ANALISIS KAUSALITAS DAN INVERTABILITAS MODEL ARIMA (p, d, q) MUSIMAN

SKRIPSI

Oleh:
AMILATUZ ZAKIYAH
NIM. 08610009

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG

2012

ANALISIS KAUSALITAS DAN INVERTABILITAS MODEL ARIMA (p, d, q) MUSIMAN

SKRIPSI

Diajukan kepada:
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
AMILATUZ ZAKIYAH
NIM. 08610009

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2012

ANALISIS KAUSALITAS DAN INVERTABILITAS MODEL ARIMA (p, d, q) MUSIMAN

SKRIPSI

Oleh:
AMILATUZ ZAKIYAH
NIM. 08610009

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal: 8 September 2012

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Dr. Sri Harini, M.Si	Fachrur Rozi, M.Si
NIP. 19731014 200112 2 002	NIP. 19800527 200801 1 012

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

ANALISIS KAUSALITAS DAN INVERTABILITAS MODEL ARIMA $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{q})$ MUSIMAN

SKRIPSI

Oleh:
AMILATUZ ZAKIYAH
NIM. 08610009

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal: 8 September 2012

Penguji Utama	: Abdul Aziz, M.Si NIP. 19760318 200604 1 002	____________________
Ketua Penguji	: Drs. H. Turmudi M.Si NIP. 19571005 198203 1 006	____________________
Sekretaris Penguji	: Dr. Sri Harini, M.Si NIP. 19731014 200112 2 002	____________________
Anggota Penguji	: Fachrur Rozi, M.Si NIP. 19800527 200801 1 012	____________________

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Amilatuz Zakiyah

NIM : 08610009

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka.

Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 15 Agustus 2012

Yang membuat pernyataan,

Amilatuz Zakiyah

NIM. 08610009

MOTTO

وَقَالَ رَبُّكُمُ ٱدْعُونِيٓ أَسْتَجِبْ لَكُمْ...

Berdo'alah kepada-Ku niscaya akan Aku kabulkan permintaanmu…
(Q.S Al-Mukmin [40]: 60)

لِّكَيْلَا تَأْسَوْاْ عَلَىٰ مَا فَاتَكُمْ وَلَا تَفْرَحُواْ بِمَآ ءَاتَىٰكُمْ ۗ وَٱللَّهُ لَا يُحِبُّ كُلَّ مُخْتَالٍ فَخُورٍ ٢٣

Jangan berduka cita terhadap apa yang luput dari kamu, dan jangan terlalu gembira terhadap apa yang diberikan-Nya kepadamu, dan Allah tidak menyukai setiap orang yang sombong lagi membanggakan diri.
(Q.S Al-Hadid [57]: 23)

(Berdo'a & Tersenyumlah)

PERSEMBAHAN

Karya ini penulis persembahkan kepada
Kedua Orang Tua
yang Begitu Berarti dalam Hidup Penulis

Ibu Tercinta (Kholifah) dan Ayah Tersayang (Rochman)

""

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Alhamdulillahirobbil'alamin, pujisyukursenantiasapenulispanjatkankehadirat Allah SWT, atasnikmatyang selaludicurahkansehinggapenulisdapatmenyelesaikanskripsiinitepatpadawaktunya.Shalawat serta salam semoga tetap tercurahkepadaNabi Muhammad SAW sebagaiteladanuntukbekalhidupbahagiaduniaakhirat.

Dalampenulisanskripsiinibanyakpihak yang telahmembantu.Oleh karena itu, dengan penuh ketulusan dari lubuk hati yang paling dalam, penulis sampaikan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selakuRektorUniversitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU., D.Sc, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir M.Pd, selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dr. Sri Harini, M.Si dan Fachrur Rozi, M.Si selaku dosen pembimbing skripsi, yang telah meluangkan waktunya, dengan kesabaran memberikan bimbingan, kritik dan saran dalam penulisan skripsi ini.
5. Abdul Aziz, M.Si dan Drs. H. Turmudi, M.Si selaku dewan penguji skripsi.
6. H. WahyuHenkyIrawan, M.Pdsebagaidosenwali.

7. Seluruh Dosen Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang, yang telah mendidik, membimbing, mengajarkan, dan mencurahkan ilmu-ilmunya kepada penulis. Semoga selalu disayangi Allah SWT.
8. Ibudan Ayah yangsenantiasamendo'akandanmeridhoisehingga Allah ridho.
9. Ustadzdanustadzah yang mengajarimengajidanmemberimotivasiuntukmencariilmudenganikhlaskarena Allah.
10. Ardini Windy Noviyanti yang memberikansemangatdanmotivasi.
11. Teman-teman MSAA, Mukhlis Zulfa, Nurhidayati, Dewi Ismiatun Naimah, Nurul Qomariyah, Romlah, Ulfa Masfufah, yang memberikan pengalaman berharga dan kenangan yang indah.
12. Teman-teman mahasiswa Jurusan Matematika 2008, Iesyah Rodliyah, Alfiatin arif, Yeni Rahmawati, Ida Putri, Fuad Adi Saputra, terima kasih atas segala kebaikan saat menuntut ilmu bersama.
13. Semua pihak yang tidak penulissebut satu persatu, terimakasihatas keikhlasan bantuan moril dan spritual yang sudahdiberikankepadapenulis.

Penulis menyadari bahwa dalam penyusunan skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan. Oleh karena itu,penulis meminta maaf dan mengharapkan kritik serta saran yang konstruktif dari para pembaca yang budiman demi perbaikan dan kebaikan karya ilmiah ini.

Akhirnya, penulis berharap semoga karya ilmiah yang berbentuk skripsi ini dapat bermanfaat dan berguna, khususnya bagi penulis secara pribadi. *Amin yaRobbal 'Alamiiin…*

Wassalamu'alaikumWarahmatullahi Wabarakatuh

Malang, September 2012

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR SIMBOL

Simbol		Keterangan
ϕ	:	parameter model *Autoregressive* (AR) tidak musiman
θ	:	parameter model *Moving Average* (MA)tidak musiman
Φ	:	parameter model *Autoregressive* (AR) musiman
Θ	:	parameter modelMoving Average (MA)musiman
B	:	*backward shift operator* (operator shift mundur).
μ	:	rata-rata (*mean*)
μ'	:	konstanta model ARIMA
$\sigma^2 = \gamma_0$	:	varian
γ_k	:	autokovarian
ρ_k	:	autokorelasi (ACF)
ϕ_{kk}	:	autokorelasiparsial (PACF)
AR: p	:	orde dari model *autoregressive* (AR) musiman
I: d	:	tingkat perbedaan (*differencing*)
MA: q	:	orde dari model *Moving Average*(MA) musiman
S	:	jumlah periode musim
$AR(1)^{12}$	:	model AR yang memiliki orde 1 periode musiman 12
$AR(2)^{12}$	:	model AR yang memiliki orde 2 danperiode musiman 12
$AR(p)^{12}$	:	model AR yang memiliki orde p danperiode musiman 12
$MA(1)^{12}$	:	model MA yang memiliki orde 1 danperiode musiman 12
$MA(2)^{12}$	:	model MA yang memiliki orde 2 danperiode musiman 12
$MA(q)^{12}$	:	model AR yang memiliki orde q danperiode musiman 12

