**ESTIMASI *KRIGING* DENGAN METODE *BOOTSTRAP***

**SKRIPSI**


**Oleh:**
**ASRI ROSARINI ASTARI**
**NIM. 07610008**



**JURUSAN MATEMATIKA**
**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**
**UNIVERSITAS ISLAM NEGERIMAULANA MALIK IBRAHIM**
**MALANG**

**2012**

**ESTIMASI *KRIGING* DENGAN METODE *BOOTSTRAP***

**SKRIPSI**

**Diajukankepada:**
**Universitas Islam NegeriMaulana Malik Ibrahim Malang**
**Untukmemenuhi Salah SatuPersyaratandalam**
**MemperolehGelarSarjanaSains (S.Si)**


**Oleh:**
**ASRI ROSARINI ASTARI**
**NIM. 07610008**



**JURUSAN MATEMATIKA**
**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**
**UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM**
**MALANG**
**2012**

**ESTIMASI *KRIGING* DENGAN METODE *BOOTSTRAP***

**SKRIPSI**

**Oleh:**
**ASRI ROSARINI ASTARI**
**NIM. 07610008**

TelahDiperiksadanDisetujuiuntukDiuji:
Tanggal: 15 Januari 2012

| | |
|---|---|
| Pembimbing I, | Pembimbing II, |
| Sri Harini, M.Si | FachrurRozi, M.Si |
| NIP. 19731014 200112 2 002 | NIP. 19800527 200801 1 012 |

Mengetahui,
KetuaJurusanMatematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

# ESTIMASI *KRIGING* DENGAN METODE *BOOTSTRAP*

## SKRIPSI

**Oleh:**
**ASRI ROSARINI ASTARI**
**NIM. 07610008**

TelahDipertahankan di DepanDewanPengujiSkripsi
danDinyatakanDiterimaSebagai Salah SatuPersyaratan
UntukMemperolehGelarSarjanaSains(S.Si)
Tanggal: 21 Januari 2012

| | | |
|---|---|---|
| PengujiUtama | : Abdul Aziz, M.Si<br>NIP. 19760318 200604 1 002 | ____________________ |
| Ketua | : HairurRahman, M.Si<br>NIP. 19800429 200604 1 003 | ____________________ |
| Sekretaris | : Sri Harini, M.Si<br>NIP. 19731014 200112 2 002 | ____________________ |
| Anggota | : FachrurRozi, M.Si<br>NIP. 19800527 200801 1 012 | ____________________ |

Mengetahui,

KetuaJurusanMatematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

**PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN**

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

| | |
|---|---|
| Nama | : Asri RosariniAstari |
| NIM | : 07610008 |
| Jurusan | : Matematika |
| Fakultas | : Sains dan Teknologi |

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benarmerupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambil alihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 15 Januari 2012
Yang membuat pernyataan,

Asri Rosarini Astari
NIM. 07610008

# MOTTO

"Sesungguhnya  Allah swt tidaklah melihat pada bentuk dan rupa kalian melainkan Allah swt melihat pada segala hati kalian"

(Hadits Shoheh)

**PERSEMBAHAN**

Penulispersembahkanskripsiini

yangpertamauntukkedua orang tua

khususnyaibutersayang

dan

suamitercinta

## KATA PENGANTAR

*Assalamu'alaikum Wr. Wb.*

Syukur alhamdulillah penulis haturkan ke hadirat Allah SWT yang telah memberikan dan melimpahkan Rahmat dan Hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan studi di Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang sekaligus menyelesaikan tugas skripsi ini dengan baik dan lancar.

Sholawat dan salam senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW, yang telah membimbing dan menuntun umat manusia dari jalan kegelapan menuju jalan yang lurus dan terang benderang dengan ridho Allah SWT yaitu jalan menuju surga-Nya yang penuh dengan rahmat dan barokah.

Skripsi ini dapat disusun dan diselesaikan dengan baik karena dukungan, motivasi serta bimbingan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan banyak terima kasih kepada:

1. Prof. DR. H. Imam Suprayogo, selaku rektor UIN Maulana Malik Ibrahim Malang, yang telah banyak memberikan pengetahuan dan pengalaman yang berharga.
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU., D.Sc selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika.
4. Sri Harini, M.Si, selaku dosen wali dan Pembimbing Skripsi Matematika.
5. Fachrur Rozi, M.Si, selaku Pembimbing Skripsi Keagamaan.
6. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, terutama seluruh dosen, terima kasih atas segenap ilmu dan bimbingannya.

7. Ayahanda dan ibunda tercinta yang senantiasa memberikan doa dan restunya kepada penulis dalam menuntut ilmu.
8. Suami tercinta yang senantiasa memberikan doa, nasehat-nasehat, motivasi, dan bantuannya kepada penulis.
9. Adik Ayik dan Amin yang begitu berarti menjadikan penulis lebih bersemangat lagi untuk menyelesaikan skripsi ini.
10. Semua keluarga besar penulis, yang telah mencurahkan dan memberikan kasih sayang, perhatian, motivasi dan kepercayaan penuh kepada penulis.
11. Teman-teman Matematika seperjuangan angkatan 2007 dan teman-teman semuanya, banyak kenangan indah yang telah terukir. Kita telah berjuang bersama dari semester satu. Semoga kesuksesan menyertai kita.
12. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini baik berupa materiil maupun moril.

Penulis menyadari bahwa dalam penyusunan skripsi ini masih terdapat kekurangan dan penulis berharap semoga skripsi ini bisa memberikan manfaat kepada para pembaca khususnya bagi penulis secara pribadi, *Amin Ya Rabbal Alamin.*

*Wassalamu'alaikum Wr. Wb.*

Malang, 15 Januari 2012

Penulis

**DAFTAR ISI**

# ABSTRAK

Astari, Asri Rosarini. 2012. **Estimasi *Kriging* Dengan Metode *Bootstrap***. Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Pembimbing: (I) Sri Harini, M.Si

(II) Fachrur Rozi, M.Si

**Kata kunci :** *Kriging, Ordinary Kriging, Bootstrap*

*Kriging* adalah suatu teknik penghitungan untuk menghitung estimasi dari suatu variabel teregional yang menggunakan pendekatan bahwa data yang dianalisis dianggap sebagai suatu realisasi dari suatu variabel acak, dan keseluruhan variabel struktural variogram. *Ordinary kriging* merupakan *kriging* paling sederhana yang digunakan pada kasus data sampel kandungan yang tidak memiliki trend tertentu dengan rata-rata populasi tidak diketahui, yang digunakan pada penelitian kali ini. Tujuan penulisan skripsi ini menjelaskan tentang estimasi *kriging* dengan metode *bootstrap*, menerapkan *bootstrap* data spasial untuk mengukur keakuratan hasil estimasi *kriging* (estimasi data spasial). *Kriging* dapat diestimasi dengan metode *bootstrap* karena mempunyai suatu fungsi data spasial. Sehingga langkah-langkah estimasi *bootstrap* adalah menentukan model persamaan krigingnya, menenentukan parameter yang ada dalam *kriging* untuk diestimasi yakni $\lambda$ dan $\hat{\delta}(u)$ dan selanjutnya mencari estimasi dari $\lambda$ dan $\hat{\delta}(u)$. Sehingga didapatkan $\hat{Z}(u)$ dari sifat tak bias *kriging* adalah $E\left(\hat{\delta}(u)\right) = E\left(\hat{Z}(u)\right) - E(Z(u))$ dari *kriging* adalah $Z(u)$. Setelah menentukan $\lambda$ dan $\hat{\delta}(u)$, maka dapat diketahui bahwa $Z(u)$ merupakan estimasi dari $\hat{Z}(u)$ begitu juga $\hat{Z}(u)$ merupakan estimasi dari $Z(u)$.

# ABSTRACT

Astari, Asri Rosarini. 2012. ***Kriging* Estimation with *Bootstrap* Methods.** Theses. Mathematics Programme Faculty of Science and Technology. The State of Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang.

Promotor: (I) Sri Harini, M.Si

(II) Fachrur Rozi, M.Si

**Key words**: *Kriging, Ordinary Kriging , Bootstrap*

*Kriging* is a calculation technique for calculating estimation of a variable teregional using the approach that the data being analyzed is considered as a realization of a random variable, and overall structural variables variogram. *Ordinary Kriging* is the most simple *Kriging* is used in case of sample data content that has no particular trend with the average population is unknown, which is used in the present study. The objective of this thesis describes the *Kriging* estimation with the *Bootstrap* method, applying *Bootstrap* spatial data to measure the accuracy of the estimation *Kriging* (spatial data estimation). *Kriging* can be estimated by the *Bootstrap* method because it has a function of spatial data. So that the *Bootstrap* estimation steps is to determine equality *Kriging*nya model, determine the parameters in *Kriging* to estimate the λ and $\hat{\delta}(u)$ and then seek estimates of λ and $\hat{\delta}(u)$. So we get no bias $\hat{Z}(u)$of the nature of *Kriging* is $E\left(\hat{\delta}(u)\right) = E\left(\hat{Z}(u)\right) - E\left(Z(u)\right)$of *Kriging* is the $Z(u)$. After determining λ and $\hat{\delta}(u)$, it is known that an estimation of $\hat{Z}(u)$ as well as $\hat{Z}(u)$an estimation of $Z(u)$.

**ملخص**


استرى، اسري روسارىنى.2012 .**كريغ طرق تقدير تعريف. الأطروحة**. قسم الرياضيات بكلية العلوم والتكنولوجيا الدولة الإسلامية جامعة مولانا الملك ابراهيم مالانغ

الاساتذ : (1) سرى هرىنى، م.س ا

(2) فاخرور رازى، م.س ا

**كلمات** أساسية : ، كريغ، العادية كريغ ، التمهيد

كريغ هو أسلوب الحساب لحساب تقديرات المتغير الذي يستخدم النهج الذي تعتبر البيانات التي يتم تحليلها وإدراك لمتغير عشوائي ، وعموما المتغيرات الهيكلية. كريغ العادي يستخدم كريغ أبسط في حالة محتوى البيانات عينة التي لا يوجد لديه اتجاه معين مع متوسط عدد السكان غير معروف ، والذي يستخدم في هذه الدراسة. الهدف من هذه الأطروحة يصف كريغ تقدير مع أسلوب التمهيد ، وتطبيق البيانات المكانية التمهيد لقياس مدى دقة تقدير كريغ (تقدير للبيانات المكانية). ويمكن تقدير كريغ بواسطة أسلوب التمهيد لأنه لديه وظيفة للبيانات المكانية. بحيث $\delta(u)$و $\lambda$الخطوات تقدير التمهيد لتحديد المساواة النموذج ، وتحديد المعلمات في كريغ لتقدير $= E\delta(u)$حتى نحصل على أي تحيز زو طبيعة كريغ هو .$\delta(u)$و $\lambda$ومن ثم تسعى تقديرات ، فمن المعروف أن تقدير زو زو $\delta(u)$ ،$\lambda$ش) من كريغ هو زو. وبعد تحديد ( $EZ(U)$ - $EZ$ زو فضلا عن تقدير زو.

# BAB I

# PENDAHULUAN

## 1.1 Latar Belakang

Islam sebagai agama dunia dan akhirat, penunjuk jalan yang benar, jalan keselamatan bagi umat yang beriman dan bertakwa, agar selamat dalam menjalani kehidupan di dunia maupun saat di akhirat kelak.

Adapun petunjuk yang diciptakan Allah SWT yang dijadikan pegangan, pedoman dan penolong bagi umat manusia yaitu kitab suci Al-Qur'an dan Hadits Rosulullah SAW. Dalam QS. Al-Baqarah ayat 2, Allah SWT berfirman:

ذَٰلِكَ ٱلۡكِتَٰبُ لَا رَيۡبَۛ فِيهِۛ هُدٗى لِّلۡمُتَّقِينَ ٢

*Artinya: "Kitab (Al-Qur'an) ini tidak ada keraguan padanya, petunjuk bagi mereka yang bertakwa" (Al-Baqarah 2:2).*

Pada ayat di atas, Allah SWT menamakan Al-Qur'an dengan Al-Kitab yang di sini berarti yang ditulis, sebagai isyarat bahwa Al-Qur'an diperintahkan untuk ditulis. Sedangkan takwa yaitu memelihara diri dari siksaan Allah dengan mengikuti segala perintah-perintah-Nya dan menjauhi segala larangan-larangan-Nya, tidak cukup diartikan dengan takut saja.

Al-Qur'an sebagai kitabullah yang di dalamnya terkandung ilmu-ilmu Allah. Dalam Al-Qur'an telah diungkapkan bahwa ilmu pengetahuan dan Al-Qur'an adalah dua aspek kebenaran yang sama dan tidak ada pertentangan di antara keduanya. Wahyu pertama Al-Qur'an yang diturunkan oleh Allah SWT kepada Nabi Muhammad SAW adalah menuntut ilmu pengetahuan dan menekankan pentingnya arti belajar dalam kehidupan umat manusia, pada firman Allah SWT, QS. Al-‘Alaq ayat 1-5, sebagai berikut:

ٱقۡرَأۡ بِٱسۡمِ رَبِّكَ ٱلَّذِي خَلَقَ ١ خَلَقَ ٱلۡإِنسَٰنَ مِنۡ عَلَقٍ ٢ ٱقۡرَأۡ وَرَبُّكَ ٱلۡأَكۡرَمُ ٣

ٱلَّذِي عَلَّمَ بِٱلۡقَلَمِ ٤ عَلَّمَ ٱلۡإِنسَٰنَ مَا لَمۡ يَعۡلَمۡ ٥

*Artinya: “Bacalah dengan (menyebut) nama Tuhanmu yang Menciptakan (1), Dia telah menciptakan manusia dari segumpal darah (2), Bacalah, dan Tuhanmulah yang Maha pemurah (3), yang mengajar (manusia) dengan perantaran kalam (4), Dia mengajar kepada manusia apa yang tidak diketahuinya (5)” (Al-‘Alaq 96:1-5).*

Pada ayat di atas bisa kita ketahui, dari kata *iqra’* yang artinya bacalah, Allah SWT memerintahkan kita untuk membaca, maksudnya bacalah, pelajarilah apa yang ada disekitarmu. Agar kita mengenal Allah SWT dari segala apa yang telah diciptakan-Nya di alam semesta ini. Bahwa tiada Tuhan selain Allah, pencipta semua apa-apa yang ada di langit maupun di bumi.

