

**ANALISIS GRAFIK KENDALI  $np$  YANG DISTANDARISASI  
UNTUK PENGENDALIAN KUALITAS DALAM PROSES PENDEK**

**SKRIPSI**

Oleh:  
**YAYUK NURKOTIMAH**  
NIM. 08610011



**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2012**

**ANALISIS GRAFIK KENDALI  $np$  YANG DISTANDARISASI UNTUK  
PENGENDALIAN KUALITAS DALAM PROSES PENDEK**

**SKRIPSI**

Oleh:  
**YAYUK NURKOTIMAH**  
NIM. 08610011



**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2012**

**ANALISIS GRAFIK KENDALI  $np$  YANG DISTANDARISASI UNTUK  
PENGENDALIAN KUALITAS DALAM PROSES PENDEK**

**SKRIPSI**

Diajukan kepada:  
Fakultas Sains dan Teknologi  
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang  
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam  
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:  
**YAYUK NURKOTIMAH**  
NIM. 08610011

**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI  
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM  
MALANG  
2012**

**ANALISIS GRAFIK KENDALI  $np$  YANG DISTANDARISASI UNTUK  
PENGENDALIAN KUALITAS DALAM PROSES PENDEK**

**SKRIPSI**

Oleh:  
**YAYUK NURKOTIMAH**  
NIM. 08610011

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji:  
Tanggal:

Pembimbing I,

Pembimbing II,

Fachrur Rozi, M.Si  
NIP. 19800527 200801 1 012

Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag  
NIP. 19720420 200212 1 003

Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd  
NIP. 19751006 200312 1 001

**ANALISIS GRAFIK KENDALI *np* YANG DISTANDARISASI UNTUK  
PENGENDALIAN KUALITAS DALAM PROSES PENDEK**

**SKRIPSI**

Oleh:  
**YAYUK NURKOTIMAH**  
**NIM. 08610011**

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi  
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan  
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)  
Tanggal: 30 Maret 2012

Penguji Utama:	Sri Harini, M.Si NIP. 19731014 200112 2 002	.....
Ketua Penguji:	Drs. Usman Pagalay, M.Si NIP. 19650414 200312 1 001	.....
Sekretaris Penguji:	Fachrur Rozi, M.Si NIP. 19800527 200801 1 012	.....
Anggota Penguji:	Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag NIP. 19720420 200212 1 003	.....

Mengesahkan,  
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd  
NIP.19751006 200312 1 001

## PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : YAYUK NURKOTIMAH

NIM : 08610011

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 09 Maret 2012  
Yang membuat pernyataan,

YAYUK NURKOTIMAH  
NIM. 08610011

## MOTTO

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

...وَلَا تَأْيِسُوا مِنَ رَوْحِ اللَّهِ إِنَّهُ لَا يَأْيِسُ مِنَ رَوْحِ اللَّهِ إِلَّا الْقَوْمُ الْكَافِرُونَ

*"...dan jangan kamu berputus asa dari rahmat Allah. Sesungguhnya tiada berputus asa dari rahmat Allah, melainkan kaum yang kafir".*

(Qs. Yusuf: 87)

*"Tanamkan sifat optimis dan percaya diri dalam memulai segala perbuatan"*



## PERSEMBAHAN

Dengan mengucap rasa syukur kepada Allah SWT, penulis persembahkan skripsi ini kepada:

Ayahanda dan ibunda tercinta, yaitu bapak *Imam Syafi'i* dan ibu *Winarsih* yang senantiasa mencurahkan do'a untuk penulis, adiktersayang (*Devi Irawan*), serta bapak *Abdul Rochim* dan ibu *Azizah Ghufron* yang selalu mendukung penulis dan kakanda (*M. Azwar Anas*) yang setia menemani, mendukung, dan mencurahkan segala waktu untuk mendengarkan keluh kesah penulis.

## KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

*Assalamu'alaikum Wr. Wb.*

*Alhamdulillah*, segala puji syukur penulis haturkan kepada Allah SWT, yang telah melimpahkan segala nikmat, rahmat, taufik, serta hidayah-Nya kepada penulis, sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi ini dengan baik. Sholawat serta salam penulis sampaikan kepada Nabi Muhammad SAW yang memberikan jalan yang lurus dan diridhoi-Nya.

Selanjutnya penulis ucapan terima kasih kepada semua pihak yang telah membimbing, menuntun, dan memberikan motivasi kepada penulis. Ucapan terima kasih ini penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Drs. Sutiman B. Sumitro, SU., DSc., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
4. Fachrur Rozi, M.Si, sebagai pembimbing yang senantiasa sabar, dan tiada hentinya memberikan motivasi sehingga penulisan skripsi ini dapat terselesaikan.

5. Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag, sebagai pembimbing agama yang senantiasa memberikan bimbingan dan saran yang membangun dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini.
6. Seluruh dosen Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, yang tidak pernah lelah untuk mendidik, mengajarkan, dan mencurahkan ilmu-ilmunya kepada penulis.
7. Ayahanda dan ibunda tercinta yang telah memberikan kesempatan kepada penulis untuk berada di sini, terima kasih.
8. Adik dan segenap keluarga yang telah memberikan dukungan, do'a, dan motivasi bagi penulis.
9. Bapak Rohim dan ibu Azizah yang senantiasa memberi dukungan kepada penulis.
10. M. Azwar Anas yang tiada henti memberikan motivasi dan juga kepercayaan kepada penulis untuk melangkah ke depan dengan penuh keyakinan dan percaya diri.
11. Bu Endah selaku ibu kos Najma terima kasih atas do'anya.
12. Sahabat-sahabat terbaik di kos Najma, yaitu: Dyah Retno Zulianti, Nur Aini Lutfiah, Indah Ayu Siwi, Atik Anjarwati, Widiawati, Lailin Nurul H, Dwi Lestari, Diana Nur Septiani, Bentik Setiana, Herdayanti, terima kasih atas dukungannya.
13. Sahabat-sahabat satu perjuangan Saropah, Emilda Fahrur Nisa', Ida putri, Lailil Wahidatus S, Dewi Kurniasih, Rosi Aliviana, dan semua angkatan 2008 yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

14. Semua pihak yang telah mendukung penulis, terima kasih atas semua dukungan dan motivasinya.

Penulis menyadari bahwa dalam penyusunan skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan, oleh karena itu saran dan kritik senantiasa penulis harapkan. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat untuk penulis dan juga untuk pembaca. Amin  
*Wassalamu'alaikum Wr. Wb.*

Malang, 09 Maret 2012

Penulis



## DAFTAR ISI

<b>HALAMAN JUDUL</b> .....	i
<b>HALAMAN PENGAJUAN</b> .....	ii
<b>HALAMAN PERSETUJUAN</b> .....	iii
<b>HALAMAN PENGESAHAN</b> .....	iv
<b>HALAMAN PERNYATAAN</b> .....	v
<b>MOTTO</b> .....	vi
<b>HALAMAN PERSEMBAHAN</b> .....	vii
<b>KATA PENGANTAR</b> .....	viii
<b>DAFTAR ISI</b> .....	xi
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....	xiii
<b>DAFTAR TABEL</b> .....	xiv
<b>DAFTAR SIMBOL</b> .....	xv
<b>ABSTRAK</b> .....	xvi
<b>ABSTRACT</b> .....	xvi
المخلص .....	xvi
<b>BAB I PENDAHULUAN</b>	
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Rumusan Masalah .....	4
1.3 Tujuan Penelitian .....	5
1.4 Batasan Masalah .....	5
1.5 Manfaat Penelitian .....	5
1.6 Metode Penelitian .....	6
1.7 Sistematika Penulisan .....	7
<b>BAB II KAJIAN PUSTAKA</b>	
2.1 Distribusi Peluang .....	9
2.2 Ekspektasi .....	9
2.3 Variansi .....	12
2.4 Fungsi Pembangkit Momen .....	17
2.5 Teorema Limit Pusat .....	20
2.6 Distribusi Binomial .....	25
2.7 Distribusi Normal .....	28
2.8 Data Atribut .....	32
2.9 Grafik Kendali Data Atribut .....	33
2.10 Grafik Kendali Shewhart .....	36
2.11 Pendekatan Distribusi Normal terhadap Distribusi Binomial .....	38
2.12 Grafik Kendali Proporsi Ketidaksesuaian .....	39
2.13 Proses Pendek .....	42
2.14 Pengendalian Kualitas dalam Proses Pendek Menurut Pandangan Al-Qur'an .....	42

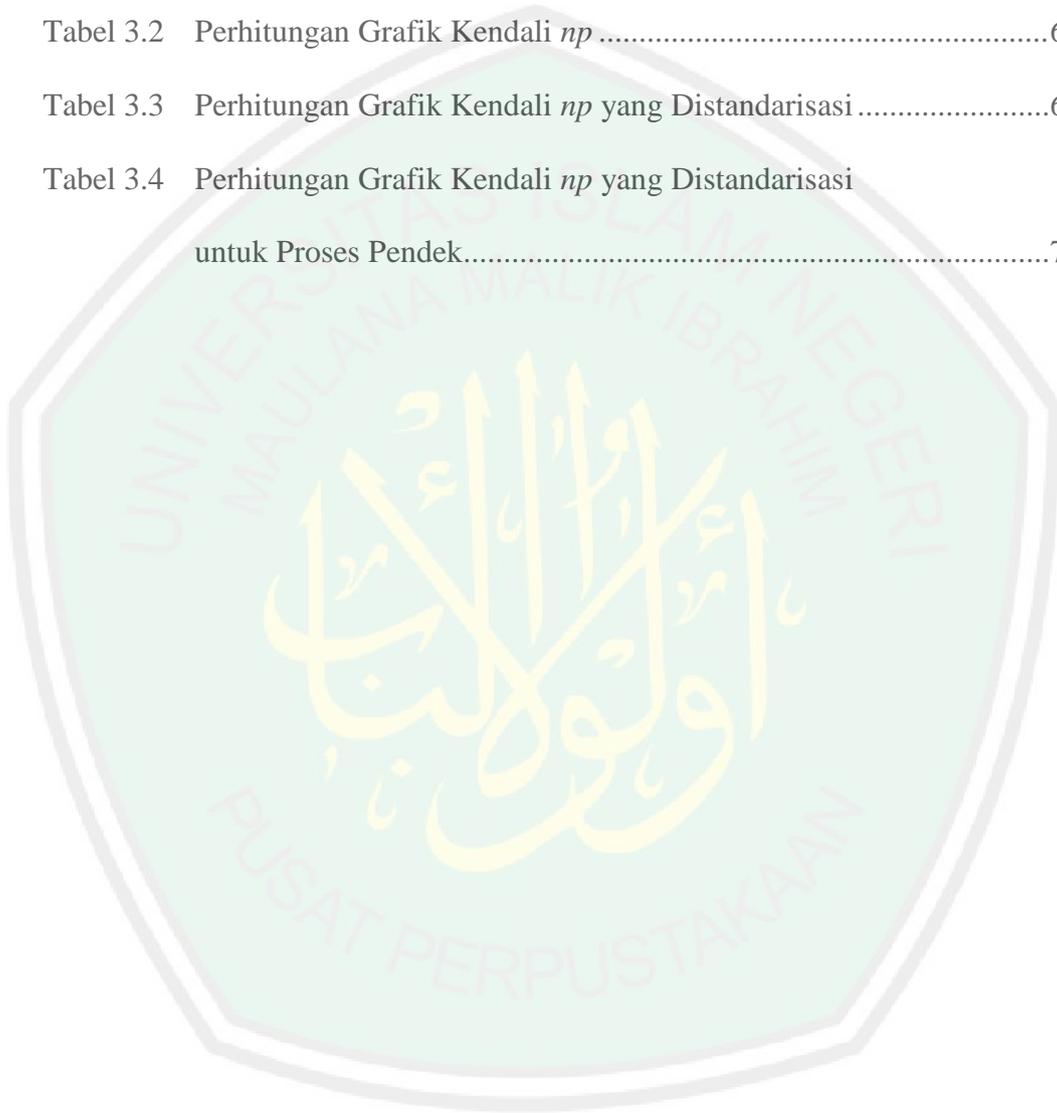
<b>BAB III PEMBAHASAN</b>	
3.1 Analisis Grafik Kendali $np$ .....	47
3.2 Proses Standarisasi Grafik Kendali $np$ .....	50
3.3 Proses Standarisasi Grafik Kendali $np$ untuk Proses Pendek .....	58
3.4 Menganalisis Grafik Kendali $np$ yang Distandarisasi untuk Proses Pendek .....	61
3.4.1 Perbandingan Grafik Kendali $np$ yang Distandarisasi .....	61
3.4.2 Aplikasi Grafik Kendali $np$ yang Distandarisasi untuk Proses Pendek .....	65
<b>BAB IV PENUTUP</b>	
4.1 Kesimpulan .....	75
4.2 Saran .....	75
<b>DAFTAR PUSTAKA</b>	
<b>LAMPIRAN-LAMPIRAN</b>	

## DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Distribusi Normal.....	29
Gambar 2.2	Hubungan antara Kurva Distribusi Normal dan Kurva Distribusi Normal Standar.....	31
Gambar 2.3	Dua Kurva Distribusi Normal dengan $\mu_1 \neq \mu_2$ dan $\sigma_1 = \sigma_2$ ....	32
Gambar 2.4	Dua kurva Distribusi Normal dengan $\mu_1 = \mu_2$ dan $\sigma_1 < \sigma_2$ ....	32
Gambar 2.5	Dua Kurva Distribusi Normal dengan $\mu_1 \neq \mu_2$ dan $\sigma_1 < \sigma_2$ ....	32
Gambar 2.6	Luas di bawah Kurva Distribusi Normal.....	37
Gambar 2.7	Hampiran Kurva Distribusi Normal bagi $B(X; 15, 0.4)$ .....	39
Gambar 3.1	Grafik Kendali $np$ .....	68
Gambar 3.2	Grafik kendali $np$ yang Distandarisasi .....	70
Gambar 3.3	Grafik Kendali $np$ yang Distandarisasi untuk Proses Pendek.....	72

## DAFTAR TABEL

Tabel 3.1	Data Produksi dari Dua <i>Run-Proses</i> .....	65
Tabel 3.2	Perhitungan Grafik Kendali <i>np</i> .....	67
Tabel 3.3	Perhitungan Grafik Kendali <i>np</i> yang Distandarisasi .....	69
Tabel 3.4	Perhitungan Grafik Kendali <i>np</i> yang Distandarisasi untuk Proses Pendek.....	71



## DAFTAR SIMBOL

Simbol-simbol yang digunakan dalam skripsi ini adalah:

$D_k$	: Banyaknya ketidaksesuaian pada pengamatan ke- $k$
$p_k$	: Proporsi ketidaksesuaian pada pengamatan ke- $k$
$Z_k$	: Standarisasi biasa pada pengamatan ke- $k$
$Z_k^*$	: Standarisasi proses pendek pada pengamatan ke- $k$
$\psi_X(t)$	: Fungsi Pembangkit Momen dari Peubah Acak $X$
$\sigma^2$	: Variansi



## ABSTRAK

Nurkotimah, Yayuk. 2012. **Analisis Grafik Kendali  $np$  yang Distandarisasi untuk Pengendalian Kualitas dalam Proses Pendek**. Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.  
Pembimbing: (I) Fachrur Rozi, M.Si  
(II) Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag

**Kata kunci:** faktor koreksi, grafik kendali  $np$ , proses pendek, standarisasi

Salah satu grafik kendali yang sering digunakan untuk pengendalian data atribut adalah grafik kendali  $p$ . Grafik kendali  $p$  merupakan grafik kendali proporsi ketidaksesuaian. Dalam membentuk grafik kendali  $p$  dibutuhkan 20 sampai 30 subgrup. Untuk memudahkan interpretasi, maka grafik kendali perlu distandarisasi. Standarisasi dilakukan agar data berada di antara  $\mu - 3\sigma$  dan  $\mu + 3\sigma$ . Pada praktiknya, terkadang dalam suatu proses produksi banyaknya subgrup yang diperoleh sedikit, sehingga untuk memenuhi banyaknya subgrup yang diinginkan, dibutuhkan lebih dari satu proses produksi, hal ini sering terjadi dalam kasus proses pendek. Dalam proses pendek, karena pengamatan yang diperoleh kurang dari standar untuk membentuk grafik kendali, maka perlu dilakukan penyesuaian dengan menambahkan faktor koreksi. Faktor koreksi bertujuan agar peluang standarisasi untuk proses pendek  $P(Z_k^* > UCL)$  dan  $P(Z_k^* < LCL)$  dengan  $UCL = 3$  dan  $LCL = -3$  dapat memenuhi standar internasional yaitu mendekati 0,00135. Dalam penelitian ini, dikembangkan grafik kendali  $np$  yang distandarisasi untuk proses pendek, di mana langkah pertama penulis akan mengkaji grafik kendali  $np$ , kemudian grafik tersebut distandarisasi berdasarkan distribusi Normal standar, setelah diperoleh standarisasi maka data tersebut distandarisasi untuk proses pendek. Terakhir menganalisis hasil dari standarisasi untuk proses pendek. Dengan membandingkan  $P(Z_k > UCL)$  dan  $P(Z_k < LCL)$  serta  $P(Z_k^* > UCL)$  dan  $P(Z_k^* < LCL)$ , maka grafik kendali yang berkualitas ditunjukkan oleh grafik kendali  $np$  yang distandarisasi untuk proses pendek.

## ABSTRACT

Nurkotimah, Yayuk. 2012. **Analysis of Standardized  $np$  Charts for Quality Control in Short Runs**. Thesis. Mathematics Department, Science and Technology Faculty, The State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang.

Supervisor: (I) Fachrur Rozi, M.Si

(II) Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag

One of the control charts is often used by the data attribute is a  $p$  chart.  $p$  chart is a graphical control of the proportion of mismatches. In  $p$  chart form it takes 20 to 30 subgroups. To facilitate interpretation, so the control chart need for standarized. standardization is done so that the data is between  $\mu - 3\sigma$  and  $\mu + 3\sigma$ . In practice, sometimes in a production process, the number of subgroups that gained a little, so as to fill the desired number of subgroups, sometimes it takes more than one production process, it often happens in the case of the short run. In the short run, the observation that obtained less from the standard for forming control chart, so it needs to be adjusted by adding a correction factor. Correction factor intended to standardize opportunities for the short run  $P(Z_k^* > UCL)$  and  $P(Z_k^* < LCL)$  with  $UCL = 3$  and  $LCL = -3$  can meet the international standard that is close to 0,00135. In this study, developed a standardized  $np$  charts for short run, where the first step the reseacher will examine  $np$  chart, then the chart is standarized based on the standard normal distribution, after the standardization obtained so the data are standarized for short run. The last is analyzed from the result of the standardization for short run. By comparing  $P(Z_k > UCL)$  and  $P(Z_k < LCL)$  and  $P(Z_k^* > UCL)$  and  $P(Z_k^* < LCL)$ , then a quality control chart is shown by the  $np$  charts are standarized to the short run.

**Key words:** correction factor,  $np$  charts, short run, standardization

## المخلص

نورخاتمة، يايوك. ٢٠١٢ م. تحليل الرسم البياني  $np$  العالمي لعملية الرقابة في كفي قصير. البحث الجامعي. قسم الرياضيات. كلية العلوم والتكنولوجيا. جامعة الإسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم مالانج.  
المشرف: (١) فخر رازي الماجستير  
(٢) دمو نيرو العابدين الماجستير

**الكلمة الرئيسية:** تصحيح عامل، مراقبة الرسوم البيانية، باختصار عملية، التقييس.

واحد مخططات السيطرة تستخدم عادة للسيطرة على البيانات السمة هو مخطط السيطرة ف. ف تحكم التخطيط هو السيطرة رسومية من نسبة عدم التطابق. في السيطرة ع شكل الرسم البياني الذي يستغرقه ٢٠-٣٠ مجموعات فرعية. لتسهيل التفسير، فإنه من الضروري مراقبة الرسوم البيانية موحدة. ويتم توحيد بحيث تكون البيانات بين  $\mu - 3\sigma$  و  $\mu + 3\sigma$ . في الممارسة العملية، في بعض الأحيان في عملية الإنتاج، وعدد من المجموعات الفرعية التي حصلت قليلا، وذلك لتلبية العدد المرغوب فيه من المجموعات الفرعية، واحيانا يستغرق أكثر من عملية الإنتاج، وكثيرا ما يحدث في حالة عملية قصيرة. في عملية قصيرة، وذلك لأن هذه الملاحظات التي تم الحصول عليها لمدة تقل عن النموذج القياسي لمخططات السيطرة، وأنها بحاجة إلى تعديل وذلك بإضافة عامل التصحيح. عامل تصحيح يهدف إلى توحيد فرص قصيرة  $P(Z_k^* > UCL)$  و  $P(Z_k^* < LCL)$  ب  $UCL = 3$  و  $LCL = -3$  يمكن أن تلبى المعايير الدولية التي هي على مقربة من ٠،٠٠١٣٥. في هذه الدراسة، وضعت سيطرة الحزب الوطني الموحد المخططات لعملية قصيرة، حيث سيدرس الباحثون  $np$  المخططات خطوة التحكم الأول، في هذه الدراسة، وضعت سيطرة الحزب الوطني الموحد المخططات لعملية قصيرة، حيث سيدرس الباحثون  $np$  المخططات خطوة التحكم الأول، والرسوم البيانية هي موحدة على أساس التوزيع المعياري العادي، وبعد توحيد البيانات التي تم الحصول عليها بالنسبة للنقالة قصيرة موحدة. تحليل آخر لنتائج عملية التوحيد القياسي لفترة قصيرة. من خلال مقارنة  $P(Z_k > UCL)$  و  $P(Z_k < LCL)$  و  $P(Z_k^* > UCL)$  و  $P(Z_k^* < LCL)$  ثم يتم عرض رسما بيانيا لمراقبة الجودة من قبل المخططات سيطرة الحزب الوطني هي موحدة لعملية قصيرة.