DAFTAR LAMPIRAN

ABSTRAK

Zakiyah, Amilatuz. 2012. **Analisis Kausalitas dan Invertabilitas Model ARIMA (p, d, q) Musiman.** Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: (I) Dr. Sri Harini, M.Si
(II) Fachrur Rozi, M.Si

Kata Kunci: ARIMA musiman, kausalitas, invertabilitas, *time series*, peramalan

ARIMA adalah suatu model peramalan yang diawali oleh Box-Jenkins, sehingga bisa dikatakan metode Box Jenkins. Metode ARIMA ini bagus untuk digunakan pada peramalan jangka pendek. Dalam model ARIMA dikenal model ARIMA musiman. Model ARIMA hanya dapat digunakan pada data stasioner yaitu data yang mempunyai rata-rata dan variansi relatif konstan dari satu periode ke periode berikutnya, yang ditandai dengan terpenuhinya unsur kausalitas dan invertabilitas. Jika didapatkan data yang belum stasioner, maka pada data tersebut dimungkinkan belum memenuhi unsur kausalitas dan invertabilitas. Sehingga untuk memenuhi syarat tersebut data perlu distasionerkan terlebih dahulu dengan cara *differencing*.

Pada penelitian ini akan dilakukan analisis kausalitas dan invertabilitas khususnya pada model ARIMA musiman. Dari bab pembahasan diperoleh hasil bahwa model terbaik dari ARIMA (p, d, q) musiman yaitu yang memenuhi unsur kausalitas dan invertabilitas adalah model ARIMA $(1,0,1)^{12}$.

ABSTRACT

Zakiyah, Amilatuz. 2012. **Causality and Invertability Analysis of ARIMA $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{q})$ Seasonal Model.** Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, The State Islamic University Maulana Malik Ibrahim Malang.
Supervisor: (I) Dr. Sri Harini, M.Si
(II) Fachrur Rozi, M.Si

Keywords: seasonal ARIMA, causality, invertability, time series, forecasting

ARIMA is a forecasting model that began by Box-Jenkins, so it could be said as Box Jenkins method. ARIMA method is great for use on short-term forecasting. In ARIMA models known seasonal ARIMA models. ARIMA models can only be used on stationary data that has average and variance are relatively constant from one period to the next, which is indicated by satisfing the causality and invertability elements. If the obtained data is not stationary, then the data is possible not satisfing the causality and invertability element. So to qualify the data needs to be stationaried by differencing.

This research will be carried out analysis of causality and invertability especially seasonal ARIMA models. From the discussion chapter obtained that the best model of the seasonal ARIMA $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{q})$ meet the causality and invertability element is ARIMA $(1,0,1)^{12}$ models.

مستخلص البحث

الزكية، عا ملة . ٢٠١٢. **تحليل السببية و ان فرتبلتس اريما (ف، د، ق) الموسمية** .الأطروحة .قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا التابعة لجامعة ولاية مولانا الإسلامية مالانج ابراهيم مالك
المشرف الأول: سر ها ر نى الماجستير
المشرف الثاني: فخر الرازي الماجستير
الكلمات الأساسية : اريما (ف، د، ق) الموسمية، السببية، ان فرتبلتس، السلاسل الزمنية، والتنبؤ

اريما هو نموذج التنبؤ الذي يبدأ من جنكينز بالغرف، بحيث يمكن القول صندوق جنكينز الأسلوب . اريما طريقة عظيمة للاستخدام على المدى القصير التنبؤ .في نماذج المعروف نماذج اريما الموسمية .لا يمكن إلا أن النماذج يمكن استخدامها على اريما ثابتة من البيانات هي البيانات التي قد المتوسط والتباين ثابتة نسبيا من فترة إلى أخرى، وهو ما دلت عليه عناصر من السببية و ان فرتبلتس .إذا كانت البيانات التي تم الحصول عليها ليست ثابتة، ثم يتم إجراء البيانات الممكنة لا تلبي العناصر السببية و ان فرتبلتس .وذلك لتأهيل البيانات يحتاج الأولى تمييز.

و ان فرتبلتس سيتم تنفيذ هذا البحث من تحليل السببية و اريما نماذج اريما الموسمية بشكل خاص.

مناقشة النتائج المتحصل عليها أن أفضل نموذج لل اريما الموسمية تلبية العناصر السببية و ان فرتبلتس هو(١،٠،١) نماذج .

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Al-Qur’an adalah *kalamullah* yang merupakan mu’jizat yang diturunkan kepada Nabi Muhammad Saw melalui perantara malaikat Jibril, yang digunakan sebagai pedoman hidup manusia seluruhnya di sepanjang zaman. Al-Qur’an terdiri dari susunan ayat-ayat, di mana di antara ayat-ayat tersebut terdapat tanda-tanda kekuasaan Allah dan seruan kepada manusia untuk menggunakan akal dalam memahaminya. Sebagaimana di dalam surat Ali-Imron 190 yang berbunyi:

إِنَّ فِي خَلۡقِ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلۡأَرۡضِ وَٱخۡتِلَٰفِ ٱلَّيۡلِ وَٱلنَّهَارِ لَأٓيَٰتٖ لِّأُوْلِي ٱلۡأَلۡبَٰبِ ١٩٠

“Sesungguhnya dalam *penciptaan langit dan bumi, dan silih bergantinya malam dan siang terdapat tanda-tanda bagi orang-orang yang berakal*“

Tanda-tanda kekuasaan Allah di antaranya adalah berupa ilmu pengetahuan. Ilmu pengetahuan tersebut memiliki beberapa cabang ilmu, di antaranya ialah matematika. Suatu ilmu yang berhubungan dengan matematika salah satunya adalah metode peramalan. Peramalan merupakan proses menduga suatu (kejadian) yang terjadi pada masa yang akan datang. Dalam hal ini salah satu metode yang dapat digunakan adalah metode Box-Jenkins dengan analisis *time series* yang menggunakan model ARIMA (Mulyono, 2000).

ARIMA merupakan singkatan dari “*autoregressive integrated moving average*” yaitu gabungan dari model *autoregressive* (p) dan model *moving average* (q) yang memiliki integrasi atau telah dijadikan stasioner dengan cara *differencing* (d) (Makridakis, 1999). Model ARIMA mempuyai syarat-syarat yang harus dipenuhi untuk mendapatkan suatu model yang baik. Dalam hal pentingnya memenuhi syarat ini, Al-Qur'an mejelaskan pada Surat Al-Israa' ayat 84 yang berbunyi:

قُلۡ كُلّٞ يَعۡمَلُ عَلَىٰ شَاكِلَتِهِۦ فَرَبُّكُمۡ أَعۡلَمُ بِمَنۡ هُوَ أَهۡدَىٰ سَبِيلٗا ﴿٨٤﴾

Katakanlah: "Tiap-tiap orang berbuat menurut keadaannya masing-masing". Maka Tuhanmu lebih mengetahui siapa yang lebih benar jalannya.

Ayat di atas menjelaskan bahwasanya setiap perbuatan itu menurut pada keadaan masing-masing. Keadaan masing-masing ini sama halnya merupakan suatu syarat yang harus dipenuhi (agar menjadi sesuatu yang baik).