Al-Qur’an juga menganjurkan manusia untuk berdoa semoga Allah SWT menambah ilmu pengetahuan kepada-Nya, agar kita sebagai manusia tidak hanya mengandalkan kemampuan kita yang sangat terbatas ini, tanpa izin dan ridho dari-Nya. Perintah untuk berdo’a, agar ditambah ilmu pengetahuan ini termaktub dalam firman Allah SWT, QS. ThaaHaa ayat 114.

فَتَعَٰلَى ٱللَّهُ ٱلۡمَلِكُ ٱلۡحَقُّۗ وَلَا تَعۡجَلۡ بِٱلۡقُرۡءَانِ مِن قَبۡلِ أَن يُقۡضَىٰٓ إِلَيۡكَ وَحۡيُهُۥۖ وَقُل

رَّبِّ زِدۡنِي عِلۡمٗا ١١٤

*Artinya: “Maka Maha Tinggi Allah raja yang sebenar-benarnya, dan janganlah kamu tergesa-gesa membaca Al-Qur'an sebelum* *disempurnakan mewahyukannya kepadamu, dan Katakanlah: "Ya Tuhanku, tambahkanlah kepadaku ilmu pengetahuan" ( ThaaHaa 20:114).*

Sejak berabad-abad lamanya Al-Qur'an telah menjelaskan tentang berbagai ilmu pengetahuan. Hanya baru-baru ini saja manusia dengan penelitiannya menghasilkan ilmu pengetahuan yang terbukti sudah ada dalam Al-Qur'an. Dengan melakukan penelitian, eksperimen, pengamatan, percobaan, dan lain-lain. Hal ini jelas membuktikan bahwa semua telah ada sebelum manusia itu sendiri ada.

Masih banyak ilmu pengetahuan dalam Al-Qur'an yang belum diketahui oleh manusia. Oleh sebab itu, kita sebagai manusia seharusnyalah berusaha semaksimal mungkin dengan mengharap bantuan dari Allah SWT, agar hati ini tidak ada rasa sombong sedikitpun, karena apa-apa yang manusia ketahui tidak ubahnya hanyalah sebuah pasir yang berada diantara luasnya padang pasir.

Salah satu ilmu yang terdapat dalam Al-Qur'an, adalah ilmu matematika. Ilmu matematika sebagai ilmu tentang bilangan dan *ilmu al-hisab* dapat kita ketahui pada salah satu firman Allah SWT, QS. Al-Fatihah ayat 5:

إِيَّاكَ نَعْبُدُ وَإِيَّاكَ نَسْتَعِينُ ۝٥

*Artinya: "Hanya Engkaulah yang Kami sembah, dan hanya kepada Engkaulah Kami meminta pertolongan" ( Al-Fatihah 1:5).*

Ayat di atas menjelaskan, dari kata *na'budu* diambil dari kata *'ibaadat* yang berarti kepatuhan dan ketundukkan yang ditimbulkan oleh perasaan terhadap kebesaran Allah, sebagai Tuhan yang disembah, karena berkeyakinan bahwa Allah mempunyai kekuasaan yang mutlak terhadapnya. Dan dari kata *nasta'iin* (minta pertolongan), terambil dari kata *isti'aanah* yaitu mengharapkan bantuan untuk dapat menyelesaikan suatu pekerjaan yang tidak sanggup dikerjakan dengan tenaga sendiri. *"Hanya Engkaulah yang Kami sembah, dan hanya kepada Engkaulah Kami meminta pertolongan"* manunjukkan sebuah ketauhidan, hanya satu tujuan, Allah SWT. Hal ini dapat menunjukkan bilangan angka "satu".

Matematika sangat erat kaitannya dengan perhitungan. Sehingga ada yang berpendapat bahwa matematika adalah ilmu hitung atau ilmu *al-hisab*, Allah SWT adalah raja dari segala sesuatu yang telah diciptakan-Nya, bahkan dalam hal ini perhitungan Allah SWT sangatlah cepat dan sangat teliti.

Salah satu cabang ilmu matematika yaitu statistik, di dalam statistik itu sendiri mempelajari ilmu tentang metode *kriging* dan metode *bootstrap*, yang pada penelitian ini digunakan peneliti sebagai teori utama. Sebagai aplikasi intregasi antara ilmu pengetahuan dengan Al-Qur'an. Yang akan dibahas pada pembahasan selanjutnya.

Secara khusus, metode *kriging* yaitu ilmu yang dikembangkan dari metode-metode sebelumnya, dengan tujuan lebih mempermudah dalam bidang penaksiran yaitu digunakan untuk menangani *variabel teregionalisasi*, yang kemudian dikembangkan oleh Georges Matheron pada tahun 1960an dalam bidang ilmu *geostatistika*.

Pada *kriging* terdapat metode paling sederhana yang digunakan pada data sampel kandungan yang tidak memilki trend tertentu dengan rata-rata populasi yang tidak diketahui yaitu *ordinary kriging*. Metode ini yang akan digunakan peneliti pada penelitian kali ini.

Selanjutnya, untuk metode *bootstrap* itu sendiri yaitu suatu metode yang mengetengahkan masalah *resampling*, yang dengan metode ini ukuran contoh dapat diperbesar tanpa memperbesar biaya, tenaga dan waktu. Metode ini digunakan untuk menjawab pertanyaan-pertanyaan statistika yang dalam pemecahannya banyak terbentur pada rumus-rumus matematis yang rumit. Metode *bootstrap* tidak memerlukan asumsi model teoritis maupun model matematis, selain itu data tidak harus berasal dari sebaran tertentu atau dapat dikatakan bebas sebaran.

Karena *kriging* merupakan metode paling popular dari interpolasi data spasial maka dalam penulisan ini akan dipelajari metode *bootstrap* data spasial. Ide dasarnya adalah menaksir parameter dan nilai signifikasi atau *significance level* dengan memperbanyak setiap titik data sehingga berukuran besar.

Selain itu pula alasan yang melatarbelakangi penulis memilih penelitian tentang metode *kriging* dan metode *bootstrap* kali ini yaitu berawal dari rujukan tesis S2 oleh Suci Astuti dengan judul "*Bootstrap pada Data Kadar Nikel untuk Mangukur Keakuratan Hasil Estimasi Kriging*", dalam hal ini menggunakan metode sama, metode *kriging* dan metode *bootstrap* yang dengan perbedaan, jika pada tesis, penelitian lebih ditekankan pada aplikasi dari teori serta teori itu sendiri dijelaskan secara deskriptif. Sedangkan pada penelitian kali ini, peneliti akan melakukan penelitian teori secara matematis. Sehingga peneliti tertarik untuk melakukan penelitian ini.

Berdasarkan latar belakang tersebut maka dalam penulisan skripsi ini akan diberikan uraian integrasi konsep matematika dan Al-Qur'an. Dan selanjutnya penulis mengangkat tema **"Estimasi *Kriging* dengan Metode *Bootstrap*".**

## 1.2 Rumusan Masalah

Bagaimana estimasi parameter *kriging* dengan menggunakan metode *bootstrap*?

## 1.3 Batasan Masalah

1. Metode *kriging* yang digunakan pada penelitian ini yaitu *ordinary kriging*.
2. Masalah ini akan dibatasi pada algoritma *bootstrap* untuk data spasial.

## 1.4 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan latar belakang dan rumusan masalah di atas, maka tujuan penulisan ini adalah untuk mengetahui estimasi parameter *kriging* dengan menggunakan metode *bootstrap* dan mengetahui integrasi ilmu pangetahuan dan Al-Qur'an, serta manfaatnya bagi kehidupan.

## 1.5 Manfaat Penelitian

Hasil penelitian ini diharapkan bisa memberikan manfaat pada semua komponen diantaranya adalah:

1. Mengembangkan wawasan keilmuan dan pengetahuan mengenai metode *kriging*.
2. Mengembangkan wawasan keilmuan dan pengetahuan mengenai estimator-estimator parameter pada metode *bootstrap*.
3. Mengembangkan wawasan ilmu pengetahuan dan Al-Qur'an.

## 1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam skripsi ini adalah studi literatur atau studi pustaka. Studi literatur merupakan penelaah sumber pustaka yang relevan pada penelitian dengan bantuan bermacam-macam sumber yang terdapat di perpustakaan seperti buku-buku, artikel, jurnal, dan lain-lain, dengan tanpa melakukan penelitian lapangan. Adapun literatur utama yang dipakai sebagai refrensi adalah buku *mining geostatistics* karangan A. G Journel dan CH. J. Huijbergts, dan tesis tentang metode *bootstrap* dan *kriging*. Sedangkan sebagai literatur pendampingnya adalah Al-Qur'an, tafsir, buku, jurnal, artikel, dan skripsi yang dapat mengantarkan kepada tujuan pembahasan yang ditetapkan.

Dalam skripsi ini pertama dipelajari tentang definisi dan teorema tentang *kriging* dan *bootstrap* yang merupakan landasan utama yang ada dalam pembahasan nanti, selanjutnya mencari estimasi *kriging* dengan metode *bootstrap*. Selanjutnya dalam analisis tersebut penulis melakukan penjabaran langkah – langkah secara rinci sebagai berikut:

a. Mengestimasi parameter *kriging* dengan metode *bootstrap* dengan model persamaan *kriging*.
b. Membuktikan parameter yang ada dalam *kriging* untuk diestimasi.
c. Mencari estimasi parameter *kriging* dengan metode *bootstrap*.

## 1.7 Sistematika Penulisan

Untuk mempermudah memahami tulisan ini, penulis membagi tulisan ini ke dalam empat bab yaitu sebagai berikut:

**BAB I PENDAHULUAN**

Dalam bab I ini diajukan yang melatar belakangi masalah yang diteliti, perumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian dan sistematika pembahasan.

**BAB II KAJIAN PUSTAKA**

Dalam bab II ini akan dijelaskan beberapa pengertian dan teori-teori tentang data spasial, peubah acak dan distribusinya, estimasi parameter, *variansi*, *matriks*, *kriging*, metode *bootstrap*, dan kajian keagamaan.

**BAB III PEMBAHASAN**

Dalam bab III ini dipaparkan mengenai hasil penelitian yaitu estimasi parameter *kriging* dengan metode *bootstrap* dan kajian keagamaan.

**BAB IV PENUTUP**

Dalam bab ini dikemukakan kesimpulan akhir penelitian dan diajukan beberapa saran untuk pengembangan penelitian selanjutnya.

# BAB II

# KAJIAN PUSTAKA

## 2.1 Data Spasial

Kata spasial berasal dari kata *space* yang artinya ruang dan spasial berarti bersifat keruangan. Data spasial adalah data pengukuran yang memuat informasi lokasi. Misal $Z(s_i), i = 1,2, \dots, n$ data pengukuran $Z$ di lokasi atau koordinat $s_i$ (Ria Rosilawati, 2010). Cressie (1991) menyatakan bahwa data spasial merupakan salah satu model data dependen, karena data spasial dikumpulkan dari lokasi spasial berbeda yang mengindikasikan ketergantungan antara pengukuran data dengan lokasi.

Data spasial banyak dijumpai dalam disiplin ilmu yang membutuhkan data dengan informasi lokasi, antara lain : *Geology*, ilmu tanah, *epidemiology*, ilmu tanaman, *ekologi*, kehutanan, *astronomi*. Biasanya data diasumsikan acak dan kadang-kadang lokasi juga diasumsikan acak.

Ada dua tahap utama dalam menganalisis data spasial yaitu tahap analisis struktural dan tahap estimasi parameter. Analisis struktural merupakan proses fitting model korelasi spasial (*semivariogram*) pada *semivariogram eksperimental*. Tahap estimasi merupakan proses prediksi parameter proses spasial berdasarkan informasi *semivariogram* data spasial.

## 2.2 Estimasi Parameter

Parameter didefinisikan sebagai hasil pengukuran yang menggambarkan karakteristik dari suatu populasi. Disisi lain karakteristik sampel didefinisikan sebagai statistik. Sebagai contoh adalah rata-rata populasi (*population mean*) $\mu$, varians populasi (*population variance*) $\sigma^2$, dan koefisien korelasi populasi (*population correlation coefficient*) $\rho$. Parameter biasanya tidak diketahui, dan dengan statistiklah harga-harga parameter itu diduga (ditaksir) atau diestimasi. Sebagai contoh adalah rata-rata sampel $\bar{x}$ digunakan untuk menaksir rata-rata populasi $\mu$ yang tidak diketahui dari pengambilan sampel suatu populasi. Dalam statistik non-parametrik, parameter yang cukup menarik untuk dikaji adalah median populasi. Populasi ini sering digunakan dalam analisis statistik non-parametrik untuk menggantikan rata-rata populasi sebagai ukuran untuk lokasi atau tendensi sentral yang lebih disukai.

Pendugaan (*estimasi*) adalah proses yang menggunakan sampel statistik untuk menduga atau menaksir hubungan parameter populasi yang tidak diketahui. Pendugaan merupakan suatu pernyataan mengenai populasi yang diketahui berdasarkan populasi dari sampel, dalam hal ini sampel acak, yang diambil dari populasi yang bersangkutan. Jadi dengan pendugaan ini, keadaan parameter populasi dapat diketahui (Hasan, 2002:111).

Menurut Yitnosumarto (1990:211-212), penduga (*estimator*) adalah anggota peubah acak dari statistik yang mungkin untuk sebuah parameter (anggota peubah diturunkan). Besaran sebagai hasil penerapan penduga terhadap data dari contoh disebut nilai duga (*estimate*).

Misalkan terdapat sebuah peubah acak $X$ yang mengikuti sebaran tertentu dengan nilai yang diamati $X_1, X_2, \ldots, X_n$ dan nilai-nilai pengamatan mempunyai peluang yang sama untuk diperoleh, maka nilai tengah sampelnya:

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

yang merupakan suatu penduga titik (*point estimator*) dari nilai tengah populasi $\mu$. Penduga titik ini seringkali dicatat dengan $\hat{\mu}$ (*miu topi*) karena merupakan penduga dari $\mu$ (Yitnosumarno, 1990:212).

