4) = 4$. Berikut ini adalah gambar graf komplit empat :



Gambar 3.5. Graf Komplit Empat (K_4)

Misalkan graf G adalah hasil perkalian graf komplit empat ($K_4 \times K_4$). Maka hasil perkalian graf $K_4 \times K_4$ adalah:

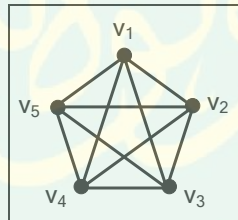


Gambar 3.6. Graf Hasil perkalian $K_4 \times K_4$

Gambar 3.6 menunjukkan bahwa graf G mengandung subgraf komplit berorder satu (K_1), subgraf komplit berorder dua (K_2) yang terdapat pada semua sisi-sisinya dan subgraf berorder tiga (K_3). Karena pada graf G mempunyai subgraf komplit maksimumnya adalah K_4 , maka graf hasil perkalian dua graf komplit $K_4 \times K_4$ adalah 4 yang dilambangkan dengan $\omega(G) = 4$ yang beberapa subgraf komplit terbesarnya dibentuk oleh titik-titik $((v_1, u_1), (v_1, u_2), (v_1, u_3), (v_1, u_4))$

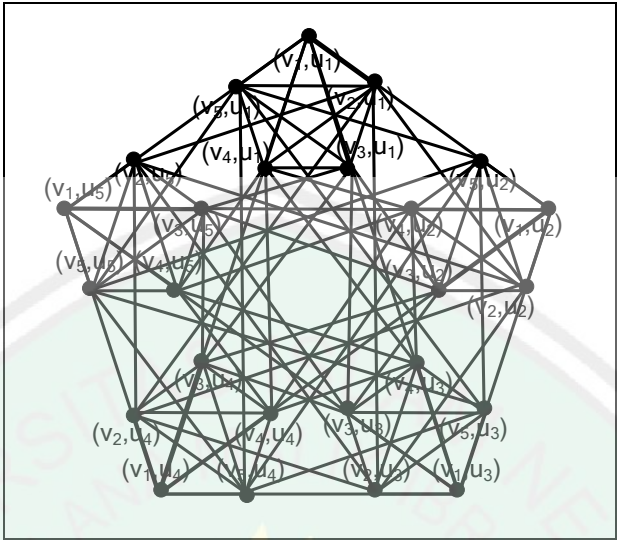
4. Menentukan bilangan *clique* dari perkalian graf komplit lima ($K_5 \times K_5$)

Graf komplit lima memiliki 5 titik dan 10 sisi. Karena subgraf terbesar dari graf komplit lima adalah dirinya sendiri, maka *Clique* dari graf komplit lima adalah 5 yang dilambangkan dengan $\omega(K_5) = 5$. Berikut ini adalah gambar graf komplit lima:



Gambar 3.7. Graf Komplit Lima (K_5)

Misalkan graf G adalah hasil perkalian graf komplit lima ($K_5 \times K_5$). Maka hasil perkalian graf $K_5 \times K_5$ adalah:



Gambar 3.8. Graf Hasil perkalian $K_5 \times K_5$

Gambar 3.8 menunjukkan bahwa graf G mengandung subgraf komplit berorder satu (K_1), subgraf komplit berorder dua (K_2) yang terdapat pada semua sisi-sisinya dan subgraf beroder tiga (K_3). Karena pada graf G mempunyai subgraf komplit maksimumnya adalah (K_5), maka *clique* untuk graf hasil perkalian dua graf komplit $K_5 \times K_5$ adalah 5 yang dilambangkan dengan $\omega(G) = 5$ yang salah satu subgraf komplit terbesarnya dibentuk oleh titik-titik $((v_1, u_1), (v_1, u_2), (v_1, u_3), (v_1, u_4), (v_1, u_5))$.

Berdasarkan contoh-contoh di atas dapat dibuat table sebagai berikut:

Table 3.1: *Clique* pada perkalian graf $(K_n \times K_n)$

No	Graf komplit	<i>Clique</i> graf komplit	<i>Clique</i> graf hasil perkalian
1	K_2	2	2
2	K_3	3	3
3	K_4	4	4
4	K_5	5	5

Berdasarkan table di atas dapat diambil kesimpulan sementara bahwa *clique* pada graf hasil perkalian graf komplit ($K_n \times K_n$) adalah n . Hal ini sesuai dengan teorema 2 bab II menyebutkan bahwa

$$\begin{aligned}\omega(G_1 \times G_2) &= maks \{ |\{x\} \times D_i|, |C_i \times \{y_j\}| \} \\ &= maks \{ \omega(G_1), \omega(G_2) \}\end{aligned}$$

Maka apabila dalam hal ini G_1 dan G_2 adalah graf komplit K_n maka subgraf komplit terbesar dari graf G_1 dan G_2 adalah dirinya sendiri yaitu K_n maka order maksimumnya adalah n yang dapat ditulis $(K_n) = n$. Sedemikian hingga:

$$\begin{aligned}\omega(G_1 \times G_2) &= maks \{ |\{x\} \times D_i|, |C_i \times \{y_j\}| \} \\ &= maks \{ \omega(G_1), \omega(G_2) \} \\ &= maks \{ \omega(K_n), \omega(K_n) \} \\ &= maks \{ (n, n) \} \\ &= n\end{aligned}$$

Pada penelitian ini, tidak hanya pada graf hasil perkalian graf komplit ($K_n \times K_n$) sehingga dikembangkan dengan perkalian graf komplit sampai m kali $K_n \times K_n \times \dots \times K_n$. Berikut ini adalah contoh *clique* dari graf hasil perkalian graf komplit (K_n):

1. Graf hasil perkalian graf komplit n sebanyak tiga kali ($K_n \times K_n \times K_n$)

$$\begin{aligned}\omega(K_n \times K_n \times K_n) &= \omega((K_n \times K_n) \times K_n) \\ &= maks \{ \omega(K_n \times K_n), \omega(K_n) \}\end{aligned}$$

Jika $\omega(K_n) = n$ dan karena $\omega(K_n \times K_n) = n$ maka :

$$\begin{aligned}&= maks \{ n, n \} \\ &= n\end{aligned}$$

2. Graf hasil perkalian graf komplit n sebanyak empat kali ($K_n \times K_n \times K_n \times K_n$)

$$\begin{aligned}\omega(K_n \times K_n \times K_n \times K_n) &= \omega((K_n \times K_n) \times (K_n \times K_n)) \\ &= \max\{\omega(K_n \times K_n), \omega(K_n \times K_n)\}\end{aligned}$$

Karena $\omega(K_n \times K_n) = n$ maka

$$\begin{aligned}&= \max\{n, n\} \\ &= n\end{aligned}$$

3. Graf hasil perkalian graf komplit n sebanyak lima kali ($K_n \times K_n \times K_n \times K_n \times K_n$)

$$\begin{aligned}\omega(K_n \times K_n \times K_n \times K_n \times K_n) &= \max\{(K_n \times K_n) \times (K_n \times K_n)\} \\ &= \max\{\omega(K_n \times K_n \times K_n), \omega(K_n \times K_n)\} \\ &= \max\{n, n\} \\ &= n\end{aligned}$$

Berdasarkan contoh-contoh di atas dapat dibuat konjektur bahwa *clique* pada graf hasil perkalian graf komplit n ($K_n \times K_n \times \dots \times K_n$) sebanyak m faktor adalah n . Selanjutnya akan dibuktikan bahwa bilangan *clique* pada graf hasil perkalian graf komplit K_n sebanyak m faktor dapat disusun dalam kalimat matematis yaitu:

Misalkan G merupakan graf hasil dari perkalian graf komplit ($K_n \times K_n \times \dots \times K_n$) sebanyak m faktor maka *clique* dari graf G adalah n $\omega(G) = n$

Bukti :

Teorema tersebut akan dibuktikan dengan cara induksi matematika.

Untuk $m = 1$ maka graf yang dihasilkan adalah graf K_n tunggal. Graf K_n memiliki subgraf komplit maksimum dirinya sendiri, maka order maksimumnya adalah n sehingga $\omega(K_n) = n$ adalah terbukti benar.

Untuk $m = 2$ maka sesuai dengan teorema 1 yang telah dibuktikan maka untuk $K_n \times K_n$ cliquenya adalah $\omega(K_n \times K_n) = \omega((K_n)^2) = n$ adalah terbukti benar.

Asumsikan benar untuk $m = r$, yang artinya untuk $K_n \times K_n \times \dots \times K_n$ sebanyak r kali maka *clique* pada graf hasil perkaliannya $\omega(K_n \times K_n \times \dots \times K_n) = \omega((K_n)^r)$ adalah n .

Akan ditunjukkan benar untuk: $m = r + 1$ yang berarti untuk graf hasil perkalian graf komplit n sebanyak $r + \text{satu kali}$ maka $\omega(K_n \times K_n \times \dots \times K_n)$.

$$\begin{aligned}\omega((K_n)^{r+1}) &= \omega((K_n)^r \times (K_n)) \\ &= \max\{\omega(K_n)^r, \omega(K_n)\} \\ &= \max\{n, n\} \\ &= n\end{aligned}$$

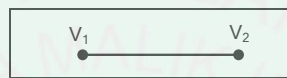
Sesuai dengan bukti induksi matematika di atas maka bilangan *clique* pada perkalian graf komplit sebanyak m faktor $(K_n \times K_n \times \dots \times K_n)$ adalah n yang dilambangkan dengan $\omega((K_n)^m) = n$

■ Terbukti

3.2 Faktorisasi pada Graf Hasil Perkalian Graf Komplit (K_n) Sebanyak m Faktor.

1. Faktorisasi pada graf komplit dua ($K_2 \times K_2 \times \dots \times K_2 = (K_2)^m$).
 - a. Graf komplit dua (K_2) dikalikan satu kali (tunggal).

Gambar K_2 adalah sebagai berikut:

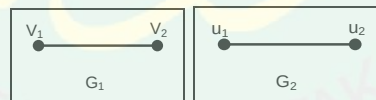


Gambar 3.9. Graf Komplit Dua (K_2)

Graf K_2 merupakan graf komplit yang beroder genap, maka graf K_2 dapat difaktorkan menggunakan faktor-1. Karena faktor tersebut merupakan subgraf terbesar maka graf komplit dua (K_2) hanya memiliki faktor-1 sebanyak 1.

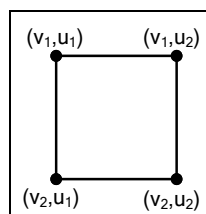
- b. Graf komplit dua dikalikan sebanyak dua kali ($K_2 \times K_2$)

Dua graf komplit dua yang dikalikan ($K_2 \times K_2$) yaitu



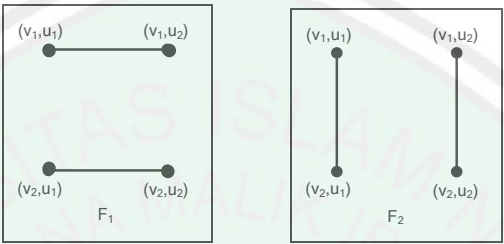
Gambar 3.10. Gambar $G_1 = K_2$ dan $G_2 = K_2$

Sehingga graf hasil perkalian ($K_2 \times K_2$) yaitu:



Gambar 3.11. Graf Hasil Perkalian $K_2 \times K_2$

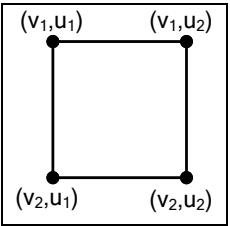
Gambar 3.11 memperlihatkan bahwa graf tersebut memiliki 4 titik dan 4 sisi sehingga derajat masing-masing titik adalah 2. Jika graf di atas difaktorkan dengan menggunakan faktor-1 menghasilkan faktor-faktor sebagai berikut:



Gambar 3.12. Faktor-1 dari Graf Hasil Perkalian $K_2 \times K_2$

Gambar 3.12 menunjukkan bahwa F_1 dan F_2 adalah dua *spanning subgraf* dari graf $K_2 \times K_2$ dan merupakan faktor-faktor graf $K_2 \times K_2$ yang diperoleh dari pemfaktoran graf $K_2 \times K_2$ dengan menggunakan faktor-1. Jika F_1 dan F_2 adalah faktor-faktor graf $K_2 \times K_2$ yang sisi-sisinya saling *disjoint* pada graf $K_2 \times K_2$ sedemikian hingga $F_1 \oplus F_2 = K_2 \times K_2$ disebut sebagai penjumlahan sisi dari faktor-faktor graf $K_2 \times K_2$. Sehingga graf $K_2 \times K_2$ memiliki faktor-1 sebanyak 2 faktor.

Sedangkan jika difaktorkan menggunakan faktor-2 akan menghasilkan faktor berupa dirinya sendiri:

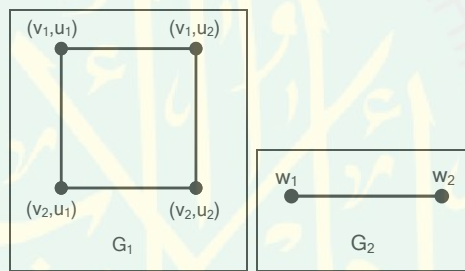


Gambar 3.13. Faktor-2 dari Graf Hasil Perkalian $K_2 \times K_2$

Karena faktor tersebut merupakan subgraf terbesar dari graf hasil perkalian graf komplit dua ($K_2 \times K_2$) maka hanya dapat difaktorkan menggunakan faktor-2 sebanyak 1 faktor. Jadi $K_2 \times K_2$ memiliki faktor-1 sebanyak 2 faktor dan faktor-2 sebanyak 1 faktor.

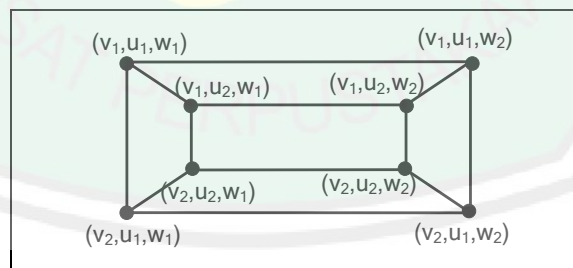
c. Graf komplit dua dikalikan sebanyak tiga kali ($K_2 \times K_2 \times K_2$)

Karena pada item b sudah diketahui hasil dari graf $K_2 \times K_2$, maka untuk hasil perkalian $K_2 \times K_2 \times K_2$ diperoleh dengan mengalikan hasil graf $K_2 \times K_2$ dengan K_2 .



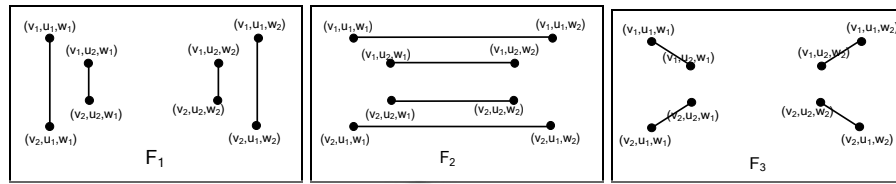
Gambar 3.14. Gambar $G_1 = K_2 \times K_2$ dan $G_2 = K_2$

graf hasil perkalian $K_2 \times K_2 \times K_2$ adalah sebagai berikut :



Gambar 3.15. Graf Hasil Perkalian $K_2 \times K_2 \times K_2$

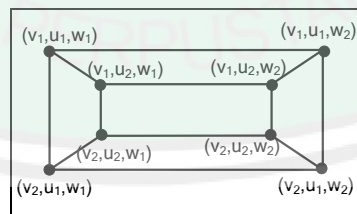
Gambar 3.15 memperlihatkan bahwa graf tersebut memiliki 8 titik dan 12 sisi. Jika graf di atas difaktorkan dengan menggunakan faktor-1 menghasilkan faktor-faktor sebagai berikut:



Gambar 3.16. Faktor-1 dari Graf Hasil Perkalian $K_2 \times K_2 \times K_2$

Gambar 3.16 menunjukkan bahwa F_1 , F_2 dan F_3 adalah tiga *spanning subgraf* dari graf $K_2 \times K_2 \times K_2$ dan merupakan faktor-faktor graf $K_2 \times K_2 \times K_2$ yang diperoleh dari pemfaktoran graf $K_2 \times K_2 \times K_2$ dengan menggunakan faktor-1. Jika F_1 , F_2 dan F_3 adalah faktor-faktor graf $K_2 \times K_2 \times K_2$ yang sisi-sisinya saling *disjoint* pada graf $K_2 \times K_2 \times K_2$ sedemikian hingga $F_1 \oplus F_2 \oplus F_3 = K_2 \times K_2 \times K_2$ disebut sebagai penjumlahan sisi dari faktor-faktor graf $K_2 \times K_2 \times K_2$. Sehingga graf $K_2 \times K_2 \times K_2$ memiliki faktor-1 sebanyak 3 faktor.