Syarat dari model ARIMA yang harus dipenuhi untuk menjadi suatu model yang baik adalah adanya unsur kausalitas dan invertabilitas. Suatu model ARIMA dikatakan akan memenuhi unsur kausalitas dan invertabilitas jika berada dalam keadaan yang stasioner. Cara untuk mengetahui kondisi stasioner perlu suatu alat statistik yang disebut autokorelasi dan autokorelasi parsial. Jika didapatkan dalam model ARIMA tersebut belum memenuhi syarat stasioner, maka perlu dilakukan *differencing* dengan tujuan untuk menjadikannya stasioner (Wei, 2006).

Dalam model ARIMA dikenal suatu model ARIMA musiman. Model ARIMA musiman adalah model yang memiliki korelasi beruntun yang kuat pada jarak semusim (periode musim), biasanya satu tahun untuk data bulanan (Makridakis, 1999). Model ARIMA musiman ini banyak digunakan dalam kehidupan masyarakat misalnya untuk meramalkan tingkat curah hujan.

Adanya unsur kausalitas dan invertabilitas pada model ARIMA musiman, dapat diperoleh hasil peramalan yang baik yaitu mendekati kenyataan yang ada atau sedikti tingkat kesalahannya. Berdasarkan uraian di atas, maka pada penelitian ini akan dikaji **"Analisis Kausalitas dan Invertabilitas Model ARIMA $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{q})$ Musiman"**.

1.2 Rumusan Masalah

Bagaimana analisis kausalitas dan invertabilitas pada ARIMA (p, d, q) musiman?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan penelitian yaitu untuk mengetahui kausalitas dan invertabilitas pada model ARIMA (p, d, q) musiman.

1.4 Batasan Masalah

Dalam penelitian ini, penulis membatasi permasalahan model ARIMA musiman untuk jumlah periode musim 12 atau $S = 12$.

1.5 Manfaat Penelitian

1. Bagi Peneliti

   Manfaat bagi peneliti adalah untuk memperdalam pengetahuan peneliti dalam bidang analisis *time series* khususnya mengenai kausalitas dan invertabilitas pada model ARIMA (p, d, q) musiman. Selain itu juga sebagai tambahan informasi dan wawasan tentang kausalitas dan invertabilitas pada model ARIMA (p, d, q) musiman.

2. Bagi Pembaca

   Penelitian ini diharapkan dapat sebagai tambahan pengetahuan bidang matematika khususnya mengenai analisis kausalitas dan invertabilitas pada model ARIMA (p, d, q) musiman.

3. Bagi Institusi

   Sebagai bahan kepustakaan yang dijadikan sarana pengembangan wawasan keilmuan, khususnya di Jurusan Matematika untuk mata kuliah *time series*.

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah menggunakan studi literatur (*study library*) dengan cara mengumpulkan data dan informasi dari buku-buku, jurnal, artikel, dan lain-lain. Adapun langkah-langkah dalam penelitian ini adalah:

1. Menentukan model ARIMA (p,d,q) musiman
2. Menguji kestasioneran model dengan autokorelasi dan autokorelasi parsial
3. Menunjukkan kausalitas proses model AR musiman
4. Menunjukkan invertabiliats proses model MA musiman
5. Membuat kesimpulan yang merupakan jawaban dari permasalahan

1.7 Sistematika Penulisan

Adapun sistematika penulisan ini terdiri dari empat bab, pada masing-masing bab terdapat subbab, dengan susunan sebagai berikut:

BAB I : PENDAHULUAN

Bagian ini meliputi: latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II : KAJIAN PUSTAKA

Pada Bab ini dibahas mengenai teori-teori yang ada kaitannya dengan hal-hal yang akan dibahas oleh penulis, dan digunakan sebagai acuan di dalam pembahasan masalah yang diambil dari berbagai literatur (buku, majalah, internet, dll). Hal-hal yang akan dibahas oleh penulis di antaranya adalah deret berkala (*time series*) dalam peramalan, autokorelasi, autokorelasi parsial, model *Autoregressive* (AR), model *Moving Average* (MA), model *Autoregressive-Moving Average* (ARMA), model *Autoregressive Integrated Moving Average* (ARIMA), musiman, stasioneritas dan non-stasioneritas, kausalitas dan invertabilitas, peramalan dalam Al-Qur'an, kausalitas dan invertabililitas dalam Al-Qur'an, dan beberapa definisi serta pengertian penting yang diambil dari berbagai literatur yang berkaitan dengan penelitian.

BAB III : PEMBAHASAN

Pada Bab ini berisi tentang analisis kausalitas dan invertabilitas. Pada bab ini juga membahas tentang kaitan ayat-ayat Al-Qur’an yang berhubungan dengan peramalan menggunakan model ARIMA.

BAB IV : PENUTUP

Pada Bab ini berisi suatu kesimpulan dan saran-saran yang berkaitan dengan penelitian ini.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Deret Berkala (*Time Series*) dalam Peramalan

Deret berkala (*time series*) merupakan analisis dari metode peramalan Box-Jenkins, yaitu metode peramalan yang menduga masa depan berdasarkan pada nilai masa lalu dari suatu variabel dan kesalahan (faktor gangguan) masa lalu (Makridakis, 1999). Peramalan merupakan studi terhadap data historis untuk menemukan hubungan, kecenderungan, dan pola yang sistematis (Sugiarto dan Hardjono, 2000). Peramalan dapat membantu dalam melakukan perencanaan dan pengambilan keputusan secara tepat dan efektif. Tapi prediksi mengenai kejadian masa depan tidak selalu tepat, pelaku peramalan hanya dapat berusaha untuk membuat sekecil mungkin kesalahan yang mungkin akan terjadi (Hanke, Wichern, dan Reitsch, 2003).

Deret berkala (*time series*) yang mempunyai sifat berulang setelah sekian periode waktu tertentu, misalnya satu tahunan untuk *time series* bulanan, ataupun satu mingguan untuk *time series* harian disebut dengan *time series* musiman. Permasalahan musiman seringkali kita jumpai dalam fenomena kehidupan ekonomi dan kemasyarakatan. Beberapa contoh *time series* musiman antara lain yaitu jumlah turis yang datang, tingkat curah hujan di suatu kota, dan lain-lain (Makridakis, 1999).

Dalam analisis *time series* menggunakan Metode Box-Jenkins, pertama kali harus menganggap bahwa data *time series* yang akan dianalisis dan diramalkan bersifat stasioner. Secara intuitif, suatu data *time series* dikatakan stasioner jika data tersebut berfluktuasi secara acak (*random*) disekitar nilai rata-rata (*mean*) dari data *time series* tersebut. Jika data yang dimilliki tersebut tidak stasioner dan ingin menggunakan Metode Box-Jenkins maka data tersebut dapat dijadikan stasioner melalui proses *differencing*.

Kelompok model *time series* yang termasuk dalam metode ini antara lain yaitu: *moving average (MA), autoregressive (AR), autoregressive-moving average (ARMA), dan autoregressive integrated moving average (ARIMA)* (Mulyono, 2000).