## BAB I PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Al-Qur'an merupakan sumber pedoman hidup manusia dan tidak ada satu kitabpun yang melebihi kesempurnaannya. Seluruh aspek kehidupan baik di dunia maupun di akhirat dijelaskan secara terperinci di dalam Al-Qur'an. Al-Qur'an memiliki peran penting dalam bidang matematika. Al-Qur'an menjelaskan bahwa segala sesuatu diciptakan secara matematis karena semua yang diciptakan di muka bumi ini memiliki ukuran, rumus, dan formula. Abdussakir (2007:147) menjelaskan bahwa cabang ilmu matematika yang membahas tentang data disebut statistika, di mana ruang lingkup statistika mencakup pengumpulan data dan penyajian data. Pengumpulan data yang berupa mencatat atau membukukan data dalam Al-Qur'an dibahas pada surat Al-Kahfi ayat 49 yang berbunyi:

وَوُضِعَ الْكِتَابُ فَتَرَى الْمُجْرِمِينَ مُشْفِقِينَ مِمَّا فِيهِ وَيَقُولُونَ يَا وَيْلَتَنَا مَا لِي هَذَا  
 الْكِتَابِ لَا يُغَادِرُ صَغِيرَةً وَلَا كَبِيرَةً إِلَّا أَحْصَاهَا وَوَجَدُوا مَا عَمِلُوا حَاضِرًا وَلَا  
 يَظْلِمُ رَبُّكَ أَحَدًا ﴿٤٩﴾

*Artinya: "Dan diletakkanlah Kitab, lalu kamu akan melihat orang-orang bersalah ketakutan terhadap apa yang (tertulis) di dalamnya, dan mereka berkata: "Aduhai celaka Kami, kitab apakah ini yang tidak meninggalkan yang kecil dan tidak (pula) yang besar, melainkan ia mencatat semuanya; dan mereka dapati apa yang telah mereka kerjakan ada (tertulis). dan Tuhanmu tidak menganiaya seorang juapun" (Qs. Al-Kahfi: 49).*

Ayat di atas menjelaskan bahwa segala perbuatan yang dilakukan baik kecil maupun besar akan dicatat oleh Allah SWT dalam sebuah buku. Tidak

memandang dari kalangan manapun. Hal tersebut menunjukkan sebuah ketelitian dalam mencatat berbagai data yang diperoleh. Ketelitian dan data merupakan bagian dari statistika. Adapun pengertian statistika adalah sekumpulan konsep dan metode yang digunakan untuk mengumpulkan dan menginterpretasikan data tentang bidang kegiatan tertentu dan mengambil kesimpulan dalam situasi di mana ada ketidakpastian dan variasi (Turmudi dan Harini, 2008:4).

Statistika memiliki beberapa cabang ilmu, salah satunya pengendalian kualitas statistik (PKS). Pengendalian kualitas statistik merupakan teknik penyelesaian masalah yang digunakan untuk memonitor, mengendalikan, menganalisis, mengelola, dan memperbaiki produk dan proses menggunakan metode-metode statistika (Ariani, 2004:54).

Pengendalian kualitas statistik berhubungan dengan grafik kendali, di mana grafik kendali digunakan untuk mengendalikan proses berdasarkan sampel yang diperoleh. Grafik kendali yang membahas tentang sifat suatu produk disebut grafik kendali data atribut. Grafik kendali data atribut menunjukkan karakteristik kualitas yang sesuai dengan spesifikasi atau tidak sesuai dengan spesifikasi.

Pada grafik kendali data atribut terdapat beberapa distribusi yang digunakan, salah satunya adalah distribusi Binomial, di mana distribusi ini menunjukkan dua kemungkinan yaitu sukses dan gagal. Adapun grafik kendali yang didasarkan pada distribusi Binomial adalah grafik kendali proporsi ketidaksesuaian (*p-chart*) dan grafik kendali banyaknya ketidaksesuaian (*np-chart*). Grafik ini digunakan untuk mengetahui apakah ketidaksesuaian produk

dalam suatu proses produksi yang dihasilkan masih dalam batas yang disyaratkan atau tidak, sehingga mengakibatkan kelayakan dari suatu produk.

Untuk membuat grafik kendali  $p$  yang bagus, dibutuhkan 20 sampai 30 subgrup. Jika jumlah tersebut tidak terpenuhi maka grafik kendali yang dihasilkan kurang akurat. Pada penerapan grafik kendali  $p$ , sampel yang diinginkan sulit untuk dikumpulkan dalam sekali proses produksi. Keadaan seperti ini biasanya terjadi pada proses pendek.

Proses pendek adalah proses produksi yang menghasilkan produk dalam jangka waktu yang pendek, sehingga tidak dapat mengambil sampel sesuai dengan kebutuhan (Octavia, 2000:53). Hal tersebut yang membuat sampel yang diperoleh tidak maksimal. Dalam proses pendek sampel yang diperoleh sangat sedikit sehingga sampel tersebut sulit untuk dianalisis, sehingga penulis menggunakan lebih dari satu proses produksi untuk mengatasi kesulitan tersebut. Dalam Al-Qur'an di jelaskan tentang kemudahan dalam menghadapi kesulitan atau masalah. Firman Allah SWT dalam surat Alam Nasyrat Ayat 5-6 yaitu:

فَإِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا إِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٥﴾

*Artinya: "Karena Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan. Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan"*(Qs. Alam Nasyrat:5-6).

Ayat tersebut menjelaskan bahwa setiap ada kesulitan pasti ada kemudahan, dan perkataan tersebut diulang sebanyak dua kali, di mana untuk mempertegas maknanya. Sehingga tidak ada suatu masalah pun yang tidak dapat diselesaikan.

Oleh karena itu, untuk membentuk grafik kendali  $p$  dan  $np$  pada proses pendek biasanya mengambil sampel dari proses produksi yang berbeda yang

memiliki proporsi produk ketidaksesuaian ( $p$ ) berbeda. Sehingga menghasilkan batas kendali dan garis tengah yang berbeda-beda pula. Untuk itu, grafik kendali  $p$  dan  $np$  ini perlu distandarisasi.

Proses standarisasi di sini diperlukan untuk mempermudah dalam menginterpretasikan grafik kendali  $p$  dan  $np$ . Untuk melakukan standarisasi maka harus menghitung simpangan baku dari tiap-tiap sampel. Dalam penelitian Lai K.Chan (1995:89) membahas tentang grafik kendali  $p$  yang distandarisasi untuk proses pendek. Dalam penulisan tersebut, menggunakan standarisasi untuk proses pendek dan disarankan agar menambahkan faktor koreksi untuk mempermudah menginterpretasikannya.

Dari penjelasan di atas maka penulis ingin mengembangkan grafik kendali  $np$  yang distandarisasi untuk pengendalian kualitas dalam proses pendek agar mendapatkan produk yang berkualitas. Grafik kendali  $np$  memiliki karakteristik yang sama dengan grafik kendali  $p$ , namun pada penerapannya berbeda, pada grafik  $np$  yang dibahas dan diplot merupakan banyaknya sampel ketidaksesuaian sedangkan pada grafik kendali  $p$  yang dibahas dan diplot adalah proporsi ketidaksesuaian. Untuk itu, penulis mengambil judul “*Analisis Grafik Kendali  $np$  yang Distandarisasi untuk Pengendalian Kualitas dalam Proses Pendek*”.

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah dalam penulisan ini adalah bagaimana analisis dari grafik kendali  $np$  yang distandarisasi untuk pengendalian kualitas dalam proses pendek?

### 1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan permasalahan di atas, tujuan penulisan ini adalah untuk mengetahui analisis grafik kendali  $np$  yang distandarisasi dan penerapannya untuk pengendalian kualitas dalam proses pendek.

### 1.4 Batasan Masalah

Agar permasalahan dalam penelitian ini tidak meluas maka penulis membatasi sebagai berikut:

1. Ukuran sampel ( $n$ ) tiap pengamatan sama.
2. Membandingkan peluang statistik grafik kendali  $np$  yang distandarisasi klasik dan peluang statistik grafik kendali  $np$  yang distandarisasi untuk proses pendek.

### 1.5 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat bermanfaat bagi penulis, lembaga, dan pembaca yang terkait. Adapun manfaat dari penelitian ini adalah:

1. Bagi Penulis

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan pengetahuan bagaimana grafik kendali  $np$  yang distandarisasi untuk pengendalian kualitas dalam proses pendek dan dapat mengaplikasikannya.

## 2. Bagi Lembaga

Penelitian ini diharapkan dapat digunakan untuk mengontrol proses produksi yang ada pada lembaga dan menjadi acuan dalam menentukan kualitas dari proses produksi tersebut.

## 3. Bagi Pembaca

Penulis berharap penelitian ini memberikan wawasan kepada pembaca tentang grafik kendali  $np$  untuk mengontrol sebuah proses produksi.

### 1.6 Metode Penelitian

Dalam penelitian ini, penulis menggunakan metode kepustakaan (*library research*) di mana penelitian tersebut digunakan untuk memperoleh data-data dan informasi menggunakan teknik dokumenter dari jurnal, buku, artikel, maupun karya ilmiah yang berkaitan dengan permasalahan yang diteliti. Adapun tahap-tahap yang dilakukan dalam penelitian ini adalah:

1. Analisis grafik kendali  $np$ 
  - a. Mengkaji grafik kendali  $np$  ketika  $p$  diketahui dan  $n$  sama.
  - b. Mengkaji grafik kendali  $np$  ketika  $p$  tidak diketahui dan  $n$  sama.
2. Proses standarisasi grafik kendali  $np$ 
  - a. Mengkaji grafik kendali  $np$  yang distandarisasi ketika  $p$  diketahui dan  $n$  sama.
  - b. Mengkaji grafik kendali  $np$  yang distandarisasi ketika  $p$  tidak diketahui dan  $n$  sama.

3. Proses standarisasi grafik kendali  $np$  untuk proses pendek
  - a. Memodifikasi grafik kendali  $np$  yang distandarisasi.
  - b. Menentukan persamaan grafik kendali  $np$  yang distandarisasi untuk proses pendek ketika  $p$  diketahui dan  $n$  sama.
  - c. Menentukan persamaan grafik kendali  $np$  yang distandarisasi untuk proses pendek ketika  $p$  tidak diketahui dan  $n$  sama.
4. Menganalisis grafik kendali  $np$  yang sudah distandarisasi untuk proses pendek
  - a. Mencari peluang statistik standarisasi klasik maupun proses pendek.
  - b. Membandingkan kedua peluang standarisasi tersebut.
  - c. Mengaplikasikan persamaan grafik kendali  $np$ , grafik kendali  $np$  yang distandarisasi, dan grafik kendali  $np$  yang distandarisasi untuk proses pendek pada sebuah data.

### 1.7 Sistematika Penulisan

Untuk lebih mudah memahami penulisan ini secara keseluruhan isinya, maka penulis memberikan gambaran umum tentang sistematika penulisan sebagai berikut:

#### BAB I PENDAHULUAN

Pada bab pertama ini dibahas tentang latar belakang masalah, perumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian dan sistematika penulisan.

## BAB II KAJIAN TEORI

Pada bab kedua berisi tentang distribusi peluang, ekspektasi, variansi, fungsi pembangkit momen, teorema limit pusat, distribusi Binomial, distribusi Normal, data atribut, grafik kendali data atribut, grafik kendali *shewhart*, pendekatan distribusi Normal terhadap distribusi Binomial, proses pendek, pengendalian kualitas dalam proses pendek menurut pandangan Al-Qur'an.

## BAB III PEMBAHASAN

Pada bab ketiga ini dibahas tentang grafik kendali  $np$ , proses standarisasi terhadap grafik kendali  $np$ , proses standarisasi pada grafik kendali  $np$  untuk proses pendek dan menganalisis grafik kendali  $np$  yang sudah distandarisasi untuk proses pendek.

## BAB IV PENUTUP

Pada bab keempat ini berisi tentang kesimpulan dari pembahasan berdasarkan rumusan masalah dan saran yang berkaitan dengan penulisan. Saran ini diharapkan dapat memberikan masukan yang positif untuk dikembangkan.

## BAB II KAJIAN TEORI

### 2.1 Distribusi Peluang

**Definisi 1.** (Walpole dan Myers, 1995:54)

Fungsi  $f(x)$  merupakan fungsi massa peluang peubah acak diskrit  $X$  bila untuk setiap kemungkinan hasil  $x$ , berlaku:

1.  $f(x) \geq 0$
2.  $\sum_x f(x) = 1$
3.  $P(X = x) = f(x)$

**Definisi 2.** (Walpole dan Myers, 1995:60)

Fungsi  $f(x)$  merupakan fungsi kepadatan peluang peubah acak kontinu  $X$ , yang didefinisikan di atas himpunan semua bilangan riil  $R$  bila berlaku:

1.  $f(x) \geq 0$ , untuk semua  $x \in R$
2.  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$
3.  $P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx$

### 2.2 Ekspektasi

**Definisi 3.** (Walpole dan Myers, 1995:94)

Misalkan  $X$  suatu peubah acak dengan distribusi peluang  $f(x)$ . Nilai harapan atau rata-rata  $X$  adalah

$$\mu = E(X) = \sum_x xf(x)$$

bila  $X$  diskrit, dan

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

bila  $X$  kontinu.

Untuk menyederhanakan perhitungan rata-rata dan variansi peubah acak, maka Walpole (1995:113) memberikan suatu sifat yaitu:

**Teorema 1.**

Bila  $a$  dan  $b$  konstanta, maka

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

**Bukti:**

Untuk kasus kontinu

$$E(aX + b) = \int_{-\infty}^{\infty} (ax + b)f(x)dx \quad \text{definisi 3}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} axf(x) + \int_{-\infty}^{\infty} bf(x) dx$$

$$= a \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx + b \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx \quad \text{teorema 2}$$

$$= aE(X) + b.1 \quad \text{definisi 2}$$

$$= aE(X) + b$$

Untuk kasus diskrit

$$E(aX + b) = \sum_x (ax + b)f(x) \quad \text{definisi 3}$$

$$= \sum_x axf(x) + \sum_x bf(x)$$

$$= a \sum_x xf(x) + b \sum_x f(x) \quad \text{teorema 2}$$

$$= aE(X) + b.1 \quad \text{definisi 2}$$

$$= aE(X) + b$$

Jadi terbukti

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

Akibat dari teorema 1, bila diambil  $b = 0$ , maka  $E(aX) = aE(X)$ .

**Definisi 4.** (Walpole dan Myers, 1995: 98)

Bila  $X$  dan  $Y$  peubah acak dengan distribusi peluang gabungan  $f(x, y)$  maka nilai harapan peubah acak  $g(X, Y)$  adalah

$$\mu_{g(X,Y)} = E[g(X, Y)] = \sum_x \sum_y g(x, y)f(x, y)$$

bila  $X$  dan  $Y$  diskrit, dan

$$\mu_{g(X,Y)} = E[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y)f(x, y)dx dy$$

bila  $X$  dan  $Y$  kontinu.

**Teorema 2.** (Walpole dan Myers, 1995: 116)

Misalkan  $X$  dan  $Y$  dua peubah acak yang bebas. Maka  $E(XY) = E(X)E(Y)$

**Bukti:**

Menurut definisi 4, diperoleh:

$$\begin{aligned} E(XY) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyf(x, y)dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyf(x)f(y)dx dy, \text{ karena } x \text{ dan } y \text{ adalah variabel bebas} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(XY) &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx \int_{-\infty}^{\infty} yf(y) dy \\ &= E(X)E(Y) \end{aligned}$$

**Teorema 3.** (Walpole dan Myers, 1995: 116)

Nilai harapan jumlah atau selisih dua atau lebih fungsi peubah acak  $X$  dan  $Y$  adalah jumlah atau selisih nilai harapan fungsi tersebut yaitu:

$$E[g(X, Y) \pm h(X, Y)] = E[g(X, Y)] \pm E[h(X, Y)]$$

**Bukti:**

Menurut definisi 4, diperoleh:

$$\begin{aligned} E[g(X, Y) \pm h(X, Y)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [g(x, y) \pm h(x, y)] f(x, y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f(x, y) dx dy \pm \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) f(x, y) dx dy, \text{ teorema 2} \\ &= E[g(X, Y)] \pm E[h(X, Y)] \end{aligned}$$

Akibat dari teorema 3, bila diambil  $g(X, Y) = g(X)$  dan  $h(X, Y) = h(Y)$ , maka diperoleh  $E[g(X) \pm h(Y)] = E[g(X)] \pm E[h(Y)]$

**Bukti:**

$$\begin{aligned} E[g(X) \pm h(Y)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [g(x) \pm h(y)] f(x, y) dx dy && \text{definisi 4} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx \pm \int_{-\infty}^{\infty} h(y) f(y) dy && \text{teorema 2} \\ &= E[g(X)] \pm E[h(Y)] \end{aligned}$$

**2.3 Variansi**

**Definisi 5.** (Walpole dan Myers, 1995:104)

Misalkan  $X$  peubah acak dengan distribusi peluang  $f(x)$  dan rata-rata  $\mu$ . Variansi  $X$  adalah

$$\sigma^2 = E[(X - \mu)^2] = \sum_x (x - \mu)^2 f(x)$$

bila  $X$  diskrit, dan

$$\sigma^2 = E[(X - \mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx$$

bila  $X$  kontinu.

**Teorema 4.** (Walpole dan Myers, 1995:105)

Misalkan  $X$  peubah acak dengan distribusi peluang  $f(x)$  dan rata-rata  $\mu$ . Variansi peubah acak  $X$  adalah

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$$

**Bukti:**

Untuk kasus diskrit

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= E[(X - \mu)^2] && \text{definisi 5} \\ &= \sum_x (x - \mu)^2 f(x) \\ &= \sum_x (x^2 - 2\mu x + \mu^2) f(x) \\ &= \sum_x (x^2) f(x) - 2\mu \sum_x x f(x) + \mu^2 \sum_x f(x) && \text{definisi 3 dan 1} \\ &= \sum_x (x^2) f(x) - 2\mu \mu + \mu^2 \cdot 1 \\ &= \sum_x (x^2) f(x) - 2\mu^2 + \mu^2 \\ &= \sum_x (x^2) f(x) - \mu^2 \\ &= E(X^2) - \mu^2 \end{aligned}$$

Untuk kasus kontinu

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= E[(X - \mu)^2] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 - 2\mu x + \mu^2) f(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x^2) f(x) - 2\mu \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) + \mu^2 \int_{-\infty}^{\infty} f(x) && \text{definisi 3 dan 2} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x^2) f(x) - 2\mu \mu + \mu^2 \cdot 1 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x^2) f(x) - 2\mu^2 + \mu^2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x^2) f(x) - \mu^2 \end{aligned}$$

$$= E(X^2) - \mu^2$$

Rumus variansi di atas dapat ditulis juga

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$$

*definisi 3*

$$= E(X^2) - (E(X))^2$$

Untuk simpangan baku  $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

**Definisi 6.** (Walpole dan Myers, 1995:108)

Misalkan  $X$  dan  $Y$  peubah acak dengan distribusi peluang gabungan  $f(x, y)$ .

Kovariansi  $X$  dan  $Y$  adalah

$$\sigma_{XY} = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] = \sum_x \sum_y (x - \mu_x)(y - \mu_y)f(x, y)$$

bila  $X$  dan  $Y$  diskrit, dan

$$\sigma_{XY} = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)(y - \mu_y)f(x, y) dx dy$$

bila  $X$  dan  $Y$  kontinu.

**Teorema 5.** (Walpole dan Myers, 1995: 109)

Kovariansi dua peubah acak  $X$  dan  $Y$  dengan rata-rata, masing-masing  $\mu_X$  dan  $\mu_Y$  diberikan oleh

$$\sigma_{XY} = E(XY) - \mu_X \mu_Y$$

**Bukti:**

Untuk kasus diskrit

$$\sigma_{XY} = \sum_x \sum_y (x - \mu_x)(y - \mu_y)f(x, y)$$

*definisi 6*

$$= \sum_x \sum_y (xy - x\mu_y - y\mu_x + \mu_x\mu_y)f(x, y)$$

$$= \sum_x \sum_y xyf(x, y) - \sum_x \sum_y x\mu_y f(x, y) - \sum_x \sum_y y\mu_x f(x, y) + \sum_x \sum_y \mu_x\mu_y f(x, y)$$

$$= \sum_x \sum_y xyf(x, y) - \mu_y \sum_x \sum_y xf(x, y) - \mu_x \sum_x \sum_y yf(x, y) + \mu_x\mu_y \sum_x \sum_y f(x, y)$$

$$= E(XY) - \mu_x\mu_y - \mu_x\mu_y + \mu_x\mu_y \cdot 1 \quad \text{definisi 3 dan 1}$$

$$= E(XY) - 2\mu_x\mu_y + \mu_x\mu_y$$

$$= E(XY) - \mu_x\mu_y$$

Untuk kasus kontinu

$$\sigma_{XY} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)(y - \mu_y)f(x, y) dx dy \quad \text{definisi 6}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (xy - x\mu_y - y\mu_x + \mu_x\mu_y)f(x, y) dx dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyf(x, y) dx dy - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x\mu_y f(x, y) dx dy - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y\mu_x f(x, y) dx dy + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mu_x\mu_y f(x, y) dx dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyf(x, y) dx dy - \mu_y \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xf(x, y) dx dy - \mu_x \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} yf(x, y) dx dy + \mu_x\mu_y \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy \quad \text{teorema 1}$$

$$= E(XY) - \mu_x\mu_y - \mu_x\mu_y + \mu_x\mu_y \cdot 1 \quad \text{definisi 3 dan 2}$$

$$= E(XY) - 2\mu_x\mu_y + \mu_x\mu_y$$

$$= E(XY) - \mu_x\mu_y$$

**Teorema 6.** (Walpole dan Myers, 1995:119)

Bila  $X$  dan  $Y$  peubah acak dengan distribusi peluang gabungan  $f(x, y)$ , maka

$$\sigma_{aX+bY}^2 = a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2 + 2ab\sigma_{XY}$$

**Bukti:**

Sesuai definisi 5 maka diperoleh

$$\sigma_{aX+bY}^2 = E[(aX + bY) - \mu_{aX+bY}]^2,$$

sehingga

$$\mu_{aX+bY} = E[(aX + bY)] = aE[X] + bE[Y] = a\mu_X + b\mu_Y,$$

Berdasarkan akibat dari teorema 3 dan akibat dari teorema 1 menjadi

$$\begin{aligned}\sigma_{aX+bY}^2 &= E\{[(aX + bY) - (a\mu_X + b\mu_Y)]^2\} \\ &= E\{[(aX - a\mu_X) + (bY - b\mu_Y)]^2\} \\ &= a^2E[(X - \mu_X)^2] + b^2E[(Y - \mu_Y)^2] + 2abE[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] \\ &= a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2 + 2ab\sigma_{XY}\end{aligned}$$

Akibat dari teorema 6, bila  $X$  dan  $Y$  peubah acak yang bebas, maka  $\sigma_{aX-bY}^2 =$

$$a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2$$

**Bukti:**

Sesuai definisi 5 maka diperoleh

$$\sigma_{aX-bY}^2 = E[(aX + bY) - \mu_{aX+bY}]^2,$$

sehingga

$$\mu_{aX-bY} = E[(aX - bY)] = aE[X] - bE[Y] = a\mu_X - b\mu_Y$$

Berdasarkan akibat dari teorema 3 dan akibat dari teorema 1 menjadi

$$\begin{aligned}\sigma_{aX-bY}^2 &= E\{[(aX - bY) - (a\mu_X - b\mu_Y)]^2\} \\ &= E\{[(aX - a\mu_X) - (bY - b\mu_Y)]^2\} \\ &= a^2E[(X - \mu_X)^2] + b^2E[(Y - \mu_Y)^2] - 2abE[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] \\ &= a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2 - 2ab\sigma_{XY}\end{aligned}$$

Mencari  $\sigma_{XY}$

$$\begin{aligned}\sigma_{XY} &= E(XY) - \mu_X\mu_Y \\ &= E(X)E(Y) - \mu_X\mu_Y \\ &= \mu_X\mu_Y - \mu_X\mu_Y = 0\end{aligned}$$

maka

$$\sigma_{aX-bY}^2 = a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2 - 2ab\sigma_{XY}$$

$$\begin{aligned}
 &= a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2 - 2ab(0) \\
 &= a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2
 \end{aligned}$$

## 2.4 Fungsi Pembangkit Momen

**Definisi 7.** (Dudewicz dan Mishra, 1995: 300)

Fungsi pembangkit momen dari suatu peubah acak  $X$  didefinisikan sebagai

$\psi_X(t) = E(e^{tX})$  untuk setiap bilangan riil  $t$ .