Sedangkan dengan menggunakan faktor-3 menghasilkan faktor berupa dirinya sendiri yang merupakan subgraf terbesar dari graf $K_2 \times K_2 \times K_2$ yang ditunjukkan oleh gambar berikut:



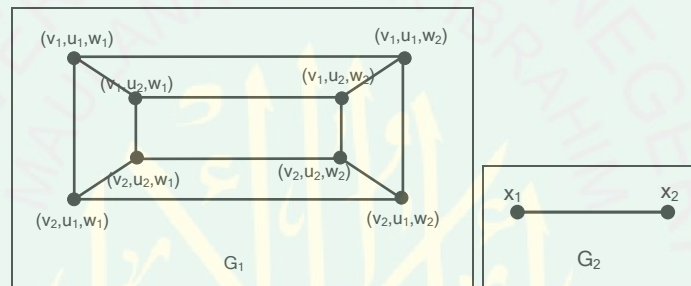
Gambar 3.17. Faktor-3 Graf Hasil Perkalian $K_2 \times K_2 \times K_2$

Karena faktor tersebut merupakan subgraf terbesar dari graf hasil perkalian graf komplit dua ($K_2 \times K_2 \times K_2$) maka hanya memiliki faktor-3 sebanyak 1

faktor. Jadi $K_2 \times K_2 \times K_2$ memiliki faktor-1 sebanyak 3 faktor dan faktor-3 sebanyak 1 faktor.

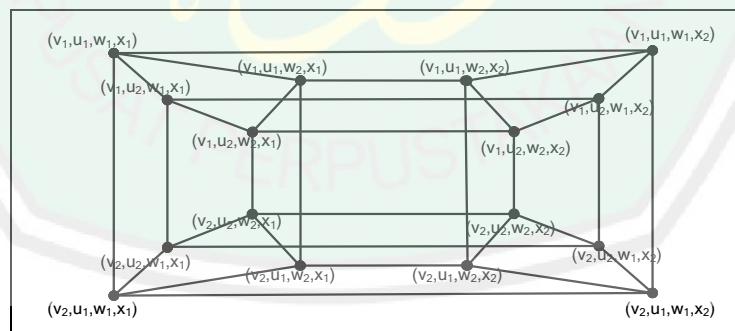
d. Graf komplit dua dikalikan sebanyak empat kali ($K_2 \times K_2 \times K_2 \times K_2$)

Karena pada item c sudah diketahui hasil dari graf $K_2 \times K_2 \times K_2$, maka untuk hasil perkalian $K_2 \times K_2 \times K_2 \times K_2$ diperoleh dengan mengalikan hasil graf $K_2 \times K_2 \times K_2$ dengan K_2 .



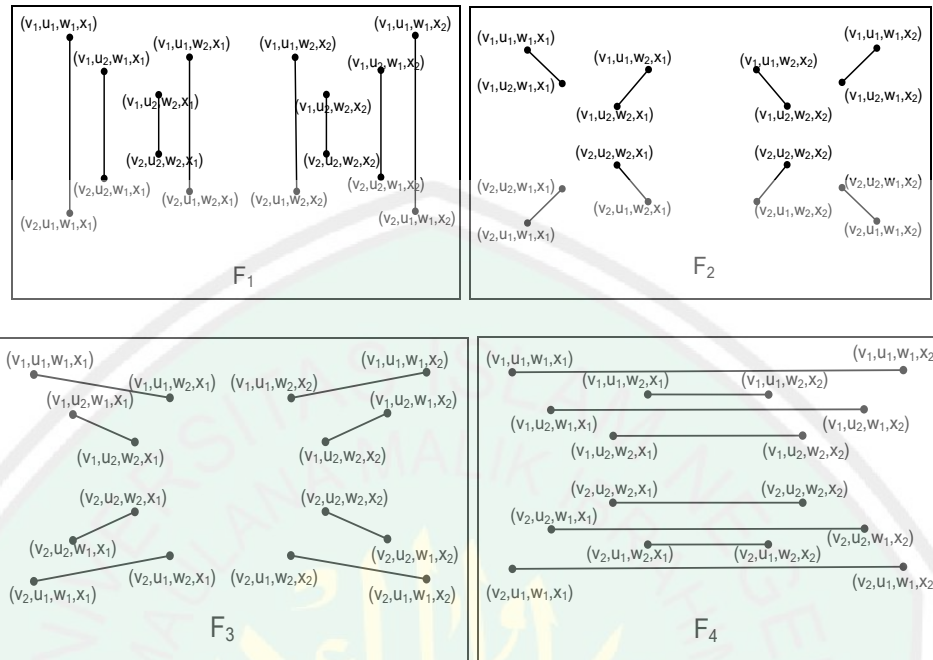
Gambar 3.18. Gambar $G_1 = K_2 \times K_2 \times K_2$ dan $G_2 = K_2$

graf hasil perkalian graf $K_2 \times K_2 \times K_2 \times K_2$ adalah sebagai berikut :



Gambar 3.19. Graf Hasil Perkalian $K_2 \times K_2 \times K_2 \times K_2$

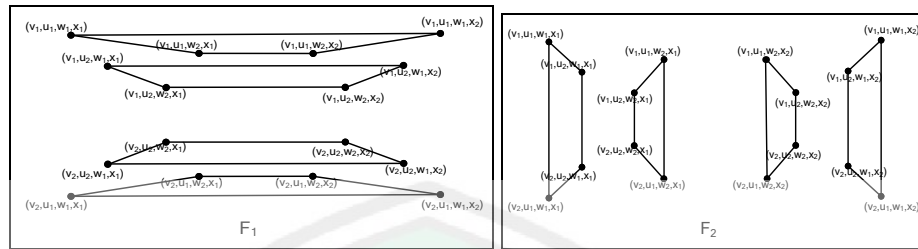
Gambar 3.19 memperlihatkan bahwa graf tersebut memiliki 16 titik dan 32 sisi. Jika graf di atas difaktorkan dengan menggunakan faktor-1 menghasilkan faktor-faktor sebagai berikut:



Gambar 3.20. Faktor-1 dari Graf Hasil Perkalian $K_2 \times K_2 \times K_2 \times K_2$

Gambar 3.20 menunjukkan bahwa F_1 , F_2 , F_3 dan F_4 adalah empat *spanning subgraf* dari graf $K_2 \times K_2 \times K_2 \times K_2$ dan merupakan faktor-faktor graf $K_2 \times K_2 \times K_2 \times K_2$ yang diperoleh dari pemfaktoran graf $K_2 \times K_2 \times K_2 \times K_2$ dengan menggunakan faktor-1. Jika F_1 , F_2 , F_3 dan F_4 adalah faktor-faktor graf $K_2 \times K_2 \times K_2 \times K_2$ yang sisi-sisinya saling *disjoint* pada graf $K_2 \times K_2 \times K_2 \times K_2$ sedemikian hingga $F_1 \oplus F_2 \oplus F_3 \oplus F_4 = K_2 \times K_2 \times K_2 \times K_2$ disebut sebagai penjumlahan sisi dari faktor-faktor graf $K_2 \times K_2 \times K_2 \times K_2$. Sehingga graf $K_2 \times K_2 \times K_2 \times K_2$ memiliki faktor-1 sebanyak 4 faktor.

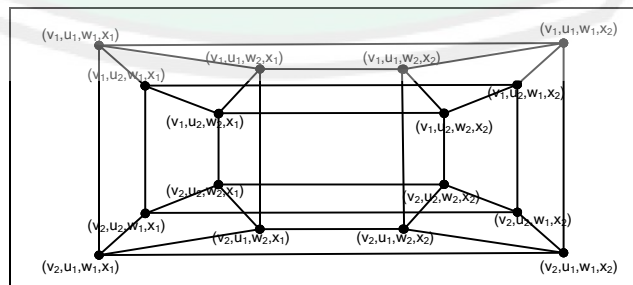
Jika difaktorkan menggunakan faktor-2 menghasilkan faktor-faktor berikut:



Gambar 3.21. Faktor-2 dari Graf Hasil Perkalian $K_2 \times K_2 \times K_2 \times K_2$

Gambar 3.21 menunjukkan bahwa F_1 dan F_2 adalah dua *spanning subgraf* dari graf $K_2 \times K_2 \times K_2 \times K_2$ dan merupakan faktor-faktor graf $K_2 \times K_2 \times K_2 \times K_2$ yang diperoleh dari pemfaktoran graf $K_2 \times K_2 \times K_2 \times K_2$ dengan menggunakan faktor-2. Jika F_1 dan F_2 adalah faktor-faktor graf $K_2 \times K_2 \times K_2 \times K_2$ yang sisinya saling *disjoint* pada graf $K_2 \times K_2 \times K_2 \times K_2$ sedemikian hingga $F_1 \oplus F_2 = K_2 \times K_2 \times K_2 \times K_2$ disebut sebagai penjumlahan sisi dari faktor-faktor graf $K_2 \times K_2 \times K_2 \times K_2$. Sehingga graf $K_2 \times K_2 \times K_2 \times K_2$ memiliki faktor-2 sebanyak 2 faktor.

Sedangkan dengan menggunakan faktor-4 menghasilkan faktor berupa dirinya sendiri yang merupakan subgraf terbesar dari graf $K_2 \times K_2 \times K_2 \times K_2$ yang ditunjukkan oleh gambar berikut:



Gambar 3.22. Faktor-4 dari Graf Hasil Perkalian $K_2 \times K_2 \times K_2 \times K_2$

Karena faktor tersebut merupakan subgraf terbesar dari graf hasil perkalian graf komplit dua ($K_2 \times K_2 \times K_2 \times K_2$) maka hanya memiliki faktor-4 sebanyak 1 faktor. Jadi $K_2 \times K_2 \times K_2 \times K_2$ memiliki faktor-1 sebanyak 4 faktor, faktor-2 sebanyak 2 faktor dan faktor-4 sebanyak 1 faktor.

Berdasarkan contoh-contoh di atas dapat dibuat tabel faktorisasi graf komplit dua sebanyak m kali $K_2 \times K_2 \times \dots \times K_2 = (K_2)^m$ sebagai berikut:

Tabel 3.2: Tabel faktorisasi pada graf hasil perkalian graf komplit dua

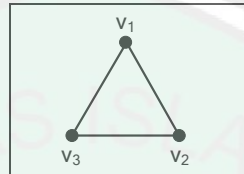
No	M	$\text{Der}_G(v_i)$	$\sum \text{titik}$	$\sum \text{sisi}$	Faktor yang dimiliki	Banyak faktor
1	1	1	2	2	Faktor-1	1
2	2	2	4	4	Faktor-1 Faktor-2	2 1
3	3	3	8	12	Faktor-1 Faktor-3	3 1
4	4	4	16	32	Faktor-1 Faktor-2 Faktor-4	4 2 1
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
R	m	m	2^m	$(m \times 2^m):2$	Faktor-i i faktor positif dari m	$\frac{m}{i}$

Berdasarkan tabel di atas dapat diambil kesimpulan sementara bahwa graf hasil perkalian graf komplit dua dengan m kali memiliki faktor-i dengan i adalah faktor positif dari m dan menghasilkan sebanyak $\frac{m}{i}$ faktor untuk setiap faktor-i.

2. Faktorisasi pada graf komplit tiga ($K_3 \times K_3 \times \dots \times K_3 = (K_3)^m$).

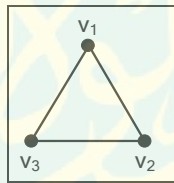
a. Graf komplit tiga (K_3) dikalikan satu kali (tunggal).

Gambar K_3 adalah sebagai berikut:



Gambar 3.23. Graf Komplit Tiga (K_3)

Karena graf K_3 merupakan graf komplit yang beroder ganjil maka graf K_3 tidak memiliki faktor-1. Jika difaktorkan menggunakan faktor-2, graf K_3 akan memperoleh faktor sebagai berikut:

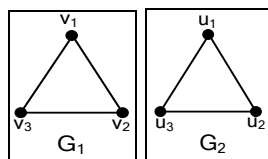


Gambar 3.24. Faktor-2 dari Graf K_3

Karena faktor tersebut merupakan subgraf komplit terbesar maka graf komplit tiga (K_3) hanya memiliki faktor-2.

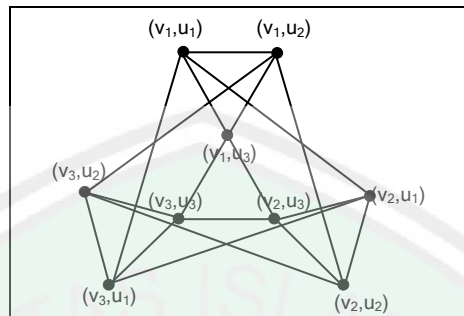
b. Graf komplit tiga dikalikan sebanyak dua kali ($K_3 \times K_3$)

Dua graf komplit tiga yang dikalikan ($K_3 \times K_3$) yaitu:



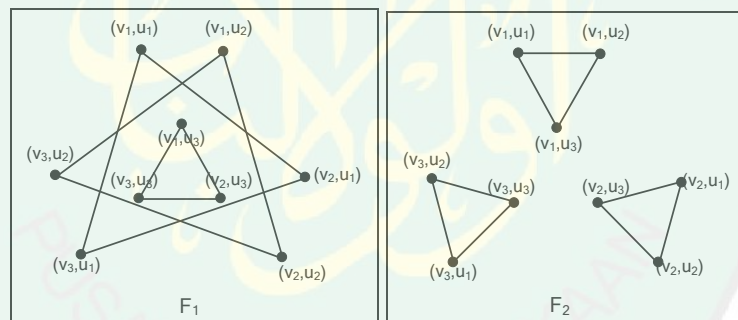
Gambar 3.25. Gambar $G_1 = K_3$ dan $G_2 = K_3$

Hasil perkalian graf $K_3 \times K_3$ adalah sebagai berikut :



Gambar 3.26. Graf Hasil Perkalian $K_3 \times K_3$

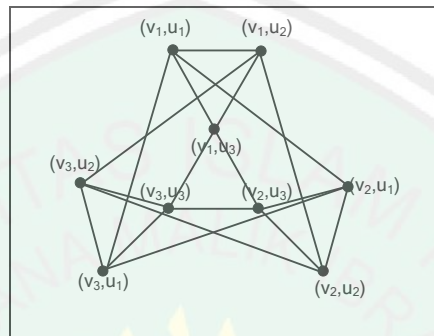
Gambar 3.26 memperlihatkan bahwa graf tersebut memiliki 9 titik dan 18 sisi. Jika graf di atas difaktorkan dengan menggunakan faktor-2 menghasilkan faktor-faktor sebagai berikut:



Gambar 3.27. Faktor-2 dari Graf Hasil Perkalian $K_3 \times K_3$

Gambar 3.27 menunjukkan bahwa F_1 dan F_2 adalah dua *spanning subgraf* dari graf $K_3 \times K_3$ dan merupakan faktor-faktor graf $K_3 \times K_3$ yang diperoleh dari pemfaktoran graf $K_3 \times K_3$ dengan menggunakan faktor-2. Jika F_1 dan F_2 adalah faktor-faktor graf $K_3 \times K_3$ yang sisi-sisinya saling *disjoint* pada graf $K_3 \times K_3$ sedemikian hingga $F_1 \oplus F_2 = K_3 \times K_3$ disebut sebagai penjumlahan sisi dari faktor-faktor graf $K_3 \times K_3$. Sehingga graf $K_3 \times K_3$ memiliki faktor-2 sebanyak 2 faktor.

Sedangkan dengan menggunakan faktor-4 menghasilkan faktor berupa dirinya sendiri yang merupakan subgraf terbesar dari graf $K_3 \times K_3$ yang ditunjukkan oleh gambar berikut:

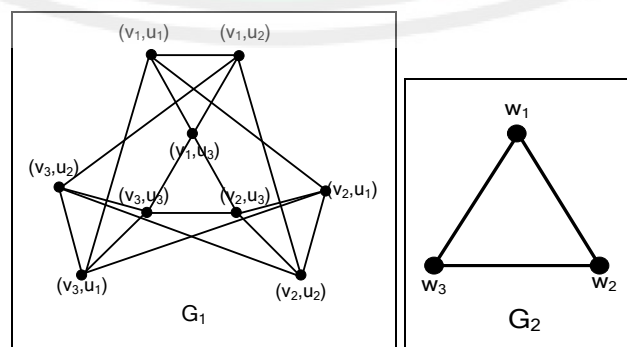


Gambar 3.28. Faktor-4 dari Graf Hasil Perkalian $K_3 \times K_3$

Karena faktor tersebut merupakan subgraf terbesar dari graf hasil perkalian graf komplit tiga ($K_3 \times K_3$) maka memiliki faktor-4 sebanyak 1 faktor. Jadi $K_3 \times K_3$ memiliki faktor-2 sebanyak 2 faktor dan faktor-4 sebanyak 1 faktor.