2.2 Autokorelasi

Autokorelasi merupakan alat dalam *time series* yang digunakan untuk menjelaskan hubungan antara nilai-nilai suatu dengan deret berkala (*time series*) untuk selang waktu (*time lag*) yang berbeda. Jadi akan terdapat autokorelasi untuk selang waktu 1 dan autokorelasi untuk selang waktu seterusnya. Pola koefisien-koefisien autokorelasi sering digunakan untuk menetapkan ada atau tidak adanya faktor musim (*seasonality*) di dalam deret berkala untuk menentukan model berkala yang tepat pada situasi tertentu dan untuk menentukan adanya kestasioneran data (Makridakis, 1999).

Koefisien Autokorelasi adalah hubungan ukuran nilai antara dua variabel, yang dalam analisis *time series* kita sebut Y_t dan Y_{t-1}. Umumnya dibuat sebagai r, nilainya berkisar antara -1 hingga $+1$. Gambaran sederhana untuk memahami koefisien autokorelasi di dalam analisis deret berkala (*time series*) adalah sebagai berikut. Misalkan variabel Y_t menyatakan permintaan terhadap produk A untuk 10 periode waktu yang lalu dan mempunyai nilai seperti yang terlihat di kolom 2 tabel 2.1 (Wei, 2006).

Tabel 2.1 Deret Berkala Dari Permintaan Produk A (Wei, 2006)

(1)	**(2)**	**(3)**	**(4)**
Waktu (atau periode) t	**Variabel Awal** Y_t	**Variabel dg. Time Lag satu** Y_{t-1}	**Variabel dg. Time Lag Dua** Y_{t-2}
1	13	-	-
2	8	13	-
3	15	8	13
4	4	15	8
5	4	4	15
6	12	4	4
7	11	12	4
8	7	11	12
9	14	7	11
10	12	14	7
Total	**100**	-	-
Nilai tengah	**10**		

Berdasarkan data pada tabel 2.1, Y_t dapat digambarkan sebagai

$$Y_t = \mu + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + e_t \qquad (2.1)$$

Persamaan (2.1) adalah model AR [atau ARIMA (2,0,0)] yang menggambarkan Y_t sebagai suatu kombinasi linier dari dua nilai sebelumnya. Variabel-variabel Y_{t-1} dan Y_{t-2} dapat dibuat dengan memindahkan nilai-nilai pada tabel tersebut masing-masing satu dan dua periode. Hasilnya berupa hilangnya satu nilai pada kolom Y_{t-1} dan dua nilai untuk Y_{t-2}. Autokorelasi antara Y_t dengan Y_{t-1} dan antara Y_t dengan Y_{t-2} dapat dihitung. Autokorelasi pertama menyatakan bagaimana nilai-nilai Y yang berurutan berkaitan satu dengan nilai lainnya, dan autokorelasi kedua menyatakan bagaimana hubungan antara masing-masing nilai Y yang terpisah dua periode.

Koefisien korelasi sederhana antara Y_t dengan Y_{t-1} dapat dicari dengan seperti yang dinyatakan pada (2.2) dibawah ini

$$\rho_{Y_tY_{t-1}} = \frac{\left(kovarian\ \ antara\ \ Y_t \text{ dan } Y_{t-1}\right)}{\left(Dev.Std.Y_t\right) x \left(Dev.Std.Y_{t-1}\right)}$$

$$= \frac{\sum_{t=2}^{n}(Y_t - \bar{Y})(Y_{t-1} - \bar{Y}_{t-1})}{\sqrt{\sum_{t=1}^{n}(Y_t - \bar{Y})^2}\ \sqrt{\sum_{t=2}^{n}(Y_{t-1} - \bar{Y}_{t-1})^2}} \tag{2.2}$$

Batas nilai subskrip pada pembilang dan penyebut pada rumus ini dapat dibuat asumsi untuk menyederhanakannya. Data Y_t diasumsikan stasioner (baik nilai tengah maupun variansnya). Jadi, kedua nilai tengah, $\bar{Y}_t$ dan $\bar{Y}_{t-1}$ dapat diasumsikan bernilai sama (dan dapat membuat subskrip dengan menggunakan $\bar{Y} = \bar{Y}_t = \bar{Y}_{t-1}$) dan dua nilai varians (atau deviasi standar) dapat diukur satu kali saja yaitu dengan menggunakan seluruh data Y_t yang diketahui.

Dengan menggunakan asumsi-asumsi penyederhanaan ini, maka persamaan (2.2) menjadi:

$$\rho_{Y_tY_{t-1}} = \frac{\sum_{t=2}^{n}(Y_t - \bar{Y})(Y_{t-1} - \bar{Y})}{\sum_{t=1}^{n}(Y_t - \bar{Y})^2} \tag{2.3}$$

yaitu pembilang terlihat kekurangan satu nilai suku dibanding penyebut, akan tetapi karena adanya asumsi stasioneritas, maka persamaan (2.3) dapat berlaku umum, dan dapat digunakan untuk seluruh *time-lag* dari satu periode untuk suatu deret berkala. Kemudian untuk memudahkan, koefisien korelasi derajat satu dituliskan sebagai r_1 (yaitu koefisien korelasi untuk *time-lag* satu).

Dengan cara yang sama, autokorelasi untuk *time-lag* 1, 2, 3, 4, k. dapat dicari dan dinotasikan r_k, sebagai berikut:

$$\rho_k = \frac{\sum_{t=1}^{n-k}(Y_t - \bar{Y})(Y_{t-1} - \bar{Y})}{\sum_{t=1}^{n}(Y_t - \bar{Y})^2} \tag{2.4}$$

Penjumlahan nilai pembilang pada persamaan (2.4) agak berbeda dengan penjumlahan pada (2.3). Ini tidak berperngaruh pada hasilnya, karena diasumsikan stasioner.

Selanjutnya sebagai contoh, nilai r_1 untuk data di tabel 2.1 dihitung dengan menggunakan persamaan (2.4)

$$\rho_1 = \frac{\sum_{t=1}^{10-1}(Y_t - \bar{Y})(Y_{t-1} - \bar{Y})}{\sum_{t=1}^{10}(Y_t - \bar{Y})^2}$$

$$= \frac{(13-10)(8-10) + (8-10)(15-10) + \ldots + (14-10)(12-10)}{(13-10)^2 + (8-10)^2 + \ldots + (12-10)^2}$$

$$= \frac{-27}{144} = -0{,}188$$

Persamaan (2.4) jelas merupakan cara menghitung autokorelasi yang lebih efisien daripada persamaan (2.2)

Dengan menggunakan persamaan (2.4), ρ_2, ρ_3, dan sebagainya dapat juga dihitung.

$$\rho_2 = \frac{\sum_{t=1}^{10-2}(Y_t - \bar{Y})(Y_{t-2} - \bar{Y})}{\sum_{t=1}^{10}(Y_t - \bar{Y})^2}$$

$$= \frac{(13-10)(15-10)+(8-10)(4-10)+...+(7-10)(12-10)}{(13-10)^2+(8-10)^2+...+(12-10)^2}$$

$$= -0{,}201$$

$$\rho_3 = \frac{\sum_{t=1}^{10-3}(Y_t - \bar{Y})(Y_{t-3} - \bar{Y})}{\sum_{t=1}^{10}(Y_t - \bar{Y})^2}$$

$$= \frac{(13-10)(4-10)+(8-10)(4-10)+...+(11-10)(12-10)}{(13-10)^2+(8-10)^2+...+(12-10)^2}$$

$$= 0{,}181$$

Dengan demikian dari data di atas diperoleh ACF r_k, $k = 1,2,3$ adalah sebagai berikut

Tabel 2.2 Nilai ACF dari Permintaan Produk A

k (lag)	1	2	3
ρ_k (ACF)	– 0,188	– 0,201	0,181

2.3 Autokorelasi Parsial

Autokorelasi parsial merupakan ukuran yang digunakan untuk mengukur tingkat keeratan antara Y_t dan Y_{t-k}, apabila pengaruh dari time lag $1, 2, 3, \ldots,$ dan seterusnya sampai $k-1$ dianggap terpisah. Satu-satunya tujuan di dalam analisis deret berkala adalah untuk membantu menetapkan model ARIMA yang tepat untuk peramalan (Makridakis, 1999).