**Teorema 7.**

Misalkan  $X_1, X_2, \dots, X_n$  peubah acak yang berdistribusi identik dan bebas dan misalkan  $Y = X_1 + \dots + X_n$  maka fungsi pembangkit momen dari  $Y$  adalah

$$\psi_Y(t) = \left(\psi_{X_1}(t)\right)^n$$

**Bukti:**

$$\begin{aligned}
 \psi_Y(t) &= E(e^{tY}) \\
 &= E\left(e^{t(X_1 + X_2 + \dots + X_n)}\right) \\
 &= E\left(e^{tX_1 + tX_2 + \dots + tX_n}\right) \\
 &= E\left(e^{tX_1} \dots e^{tX_n}\right) \\
 &= E\left(e^{tX_1}\right) \dots E\left(e^{tX_n}\right) \\
 &= \psi_{X_1}(t) \dots \psi_{X_n}(t) \\
 &= \prod_{i=1}^n \psi_{X_i}(t)
 \end{aligned}$$

*teorema 2*

karena  $X_1, X_2, \dots, X_n$  berdistribusi identik, maka

$$\psi_Y(t) = \left(\psi_{X_1}(t)\right)^n$$

**Definisi 8.** (Leithold, dkk., 1988: 135)

Fungsi  $f$  dikatakan kontinu di suatu bilangan  $a$  jika  $f$  terdefinisi pada selang terbuka yang memuat  $a$  dan untuk setiap  $\varepsilon > 0$  terdapat suatu  $\delta > 0$  sehingga jika  $|x - a| < \delta$  maka  $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ .

**Teorema 8.** (Leithold, dkk., 1988:138)

Jika  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$  dan fungsi  $f$  kontinu di  $b$  maka

$$\lim_{x \rightarrow a} (f \circ g)(x) = f(b) \leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} g(x)\right)$$

**Bukti:**

Karena  $f$  kontinu di  $b$ , menurut definisi 8, untuk setiap  $\varepsilon_1 > 0$  terdapat suatu  $\delta_1 > 0$  sehingga

$$\text{jika } |y - b| < \delta_1 \text{ maka } |f(y) - f(b)| < \varepsilon_1. \quad (2.1)$$

Karena  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ , untuk setiap  $\delta_1 > 0$  terdapat suatu  $\delta_2 > 0$  sehingga

$$\text{jika } 0 < |x - a| < \delta_2 \text{ maka } |g(x) - b| < \delta_1. \quad (2.2)$$

Jika  $0 < |x - a| < \delta_2$ , dengan mengganti  $y$  dalam persamaan (2.1) oleh  $g(x)$  akan didapatkan untuk setiap  $\varepsilon_1 > 0$  terdapat suatu  $\delta_1 > 0$  sehingga

$$\text{jika } |g(x) - b| < \delta_1 \text{ maka } |f(g(x)) - f(b)| < \varepsilon_1. \quad (2.3)$$

Dari persamaan (2.3) dan (2.2) dapat disimpulkan bahwa untuk setiap  $\varepsilon_1 > 0$  terdapat suatu  $\delta_2 > 0$  sehingga

$$\text{jika } 0 < |x - a| < \delta_2 \text{ maka } |f(g(x)) - f(b)| < \varepsilon_1$$

akibatnya

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(b) \leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} g(x)\right).$$

**Teorema 9.** (Hogg, dkk., 2005:216)

Misal diberikan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 1 + \frac{b}{n} + \frac{\psi(n)}{n} \right]^{cn}$$

di mana  $b$  dan  $c$  tidak tergantung pada  $n$  dan di mana  $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi(n) = 0$ , maka

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 1 + \frac{b}{n} + \frac{\psi(n)}{n} \right]^{cn} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 1 + \frac{b}{n} \right]^{cn} = e^{bc}$$

**Bukti:** (Leithold, dkk., 1993:127)

Pandang

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 1 + \frac{b}{n} + \frac{\psi(n)}{n} \right]^{cn} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left( 1 + \frac{b+\psi(n)}{n} \right) \right]^{cn} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left( 1 + \frac{1}{\frac{n}{b+\psi(n)}} \right) \right]^{\frac{n}{b+\psi(n)} [c(b+\psi(n))]} \\ &= e^{c(b+\psi(n))} \\ &= e^{cb} e^{c\psi(n)} \\ &= e^{cb} e^{c0} \\ &= e^{cb} 1 \\ &= e^{cb} \end{aligned}$$

$$\text{Jadi } \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 1 + \frac{b}{n} \right]^{cn} = e^{cb}$$

Limit di atas dapat ditulis sebagai berikut

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 1 + \frac{b}{n} \right]^{cn} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 1 + \frac{b}{n} \right]^{\frac{bcn}{b}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left( 1 + \frac{b}{n} \right)^{\frac{n}{b}} \right]^{bc} . \end{aligned}$$

Sebelumnya akan ditentukan nilai dari

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 1 + \frac{b}{n} \right]^{\frac{n}{b}}$$

Misal ambil  $h = \frac{b}{n}$  maka diperoleh  $\frac{n}{b} = \frac{1}{h}$  dan karena  $n \rightarrow \infty$  setara dengan  $h \rightarrow 0$  maka diperoleh

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 1 + \frac{b}{n} \right]^{\frac{n}{b}} = \lim_{h \rightarrow 0} [1 + h]^{\frac{1}{h}} = e.$$

Sehingga dengan menggunakan teorema 8 di dapatkan

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left( 1 + \frac{b}{n} \right)^{\frac{n}{b}} \right]^{bc} &= \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{b}{n} \right)^{\frac{n}{b}} \right]^{bc} \\ &= e^{bc} \end{aligned}$$

$$\text{Jadi, terbukti } \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 1 + \frac{b}{n} + \frac{\psi(n)}{n} \right]^{cn} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 1 + \frac{b}{n} \right]^{cn} = e^{bc}.$$

## 2.5 Teorema Limit Pusat

**Teorema 10.** (Dudewicz dan Mishra, 1995:373)

Misalkan  $X_1, X_2, \dots, X_n$  adalah sampel acak yang berasal dari distribusi yang memiliki rata-rata  $\mu$  dan variansi  $\sigma^2$ . Maka  $Z = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma}$  konvergen dalam distribusi ke suatu peubah acak yang berdistribusi Normal dengan rata-rata 0 dan variansi 1 ( $Z \rightarrow \sim NID(0,1)$ ).

**Bukti:**

Diasumsikan bahwa fungsi pembangkit momen  $M(t) = E(e^{tX})$  ada untuk semua  $-h < t < h$ . Maka

$$m(t) = E[e^{t(X-\mu)}]$$

$$\begin{aligned}
&= E[e^{tX}e^{-\mu t}] \\
&= E[e^{tX}]e^{-\mu t} \\
&= \mathbf{M(t)}e^{-\mu t}
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Untuk membuktikan teorema limit pusat maka dibutuhkan deret Taylor, yang dapat dibentuk dari rumus deret Taylor dengan nilai  $\xi$  antara 0 dan  $t$ . Dalam pembuktian ini diambil tiga suku pertama untuk membentuk deret Taylor, diperoleh:

$$m(t) = m(0) + m'(0)t + \frac{m''(\xi)t^2}{2}$$

Sebelum memperoleh nilai di atas maka harus dicari terlebih dahulu turunan pertama dan kedua dari  $m(t)$  di  $t = 0$  sebagai berikut:

Turunan pertama

$$\begin{aligned}
m(t) &= E[e^{t(X-\mu)}] \\
m'(t) &= E[(X - \mu)e^{t(X-\mu)}] \\
m'(0) &= E[(X - \mu)e^{0(X-\mu)}] \\
&= E[(X - \mu) \cdot 1] \\
&= E[(X - \mu)]
\end{aligned}$$

Turunan kedua

$$\begin{aligned}
m(t) &= E[e^{t(X-\mu)}] \\
m'(t) &= E[(X - \mu)e^{t(X-\mu)}] \\
&= E[(X - \mu)e^{t(X-\mu)}] \\
m''(t) &= E[(X - \mu)(X - \mu)e^{t(X-\mu)}] \\
&= E[(X - \mu)^2 e^{t(X-\mu)}] \\
m''(0) &= E[(X - \mu)^2 e^{0(X-\mu)}]
\end{aligned}$$

$$= E[(X - \mu)^2 \cdot 1]$$

$$= E[(X - \mu)^2]$$

Karena  $m(t)$  adalah fungsi pembangkit momen dari  $X - \mu$ , maka

$$m(t) = E[e^{t(X-\mu)}]$$

$$m(0) = E[e^{0(X-\mu)}]$$

$$= E[e^{(0)X} e^{-\mu(0)}]$$

$$= E[e^0] e^0$$

$$= E[1] 1$$

$$= 1 \cdot 1$$

$$= 1$$

$$m'(0) = E[X - \mu]$$

$$= E[X] - \mu$$

$$= \mu - \mu$$

$$= 0$$

$$m''(0) = E[(X - \mu)^2]$$

$$= E[X^2 - 2\mu X + \mu^2]$$

$$= E[X^2] - 2\mu E[X] + \mu^2$$

*definisi 3*

$$= E[X^2] - 2\mu\mu + \mu^2$$

$$= E[X^2] - 2\mu^2 + \mu^2$$

$$= E[X^2] - \mu^2$$

Sebelum menyelesaikan persamaan  $m''(0)$ , dicari nilai  $E[X^2]$  terlebih dahulu,

yaitu:

$$\text{var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2$$

*teorema 4*

$$E[X^2] = \text{var}(X) + (E[X])^2 .$$

Maka

$$\begin{aligned}
 m''(0) &= E[X^2] - \mu^2 \\
 &= (\text{var}(X) + (E[X])^2) - \mu^2 \\
 &= (\sigma^2 + (\mu)^2) - \mu^2 \\
 &= \sigma^2 + \mu^2 - \mu^2 \\
 &= \sigma^2.
 \end{aligned}$$

Substitusikan nilai  $m(0)$  dan  $m'(0)$  pada rumus deret Taylor, maka diperoleh

$$\begin{aligned}
 m(t) &= m(0) + m'(0)t + \frac{m''(\xi)t^2}{2} \\
 &= 1 + 0 + \frac{m''(\xi)t^2}{2} \\
 &= 1 + \frac{m''(\xi)t^2}{2} \\
 \frac{\sigma^2 t^2}{2} + m(t) &= 1 + \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \frac{m''(\xi)t^2}{2} \quad \text{kedua ruas ditambahkan } \frac{\sigma^2 t^2}{2} \\
 m(t) &= 1 + \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \frac{m''(\xi)t^2}{2} - \frac{\sigma^2 t^2}{2} \\
 &= 1 + \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \frac{[m''(\xi) - \sigma^2]t^2}{2} \quad (2.5)
 \end{aligned}$$

Selanjutnya mencari  $M(t; n)$  di mana

$$\begin{aligned}
 M(t; n) &= E \left( e^{t \left( \frac{\sum X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \right)} \right) \\
 &= E \left[ e^{t \left( \frac{X_1 - \mu}{\sigma\sqrt{n}} \right)} \dots e^{t \left( \frac{X_n - \mu}{\sigma\sqrt{n}} \right)} \right] \\
 &= E \left[ e^{t \left( \frac{X_1 - \mu}{\sigma\sqrt{n}} \right)} \right] \dots E \left[ e^{t \left( \frac{X_n - \mu}{\sigma\sqrt{n}} \right)} \right] \quad \text{teorema 2} \\
 &= \left( E \left[ e^{t \left( \frac{X - \mu}{\sigma\sqrt{n}} \right)} \right] \right)^n \quad \text{teorema 7} \\
 &= \left( E \left[ e^{\left( \frac{tX - \mu t}{\sigma\sqrt{n}} \right)} \right] \right)^n
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left( E \left[ e^{\frac{tX}{\sigma\sqrt{n}}} e^{\frac{-\mu t}{\sigma\sqrt{n}}} \right] \right)^n \\
&= \left( E \left[ e^{\frac{tX}{\sigma\sqrt{n}}} \right] e^{\frac{-\mu t}{\sigma\sqrt{n}}} \right)^n \\
&= \left( M \left( \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \right) e^{\frac{-\mu t}{\sigma\sqrt{n}}} \right)^n \quad \text{definisi 7} \\
&= \left( m \left( \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \right) \right)^n, \quad -h < \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} < h \quad (2.6)
\end{aligned}$$

Selanjutnya dari persamaan (2.5), ganti  $t$  dengan  $\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}$  maka akan diperoleh:

$$\begin{aligned}
m\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) &= 1 + \frac{\sigma^2 \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2}{2} + \frac{[m''(\xi) - \sigma^2] \left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2}{2} \\
&= 1 + \frac{\sigma^2 \frac{t^2}{\sigma^2 n}}{2} + \frac{[m''(\xi) - \sigma^2] \frac{t^2}{\sigma^2 n}}{2} \\
&= 1 + \frac{\frac{t^2}{n}}{2} + \frac{[m''(\xi) - \sigma^2] \frac{t^2}{\sigma^2 n}}{2} \\
&= 1 + \frac{t^2 n^{-1}}{2} + \frac{[m''(\xi) - \sigma^2] t^2 (\sigma^2 n)^{-1}}{2} \\
&= 1 + \frac{t^2}{2n} + \frac{[m''(\xi) - \sigma^2] t^2}{2\sigma^2 n} \quad (2.7)
\end{aligned}$$

di mana nilai  $\xi$  antara 0 dan  $\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}$  dengan  $-h\sigma\sqrt{n} < t < h\sigma\sqrt{n}$ .

Berdasarkan persamaan (2.6) dan (2.7) akan diperoleh:

$$M(t; n) = \left( 1 + \frac{t^2}{2n} + \frac{[m''(\xi) - \sigma^2] t^2}{2\sigma^2 n} \right)^n \quad (2.8)$$

Karena  $m''(t)$  kontinu di  $t = 0$  dan  $\xi \rightarrow 0$  pada saat  $n \rightarrow \infty$  di dapatkan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [m''(\xi) - \sigma^2] = 0$$

Berdasarkan teorema 9, persamaan (2.8) menjadi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{t^2}{2n} + \frac{[m''(\xi) - \sigma^2] t^2}{2\sigma^2 n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{t^2}{2n} \right)^n$$

$$= e^{\frac{t^2}{2} - 1} \quad \text{teorema 9}$$

$$= e^{\frac{t^2}{2}}$$

untuk semua nilai  $t$  bilangan riil.

Hal ini menunjukkan bahwa peubah acak  $Z = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma}$  mempunyai limit distribusi ke distribusi Normal dengan rata-rata 0 dan variansi 1, ditulis  $Z \rightarrow \sim NID(0,1)$ .

## 2.6 Distribusi Binomial

Distribusi Binomial adalah salah satu distribusi peluang teoritis dengan variabel acak diskrit. Distribusi Binomial kadang-kadang juga disebut distribusi Bernoulli (penemunya bernama James Bernoulli). Peluang munculnya gejala yang diharapkan disebut peluang “sukses” dan diberi simbol  $p$ , sedangkan peluang tidak munculnya gejala yang diharapkan disebut peluang “gagal” dan diberi simbol  $1-p$  (Djawanto dan Subagyo, 1996: 59).

**Definisi 9.** (Dudewicz dan Mishra, 1995:93)

Suatu peubah acak  $X$  yang mempunyai distribusi Bernoulli jika (untuk suatu  $p$ ,  $0 \leq p \leq 1$ ).

$$P[X = x] = f_X(x) = \begin{cases} p^x(1-p)^{1-x}, & \text{bila } x = 0,1 \\ 0, & \text{untuk yang lainnya} \end{cases}$$

**Teorema 11.** (Dudewicz dan Mishra, 1995: 259)

Bila  $X$  berdistribusi Bernoulli maka  $E[X] = p$ ,  $var(X) = p(1-p)$

**Bukti:**

$$E[X] = \sum_x xf(x) + \sum_x xf(x) \quad \text{definisi 3}$$

$$= 0 \cdot p^0(1-p)^{1-0} + 1 \cdot p^1(1-p)^{1-1} \quad \text{definisi 9}$$

$$= 0,1 \cdot (1 - p)^1 + 1 \cdot p \cdot (1 - p)^0$$

$$= 0, (1 - p) + 1 \cdot p = p$$

$$E[X^2] = \sum_x x^2 f(x) + \sum_x x^2 f(x) \quad \text{definisi 3}$$

$$= (0)^2 \cdot p^0 (1 - p)^{1-0} + (1)^2 \cdot p^1 (1 - p)^{1-1} \quad \text{definisi 9}$$

$$= (0)^2 \cdot p^0 (1 - p)^1 + (1)^2 \cdot p^1 (1 - p)^0$$

$$= (0)^2 \cdot (1 - p) + (1)^2 \cdot p = p$$

$$\text{var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 \quad \text{teorema 4}$$

$$= p - p^2$$

$$= p(1 - p)$$

Menurut Djawanto dan Subagyo (1996:60) peluang munculnya gejala yang kita harapkan sebanyak  $X$  kali dalam  $n$  kejadian (artinya  $X$  kali sukses dan  $n - X$  kali gagal) merupakan distribusi Binomial dan dinyatakan dalam rumus berikut:

$$P(X, n) = \binom{n}{X} p^X (1 - p)^{n-X}, \text{ di mana } \binom{n}{X} = \frac{n!}{X!(n-X)!} \quad (2.9)$$

sehingga

$$P(X, n) = \frac{n!}{X!(n-X)!} p^X (1 - p)^{n-X}. \quad (2.10)$$

Keterangan:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \text{ (disebut } n \text{ faktorial)}$$

$$X = 0, 1, 2, \dots, n$$

Syarat-syarat distribusi Binomial sebagai berikut:

1. Percobaan Binomial terdiri atas  $n$  ulangan yang identik
2. Dalam setiap ulangan hanya mungkin dihasilkan dua kejadian sukses atau gagal

3. Peluang untuk berhasil dalam setiap ulangan adalah  $p$  dan nilai  $p$  bersifat konstan
4. Setiap ulangan bersifat bebas dari ulangan lainnya, artinya hasil dari suatu ulangan tidak mempengaruhi hasil ulangan lainnya.

(Turmudi dan Harini, 2008:189)

**Teorema 12.** (Walpole dan Myers, 1995: 134)

Distribusi Binomial  $B(X; n, p)$  mempunyai rata-rata dan variansi  $\mu = np$  dan  $\sigma^2 = np(1 - p)$ .

**Bukti:**

Misalkan hasil pada usaha ke- $j$  dinyatakan oleh peubah acak Bernoulli  $I_j$  yang mendapat nilai 0 atau 1, masing-masing dengan peluang  $1-p$  dan  $p$ . Peubah Bernoulli  $I_j$  dengan nilai seperti ini disebut peubah petunjuk. Jadi, banyaknya sukses dalam suatu percobaan Binomial dapat dituliskan sebagai jumlah  $n$  peubah petunjuk bebas, sehingga

$$X = I_1 + I_2 + \dots + I_n$$

Berdasarkan akibat dari teorema 3 maka diperoleh rata-rata distribusi Binomial sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \mu = E[X] &= E[I_1] + E[I_2] + \dots + E[I_n] \\ &= p + p + \dots + p && \text{teorema 11} \\ &= np \end{aligned}$$

Berdasarkan akibat dari teorema 6 maka diperoleh variansi sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \sigma_X^2 &= \sigma_{I_1}^2 + \sigma_{I_2}^2 + \dots + \sigma_{I_n}^2 \\ &= p(1 - p) + p(1 - p) + \dots + p(1 - p) && \text{teorema 11} \end{aligned}$$

$$= np(1 - p)$$

## 2.7 Distribusi Normal

Distribusi Normal adalah salah satu distribusi teoritis dari variabel acak kontinu. Distribusi Normal sering disebut distribusi Gauss, sesuai nama pengembangnya, yaitu Karl Gauss pada abad ke-18, seorang ahli matematika dan astronomi.

**Definisi 10.** (Walpole dan Myers, 1995:160)

Fungsi kepadatan peluang peubah acak normal  $X$  dengan rata-rata  $\mu$  dan variansi  $\sigma^2$  adalah

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad -\infty \leq x \leq \infty$$

Keterangan:

$f(x)$  = ordinat kurva distribusi Normal untuk setiap nilai  $x$

$x$  = nilai data

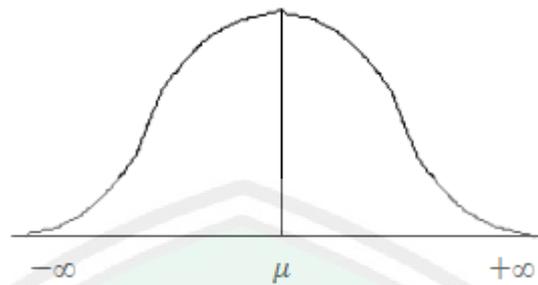
$\mu$  = rata-rata

$e$  = konstanta

$\sigma$  = simpangan baku

$\pi$  = konstanta

Distribusi Normal merupakan distribusi yang simetris dan berbentuk lonceng. Pada bentuk tersebut ditunjukkan hubungan ordinat pada rata-rata dengan berbagai ordinat pada berbagai jarak simpangan baku yang diukur dari rata-rata. Dalam bentuk diagram atau kurva, distribusi Normal digambarkan:



Gambar 2.1 Distribusi Normal

Menurut Hasan (2005:70-71) dari bentuk kurva distribusi Normal dapat diketahui sifat-sifat distribusi Normal, yaitu:

1. Bentuk distribusi Normal adalah bentuk lonceng dengan satu puncak.
2. Rata-rata ( $\mu$ ) terletak di tengah-tengah.
3. Nilai rata-rata sama dengan modus yang memberikan pola simetri.
4. Ujung-ujung sisi kurvanya sejajar dengan sumbu horizontal (sb- $X$ ) dan tidak akan pernah memotong sumbu tersebut.
5. Luas daerah di bawah lengkungan kurva tersebut dari  $-\infty$  sampai  $+\infty$  sama dengan 1 atau 100%.