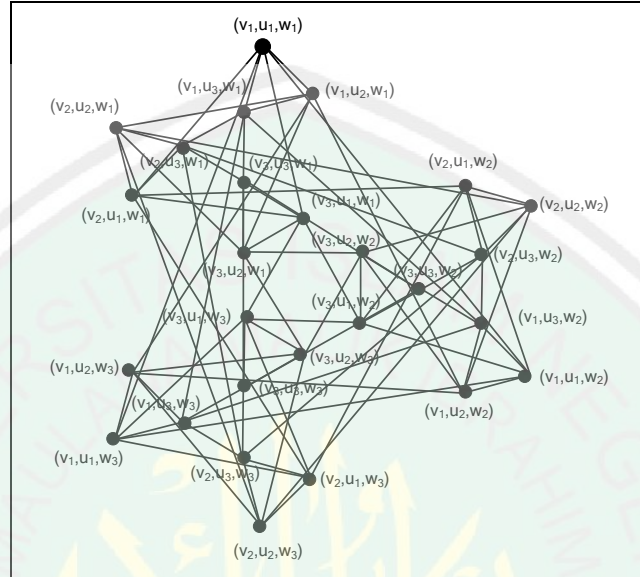
c. Graf komplit tiga dikalikan sebanyak tiga kali ($K_3 \times K_3 \times K_3$)

Karena pada item b sudah diketahui hasil dari graf $K_3 \times K_3$, maka untuk hasil perkalian $K_3 \times K_3 \times K_3$ diperoleh dengan mengalikan hasil graf $K_3 \times K_3$ dengan K_3 .



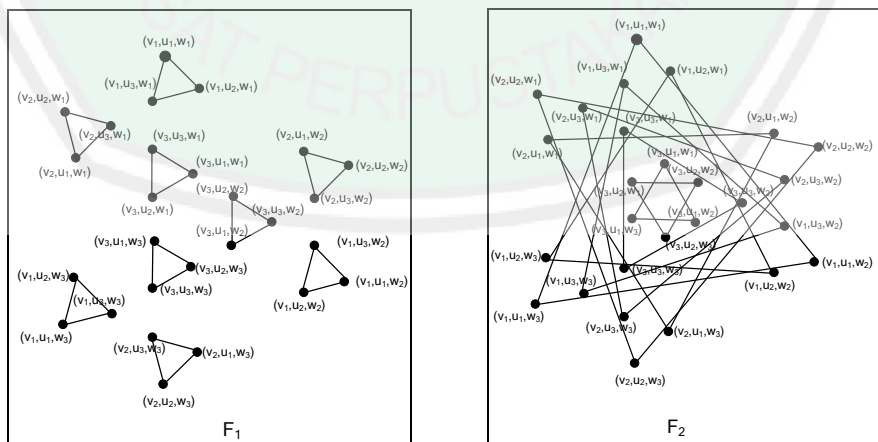
Gambar 3.29. Gambar $G_1 = K_3 \times K_3$ dan $G_2 = K_3$

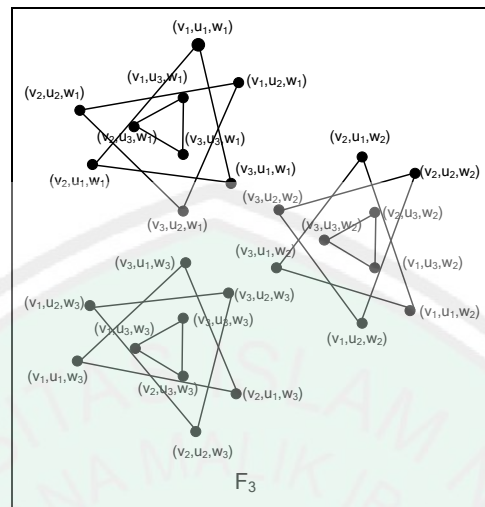
Graf hasil perkalian graf $K_3 \times K_3 \times K_3$ adalah sebagai berikut :



Gambar 3.30. Graf Hasil Perkalian $K_3 \times K_3 \times K_3$

Gambar 3.30 memperlihatkan bahwa graf tersebut memiliki 27 titik dan 81 sisi. Jika graf di atas difaktorkan dengan menggunakan faktor-2 menghasilkan faktor-faktor sebagai berikut:

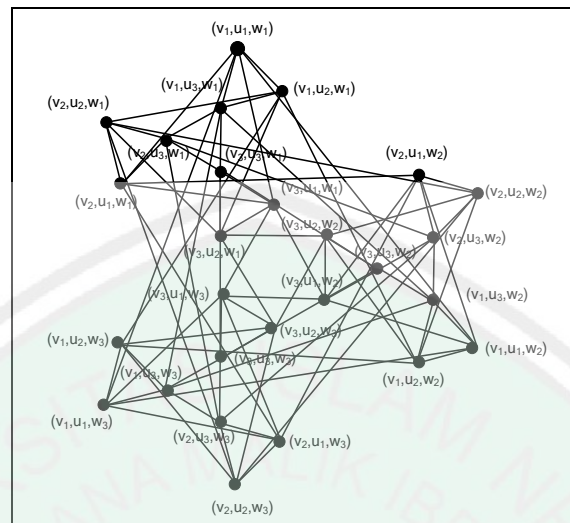




Gambar 3.31. Faktor-2 dari Graf Hasil Perkalian $K_3 \times K_3 \times K_3$

Gambar 3.31 menunjukkan bahwa F_1 , F_2 dan F_3 adalah tiga *spanning subgraf* dari graf $K_3 \times K_3 \times K_3$ dan merupakan faktor-faktor graf $K_3 \times K_3 \times K_3$ yang diperoleh dari pemfaktoran graf $K_3 \times K_3 \times K_3$ dengan menggunakan faktor-2. Jika F_1 , F_2 dan F_3 adalah faktor-faktor graf $K_3 \times K_3 \times K_3$ yang sisi-sisinya saling *disjoint* pada graf $K_3 \times K_3 \times K_3$ sedemikian hingga $F_1 \oplus F_2 \oplus F_3 = K_3 \times K_3 \times K_3$ disebut sebagai penjumlahan sisi dari faktor-faktor graf $K_3 \times K_3 \times K_3$. Sehingga graf $K_3 \times K_3 \times K_3$ memiliki faktor-2 sebanyak 3 faktor.

Sedangkan dengan menggunakan faktor-6 menghasilkan faktor berupa dirinya sendiri yang merupakan subgraf terbesar dari graf $K_3 \times K_3 \times K_3$ yang ditunjukkan oleh gambar berikut:

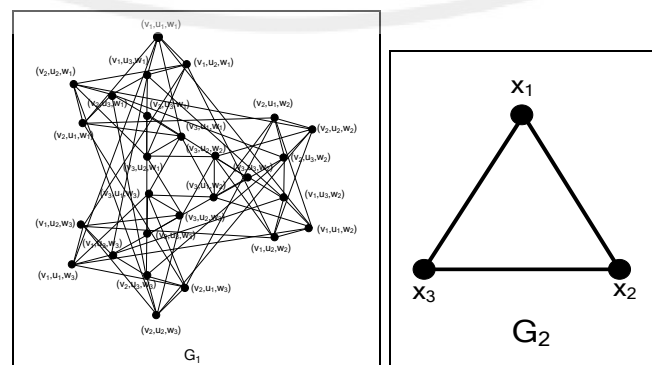


Gambar 3.32. Faktor-6 dari Graf Hasil Perkalian $K_3 \times K_3 \times K_3$

Karena faktor tersebut merupakan subgraf terbesar dari graf hasil perkalian graf komplit tiga ($K_3 \times K_3 \times K_3$) maka hanya memiliki faktor-4 sebanyak 1 faktor. Jadi $K_3 \times K_3 \times K_3$ memiliki faktor-2 sebanyak 3 faktor dan faktor-6 sebanyak 1 faktor.

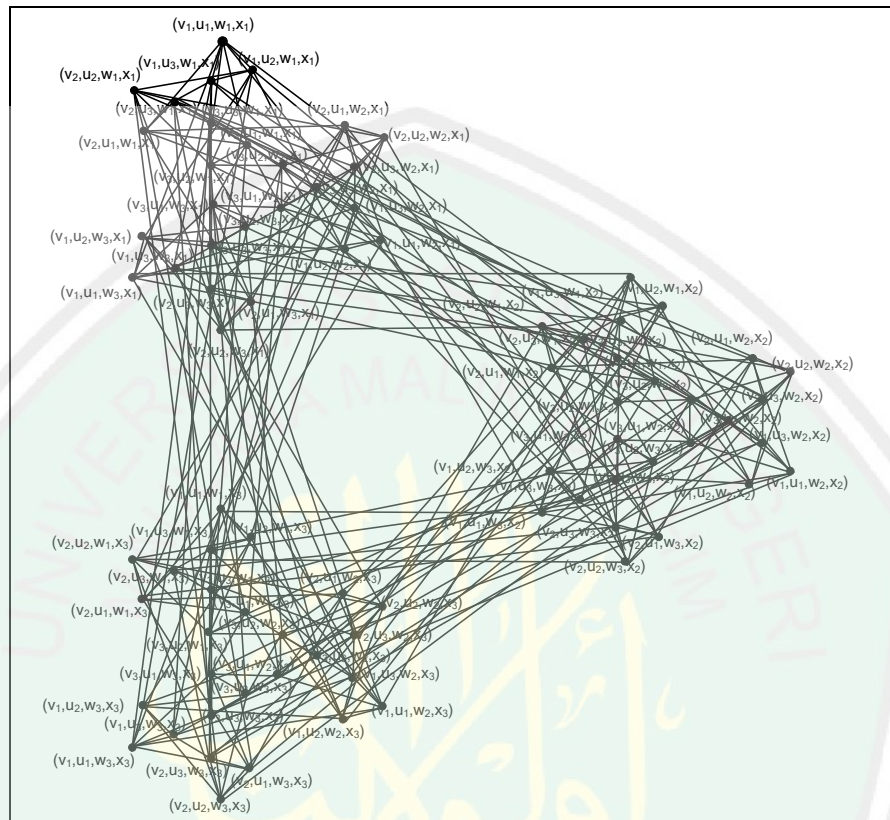
d. Graf komplit tiga dikalikan sebanyak empat kali ($K_3 \times K_3 \times K_3 \times K_3$)

Karena pada item c sudah diketahui hasil dari graf $K_3 \times K_3 \times K_3$, maka untuk hasil perkalian $K_3 \times K_3 \times K_3 \times K_3$ diperoleh dengan mengalikan hasil graf $K_3 \times K_3 \times K_3$ dengan K_3 .



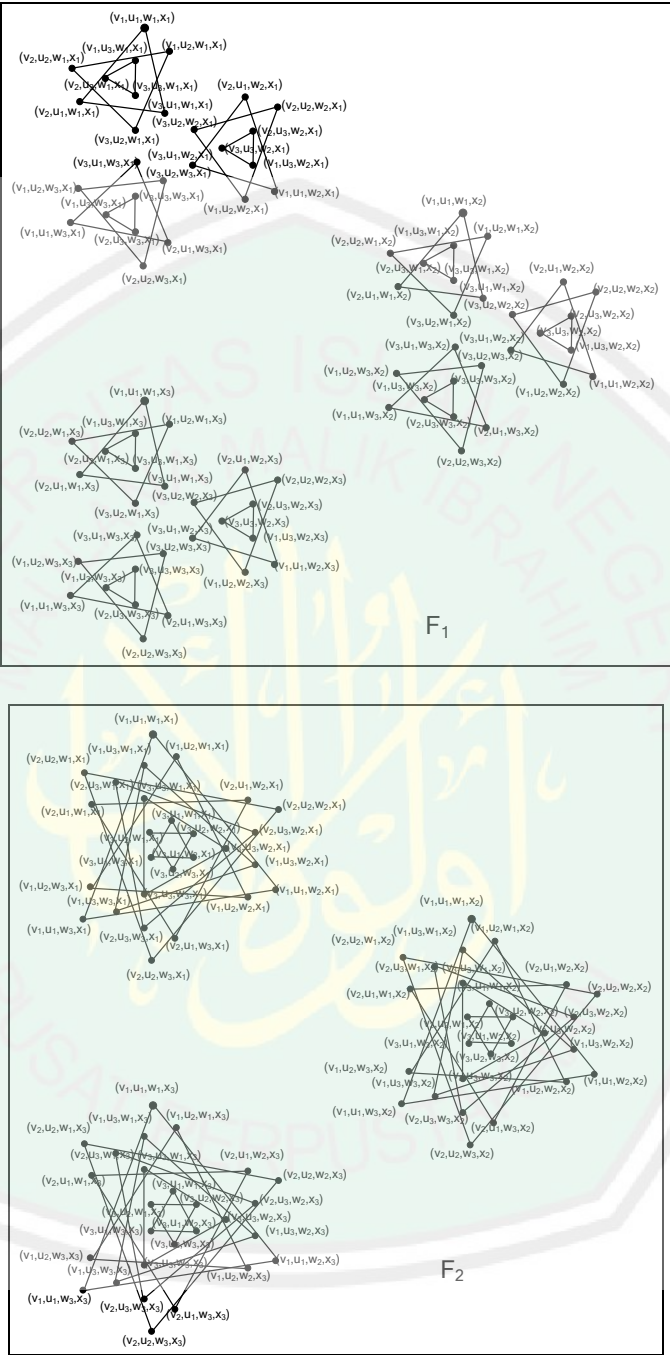
Gambar 3.33. Gambar $G_1 = K_3 \times K_3 \times K_3$ dan $G_2 = K_3$

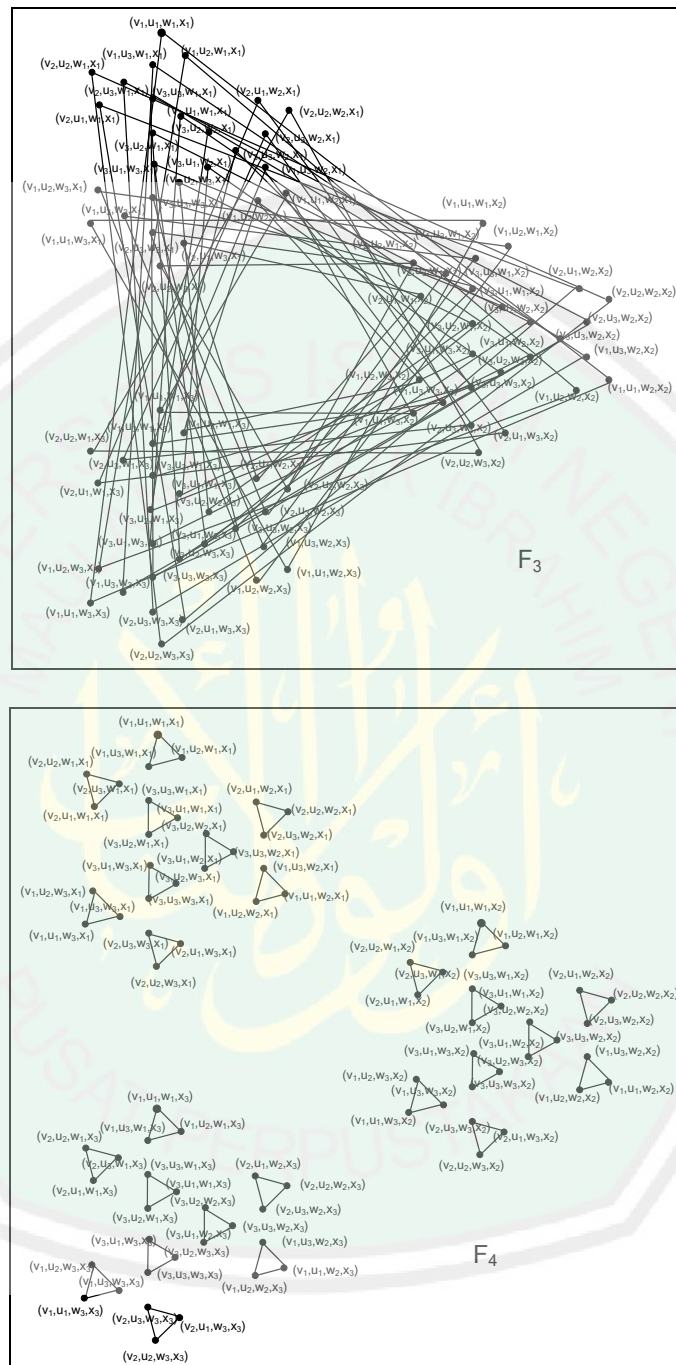
Graf hasil perkalian graf $K_3 \times K_3 \times K_3 \times K_3$ adalah sebagai berikut :



Gambar 3.34. Graf Hasil Perkalian $K_3 \times K_3 \times K_3 \times K_3$

Gambar 3.34 memperlihatkan bahwa graf tersebut memiliki 81 titik dan 324 sisi. Jika graf di atas difaktorkan dengan menggunakan faktor-2 menghasilkan faktor-faktor sebagai berikut:



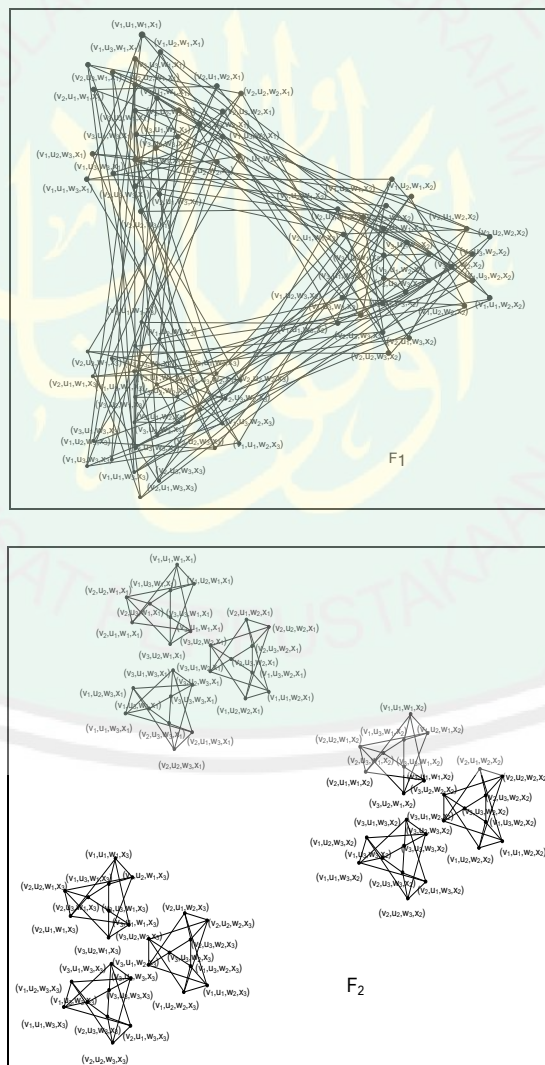


Gambar 3.35. Faktor-2 dari Graf Hasil Perkalian $K_3 \times K_3 \times K_3 \times K_3$

Gambar 3.35 menunjukkan bahwa F_1 , F_2 , F_3 dan F_4 adalah empat *spanning subgraf* dari graf $K_3 \times K_3 \times K_3 \times K_3$ dan merupakan faktor-faktor graf $K_3 \times K_3 \times K_3 \times K_3$ yang diperoleh dari pemfaktoran graf $K_3 \times K_3 \times K_3 \times K_3$ dengan

menggunakan faktor-2. Jika F_1 , F_2 , F_3 dan F_4 adalah faktor-faktor graf $K_3 \times K_3 \times K_3 \times K_3$ yang sisi-sisinya saling *disjoint* pada graf $K_3 \times K_3 \times K_3 \times K_3$ sedemikian hingga $F_1 \oplus F_2 \oplus F_3 \oplus F_4 = K_3 \times K_3 \times K_3 \times K_3$ disebut sebagai penjumlahan sisi dari faktor-faktor graf $K_3 \times K_3 \times K_3 \times K_3$. Sehingga graf $K_3 \times K_3 \times K_3 \times K_3$ memiliki faktor-2 sebanyak 4 faktor.