### 2.2.1 Sifat-sifat Penduga

1. Tak bias

   Satu hal yang menjadi tujuan dalam pendugaan adalah penduga harus mendekati nilai sebenarnya dari parameter yang diduga tersebut. Misalkan terdapat parameter $\theta$. Jika $\hat{\theta}$ merupakan penduga tak bias (*tak bias estimator*) dari parameter $\theta$, maka $E(\hat{\theta}) = \theta$ (Yitnosumarno, 1990:212).

2. Efisien

   Suatu penduga (misalkan:$\hat{\theta}$) dikatakan efisien bagi parameter ($\theta$) apabila penduga tersebut mempunyai varians yang kecil. Apabila terdapat lebih dari satu penduga, penduga yang efisien adalah penduga yang mempunyai varian terkecil. Dua penduga dapat dibandingkan, efisiensinya dengan menggunakan efisiensi relative (*relative efficiency*). Efisiensi relative $\hat{\theta}_2$ terhadap $\hat{\theta}_1$ dirumuskan:

$$R(\hat{\theta}_2, \hat{\theta}_1) = \frac{E(\hat{\theta}_1 - \theta)^2}{E(\hat{\theta}_2 - \theta)^2}$$

$$= \frac{E\left(\hat{\theta}_1 - E(\hat{\theta}_1)\right)^2}{E\left(\hat{\theta}_2 - E(\hat{\theta}_2)\right)^2}$$

$$= \frac{var\hat{\theta}_1}{var\hat{\theta}_2}$$

Jika R>1 maka $\hat{\theta}_1 > \hat{\theta}_2$ artinya secara relatif $\hat{\theta}_2$ lebih efisien daripada $\hat{\theta}_1$, dan jika R<1 maka $\hat{\theta}_1 < \hat{\theta}_2$ artinya secara relatif $\hat{\theta}_1$ lebih efisien daripada $\hat{\theta}_2$.

3. Konsisten

Suatu penduga dikatakan konsisten jika memenuhi syarat di bawah ini:

a. Jika ukuran sampel semakin bertambah maka penduga akan mendekati parameternya. Jika besar sampel menjadi tak terhingga maka penduga konsisten harus dapat memberi suatu penduga titik yang sempurna terhadap parameternya. Jadi $(\hat{\theta})$ merupakan penduga konsisten, jika dan hanya jika:

$$E\left(\hat{\theta} - E(\theta)\right)^2 \rightarrow 0 \text{ jika } n \rightarrow \infty$$

b. Jika ukuran sampel bertambah besar maka distribusi sampling penduga akan mengecil menjadi suatu garis tegak lurus di atas parameter yang sama dengan probabilitas sama dengan 1 (Hasan, 2002:113-115).

## 2.3 Variansi

*Definisi 2.1* (Walpole & Myers, 1995:75)

Variansi dari peubah acak X didefinisikan sebagai berikut:

$$Var(X) = E\big(X - E(X)\big)^2 \tag{2.1}$$

Sifat variansi ditunjukkan pada beberapa teorema berikut:

*Teorema 2.1*

Jika X peubah acak, maka:

$$Var(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$$

Bukti:

$$\begin{aligned} Var(X) &= E\left(X - E(X)\right)^2 \\ &= E\left(\left(X - E(X)\right)\left(X - E(X)\right)\right) \\ &= E\left(X^2 - 2XE(X) + \left(E(X)\right)^2\right) \\ &= E(X^2) - 2E(X)E(X) + E\left(E(X)\right)^2 \\ &= E(X^2) - 2E\left(E(X)\right)^2 + E\left(E(X)\right)^2 \\ &= E(X^2) - \left(E(X)\right)^2 \end{aligned}$$

*Teorema 2.2*

Jika X peubah acak, a dan b konstanta, maka:

$$Var(aX + b) = a^2 var(X)$$

Bukti:

$Var(aX + b) = E(aX + b)^2 - [E(aX + b)]^2$

$= E\left((aX + b)(aX + b)\right) - [E(aX + b)]^2$

$= E(a^2X^2 + 2abX + b^2) - [aE(X) + bE]^2$

$= E(a^2X^2 + 2abX + b^2) - \left[[aE(X) + bE][aE(X) + bE]\right]$

$= a^2E(X^2) + 2abE(X) + (bE)^2 - [a^2E^2(X) + 2abE(X) + (bE)^2]$

$= a^2E(X^2) + 2abE(X) + (bE)^2 - a^2E^2(X) - 2abE(X) - (bE)^2$

$= a^2E(X^2) - a^2E^2(X)$

$= a^2[E(X^2) - [E(X)]^2]$ (Teorema 2.1)

$= a^2 Var(X)$

## 2.4 Kovariansi

*Definisi 2.2* (Bain and Engelhardt (1992:174))

Nilai kovariansi dari peubah acak X dan Y didefinisikan sebagai berikut:

Notasi nilai yang dapat digunakan untuk kovariansi adalah $\sigma_{xy}$.

Sifat-sifat pada kovariansi, ditunjukkan pada beberapa teorema berikut:

*Teorema 2.3*

Jika X dan Y suatu peubah acak *independen* dan $Cov(X, Y) = 0$, maka:

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Bukti:

$Cov(X, Y) = E\big[\big(X - E(X)\big)\big(Y - E(Y)\big)\big]$

$= E[XY - YE(X) - XE(Y) + E(X)E(Y)]$

$= E(XY) - E\big(YE(X)\big) - E(Y)E(X) + E(X)E(Y)$

$= E(XY) - E(Y)E(X) - E(Y)E(X) + E(X)E(Y)$

$= E(XY) - 2E(X)E(Y) + E(X)E(Y)$

$= E(XY) - E(X)E(Y)$

*Teorema 2.4*

Jika X dan Y merupakan peubah acak serta a dan b konstanta, maka

1. $Cov(aX, bY) = ab\,Cov(X, Y)$
2. $Cov(X + a, Y + b) = Cov(X, Y)$
3. $Cov(X, aX + b) = a\,Var(X)$

Bukti:

1. $Cov(aX, bY) = E\big[\big(aX - aE(X)\big)\big(bY - bE(Y)\big)\big]$

$$= E\Big[a\big[\big(X - E(X)\big)\big]b\big[\big(Y - E(Y)\big)\big]\Big]$$

$$= ab\, E\big[\big(X - E(X)\big)\big(Y - E(Y)\big)\big]$$

$$= ab\, Cov(X, Y)$$

2. $Cov(X + a, Y + b) = E\big[\big((X + a) - (E(X) + a)\big)\big((Y + b) - (E(Y) + b)\big)\big]$

$$= E[(X + a - E(X) - a)(Y + b - E(Y) - b)]$$

$$= E\big[\big(X - E(X)\big)\big(Y - E(Y)\big)\big]$$

$$= Cov(X, Y)$$

3. $Cov(X, aX + b) = E\big[\big(X - E(X)\big)\big((aX + b) - (aE(X) + b)\big)\big]$

$$= E\big[\big(X - E(X)\big)(aX + b - aE(X) - b)\big]$$

$$= E\big[\big(X - E(X)\big)\big(aX - aE(X)\big)\big]$$

$$= E\Big[\big(X - E(X)\big)\Big(a\big(X - E(X)\big)\Big)\Big]$$

$$= aE\big[\big(X - E(X)\big)\big]^2$$

$$= aVar(X)$$

## 2.5 Matriks

Matriks adalah susunan bilangan berbentuk segiempat.Bilangan-bilangan dalam susunan itu disebut entri matriks. Entri pada baris ke-*i* kolom ke-*j* dari suatu matriks A dinyatakan sebagai $a_{ij}$. A suatu matriks berukuran m x n merupakan sebuah matriks dengan banyak baris m dan banyak kolom n, ditulis dalam bentuk:

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots \ \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots a_{mn} \end{bmatrix}$$

### 2.5.1 Matriks Invers

Jika $A$ merupakan suatu matriks persegi dengan $|A| \neq 0$. I suatu matriks identitas, dan $A^{-1}$ merupakan invers $A$, dimana $AA^{-1} = A^{-1}A = 1$.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} adjA \qquad (2.2)$$

Beberapa sifat invers matriks adalah sebagai berikut:

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
3. $(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$, untuk suatu skalar c.

## 2.6 Kriging

Secara umum, *kriging* merupakan suatu metode untuk menganalisis data geostatistika untuk menginterpolasi suatu kandungan mineral berdasarkan data sampel. Data sampel pada ilmu kebumian biasanya diambil di tempat-tempat yang tidak beraturan. Dengan kata lain, metode ini digunakan untuk mengestimasi besarnya nilai karakteristik $\hat{Z}$ pada titik tersampel berdasarkan informasi dari karakteristik titik-titik tersampel yang berada disekitarnya dengan mempertimbangkan korelasi spasial yang ada dalam data tersebut.

Estimator *kriging* $\hat{Z}(u)$ dapat dituliskan sebagai berikut (Bohling, 2005:4):

$$\hat{Z}(u) - m(u) = \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha [Z(u_\alpha) - m(u_\alpha)] \qquad (2.4)$$

dengan

$u$, $u_\alpha$ : vektor lokasi untuk estimasi dan salah satu dari data yang berdekatan, yang dinyatakan sebagai α

$m(u)$ : nilai ekspektasi dari $Z(u)$

$m(u_\alpha)$ : nilai ekspektasi dari $Z(u_\alpha)$

$\lambda_\alpha(u)$ : nilai $Z(u_\alpha)$ untuk estimasi lokasi $u$, nilai $Z(u_\alpha)$ yang sama akan memiliki nilai yang berbeda untuk estimasi pada lokasi berbeda.

n : banyaknya data sampel yang digunakan untuk estimasi.

$Z(u)$ diperlakukan sebagai bidang acak dengan suatu komponen trend, $m(u)$, dan komponen sisa atau error, $\delta(u) = Z(u) - m(u)$. Estimasi *kriging* yang bersifat sisa pada $u$ sebagai penilaian penjumlahan dari sisa pada data disekitarnya. Nilai $\lambda_\alpha$, diperoleh dari kovariansi atau semivariogram, dengan diperlukan komponen karakteristik sisa.

Tujuan *kriging* adalah untuk menentukan nilai $\lambda_\alpha$ yang meminimalkan variansi pada estimator, dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\hat{\sigma}_e^2 = var\left\{\hat{Z}(u) - Z(u)\right\} \tag{2.5}$$

Banyak metode yang dapat digunakan dalam metode *kriging* salah satunya yaitu *ordinary kriging* yang akan dibahas pada pembahasan berikutnya.

### 2.6.1 Ordinary Kriging

*Ordinary kriging* adalah metode *kriging* paling sederhana yang terdapat pada geostatistika. Pada metode ini, memiliki asumsi bahwa rata-rata (*mean*) tidak diketahui dan bernilai konstan. Pada *ordinary* *kriging*, $m(u)$ merupakan *mean* dari Z(u) yaitu $m(u) = E\big(Z(u)\big)$, dimana $E\big(Z(u)\big) = \mu$.

Pada Cressie (1993:120) dijelaskan bahwa *ordinary kriging* berhubungan dengan prediksi spasial dengan dua asumsi:

Asumsi Model:

$Z(u) = \mu + \delta(u)$, u ∈ D, μ ∈ ℜ dan μ tak diketahui (2.6)

Asumsi Prediksi:

$\hat{Z}(u) = \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha Z(u)$ dengan $\sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha = 1$ (2.7)

dengan:

$Z(u)$ : peubah acak bebas

$\mu$ : ekspektasi peubah acak $Z(u)$

$\delta(u)$ : nilai error pada $Z(u)$

D : himpunan random di $\Re^d$

ℜ : bilangan real

n : banyaknya data sampel yang digunakan untuk estimasi

Karena koefisien dari hasil penjumlahan prediksi linier adalah 1 dan memiliki syarat tak bias maka $E\left(\hat{Z}(u)\right) = \mu = E\big(Z(u)\big) = Z(u)$, untuk setiap μ ∈ ℜ dan karena $Z(u)$merupakan suatu konstanta maka $E\big(Z(u)\big) = Z(u)$.

Jika terdapat estimator error, $\delta(u)$, pada setiap lokasi merupakan perbedaan antara nilai estimasi $\hat{Z}(u)$ dengan nilai sebenarnya $Z(u)$, yang dinyatakan sebagai berikut:

$$\hat{\delta}(u) = \hat{Z}(u) - Z(u) \tag{2.8}$$

dimana:

$\hat{\delta}(u)$ : estimator error

$\hat{Z}(u)$ : nilai estimasi

$Z(u)$ : nilai sebenarnya

dengan $E(\hat{\delta}(u)) = 0$

Selisih $\hat{Z}(u) - Z(u)$ disebut galat estimasi atau bias. Bobot $\lambda_\alpha, \alpha = 1,2, \dots, n$ ditentukan berdasarkan kriteria :

1. Tak bias : $E[\hat{Z}(u) - Z(u)] = 0$
2. Variansi : $Var[\hat{Z}(u) - Z(u)] minimum$

Dengan menggunakan persamaan (2.8) dapat dibuktikan bahwa $\hat{Z}(u)$ merupakan estimator tak bias. Akan dibuktikan bahwa $\hat{Z}(u)$ merupakan estimator tak bias:

$$\hat{\delta}(u) = \hat{Z}(u) - Z(u)$$

$$E\left(\hat{\delta}(u)\right) = E\left(\hat{Z}(u) - Z(u)\right)$$

$$E\left(\hat{\delta}(u)\right) = E\left(\hat{Z}(u)\right) - E(Z(u))$$

Karena $E\left(\hat{\delta}(u)\right) = 0$, maka diperoleh

$$0 = E\left(\hat{Z}(u)\right) - E(Z(u))$$

$$E\left(\hat{Z}(u)\right) = E(Z(u))$$

$$E\left(\hat{Z}(u)\right) = Z(u) \qquad \text{(bukti dari sifat } Var(\delta(u))\text{)}$$

Terbukti bahwa $\hat{Z}(u)$ merupakan estimator tak bias dari $Z(u)$.