Autokorelasi parsial ditulis dengan notasi $\{\phi_{kk}; k = 1,2,\ldots\}$, yakni himpunan autokorelasi parsial untuk berbagai lag k. Autokorelasi parsial didefinisikan sebagai

$$\phi_{kk} = \frac{|P_k^*|}{|P_k|}, \tag{2.5}$$

dimana P_k adalah matriks autokorelasi $k \times k$, dan P_k^* adalah P_k dengan kolom terakhir diganti dengan

$$\begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_k \end{bmatrix}.$$

Sehingga diperoleh

$$\phi_{11} = \rho_1, \tag{2.6}$$

$$\phi_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2}, \tag{2.7}$$

$$\phi_{33} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\rho_1^3 - 2\rho_1\rho_2 + \rho_1\rho_2^2 - \rho_1^2\rho_3 + \rho_3}{1 + 2\rho_1^2\rho_2 - \rho_2^2 - 2\rho_1^2}, \tag{2.8}$$

dan seterusnya (Wei, 1999).

Nilai estimasi dari ϕ_{kk} dapat juga diperoleh dengan menggunakan persamaan yang dikemukakan oleh Durbin (1960), yaitu

$$\phi_{kk} = \frac{\rho_k - \sum_{j=1}^{k-1} \phi_{k-1,j}\ \rho_{k-j}}{1-\sum_{j=1}^{k-1} \phi_{k-1,j}\ \rho_j}, \tag{2.9}$$

di mana

$$\phi_{kj} = \phi_{k-1,j} - \phi_{kk}\ \phi_{k-1,k-j} \quad \text{untuk } j = 1,2,\ldots,k-1$$

Dari Tabel 2.1 deret berkala dari permintaan produk A dapat dihitung nilai dari ϕ_{11}, ϕ_{22} dan ϕ_{33}. Dengan menggunakan nilai-nilai dari perhitungan ρ_1, ρ_2, dan ρ_3, serta menerapkan rumus Durbin (1960) diperoleh

$$\phi_{11} = \rho_1 = -0.188,$$

$$\phi_{22} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1-\rho_1^2} = \frac{-0.201-(-0.188)^2}{1-(-0.188)^2} = -0.245 \ .$$

Untuk perhitungan ϕ_{33} diperlukan nilai ϕ_{21} terlebih dahulu, yaitu

$$\phi_{21} = \phi_{11} - \phi_{22}\phi_{11} = (-0.188)-(-0.245)(-0.188) = -0.234,$$

sehingga didapatkan

$$\phi_{33} = \frac{\rho_3 - \phi_{21}.\rho_2 - \phi_{22}.\rho_1}{1 - \phi_{21}.\rho_1 - \phi_{22}.\rho_2}$$

$$= \frac{0.181 - (-0.234)(-0.201) - (-0.245)(-0.188)}{1 - (-0.234)(-0.188) - (-0.245)(-0.201)}$$

$$= \frac{0.088}{0.907} = 0.097.$$

Dengan demikian dari data pada contoh satu di atas diperoleh ACF dan PACF untuk lag $k = 1,2,3$ sebagai berikut.

Tabel 2.3 Nilai ACF dan PACF dari Permintaan Produk A

k (lag)	1	2	3
ρ_k (ACF)	– 0,188	– 0,201	0,181
ϕ_{kk} (PACF)	– 0,188	– 0,245	0,097

2.4 Model *Autoregressive* (AR)

Secara umum untuk proses AR orde ke- p, akan berbentuk sebagai berikut: ARIMA $(p,0,0)$

$$X_t = \mu' + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \ldots + \phi_p X_{t-p} + e_t \quad (2.10)$$

di mana μ' = nilai konstan

ϕ_j = parameter autoregresif ke- j

e_t = nilai kesalahan pada saat t

Terdapat pembatas yang khusus pada nilai-nilai parameter *autoregressive*. Dalam praktek, dua kasus yang akan paling sering dihadapi adalah apabila $p = 1$ dan $p = 2$, yaitu berturut-turut untuk model AR(1) dan AR(2).

Dua kasus ini didefinisikan sebagai berikut:

ARIMA (1,0,0)

$$X_t = \mu' + \phi_1 X_{t-1} + e_t \tag{2.11}$$

ARIMA (2,0,0)

$$X_t = \mu' + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + e_t \tag{2.12}$$

Dengan menggunakan simbol operator *shift* mundur, B, dimana $B = \frac{X_{t-1}}{X_t}$ maka menjadi:

ARIMA(1,0,0)

$$\left.\begin{array}{l} X_t - \phi_1 X_{t-1} = \mu' + e_t \\ \text{atau} \\ (1-\phi_1 B)X_t = \mu' + e_t \end{array}\right\} \tag{2.13}$$

ARIMA (2,0,0)

$$\left.\begin{array}{l} X_t - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2} = \mu' + e_t \\ \text{atau} \\ (1-\phi_1 B - \phi_2 B^2)X_t = \mu' + e_t \end{array}\right\} \tag{2.14}$$

Selang nilai yang diijinkan untuk ϕ_1 di dalam model AR(1) adalah $-1 < \phi_1 < +1$ (Makridakis, 1999).

2.5 Model *Moving Average* (MA)

Proses MA umum berorde q didefinisikan sebagai berikut:

ARIMA(0,0, q) atau MA(q)

$$X_t = \mu + e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2} - \ldots - \theta_q e_{t-q} \tag{2.15}$$

di mana θ_1 sampai θ_q adalah parameter-parameter *moving average* (yang menjadi sasaran pembatas-pembatas nilai), e_{t-k} adalah nilai kesalahan pada saat $t-k$ dan μ adalah konstanta. Dalam praktiknya, dua kasus yang kemungkinan sering dihadapi adalah apabila $q=1$ dan $q=2$ yaitu berturut-turut proses-proses MA(1) dan MA(2). Dua kasus ini ditulis seperti pada persamaan (2.16) dan (2.17)

ARIMA(0,0,1) atau MA(1)

$$X_t = \mu + (1-\theta_1 B)e_t \tag{2.16}$$

ARIMA(0,0,2) atau MA(2)

$$X_t = \mu + (1-\theta_1 B - \theta_2 B^2)e_t \tag{2.17}$$

Model AR dan MA orde pertama: ϕ_1 dan θ_1 harus terletak di antara -1 dan $+1$, dan Model AR dan MA orde kedua: kondisi berikut harus dipenuhi (Makridakis, 1999).