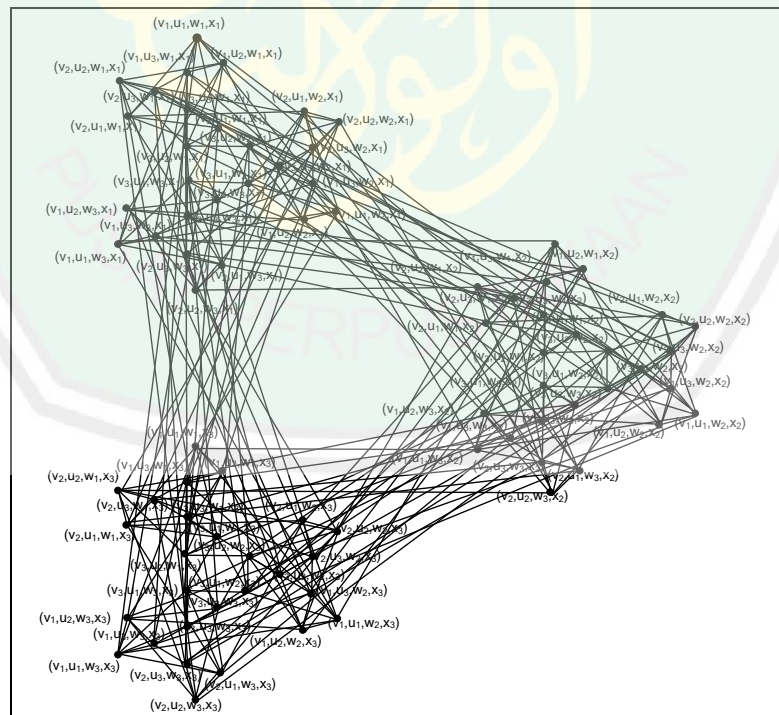
Jika difaktorkan dengan menggunakan faktor-4 menghasilkan faktor-faktor berikut:



Gambar 3.36. Faktor-4 dari Graf Hasil Perkalian $K_3 \times K_3 \times K_3 \times K_3$

Gambar 3.36 menunjukkan bahwa F_1 dan F_2 adalah empat *spanning subgraf* dari graf $K_3 \times K_3 \times K_3 \times K_3$ dan merupakan faktor-faktor graf $K_3 \times K_3 \times K_3 \times K_3$ yang diperoleh dari pemfaktoran graf $K_3 \times K_3 \times K_3 \times K_3$ dengan menggunakan faktor-4. Jika F_1 , F_2 , dan F_3 adalah faktor-faktor graf $K_3 \times K_3 \times K_3 \times K_3$ yang sisi-sisinya saling *disjoint* pada graf $K_3 \times K_3 \times K_3 \times K_3$ sedemikian hingga $F_1 \oplus F_2 = K_3 \times K_3 \times K_3 \times K_3$ disebut sebagai penjumlahan sisi dari faktor-faktor graf $K_3 \times K_3 \times K_3 \times K_3$. Sehingga graf $K_3 \times K_3 \times K_3 \times K_3$ memiliki faktor-4 sebanyak 2 faktor.

Sedangkan dengan menggunakan faktor-6 menghasilkan faktor berupa dirinya sendiri yang merupakan subgraf terbesar dari graf $K_3 \times K_3 \times K_3 \times K_3$ yang ditunjukkan oleh gambar berikut:



Gambar 3.37. Faktor-6 dari Graf Hasil Perkalian $K_3 \times K_3 \times K_3 \times K_3$

Karena faktor tersebut merupakan subgraf terbesar dari graf hasil perkalian graf komplit tiga ($K_3 \times K_3 \times K_3 \times K_3$) maka hanya memiliki faktor-8 sebanyak 1 faktor. Jadi $K_3 \times K_3 \times K_3 \times K_3$ memiliki faktor-2 sebanyak 4 faktor, faktor-4 sebanyak 2 faktor dan faktor-8 sebanyak 1 faktor.

Berdasarkan contoh-contoh di atas dapat dibuat tabel faktorisasi graf komplit tiga sebanyak m kali ($K_3 \times K_3 \times \dots \times K_3 = (K_3)^m$) sebagai berikut:

Tabel 3.3: Tabel faktorisasi graf hasil perkalian graf komplit 3

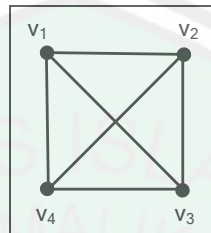
No	m	$\text{der}_G(v_i)$	$\sum_{titik}$	$\sum_{sisi}$	Faktor yang dimiliki	Banyak faktor
1	1	2	3	3	Faktor-2	2
2	2	4	9	18	Faktor-2 Faktor-4	2 1
3	3	6	27	81	Faktor-2 Faktor-6	3 1
4	4	8	81	324	Faktor-2 Faktor-4 Faktor-8	4 2 1
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
4	m	2m	3^m	$(2m \times 3^m) : 2$	Faktor-i Dengan i faktor genap positif dari 2m	$\frac{2m}{i}$

Berdasarkan tabel di atas dapat diambil kesimpulan sementara bahwa graf hasil perkalian graf komplit tiga dengan m kali memiliki faktor-i dengan i faktor genap positif dari $2m$ dan i adalah bilangan genap. Sehingga menghasilkan sebanyak $\frac{2m}{i}$ faktor untuk setiap faktor-i.

3. Faktorisasi pada graf komplit empat ($K_4 \times K_4 \times \dots \times K_4 = (K_4)^m$)

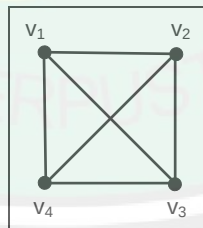
a. Graf komplit empat (K_4) dikalikan satu kali (tunggal).

Gambar K_4 adalah sebagai berikut:



Gambar 3.38. Graf Komplit Empat (K_4)

Karena graf K_4 merupakan graf komplit yang beroder genap dan berderajat 3 dengan jumlah sisi genap maka graf K_4 memiliki faktor-1. Jika graf K_4 difaktorkan menggunakan faktor-2 maka akan ada 1 titik yang tidak terhubung atau ada sisi yang tidak terdapat pada faktor-faktornya, sehingga K_4 tidak memiliki faktor-2. Jika difaktorkan menggunakan faktor-3, graf komplit empat akan memperoleh faktor sebagai berikut:

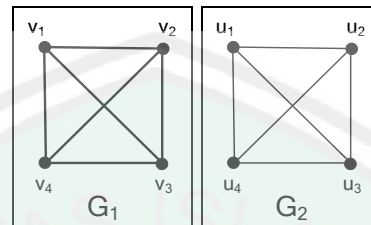


Gambar 3.39. Faktor-3 dari Graf K_4

Karena faktor tersebut merupakan subgraf terbesar maka graf komplit empat (K_4) hanya memiliki faktor-1 sebanyak 3 faktor dan faktor-3 sebanyak 1 faktor.

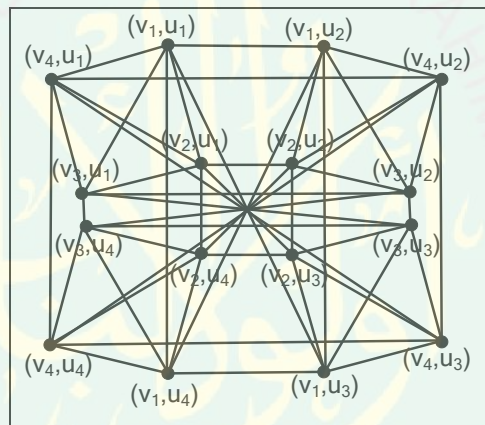
b. Graf komplit empat dikalikan sebanyak dua kali ($K_4 \times K_4$)

Dua graf komplit empat yang dikalikan ($K_4 \times K_4$) yaitu:



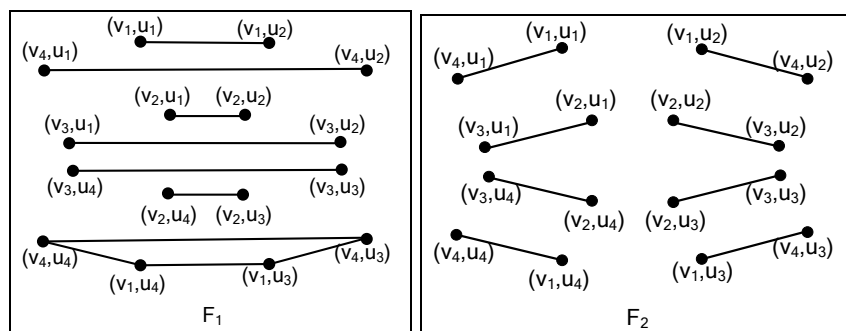
Gambar 3.40. Gambar $G_1 = K_4$ dan $G_2 = K_4$

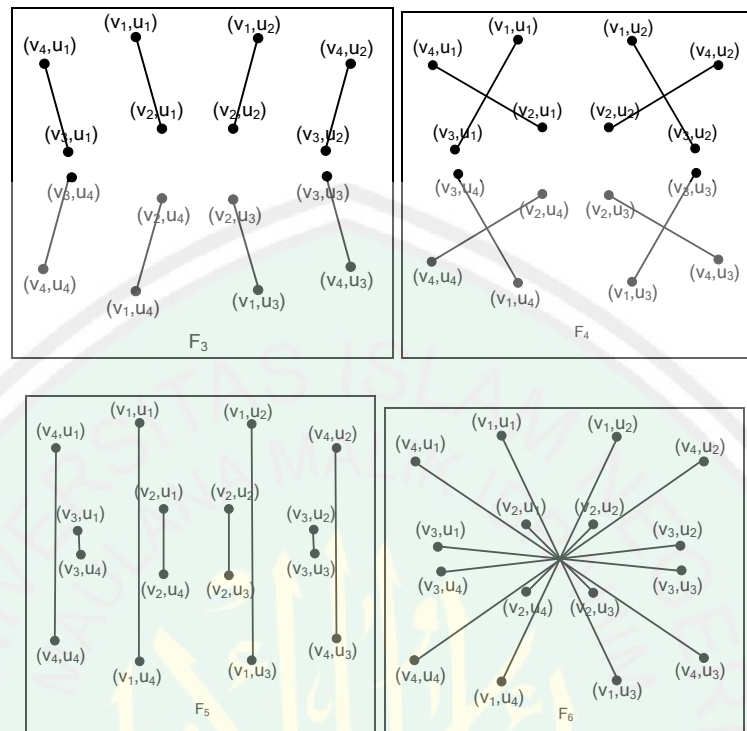
Hasil perkalian graf $K_4 \times K_4$ adalah sebagai berikut :



Gambar 3.41. Graf Hasil Perkalian $K_4 \times K_4$

Gambar 3.41 memperlihatkan bahwa graf tersebut memiliki 16 titik dan 48 sisi. Jika graf di atas difaktorkan dengan menggunakan faktor-1 menghasilkan faktor-faktor berikut:

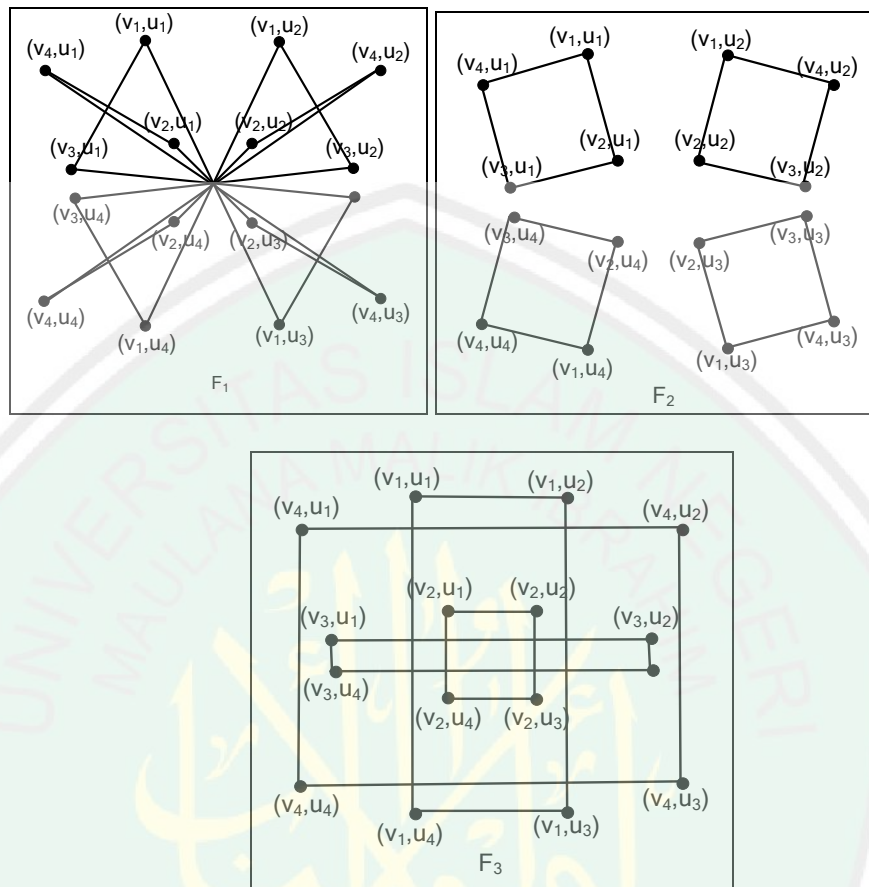




Gambar 3.42. Faktor-1 dari Graf Hasil Perkalian $K_4 \times K_4$

Gambar 3.42 menunjukkan bahwa F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 dan F_6 adalah enam *spanning subgraf* dari graf $K_4 \times K_4$ dan merupakan faktor-faktor graf $K_4 \times K_4$ yang diperoleh dari pemfaktoran graf $K_4 \times K_4$ dengan menggunakan faktor-1. Jika F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 dan F_6 adalah faktor-faktor graf $K_4 \times K_4$ yang sisi-sisinya saling *disjoint* pada graf $K_4 \times K_4$ sedemikian hingga $F_1 \oplus F_2 \oplus F_3 \oplus F_4 \oplus F_5 \oplus F_6 = K_4 \times K_4$ disebut sebagai penjumlahan sisi dari faktor-faktor graf $K_4 \times K_4$. Sehingga graf $K_4 \times K_4$ memiliki faktor-1 sebanyak 6 faktor.