*Ordinary kriging* akan meminimalkan rata-rata estimator error kuadrat. Dengan menggunakan persamaan (2.7)

$\hat{Z}(u) = \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha Z(u)$ dengan $\sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha = 1$

$$\hat{Z}(u) = 1.\left(Z(u)\right)$$

$$\hat{Z}(u) = Z(u)$$

$$E\left(\hat{Z}(u)\right) = E(Z(u))$$

$0 = E\left(\hat{Z}(u)\right) - E(Z(u))$ (estimator tak bias $E\left(\hat{\delta}(u)\right) = 0$)

$$E\left(\hat{\delta}(u)\right) = E\left(\hat{Z}(u)\right) - E(Z(u))$$

dari *Teorema 2.1* :

$$Var(X) = E\left(X - E(X)\right)^2$$

$$Var\left(\hat{\delta}(u)\right) = E\left(\hat{\delta}(u) - E\left(\hat{\delta}(u)\right)\right)^2$$

$$Var\left(\hat{\delta}(u)\right) = E\left(\hat{\delta}(u)^2\right) - \left(E\left(\hat{\delta}(u)\right)\right)^2$$

$$E\left(\hat{\delta}(u)^2\right) = Var\left(\hat{\delta}(u)\right) - \left(E\left(\hat{\delta}(u)\right)\right)^2 \qquad (2.9)$$

$$= Var\left(\hat{\delta}(u)\right) + 0$$

$$= Var\left(\hat{\delta}(u)\right)$$

Karena $E\left(\hat{\delta}(u)\right) = 0$, maka $\left(E\left(\hat{\delta}(u)\right)\right)^2 = Var\left(\hat{\delta}(u)\right)$.

Adapun sifat-sifat dari *ordinary kriging*, sebagai salah satu tujuan *kriging*, yaitu menghasilkan estimator yang bersifat *Efisien Linear Unbiassed Estimator* (BLUE). Berikut akan dibuktikan sifat *BLUE* pada *ordinary kriging*:

1. Linear

Diperoleh suatu persamaan pada metode *ordinary kriging* adalah sebagai berikut:

$$\hat{Z}(u) = \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha Z(u)$$

Dari persamaan di atas, $\hat{Z}(u)$ dapat dikatakan estimator yang bersifat linear karena merupakan fungsi linear dari Z(u).

Terdapat n pengukuran pada lokasi 1, 2, 3, …, n dinyatakan sebagai berikut $Z(u_1), Z(u_2), Z(u_3), \dots, Z(u)$. Berdasarkan data yang tersampel, akan diestimasi $Z(u)$ pada lokasi yang tersampel yang dinyatakan dalam $Z(u_0)$. Selanjutnya, dari persamaan (2.7) dan (2.8), akan disusun variabel acak untuk menggambarkan estimator dari error, yaitu dari:

$\hat{Z}(u) = \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha Z(u_\alpha)$ dengan $\sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha$

$\hat{\delta}(u) = \hat{Z}(u) - Z(u)$

sehingga

$$\begin{aligned}\hat{\delta}(u) &= \hat{Z}(u) - Z(u) \\ &= \sum_{\alpha=0}^{n} \lambda_\alpha Z(u) - Z(u) \qquad (2.10)\end{aligned}$$

Dengan $\hat{Z}(u)$ merupakan kombinasi linear dari semua data tersampel.

2. Tak Bias

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa $\hat{Z}(u)$ merupakan estimator tak bias. Dapat dipastikan bahwa error pada lokasi tertentu memilki nilai ekspektasi 0 dengan menerapkan rumus untuk nilai ekspektasi pada kombinasi linear terhadap persamaan (2.10), sehingga diperoleh:

$$E\left(\hat{\delta}(u)\right) = E\left(\sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha Z(u) - Z(u)\right)$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha E\big(Z(u)\big) - E\big(Z(u)\big) \tag{2.11}$$

Dengan asumsi bahwa fungsi acak bersifat stasioner, dimana setiap nilai ekspektasi boleh dituliskan sebagai $E(Z)$, sehingga diperoleh:

$$E\left(\hat{\delta}(u)\right) = \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha E(Z) - E(Z)$$

Karena $E\left(\hat{\delta}(u)\right) = 0$, maka

$$E\left(\hat{\delta}(u)\right) = 0$$

$$0 = \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha E(Z) - E(Z)$$

$$0 - \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha E(Z) = \left(\sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha E(Z)\right) - \left(\sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha E(Z)\right) - E(Z)$$

$$-\left(\sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha E(Z)\right) = -\big(E(Z)\big)$$

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha E(Z) = E(Z)$$

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha \frac{E(Z)}{E(Z)} = \frac{E(Z)}{E(Z)}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha . 1 = 1$$

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha = 1$$

Sehingga

$$E\left(\hat{Z}(u)\right) = E\left(\sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha E\big(Z(u)\big)\right)$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha E\big(Z(u)\big) \qquad \left(\sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha = 1, E\big(Z(u)\big) = \mu\right)$$

$$= 1.\mu$$

$$= \mu$$

Berdasarkan penjabaran di atas, maka diperoleh $E\left(\hat{Z}(u)\right) = \mu = Z(u)$, dimana $Z(u) = E\big(Z(u)\big)$ dengan $Z(u)$ berupa suatu konstanta. Ini berarti *ordinary kriging* menghasilkan estimator yang tak bias dengan $\sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha = 1$.

3. Efisien

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa metode *ordinary kriging* bersifat efisien yaitu dengan meminimumkan variansi error. Dengan mengasumsikan bahwa $var\big(Z(u)\big) = \sigma^2$, persamaan estimator kuadrat (2.9):

$$E\big(\hat{\delta}(u)^2\big) = Var\left(\hat{\delta}(u)\right) + \left(E\left(\hat{\delta}(u)\right)\right)^2$$

estimator tak bias:

$$E\left(\hat{\delta}(u)\right) = E\left(\hat{Z}(u)\right) - E\big(Z(u)\big)$$

$$E\left(\hat{\delta}(u)\right) = E\left(\hat{Z}(u) - Z(u)\right)$$

menjadi

$$Var\left(\hat{\delta}(u)\right) = Var\left(\hat{Z}(u) - Z(u)\right)$$

$$= cov\left(\hat{Z}(u_0), \hat{Z}(u_0)\right) + cov\big(Z(u_0), Z(u_0)\big) - 2cov\left(\hat{Z}(u_0), Z(u_0)\right)$$

$$= var\left(\hat{Z}(u_0)\right) + var\big(Z(u_0)\big) - 2cov\left(\hat{Z}(u_0), Z(u_0)\right)$$

$$= var\left(\hat{Z}(u_0)\right) + \sigma^2 - 2cov\left(\hat{Z}(u_0), Z(u_0)\right) \tag{2.12}$$

dengan

$$var\left(\hat{Z}(u_0)\right) = var\Big(\sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha \big(Z(u_\alpha)\big)\Big)$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} \lambda_\alpha \lambda_\beta cov\left(Z(u_\alpha), Z(u_\beta)\right) \tag{2.13}$$

dan

$cov\left(\hat{Z}(u_0),\hat{Z}(u_0)\right) = E(\sum_{\alpha=1}^{n}\lambda_\alpha Z(u_\alpha)Z(u_0)) - E\left(\hat{Z}(u_0)E(Z(u_0))\right)$

$= \sum_{\alpha=1}^{n}\lambda_\alpha E(Z(u_\alpha)Z(u_0)) - E\left(\hat{Z}(u_0)\right)E(Z(u_0))$

$= \sum_{\alpha=1}^{n}\lambda_\alpha E(Z(u_\alpha)Z(u_0)) - E(\sum_{\alpha=1}^{n}\lambda_\alpha Z(u_\alpha))E(Z(u_0))$

$= \sum_{\alpha=1}^{n}\lambda_\alpha E(Z(u_\alpha)Z(u_0)) - \sum_{\alpha=1}^{n}\lambda_\alpha E(Z(u_\alpha))\,E(Z(u_0))$

$= \sum_{\alpha=1}^{n}\lambda_\alpha cov(Z(u_\alpha),Z(u_0))$ (2.14)

Dengan mensubtitusikan persamaan (2.13) dan (2.14) ke dalam persamaan (2.11) maka akan diperoleh estimasi variansi error *ordinary kriging* sebagai berikut:

$$var(\delta(u_0)) = \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}\lambda_\alpha\lambda_\beta cov\left(Z(u_\alpha),Z(u_\beta)\right) + \sigma^2 - 2\sum_{\beta=1}^{n}\lambda_\alpha cov(Z(u_\alpha),Z(u_0)) \quad (2.15)$$

dengan syarat $\sum_{\alpha=1}^{n}\lambda_\alpha = 1$.

Penulisan sistem *kriging* kovariansi dalam bentuk matriks, yaitu :

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} & 1 \\ C_{21} & C_{22} & & C_{2n} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{C}_{1V} \\ \bar{C}_{2V} \\ \vdots \\ \bar{C}_{nV} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Jika blok $U$ merupakan satu titik, maka taksiran *kriging* menjadi taksiran titik dan sistem *kriging* blok menjadi sistem *kriging* titik. Misalkan ditaksir nilai Z di $u_0$, $Z(u_0)$. Taksiran $Z(u_0)$ merupakan rataan berbobot data di sekitar $Z(u_0)$:

$$\hat{Z}(u_0) = \hat{Z}_0 = \sum_{\alpha=1}^{n}\lambda_\alpha Z_\alpha$$

Bobot $\lambda_\alpha, \alpha = 1,2, \dots, n$ diperoleh dari sistem *kriging* :

$$\begin{cases} \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha C_{\alpha\beta} + \mu = \bar{C}_{\alpha 0}, \beta = 1, \dots, n \\ \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha = 1 \end{cases}$$

atau dalam bentuk matriks :

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} & 1 \\ C_{21} & C_{22} & & C_{2n} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{C}_{10} \\ \bar{C}_{20} \\ \vdots \\ \bar{C}_{n0} \\ 1 \end{pmatrix}$$

## 2.7 Metode Bootstrap

*Bootstrap* merupakan inferensi berbasis komputer yang dapat membangkitkan data acak untuk mendapatkan contoh tiruan data asli yang berukuran tertentu atau sama dengan ukuran contoh data asli.

Metode *bootstrap* mengetengahkan masalah resampling yaitu pengambilan contoh acak dari contoh yang sudah ada dengan pengembalian. Secara umum metode *resampling* mengacu pada metode yang menggunakan data amatan secara berulang-ulang dalam suatu analisis simulasi untuk menarik kesimpulan yang dilakukan dengan bantuan komputer.

Menurut Wasserman dan Bockenholt (1989), dengan metode *bootstrap* ukuran contoh dapat diperbesar tanpa memperbesar biaya, tenaga, dan waktu. Banyak penelitian dilakukan untuk mencari suatu teori atau teknik yang tidak sensitif terhadap ukuran contoh yang kecil. Salah satu teknik itu adalah metode *bootstrap*.

Metode *bootstrap*, seperti yang dikemukakan oleh Efron dan Tibshirani (1998), merupakan metode simulasi berdasarkan data untuk pengambilan kesimpulan secara statistika. Metode ini digunakan untuk menjawab pertanyaan-pertanyaan statistika yang dalam pemecahannya banyak terbentur pada rumus-rumus matematis yang rumit. Fiellin dan Feinskin (1998) menyatakan bahwa metode *bootstrap* tidak memerlukan asumsi model teoritis maupun model matematis, selain itu data tidak harus berasal dari sebaran tertentu atau dapat dikatakan bebas sebaran.

Metode *bootstrap* merupakan metode penaksiran nonparametrik yang dapat digunakan untuk menaksir parameter dan nilai signifikasi atau *significance* level (Efron dan Gong, 1983).

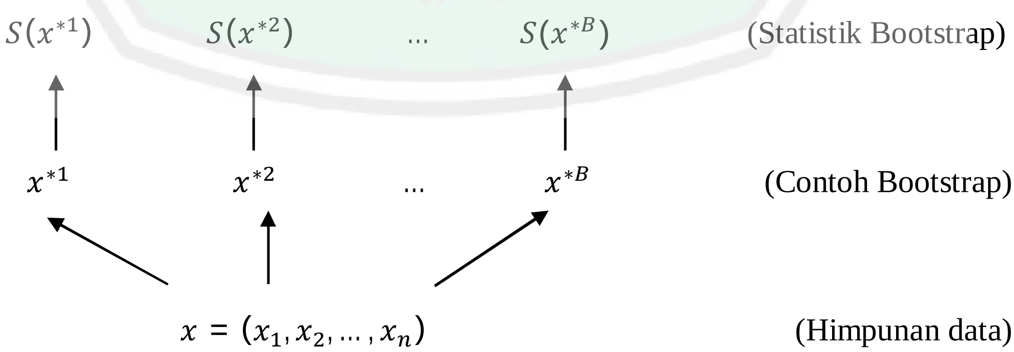
Ide dasar pengambilan ulang contoh empiris ini adalah memperbanyak setiap titik contoh sehingga berukuran besar (Efron dan Gong, 1983). Selanjutnya semua contoh tersebut dimasukkan ke dalam suatu mesin pengocok dan dari mesin tersebut ditarik suatu contoh berukuran tertentu atau sama dengan ukuran contoh semula dan dilakukan dengan pengembalian. Dari contoh tersebut dilakukan terus menerus sampai pada saat dimana nilai dugaan yang diperoleh menjadi konvergen, sehingga nilai dugaan parameter dari contoh-contoh tersebut diharapkan dapat menggambarkan keadaan parameter yang sebenarnya (Iriany, 1998).

Misalkan himpunan data asli $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), x^*$ merupakan contoh *bootstrap* yang diambil secara acak sebanyak $n$ dari data asli dengan pengembalian. Misal $s(x)$ adalah statistik dari contoh data asli, maka $s(x^*)$ adalah taksiran dari nilai statistik $s(x)$ dari contoh *bootstrap*. Untuk menaksir parameter dari data asli, pengambilan contoh *bootstrap* dilakukan sebanyak $B$ dan nilai taksiran parameter atau statistik diperoleh dari nilai statistik dari kumpulan statistik $s(x^{*i})$ di mana $i = 1,2, \dots, B$.