2.6 Model *Autoregressive-Moving Average* (ARMA)

Suatu proses umum untuk campuran proses AR(1) murni dan proses MA(1) murni didefinisikan sebagai berikut:

ARIMA(1,0,1)

$$\left.\begin{array}{l} X_t = \mu' + \phi_1 X_{t-1} + e_t - \theta_1 e_{t-1} \\ \text{atau} \\ (1-\phi_1 B)X_t = \mu' + (1-\theta_1 B)e_t \end{array}\right\} \tag{2.18}$$

2.7 Model *Autoregressive Integrated Moving Average* (ARIMA)

Apabila nonstasioneritas ditambahkan pada campuran proses ARMA, maka model umum ARIMA (p,d,q) terpenuhi. Persamaan untuk kasus yang paling sederhana, ARIMA (1,1,1) adalah sebagai berikut:

ARIMA(1,1,1)

$$(1-B)(1-\phi_1 B)X_t = \mu' + (1-\theta_1 B)e_t \tag{2.19}$$

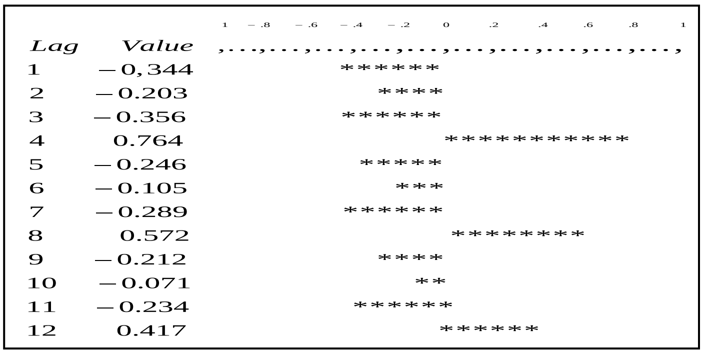
Pemakaian operator *shift* mundur untuk menggambarkan (i) pembedaan pertama, (ii) bagian AR(1) dari model dan (iii) aspek MA(1). Suku-suku tersebut dapat dikalikan dan disusun kembali sebagai berikut:

$$\begin{aligned}[1-B(1+\phi_1)+\phi_1 B^2]X_t &= \mu' + e_t - \theta_1 e_{t-1} \\ X_t &= (1+\phi_1)X_{t-1} - \phi_1 X_{t-2} + \mu' + e_t - \theta_1 e_{t-1}\end{aligned} \tag{2.20}$$

2.8 Musiman

Musiman didefinisikan sebagai suatu pola yang berulang-ulang dalam selang waktu yang tetap. Sebagai contoh yaitu penjualan minyak untuk alat pemanas, adalah tinggi pada musim dingin dan rendah pada musim panas yang memperlihatkan suatu pola musim 12 bulan. Untuk mengenali adanya faktor musiman seorang harus melihat pada autokorelasi yang tinggi misalnya pada gambar 2.1 di bawah ini (Makridakis, 1999).

AUTOCORRELATION ANALYSIS



Gambar 2.1 Koefisien Autokorelasi dari Data Kuartalan

Koefisien autokorelasi yang terlihat pada gambar 2.1 menunjukkan suatu pola musiman yang jelas selama empat periode (empat kuartal). Dapat dilihat, bahwa $\rho_4 = 0.764$, yang secara nyata berbeda dari nol. Sama halnya dengan $\rho_8 = 0.572$ yang signifikan dan $\rho_{12} = 0.417$ yang berada pada batas limit. Ciri-ciri periodik musiman dapat dilihat secara nyata dari kenyataan bahwa $\rho_4 > \rho_8 > \rho_{12}$ dan ketiganya secara nyata berbeda dari nol.

Secara umum bentuk model ARIMA (p, d, q) musiman atau ARIMA $(p, d, q)^S$ adalah:

$$\phi_p(B^S)(1 - B^S)^D X_t = \theta_Q(B^S)e_t$$

di mana:

$\phi_p(B^S)$ = $(1 - \phi_1 B^S - \phi_2 B^{2s} - \ldots - \phi_p B^{ps})$ = AR musiman

$(1 - B^S)^D X_t$ = order *differencing* Musiman = pembedaan musiman

$\theta_Q(B^S)e_t$ = $(1 - \theta_1 B^s - \theta_2 B^{2s} - \ldots - \theta_q B^{qs})$ = MA musiman

s = jumlah periode per musim

Sebagai contoh yaitu suatu deret data yang dikumpulkan per kuartal. Maka pembedaan musiman dapat dihitung sebagai berikut:

$$X_t^{'} = X_t - X_{t-4} = (1 - B^4)X_t \tag{2.21}$$

Untuk data yang dikumpulkan bulanan, perbedaan satu musim penuh (tahun) dapat dihitung sebagai berikut:

$$X_t^{'} = X_t - X_{t-12} = (1 - B^{12})X_t \tag{2.22}$$

2.9 Stasioneritas dan Non-Stasioneritas

Notasi yang sangat bermanfaat adalah operator *shift* mundur (*backward shift*), B, yang penggunaannya adalah sebagai berikut:

$$BX_t = X_{t-1} \tag{2.24}$$

Dengan kata lain, notasi B yang dipasang pada X_t, mempunyai pengaruh menggeser data 1 periode ke belakang. Dua penerapan B untuk *shift* X_t akan menggeser data tersebut 2 periode ke belakang, sebagai berikut:

$$B(BX_t) = B^2 X_t = X_{t-2} \tag{2.25}$$

Untuk data bulanan, apabila ingin mengalihkan perhatian ke keadaan pada "bulan yang sama pada tahun sebelumnya", maka digunakan B^{12} dan notasinya adalah $B^{12} X_t = X_{t-12}$ (Makridakis, 1999).

Operator *shift* mundur tersebut sangat tepat untuk menggambarkan proses pembedaan (*differencing*). Sebagai contoh, apabila suatu deret berkala tidak stasioner, maka data tersebut dapat dibuat lebih mendekati stasioner dengan melakukan pembedaan pertama dari deret data dan persamaan (2.26) memberi batasan mengenai apa yang dimaksud dengan pembedaan pertama.

PEMBEDAAN PERTAMA

$$X_1^{'} = X_t - X_{t-1} \tag{2.26}$$

Menggunakan operator *shift* mundur, persamaan (2.26) dapat ditulis menjadi

$$X_1^{'} = X_t - BX_t = (1-B)X_t \tag{2.27}$$

Pembedaan pertama dinyatakan oleh $(1-B)$. Sama halnya apabila pembedaan orde kedua (yaitu pembedaan pertama dari pembedaan pertama sebelumnya) harus dihitung, maka:

PEMBEDAAN ORDE KEDUA

$$\begin{aligned} X_t'' &= X_t' - X_{t-1}' \\ &= (X_t - X_{t-1}) - (X_{t-1} - X_{t-2}) \\ &= X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2} \qquad (2.28) \\ &= (1 - 2B + B^2)X_t \\ &= (1-B)^2 X_t \end{aligned}$$

Pembedaan orde kedua diberi notasi $(1-B)^2$. Ini merupakan hal yang penting untuk memperlihatkan bahwa *pembedaan orde kedua* adalah tidak sama dengan *pembedaan kedua*, yang diberi notasi $1-B^2$. Demikian pula, pembedaan keduabelas adalah $1-B^{12}$, akan tetapi pembedaan orde keduabelas adalah $(1-B)^{12}$ (Wei, 1999).