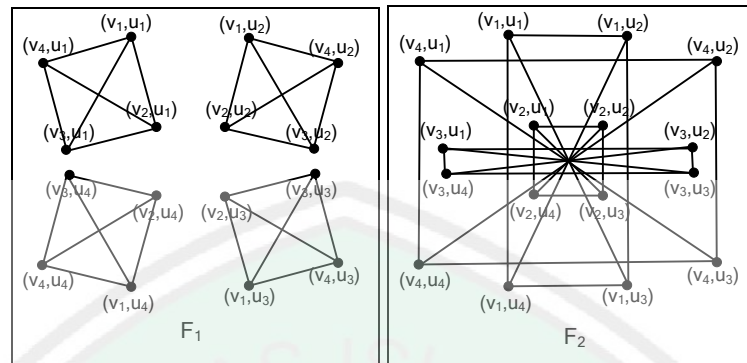
Jika difaktorkan menggunakan faktor-2 akan menghasilkan faktor-faktor berikut:



Gambar 3.43. Faktor-2 dari Graf Hasil Perkalian $K_4 \times K_4$

Gambar 3.43 menunjukkan bahwa F_1 , F_2 dan F_3 adalah tiga *spanning subgraf* dari graf $K_4 \times K_4$ dan merupakan faktor-faktor graf $K_4 \times K_4$ yang diperoleh dari pemfaktoran graf $K_4 \times K_4$ dengan menggunakan faktor-1. Jika F_1 , F_2 dan F_3 adalah faktor-faktor graf $K_4 \times K_4$ yang sisi-sisinya saling *disjoint* pada graf $K_4 \times K_4$ sedemikian hingga $F_1 \oplus F_2 \oplus F_3 = K_4 \times K_4$ disebut sebagai penjumlahan sisi dari faktor-faktor graf $K_4 \times K_4$. Sehingga graf $K_4 \times K_4$ memiliki faktor-2 sebanyak 3 faktor.

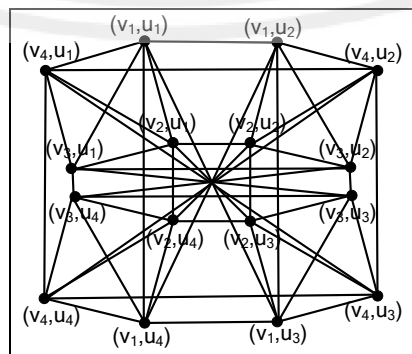
Jika difaktorkan menggunakan faktor-3 menghasilkan faktor-faktor sebagai berikut:



Gambar 3.44. Faktor-3 dari Graf Hasil Perkalian $K_4 \times K_4$

Gambar 3.44 menunjukkan bahwa F_1 dan F_2 adalah dua *spaning subgraf* dari graf $K_4 \times K_4$ dan merupakan faktor-faktor graf $K_4 \times K_4$ yang diperoleh dari pemfaktoran graf $K_4 \times K_4$ dengan menggunakan faktor-3. Jika F_1 dan F_2 adalah faktor-faktor graf $K_4 \times K_4$ yang sisi-sisinya saling *disjoint* pada graf $K_4 \times K_4$ sedemikian hingga $F_1 \oplus F_2 = K_4 \times K_4$ disebut sebagai penjumlahan sisi dari faktor-faktor graf $K_4 \times K_4$. Sehingga graf $K_4 \times K_4$ memiliki faktor-3 sebanyak 2 faktor.

Sedangkan dengan menggunakan faktor-6 menghasilkan faktor berupa dirinya sendiri yang merupakan subgraf terbesar dari graf $K_4 \times K_4$ yang ditunjukkan oleh gambar berikut:

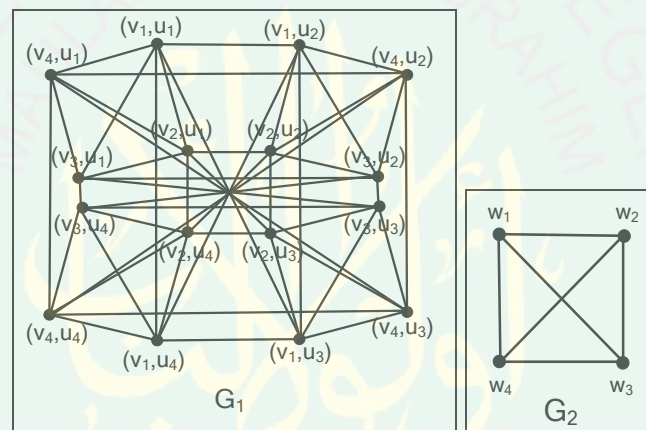


Gambar 3.45. Faktor-6 dari Graf Hasil Perkalian $K_4 \times K_4$

Karena faktor tersebut merupakan subgraf terbesar dari graf hasil perkalian graf komplit empat ($K_4 \times K_4$) maka hanya memiliki faktor-4 sebanyak 1 faktor. Jadi $K_4 \times K_4$ memiliki faktor-2 sebanyak 2 faktor dan faktor-4 sebanyak 1 faktor.

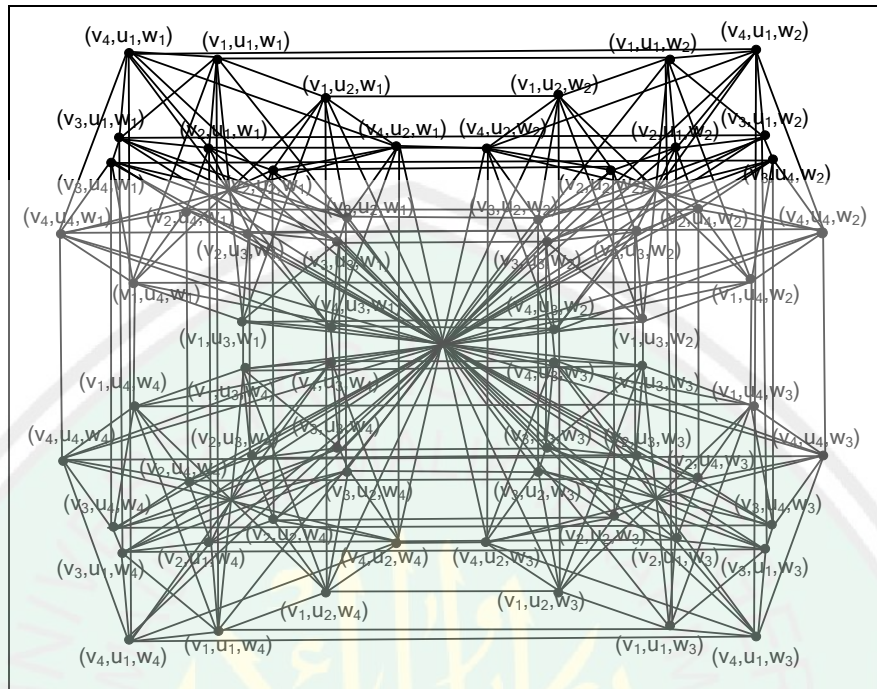
c. Graf komplit empat dikalikan sebanyak tiga kali ($K_4 \times K_4 \times K_4$)

Karena pada item b sudah diketahui hasil dari graf $K_4 \times K_4$, maka untuk hasil perkalian $K_4 \times K_4 \times K_4$ diperoleh dengan mengalikan hasil graf $K_4 \times K_4$ dengan K_4



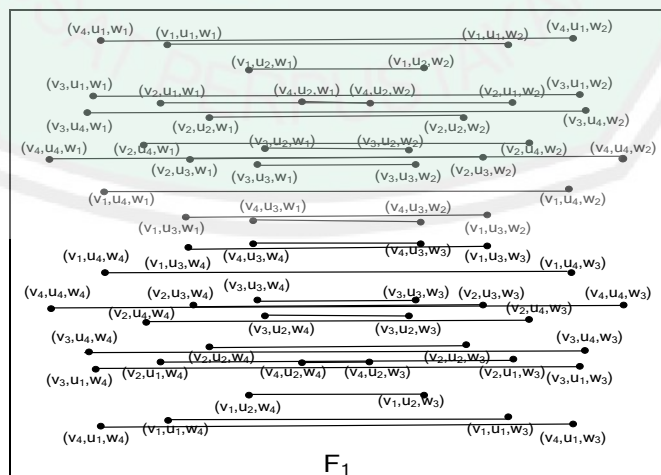
Gambar 3.46. Gambar $G_1 = K_4 \times K_4$ dan $G_2 = K_4$

graf hasil perkalian graf $K_4 \times K_4$ adalah sebagai berikut :



Gambar 3.47. Graf Hasil Perkalian $K_4 \times K_4 \times K_4$

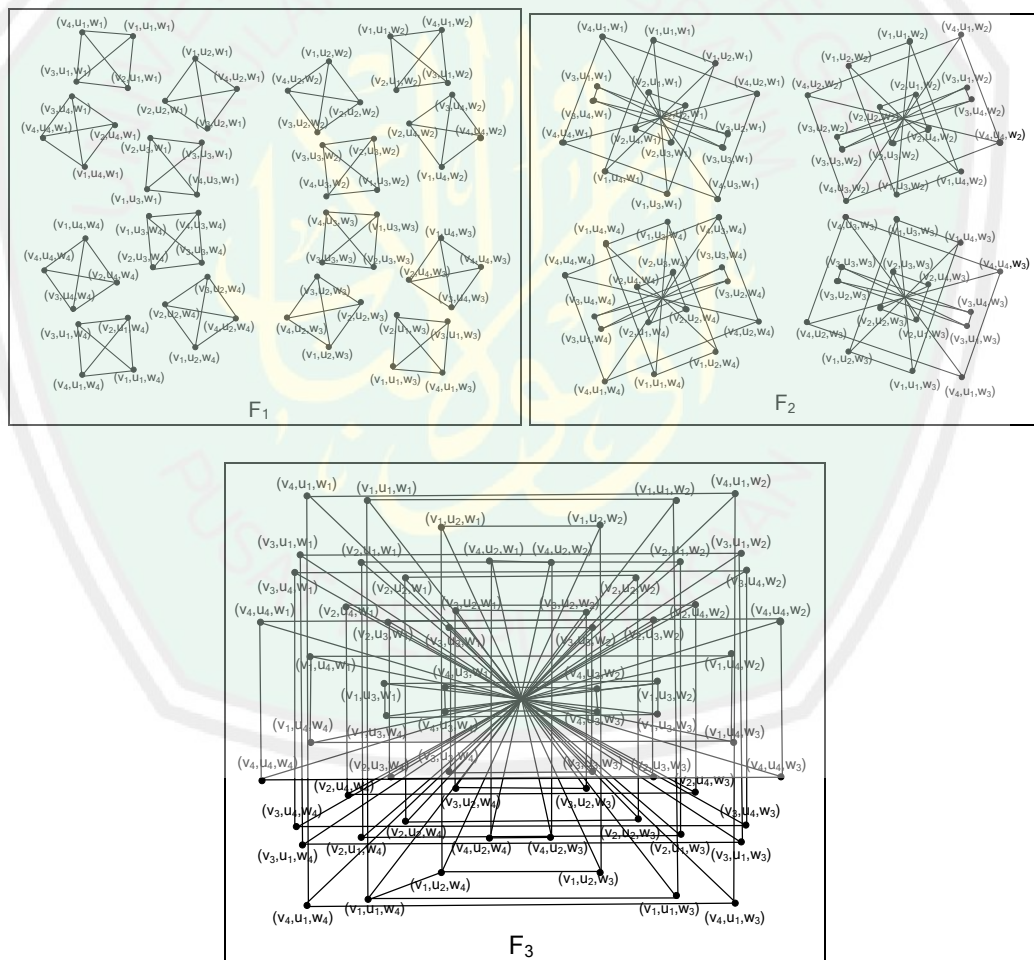
Graf 3.47 di atas memperlihatkan bahwa graf tersebut memiliki 64 titik dan 288 sisi. Jika graf di atas difaktorkan dengan menggunakan faktor-1 menghasilkan faktor-faktor berikut:



Gambar 3.48. Salah Satu faktor-1 dari Graf Hasil Perkalian $K_4 \times K_4 \times K_4$

Karena pada salah satu faktor yang digambarkan di atas menunjukkan bahwa dengan 64 titik dan 32 sisi dapat membentuk salah satu faktor dari graf hasil perkalian $K_4 \times K_4 \times K_4$ jika difaktorkan dengan menggunakan faktor-1, maka dengan 64 titik dan 288 sisi yang dimiliki graf hasil perkalian $K_4 \times K_4 \times K_4$ memiliki faktor-1 sebanyak 9 faktor.

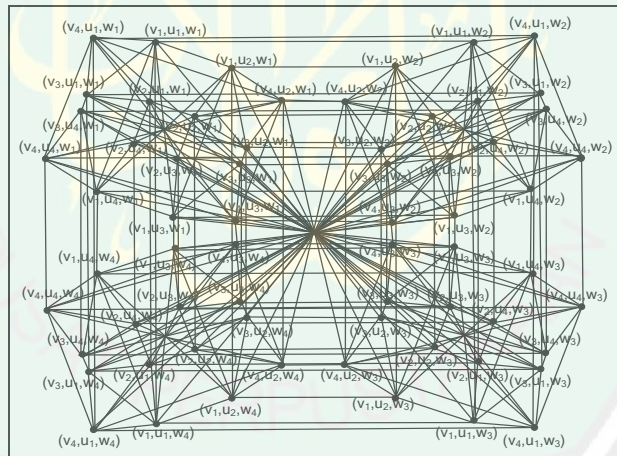
Jika difaktorkan dengan menggunakan faktor-3 menghasilkan faktor-faktor sebagai berikut:



Gambar 3.49. Faktor-3 dari Graf Hasil Perkalian $K_4 \times K_4 \times K_4$

Gambar 3.49 menunjukkan bahwa F_1 , F_2 dan F_3 adalah tiga *spanning subgraf* dari graf $K_4 \times K_4 \times K_4$ dan merupakan faktor-faktor graf $K_4 \times K_4 \times K_4$ yang diperoleh dari pemfaktoran graf $K_4 \times K_4 \times K_4$ dengan menggunakan faktor-3. Jika F_1 , F_2 dan F_4 adalah faktor-faktor graf $K_4 \times K_4 \times K_4$ yang sisi-sisinya saling *disjoint* pada graf $K_4 \times K_4 \times K_4$ sedemikian hingga $F_1 \oplus F_2 \oplus F_3 = K_4 \times K_4 \times K_4$ disebut sebagai penjumlahan sisi dari faktor-faktor graf $K_4 \times K_4 \times K_4$. Sehingga graf $K_4 \times K_4 \times K_4$ memiliki faktor-3 sebanyak 3 faktor.

Sedangkan dengan menggunakan faktor-9 menghasilkan faktor berupa dirinya sendiri yang merupakan subgraf terbesar dari graf $K_4 \times K_4 \times K_4$ yang ditunjukkan oleh gambar berikut:



Gambar 3.50. Faktor-9 dari Graf Hasil Perkalian $K_4 \times K_4 \times K_4$

Karena faktor tersebut merupakan subgraf terbesar dari graf hasil perkalian graf komplit empat ($K_4 \times K_4 \times K_4$) maka hanya memiliki faktor-9 sebanyak 1 faktor. Jadi $K_4 \times K_4 \times K_4$ memiliki faktor-1 sebanyak 3 faktor, faktor-3 sebanyak 3 faktor dan faktor-9 sebanyak 1 faktor.

Berdasarkan contoh-contoh di atas dapat dibuat tabel faktorisasi graf komplit empat sebanyak m kali $K_4 \times K_4 \times \dots \times K_4 = (K_4)^m$ sebagai berikut:

Tabel 3.4: Tabel faktorisasi graf hasil perkalian graf komplit empat

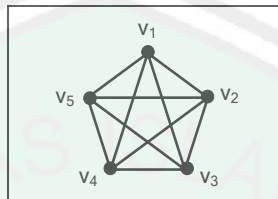
No	m	$\text{der}_G(v_i)$	$\sum \text{titik}$	$\sum \text{sisi}$	Faktor yang dimiliki	Banyak faktor
1	1	3	4	6	Faktor-1 Faktor-3	3 1
2	2	6	16	48	Faktor-1 Faktor-2 Faktor-3 Faktor-6	6 3 2 1
3	3	9	64	288	Faktor-1 Faktor-3 Faktor-9	9 3 1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
4	m	3m	4 ^m	$(3m \times 4^m) : 2$	Faktor-i Dengan i faktor positif dari 3m	$\frac{3m}{i}$

Berdasarkan tabel di atas dapat diambil kesimpulan sementara bahwa graf hasil perkalian graf komplit tiga dengan m kali memiliki faktor-i dengan i adalah faktor bilangan dari $3m$ dan menghasilkan sebanyak $\frac{3m}{i}$ faktor untuk setiap faktor-i.

4. Faktorisasi pada graf komplit lima ($K_5 \times K_5 \times \dots \times K_5 = (K_5)^m$).

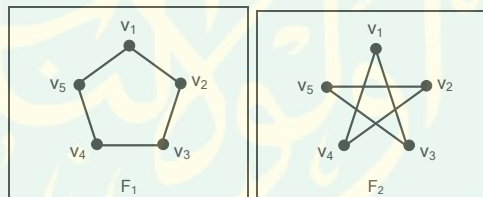
a. Graf komplit lima (K_5) dikalikan satu kali (tunggal).