Berbeda dengan penaksiran dalam statistika parametrik, metode *bootstrap* tidak memerlukan macam-macam asumsi. Satu-satunya yang diperlukan hanyalah bahwa contoh yang digunakan sudah cukup mewakili (*representative*) populasinya. Di samping itu, metode ini memberikan kemudahan penerapan untuk hampir semua jenis statistik (Marsisno, 1999).

Banyaknya contoh *bootstrap* yang harus diambil idealnya adalah $B \to \infty$. Sedangkan lamanya komputer memproses akan meningkat secara linier seiring dengan bertambahnya jumlah $B$. Menurut Efron (1992), pengambilan ukuran contoh acak untuk *bootstrap* yang sudah dianggap baik dapat berkisar antara 1000 sampai 2000 ulangan.

Metode *bootstrap* lebih luas penerapannya yaitu dapat digunakan pada contoh dengan ukuran kurang dari 16 $(n \leq 15)$. Metode ini digunakan pada masalah-masalah yang tidak biasa dimana tidak mungkin atau sulit menduga keragaman statistik (Wasserman dan Bockenholt, 1989). Adapun skema proses *bootstrap* menurut Efron dan Tibshirani (1993) dapat dilihat pada Gambar 2.1.




Gambar 2.1: Skema proses *bootstrap* (Efron, 1991)

Menurut Efron (1991), metode *bootstrap* dapat diterapkan pada hampir semua pendugaan antara lain :

1. Tidak hanya pada data tunggal x tapi juga pada data lebih dari satu/ berpasangan seperti regresi, matriks, dan vektor.
2. Statistik $t(x)$ yang akan diduga dapat apa saja selama dapat apa saja selama dapat dihitung penduga tersebut dari contoh *bootstrap* $t(x^*)$.
3. Data tidak harus berasal dari sebarang peluang tertentu dan dapat digunakan pada analisis regresi, deret waktu, dan analisis lain yang salah satunya adalah analisis tabel kontigensi.
4. Ukuran keakuratan yang dapat digunakan selain *standard error* adalah *bias, mean absolute deviation,* dan selang kepercayaan.

Algoritma metode *bootstrap* data spasial:

Asumsi yang digunakan adalah algoritma metode *bootstrap* data spasial:

a. $Z \sim (0, C)$
b. Matriks C berukuran *nxn* simetris definit positif.
c. Z memenuhi fungsi acak stasioner berorde dua.

Misal barisan data spasial $\{Z_1, Z_2, Z_3, \dots, Z_n\}$ dengan $z_\alpha$ adalah realisasi pengukuran $Z$ pada lokasi (koordinat ke-α) di suatu daerah.

Langkah-langkah:

1. Menulis barisan data spasial tersebut menjadi sebuah vektor kolom, yaitu:

$$\bar{Z} = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix}$$

2. Menghitung jarak (h) antara $Z_t$ dengan $Z_k$, I, k = 1,2,…,n untuk mendapatkan *semivariogram eksperimental* $\hat{\gamma}(h)$ dan matriks $\sum = C(nxn)$.

3. Karena C matriks definit positif, maka dengan menggunakan dekomposisi Cholesky, C dapat ditulis sebagai:

   $C = LL^t$

   dimana: L adalah matriks segitiga bawah yaitu matriks dengan semua elemen di atas diagonal bernilai nol.

4. Mendefinisikan suatu matriks $\left(L^{-1}\right)$ yang mentransformasikan data berkorelasi (Z) menjadi data tak berkorelasi (U), yaitu:

   $\bar{U} = L^{-1}\bar{Z};\ \bar{U} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{pmatrix}$

   $\bar{U}$ adalah variabel *iid* dengan mean nol dan matriks *variansi kovariansi*. Sampel bootstrap $U_i^*, i = 1,2, \ldots, n$ diperoleh dengan sampling n nilai secara acak dengan pengembalian dari elemen $\bar{U}$.

5. Mentransformasikan kembali sampel bootstrap $(\bar{U})$ ke bentuk data asli yang disebut sample *quasibootstrap* $\left(\bar{Z}^*\right)$, sebagai berikut:

   $$\bar{Z}^* = L\bar{U}^*$$

   Dimana: $\bar{Z}^* = \begin{pmatrix} Z_1^* \\ Z_2^* \\ \vdots \\ Z_n^* \end{pmatrix}$ dan $\bar{U}^* = \begin{pmatrix} U_1^* \\ U_2^* \\ \vdots \\ U_n^* \end{pmatrix}$

   Jika pada data asli dilakukan transformasi pemusatan, maka sample *quasibootstrap*nya harus ditambah dengan penaksir mean, yaitu:

   $$\bar{Z}^* = L\bar{U}^* + \bar{Z}$$

## 2.8 Kajian Keagaman

### 2.8.1 Metode Bootstrap dan Keistiqomahan

Metode *bootstrap* sebagai metode yang mengetengahkan masalah resampling yaitu pengambilan contoh acak dari contoh yang sudah ada dengan pengembalian. Pengambilan ulang contoh empiris ini adalah memperbanyak setiap titik contoh sehingga berukuran besar. Selanjutnya semua contoh tersebut dimasukkan ke dalam suatu mesin pengocok dan dari mesin tersebut ditarik suatu contoh berukuran tertentu atau sama dengan ukuran contoh semula dan dilakukan dengan pengembalian. Dari contoh tersebut dilakukan terus menerus sampai pada saat dimana nilai dugaan yang diperoleh menjadi konvergen, sehingga nilai dugaan parameter dari contoh-contoh tersebut diharapkan dapat menggambarkan keadaan parameter yang sebenarnya.

Secara umum dapat diartikan pula metode *bootstrap* merupakan metode resampling yang mengacu pada metode yang menggunakan data amatan secara berulang-ulang dalam suatu analisis simulasi yang digunakan untuk menarik kesimpulan yang dilakukan dengan bantuan komputer. Ukuran contoh dapat diperbesar tanpa tanpa memperbesar biaya, tenaga, dan waktu.

Dari penjelasan metode *bootstrap* di atas, dapat kita ketahui metode *bootstrap* termasuk salah satu ilmu yang berkaitan dengan salah satu ilmu dalam Al-Qur'an yaitu *istiqomah*. Karena dari pengertian metode *bootstrap* yaitu "Metode yang mengetengahkan masalah resampling dengan pengambilan contoh acak dari contoh yang sudah ada dengan pengembalian. Pengambilan ulang contoh empiris ini adalah memperbanyak setiap titik contoh sehingga berukuran besar. Selanjutnya semua contoh tersebut dimasukkan ke dalam suatu mesin pengocok dan dari mesin tersebut ditarik suatu contoh berukuran tertentu atau sama dengan ukuran contoh semula dan dilakukan dengan pengembalian. Dari contoh tersebut dilakukan terus menerus sampai pada saat dimana nilai dugaan yang diperoleh menjadi konvergen". Hal tersebut dari satu titik yang dilakukan secara berulang-ulang akan menghasilkan sesuatu yang besar. Memiliki pengertian yang sama dengan *istiqomah*.

Sekarang kita perhatikan pengertian dari *istiqomah* (konsisten) itu sendiri yaitu berarti bersikap teguh pendirian dan selalu konsekuen, suatu perbuatan atau suatu amalan yang dilakukan secara terus menerus, sehingga memperoleh sesuatu yang besar yaitu bisa menjadikan manusia itu bersifat lurus dan seimbang dalam mentaati Allah SWT baik segi akidah, perkataan, maupun perbuatan.

Dari kedua pengertian di atas, dapat ditarik kesimpulan, metode *bootstrap* merupakan ilmu yang terinspirasi dari *istiqomah*.

Ayat-ayat Al-Qur'an yang berkaitan dengan *istiqomah* adalah sebagai berikut:

Terdapat pada QS. Al-Ahqaaf ayat 13-14:

إِنَّ ٱلَّذِينَ قَالُواْ رَبُّنَا ٱللَّهُ ثُمَّ ٱسۡتَقَٰمُواْ فَلَا خَوۡفٌ عَلَيۡهِمۡ وَلَا هُمۡ يَحۡزَنُونَ ١٣

أُوْلَٰٓئِكَ أَصۡحَٰبُ ٱلۡجَنَّةِ خَٰلِدِينَ فِيهَا جَزَآءَۢ بِمَا كَانُواْ يَعۡمَلُونَ ١٤

*Artinya:"Sesungguhnya orang-orang yang mengatakan: "Tuhan Kami ialah Allah", kemudian mereka tetap istiqomah. Maka tidak ada kekhawatiran terhadap mereka dan mereka tiada (pula) berduka cita. (13) Mereka Itulah penghuni-penghuni surga, mereka kekal di dalamnya; sebagai Balasan atas apa yang telah mereka kerjakan. (14)" (Al-Ahqaaf 46:13-14).*

Dari ayat di atas diketahui bahwa, apabila kita sebagai makhluk Allah SWT melakukan hal baik yang dilakukan secara berulang-ulang akan mendapatkan hasil sebagai balasan dari perbuatan kita atau bisa disebut juga dari arti *istiqomah* ialah teguh pendirian dalam tauhid dan tetap beramal yang saleh, untuk mencapai hasil keridhoan Allah SWT.

Dalam QS. Huud ayat 112:

فَٱسۡتَقِمۡ كَمَآ أُمِرۡتَ وَمَن تَابَ مَعَكَ وَلَا تَطۡغَوۡاْۚ إِنَّهُۥ بِمَا تَعۡمَلُونَ بَصِيرٞ ١١٢

*Artinya: "Maka tetaplah (istiqomahlah) kamu pada jalan yang benar, sebagaimana diperintahkan kepadamu dan (juga) orang yang telah taubat beserta kamu dan janganlah kamu melampaui batas. Sesungguhnya Dia Maha melihat apa yang kamu kerjakan" (Huud 11:112).*

Ayat ini mengisyaratkan kepada kita bahwa Rasulullah dan orang yang bertaubat bersamanya harus beristiqomah sebagaimana yang telah diperintahkan. *Istiqomah* dalam *mabda* (dasar atau awal pemberangkatan), *minhaj* dan *hadaf* (tujuan) yang digariskan dan tidak boleh menyimpang dari perintah-perintah ilahiah.

# BAB III

# PEMBAHASAN

## 3.1 Estimasi Parameter *Kriging* dengan Metode *Bootstrap*

*Kriging* merupakan metode paling populer dari interpolasi data spasial. Dari persamaan (2.6), model persamaan *ordinary kriging* didefinisikan dengan:

$Z(u) = \mu + \delta(u)$, u ∈ D, μ∈ R dan μ tak diketahui

dengan asumsi prediksi:

$\hat{Z}(u) = \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha Z(u)$ dengan $\sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha = 1$

dengan:

$Z(u)$ : peubah acak bebas

$\mu$ : ekspektasi peubah acak $Z(u)$

$\delta(u)$ : nilai error pada $Z(u)$

D : himpunan random di $\Re^d$

$\Re$ : bilangan real

n : banyaknya data sampel yang digunakan untuk estimasi

Karena koefisien dari hasil penjumlahan prediksi linier adalah 1 dan memiliki syarat tak bias maka $E\left(\hat{Z}(u)\right) = \mu = E\big(Z(u)\big) = Z(u)$, untuk setiap μ ∈ $\Re$ dan karena Z(u) merupakan suatu konstanta maka $E\big(Z(u)\big) = Z(u)$.

Jika terdapat *estimator* error, $\delta(u)$, pada setiap lokasi merupakan perbedaan antara nilai estimasi $\hat{Z}(u)$ dengan nilai sebenarnya Z(u), yang dinyatakan sebagai berikut:

$$\hat{\delta}(u) = \hat{Z}(u) - Z(u) \tag{3.1}$$

dimana:

$\hat{\delta}(u)$ : *estimator* error

$\hat{Z}(u)$ : nilai estimasi

$Z(u)$ : nilai sebenarnya

dengan $E(\hat{\delta}(u)) = 0$

Selisih $\hat{Z}(u) - Z(u)$ disebut galat estimasi atau bias. Bobot $\lambda_\alpha, \alpha = 1,2, \dots, n$ ditentukan berdasarkan kriteria :

1. Tak bias : $E[\hat{Z}(u) - Z(u)] = 0$
2. Variansi : $Var[\hat{Z}(u) - Z(u)] minimum$

Dengan menggunakan persamaan (2.8) dapat dibuktikan bahwa $\hat{Z}(u)$ merupakan *estimator* tak bias. Akan dibuktikan bahwa $\hat{Z}(u)$ merupakan *estimator* tak bias:

$$\hat{\delta}(u) = \hat{Z}(u) - Z(u)$$

$$E\left(\hat{\delta}(u)\right) = E\left(\hat{Z}(u) - Z(u)\right)$$

$$E\left(\hat{\delta}(u)\right) = E\left(\hat{Z}(u)\right) - E(Z(u))$$

Karena $E\left(\hat{\delta}(u)\right) = 0$, maka diperoleh

$$0 = E\left(\hat{Z}(u)\right) - E(Z(u))$$

$$E\left(\hat{Z}(u)\right) = E(Z(u))$$

$$E\left(\hat{Z}(u)\right) = Z(u) \qquad \text{(bukti dari sifat } Var(\delta(u))\text{)}$$

Terbukti bahwa $\hat{Z}(u)$ merupakan *estimator* tak bias dari $Z(u)$.

*Ordinary kriging* akan meminimalkan rata-rata *estimator* error kuadrat. Dengan menggunakan persamaan (2.7)

$\hat{Z}(u) = \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha Z(u)$ dengan $\sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha = 1$

$\hat{Z}(u) = 1.\left(Z(u)\right)$

$\hat{Z}(u) = Z(u)$

$E\left(\hat{Z}(u)\right) = E(Z(u))$

$0 = E\left(\hat{Z}(u)\right) - E(Z(u))$ (*estimator* tak bias $E\left(\hat{\delta}(u)\right) = 0$)

$E\left(\hat{\delta}(u)\right) = E\left(\hat{Z}(u)\right) - E(Z(u))$

dari *Teorema 2.1* :

$$Var(X) = E\left(X - E(X)\right)^2$$

$$Var\left(\hat{\delta}(u)\right) = E\left(\hat{\delta}(u) - E\left(\hat{\delta}(u)\right)\right)^2$$

$$Var\left(\hat{\delta}(u)\right) = E\left(\hat{\delta}(u)^2\right) - \left(E\left(\hat{\delta}(u)\right)\right)^2$$

$$E\left(\hat{\delta}(u)^2\right) = Var\left(\hat{\delta}(u)\right) - \left(E\left(\hat{\delta}(u)\right)\right)^2 \quad (3.2)$$

$$= Var\left(\hat{\delta}(u)\right) + 0$$

$$= Var\left(\hat{\delta}(u)\right)$$

Karena $E\left(\hat{\delta}(u)\right) = 0$, maka $\left(E\left(\hat{\delta}(u)\right)\right)^2 = Var\left(\hat{\delta}(u)\right)$.