Karena persamaan kurva distribusi Normal tersebut di atas tergantung pada nilai  $\mu$  dan  $\sigma$ , maka kita mempunyai bermacam-macam bentuk kurva tergantung dengan  $\mu$  dan  $\sigma$  tersebut. Untuk menyederhanakannya, maka dibuat kurva distribusi Normal standar. Kurva distribusi Normal standar adalah kurva distribusi Normal yang sudah diubah menjadi distribusi  $Z$ , di mana distribusi tersebut akan memiliki  $\mu = 0$  dan  $\sigma^2 = 1$ . Ini dapat dilakukan melalui transformasi

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \quad (2.11)$$

Rata-rata  $Z$  adalah 0, karena

$$\begin{aligned}
 E(Z) &= E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) \\
 &= \frac{1}{\sigma}E(X - \mu) \\
 &= \frac{1}{\sigma}(E(X) - \mu) \\
 &= \frac{1}{\sigma}(\mu - \mu) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Sedangkan variansinya adalah

$$\begin{aligned}
 \text{var}(Z) &= E(Z^2) - (E(Z))^2 && \text{teorema 4} \\
 &= E(Z^2) - (E(Z))^2 \\
 &= E\left(\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2\right) - \left(E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)\right)^2 \\
 &= \frac{1}{\sigma^2}E(X - \mu)^2 - \left(\frac{1}{\sigma}E(X - \mu)\right)^2 \\
 &= \frac{1}{\sigma^2}E(X^2 - 2X\mu + \mu^2) - \left(\frac{1}{\sigma}E(X - \mu)\right)^2 \\
 &= \frac{1}{\sigma^2}(E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2) - \left(\frac{1}{\sigma}(E(X) - \mu)\right)^2 \\
 &= \frac{1}{\sigma^2}(E(X^2) - 2\mu\mu + \mu^2) - \left(\frac{1}{\sigma}(\mu - \mu)\right)^2 && \text{definisi 3} \\
 &= \frac{1}{\sigma^2}(E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2) - \left(\frac{1}{\sigma}(0)\right)^2 \\
 &= \frac{1}{\sigma^2}(E(X^2) - \mu^2) - 0 \\
 &= \frac{1}{\sigma^2}(E(X^2) - \mu^2) && (2.12)
 \end{aligned}$$

Untuk mendapatkan nilai  $\text{var}(Z)$  di atas, dicari terlebih dahulu nilai  $E(X^2)$  sebagai berikut:

$$\text{var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

teorema 4

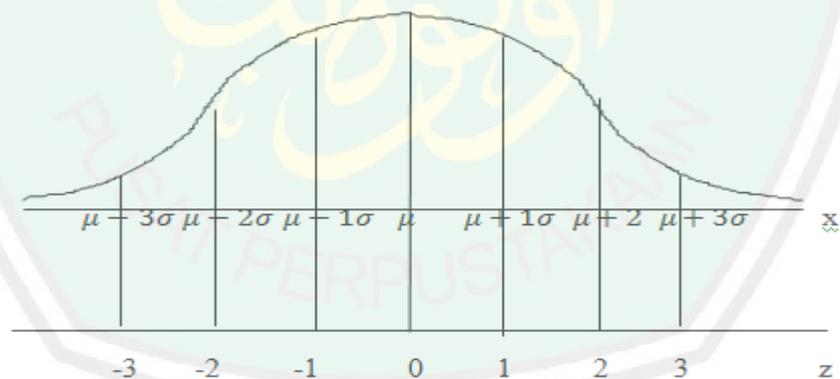
$$E(X^2) = \text{var}(X) + (E(X))^2$$

$$= \sigma^2 + \mu^2 \quad (2.13)$$

Maka dengan mensubstitusikan persamaan (2.13) ke persamaan (2.12), diperoleh:

$$\begin{aligned} \text{var}(Z) &= \frac{1}{\sigma^2} (E(X^2) - \mu^2) \\ &= \frac{1}{\sigma^2} (\sigma^2 + \mu^2 - \mu^2) \\ &= \frac{1}{\sigma^2} (\sigma^2) \\ &= \frac{\sigma^2}{\sigma^2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Adapun hubungan antara distribusi Normal ( $N(\mu, \sigma^2)$ ) dengan distribusi Normal standar ( $NID(0,1)$ ) dapat dilihat dalam gambar berikut:

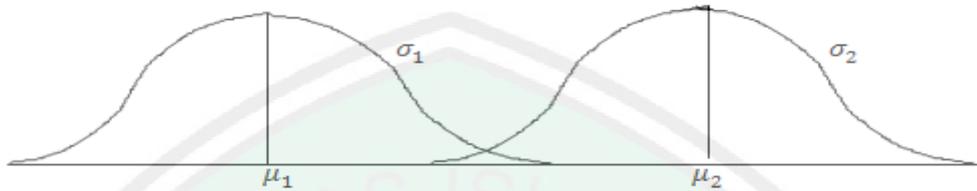


Gambar 2.2 Hubungan antara Kurva Distribusi Normal dan Kurva Distribusi Normal Standar

Nilai Z (standar unit) merupakan angka yang menunjukkan penyimpangan suatu variabel ( $X$ ) dari rata-rata ( $\mu$ ) dihitung dalam satuan simpangan baku ( $\sigma$ ) (Djawanto dan Subagyo, 1996:77-78).

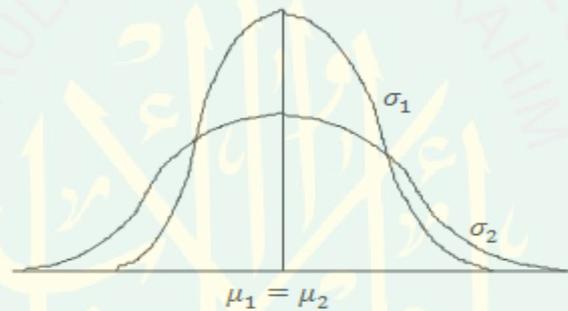
Menurut Walpole (1995:180-181) ada beberapa bentuk kurva distribusi Normal, dibandingkan dalam 2 kurva yang berbeda:

1. Dua kurva distribusi Normal yang mempunyai simpangan baku sama tetapi rata-rata berbeda.



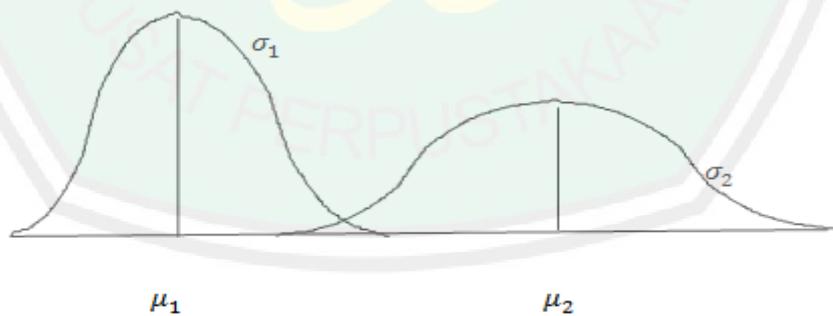
Gambar 2.3 Dua Kurva Distribusi Normal dengan  $\mu_1 \neq \mu_2$  dan  $\sigma_1 = \sigma_2$

2. Dua kurva dengan simpangan baku berbeda tapi rata-rata sama



Gambar 2.4 Dua Kurva Distribusi Normal dengan  $\mu_1 = \mu_2$  dan  $\sigma_1 < \sigma_2$

3. Dua kurva distribusi Normal baik rata-rata maupun simpangan baku berbeda



Gambar 2.5 Dua Kurva Distribusi Normal dengan  $\mu_1 \neq \mu_2$  dan  $\sigma_1 < \sigma_2$

## 2.8 Data Atribut

Atribut dalam pengendalian kualitas menunjukkan karakteristik kualitas yang sesuai dengan spesifikasi atau tidak sesuai dengan spesifikasi. Menurut

Besterfield (1998) dalam Ariani (2004:130), data atribut digunakan apabila pengukuran tidak memungkinkan untuk dilakukan, misalnya goresan, kesalahan, warna, atau ada bagian yang hilang. Selain itu, data atribut digunakan apabila pengukuran dapat dilakukan tetapi tidak dilakukan karena alasan waktu, biaya, atau kebutuhan. Dengan kata lain, meskipun diameter suatu pipa dapat diukur, tetapi mungkin akan lebih tepat dan mudah menggunakan ukuran baik dan tidak baik untuk menentukan apakah produk tersebut sesuai dengan spesifikasi atau tidak sesuai dengan spesifikasi.

## **2.9 Grafik Kendali Data Atribut**

Pengendalian kualitas proses statistik untuk data atribut ini digunakan sebagai alternatif grafik kendali kualitas proses statistik untuk data variabel. Hal ini dapat terjadi apabila pengukuran seperti kesalahan warna, adanya bagian yang hilang dan seterusnya tidak dapat diukur. Sehingga grafik kendali kualitas proses statistik data atribut dapat mengatasi keterbatasan tersebut.

Namun demikian grafik kendali kualitas proses statistik data atribut, memiliki kelemahan antara lain, tidak dapat diketahui seberapa jauh ketidaktepatan dengan spesifikasi. Kelemahan lain dari grafik kendali ini adalah ukuran sampel yang semakin besar akan bermasalah bila pengukuran mahal dan proses pengujian justru menyebabkan kerusakan. Namun demikian, secara keseluruhan grafik kendali kualitas proses statistik untuk data atribut lebih sedikit memberikan informasi dari pada grafik kendali kualitas proses statistik data variabel (Ariani, 2004: 130-131).

Menurut Grant dan Leavenworth (1989: 238) ada beberapa jenis grafik kendali data atribut yang dapat digunakan di antaranya:

1. Grafik  $p$ , grafik kendali untuk proporsi ketidaksesuaian
2. Grafik  $np$ , grafik kendali untuk banyaknya unit ketidaksesuaian
3. Grafik  $c$ , grafik kendali untuk ketidaksesuaian
4. Grafik  $u$ , grafik kendali untuk banyaknya ketidaksesuaian setiap unit

Ada dua kelompok besar grafik kendali kualitas proses statistik untuk data atribut, yaitu yang berdasarkan distribusi Binomial dan distribusi Poisson. Grafik kendali yang berdasarkan distribusi Binomial merupakan kelompok kendali untuk unit-unit ketidaksesuaian, seperti  $p$ -chart yang menunjukkan proporsi ketidaksesuaian dalam sampel atau subkelompok dan grafik kendali banyaknya ketidaksesuaian ( $np$ -chart). Sedangkan grafik kendali yang berdasarkan berdistribusi Poisson merupakan grafik kendali  $c$  yang menunjukkan banyaknya ketidaksesuaian dalam unit yang diinspeksi dan grafik kendali  $u$  yang digunakan untuk menunjukkan rata-rata banyaknya ketidaksesuaian setiap unit (Ariani, 2004: 131-132).

Untuk menyusun grafik kendali proses statistik untuk data atribut tersebut diperlukan beberapa langkah. Menurut Besterfield (1998) dalam Ariani (2004: 131), langkah tersebut meliputi:

1. Menentukan sasaran yang akan dicapai

Sasaran ini akan mempengaruhi jenis grafik kendali kualitas proses statistik data atribut mana yang harus digunakan. Hal ini tentu saja dipengaruhi oleh karakteristik kualitas suatu produk atau proses. Apakah

proporsi atau banyaknya ketidaksesuaian dalam sampel atau subkelompok, maupun banyaknya ketidaksesuaian dari suatu unit setiap kali mengadakan observasi.

2. Menentukan banyaknya sampel

Banyaknya sampel yang diambil akan mempengaruhi jenis grafik kendali di samping karakteristik kualitasnya.

3. Mengumpulkan data

Data yang dikumpulkan tentu disesuaikan dengan jenis grafik kendali. Misalnya, suatu perusahaan atau organisasi menggunakan *p-chart*, maka data yang dikumpulkan juga harus diatur dalam bentuk proporsi ketidaksesuaian terhadap banyaknya sampel yang diambil.

4. Menentukan garis tengah dan batas-batas kendali

Penentuan garis tengah dan batas-batas kendali akan ditunjukkan secara rinci pada subbagian berikut ini, pada masing-masing grafik kendali. Biasanya, perusahaan menggunakan  $\pm 3\sigma$  sebagai batas-batas kendalinya.

5. Merevisi garis tengah dan batas-batas kendali

Revisi terhadap garis tengah dan batas-batas kendali dilakukan apabila dalam grafik kendali kualitas proses statistik untuk data atribut terhadap data yang berbeda di luar batas kendali statistik (*out of control*) dan diketahui kondisi tersebut disebabkan karena penyebab khusus. Demikian pula, data yang berada di bawah garis batas kendali bawah apabila ditemukan penyebab khusus di dalamnya tentu perlu diadakan revisi.

## 2.10 Grafik Kendali Shewhart

Jika  $w$  suatu statistik yang mengukur suatu karakteristik kualitas, dan jika rata-rata  $w$  adalah  $\mu_w$  dan variansi  $w$  adalah  $\sigma_w^2$  maka model umum grafik kendalian Shewhart adalah sebagai berikut:

$$UCL = \mu_w + k \sigma_w \quad (2.14)$$

$$CL = \mu_w \quad (2.15)$$

$$LCL = \mu_w - k \sigma_w \quad (2.16)$$

Keterangan:

$UCL$  = *Upper control limit* (batas kendali atas )

$CL$  = *Control line* (garis kendali)

$LCL$  = *Lower control limit* (batas kendali bawah)

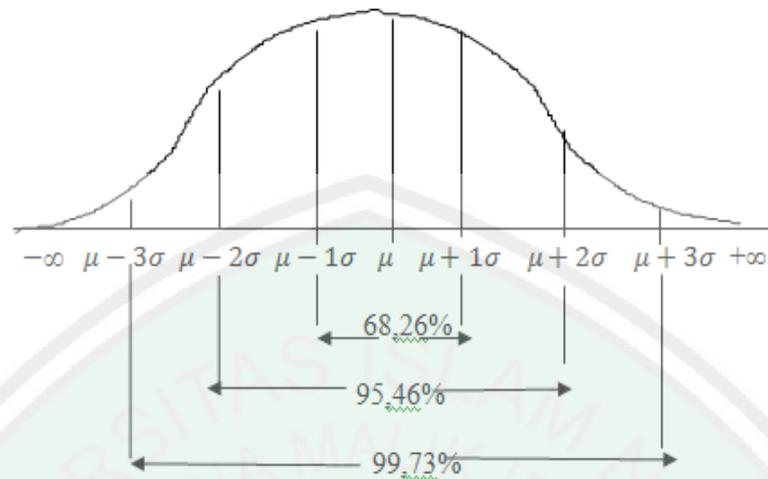
$w$  = Statistik sampel yang digunakan sebagai ukuran karakteristik kualitas proses produksi

$k$  = Jarak batas kendali dari garis tengah yang dinyatakan dalam unit simpangan baku

$\sigma_w$  = Simpangan baku dari  $w$

$\mu_w$  = Rata-rata dari  $w$

Nilai simpangan baku  $w$  diperoleh dari simpangan baku proses dibagi akar dari banyaknya sampel yang diambil pada setiap pengamatan (*sampel size*), peran simpangan baku ( $\sigma_w$ ) dari suatu distribusi Normal mempunyai interpretasi sederhana seperti gambar di bawah ini:



Gambar 2.6 Luas di Bawah Kurva Distribusi Normal

Perhatikan bahwa 68,26% dari nilai-nilai populasi itu berada di antara batas-batas yang didefinisikan oleh rata-rata ditambah dan dikurangi satu simpangan baku ( $\mu \pm 1\sigma$ ), 95,46% dari nilai-nilai populasi itu berada di antara batas-batas yang didefinisikan oleh rata-rata ditambah dan dikurangi dua simpangan baku ( $\mu \pm 2\sigma$ ), dan 99,73% dari nilai-nilai populasi itu berada di antara batas-batas yang didefinisikan oleh rata-rata ditambah dan dikurangi tiga simpangan baku ( $\mu \pm 3\sigma$ ). Jadi simpangan baku mengukur jarak pada skala mendatar yang berkaitan dengan batas-batas luas daerah di bawah kurva sebesar 68,26%; 95,46%; dan 99,73% luasan. Karena semakin besar nilai  $k$  maka semakin kecil nilai kesalahan pada proses produksi. Umumnya nilai  $k$  yang digunakan sama dengan 3. Sehingga pendekatan dengan distribusi Normal ini biasa disebut dengan istilah batas kendali 3 sigma.

(Montgomery, 1990: 47 dan 144 )

## 2.11 Pendekatan Distribusi Normal terhadap Distribusi Binomial

Bila  $X$  adalah suatu peubah acak Binomial dengan rata-rata  $\mu = np$  dan variansi  $\sigma^2 = np(1 - p)$ , maka limit distribusi dari statistik

$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \quad (2.17)$$

untuk  $n \rightarrow \infty$ , adalah distribusi Normal standar.

Distribusi Normal memberikan hampiran sangat baik pada distribusi Binomial bila  $n$  besar dan  $p$  dekat dengan  $\frac{1}{2}$ . Bahkan bila  $n$  kecil dan  $p$  tidak terlalu dekat pada nol dan satu, hampiran itu masih tetap baik (Walpole, 1995:197).

Seperti diketahui, distribusi Binomial bervariasi diskrit sedangkan distribusi Normal bervariasi kontinu. Karena itu, menurut Hasan (2002:77) penggunaan distribusi Normal untuk menyelesaikan kasus distribusi Binomial dapat dilakukan dengan menggunakan aturan penyesuaian, yaitu dapat menggunakan faktor koreksi. Caranya ialah menambahkan atau mengurangi variabel  $X$ -nya dengan 0,5 sebagai berikut:

1. Untuk batas bawah (kiri), variabel  $X$  dikurangi 0,5
2. Untuk batas atas (kanan), variabel  $X$  ditambah 0,5

Dengan demikian, rumus  $Z$ -nya menjadi:

$$Z = \frac{(X \pm 0,5) - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

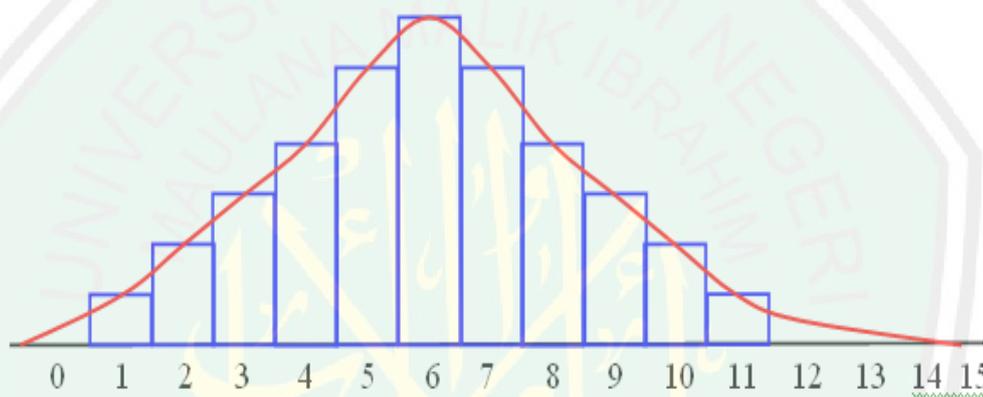
Untuk menyelidiki hampiran Normal terhadap distribusi Binomial, pertama-tama penulis membuat histogram bagi  $B(X; 15; 0,4)$  dan kemudian menumpangtindihkan distribusi Normal yang memiliki rata-rata dan variansi

seperti peubah acak Binomial  $X$  tersebut. Jadi penulis menggambarkan kurva distribusi Normal dengan

$$\mu = np = (15)(0,4) = 6$$

$$\sigma^2 = np(1 - p) = (15)(0,4)(0,6) = 3,6$$

Histogram bagi  $B(X; 15; 0,4)$  dan kurva distribusi Normal yang tumpang tindih, sepenuhnya ditentukan oleh rata-rata dan variansinya, berikut ini ilustrasinya:



Gambar 2.7 Hampiran Kurva Distribusi Normal bagi  $B(X; 15; 0,4)$

(Walpole,1995:197)

## 2.12 Grafik Kendali Proporsi Ketidaksesuaian

Grafik kendali  $p$  didefinisikan sebagai perbandingan banyak produk yang tidak sesuai dalam suatu populasi dengan banyak produk keseluruhan dalam populasi itu. Apabila produk tidak sesuai dengan standar dalam satu atau beberapa karakteristik ini, maka produk ini diklasifikasikan sebagai produk yang tidak sesuai.

Asas statistik yang melandasi grafik kendali untuk proporsi ketidaksesuaian ( $p$ -chart) didasarkan atas distribusi Binomial. Misalkan proses

produksi bekerja dalam keadaan stabil, sehingga peluang suatu unit yang diproduksi berturut-turut adalah *independent*. Maka tiap unit yang diproduksi merupakan realisasi suatu peubah acak Bernoulli dengan parameter  $p$ . Apabila sampel acak dengan  $n$  unit produk dipilih, dan  $D$  adalah banyak unit produk ketidaksesuaian maka  $D$  berdistribusi Binomial dengan parameter  $n$  dan  $p$ , yakni

$$P(X, n) = \binom{n}{X} p^X (1-p)^{n-X}, X = 0, 1, \dots, n \quad (2.18)$$

dengan rata-rata dan variansi dari peubah acak  $D$  masing-masing adalah  $np$  dan  $np(1-p)$ .