Gambar K_5 adalah sebagai berikut:



Gambar 3.51. Graf Komplit Lima (K_5)

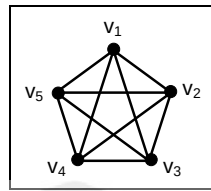
Karena graf K_5 merupakan graf komplit yang beroder ganjil maka graf K_5 tidak memiliki faktor-1. Jika difaktorkan menggunakan faktor-2 akan menghasilkan faktor-faktor berikut:



Gambar 3.52. Faktor-2 dari Graf K_5

Gambar 3.52 menunjukkan bahwa F_1 dan F_2 adalah dua *spanning subgraf* dari graf K_5 dan merupakan faktor-faktor graf K_5 yang diperoleh dari pemfaktoran graf K_5 dengan menggunakan faktor-2. Jika F_1 dan F_2 adalah faktor-faktor graf K_5 yang sisi-sisinya saling *disjoint* pada graf K_5 sedemikian hingga $F_1 \oplus F_2 = K_5$ disebut sebagai penjumlahan sisi dari faktor-faktor graf K_5 . Sehingga graf K_5 memiliki faktor-2 sebanyak 2 faktor.

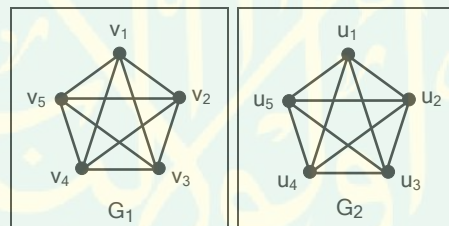
Jika graf K_5 difaktorkan menggunakan faktor-4, graf komplit lima akan memperoleh faktor berikut:

Gambar 3.53. Faktor-4 dari Graf K_5

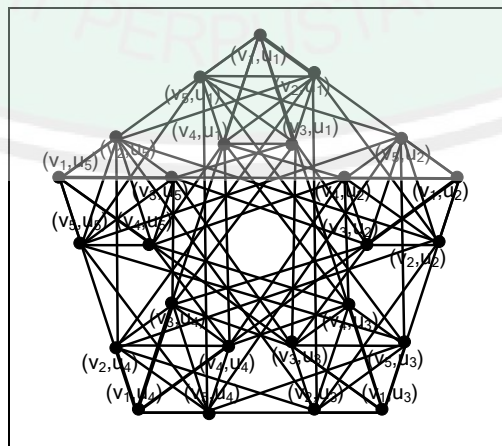
Karena faktor tersebut merupakan spanning subgraf terbesar maka graf komplit lima (K_5) hanya memiliki faktor-4. Jadi $K_5 \times K_5$ memiliki faktor-2 sebanyak 2 faktor dan faktor-4 sebanyak 1 faktor.

b. Graf komplit lima dikalikan sebanyak dua kali ($K_5 \times K_5$)

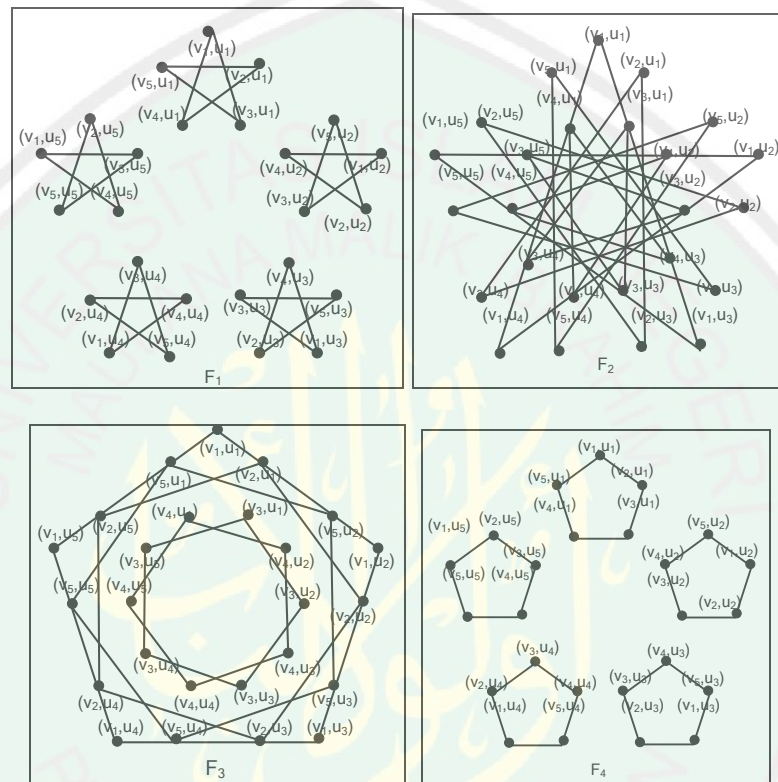
Dua graf komplit lima yang dikalikan ($K_5 \times K_5$) yaitu:

Gambar 3.54. Gambar $G_1 = K_5$ dan $G_2 = K_5$

hasil perkalian graf $K_5 \times K_5$ adalah sebagai berikut :

Gambar 3.55. Graf Hasil Perkalian $K_5 \times K_5$

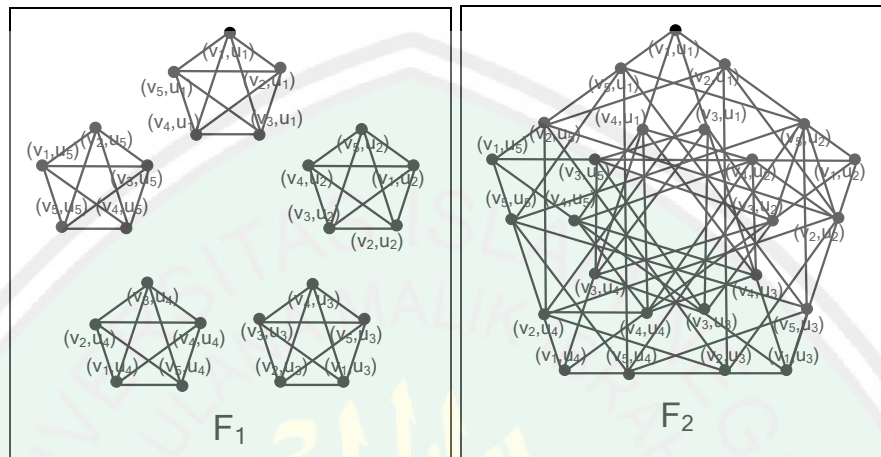
Graf 3.55 memperlihatkan bahwa graf tersebut memiliki 25 titik dan 100 sisi. Jika graf di atas difaktorkan dengan menggunakan faktor-2 menghasilkan faktor-faktor sebagai berikut:



Gambar 3.56. Faktor-2 dari Graf Hasil Perkalian $K_5 \times K_5$

Gambar 3.56 menunjukkan bahwa F_1 , F_2 , F_3 dan F_4 adalah empat *spanning subgraf* dari graf $K_5 \times K_5$ dan merupakan faktor-faktor graf $K_5 \times K_5$ yang diperoleh dari pemfaktoran graf $K_5 \times K_5$ dengan menggunakan faktor-2. Jika F_1 , F_2 , F_3 dan F_4 adalah faktor-faktor graf $K_5 \times K_5$ yang sisi-sisinya saling disjoint pada graf $K_5 \times K_5$ sedemikian hingga $F_1 \oplus F_2 \oplus F_3 \oplus F_4 = K_5 \times K_5$ disebut sebagai penjumlahan sisi dari faktor-faktor graf $K_5 \times K_5$. Sehingga graf $K_5 \times K_5$ memiliki faktor-2 sebanyak 4 faktor.

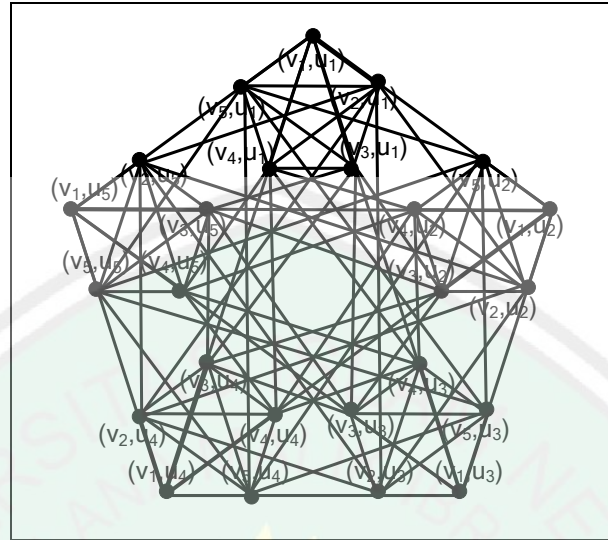
Jika graf K_5 difaktorkan menggunakan faktor-4, graf komplit $K_5 \times K_5$ akan memperoleh faktor berikut:



Gambar 3.57. Faktor-4 dari Graf Hasil Perkalian $K_5 \times K_5$

Gambar 3.57 menunjukkan bahwa F_1 dan F_2 adalah dua *spaning subgraf* dari graf $K_5 \times K_5$ dan merupakan faktor-faktor graf $K_5 \times K_5$ yang diperoleh dari pemfaktoran graf $K_5 \times K_5$ dengan menggunakan faktor-2. Jika F_1 dan F_2 adalah faktor-faktor graf $K_5 \times K_5$ yang sisi-sisinya saling *disjoint* pada graf $K_5 \times K_5$ sedemikian hingga $F_1 \oplus F_2 = K_5 \times K_5$ disebut sebagai penjumlahan sisi dari faktor-faktor graf $K_5 \times K_5$. Sehingga graf $K_5 \times K_5$ memiliki faktor-4 sebanyak 2 faktor.

Sedangkan dengan menggunakan faktor-8 menghasilkan faktor berupa dirinya sendiri yang merupakan subgraf terbesar dari graf $K_5 \times K_5$ yang ditunjukkan oleh gambar berikut:

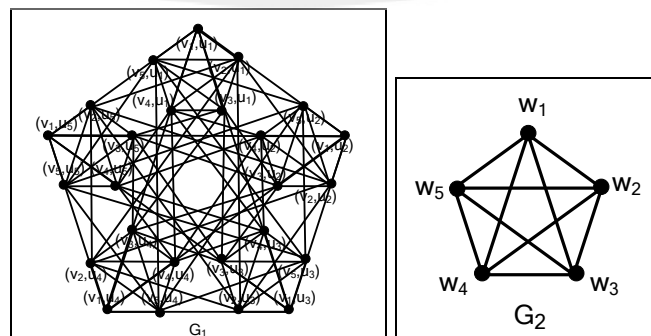


Gambar 3.58. Faktor-8 dari Graf Hasil Perkalian $K_5 \times K_5$

Karena faktor tersebut merupakan subgraf terbesar dari graf hasil perkalian graf komplit lima ($K_5 \times K_5$) maka hanya memiliki faktor-8 sebanyak 1 faktor. Jadi $K_5 \times K_5$ memiliki faktor-2 sebanyak 4 faktor, faktor-4 sebanyak 2 faktor dan faktor-8 sebanyak 1 faktor.

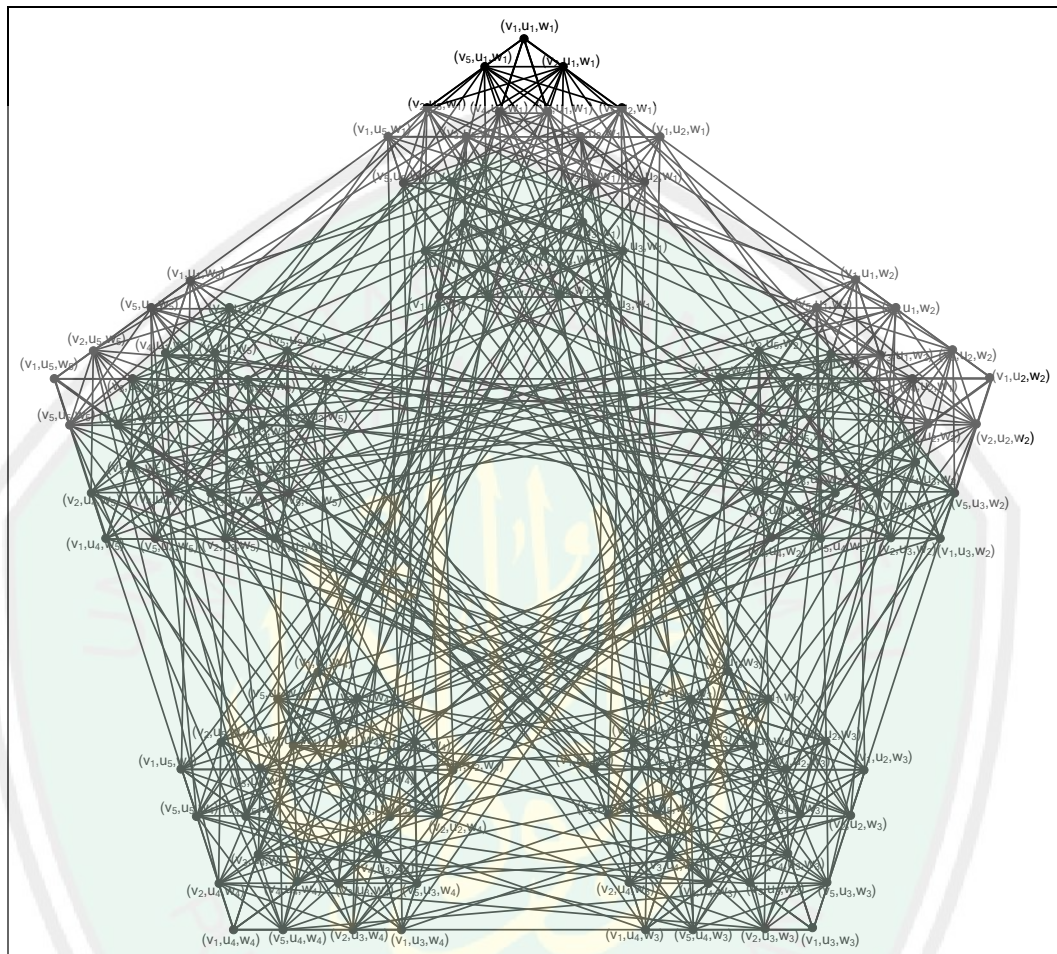
c. Graf komplit lima dikalikan sebanyak tiga kali ($K_5 \times K_5 \times K_5$)

Karena pada item b sudah diketahui hasil dari graf $K_5 \times K_5$, maka untuk hasil perkalian $K_5 \times K_5 \times K_5$ diperoleh dengan mengalikan hasil graf $K_5 \times K_5$ dengan K_5 .



Gambar 3.59. Gambar $G_1 = K_5 \times K_5$ dan $G_2 = K_5$

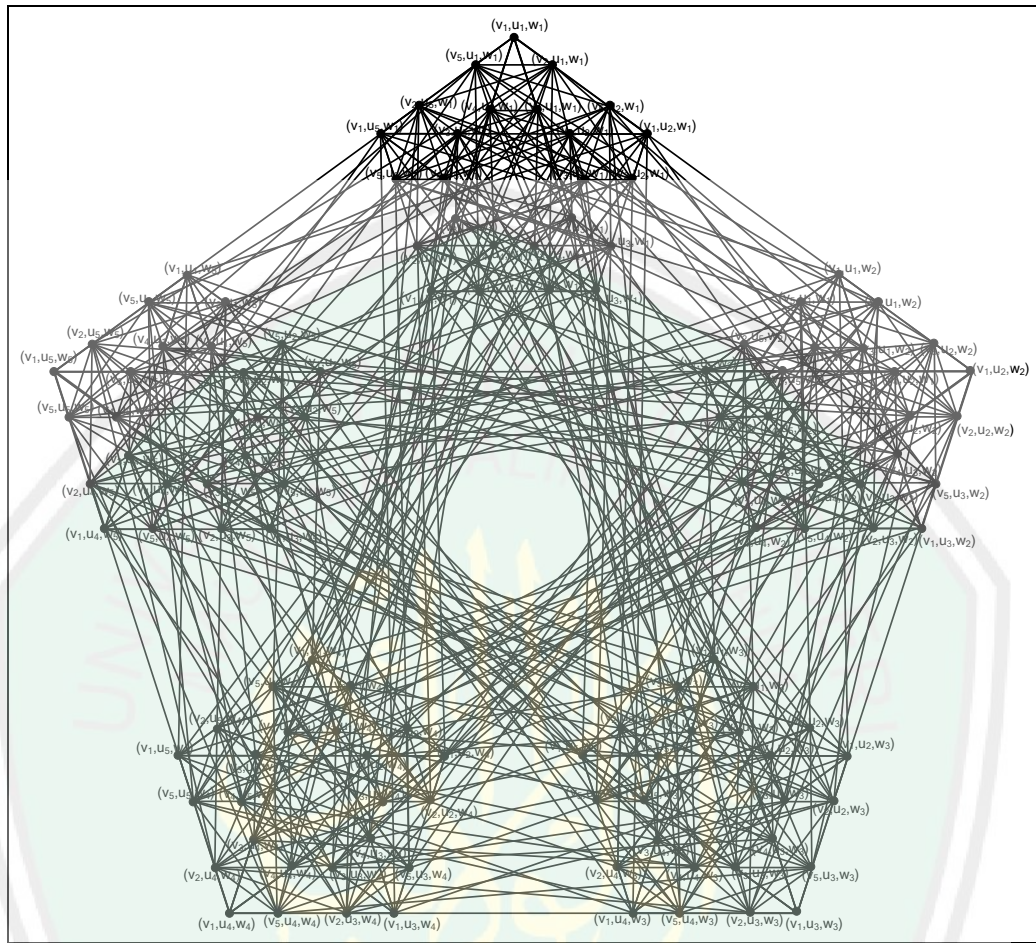
Diperoleh graf hasil perkalian graf $K_5 \times K_5 \times K_5$ adalah sebagai berikut



Gambar 3.60. Graf Hasil Perkalian $K_5 \times K_5 \times K_5$

Graf 3.60 di atas memperlihatkan bahwa graf tersebut memiliki 125 titik dan 750 sisi. Jika demikian maka dapat diketahui bahwa derajat setiap titiknya adalah 12. Karena pada faktor-2 memiliki derajat 2 maka faktor yang dihasilkan adalah 6 faktor.