Adapun sifat-sifat dari *ordinary kriging*, sebagai salah satu tujuan *kriging*, yaitu menghasilkan *estimator* yang bersifat *Efisien Linear Unbiassed Estimator* (BLUE). Berikut akan dibuktikan sifat *BLUE* pada *ordinary kriging*:

1. Linear

Diperoleh suatu persamaan pada metode *ordinary kriging* adalah sebagai berikut:

$$\hat{Z}(u) = \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha Z(u)$$

Dari persamaan di atas, $\hat{Z}(u)$ dapat dikatakan *estimator* yang bersifat linear karena merupakan fungsi linear dari Z(u).

Terdapat n pengukuran pada lokasi 1, 2, 3, …, n dinyatakan sebagai berikut $Z(u_1), Z(u_2), Z(u_3), \ldots, Z(u)$. Berdasarkan data yang tersampel, akan diestimasi Z(u) pada lokasi yang tersampel yang dinyatakan dalam $Z(u_0)$. Selanjutnya, dari persamaan (2.7) dan (3.1), akan disusun variabel acak untuk menggambarkan *estimator* dari error, yaitu dari:

$\hat{Z}(u) = \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha Z(u_\alpha)$ dengan $\sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha$

$\hat{\delta}(u) = \hat{Z}(u) - Z(u)$

sehingga

$$\begin{aligned}\hat{\delta}(u) &= \hat{Z}(u) - Z(u)\\ &= \sum_{\alpha=0}^{n} \lambda_\alpha Z(u) - Z(u) \qquad (3.3)\end{aligned}$$

Dengan $\hat{Z}(u)$ merupakan kombinasi linear dari semua data tersampel.

2. Tak Bias

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa $\hat{Z}(u)$ merupakan *estimator* tak bias. Dapat dipastikan bahwa error pada lokasi tertentu memilki nilai ekspektasi 0 dengan menerapkan rumus untuk nilai ekspektasi pada kombinasi linear terhadap persamaan (3.3), sehingga diperoleh:

$E\left(\hat{\delta}(u)\right) = E\left(\sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha Z(u) - Z(u)\right)$

$$= \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha E\big(Z(u)\big) - E\big(Z(u)\big) \tag{3.4}$$

Dengan asumsi bahwa fungsi acak bersifat *stasioner*, dimana setiap nilai ekspektasi boleh dituliskan sebagai $E(Z)$, sehingga diperoleh:

$$E\left(\hat{\delta}(u)\right) = \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha E(Z) - E(Z)$$

Karena $E\left(\hat{\delta}(u)\right) = 0$, maka

$$E\left(\hat{\delta}(u)\right) = 0$$

$$0 = \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha E(Z) - E(Z)$$

$$0 - \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha E(Z) = \left(\sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha E(Z)\right) - \left(\sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha E(Z)\right) - E(Z)$$

$$-\left(\sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha E(Z)\right) = -\big(E(Z)\big)$$

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha E(Z) = E(Z)$$

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha \frac{E(Z)}{E(Z)} = \frac{E(Z)}{E(Z)}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha . 1 = 1$$

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha = 1$$

Sehingga

$$E\left(\hat{Z}(u)\right) = E\left(\sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha E\big(Z(u)\big)\right)$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha E\big(Z(u)\big) \quad \left(\sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha = 1, E\big(Z(u)\big) = \mu\right)$$

$$= 1.\mu$$

$$= \mu$$

Berdasarkan penjabaran di atas, maka diperoleh $E\left(\hat{Z}(u)\right) = \mu = Z(u)$, dimana $Z(u) = E\big(Z(u)\big)$ dengan $Z(u)$ berupa suatu konstanta. Ini berarti *ordinary kriging* menghasilkan *estimator* yang tak bias dengan $\sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha = 1$.

3. Efisien

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa metode *ordinary kriging* bersifat efisien yaitu dengan meminimumkan variansi error. Dengan mengasumsikan bahwa $var(Z(u)) = \sigma^2$, persamaan *estimator* kuadrat (3.2):

$$E(\hat{\delta}(u)^2) = Var\left(\hat{\delta}(u)\right) + \left(E\left(\hat{\delta}(u)\right)\right)^2$$

*estimator* tak bias:

$$E\left(\hat{\delta}(u)\right) = E\left(\hat{Z}(u)\right) - E(Z(u)\ )$$

$$E\left(\hat{\delta}(u)\right) = E\left(\hat{Z}(u) - Z(u)\right)$$

menjadi

$$Var\left(\hat{\delta}(u)\right) = Var\left(\hat{Z}(u) - Z(u)\right)$$

$$= cov\left(\hat{Z}(u_0), \hat{Z}(u_0)\right) + cov(Z(u_0), Z(u_0)) - 2cov\left(\hat{Z}(u_0), Z(u_0)\right)$$

$$= var\left(\hat{Z}(u_0)\right) + var(Z(u_0)) - 2cov\left(\hat{Z}(u_0), Z(u_0)\right)$$

$$= var\left(\hat{Z}(u_0)\right) + \sigma^2 - 2cov\left(\hat{Z}(u_0), Z(u_0)\right) \quad (3.5)$$

dengan

$$var\left(\hat{Z}(u_0)\right) = var\left(\sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha (Z(u_\alpha))\right)$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} \lambda_\alpha \lambda_\beta cov\left(Z(u_\alpha), Z(u_\beta)\right) \quad (3.6)$$

dan

$$cov\left(\hat{Z}(u_0), \hat{Z}(u_0)\right) = E\left(\sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha Z(u_\alpha) Z(u_0)\right) - E\left(\hat{Z}(u_0) E(Z(u_0))\right)$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha E(Z(u_\alpha) Z(u_0)) - E\left(\hat{Z}(u_0)\right) E(Z(u_0))$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha E(Z(u_\alpha) Z(u_0)) - E\left(\sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha Z(u_\alpha)\right) E(Z(u_0))$$

$= \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha E\big(Z(u_\alpha)Z(u_0)\big) - \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha E\big(Z(u_\alpha)\big)\, E\big(Z(u_0)\big)$

$= \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha cov\big(Z(u_\alpha), Z(u_0)\big)$ (3.7)

Dengan mensubtitusikan persamaan (3.6) dan (3.7) ke dalam persamaan (3.5) maka akan diperoleh estimasi variansi error *ordinary kriging* sebagai berikut:

$$var\big(\delta(u_0)\big) = \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} \lambda_\alpha \lambda_\beta cov\left(Z(u_\alpha), Z(u_\beta)\right) + \sigma^2 - 2\sum_{\beta=1}^{n} \lambda_\alpha cov\big(Z(u_\alpha), Z(u_0)\big) \quad (3.8)$$

dengan syarat $\sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha = 1$.

Penulisan sistem *kriging* kovariansi dalam bentuk matriks, yaitu :

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} & 1 \\ C_{21} & C_{22} & & C_{2n} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{C}_{1V} \\ \bar{C}_{2V} \\ \vdots \\ \bar{C}_{nV} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Jika blok $U$ merupakan satu titik, maka taksiran *kriging* menjadi taksiran titik dan sistem *kriging* blok menjadi sistem *kriging* titik. Misalkan ditaksir nilai Z di $u_0$, $Z(u_0)$. Taksiran $Z(u_0)$ merupakan rataan berbobot data di sekitar $Z(u_0)$:

$$\hat{Z}(u_0) = \hat{Z}_0 = \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha Z_\alpha$$

Bobot $\lambda_\alpha, \alpha = 1,2,\dots,n$ diperoleh dari sistem *kriging* :

$$\begin{cases} \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha C_{\alpha\beta} + \mu = \bar{C}_{\alpha 0}, \beta = 1,\dots,n \\ \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha = 1 \end{cases}$$

atau dalam bentuk matriks :

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} & 1 \\ C_{21} & C_{22} & & C_{2n} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{C}_{10} \\ \bar{C}_{20} \\ \vdots \\ \bar{C}_{n0} \\ 1 \end{pmatrix}$$

*Kriging* mempunyai parameter $\hat{Z}(u)$ dan $\hat{\sigma}(u)$ yang belum diketahui dengan peubah acak bebas $Z(u)$. Maka parameter tersebut akan diestimasi dengan menggunakan metode *bootstrap* yang mempunyai beberapa langkah estimasi.

Adapun langkah-langkah estimasi dengan metode *bootstrap* adalah sebagai berikut:

Diasumsikan algoritma metode *bootstrap* data berkorelasi adalah:

a. $Z \sim (0.\Sigma)$

b. Matriks $\sum$ berukuran *nxn* simetris definit positif.

Jika $\sum$ tidak diketahui, diestimasi dengan cara sebagai berikut :

$$\hat{\Sigma} = \hat{C} = \frac{1}{n-1} E[(\bar{Z}(u) - E[\bar{Z}(u)])(\bar{Z}(u+v) - E[\bar{Z}(u+v)])]$$

dimana:

v : jarak antara u dan u-v

$\hat{\Sigma}$ : *estimator* parameter $\sum$ yang tidak bias dengan variansi error kecil

$\hat{C}$ : matriks definit positif

$n$ : banyaknya data sampel yang digunakan untuk estimasi

c. $Z$ memenuhi proses acak *stasioner* berorde dua.

Langkah-langkah algoritma metode *bootstrap* data berkorelasi:

i. Menulis barisan spasial tersebut menjadi sebuah vektor, yaitu :

$$\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_n \end{pmatrix}$$

$$Z = m + \delta$$

dengan: $Z(u) = Z$

$\delta(u) = \delta$

$$\hat{Z} \sim (\hat{0}.\Sigma)$$

$$Z(u) = \mu + \delta(u)$$

$$Z(u) = \mu + (e(u) + A)$$

$$y_i = b_0 + b_{1x} + e_i$$

ii. Menghitung jarak (h) untuk mendapatkan *semivariogram experimental* $\hat{\gamma}(h)$ dan matriks $\Sigma = C(n \times n)$

iii. Karena C matriks definit positif, maka dengan menggunakan dekomposisi Cholesky, C dapat ditulis sebagai :

$C = LL^t$

dimana : $L$ adalah matriks segitiga bawah yaitu matriks dengan semua elemen di atas diagonal bernilai nol.

iv. Mendefinisikan suatu matriks $(L^{-1})$ yang mentransformasikan data berkorelasi $\hat{Z}$ menjadi data tak berkorelasi $\hat{\delta}$, yaitu :

$$\hat{\delta} = \mathrm{L}^{-1}\bar{Z}_i$$

$$\hat{\delta} = \begin{pmatrix} \hat{\delta}_1 \\ \hat{\delta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\delta}_n \end{pmatrix}$$

v. $\hat{\delta}_i, i = 1, \dots, n$ adalah variabel *i.i.d* (tak berkorelasi) dengan mean nol dan matriks variansi kovariansi satu.

Bukti :

Misal $\bar{y} \sim (\bar{0}.\Sigma)$. Dengan mengasumsikan $\sum$ nonsingular dan $L^{-1}$matriks nonsingular berukuran nxn yang memenuhi $L^{-1}\sum(L^{-1})^t = I_n$ maka $\hat{\delta} = L^{-1}\bar{Y}$ akan berdistribusi *multivariat* dengan :

a. Vektor mean : $E[U] = E[L^{-1}\bar{Y}] = L^{-1}E[\bar{Y}] = \bar{0}$

b. Matriks variansi kovariansi :

$$
\begin{aligned}
Var(\bar{U}) &= E[(\bar{U} - E[\bar{U}])(\bar{U} - E[\bar{U}])^t] \\
&= E[(\bar{U} - \bar{0})(\bar{U} - \bar{0})^t] \\
&= E[\bar{U}\bar{U}^t] \\
&= E[L^{-1}\bar{Y}(L^{-1}\bar{Y})^t] \\
&= E[L^{-1}\bar{Y}\bar{Y}^t(L^{-1})^t] \\
&= L^{-1}E[\bar{Y}\bar{Y}^t](L^{-1})^t \\
&= L^{-1}\sum(L^{-1})^t \\
&= I_n
\end{aligned}
$$

Jadi $\hat{\delta}(u) \sim (\bar{0}, I_n)$

Hal ini berarti untuk setiap $I$ =1,…,n, variabel acak $\hat{\delta}(u)_i$ berdistribusi (0,1) dan karena matriks variansi dari $\hat{\delta}$ berbentuk diagonal, maka $\hat{\delta}_1, \dots, \hat{\delta}_n$ *independent* tak berkorelasi, sehingga $\hat{\delta}_i$ *i.i.d.*

Sampel *bootstrap* $\delta(u)_i, i = 1,2, \dots, n$ diperoleh dengan sampling n nilai acak secara acak dengan pengembalian dari elemen $\delta$.