Proporsi ketidaksesuaian sampel didefinisikan sebagai perbandingan banyak unit ketidaksesuaian  $D$  dalam sampel dengan ukuran sampel  $n$ , yakni:

$$p = \frac{D}{n} \quad (2.19)$$

Distribusi variabel acak  $p$  dapat diperoleh dari distribusi Binomial. Selanjutnya rata-rata dan variansi  $p$  masing-masing adalah

$$\mu = p \quad (2.20)$$

dan

$$\sigma_p^2 = \frac{p(1-p)}{n} \quad (2.21)$$

Andaikan  $p$  merupakan proporsi ketidaksesuaian dalam proses produksi diketahui.

Maka garis tengah dan batas kendali grafik kendali dari proporsi ketidaksesuaian adalah

$$UCL = p + 3 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \quad (2.22)$$

$$CL = p \quad (2.23)$$

$$LCL = p - 3 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \quad (2.24)$$

Pada praktiknya grafik ini terdiri dari pengambilan sampel-sampel dengan  $n$  unit berturut-turut, menghitung proporsi ketidaksesuaian dengan  $p$ , dan menggambarkan statistik  $p$  pada grafik. Selama  $p$  tetap di dalam batas kendali dan deretan titik-titik yang tergambar tidak menunjukkan pola sistematis atau tidak acak, dapat disimpulkan bahwa proses tersebut terkendali pada tingkat  $p$ . Jika satu titik terletak di luar batas kendali, atau jika diamati pola tidak acak dalam titik-titik tergambar itu, maka disimpulkan bahwa proporsi ketidaksesuaian proses itu telah bergeser ke tingkat yang baru atau proses dalam keadaan tidak terkendali.

Dalam Montgomery (1990:143-145), apabila proporsi ketidaksesuaian  $p$  tidak diketahui, maka  $p$  harus ditaksir dari data observasi. Prosedur yang biasa adalah memilih  $m$  pengamatan (subgrup) pendahuluan, masing-masing berukuran  $n$ . Sebagai aturan umum,  $m$  biasanya dipilih antara 20 sampai 25 subgrup. Maka jika ada  $D_k$  unit sampel ketidaksesuaian dalam pengamatan ke- $k$ , kita hitung proporsi ketidaksesuaian dalam pengamatan ke- $k$  itu sebagai

$$p_k = \frac{D_k}{n}, k = 1, 2, 3 \dots m \quad (2.25)$$

dan rata-rata proporsi ketidaksesuaian dari seluruh pengamatan tersebut adalah

$$\bar{p} = \frac{\sum_{j=1}^m D_j}{mn} = \frac{\sum_{j=1}^m p_j}{m}, j = 1, 2, 3, \dots, m \quad (2.26)$$

Statistik  $\bar{p}$  ini nantinya digunakan untuk menaksir proporsi ketidaksesuaian  $p$  yang tidak diketahui. Sehingga garis tengah dan batas kendali grafik kendali untuk proporsi ketidaksesuaian untuk  $p$  tidak diketahui dihitung sebagai berikut:

$$UCL = \bar{p} + 3 \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} \quad (2.27)$$

$$CL = \bar{p} \quad (2.28)$$

$$LCL = \bar{p} - 3 \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} \quad (2.29)$$

(Montgomery, 1990:143-145)

### 2.13 Proses Pendek

Proses pendek adalah proses produksi yang memproduksi produk dalam jangka waktu yang pendek atau singkat, sehingga tidak cukup waktu untuk mengambil sampel dalam jumlah yang dibutuhkan. Beberapa bursa kerja ditandai dengan produksi proses pendek, dan bursa kerja ini memproduksi beberapa bagian dari proses produksi yang kurang dari 50 unit. Pada situasi ini, membuat penggunaan rutin grafik kendali merupakan sebuah tantangan. Untuk menentukan batas kendali, suatu unit tidak dapat diproduksi dalam satu waktu. Masalah ini dapat diselesaikan dengan mudah, karena metode statistik proses kendali lebih sering diterapkan pada karakteristik dari sebuah produk, dengan memperpanjang waktu pengendalian proses pada lingkungan bursa kerja dan fokus pada proses karakteristik dari setiap unit produk (Montgomery, 1990:258).

### 2.14 Pengendalian Kualitas dalam Proses Pendek menurut Pandangan Al-Qur'an

Statistik adalah seni pengambilan keputusan tentang suatu proses atau populasi berdasarkan pada suatu analisis informasi yang terkandung di dalam suatu sampel dari populasi itu. Metode statistika memainkan peranan penting dalam jaminan kualitas. Metode statistika itu memberikan cara-cara pokok dalam pengambilan sampel produk, pengujian serta evaluasinya, dan informasi di dalam

data itu digunakan untuk mengendalikan dan meningkatkan proses produksi. (Montgomery, 1990:27).

Sedangkan kualitas sendiri berarti kepuasan pelanggan, kesesuaian dengan penggunaan, pemecahan masalah untuk mencapai penyempurnaan terus menerus dan kesesuaian terhadap persyaratan. Untuk mendapatkan kualitas yang baik, maka kualitas SDM harus terpenuhi, karena manusia yang berkualitas selalu berusaha untuk berinovasi dan berproduksi sehingga manusia tersebut akan bekerja secara profesional. Seperti yang tersirat dalam Al-Qur'an surat An-Naml: 88 yang berbunyi:

... صَنَّ اللَّهُ الَّذِي آتَقَنَ كُلَّ شَيْءٍ ...

Artinya: "Ciptaan Allah yang telah berlaku baik (profesional) dalam segala sesuatu" (Qs. An-Naml:88).

*Itqon* berasal dari kata (*Atqona-yutqinu-itqonan*) yang berarti baik. Dari sini dapat ditarik sebuah makna bahwa *itqon* adalah sebuah sifat profesional, baik, dan sarat kesempurnaan. Selain ayat di atas, dalam hadits riwayat Thabrani juga dijelaskan tentang *itqon* yakni:

إن الله يحب إذا عمل أحدكم عملاً أن يتقنه

Artinya: "Sesungguhnya Allah menyukai, apabila salah seorang dari kalian mengerjakan suatu pekerjaan, supaya pekerjaan itu dikerjakannya dengan baik (profesional)."

Arti dari hadits tersebut menegaskan bahwa dalam melakukan suatu pekerjaan harus dilakukan secara profesional, di mana pekerjaan tersebut akan menghasilkan suatu produk yang dapat dinikmati oleh konsumen, seperti halnya pekerjaan memproduksi suatu produk, maka produk tersebut harus terjamin

kualitas dan layak untuk di konsumsi. Untuk menghasilkan sesuatu yang berkualitas, baik SDM maupun suatu produksi, dibutuhkan waktu yang cukup lama. Namun dalam praktiknya kadang dibutuhkan waktu yang instan agar dapat menghasilkan sesuatu yang berkualitas. Maka instan di sini berarti dengan waktu yang singkat hasil yang diperoleh memuaskan. Namun untuk mencapai hal tersebut tidak mudah, karena terdapat beberapa kesulitan yang dialami, di antaranya harus melibatkan lebih dari satu proses produksi untuk memenuhi standar pembentukan grafik kendali. Allah SWT berfirman selalu menghendaki kemudahan di dalam kesulitan. Untuk itu, dijelaskan dalam Al-Qur'an Surat Al-Baqaroh ayat 185 yang berbunyi:

شَهْرُ رَمَضَانَ الَّذِي أُنزِلَ فِيهِ الْقُرْآنُ هُدًى لِّلنَّاسِ وَبَيِّنَاتٍ مِّنَ الْهُدَىٰ وَالْفُرْقَانِ  
 فَمَن شَهِدَ مِنْكُمُ الشَّهْرَ فَلْيَصُمْهُ ۖ وَمَن كَانَ مَرِيضًا أَوْ عَلَىٰ سَفَرٍ فَعِدَّةٌ مِّنْ أَيَّامٍ  
 أُخَرَ يُرِيدُ اللَّهُ بِكُمُ الْيُسْرَ وَلَا يُرِيدُ بِكُمُ الْعُسْرَ وَلِتُكْمِلُوا الْعِدَّةَ وَلِتُكَبِّرُوا  
 اللَّهَ عَلَىٰ مَا هَدَيْتُمْ وَلِعَلَّكُمْ تَشْكُرُونَ

*Artinya:*” (Beberapa hari yang ditentukan itu ialah) bulan Ramadhan, bulan yang di dalamnya diturunkan (permulaan) Al Quran sebagai petunjuk bagi manusia dan penjelasan-penjelasan mengenai petunjuk itu dan pembeda (antara yang hak dan yang bathil). karena itu, Barangsiapa di antara kamu hadir (di negeri tempat tinggalnya) di bulan itu, Maka hendaklah ia berpuasa pada bulan itu, dan Barangsiapa sakit atau dalam perjalanan (lalu ia berbuka), Maka (wajiblah baginya berpuasa), sebanyak hari yang ditinggalkannya itu, pada hari-hari yang lain. Allah menghendaki kemudahan bagimu, dan tidak menghendaki kesukaran bagimu. dan hendaklah kamu mencukupkan bilangannya dan hendaklah kamu mengagungkan Allah atas petunjuk-Nya yang diberikan kepadamu, supaya kamu bersyukur” (Qs. Al-Baqaroh:185).

Ayat di atas menjelaskan bahwa ketika menjumpai bulan Ramadhan maka diwajibkan untuk melaksanakan ibadah puasa, dan apabila sakit atau dalam

perjalanan tidak dapat berpuasa maka dapat mengganti puasa pada hari yang lain sesuai dengan hari yang ditinggalkan. Hal tersebut menunjukkan bahwa agama Islam selalu mengajarkan setiap perkara yang sulit akan diberikan jalan yang mudah untuk menyelesaikannya, karena pada dasarnya Islam sendiri menyukai perbuatan yang baik. Hal tersebut juga dijelaskan dalam Surat Alam Nasyrah ayat 5-6 yang berbunyi:

فَإِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا إِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا ﴿٥﴾

*Artinya: "Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan. Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan"* (Qs. Alam Nasyrah:5-6).

Dari ayat diatas terdapat kata مع العسر يسرا dimana Allah SWT memberitahukan bahwa bersama kesulitan itu terdapat kemudahan. Kemudian dipertegas berita tersebut oleh Ibnu Jarir yang meriwayatkan dari Al-Hasan, dia berkata: "Nabi SAW pernah keluar rumah pada suatu hari dalam keadaan senang dan gembira, dan beliau juga dalam keadaan tertawa seraya bersabda:

لَنْ يَغْلِبَ عُسْرٌ يُسْرَيْنِ لَنْ يَغْلِبَ عُسْرٌ يُسْرَيْنِ فَإِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا إِنَّ مَعَ الْعُسْرِ يُسْرًا

*Artinya: "Satu kesulitan itu tidak akan pernah mengalahkan dua kemudahan, satu kesulitan itu tidak akan pernah mengalahkan dua kemudahan, karena bersama kesulitan itu pasti terdapat kemudahan, sesungguhnya bersama kesulitan itu terdapat kemudahan"*.

Dengan demikian, dapat dikatakan bahwa kesulitan itu dapat diketahui pada keadaan yang sama, di mana kalimatnya dalam bentuk *mufrad* (tunggal). Sedangkan kemudahan (*yusro*) dalam bentuk *nakirah* (tidak ada ketentuannya) sehingga bilangannya bertambah banyak. Oleh karena itu, beliau bersabda, "Satu kesulitan itu tidak akan pernah mengalahkan dua kemudahan." Begitu juga

dengan waktu yang relatif pendek, penulis mengambil data dari proses produksi yang berbeda agar dapat memenuhi standar sampel yang dibutuhkan. Sehingga kesulitan tersebut dapat diselesaikan dengan kemudahan.



### BAB III PEMBAHASAN

#### 3.1 Analisis Grafik Kendali $np$

Dalam pembahasan ini, penulis akan mengkaji grafik kendali  $np$ . Grafik kendali  $np$  merupakan grafik kendali banyaknya ketidaksesuaian. Grafik kendali ini dapat dibentuk dari sebuah proses produksi. Misal ambil suatu produksi sebanyak  $m$  pengamatan (subgrup), di mana setiap pengamatan ke- $k$  memiliki ukuran sampel pengamatan sebanyak  $n$ , sehingga dapat diilustrasikan sebagai berikut:

1	2	...	$m$
$X_{11}$	$X_{12}$	...	$X_{1m}$
$X_{21}$	$X_{22}$	...	$X_{2m}$
$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$
$X_{n1}$	$X_{n2}$	...	$X_{nm}$
$D_1$	$D_2$	...	$D_m$

di mana  $i = 1, 2, \dots, n$  dan  $k = 1, 2, \dots, m$  sehingga  $X_{ik}$  merupakan sampel ke- $i$  pada pengamatan ke- $k$  dan  $D_k = \sum_{i=1}^n X_{ik}$  menyatakan banyaknya ketidaksesuaian pada pengamatan ke- $k$ .

Pandang pengamatan  $X_{ik}$ , karena  $X_{ik}$  merupakan unit sampel ketidaksesuaian, maka  $X_{ik}$  memenuhi dua kemungkinan hasil yaitu jika pengamatan tidak sesuai maka disimbolkan dengan 1 akan tetapi jika pengamatan

sesuai maka disimbolkan dengan 0. Misalkan suatu peluang ketidaksesuaian dinotasikan  $p$  dengan  $0 \leq p \leq 1$ , maka dapat dikatakan bahwa  $X_{ik}$  berdistribusi Bernoulli dengan parameter  $p$  dan memiliki  $\mu = p$  serta  $\sigma^2 = p(1 - p)$ .

Selanjutnya banyaknya ketidaksesuaian pada pengamatan ke- $k$  ( $D_k$ ) merupakan jumlah  $n$  ulangan kejadian Bernoulli sehingga  $D_k$  dapat dikatakan berdistribusi Binomial dengan parameter  $n$  dan  $p$  sehingga  $\mu = np$  dan  $\sigma^2 = np(1 - p)$ .

Untuk memperoleh model grafik kendali dengan nilai rata-rata dan variansi diketahui berdasarkan grafik kendali Shewhart didapatkan: (Mongomery, 1990:144)

$$UCL = \mu_w + k \sigma_w \quad (3.1)$$

$$CL = \mu_w \quad (3.2)$$

$$LCL = \mu_w - k \sigma_w \quad (3.3)$$

di mana  $w$  merupakan statistik sampel yang mengukur karakteristik kualitas.

Pada penelitian ini, karena karakteristik kualitas yang dibahas berupa atribut dan berdistribusi Binomial, dalam hal ini statistik sampel yang mengukur karakteristik kualitas disimbolkan dengan  $D$  yaitu banyaknya ketidaksesuaian. Adapun nilai  $k$  diperoleh dari luas di bawah kurva distribusi Normal. Dalam hal ini, penulis mengambil  $k = 3$  untuk memenuhi standar internasional yang sesuai dengan  $\mu \pm 3\sigma$  atau ekuivalen dengan tingkat signifikansi 0,00135 yang berarti data berada pada selang kepercayaan 99,73%, artinya dari 10.000 data, diharapkan maksimal 27 data boleh keluar di atas  $UCL$  maupun di bawah  $LCL$ .

Misalkan dalam suatu produksi proporsi ketidaksesuaian ( $p$ ) diketahui dan tiap pengamatan mempunyai ukuran sampel ( $n$ ) sama maka dari persamaan (3.1), (3.2), dan (3.3) dapat diperoleh suatu model baru yaitu:

$$UCL = \mu_D + 3 \sigma_D$$

$$CL = \mu_D$$

$$LCL = \mu_D - 3 \sigma_D$$

sehingga

$$UCL = np + 3\sqrt{np(1-p)} \quad (3.4)$$

$$CL = np \quad (3.5)$$

$$LCL = np - 3\sqrt{np(1-p)} \quad (3.6)$$

Sedangkan jika proporsi ketidaksesuaian ( $p$ ) tidak diketahui dan tiap pengamatan mempunyai ukuran sampel ( $n$ ) sama maka  $p$  perlu ditaksir, berdasarkan persamaan (2.25) dapat diperoleh:

$$D_k = np_k \quad (3.7)$$

Sehingga berdasarkan persamaan (2.26),  $p$  ditaksir oleh:

$$\bar{p} = \frac{\sum_{j=1}^m D_j}{mn} = \frac{\sum_{j=1}^m p_j}{m}, j = 1, 2, \dots, m \quad (3.8)$$

Maka dapat diperoleh grafik kendali  $np$  sebagai berikut:

$$UCL = n\bar{p} + 3\sqrt{n\bar{p}(1-\bar{p})} \quad (3.9)$$

$$CL = n\bar{p} \quad (3.10)$$

$$LCL = n\bar{p} - 3\sqrt{n\bar{p}(1-\bar{p})} \quad (3.11)$$

Pada kasus tertentu, yang telah disampaikan pada latar belakang, perlu dilakukan standarisasi terhadap grafik kendali  $np$ . Untuk itu penulis akan melakukan langkah kedua yang berupa proses standarisasi grafik kendali  $np$ .

### 3.2 Proses Standarisasi Grafik Kendali $np$

Setelah diperoleh grafik kendali  $np$ , maka selanjutnya akan dicari standarisasi dari grafik kendali tersebut. Standarisasi bertujuan agar grafik kendali  $np$  mudah diinterpretasikan. Untuk mendapatkan standarisasi maka digunakan pendekatan distribusi Normal terhadap distribusi Binomial. Dalam konsep distribusi Normal, untuk menyederhanakan sebuah perhitungan, digunakan distribusi Normal standar, di mana distribusi tersebut mempunyai rata-rata nol dan variansi satu. Misalkan  $X_1, X_2, \dots, X_n$  adalah sampel acak berukuran  $n$  yang berdistribusi Bernoulli dengan  $\mu = p$  dan  $\sigma^2 = p(1 - p)$  maka berdasarkan teorema 10 dapat diperoleh:

$$\begin{aligned} Z_k &= \frac{\sum_{k=1}^m X_k - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \\ &= \frac{\sum_{k=1}^m X_k - n(p)}{\sqrt{p(1-p)}\sqrt{n}} \\ &= \frac{D_k - np}{\sqrt{np(1-p)}} \sim NID(0, 1) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Sehingga saat proporsi ketidaksesuaian ( $p$ ) diketahui dan tiap pengamatan mempunyai ukuran sampel ( $n$ ) sama maka berdasarkan persamaan (3.7), persamaan (3.12) menjadi persamaan standarisasi untuk  $p$  diketahui yaitu:

$$Z_k = \frac{np_k - np}{\sqrt{np(1-p)}} \quad (3.13)$$

Setelah diperoleh persamaan standarisasi maka akan dibuktikan bahwa  $\mu_{Z_k} = 0$

dan  $\sigma_{Z_k}^2 = 1$ .

Diketahui bahwa,

$$p_k = \frac{D_k}{n}, k = 1, 2, 3, \dots, m \quad (3.14)$$

Maka untuk  $\bar{p}$  dapat diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \bar{p} &= \frac{p_1 + p_2 + \dots + p_m}{m} \\ &= \frac{\sum_{j=1}^m p_j}{m} \\ &= \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m p_j \\ &= \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \frac{D_j}{n} \\ &= \frac{1}{nm} \sum_{j=1}^m D_j, j = 1, 2, 3, \dots, m \end{aligned} \quad (3.15)$$

Akan dibuktikan bahwa  $\mu_{Z_k} = 0$  dan  $\sigma_{Z_k}^2 = 1$

Rata-rata  $Z_k$  ( $\mu_{Z_k}$ )

$$\begin{aligned} E[Z_k] &= E \left[ \frac{np_k - np}{\sqrt{np(1-p)}} \right] \\ &= \frac{n}{\sqrt{np(1-p)}} (E[p_k] - p) \\ &= \frac{n}{\sqrt{np(1-p)}} (E[p_k] - E[p]) \\ &= \frac{n}{\sqrt{np(1-p)}} \left( E \left[ \frac{D_k}{n} \right] - p \right) \\ &= \frac{n}{\sqrt{np(1-p)}} \left( \frac{1}{n} E[D_k] - p \right) \\ &= \frac{n}{\sqrt{np(1-p)}} \left( \frac{1}{n} np - p \right) \\ &= \frac{n}{\sqrt{np(1-p)}} (p - p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E[Z_k] &= \frac{n}{\sqrt{np(1-p)}}(0) \\
 &= \mathbf{0}, \text{ terbukti}
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Variansi  $Z_k$  ( $\sigma_{Z_k}^2$ )

$$\begin{aligned}
 \text{var}(Z_k) &= \text{var} \left[ \frac{np_k - np}{\sqrt{np(1-p)}} \right] \\
 &= \frac{n^2}{np(1-p)} \text{var}[p_k - p] \\
 &= \frac{n^2}{np(1-p)} (\text{var}[p_k] - \text{var}[p]) \\
 &= \frac{n^2}{np(1-p)} \text{var}(p_k) - \frac{n^2}{np(1-p)} \text{var}(p) \\
 &= \frac{n^2}{np(1-p)} \text{var} \left( \frac{D_k}{n} \right) - \frac{n^2}{np(1-p)} p^2 \text{var}(1), \quad \text{karena } p \text{ konstan} \\
 &= \frac{n^2}{np(1-p)} \frac{1}{n^2} \text{var}(D_k) - \frac{n^2}{np(1-p)} p^2 \cdot 0 \\
 &= \frac{n^2}{np(1-p)} \frac{1}{n^2} np(1-p) - 0 \\
 &= \frac{n^2}{np(1-p)} \frac{1}{n^2} np(1-p) \\
 &= \frac{n^3 p(1-p)}{n^3 p(1-p)} = \mathbf{1}, \text{ terbukti}
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Jadi, terbukti bahwa  $Z_k$  mempunyai  $\mu_{Z_k} = 0$  dan  $\sigma_{Z_k}^2 = 1$  ( $Z_k \rightarrow \sim NID(0,1)$ )

Dalam kasus proporsi ketidaksesuaian ( $p$ ) tidak diketahui dan tiap pengamatan mempunyai ukuran sampel ( $n$ ) sama. Maka nilai  $p$  perlu ditaksir dengan  $\bar{p}$  seperti pada persamaan (3.8), maka persamaan (3.12) menjadi:

$$Z_k = \frac{D_k - n\bar{p}}{\sqrt{n\bar{p}(1-\bar{p})}}$$

Berdasarkan persamaan (3.7) persamaan standarisasi untuk  $p$  tidak diketahui menjadi:

$$Z_k = \frac{np_k - n\bar{p}}{\sqrt{n\bar{p}(1-\bar{p})}} \quad (3.18)$$

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa  $\mu_{Z_k} = 0$  dan  $\sigma_{Z_k}^2 = 1$ , namun sebelumnya akan dicari terlebih dahulu rata-rata dan variansi dari  $np_k - n\bar{p}$ .