Jika difaktorkan menggunakan faktor-4 maka akan setiap titik pada faktor akan berderajat 4 sehingga faktor yang dapat dihasilkan adalah 3 faktor. Sedangkan jika difaktorkan dengan menggunakan faktor-12 akan menghasilkan faktor yang berupa dirinya sendiri, yang ditunjukkan oleh gambar berikut:



Gambar 3.61. Faktor-12 dari Graf Hasil Perkalian $K_5 \times K_5 \times K_5$

Karena faktor tersebut merupakan subgraf terbesar dari graf hasil perkalian graf komplit lima ($K_5 \times K_5 \times K_5$) maka hanya memiliki faktor-12 sebanyak 1 faktor. Jadi $K_5 \times K_5 \times K_5$ memiliki faktor-2 sebanyak 6 faktor, faktor-4 sebanyak 3 faktor dan faktor-9 sebanyak 1 faktor.

Berdasarkan contoh-contoh di atas dapat dibuat tabel faktorisasi graf komplit lima sebanyak m kali $K_5 \times K_5 \times \dots \times K_5 = (K_5)^m$ sebagai berikut:

Tabel 3.5: Tabel faktorisasi graf hasil perkalian graf komplit empat

No	m	$\text{der}_G(v_i)$	$\sum \text{titik}$	$\sum \text{sisi}$	Faktor yang dimiliki	Banyak faktor
1	1	4	5	10	Faktor-2 Faktor-4	2 1
2	2	8	25	100	Faktor-2 Faktor-4 Faktor-8	4 2 1
3	3	12	125	750	Faktor-2 Faktor-4 Faktor-6 Faktor-12	6 4 2 1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
4	m	$4m$	5^m	$(4m \times 5^m) : 2$	Faktor- i Dengan i faktor genap positif dari $3m$	$\frac{4m}{i}$

Berdasarkan tabel di atas dapat diambil kesimpulan sementara bahwa graf hasil perkalian graf komplit tiga dengan m kali memiliki faktor- i dengan i adalah faktor bilangan dari $3m$ dan menghasilkan sebanyak $\frac{3m}{i}$ faktor untuk setiap faktor- i .

Berdasarkan beberapa kesimpulan sementara dari contoh-contoh faktorisasi K_n sebanyak m kali dapat dibuat tabel berikut:

Tabel 3.6: Tabel faktorisasi graf hasil perkalian graf komplit K_n

no	Jenis graf komplit (K_n)	Memiliki	Banyak faktor
1	K_2	Faktor-i, dengan i adalah faktor positif dari m	$\frac{m}{i}$
2	K_3	Faktor-i, dengan i adalah faktor genap positif dari 2m	$\frac{2m}{i}$
3	K_4	Faktor-i, dengan i adalah faktor positif dari 3m	$\frac{3m}{i}$
4	K_5	Faktor-i, dengan i adalah faktor genap positif dari 4m	$\frac{4m}{i}$
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.

Berdasarkan tabel di atas dapat kita buat konjektur bahwa

1. Pada graf hasil perkalian graf komplit n (K_n) sebanyak m kali dengan n adalah bilangan genap, memiliki faktor-i dengan i adalah faktor positif dari $(n-1) \times m$ sehingga menghasilkan sebanyak $\frac{(n-1)m}{i}$ faktor untuk setiap faktor-i.
2. Pada graf hasil perkalian graf komplit n (K_n) sebanyak m kali dengan n adalah bilangan ganjil, memiliki faktor-i dengan i adalah faktor genap positif dari $(n-1) \times m$. sehingga menghasilkan sebanyak $\frac{(n-1)m}{i}$ faktor untuk setiap faktor-i.

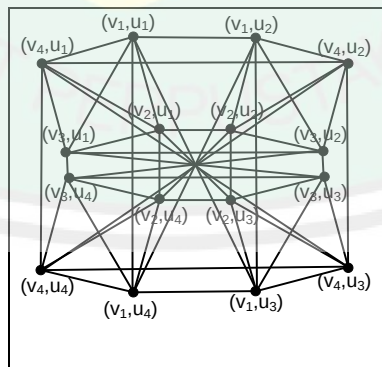
Konjektur di atas dapat disusun dalam kalimat matematis yang dibuktikan yaitu:

Kalimat matematis 1

Misalkan G adalah graf hasil perkalian graf komplit K_n berorder genap (n genap) yang dikalikan sebanyak m kali. Maka graf G memiliki faktor- i dengan i adalah faktor positif dari bilangan $(n - 1) \times m$ dengan banyak faktor $\frac{(n-1)m}{i}$.

Sebelum kalimat matematis di atas dibuktikan akan diberikan contoh ilustrasi dari teorema tersebut:

Misal G adalah hasil perkalian graf komplit empat (K_4) sebanyak dua kali maka graf hasil perkalian tersebut memiliki $4^2 = 16$ titik yang setiap titiknya berderajat $(4 - 1) \times 2 = 6$ dan memiliki $\frac{((4-1) \times 3) \times 4^2}{2} = \frac{6 \times 16}{2} = 48$ sisi yang dapat digambarkan sebagai berikut:

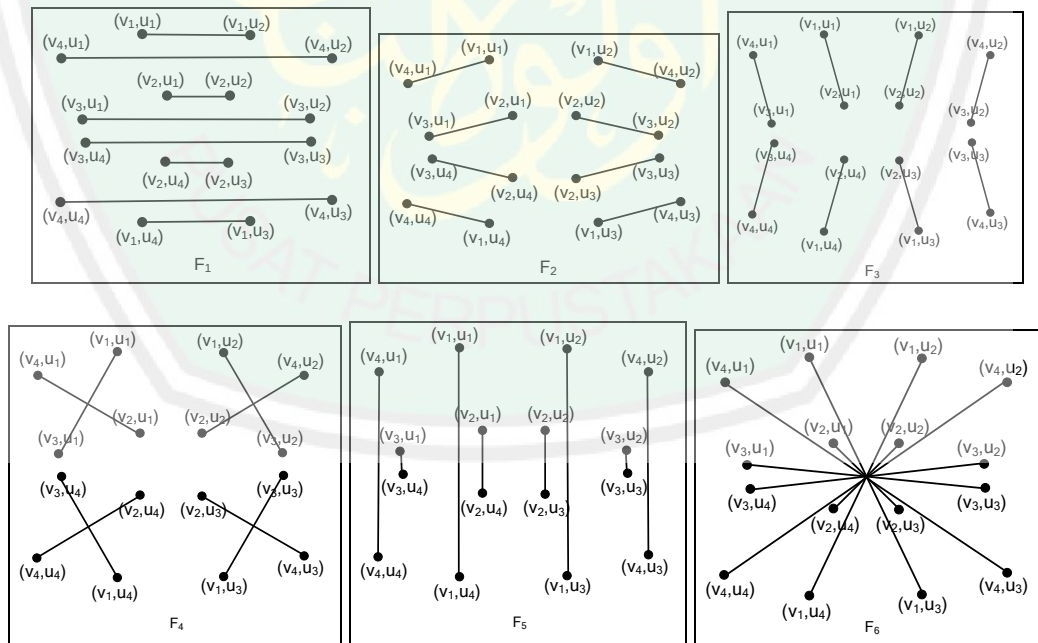


Gambar 3.62. Graf Hasil Perkalian $K_4 \times K_4$

Faktor yang dimiliki graf G adalah faktor yang derajatnya dapat membagi derajat dari graf G . Untuk dapat membagi habis derajat titik pada graf G , maka pembagiannya adalah faktor bilangan positif dari bilangan 6. Karena faktor positif

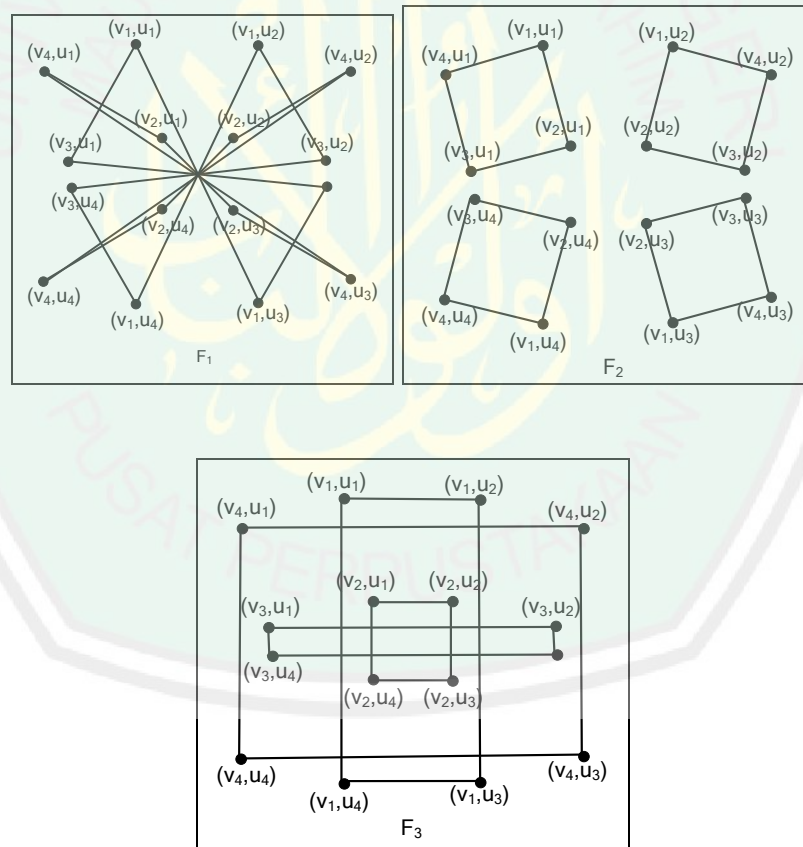
dari 6 adalah 1, 2, 3, dan 6. Sehingga diasumsikan bahwa graf G dapat difaktorkan dengan menggunakan faktor yang memiliki derajat 1, 2, 3, dan 6 dengan kata lain graf G memiliki faktor-1, faktor-2, faktor-3, dan faktor-6.

Jika ditinjau dari titiknya, graf G diketahui memiliki 16 titik. Untuk faktor-1 harus memiliki minimal 2 titik, sehingga jika titik pada graf G dapat dibagi dengan titik minimal faktor-1 ($16 \div 2 = 8$) sehingga komponen faktor yang mungkin terbentuk adalah 8 dan setiap komponennya memiliki 1 sisi ($\frac{1 \times 2}{2} = 1$). Jika setiap komponen faktor memiliki 1 sisi maka sisi yang dapat terbentuk pada setiap graf faktor-1 dari graf G adalah $1 \times 8 = 8$. Sehingga jika graf G memiliki sebanyak 48 sisi maka graf G memiliki faktor-1 sebanyak 6 faktor (dihitung dari $48 \div 8 = 6$).



Gambar 3.63. Faktor-1 dari Graf Hasil Perkalian $K_4 \times K_4$

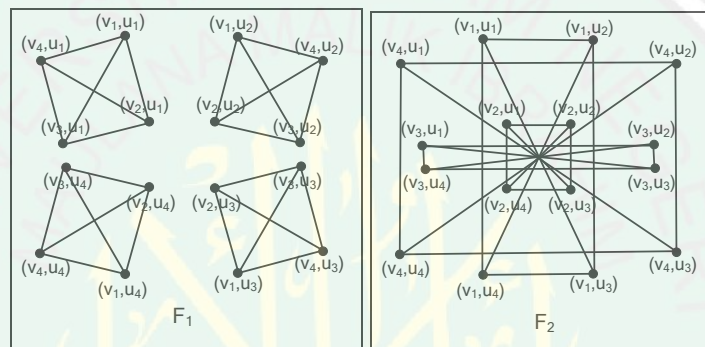
Untuk faktor-2 banyak titik minimal yang dapat membagi 16 adalah 4, sehingga jika titik pada graf G dapat dibagi dengan titik minimal faktor-2 $16 \div 4 = 4$ sehingga komponen faktor yang mungkin terbentuk adalah 4 dan setiap komponen memiliki 4 sisi ($\frac{2 \times 4}{2} = 4$). Jika setiap komponen faktor memiliki 4 sisi maka sisi yang dapat terbentuk pada setiap graf faktor-2 dari graf G adalah $4 \times 4 = 16$. Sehingga jika graf G memiliki sebanyak 48 sisi maka graf G memiliki faktor-2 sebanyak 3 faktor (dihitung dari $48 \div 16 = 3$).



Gambar 3.64. Faktor-2 dari Graf Hasil Perkalian $K_4 \times K_4$

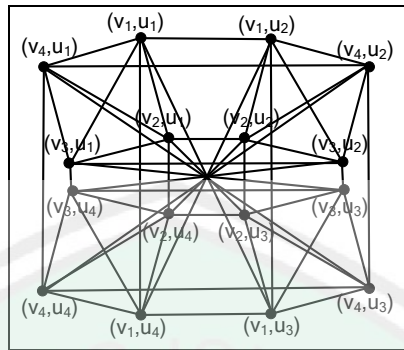
Untuk faktor-3 harus memiliki minimal 4 titik, sehingga jika titik pada graf G dapat dibagi dengan titik minimal faktor-3 ($16 \div 4 = 4$) sehingga komponen

faktor yang mungkin terbentuk adalah 4 dan setiap komponen memiliki 6 sisi ($\frac{3 \times 4}{2} = 6$). Jika setiap komponen faktor memiliki 6 sisi maka sisi yang dapat terbentuk pada setiap graf faktor-3 dari graf G adalah $6 \times 4 = 24$. Sehingga jika graf G memiliki sebanyak 48 sisi maka graf G memiliki faktor-3 sebanyak 2 faktor (dihitung dari $48 \div 24 = 2$).



Gambar 3.65. Faktor-3 dari Graf Hasil Perkalian $K_4 \times K_4$

Untuk faktor-6 banyak titik minimal yang dapat membagi 16 adalah 8, sehingga jika titik pada graf G dapat dibagi dengan titik minimal faktor-6 $16 \div 8 = 2$ sehingga komponen faktor yang mungkin terbentuk adalah 2 dan setiap komponen memiliki 24 sisi ($\frac{6 \times 8}{2} = 24$). Jika setiap komponen faktor memiliki 24 sisi maka sisi yang dapat terbentuk pada setiap graf faktor-6 dari graf G adalah $2 \times 24 = 48$. Sehingga jika graf G memiliki sebanyak 48 sisi maka graf G memiliki faktor-6 sebanyak 1 faktor (dihitung dari $48 \div 48 = 1$).



Gambar 3.66. Faktor-6 dari Graf Hasil Perkalian $K_4 \times K_4$

Berdasarkan penjelasan di atas maka dapat disimpulkan bahwa graf $K_4 \times K_4$ memiliki faktor- i dengan i adalah faktor bilangan positif dari 6.

Bukti Kalimat matematis 1:

Diketahui:

Graf G : graf hasil perkalian graf komplit K_n berorder genap yang dikalikan sebanyak m kali

Derajat setiap titik pada graf G $der_G(v) = (n - 1) \times m$

order pada graf G $p(G) = n^m$

size pada graf G $q(G) = \frac{((n-1) \times m) \times n^m}{2}$

Akan dibuktikan:

(i). G dapat difaktorkan dengan faktor- i , dengan i adalah faktor positif dari bilangan $(n - 1) \times m$.

(ii). Banyak faktor yang dimiliki jika difaktorkan dengan faktor- i adalah

$$\frac{(n-1)m}{i}.$$

(i). 1. Jika ditinjau dari derajat graf:

Diketahui faktor- i maka bilangan i menunjukkan derajat setiap titik dari graf faktor tersebut. Ini berakibat i harus dapat membagi derajat setiap titik dari graf G ($i|(n-1) \times m$). Sehingga i adalah faktor bilangan positif dari $(n-1) \times m$.