Tujuan menghitung pembedaan adalah untuk mencapai stasioneritas, dan secara umum, apabila terdapat pembedaan orde ke-d untuk mencapai stasioneritas, akan ditulis:

pembedaan orde ke-d = $(1-B)^d X_t$

Sebagai deret yang stasioner, dan model umum ARIMA (0, d ,0) akan menjadi:

ARIMA $(0, d \ ,0)$

$$(1-B)^d X_t = e_t \qquad (2.29)$$

Perlu untuk diingat, bahwa ARIMA $(0, d \ ,0)$ mempunyai arti di mana data asli tidak mengandung aspek *autoregressive* (AR), tidak mempunyai aspek *moving average* (MA) dan mengalami pembedaan orde ke-d (Makridakis, 1999).

Untuk membuat data stasioner, maka perlu melakukan pembedaan pertama terhadap deret berkala. Untuk proses ARIMA (0,1,0) diketahui bahwa pembedaan pertama akan membuat deret menjadi stasioner.

2.10 Kausalitas dan Invertabilitas

Kausalitas dan invertabilitas mensyaratkan pada model yang stasioner. Model yang stasioner yaitu model yang memiliki koefisien $-1 < \phi < +1$. Kausalitas merupakan kata sifat yang berasal dari kata "*causal*" yang bermakna "sebab". Di mana pada model ARIMA, model AR yang memiliki koefisien $-1 < \phi < +1$ akan dikatakan stasioner (Cryer and Chan, 2008). Dan hal ini merupakan syarat perlu, bukan cukup, sebab masih diperlukan syarat lain untuk menjamin stasioner (Mulyono, 2000).

Invertabilitas berasal dari kata "*invert*" merupakan kata keterangan yang berarti "membalikkan", dan kata "able" merupakan kata sifat yang berarti "dapat, bisa, mampu". Dan jika digabungkan menjadi "*invertible*" yang bermakna "bersifat mampu membalik". Di mana model MA bersifat *invertible* jika memiliki $-1 < \phi < +1$ (Brockwell and Davis, 2006). Yaitu model MA yang stasioner akan dapat dibalik menjadi model AR. Dan dalam kerangka pemodelan Box dan Jenkins (1976), mewajibkan model ARIMA dapat memenuhi unsur invertabilitas. Sehingga dapat dikatakan bahwa model ARIMA yang memenuhi unsur invertabilitas pasti stasioner (memenuhi unsur kausalitas).

2.11 Inspirasi Kajian tentang Peramalan dalam Al-Qur’an

Di dalam Al-Qur’an ayat yang membahas mengenai matematika yang berhubungan dengan peramalan salah satunya terdapat pada QS. Ar-Ruum ayat 2- 4 yang berbunyi :

غُلِبَتِ ٱلرُّومُ ۝٢ فِيٓ أَدۡنَى ٱلۡأَرۡضِ وَهُم مِّنۢ بَعۡدِ غَلَبِهِمۡ سَيَغۡلِبُونَ ۝٣ فِي بِضۡعِ
سِنِينَۗ لِلَّهِ ٱلۡأَمۡرُ مِن قَبۡلُ وَمِنۢ بَعۡدُۚ وَيَوۡمَئِذٖ يَفۡرَحُ ٱلۡمُؤۡمِنُونَ ۝٤

Artinya: "Telah dikalahkan bangsa Romawi, di negeri yang terdekat dan mereka sesudah dikalahkan itu akan menang, dalam beberapa tahun (lagi). Bagi Allah-lah urusan sebelum dan sesudah (mereka menang). dan di hari (kemenangan bangsa Rumawi) itu bergembiralah orang-orang yang beriman". (Al Qur'an, 30:2-4)

Ayat di atas mengisahkan tentang kekalahan dan kemenangan antara bangsa Romawi dan Persia. Dimana ayat tersebut turun jauh sebelum pertempuran itu terjadi. Pada waktu itu kondisi peradaban Islam masih minoritas dan belum mempunyai kekuatan sama sekali. Tetapi, Islam berani melakukan peramalan mengenai keruntuhan kedua negara yang saat itu merupakan superpower. Metode ini telah digunakan oleh Abu Bakar Ash-Siddiq sebagai taruhan dengan Ubay bin Khalaf dan Umayyah bin Khalaf (keduanya kafir Quraisy) yang dimenangkan oleh Abu Bakar dengan seratus unta muda karena terbukti setelah Romawi kalah pertama kali kemudian (sekitar 3-9 tahun) Persia juga kalah (Katsir, 2004).

Dari uraian penjelasan ayat di atas dapat diketahui bahwasanya Abu Bakar Ash-Siddiq telah melakukan peramalan yang mana dalam peramalan ini beliau menggunakan metode Al-Qur’an. Selain pada QS. Ar-Ruum ayat 2-

4 mengenai sesuatu yang belum terjadi (peramalan) juga ada dalam Al-Qur’an disinggung dalam surat Yusuf ayat 47-49, yang berbunyi:

قَالَ تَزۡرَعُونَ سَبۡعَ سِنِينَ دَأَبٗا فَمَا حَصَدتُّمۡ فَذَرُوهُ فِي سُنۢبُلِهِۦٓ إِلَّا قَلِيلٗا مِّمَّا تَأۡكُلُونَ
﴿٤٧﴾ ثُمَّ يَأۡتِي مِنۢ بَعۡدِ ذَٰلِكَ سَبۡعٞ شِدَادٞ يَأۡكُلۡنَ مَا قَدَّمۡتُمۡ لَهُنَّ إِلَّا قَلِيلٗا مِّمَّا تُحۡصِنُونَ
﴿٤٨﴾ ثُمَّ يَأۡتِي مِنۢ بَعۡدِ ذَٰلِكَ عَامٞ فِيهِ يُغَاثُ ٱلنَّاسُ وَفِيهِ يَعۡصِرُونَ ﴿٤٩﴾

Artinya: "Yusuf berkata, supaya kamu bertanam tujuh tahun (lamanya) sebagaimana biasa; Maka apa yang kamu tuai hendaklah kamu biarkan dibulirnya kecuali sedikit untuk kamu makan. Kemudian sesudah itu akan datang tujuh tahun yang amat sulit, yang menghabiskan apa yang kamu simpan untuk menghadapinya (tahun sulit), kecuali sedikit dari (bibit gandum) yang kamu simpan. Kemudian setelah itu akan datang tahun yang padanya manusia diberi hujan (dengan cukup) dan dimasa itu mereka memeras anggur."

Ayat di atas menceritakan rencana yang diusulkan oleh Nabi Yusuf kepada Raja Mesir untuk menghadapi keadaan krisis ekonomi di Mesir. Beliau menyarankan agar perencanaan dibuat sewaktu iklim ekonomi berada pada tahap yang baik sebelum terjadi krisis. Beliau juga menunjukkan bahwa perencanaan yang baik adalah yang mempunyai keterikatan dengan jangka waktu yang ditetapkan karena dengan begitu akan melahirkan kesungguhan bagi orang yang terlibat (Abidin, 2007).