1. Mencari rata-rata dari  $np_k - n\bar{p}$

$$\begin{aligned} E[np_k - n\bar{p}] &= nE[p_k - \bar{p}] \\ &= n(E[p_k] - E[\bar{p}]) && \text{teorema 1} \\ &= n\left(E\left[\frac{D_k}{n}\right] - E\left[\frac{\sum_{j=1}^m D_j}{nm}\right]\right) && \text{persamaan 3.14} \\ &= n\frac{1}{n}\left(E[D_k] - \frac{1}{m}E[\sum_{j=1}^m D_j]\right) && \text{dan 3.15} \\ &= E[D_k] - \frac{1}{m}E[\sum_{j=1}^m D_j] && \text{teorema 1} \\ &= E[D_k] - \frac{1}{m}\sum_{j=1}^m E[D_j] && \text{teorema 1} \\ &= np - \frac{1}{m}mnp \\ &= np - np \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

2. Mencari variansi dari  $np_k - n\bar{p}$

$$\begin{aligned} \text{var}[(np_k - n\bar{p})] &= E[(np_k - n\bar{p})^2] - (E[(np_k - n\bar{p})])^2 \\ &= n^2E[(p_k - \bar{p})^2] - 0 \\ &= n^2(E[p_k^2 - 2p_k\bar{p} + \bar{p}^2]) - 0 \\ &= n^2(E[p_k^2] - 2E[p_k\bar{p}] + E[\bar{p}^2]) - 0 \\ &= n^2(E[p_k^2] - 2E[p_k\bar{p}] + E[\bar{p}^2]) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Untuk menyelesaikan persamaan (3.20) memerlukan beberapa tahapan, antara lain:

a. Mencari nilai  $E[p_k^2]$

$$\text{var}[p_k] = E[p_k^2] - (E[p_k])^2 \quad \text{teorema 4}$$

$$E[p_k^2] = \text{var}[p_k] + (E[p_k])^2 \quad \text{persamaan 3.14}$$

$$= \text{var} \left[ \frac{D_k}{n} \right] + \left( E \left[ \frac{D_k}{n} \right] \right)^2$$

$$= \frac{1}{n^2} \text{var}[D_k] + \left( \frac{1}{n} E[D_k] \right)^2 \quad \text{teorema 1}$$

$$= \frac{1}{n^2} np(1-p) + \left( \frac{1}{n} np \right)^2$$

$$= \frac{np(1-p)}{n^2} + \frac{n^2 p^2}{n^2}$$

$$= \frac{p(1-p)}{n} + p^2$$

$$= \frac{p(1-p) + np^2}{n} \quad (3.21)$$

b. Mencari nilai  $E[p_k \bar{p}]$

$$E[p_k \bar{p}] = E \left[ p_k \frac{\sum_{j=1}^m p_j}{m} \right]$$

$$= E \left[ \frac{p_k \sum_{j=1}^m p_j}{m} \right]$$

$$= \frac{1}{m} E[p_k \sum_{j=1}^m p_j]$$

$$= \frac{1}{m} E[p_k p_1 + p_k p_2 + \dots + p_k p_m]$$

$$= \frac{1}{m} (E[p_k p_1] + E[p_k p_2] + \dots + E[p_k p_m])$$

$$= \frac{1}{m} \left( E \left[ \frac{D_k D_1}{n^2} \right] + E \left[ \frac{D_k D_2}{n^2} \right] + \dots + E \left[ \frac{D_k D_m}{n^2} \right] \right) \quad \text{persamaan 3.14}$$

$$= \frac{1}{mn^2} (E[D_k D_1] + E[D_k D_2] + \dots + E[D_k D_m]) \quad \text{teorema 1}$$

$$= \frac{1}{mn^2} (E[\sum_{j \neq k}^m D_k D_j] + E[D_k^2])$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{mn^2} (E[\sum_{j \neq k}^m D_k D_j] + E[D_k^2]) \\
&= \frac{1}{mn^2} (\sum_{j \neq k}^m E[D_k D_j] + E[D_k^2]) \\
&= \frac{1}{mn^2} ((m-1)E[D_k]E[D_j] + E[D_k^2]) \tag{3.22}
\end{aligned}$$

dicari terlebih dahulu  $E[D_k^2]$

$$\begin{aligned}
\text{var}[D_k] &= E[D_k^2] - (E[D_k])^2 && \text{teorema 4} \\
E[D_k^2] &= \text{var}[D_k] + (E[D_k])^2 \\
&= np(1-p) + n^2p^2 \tag{3.23}
\end{aligned}$$

Substitusi persamaan (3.23) ke persamaan (3.22)

$$\begin{aligned}
E[p_k \bar{p}] &= \frac{1}{mn^2} ((m-1)E[D_k]E[D_j] + E[D_k^2]) \\
&= \frac{1}{mn^2} ((m-1)(np)(np) + np(1-p) + n^2p^2) \\
&= \frac{1}{mn^2} ((m-1)n^2p^2 + np(1-p) + n^2p^2) \\
&= \frac{(m-1)n^2p^2}{mn^2} + \frac{np(1-p)}{mn^2} + \frac{n^2p^2}{mn^2} \\
&= \frac{(m-1)n^2p^2 + np(1-p) + n^2p^2}{mn^2} \tag{3.24}
\end{aligned}$$

c. Mencari nilai  $E[\bar{p}^2]$

$$\text{var}[\bar{p}] = E[\bar{p}^2] - (E[\bar{p}])^2 \quad \text{teorema 4}$$

$$\begin{aligned}
E[\bar{p}^2] &= \text{var}[\bar{p}] + (E[\bar{p}])^2 \\
&= \text{var} \left[ \frac{\sum_{j=1}^m D_j}{nm} \right] + \left( E \left[ \frac{\sum_{j=1}^m D_j}{nm} \right] \right)^2 && \text{persamaan 3.15} \\
&= \frac{1}{n^2m^2} \text{var}[\sum_{j=1}^m D_j] + \left( \frac{1}{nm} E[\sum_{j=1}^m D_j] \right)^2 && \text{teorema 1} \\
&= \frac{1}{n^2m^2} \sum_{i=1}^m \text{var}[D_j] + \left( \frac{1}{nm} \sum_{j=1}^m E[D_j] \right)^2 && \text{teorema 1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n^2 m^2} mnp(1-p) + \left(\frac{1}{nm} mnp\right)^2 \\
&= \frac{mnp(1-p)}{n^2 m^2} + \frac{m^2 n^2 p^2}{n^2 m^2} \\
&= \frac{p(1-p)}{nm} + p^2 \\
&= \frac{p(1-p) + nmp^2}{nm} \tag{3.25}
\end{aligned}$$

Substitusi persamaan (3.21), (3.24), dan (3.25), ke persamaan (3.20) diperoleh:

$$\begin{aligned}
\text{var}[(np_k - n\bar{p})] &= n^2(E[p_k^2] - 2E[p_k \bar{p}] + E[\bar{p}^2]) \\
&= n^2 \left( \left( \frac{p(1-p) + nmp^2}{n} \right) - 2 \left( \frac{(m-1)n^2 p^2 + np(1-p) + n^2 p^2}{mn^2} \right) + \right. \\
&\quad \left. \left( \frac{p(1-p) + nmp^2}{nm} \right) \right) \\
&= n^2 \left( \frac{mnp(1-p) + mn^2 p^2 - 2mn^2 p^2 - 2n^2 p^2 + 2np(1-p) + 2n^2 p^2 + np(1-p) + n^2 mp^2}{mn^2} \right) \\
&= \frac{mnp(1-p) + 2mn^2 p^2 - 2mn^2 p^2 - 2n^2 p^2 + 2np(1-p) + 2n^2 p^2 + np(1-p)}{m} \\
&= \frac{mnp(1-p) - np(1-p)}{m} \\
&= \frac{(m-1)np(1-p)}{m} \tag{3.26}
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh simpangan baku sebesar

$$\sigma[(np_k - n\bar{p})] = \sqrt{\frac{(m-1)np(1-p)}{m}} \tag{3.27}$$

Setelah rata-rata dan variansi  $np_k - n\bar{p}$  diperoleh maka akan dibuktikan bahwa  $\mu_{Z_k} = 0$  dan  $\sigma_{Z_k}^2 = 1$  dengan asumsi  $\sqrt{n\bar{p}(1-\bar{p})} = \sqrt{np(1-p)}$  konstan. Berdasarkan persamaan (3.18), maka dapat dicari rata-rata dan variansinya sebagai berikut:

Mencari rata-rata  $Z_k$ 

$$\begin{aligned}
 E[Z_k] &= E\left[\frac{np_k - n\bar{p}}{\sqrt{np(1-p)}}\right] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{np(1-p)}} (E[np_k - n\bar{p}]) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{np(1-p)}} (0) \qquad \text{persamaan 3.19} \\
 &= 0, \text{ terbukti} \qquad \qquad \qquad (3.28)
 \end{aligned}$$

Mencari variansi  $Z_k$ 

$$\begin{aligned}
 var(Z_k) &= var\left(\frac{np_k - n\bar{p}}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \\
 &= \frac{1}{np(1-p)} var[np_k - n\bar{p}] \qquad \text{teorema 1} \\
 &= \frac{1}{np(1-p)} \frac{(m-1)}{m} np(1-p) \qquad \text{persamaan 3.26} \\
 &= \frac{np(1-p)}{np(1-p)} \frac{(m-1)}{m} \\
 &= \frac{(m-1)}{m} \qquad \qquad \qquad (3.29)
 \end{aligned}$$

Jadi,  $Z_k$  mempunyai  $\mu_{Z_k} = 0$  dan  $\sigma_{Z_k}^2 = \frac{(m-1)}{m}$ .

Dalam proses standarisasi ini, data yang digunakan memiliki batas kendali  $UCL = 3$  dan  $LCL = -3$ , akan tetapi pada standarisasi ini belum terbukti bahwa  $\mu_{Z_k} = 0$  dan  $\sigma_{Z_k}^2 = 1$ . Untuk itu perlu adanya aturan penyesuaian, agar

$Z_k \rightarrow \sim NID(0,1)$ . Untuk itu pada langkah ketiga, penulis akan melakukan proses standarisasi untuk proses pendek .

### 3.3 Proses Standarisasi Grafik Kendali $np$ untuk Proses Pendek

Berdasarkan standarisasi grafik kendali  $np$  pada subbab 3.2, telah dijelaskan bahwa penelitian ini menggunakan pendekatan distribusi Normal terhadap distribusi Binomial. Dalam proses pendek ini, karena mengambil pengamatan yang kurang dari standar pembentukan grafik kendali maka Lai K. Chan (1996:89) menyarankan untuk menggunakan standarisasi dengan menambahkan faktor koreksi. Pada penelitian ini, ditekankan analisis peluang statistik yang distandarisasi lebih dari  $UCL$  ( $P(Z_k^* > UCL)$ ) atau kurang dari  $LCL$  ( $P(Z_k^* < LCL)$ ), dengan  $UCL = 3$  dan  $LCL = -3$  dan faktor koreksi yang berbeda-beda. Selain itu, agar rata-rata persamaan standarisasi untuk proses pendek ( $Z_k^*$ ) bernilai 0 dan variansi bernilai 1 maka dari persamaan standarisasi biasa ( $Z_k$ ) dapat dimodifikasi untuk persamaan standarisasi proses pendek dengan menambahkan konstanta  $\sqrt{\frac{m}{(m-1)}}$  dan faktor koreksi. Oleh karena itu, dapat diperoleh sebuah persamaan grafik kendali  $np$  yang distandarisasi untuk proses pendek sebagai berikut:

Untuk proporsi ketidaksesuaian ( $p$ ) diketahui dan ukuran sampel ( $n$ ) sama maka berdasarkan penelitian Lai K. Chan (1996:89) diperoleh bahwa:

$$Z_k^* = \frac{p_k - p - \left(\frac{1,2}{n}\right)}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}, k = 1, 2, 3, \dots, m \quad (3.30)$$

Dari persamaan di atas dapat diturunkan menjadi persamaan standarisasi untuk grafik kendali  $np$  yaitu:

Misalkan ambil  $\frac{c}{n}$  sebagai faktor koreksi, dengan  $c$  adalah konstanta dan  $n$  adalah ukuran sampel. Untuk proporsi ketidaksesuaian ( $p$ ) diketahui dan ukuran sampel ( $n$ ) sama, maka dari persamaan (3.30) dapat diperoleh persamaan grafik kendali  $np$  yang distandarisasi untuk proses pendek ( $Z_k^*$ ) dengan  $p$  diketahui sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 Z_k^* &= \frac{p_k - p - \left(\frac{c}{n}\right) \chi \frac{n}{n}}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \\
 &= \frac{np_k - np - \left(\frac{nc}{n}\right)}{n \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \\
 &= \frac{np_k - np - c}{n^1 n^{-1/2} \sqrt{p(1-p)}} \\
 &= \frac{np_k - np - c}{n^{1-1/2} \sqrt{p(1-p)}} \\
 &= \frac{np_k - np - c}{n^{1/2} \sqrt{p(1-p)}} \\
 &= \frac{np_k - np - c}{\sqrt{n} \sqrt{p(1-p)}} \\
 &= \frac{np_k - np - c}{\sqrt{np(1-p)}}
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

Dalam mencari perumusan proporsi ketidaksesuaian ( $p$ ) tidak diketahui dan ukuran sampel ( $n$ ) sama maka  $p$  akan ditaksir oleh  $\bar{p}$ , untuk mendapatkan persamaan grafik kendali  $np$  yang distandarisasi untuk proses pendek dengan  $p$  tidak diketahui maka persamaan (3.18) dimodifikasi menjadi  $Z_k^\blacksquare$  dengan menambahkan konstanta  $\sqrt{\frac{m}{(m-1)}}$  agar  $\mu_{Z_k^\blacksquare} = 0$  dan  $\sigma_{Z_k^\blacksquare}^2 = 1$  sehingga didapatkan:

$$Z_k^\blacksquare = \sqrt{\frac{m}{(m-1)}} \frac{np_k - n\bar{p}}{\sqrt{n\bar{p}(1-\bar{p})}} \tag{3.32}$$

Setelah diperoleh perumusan standarisasi yang sudah dimodifikasi, maka akan dibuktikan  $\mu_{Z_k^{\blacksquare}} = 0$  dan  $\sigma_{Z_k^{\blacksquare}}^2 = 1$  sebagai berikut:

Rata-rata  $Z_k^{\blacksquare}$

$$E[Z_k^{\blacksquare}] = E\left[\sqrt{\frac{m}{m-1}}Z_k\right]$$

$$E[Z_k^{\blacksquare}] = E\left[\sqrt{\frac{m}{m-1}}\frac{np_k - n\bar{p}}{\sqrt{n\bar{p}(1-\bar{p})}}\right]$$

$$= \sqrt{\frac{m}{m-1}}\left(E\left[\frac{np_k - n\bar{p}}{\sqrt{n\bar{p}(1-\bar{p})}}\right]\right)$$

teorema 1

$$= \sqrt{\frac{m}{m-1}}(0)$$

persamaan 3.29

$$= 0, \text{ terbukti}$$

Variansi  $Z_k^{\blacksquare}$

$$\text{var}(Z_k^{\blacksquare}) = \text{var}\left(\sqrt{\frac{m}{m-1}}Z_k\right)$$

$$\text{var}(Z_k^{\blacksquare}) = \text{var}\left(\sqrt{\frac{m}{m-1}}\frac{np_k - n\bar{p}}{\sqrt{n\bar{p}(1-\bar{p})}}\right)$$

$$= \left(\sqrt{\frac{m}{m-1}}\right)^2 \text{var}\left[\frac{np_k - n\bar{p}}{\sqrt{n\bar{p}(1-\bar{p})}}\right]$$

teorema 1

$$= \frac{m}{m-1} \frac{(m-1)}{m}$$

persamaan 3.29

$$= \frac{m(m-1)}{m(m-1)}$$

$$= 1, \text{ terbukti}$$

Jadi terbukti bahwa  $Z_k^{\blacksquare}$  yang dimodifikasi mempunyai  $\mu_{Z_k^{\blacksquare}} = 0$  dan  $\sigma_{Z_k^{\blacksquare}}^2 = 1$ .

Sehingga berdasarkan persamaan (3.31) dan persamaan (3.32) diperoleh persamaan grafik kendali  $np$  yang distandarisasi untuk proses pendek dengan  $p$  tidak diketahui adalah

$$\begin{aligned}
 Z_k^* &= \sqrt{\frac{m}{(m-1)}} \frac{p_k - \bar{p} - \left(\frac{c}{n}\right)}{\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}} \chi \frac{n}{n} \\
 &= \sqrt{\frac{m}{(m-1)}} \frac{np_k - n\bar{p} - (nc/n)}{n\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}} \\
 &= \sqrt{\frac{m}{(m-1)}} \frac{np_k - n\bar{p} - c}{n^1 n^{-1/2} \sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})}} \\
 &= \sqrt{\frac{m}{(m-1)}} \frac{np_k - n\bar{p} - c}{n^{1-1/2} \sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})}} \\
 &= \sqrt{\frac{m}{(m-1)}} \frac{np_k - n\bar{p} - c}{n^{1/2} \sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})}} \\
 &= \sqrt{\frac{m}{(m-1)}} \frac{np_k - n\bar{p} - c}{\sqrt{n} \sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})}} \\
 &= \sqrt{\frac{m}{(m-1)}} \frac{np_k - n\bar{p} - c}{\sqrt{n\bar{p}(1-\bar{p})}} \tag{3.33}
 \end{aligned}$$

Setelah persamaan diperoleh maka penulis akan melakukan langkah keempat yaitu menganalisis grafik kendali  $np$  yang distandarisasi untuk proses pendek. Dalam analisis ini penulis juga memberikan aplikasi dari persamaan tersebut.

### 3.4 Menganalisis Grafik Kendali $np$ yang Distandarisasi untuk Proses Pendek

#### 3.4.1 Perbandingan Grafik Kendali $np$ yang Distandarisasi

Dalam penelitian ini, penulis juga menganalisis tentang perbandingan peluang statistik grafik kendali  $np$  yang distandarisasi, di mana penulis

membandingkan antara peluang statistik grafik kendali  $np$  yang distandarisasi klasik dan peluang statistik grafik kendali  $np$  yang distandarisasi untuk proses pendek. Hal tersebut bertujuan untuk melihat peluang statistik standarisasi yang mendekati 0,00135. Dalam skripsi ini penulis meneliti 15 ukuran sampel yang berbeda-beda mulai 50 hingga 750. Selain itu, penulis juga meneliti beberapa nilai  $p$  yang berbeda-beda yaitu 0,01; 0,05; dan 0,1. Sedangkan untuk faktor koreksi penulis menggunakan 0,9; 1,1; 1,3; dan 1,5. Misal pilih  $p = 0,05$  dan  $n = 750$  serta faktor koreksi 1,5 maka dapat diperoleh perbandingan sebagai berikut:

Grafik kendali  $np$  yang distandarisasi klasik

$$\begin{aligned}
 P(Z_k > UCL) &= P\left(\frac{np_k - np}{\sqrt{np(1-p)}} > 3\right) \\
 &= P(np_k - np > 3\sqrt{np(1-p)}) \\
 &= P(np_k > np + 3\sqrt{np(1-p)}) \\
 &= P(np_k > 750(0,05) + 3\sqrt{750(0,05)(1-0,05)}) \\
 &= P(np_k > 37,5 + 3\sqrt{37,5(0,95)}) \\
 &= P(np_k > 37,5 + 3\sqrt{(35,625)}) \\
 &= P(np_k > 37,5 + 3(5,968668)) \\
 &= P(np_k > 37,5 + 17,906) \\
 &= P(np_k > 55,406) \\
 &= 1 - P(np_k < 55,406) \\
 &= 0,002204
 \end{aligned}$$

$$P(Z_k < LCL) = P\left(\frac{np_k - np}{\sqrt{np(1-p)}} < -3\right)$$

$$\begin{aligned}
&= P(np_k - np < -3\sqrt{np(1-p)}) \\
&= P(np_k < np - 3\sqrt{np(1-p)}) \\
&= P(np_k < 750(0,05) - 3\sqrt{300(0,05)(1-0,05)}) \\
&= P(np_k < 37,5 - 3\sqrt{37,5(0,95)}) \\
&= P(np_k < 37,5 - 3\sqrt{35,625}) \\
&= P(np_k < 37,5 - 3(5,968668)) \\
&= P(np_k < 37,5 - 17,906) \\
&= P(np_k < 19,494) \\
&= 0,000518
\end{aligned}$$

Grafik kendali  $np$  yang distandarisasi untuk proses pendek

$$\begin{aligned}
P(Z_k^* > UCL) &= P\left(\frac{np_k - np - 1,5}{\sqrt{np(1-p)}} > 3\right) \\
&= P(np_k - np - 1,5 > 3\sqrt{np(1-p)}) \\
&= P(np_k > np + 1,5 + 3\sqrt{np(1-p)}) \\
&= P(np_k > 750(0,05) + 1,5 + 3\sqrt{750(0,05)(1-0,05)}) \\
&= P(np_k > 37,5 + 1,5 + 3\sqrt{37,5(0,95)}) \\
&= P(np_k > 37,5 + 1,5 + 3\sqrt{35,625}) \\
&= P(np_k > 37,5 + 1,5 + 3(5,968668)) \\
&= P(np_k > 37,5 + 1,5 + 17,906) \\
&= P(np_k > 56,906) \\
&= 1 - P(np_k < 56,906) \\
&= 0,001373
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(Z_k^* < LCL) &= P\left(\frac{np_k - np - 1,5}{\sqrt{np(1-p)}} < -3\right) \\
&= P(np_k - np - 1,5 < -3\sqrt{np(1-p)}) \\
&= P(np_k < np + 1,5 - 3\sqrt{np(1-p)}) \\
&= P(np_k < 750(0,05) + 1,5 - 3\sqrt{750(0,05)(1-0,05)}) \\
&= P(np_k < 37,5 + 1,5 - 3\sqrt{37,5(95)}) \\
&= P(np_k < 37,5 + 1,5 - 3\sqrt{35,625}) \\
&= P(np_k < 37,5 + 1,5 - 3(5,968668)) \\
&= P(np_k < 37,5 + 1,5 - 17,906) \\
&= P(np_k < 21,094) \\
&= 0,002009
\end{aligned}$$

Dari contoh di atas penulis membandingkan peluang statistik grafik kendali  $np$  yang distandarisasi klasik dan peluang statistik grafik kendali  $np$  yang distandarisasi untuk proses pendek dengan berbagai macam faktor koreksi, sehingga dapat dianalisis sebagai berikut:

- 1) Setelah diplot,  $P(Z_k > UCL)$  dan  $P(Z_k < LCL)$  jauh dari nilai 0,00135 sedangkan  $P(Z_k^* > UCL)$  dan  $P(Z_k^* < LCL)$  berada disekitar 0,00135.
- 2) Suatu konstanta faktor koreksi yang baik adalah yang menghasilkan nilai  $P(Z_k^* > UCL)$  dan  $P(Z_k^* < LCL)$  yang mendekati 0,00135. Semakin besar konstanta faktor koreksi belum tentu nilai  $P(Z_k^* > UCL)$  dan  $P(Z_k^* < LCL)$  semakin mendekati 0,00135, begitupun semakin kecil

faktor koreksi belum tentu nilai  $P(Z_k^* > UCL)$  dan  $P(Z_k^* < LCL)$  mendekati 0,00135.