Mentransformasikan kembali sampel *bootstrap* $\delta(u)$ke bentuk data asli yang disebut sampel *quasibootstrap* $\left(Z(u)\right)$, sebagai berikut :

$$Z(u) = L\delta(u)$$

dimana :

$$Z(u) = \begin{pmatrix} Z(u)_1 \\ Z(u)_2 \\ \vdots \\ Z(u)_n \end{pmatrix} \text{ dan } \delta(u) = \begin{pmatrix} \delta(u)_1 \\ \delta(u)_2 \\ \vdots \\ \delta(u)_n \end{pmatrix}$$

Jika pada data asli dilakukan transformasi pemusatan, maka sampel quasibootstrapnya harus ditambah dengan penaksir mean, yaitu :

$$Z(u) = \mu + L\delta(u)$$

Pada estimasi dengan menggunakan metode *bootstrap*, diperlukan langkah-langkah pengestimasian. Berikut ini langkah-langkah estimasi dengan menggunakan metode *bootstrap*:

i. Menulis barisan parameter menjadi sebuah vektor kolom, yaitu:

   $Z(u) = \mu + \delta(u)$

   misal: $Z(u) = Z$

   $\delta(u) = \delta$

   Maka persamaan (2.6) menjadi

   $$Z = \mu + \delta \tag{3.9}$$

   Jika persamaan (3.9) dinyatakan secara komplit, dapat ditulis dengan :

   $$\begin{aligned} Z_1 &= \mu_1 + \delta_1 \\ Z_2 &= \mu_2 + \delta_2 \\ &\vdots \\ Z_n &= \mu_n + \delta_n \end{aligned} \tag{3.10}$$

Jika persamaan (3.10) dinyatakan dalam bentuk matriks dapat ditulis dengan

$$\begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_n \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Atau dapat diringkas dengan

$$\hat{Z} = \hat{\mu} + \hat{\delta} \quad (3.12)$$

dimana $Z \sim N(0, \Sigma)$

ii. Menghitung jarak (h) antara $Z_t$ dengan $Z_k$, i, k = 1, 2, …, n untuk mendapatkan semivariogram eksperimental $\hat{\gamma}(h)$ dan matriks $\sum C(nxn)$.

Penyelesaian:

1. Perhitungan untuk mendapatkan *semivariogram eksperimental* $\hat{\gamma}(h)$.

   Variogram didefinisikan sebagai berikut:

   $$2\gamma(h) = E[Z(u) - Z(u+h)]^2$$

   Karena pada stasioneritas terdapat sifat $E[Z(u)] = E[Z(u+h)]$, sehingga

   $$\gamma(h) = \frac{1}{2N(h)} \sum_{i=1}^{N(h)} [Z(u_i) - Z(u_i + h)]^2 \quad (3.13)$$

   Bukti:

   $$2\gamma(h) = E[Z(u) - Z(u+h)]^2$$

   Misalkan $V = [Z(u) - Z(u+h)]^2$ dan diketahui bahwa $E(V) = m$.

   Sehingga diperoleh

   $$2\gamma(h) = E(V)$$

   $$= \frac{1}{N(h)} \sum_{i=1}^{N(h)} V$$

   $$= \frac{1}{N(h)} \sum_{i=1}^{N(h)} [Z(u_i) - Z(u_i + h)]^2$$

$$\gamma(h) = \frac{1}{2N(h)} \sum_{i=1}^{N(h)} [Z(u_i) - Z(u_i + h)]^2$$

Dengan:

$2\gamma(h)$ : nilai variogram dengan jarak $h$

$\gamma(h)$ : nilai semivariogram dengan jarak $h$

$Z(u_i)$ : nilai pengamatan di titik uji

$Z(u_i + h)$ : nilai pengamatan di titik uji $h$

$N(h)$ : banyaknya pasangan titik yang mempunyai jarak $h$

2. Menghitung Matriks

Misal :

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & & d_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix} dan\ W = \begin{pmatrix} w_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ w_{21} & w_{22} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ w_{n1} & w_{n2} & \cdots & w_{nn} \end{pmatrix}$$

Matriks $D$ diasumsikan definit positif. Berdasarkan teorema dekomposisi Cholesky, matriks $W$ (faktor Cholesky) dijamin ada. Langkah-langkah untuk mendapatkan faktor Cholesky L sebagai berikut :

a. Menuliskan $D = WW^t$, yaitu :

$$\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & & d_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ w_{21} & w_{22} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ w_{n1} & w_{n2} & \cdots & w_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & \cdots & w_{1n} \\ 0 & w_{22} & & w_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & w_{nn} \end{pmatrix}$$

b. Elemen $d_{ij}$ adalah hasil kali dalam baris ke-i dari $W$ dengan kolom ke-j dari $W^t$. Karena kolom ke-1 dari $W^t$ hanya mempunyai satu nilai yang tidak nol, maka kita fokuskan pada kolomnya, yaitu :

$$d_{i1} = w_{i1}w_{11} + w_{i3}0 + \cdots = w_{i1}w_{11}$$

Untuk i=1.

$$d_{11} = w_{11}w_{11} = w_{11}^2$$

$$w_{11} = +\sqrt{d_{11}}$$

Karena nilai $w_{11}$ telah diketahui, maka semua nilai di kolom ke-1 dari $W$ dapat dihitung dengan $w_{il} = \frac{d_{il}}{w_{11}}, i = 2,3, \dots, n$, begitu juga baris ke-1 dari $W^t$. Dengan demikian semua nilai di kolom ke-1 dari W dan semua nilai di baris ke-1 dari $W^t$ telah diketahui.

c. Kemudian dengan cara yang sama, lakukan pada kolom ke-2 dari $W^t$. Karena kolom ke-2 dari $W^t$ hanya mempunyai dua nilai yang tidak nol, maka :

$$d_{i1} = w_{i1}w_{21} + w_{i2}w_{22} + w_{i3}0 + \cdots = w_{i1}w_{21} + w_{i2}w_{22}$$

untuk i=2.

$$d_{22} = w_{21}w_{21} + w_{22}w_{22} = w_{21}^2 + w_{22}^2.$$

Karena nilai $w_{21}$ telah diketahui, maka akan dicari nilai di kolom ke-2 dari $W$ dapat dihitung dengan $w_{i2} = \frac{d_{i2} - w_{i1}w_{21}}{w_{22}}, i = 3,4, \dots, n,$ begitu juga baris ke-2 dari $W^t$. Dengan demikian semua nilai di 2 kolom pertama dari $W$ dan semua nilai di 2 baris pertama dari $W^t$ telah diketahui. Dengan cara yang sama, lanjutkan untuk kolom dari $W^t$ berikutnya.

Secara umum :

$$untuk\ i \neq j: d_{ij} = w_{i1}w_{j1} + w_{i2}w_{j2} + \cdots + w_{i,j-1}w_{j,j-1} + w_{ij}w_{jj}$$

Dengan mengambil i=j didapatkan :

$$d_{jj} = w_{j1}^2 + w_{j2}^2 + \cdots + w_{j,j-1}^2 + w_{jj}^2$$

Selanjutnya $w_{jj} = +\sqrt{d_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} w_{jk}^2}$

Sehingga $w_{ij}$ didapatkan dengan cara :

$$w_{ij} = \frac{\left(d_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} w_{ik} w_{jk}\right)}{w_{jj}}$$

iii. Karena D matriks definit positif, maka dengan menggunakan dekomposisi Cholesky, D dapat ditulis sebagai:

$$D = WW^t$$

dimana: $W$ adalah matriks segitiga bawah yaitu matriks dengan semua elemen di atas diagonal bernilai nol.

Bukti:

Berdasarkan *Teorema Dekomposisi Cholesky :*

Misal B definit positif. Maka B dapat dikomposisi dengan tepat sebagai hasil kali matriks :

$\mathrm{B} = \mathbb{JJ}'$(Cholesky Dekomposisi)

Sehingga J adalah matriks segitiga bawah dengan diagonal utama bernilai positif. J disebut Cholesky dari B.

iv. Mendefinisikan suatu matriks $(W^{-1})$ yang ditransformasikan dari data berkorelasi ($Z$) menjadi data tak berkorelasi ($U$), yaitu:

$$\widehat{U} = W^{-1}\widehat{Z};\ \widehat{U} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{pmatrix}$$

$\widehat{U}$ adalah variabel *i.i.d* dengan mean nol dan matriks variansi kovariansi. Sampel *bootstrap* $U_i^*, i = 1,2, \dots, n$ diperoleh dengan sampling n nilai secara acak dengan pengembalian dari elemen $\widehat{U}$

Bukti :

Misal $\widehat{T} \sim (0, \Sigma)$. Dengan mengasumsikan $\sum$ nonsingular dan $W^{-1}$ matriks nonsingular berukuran nxn yang memenuhi $W^{-1}\Sigma\left(W^{-1}\right)^{t} = I_n$ maka $\widehat{U} = W^{-1}\widehat{T}$ akan berdistribusi multivariat dengan :

a. Vektor mean : $E[U] = E[W^{-1}\widehat{T}] = W^{-1}E[\widehat{T}] = 0$
b. Matriks variansi kovariansi :

$$
\begin{aligned}
Var(\widehat{U}) &= E[(\widehat{U} - E[\widehat{U}])(\widehat{U} - E[\widehat{U}])^{t}] \\
&= E[(\widehat{U} - \bar{0})(\widehat{U} - \bar{0})^{t}] \\
&= E\left[\widehat{U}\widehat{U}^{t}\right] \\
&= E[W^{-1}\widehat{T}(W^{-1}\widehat{T})^{t}] \\
&= E\left[W^{-1}\widehat{T}\widehat{T}^{t}(W^{-1})^{t}\right] \\
&= W^{-1}E\left[\widehat{T}\widehat{T}^{t}\right](W^{-1})^{t} \\
&= W^{-1}\textstyle\sum(W^{-1})^{t} \\
&= I_n
\end{aligned}
$$

Jadi $\widehat{U} \sim (0, I_n)$.

v. Mentransformasikan kembali sampel *bootstrap* $(\widehat{U})$ ke bentuk data asli yang disebut sample *quasibootstrap* $(\hat{Z}^{*})$, sebagai berikut:

$$\hat{Z}^{*} = W\widehat{U}^{*}$$

Dimana: $\hat{Z}^{*} = \begin{pmatrix} Z_1^{*} \\ Z_2^{*} \\ \vdots \\ Z_n^{*} \end{pmatrix}$ dan $\widehat{U}^{*} = \begin{pmatrix} U_1^{*} \\ U_2^{*} \\ \vdots \\ U_n^{*} \end{pmatrix}$, data asli awal persamaan parameter:

$$\hat{Z} = \hat{\mu} + \hat{\delta}$$

Bukti:

$\hat{Z}^{*} = W\widehat{U}^{*}$ , dimana $\widehat{U}^{*} = W^{-1}\hat{Z}$

$\quad = W(W^{-1}\hat{Z})$

$= WW^{-1}(\hat{Z})$

$= I(\hat{Z}) \qquad (I = 1)$

$\hat{Z}^* = \hat{Z}$

Sehingga:

$\hat{Z}^* = \hat{\mu}^* + \hat{\delta}^*$ dengan $\hat{Z} = \hat{\mu} + \hat{\delta}$

### 3.2 Kajian Keagamaan

Telah dijelaskan di bab sebelumnya, Islam sebagai agama dunia dan akhirat, penunjuk jalan yang benar, jalan keselamatan bagi umat yang beriman dan bertakwa, agar selamat dalam menjalani kehidupan di dunia maupun saat di akhirat kelak. Dengan Al-Qur'an dan Hadits Rosulullah SAW sebagai petunjuknya.

Ilmu pengetahuan adalah kunci keberhasilan dalam kesuksesan hidup di dunia dan juga hidup selamat di akhirat, serta akhirnya menjadi penghuni surga. Dengan ilmu pengetahuan, manusia dapat mengelola, memanfaatkan sumber daya alam untuk kemakmuran, kesejahteraan manusia. Sekaligus dengan ilmu manusia juga dapat menaklukkan ruang angkasa sebagai tempat alternatif bagi kehidupan manusia. Dalam QS. Ar-Rahman ayat 33, Allah SWT berfirman:

يَٰمَعۡشَرَ ٱلۡجِنِّ وَٱلۡإِنسِ إِنِ ٱسۡتَطَعۡتُمۡ أَن تَنفُذُواْ مِنۡ أَقۡطَارِ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلۡأَرۡضِ فَٱنفُذُواْۚ
لَا تَنفُذُونَ إِلَّا بِسُلۡطَٰنٖ ٣٣

*Artinya: "Hai jama'ah jin dan manusia, jika kamu sanggup menembus (melintasi) penjuru langit dan bumi, Maka lintasilah, kamu tidak dapat menembusnya kecuali dengan kekuatan" (Ar-Rahman 55:33).*

Kemajuan sains dan teknologi telah memberikan kemudahan dan kesejahteraan bagi kehidupan manusia, sekaligus merupakan sarana bagi kesempurnaan manusia sebagai hamba Allah SWT dan khalifah-Nya karena Allah SWT telah mengaruniakan anugerah kenikmatan kepada manusia yang bersifat saling melengkapi yaitu anugerah agama dan kenikmatan sains teknologi.