Diketahui n bilangan genap, maka $(n-1)$ bilangan ganjil

Jika m genap, maka $(n-1) \times m$ adalah genap sehingga jika $i|(n-1) \times m$ maka i dapat berupa bilangan ganjil atau bilangan genap

Jika m ganjil, maka $(n-1) \times m$ adalah ganjil $\rightarrow i|(n-1) \times m$ maka i dapat berupa bilangan ganjil

Sehingga i diasumsikan dapat berupa bilangan ganjil atau bilangan genap

2. Sekarang jika ditinjau dari titik:

Diketahui n bilangan genap, maka banyak titik pada graf G adalah genap sebanyak n^m . Pada graf faktor- i derajat setiap titiknya adalah i dengan banyak titik minimal adalah $i+k$ titik, $k \in \mathbb{N}, i+k \leq n^m$

Karena titik graf G (n^m) bilangan genap sehingga apabila $i+k | n^m$ maka $i+k$ dapat berupa bilangan genap atau $i+k$ dapat berupa bilangan ganjil.

3. Sekarang jika ditinjau dari sisi:

Jika i genap dan $i+k$ genap maka banyak sisi komponen faktor

$$\frac{\text{genap} \times \text{genap}}{2} = \frac{\text{genap}}{2} \text{ adalah bilangan bulat}$$

Jika i genap dan $i+k$ ganjil maka banyak sisi komponen faktor

$$\frac{\text{genap} \times \text{genap}}{2} = \frac{\text{genap}}{2} \text{ adalah bilangan bulat}$$

Jika i ganjil dan $i+k$ genap maka banyak sisi komponen faktor

$$\frac{\text{ganjil} \times \text{genap}}{2} = \frac{\text{genap}}{2} \text{ adalah bilangan bulat}$$

Jika i ganjil dan $i + k$ ganjil maka banyak sisi komponen faktor $\frac{ganjil \times ganjil}{2} = \frac{ganjil}{2}$ adalah bukan bilangan bulat

Dilihat dari derajat, titik, dan sisi maka i dapat berupa bilangan ganjil atau bilangan genap

$\therefore i$ adalah faktor bilangan positif dari $(n - 1) \times m$ dan dapat berupa bilangan ganjil atau bilangan genap

- (ii) Misalkan graf G difaktorkan dengan faktor- i , maka yang pertama dapat diketahui adalah graf faktor- i memiliki derajat i . Dengan setiap titik berderajat i , graf yang dapat dibentuk adalah mempunyai $i + k$ titik (dengan $k \in \mathbb{N}$) dan $\frac{(i+k) \times i}{2}$ sisi.

Diketahui graf G memiliki n^m titik. Jika titik pada graf G dibagi dengan titik yang dapat dibentuk oleh graf berderajat i maka akan memperoleh $\frac{n^m}{i+k}$ komponen graf yang setiap komponennya memiliki $\frac{(i+k) \times i}{2}$ sisi dan $(i + k)$ titik. Sehingga setiap graf faktor- i memiliki sisi:

$$\frac{n^m}{i+k} \times \frac{(i+k) \times i}{2} = \frac{n^m \times i}{2}$$

Dengan membagi jumlah sisi pada graf G dengan sisi yang dimiliki graf faktor- i maka akan diketahui banyak faktor yang dimiliki graf G jika difaktorkan dengan faktor- i .

$$\frac{(n-1) \times m \times n^m}{2} \div \frac{n^m \times i}{2} = \frac{(n-1) \times m}{i}$$

Kalimat matematis 2:

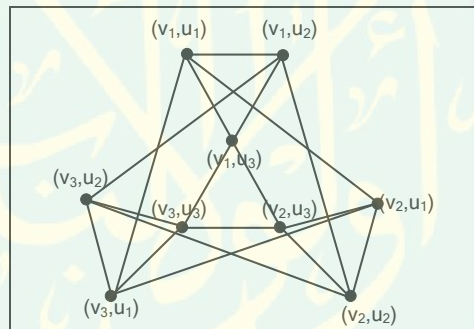
Misalkan G adalah graf hasil perkalian graf komplit K_n berorder ganjil (n ganjil) yang dikalikan sebanyak m kali. Maka graf G memiliki faktor- i

dengan i adalah faktor genap positif dari $(n - 1) \times m$ dengan banyak

$$\text{faktor } \frac{(n-1)m}{i}.$$

Sebelum kalimat matematis di atas dibuktikan akan diberikan contoh ilustrasi dari teorema tersebut:

Misal G adalah hasil perkalian graf komplit tiga (K_3) sebanyak dua kali maka graf hasil perkalian tersebut memiliki $3^2 = 9$ titik yang setiap titiknya berderajat $(3 - 1) \times 2 = 4$ dan memiliki $\frac{((3-1) \times 2) \times 3^2}{2} = \frac{4 \times 9}{2} = 18$ sisi yang dapat digambarkan sebagai berikut:

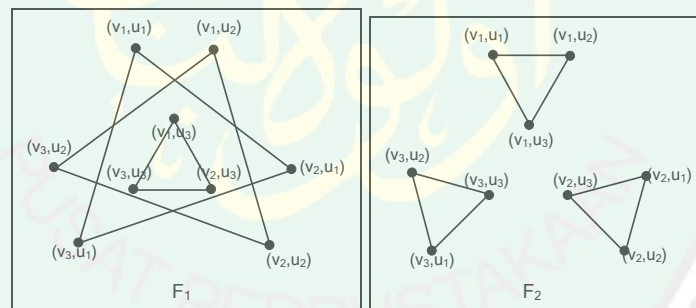


Gambar 3.67. Graf Hasil Perkalian $K_3 \times K_3$

Faktor yang dimiliki graf G adalah faktor yang derajatnya dapat membagi derajat dari graf G . Untuk dapat membagi habis derajat titik pada graf G , maka pembaginya adalah faktor bilangan positif dari bilangan 4. Karena faktor positif dari 4 adalah 1, 2, dan 4. Sehingga diasumsikan bahwa graf G dapat difaktorkan dengan menggunakan faktor yang memiliki derajat 1, 2, dan 4 dengan kata lain graf G memiliki faktor-1, faktor-2, dan faktor-4.

Jika ditinjau dari titiknya, graf G diketahui memiliki 9 titik. Untuk faktor-1 harus memiliki minimal 2 titik, sehingga jika titik pada graf G dapat dibagi dengan titik minimal faktor-1 ($9 \div 2 =$ bukan bilangan bulat) sehingga faktor-1 bukan merupakan faktor dari graf G .

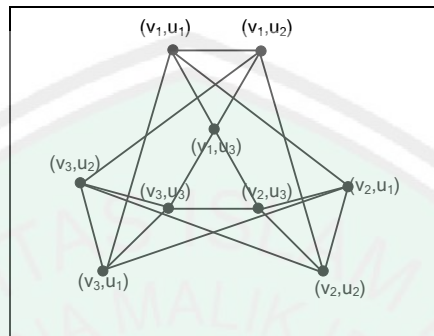
Untuk faktor-2 banyak titik minimal yang dapat membagi 9 adalah 3, sehingga jika titik pada graf G dapat dibagi dengan titik minimal faktor-3 $9 \div 3 = 3$ sehingga komponen faktor yang mungkin terbentuk adalah 3 dan setiap komponen memiliki 3 sisi ($\frac{2 \times 3}{2} = 3$). Jika setiap komponen faktor memiliki 3 sisi maka sisi yang dapat terbentuk pada setiap graf faktor-2 dari graf G adalah $3 \times 3 = 9$. Sehingga jika graf G memiliki sebanyak 18 sisi maka graf G memiliki faktor-2 sebanyak 2 faktor (dihitung dari $18 \div 9 = 2$).



Gambar 3.68. Faktor-2 dari graf $K_3 \times K_3$

Untuk faktor-4 banyak titik minimal yang dapat membagi 9 adalah 9, sehingga jika titik pada graf G dapat dibagi dengan titik minimal faktor-4 ($9 \div 9 = 1$) sehingga komponen faktor yang mungkin terbentuk adalah 1 dan setiap komponen memiliki 18 sisi ($\frac{4 \times 9}{2} = 18$). Jika setiap komponen faktor memiliki 18 sisi maka sisi yang dapat terbentuk pada setiap graf faktor-4 dari graf

G adalah $18 \times 1 = 18$. Sehingga jika graf G memiliki sebanyak 18 sisi maka graf G memiliki faktor-4 sebanyak 1 faktor (dihitung dari $18 \div 18 = 1$).



Gambar 3.69. Faktor-4 dari Graf $K_3 \times K_3$

Berdasarkan penjelasan di atas maka dapat disimpulkan bahwa graf $K_4 \times K_4$ memiliki faktor- i dengan i adalah faktor bilangan positif dari 6.

Bukti Kalimat matematis 2:

Diketahui:

Graf G : graf hasil perkalian graf komplit K_n berorder genap yang dikalikan sebanyak m kali

Derajat setiap titik pada graf G $der_G(v) = (n - 1) \times m$

order pada graf G $p(G) = n^m$

size pada graf G $q(G) = \frac{((n-1) \times m) \times n^m}{2}$

Akan dibuktikan:

- (i). G dapat difaktorkan dengan faktor- i , dengan i adalah faktor genap positif dari $(n - 1) \times m$.
- (ii). Banyak faktor yang dimiliki jika difaktorkan dengan faktor- i adalah

$$\frac{(n-1) \times m}{i}.$$

(i). 1. Jika dilihat dari derajat graf:

Diketahui faktor- i maka bilangan i menunjukkan derajat setiap titik dari graf faktor tersebut. Ini berakibat i harus dapat membagi derajat setiap titik dari graf G . ($i|(n-1) \times m$). Maka i adalah faktor bilangan positif dari $(n-1) \times m$.

Diketahui n bilangan ganjil, maka $(n-1)$ bilangan genap,

Jika m genap, maka $(n-1) \times m$ genap, jika m ganjil, maka $(n-1) \times m$ ganjil sehingga jika $i|(n-1) \times m$ maka i dapat berupa bilangan ganjil dan i juga dapat berupa bilangan genap.

Sehingga i diasumsikan dapat berupa bilangan ganjil atau bilangan genap

2. Sekarang jika ditinjau dari titik:

Diketahui n bilangan ganjil, maka banyak titik pada graf G adalah ganjil sebanyak n^m . Pada graf faktor- i derajat setiap titiknya adalah i dengan banyak titik minimal adalah $i+k$ titik, $k \in \mathbb{N}, i+k \leq n^m$.

Karena titik graf G (n^m) adalah bilangan ganjil maka dapat dibagi dengan $(i+k)$ ganjil. Sehingga karena $i+k | n^m$ maka $i+k$ hanya dapat berupa bilangan ganjil.

3. Sekarang jika ditinjau dari sisi:

Jika i genap dan $i+k$ ganjil maka banyak sisi komponen faktor $\frac{\text{genap} \times \text{ganjil}}{2} = \frac{\text{genap}}{2}$ adalah bilangan bulat

Jika i ganjil dan $i+k$ ganjil maka banyak sisi komponen faktor $\frac{\text{ganjil} \times \text{ganjil}}{2} = \frac{\text{ganjil}}{2}$ adalah bukan bilangan bulat

Dilihat dari derajat, titik, dan sisi maka i hanya berupa bilangan genap.

$\therefore i$ adalah faktor bilangan positif dari $(n - 1) \times m$ dan hanya dapat berupa bilangan genap

- (ii) Misalkan graf G difaktorkan dengan faktor- i , maka yang pertama dapat diketahui adalah graf faktor- i memiliki derajat i . Dengan setiap titik berderajat i , graf yang dapat dibentuk adalah mempunyai $i + k$ titik (dengan $k \in \mathbb{N}$) dan $\frac{(i+k) \times i}{2}$ sisi.

Diketahui graf G memiliki n^m titik. Jika titik pada graf G dibagi dengan titik yang dapat dibentuk oleh graf berderajat i maka akan memperoleh $\frac{n^m}{i+k}$ komponen graf yang setiap komponennya memiliki $\frac{(i+k) \times i}{2}$ sisi dan $(i + k)$ titik. Sehingga setiap graf faktor- i memiliki sisi:

$$\frac{n^m}{i+k} \times \frac{(i+k) \times i}{2} = \frac{n^m \times i}{2}$$

Dengan membagi jumlah sisi pada graf G dengan sisi yang dimiliki graf faktor- i maka akan diketahui banyak faktor yang dimiliki graf G jika difaktorkan dengan faktor- i .

$$\frac{(n-1) \times m \times n^m}{2} \div \frac{n^m \times i}{2} = \frac{(n-1) \times m}{i}$$

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Setelah pembahasan dari bab-bab sebelumnya, maka dapat diambil beberapa kesimpulan yaitu:

1. Bilangan clique pada graf G yang merupakan graf hasil perkalian graf komplit (K_n) sebanyak m faktor $(K_n \times K_n \times \dots \times K_n)$ adalah n .
2. Faktorisasi pada graf hasil perkalian graf komplit (K_n) sebanyak m faktor $(K_n \times K_n \times \dots \times K_n)$ dapat dilakukan dengan membedakan order genap (n genap) atau order ganjil (n ganjil). Jika n genap, maka graf hasil perkalian graf komplit tersebut memiliki faktor- i dengan i adalah faktor positif dari $(n - 1) \times m$ dan menghasilkan sebanyak $\frac{(n-1)m}{i}$ faktor. Sedangkan jika n ganjil, maka graf hasil perkalian graf komplit tersebut memiliki faktor- i dengan i adalah faktor genap positif dari $(n - 1) \times m$ dan menghasilkan sebanyak $\frac{(n-1)m}{i}$ faktor.

4.2 Saran

Pembahasan pada skripsi ini hanya difokuskan pada perkalian graf komplit yang homogen yakni $(K_n \times K_n \times \dots \times K_n)$ sebanyak m kali. Maka dari itu untuk skripsi selanjutnya, penulis menyarankan untuk mengembangkannya dengan mengkaji pada perkalian graf komplit yang heterogen yakni $(K_n \times K_m \times \dots \times K_z)$ sebanyak m faktor.

DAFTAR PUSTAKA

- Abdussyakir. 2007. *Ketika Kiai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press
- Abdussakir, dkk. 2009. *Teori graf*. Malang: UIN Malang Perss
- Chartrand, G. dan Lesniak, L.1986. *Graph and Digraph second Edition*. California: Wadsworth. Inc
- Claude, Berge. 1991. *Graph*. Netherland: Elsevier Science Publisher B. V.
- Departemen Agama RI. 1995. *AlQuran dan Terjemahannya*. Semarang: PT. Karya Toha Putra
- Hasan, M. Iqbal. 2002. *Pokok-Pokok Materi Metodologi Penelitian Dan Aplikasinya*. Bogor. Penerbit Gralia Indonesia.
- Lipschutz, Seymour and Lipson, Marclars. 2002. *Matematika Diskrit Jilid 2*. Jakarta : Salemba Teknika
- Munir, Rinaldi. 2005. *Matematika Diskrit* . Bandung:Informatika
- Purwanto. 1998. *Matematika Diskrit*. Malang: IKIP Malang
- Santosa, R.Gunawan. 2002. *Aplikasi Teorema Polya Enomerasi Graf Sederhana*. (Online): ([http://Home.Unpar.ac.id/ integral/ Volume 8/ integral 8 no 1/ Aplikasi Teorema Polya. PDF](http://Home.Unpar.ac.id/integral/Volume%208/integral%208%20no%201/Aplikasi%20Teorema%20Polya.PDF). diaksestanggal 29 Meret 2010)
- Suryanto. 1986.*Materi Pokok Pengantar Teori Graph*. Jakarta : Karunia Universitas Terbuka



KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN)
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

Jln. Gajayana No. 50 Malang Telp. (0341) 551354 Fax. (0341) 572533

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Lutfiana Fatkhiyah
NIM : 06510012
Fakultas/ Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Bilangan Clique dan Faktorisasi pada Perkalian Graf Komplit
Pembimbing I : Abdussakir, M.Pd
Pembimbing II : Dr. Ahmad Barizi M.A

No	Tanggal	Hal yang Dikonsultasikan	Tanda Tangan	
1.	9 April 2010	Konsultasi BAB I & BAB II	1.	
2.	10 April 2010	Konsultasi BAB I & BAB II kajian agama		2.
3.	13 April 2010	ACC seminar proposal skripsi kajian agama	3.	
4.	13 April 2010	ACC seminar Proposal skripsi		4.
5.	19 April 2010	Revisi BAB I & BAB II	5.	
6.	24 April 2010	Kosultasi BAB II kajian Agama		6.
7.	13 Mei 2010	Konsultasi BAB III	7.	
8.	27 Juni 2010	Revisi BAB III		8.
9.	26 Juni 2010	Revisi BAB II kajian agama	9.	
10.	29 Juni 2010	Kosultasi keseluruhan		10.
11.	30 Juni 2010	ACC keseluruhan	11.	
12.	30 Juni 2010	ACC Kajian Agama		12.

Malang, 23 Juni 2010

Mengetahui
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP.19751006 200312 1 001