Dari analisis di atas, grafik kendali yang baik adalah grafik yang menggunakan faktor koreksi.

### 3.4.2 Aplikasi Grafik Kendali $np$ yang Distandarisasi untuk Proses Pendek

Pada bagian ini, penulis membandingkan tiga grafik kendali yaitu persamaan grafik kendali  $np$ , grafik kendali  $np$  yang distandarisasi klasik dan grafik kendali  $np$  yang distandarisasi untuk proses pendek. Dalam aplikasi ini, penulis memberikan proses yang sama namun diterapkan pada grafik kendali yang berbeda-beda. Selain itu, penulis juga membandingkan peluang statistik grafik kendali  $np$  yang distandarisasi klasik dan peluang statistik grafik kendali  $np$  yang distandarisasi untuk proses pendek. Penelitian ini mengambil data dari proses produksi yang berbeda yakni produksi pertama 10 sampel dan produksi kedua 10 sampel. Sampel tersebut dibuat dalam satu proses dengan tujuan untuk memenuhi standar kecukupan sampel dalam membentuk grafik kendali yakni 20 sampai 30 subgrup. Data dapat dilihat dalam tabel 3.1 yaitu

Tabel 3.1 Data Produksi dari Dua *Run-Proses*

Pengamatan	Ukuran Sampel ( $n$ )	Banyaknya Ketidaksesuaian ( $D_k$ )
Produksi 1		
1	100	20
2	100	25
3	100	35
4	100	10
5	100	30
6	100	5
7	100	45
8	100	20
9	100	10
10	100	10
Produksi 2		
1	100	5
2	100	2
3	100	3
4	100	8
5	100	4
6	100	1
7	100	2
8	100	6
9	100	3
10	100	4

(Sumber: Montgomery, 1990:190 dan 193)

Selanjutnya, data yang telah diperoleh akan diaplikasikan pada persamaan grafik kendali  $np$ , grafik kendali  $np$  yang distandarisasi, dan grafik kendali  $np$  yang distandarisasi untuk proses pendek.

### 1. Grafik kendali $np$

Misal ambil pengamatan ke-2 maka dari persamaan (3.9), (3.10), dan (3.11) diperoleh:

Untuk produksi 1

$$\bar{p} = \frac{\sum_{j=1}^m D_j}{mn} = \frac{210}{(100 \times 10)} = \frac{210}{1000} = 0,21$$

$$UCL = (100 \times 0,21) + 3\sqrt{(100 \times 0,21)(1 - 0,21)} = 33,219$$

$$CL = 100 \times 0,21 = 21$$

$$LCL = 100 \times 0,21 - 3\sqrt{(100 \times 0,21)(1 - 0,21)} = 8,78$$

Untuk produksi 2

$$\bar{p} = \frac{\sum_{j=1}^m D_j}{mn} = \frac{38}{(100 \times 10)} = \frac{38}{1000} = 0,038$$

$$UCL = (100 \times 0,038) + 3\sqrt{(100 \times 0,038)(1 - 0,038)} = 9,535$$

$$CL = 100 \times 0,038 = 3,8$$

$$LCL = 100 \times 0,038 - 3\sqrt{(100 \times 0,038)(1 - 0,038)} = -1,935$$

Tabel 3.2 Perhitungan Grafik Kendali  $np$

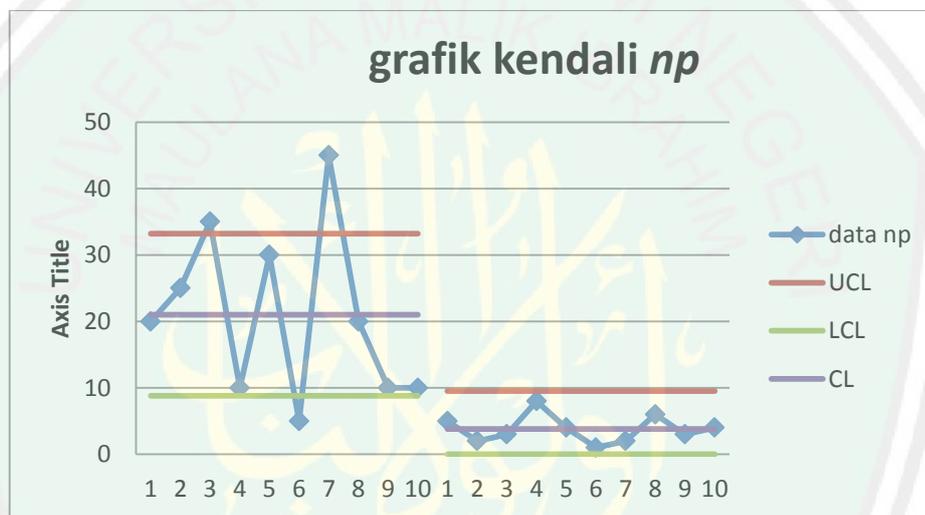
No	Ukuran sampel ( $n$ )	Banyaknya ketidaksesuaian ( $D_k$ )	Proporsi ketidaksesuaian ( $p_k$ )	Batas Atas (UCL)	Batas Pusat (CL)	Batas Bawah (LCL)
Produksi 1						
1	100	20	0,2	33,219	21	8,78
2	100	25	0,25	33,219	21	8,78
3	100	35	0,35	33,219	21	8,78
4	100	10	0,1	33,219	21	8,78
5	100	30	0,3	33,219	21	8,78
6	100	5	0,05	33,219	21	8,78
7	100	45	0,45	33,219	21	8,78
8	100	20	0,2	33,219	21	8,78
9	100	10	0,1	33,219	21	8,78
10	100	10	0,1	33,219	21	8,78
Produksi 2						
1	100	5	0,05	9,535	3,8	0
2	100	2	0,02	9,535	3,8	0
3	100	3	0,03	9,535	3,8	0
4	100	8	0,08	9,535	3,8	0
5	100	4	0,04	9,535	3,8	0
6	100	1	0,01	9,535	3,8	0
7	100	2	0,02	9,535	3,8	0
8	100	6	0,06	9,535	3,8	0
9	100	3	0,03	9,535	3,8	0
10	100	4	0,04	9,535	3,8	0

Berdasarkan tabel 3.2 maka akan dibuat grafik kendali  $np$  seperti gambar 3.1.

Pada gambar 3.1 dapat dilihat bahwa masing-masing proses produksi memiliki

batas atas, garis tengah dan batas bawah sendiri-sendiri. Untuk produksi pertama nilai yang keluar dari batas kendali ada 3 sampel sehingga yang terkendali hanya 7 sampel, namun pada produksi yang kedua semua nilai data terkendali. Hal tersebut akan sulit untuk dianalisis secara umum, oleh karena itu perlu dilakukan standarisasi.

Hasil dari perhitungan pada tabel 3.2 kemudian diplot sehingga diperoleh:



Gambar 3.1 Grafik Kendali  $np$

## 2. Grafik kendali $np$ yang Distandarisasi

Misal ambil pengamatan ke-2 maka dari persamaan (3.16) didapatkan:

Untuk produksi 1

$$\bar{p} = \frac{\sum_{j=1}^m D_j}{mn} = \frac{210}{(100 \times 10)} = \frac{210}{1000} = 0,21$$

$$Z_2 = \frac{n\hat{p}_2 - n\bar{p}}{\sqrt{n\bar{p}(1-\bar{p})}}$$

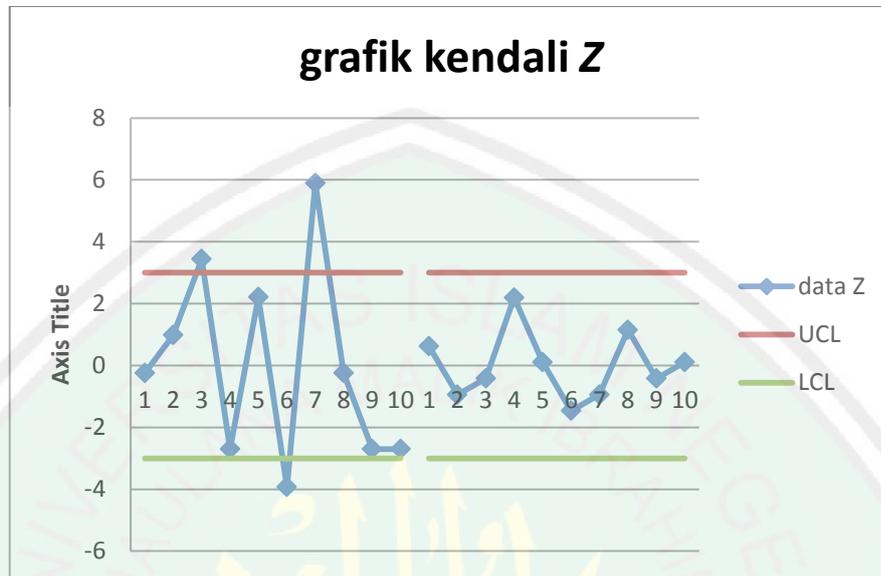
$$Z_2 = \frac{((100 \times 0,25) - (100 \times 0,21))}{\sqrt{(100 \times 0,21)(1 - 0,21)}} = 0,982$$

Tabel 3.3 Perhitungan Grafik Kendali  $np$  yang Distandarisasi

No	Ukuran Sampel ( $n_k$ )	Banyaknya Ketidaksesuaian ( $D_k$ )	Proporsi Ketidaksesuaian ( $p_k$ )	Standarisasi ( $Z_k$ )	Batas Atas (BA)	Batas Bawah (BB)
Produksi 1						
1	100	20	0,2	-0,245	3	-3
2	100	25	0,25	0,982	3	-3
3	100	35	0,35	3,437	3	-3
4	100	10	0,1	-2,7	3	-3
5	100	30	0,3	2,209	3	-3
6	100	5	0,05	-3,928	3	-3
7	100	45	0,45	5,892	3	-3
8	100	20	0,2	-0,245	3	-3
9	100	10	0,1	-2,7	3	-3
10	100	10	0,1	-2,7	3	-3
Produksi 2						
1	100	5	0,05	0,627	3	-3
2	100	2	0,02	-0,941	3	-3
3	100	3	0,03	-0,418	3	-3
4	100	8	0,08	2,196	3	-3
5	100	4	0,04	0,104	3	-3
6	100	1	0,01	-1,464	3	-3
7	100	2	0,02	-0,941	3	-3
8	100	6	0,06	1,150	3	-3
9	100	3	0,03	-0,418	3	-3
10	100	4	0,04	0,104	3	-3

Berdasarkan tabel 3.3 maka akan dibuat grafik kendali  $np$  yang distandarisasi seperti pada gambar 3.2. Pada gambar tersebut dapat diamati bahwa data terkendali dalam grafik kendali. Namun pada data 3 dan 7 berada di luar garis kendali batas atas dan untuk data ke 6 berada di luar batas kendali bawah sehingga dari 20 data yang terkontrol hanya 17 data.

Hasil perhitungan pada tabel 3.3 kemudian diplot seperti pada gambar berikut ini:



Gambar 3.2 Grafik kendali  $np$  yang Distandarisasi

### 3. Grafik kendali $np$ yang Distandarisasi untuk Proses Pendek

Misal ambil pengamatan ke-2 dan ambil faktor koreksi sebesar 1,5 sesuai persamaan (3.33) diperoleh:

$$\bar{p} = \frac{\sum_{j=1}^m D_j}{mn} = \frac{210}{(100 \times 10)} = \frac{210}{1000} = 0,21$$

$$Z_2^* = \sqrt{\frac{2}{1}} \frac{n\hat{p}_2 - n\bar{p} - c}{\sqrt{n\bar{p}(1-\bar{p})}}$$

$$Z_2^* = \sqrt{\frac{2}{1}} \frac{((100 \times 0,25) - (100 \times 0,21) - 1,5)}{\sqrt{(100 \times 0,21)(1 - 0,21)}} = 0,868$$

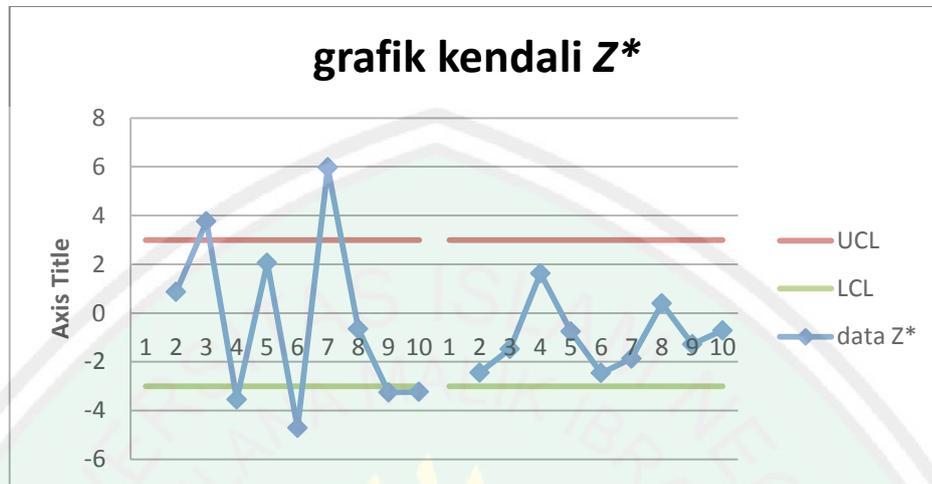
Dengan cara yang sama maka dapat diperoleh hasil perhitungan seperti tabel di bawah ini.

Tabel 3.4 Perhitungan Grafik Kendali  $np$  yang Distandarisasi untuk Proses Pendek

no	n	$D_k$	$p_k$	m	$Z_k^*$	BA	BB
Produksi 1							
1	100	20	0,2	1		3	-3
2	100	25	0,25	2	0,868	3	-3
3	100	35	0,35	3	3,758	3	-3
4	100	10	0,1	4	-3,543	3	-3
5	100	30	0,3	5	2,058	3	-3
6	100	5	0,05	6	-4,706	3	-3
7	100	45	0,45	7	5,966	3	-3
8	100	20	0,2	8	-0,656	3	-3
9	100	10	0,1	9	-3,255	3	-3
10	100	10	0,1	10	-3,234	3	-3
Produksi 2							
1	100	5	0,05	1		3	-3
2	100	2	0,02	2	-2,440	3	-3
3	100	3	0,03	3	-1,473	3	-3
4	100	8	0,08	4	1,630	3	-3
5	100	4	0,04	5	-0,760	3	-3
6	100	1	0,01	6	-2,463	3	-3
7	100	2	0,02	7	-1,864	3	-3
8	100	6	0,06	8	0,391	3	-3
9	100	3	0,03	9	-1,275	3	-3
10	100	4	0,04	10	-0,716	3	-3

Berdasarkan tabel 3.4 dapat dibentuk grafik kendali  $np$  yang distandarisasi untuk proses pendek seperti pada gambar 3.3. Dari gambar tersebut maka dapat dilihat bahwa dari 18 data, 12 data berada pada grafik kendali dan untuk data ke 3 dan ke 7 berada di luar batas atas kendali dan data ke 4, 6, 9 dan 10 berada di luar batas bawah kendali.

Hasil dari tabel 3.4 kemudian diplot, dan hasilnya sebagai berikut



Gambar 3.3 Grafik Kendali  $np$  yang Distandarisasi untuk Proses Pendek

Dengan proses yang sama maka dapat dilihat bahwasanya grafik kendali  $np$  yang distandarisasi untuk proses pendek dapat mendeteksi data dengan baik. Hal tersebut menunjukkan bahwa suatu proses yang kurang baik dideteksi dengan grafik kendali yang baik maka hasilnya akan baik.

Dengan membandingkan tiga grafik kendali, hasil aplikasi menunjukkan bahwa grafik kendali yang dapat mendeteksi data-data yang keluar dari batas kendali terbanyak merupakan grafik kendali yang berkualitas. Dalam hal ini, grafik kendali yang berkualitas adalah grafik kendali dengan proses pendek. hal tersebut menunjukkan bahwa waktu yang relatif singkat dapat menghasilkan hasil yang layak untuk dipasarkan, karena pada dasarnya Allah SWT berfirman dalam Al-Qur'an surat An-Naml:88 yang berbunyi:

... صُنِعَ اللَّهُ الَّذِي أَتَقَنَ كُلَّ شَيْءٍ ...

Artinya: "Ciptaan Allah yang telah berlaku baik (profesioanl) dalam segala sesuatu" (Qs. An-Naml:88).

Ayat di atas menunjukkan bahwa Allah SWT menciptakan sesuatu dengan baik (profesional), dalam ayat ini diibaratkan sebuah gunung-gunung yang diciptakan dengan kokoh (baik) seperti halnya manusia diciptakan Allah SWT dengan sempurna karena memiliki akal pikiran yang dapat menunjukkan sifat profesional yang berarti memiliki potensi dan kualitas yang baik.

Dalam dunia industri, terdapat persaingan ketat antara perusahaan yang satu dengan yang lain. Untuk mengantisipasi hal tersebut maka suatu perusahaan dituntut untuk dapat menjaga kualitas produk. Agar memenuhi tuntutan yang diinginkan maka suatu perusahaan harus memperhatikan sistem kerja baik SDM maupun alat yang digunakan dalam proses produksi, di mana hal tersebut akan mempengaruhi kualitas produk yang dihasilkan. Oleh karena itu, sebelum suatu produk dipasarkan, maka suatu perusahaan harus melakukan pemeriksaan terlebih dahulu untuk mengetahui barang yang akan dipasarkan sesuai dengan standar kualitas yang ditentukan atau tidak. Hal tersebut dijelaskan dalam surat Al-Hasyr ayat 18 yang berbunyi:

يٰۤاَيُّهَا الَّذِيْنَ ءَامَنُوْا اتَّقُوا اللّٰهَ وَلْتَنْظُرْ نَفْسٌ مَّا قَدَّمَتْ لِغَدٍ وَّاتَّقُوا اللّٰهَ ۗ اِنَّ اللّٰهَ  
خَبِيْرٌۢ بِمَا تَعْمَلُوْنَ ﴿١٨﴾

*Artinya: "Hai orang-orang yang beriman, bertakwalah kepada Allah dan hendaklah Setiap diri memperhatikan apa yang telah diperbuatnya untuk hari esok (akhirat); dan bertakwalah kepada Allah, Sesungguhnya Allah Maha mengetahui apa yang kamu kerjakan" (Qs. Al-Hasyr :18).*

Ayat di atas dipertegas oleh sabda nabi Muhammad SAW yang berbunyi:

حاسبوا انفسكم قبل ان تحاسبوا

*Artinya: "Periksalah dirimu sebelum dirimu diperiksa"*

Ayat dan hadits di atas menjelaskan bahwa manusia diperintahkan untuk introspeksi diri dari segala sesuatu yang diperbuat, di mana manusia juga harus merencanakan yang terbaik untuk masa depan. Seperti halnya dalam suatu perusahaan, agar tetap mempertahankan kualitas produksinya maka hasil produksi harus diperiksa secara terperinci, di mana hal tersebut akan mempengaruhi pemasaran produksi yang akan datang. Jika kualitas produk terjamin maka konsumen merasa puas dan produksi akan meningkat sehingga perusahaan akan terus berkembang.



## BAB IV PENUTUP

### 4.1 Kesimpulan

Berdasarkan dari penjelasan pada bab-bab sebelumnya maka dapat disimpulkan bahwa grafik kendali  $np$  yang distandarisasi untuk proses pendek merupakan modifikasi dari grafik kendali  $np$  yang distandarisasi klasik yaitu

- a. Ketika  $p$  diketahui dan  $n$  sama maka persamaan grafik kendali yang distandarisasi klasik ditambah faktor koreksi.
- b. Ketika  $p$  tidak diketahui dan  $n$  sama maka persamaan grafik kendali yang distandarisasi klasik ditambah dengan faktor koreksi dan konstanta  $\sqrt{\frac{m}{(m-1)}}$ .

Penyesuaian tersebut dilakukan agar peluang statistik standarisasi untuk proses pendek mendekati 0,00135. Peluang statistik standarisasi lebih dari batas atas atau kurang dari batas bawah grafik kendali  $np$  untuk proses pendek dipengaruhi oleh besarnya proporsi ketidaksesuaian ( $p$ ) yang ditentukan, ukuran sampel ( $n$ ) dan faktor koreksi yang berbeda-beda. Terakhir, berdasarkan aplikasi dari sebuah data dari proses yang sama, maka grafik kendali  $np$  untuk proses pendek dapat mendeteksi data dengan baik dibandingkan dengan grafik kendali yang lain.

### 4.2 Saran

Penelitian ini, masih dapat dikembangkan sehingga disarankan untuk penelitian selanjutnya agar menggunakan ukuran sampel yang berbeda-beda yang diterapkan dalam grafik kendali  $u$  atau grafik kendali  $c$ .