Ilmu pengetahuan dan teknologi merupakan dua sosok yang tidak dapat dipisahkan satu sama lain. Ilmu adalah sumber teknologi yang mampu memberikan kemungkinan munculnya berbagai penemuan rekayasa dan ide-ide. Adapun teknologi adalah terapan atau aplikasi dari ilmu yang dapat ditunjukkan dalam hasil nyata yang lebih canggih dan dapat mendorong manusia untuk berkembang lebih maju lagi. Dasar-dasar filosofis untuk mengembangkan ilmu dan teknologi itu bisa dikaji dan digali dalam Al-Qur'an. Sebab kitab suci ini banyak mengupas keterangan-keterangan mengenai ilmu pengetahuan dan teknologi. Sebagai contoh adalah firman Allah SWT dalam QS. Al-Anbiya' ayat 80 dan QS. Al-Baqarah ayat 269:

يُؤۡتِي ٱلۡحِكۡمَةَ مَن يَشَآءُۚ وَمَن يُؤۡتَ ٱلۡحِكۡمَةَ فَقَدۡ أُوتِيَ خَيۡرٗا كَثِيرٗاۗ وَمَا يَذَّكَّرُ إِلَّآ أُوْلُواْ ٱلۡأَلۡبَٰبِ ٢٦٩

*Artinya: "dan telah Kami ajarkan kepada Daud membuat baju besi untuk kamu, guna memelihara kamu dalam peperanganmu; Maka hendaklah kamu bersyukur (kepada Allah)" (Al-Anbiya 21:80).*

يُؤۡتِي ٱلۡحِكۡمَةَ مَن يَشَآءُۚ وَمَن يُؤۡتَ ٱلۡحِكۡمَةَ فَقَدۡ أُوتِيَ خَيۡرٗا كَثِيرٗاۗ وَمَا يَذَّكَّرُ إِلَّآ أُوْلُواْ ٱلۡأَلۡبَٰبِ ٢٦٩

*Artinya: "Allah menganugerahkan Al-Hikmah (kefahaman yang dalam tentang Al-Qur'an dan As-Sunnah) kepada siapa yang dikehendaki-Nya. dan Barangsiapa yang dianugerahi hikmah, ia benar-benar telah dianugerahi karunia yang banyak. dan hanya orang-orang yang berakallah yang dapat mengambil pelajaran (dari firman Allah)" (Al-Baqarah 2:269).*

Dari ayat-ayat di atas dijelaskan bahwa manusia dituntut untuk berbuat sesuatu dengan sarana pengembangan teknologi dan untuk penguasaannya diperlukan ilmu pengetahuan. Perlu dipahami bahwa pengetahuan ilmiah tidak mengenal kata "kekal" apa yang dianggap salah pada masa silam ternyata dapat diakui kebenarannya di masa modern. Pengetahuan mempunyai kebenaran relatif, artinya kebenaran datang silih berganti, hal ini berbeda dengan Al-Qur'an yang mempunyai kebenaran mutlak. Oleh karena itu kita tidak dapat menggunakan ayat-ayat Al-Qur'an untuk menjustifikasi mengenai kebenaran ataupun menyalahkan teori-teori ilmiah yang ditemukan. Sebab kalau Al-Qur'an digunakan untuk menilai salah atau benar terhadap teori ilmiah akan berimplikasi kepada kesalahan Al-Qur'an itu sendiri (meskipun yang salah bukan Al-Qur'an tapi penafsirnya) sebab pada akhirnya suatu teori akan digugurkan dengan teori yang lain. Dan dalam hal ini akan dijadikan sebagai cemoohan atau ejekan untuk menyerang Islam itu sendiri. Memang di dalam Al-Qur'an mengandung sekian banyak ayat-ayat yang memaparkan tentang IPTEK "kebenaran ilmiah". Allah SWT telah membakukan fakta alam di dalam Al-Quran dan sunnah-Nya, diskripsi tentang sejumlah fenomena alam dan hukum-hukum alam dapat dijadikan sebagai argumentasi yang melampaui batas logika manusia. Atau yang menurut istilah dikenal mengenai keajaiban Al-Qur'an (mu'jizat Al-Qur'an).

Sehingga tujuan pokok Al-Qur'an bukanlah untuk menerangkan persoalan-persoalan ilmiah tetapi tujuannya adalah untuk memberikan petunjuk-petunjuk kepada manusia demi kebahagiaan di dunia dan di akhirat kelak.

Dari penjelasan di atas, dapat diketahui sehingga pentinglah bagi manusia itu sendiri untuk belajar dan mengajar ilmu pengetahuan dan teknologi. Sebab dalam agama Islam orang yang berilmu mempunyai kedudukan dan martabat yang tinggi disisi Allah SWT. Bahkan Allah SWT akan meninggikan derajat orang yang beriman dan berilmu. Sebagaimana diterangkan oleh Allah SWT dalam Al-Qur'an, QS. Ali 'Imran ayat 7:

هُوَ ٱلَّذِىٓ أَنزَلَ عَلَيۡكَ ٱلۡكِتَـٰبَ مِنۡهُ ءَايَـٰتٌ مُّحۡكَمَـٰتٌ هُنَّ أُمُّ ٱلۡكِتَـٰبِ وَأُخَرُ مُتَشَـٰبِهَـٰتٌ‌ۖ فَأَمَّا ٱلَّذِينَ فِى قُلُوبِهِمۡ زَيۡغٌ فَيَتَّبِعُونَ مَا تَشَـٰبَهَ مِنۡهُ ٱبۡتِغَآءَ ٱلۡفِتۡنَةِ وَٱبۡتِغَآءَ تَأۡوِيلِهِۦ‌ۗ وَمَا يَعۡلَمُ تَأۡوِيلَهُ ۥۤ إِلَّا ٱللَّهُ‌ۗ وَٱلرَّٲسِخُونَ فِى ٱلۡعِلۡمِ يَقُولُونَ ءَامَنَّا بِهِۦ كُلٌّ مِّنۡ عِندِ رَبِّنَا‌ۗ وَمَا يَذَّكَّرُ إِلَّآ أُوْلُواْ ٱلۡأَلۡبَـٰبِ ﴿٧﴾

*Artinya: "Dia-lah yang menurunkan Al kitab (Al Quran) kepada kamu. di antara (isi) nya ada ayat-ayat yang muhkamaat, Itulah pokok-pokok isi Al qur'an dan yang lain (ayat-ayat) mutasyaabihaat. Adapun orang-orang yang dalam hatinya condong kepada kesesatan, Maka mereka mengikuti sebahagian ayat-ayat yang mutasyaabihaat daripadanya untuk menimbulkan fitnah untuk mencari-cari ta'wilnya, Padahal tidak ada yang mengetahui* *ta'wilnya melainkan Allah.dan orang-orang yang mendalam ilmunya berkata: "Kami beriman kepada ayat-ayat yang mutasyaabihaat, semuanya itu dari sisi Tuhan kami." dan tidak dapat mengambil pelajaran (daripadanya) melainkan orang-orang yang berakal" (Ali 'Imran 3:7).*

Pada ayat di atas maksud dari ayat yang *muhkamaat* ialah ayat-ayat yang terang dan tegas maksudnya, dapat dipahami dengan mudah. Serta yang termasuk dalam pengertian ayat-ayat mutasyaabihaat yaitu ayat-ayat yang mengandung beberapa pengertian dan tidak dapat ditentukan arti mana yang dimaksud kecuali sesudah diselidiki secara mendalam atau ayat-ayat yang pengertiannya hanya Allah yang mengetahui seperti ayat-ayat yang berhubungan dengan yang ghaib-ghaib misalnya ayat-ayat yang mengenai hari kiamat, surga, neraka dan lain-lain.

QS. Ali 'Imran ayat 18:

شَهِدَ ٱللَّهُ أَنَّهُۥ لَآ إِلَٰهَ إِلَّا هُوَ وَٱلۡمَلَٰٓئِكَةُ وَأُوْلُواْ ٱلۡعِلۡمِ قَآئِمَۢا بِٱلۡقِسۡطِۚ لَآ إِلَٰهَ إِلَّا هُوَ ٱلۡعَزِيزُ ٱلۡحَكِيمُ ١٨

*Artinya: "Allah menyatakan bahwasanya tidak ada Tuhan melainkan Dia (yang berhak disembah), yang menegakkan keadilan. Para Malaikat dan orang-orang yang berilmu (juga menyatakan yang demikian itu).tak ada Tuhan melainkan Dia (yang berhak disembah), yang Maha Perkasa lagi Maha Bijaksana" (Ali 'Imran 3:18).*

Ayat-ayat di atas menjelaskan tentang kedudukan orang yang berilmu disisi Allah SWT. Lebih-lebih orang yang beriman dan berilmu. Dihadapan Allah SWT kedudukannya sangat tinggi.

Bukti lain dianjurkan kita sebagai umat manusia diperintahkan Allah SWT untuk belajar disebutkan pada bab sebelumnya yaitu pada bab I dalam QS. Al-'Alaq ayat 1-5. Diawali dengan kata *iqra'* yang artinya bacalah. Allah SWT memerintahkan kita untuk membaca, maksudnya bacalah, maksudnya bacalah dan pelajarilah apa yang ada disekitarmu. Agar kita mengenal Allah SWT dari segala apa yang telah diciptakan-Nya di alam semesta ini. Bahwa tiada Tuhan selain Allah, pencipta semua apa-apa yang ada di langit maupun di bumi.

Banyak sekali macam-macam ilmu pengetahuan, sesuai dengan penelitian kali ini, selanjutnya peneliti akan mengulas sedikit integrasi metode *bootstrap* dan ke*istiqomah*an.

Berdasarkan ulasan yang telah dibahas di bab 2. Kaitannya metode *bootstrap* dengan *istiqomah* yaitu dari pengertian metode *bootstrap* yang terinspirasi dari *istiqomah* yaitu sebagai metode yang pada intinya dapat diartikan sebagai metode yang dilakukan pada sebuah aktifitas yang dilakukan secara berulang-ulang dilakukan untuk memperoleh informasi yang lebih besar, hal ini terinspirasi dari *istiqomah*, *Istiqomah* itu sendiri yaitu suatu kegiatan yang dilakukan dari sesuatu yang kecil apabila dilakukan secara berulang-ulang akan menghasilkan sesuatu yang lebih besar. Sebagaimana apabila kita melakukan suatu kebaikan secara berulang-ulang maka akan mendapat pahala yang besar, sebaliknya pula apabila yang dilakukan dosa, dari dosa kecil yang apabila dilakukan secara berulang-ulang maka akan menjadi dosa besar. Sebagaimana terdapat dalam QS. Al Ahqaaf ayat 13-14 dan QS. Huud ayat 112 yang terkait dengan *istiqomah*.

Adapun aplikasi *istiqomah* itu sendiri dalam kehidupan sehari-hari yaitu dengan cara melaksanakan semua kewajiban Islam secara rutin dengan ikhlas, seperti shalat, puasa, zakat serta menjauhi segala larangan-larangan Allah SWT secara total.

## BAB IV

## PENUTUP

### 4.1 Kesimpulan

Dari penelitian ini dapat diambil kesimpulan yaitu:

1. Estimasi dengan menggunakan metode ordinary kriging menghasilkan *the best linier unbiased estimator* (BLUE).
2. Dengan metode bootstrap dapat ditetukan karakteristik estimasi kriging berupa selang prediksi.

### 4.2 Saran

Pada skripsi ini digunakan metode *ordinary kriging*. Metode ini bersifat stasioner sehingga tidak memilki kecenderungan pada trend tertentu dengan rerata konstan dan tidak diketahui. Peneliti berharap pada penelitian selanjutnya dapat mengestimasi kriging dengan metode yang lain dan menguji hipotesis dengan metode yang lain pula. Selain itu, bisa dikembangkan pada aplikasinya.

# DAFTAR PUSTAKA


Abdusysyakir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika.* Malang: UIN PRESS.

Al-Hikmah. 2006. *Al-Qur'an dan Terjemahnya.* Bandung: Diponegoro.

As – saidi , Abdurrahman bin Natsir.2007. *Tafsir As – sa'di.* Jakarta : Pustaka Sahifa.

Astuti, Suci. 2003. Bootstrap pada Data Kadar Nikel untuk Mengukur Keakuratan Hasil Estimasi Kriging. *Tesis S2*. Bandung: ITB.

Bohling, G. 2005. *Kriging*. Tersedia di http://people.ku.edu/~gbohling/cpe940. Diakses tanggal 11 April 2011.

Cressie, N. A.C. 1993. *Statistic For Spatial Data*. New York: John Wiley and Sons, Inc.

Efron, B. and Tibhsirani R. 1993. *An Introduction to The Bootstrap*. Chapman& Hall. New York.

Irawati, Ari. 2005. Uji Pada Tabel Kontigensi Multiple Kategori Menggunakan Metode Bootstrap. *Skripsi S1.* FMIPA Universitas Brawijaya. Malang.

Journel, A. G. dan CH. J. Huijbregts. 1978. *Mining Geostatistics*. London : Academic Press.

Rosilawati, Ria. 2010. Perbandingan Analisis Metode Interpolasi Ordinary Kriging dan Inverse Distance (IDW) pada Penentuan Bahan Organik Tanah di Kabupaten Sampang. *Skripsi S1*. FMIPA Universitas Brawijaya. Malang.

Turmudi, M.Si, Drs.& Sri Harini, M.Si. 2008. *Metode Statistik*. Malang: UIN Press.

Surin, Bachtiar. 1991. *Adz-Dzikraa (Terjemah dan Tafsir Al-Qur'an)*. Bandung: Angkasa.

Walpole, R. E. (1982). *Pengantar Statistik, Edisi ketiga*. Terjemahan Bambang Sumantri). Jakarta: PT Gramedia Pustaka Utama.

Wikipedia. *Bootstrap*. Tersedia di http://en.wikipedia.org/wiki/Bootstrap. Diakses tanggal 11 April 2011.

Wikipedia. *Kriging*. Tersedia di http://en.wikipedia.org/wiki/Kriging. Diakses tanggal 11 April 2011.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN)
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS & TEKNONOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang (0341) 551354 Fax. (0341) 572533

## BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

**Nama** : **Asri Rosarini Astari**
**NIM** : **07610008**
**Fakultas/ Jurusan** : **Sains dan Teknologi/ Matematika**
**Judul Skripsi** : **Estimasi Kriging dengan Metode Bootstrap**
**Pembimbing I** : **Sri Harini, M.Si**
**Pembimbing II** : **Fachrur Rozi, M.Si**

| No | Tanggal | HAL | Tanda Tangan | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 18 Mei 2011 | Konsultasi Bab I, Bab II | 1. | |
| 2 | 19 Mei 2011 | Revisi Bab I, Bab II | | 2. |
| 3 | 20 Mei 2011 | ACC Bab I, Bab II | 3. | |
| 4 | 20 Mei 2011 | ACC Kajian Agama | | 4. |
| 5 | 11 November 2011 | Konsultasi Kajian Agama | 5. | |
| 6 | 12 November 2011 | Konsultasi Keseluruhan | | 6. |
| 7 | 9 Desember 2011 | Revisi Kajian Agama | 7. | |
| 8 | 12 Desember 2011 | Konsultasi Kajian Agama | | 8. |
| 9 | 7 Januari 2012 | Konsultasi Bab II, Bab III | 9. | |
| 10 | 9 Januari 2012 | Revisi Keseluruhan | | 10. |
| 11 | 12 Januari 2012 | Konsultasi Keseluruhan | 11. | |
| 12 | 13 Januari 2012 | Konsultasi Kajian Agama | | 12. |
| 13 | 15 Januari 2012 | ACC Keseluruhan | 13. | |
| 14 | 15 Januari 2012 | ACC Kajian Agama | | 14. |

Malang, 16 Januari 2012

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika,

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001