## DAFTAR PUSTAKA

- Ariani, Dorothea Wahyu. 2004. *Pengendalian Kualitas Statistik (Pendekatan Kuantitatif dalam Menejemen Kualitas)*. Yogyakarta: Andi
- Abdussakir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press
- Abdullah. 2006. *Tafsir Ibnu Katsir Jilid 8*. Jakarta: Pustaka Imam Asy-Syafi'i
- Rofikoh, Binti. 2007. Kajian Grafik Kendali Individual dan Analisis Kemampuan Proses Statistik Berdistribusi Gamma. *Skripsi* tidak diterbitkan. Malang. Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
- Djawanto dan Subagyo, Pangestu. 1996. *Statistik Induktif*. Yogyakarta: BPFE
- Dudewicz, Edward J dan Mishra, Satya N. 1995. *Statistik Matematika Modern*. Bandung: ITB
- Grant, Eugene L. dan Leavenworth, Richard S. 1989. *Pengendalian Mutu Statistik*. Jakarta: Erlangga
- Hasan, M. Iqbal. 2005. *Pokok-Pokok Materi Statistik 2*. Jakarta: Bumi Aksara
- Hogg, Robert V, dkk. 2005. *Introduction to Mathematical Statistics*. London: Pearson Prentice Hall
- Hutahaean, Leithold, dkk. 1993. *Kalkulus dan Ilmu Ukur Analitik*. Jakarta: Erlangga
- Chan, Lai. K., 1995. Standardized  $p$  Control Charts for Short Runs. *International Journal of Quality and Reliability Management*. Vol. 13. No. 6. Hal: 88-95
- Montgomery, Douglas C. 1990, *Pengantar Pengendalian Kualitas Stastistik*. Yogyakarta: Gadjah Mada University Press
- Montgomery, Douglas C. 1991. *Introduction to Statistical Quality Control*. Singapore: John Wiley dan Sons
- Octavia,Tanti, dkk. 2000, Studi Tentang Peta Kendali  $p$  Yang Distandarisasi untuk Proses Pendek Kualitas. *Jurnal Teknik Industri*. Vol. 2. No. 1. Hal: 53-64
- Turmudi dan Harini, Sri. 2008. *Metode Statistik (Pendekatan Teoritis dan Aplikatif)*. Malang: UIN Malang Press

Walpole, Ronald E. 1995. *Pengantar Statistik*. Jakarta: PT Gramedia Pustaka Utama

Walpole, Ronald E. dan Myers, Raymond H. 1995. *Ilmu Peluang dan Statistika untuk Insinyur dan Ilmuwan Edisi Keempat*. Bandung: Institut Teknologi Bandung



## LAMPIRAN

### Lampiran 1. Perhitungan Grafik Kendali $np$ yang Distandarisasi

n/p		0,01		0,05		0,1	
		$P(Z_k > UCL)$	$P(Z_k < LCL)$	$P(Z_k > UCL)$	$P(Z_k < LCL)$	$P(Z_k > UCL)$	$P(Z_k < LCL)$
50	$Z_k$	0,013817	0	0,003188	0	0,00322	0
100	$Z_k$	0,018374	0	0,004274	0	0,001979	0
150	$Z_k$	0,004211	0	0,003603	0	0,001924	0
200	$Z_k$	0,004296	0	0,002665	0	0,002916	0
250	$Z_k$	0,004025	0	0,003892	0	0,002053	0,000353
300	$Z_k$	0,003603	0	0,002569	0	0,002416	0,000567
350	$Z_k$	0,003137	0	0,003212	0	0,002637	0,000746
400	$Z_k$	0,007804	0	0,002069	0	0,001715	0,000878
450	$Z_k$	0,006384	0	0,002409	0,000323	0,001769	0,000507
500	$Z_k$	0,005208	0	0,002701	0,00046	0,001774	0,000552
550	$Z_k$	0,004241	0	0,002943	0,000598	0,001743	0,000576
600	$Z_k$	0,003449	0	0,001888	0,000314	0,001686	0,000583
650	$Z_k$	0,002802	0	0,002018	0,000387	0,002355	0,000962
700	$Z_k$	0,005471	0	0,002123	0,000455	0,002204	0,000916
750	$Z_k$	0,004398	0	0,002204	0,000518	0,00205	0,000863

### Lampiran 2. Untuk $p$ diketahui dan $n$ sama dan faktor koreksi 0,9

n/p		0,01		0,05		0,1	
		$P(Z_k^* > UCL)$	$P(Z_k^* < LCL)$	$P(Z_k^* > UCL)$	$P(Z_k^* < LCL)$	$P(Z_k^* > UCL)$	$P(Z_k^* < LCL)$
50	$Z_k^*$	0,001596	0	0,000756	0	0,001005	0
100	$Z_k^*$	0,003432	0	0,001464	0	0,001979	0
150	$Z_k^*$	0,000848	0	0,001439	0	0,001924	0
200	$Z_k^*$	0,001013	0	0,00116	0	0,001537	0,001388
250	$Z_k^*$	0,001057	0	0,001867	0	0,001131	0,000907
300	$Z_k^*$	0,001023	0	0,001274	0	0,001406	0,001267
350	$Z_k^*$	0,003137	0	0,001686	0,001199	0,001598	0,001524
400	$Z_k^*$	0,002683	0	0,002069	0,00062	0,001715	0,000878
450	$Z_k^*$	0,002268	0	0,001335	0,000886	0,001769	0,000961
500	$Z_k^*$	0,0019	0	0,001546	0,001144	0,001144	0,001003
550	$Z_k^*$	0,001583	0	0,00173	0,001379	0,001145	0,001011
600	$Z_k^*$	0,001313	0	0,001888	0,00073	0,001686	0,000995
650	$Z_k^*$	0,001085	0	0,001214	0,00085	0,001611	0,000962
700	$Z_k^*$	0,002276	0	0,001301	0,000955	0,001524	0,001467
750	$Z_k^*$	0,001848	0	0,001373	0,001045	0,001431	0,001361

Lampiran 3. Untuk  $p$  diketahui dan  $n$  sama dan faktor koreksi 1,1

n/p		0,01		0,05		0,1	
		$P(Z_k^* > UCL)$	$P(Z_k^* < LCL)$	$P(Z_k^* > UCL)$	$P(Z_k^* < LCL)$	$P(Z_k^* > UCL)$	$P(Z_k^* < LCL)$
50	$Z_k^*$	0,001596	0	0,000756	0	0,001005	0
100	$Z_k^*$	0,000535	0	0,001464	0	0,000808	0
150	$Z_k^*$	0,000848	0	0,001439	0	0,000907	0,001919
200	$Z_k^*$	0,001013	0	0,00116	0	0,001537	0,001388
250	$Z_k^*$	0,001057	0	0,001867	0	0,001131	0,000907
300	$Z_k^*$	0,001023	0	0,001274	0	0,001406	0,001267
350	$Z_k^*$	0,000946	0	0,001686	0,001199	0,001598	0,001524
400	$Z_k^*$	0,000849	0	0,001103	0,001716	0,001053	0,00168
450	$Z_k^*$	0,002268	0	0,001335	0,000886	0,001116	0,001753
500	$Z_k^*$	0,0019	0	0,001546	0,001144	0,001144	0,001003
550	$Z_k^*$	0,001583	0	0,00173	0,001379	0,001145	0,001011
600	$Z_k^*$	0,001313	0	0,001112	0,001585	0,001124	0,001656
650	$Z_k^*$	0,001085	0	0,001214	0,00085	0,001089	0,001568
700	$Z_k^*$	0,002276	0	0,001301	0,000955	0,001524	0,001467
750	$Z_k^*$	0,001848	0	0,001373	0,001045	0,001431	0,001361

Lampiran 4. Untuk  $p$  diketahui dan  $n$  sama dan faktor koreksi 1,3

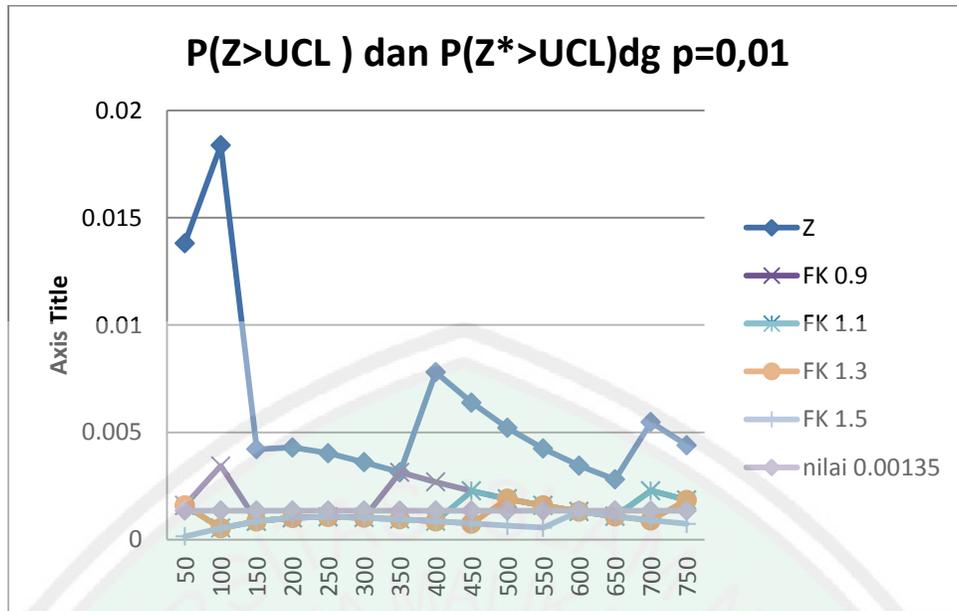
n/p		0,01		0,05		0,1	
		$P(Z_k^* > UCL)$	$P(Z_k^* < LCL)$	$P(Z_k^* > UCL)$	$P(Z_k^* < LCL)$	$P(Z_k^* > UCL)$	$P(Z_k^* < LCL)$
50	$Z_k^*$	0,001596	0	0,000756	0	0,001005	0
100	$Z_k^*$	0,000535	0	0,001464	0	0,000808	0
150	$Z_k^*$	0,000848	0	0,001439	0	0,000907	0,001919
200	$Z_k^*$	0,001013	0	0,00116	0	0,000784	0,001388
250	$Z_k^*$	0,001057	0	0,000859	0	0,001131	0,002132
300	$Z_k^*$	0,001023	0	0,001274	0,000691	0,001406	0,001267
350	$Z_k^*$	0,000946	0	0,000857	0,001199	0,000949	0,001524
400	$Z_k^*$	0,000849	0	0,001103	0,001716	0,001053	0,00168
450	$Z_k^*$	0,000746	0	0,001335	0,000886	0,001116	0,001753
500	$Z_k^*$	0,0019	0	0,001546	0,001144	0,001144	0,001762
550	$Z_k^*$	0,001583	0	0,000994	0,001379	0,001145	0,001725
600	$Z_k^*$	0,001313	0	0,001112	0,001585	0,001124	0,001656
650	$Z_k^*$	0,001085	0	0,001214	0,001758	0,001089	0,001568
700	$Z_k^*$	0,000894	0	0,001301	0,001899	0,001042	0,001467
750	$Z_k^*$	0,001848	0	0,001373	0,001045	0,001431	0,001361

Lampiran 5. Untuk  $p$  diketahui dan  $n$  sama dan faktor koreksi 1,5

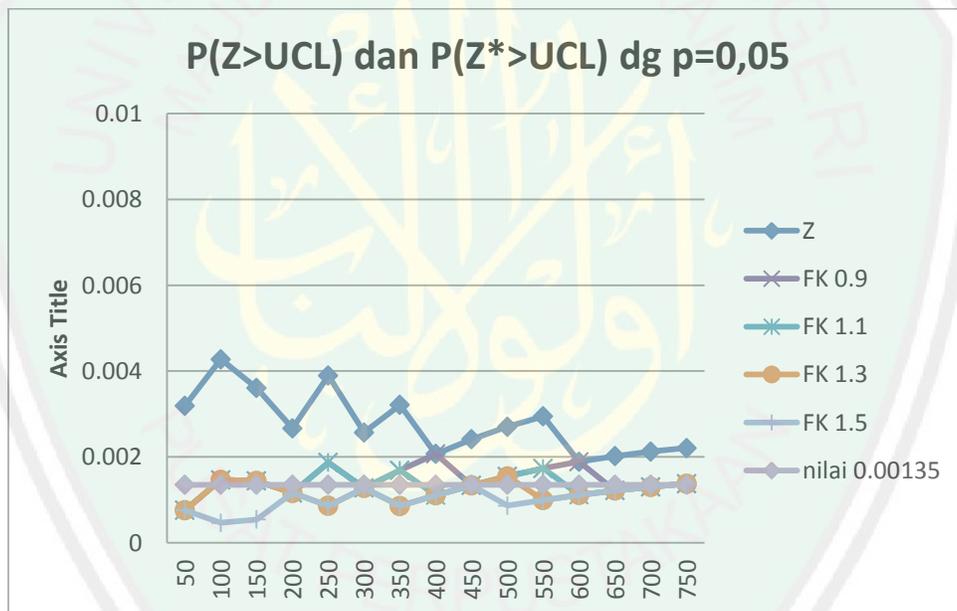
n/p		0,01		0,05		0,1	
		$P(Z_k^* > UCL)$	$P(Z_k^* < LCL)$	$P(Z_k^* > UCL)$	$P(Z_k^* < LCL)$	$P(Z_k^* > UCL)$	$P(Z_k^* < LCL)$
50	$Z_k^*$	0,000145689	0	0,000756	0	0,001005	0
100	$Z_k^*$	0,000534534	0	0,000463	0	0,000808	0
150	$Z_k^*$	0,00084834	0	0,000541	0	0,000907	0,001919
200	$Z_k^*$	0,001012557	0	0,00116	0	0,000784	0,001388
250	$Z_k^*$	0,001056532	0	0,000859	0	0,001131	0,002132
300	$Z_k^*$	0,001023095	0	0,001274	0,002332	0,0008	0,001267
350	$Z_k^*$	0,000946311	0	0,000857	0,001199	0,000949	0,001524
400	$Z_k^*$	0,000849285	0	0,001103	0,001716	0,001053	0,00168
450	$Z_k^*$	0,000746473	0	0,001335	0,002194	0,001116	0,001753
500	$Z_k^*$	0,000646348	0	0,000863	0,001144	0,001144	0,001762
550	$Z_k^*$	0,000553475	0	0,000994	0,001379	0,001145	0,001725
600	$Z_k^*$	0,001312795	0	0,001112	0,001585	0,001124	0,001656
650	$Z_k^*$	0,001084942	0	0,001214	0,001758	0,001089	0,001568
700	$Z_k^*$	0,000894303	0	0,001301	0,001899	0,001042	0,001467
750	$Z_k^*$	0,000735673	0	0,001373	0,002009	0,000989	0,001361



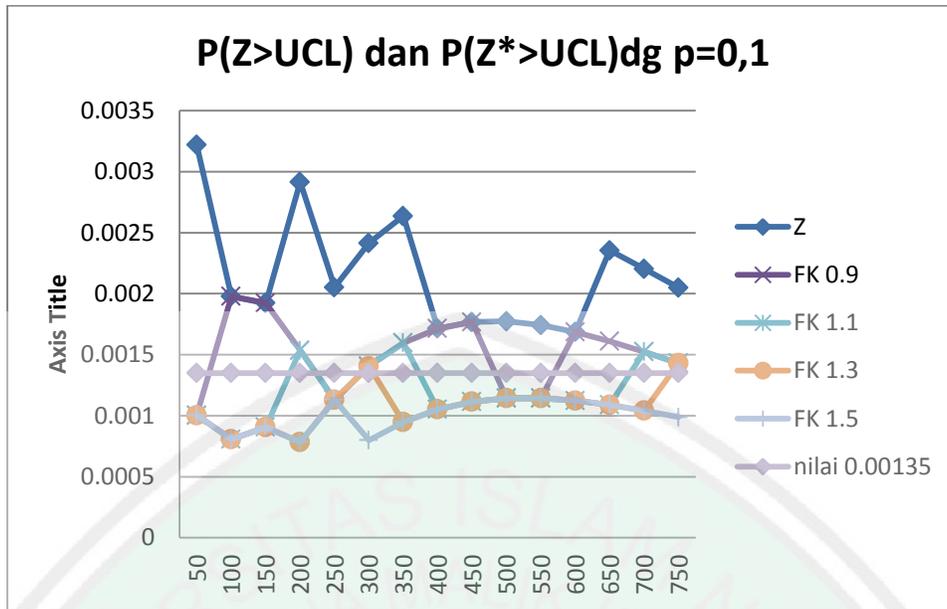
Lampiran 6. Gambar Peluang Statistik Grafik Kendali  $np$  yang Distandarisasi



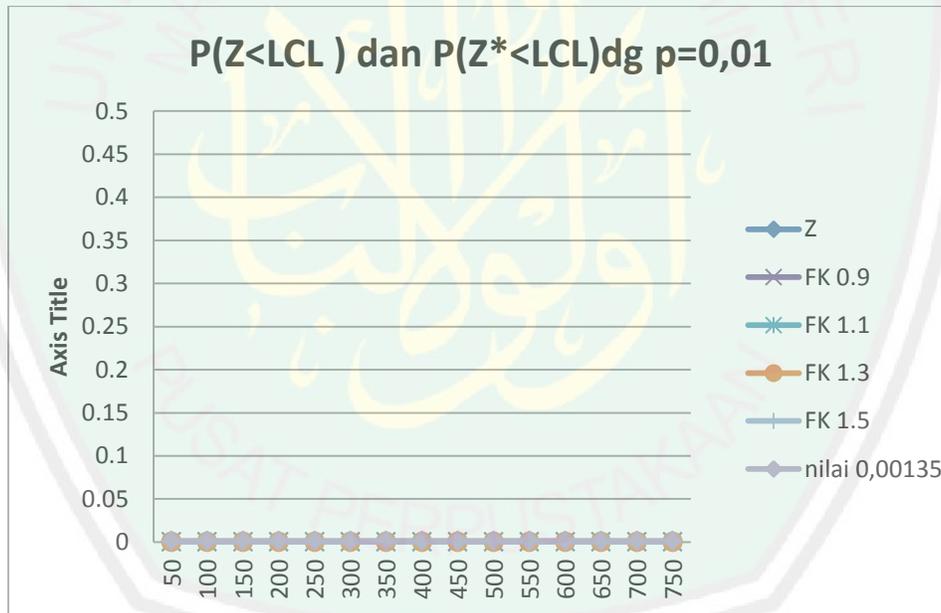
Gambar 1.  $P(Z > UCL)$  dan  $P(Z_k^* > UCL)$  dg  $p = 0,01$



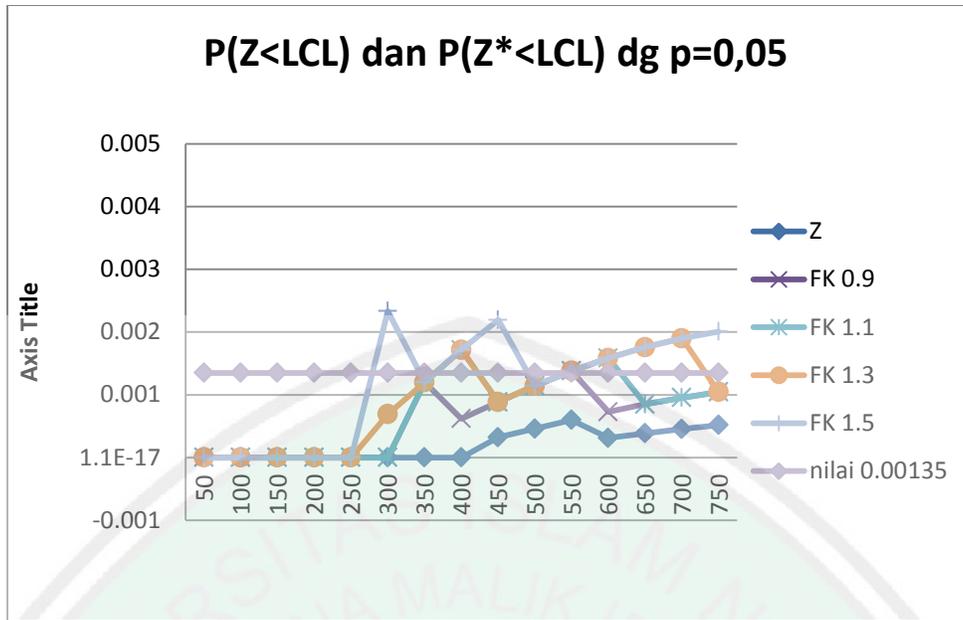
Gambar 2.  $P(Z > UCL)$  dan  $P(Z_k^* > UCL)$  dg  $p = 0,05$



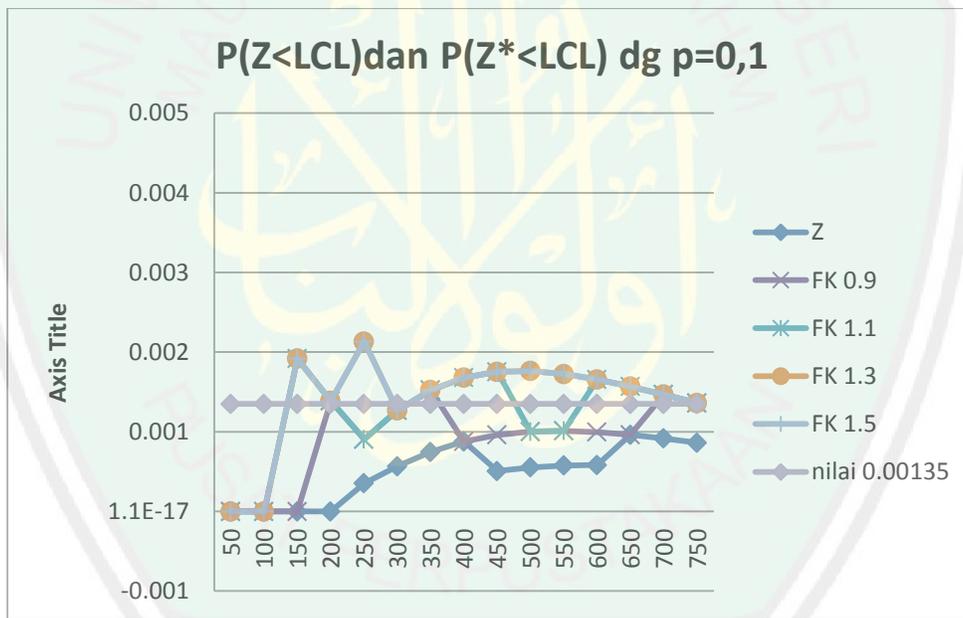
Gambar 3.  $P(Z > UCL)$  dan  $P(Z_k^* > UCL)$  dg  $p = 0,1$



Gambar 4.  $P(Z < LCL)$  dan  $P(Z_k^* < LCL)$  dg  $p = 0,01$



Gambar 5.  $P(Z < LCL)$  dan  $P(Z_k^* < LCL)$  dg  $p = 0,05$



Gambar 6.  $P(Z < LCL)$  dan  $P(Z_k^* < LCL)$  dg  $p = 0,1$