2.12 Kausalitas dan Invertabililitas dalam Al-Qur’an

Di dalam Al-Qur’an ayat yang berhubungan dengan kausalitas dan invertabilitas salah-satunya terdapat pada Surat Al-Bayyinah ayat 7 yang berbunyi:

إِنَّ ٱلَّذِينَ ءَامَنُواْ وَعَمِلُواْ ٱلصَّٰلِحَٰتِ أُوْلَٰٓئِكَ هُمۡ خَيۡرُ ٱلۡبَرِيَّةِ ﴿٧﴾

“Sesungguhnya orang-orang yang beriman dan mengerjakan amal saleh, mereka itu adalah sebaik-baik makhluk”

Ayat di atas menerangkan tentang orang-orang yang beriman dan mengerjakan amal saleh adalah *khairul-bariyah* (sebaik-baik makhluk). Kata iman akan selalu diikuti dengan amal saleh sebagai perwujudan dari keyakinan yang benar. Bila iman dan amal shaleh tersebut ada pada seseorang, maka dia akan menjadi sebaik-baik makhluk (Sakip, 2005).

Dari uraian ayat di atas dapat diketahui bahwasannya iman dan amal shaleh diletakkan bergandengan untuk menjadi *khairul-bariyah*. Sama halnya pada model ARIMA yang stasioner maka akan memenuhi kausalitas dan invertabilitas.

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Menentukan Model ARIMA Musiman

Dalam penelitian ini akan dibahas tentang model ARIMA musiman dengan persamaan sebagai berikut:

$$(1-B^s)^D \Phi_P(B^s) X_t = \mu' + \Theta_Q(B) e_t \tag{3.1}$$

Dari model tersebut, maka selanjutnya dilakukan pengujian stasioner model dengan menggunakan autokorelasi (ACF) dan autokorelasi parsial (PACF) dengan langkah sebagai berikut:

1. **Pengujian Kestasioneran Model ARIMA Musiman dengan Autokorelasi (ACF) dan Autokorelasi Parsial**

Pada model ARIMA disyaratkan bahwa data harus stasioner, sehingga jika didapatkan data yang belum stasioner maka data tersebut harus di stasionerkan terlebih dahulu. Data stasioner adalah data yang mempunyai rata-rata dan variansinya relatif konstan dari satu periode ke periode berikutnya. Secara matematis data stasioner dinyatakan dengan $E(x) = \mu$ dan $Var(X) = \sigma^2$.

Untuk mengetahui bahwa $E(x) = \mu$ dan $Var(X) = \sigma^2$ adalah dengan proses "white noise" (X_t). Proses white noise X_t yang bersifat stasioner ditulis $X_t \sim WN(0, \sigma^2)$ yang didefinisikan sebagai proses barisan variabel random yang tidak berkorelasi dengan mean $\mu = 0$ dan variansinya σ^2 yakni:

$$\text{cov}\,(X_{t+k}, X_t) = \begin{cases} \sigma^2 \ , k = 0 \\ \\ 0 \quad , k \neq 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

Sehingga dari definisi maka diperoleh bahwa $\text{cov}(X_{t-k}, X_t) = \sigma^2$ jika dan hanya jika $t-k=t$, dan bernilai 0 jika $t-k \neq t$.

Salah satu cara untuk mengetahui kestasioneran data yaitu dengan melihat autokorelasi dan autokorelasi parsial dari model ARIMA musiman sebagai berikut:

a. Proses AR(1)^{12}

Suatu proses $\{X_t\}$ dikatakan mengikuti model AR(1)^{12} jika $\{X_t\}$ mengikuti model:

$$X_t = \Phi_1 X_{t-12} + e_t \tag{3.3}$$

Dari model (3.3), selanjutnya untuk mendapat nilai ACF dari proses $\text{AR}(1)^{12}$ adalah dengan cara mengalikan kedua sisi pada persamaan (3.3) dengan X_{t-k}:

$$(X_t.X_{t-k}) = (\Phi_1 X_{t-12} X_{t-k}) + (e_t X_{t-k}) \tag{3.4}$$

Kemudian dari (3.4) dicari nilai harapan dengan cara sebagai berikut:

$$E(X_t.X_{t-k}) = \Phi_1 E(X_{t-12} X_{t-k}) + E(e_t X_{t-k}) \tag{3.5}$$

Nilai harapan ruas kiri persamaan (3.5) yaitu $E(X_t X_{t-p})$ didefinisikan sebagai kovarian antara variabel X_t dan X_{t-k}. Kemudian berdasarkan definisi, $E(X_t.X_{t-k}) = \gamma_k$, $E(X_{t-k}.X_{t-k}) = \gamma_0$, $E(X_{t-k}.e_t) = 0$. Sehingga persamaan (3.5) tersebut dapat diubah menjadi:

$$\gamma_k = \Phi_1 \gamma_{k-12}\,, \quad k \geq 12 \tag{3.6}$$

Untuk mencari fungsi autokorelasi (ρ_k), di mana $\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$ dan bahwa proses *white noise* (gerakan random) bersifat stasioner yang sering ditulis $X_t \sim WN(0,\sigma^2)$ yaitu $\mu = 0$ dan deviasi standar $\sigma = 1$, maka untuk memperoleh ρ_k yaitu dengan membagi kedua ruas persamaan (3.6) dengan deviasi standar (γ_0) sehingga diperoleh hasil yaitu:

$$\rho_k = \Phi_1 \rho_{k-12} \quad k \geq 12 \tag{3.7}$$

Dimana secara matematis persamaan (3.7) diperoleh dengan menggunakan $\rho_0 = 1$ sehingga didapat:

$$\rho_{12} = \Phi_1 \rho_0 \text{ dan } \rho_{24} = \Phi_1 \rho_{12} \tag{3.8}$$

Dengan menggunakan rumus yang dikemukakan oleh Durbin (1960)

$$\Phi_{kk} = \frac{\rho_k - \sum_{j=1}^{k-1} \Phi_{k-1,j}\ \rho_{k-j}}{1\text{-}\sum_{j=1}^{k-1} \Phi_{k-1,j}\ \rho_j} \tag{3.9}$$

di mana

$$\Phi_{kj} = \Phi_{k-1,j} - \Phi_{kk}\ \Phi_{k-1,k-j} \quad \text{untuk } j = 1,2,\ldots,k-1$$

Maka dapat ditentukan:

$$\Phi_{11} = \rho_1 \tag{3.10}$$

Sehingga dapat dicari nilai PACF untuk model AR(1)[12] yaitu $\Phi_{11} = \rho_1$. Ini berarti bahwa autokorelasi parsial yang pertama adalah sama dengan autokorelasi pertama.

b. Proses AR(2)^{12}

Suatu proses $\{X_t\}$ dikatakan mengikuti model AR(2)^{12} jika $\{X_t\}$ mengikuti model:

$$X_t = \Phi_1 X_{t-12} + \Phi_2 X_{t-24} + e_t \tag{3.11}$$

Dari model (3.11), selanjutnya untuk mendapat nilai ACF dari proses $\text{AR}(2)^{12}$ adalah dengan cara mengalikan kedua sisi pada persamaan (3.11) dengan X_{t-k} :

$$(X_t.X_{t-k}) = (\Phi_1 X_{t-12} X_{t-k}) + (\Phi_2 X_{t-24} X_{t-k}) + (e_t X_{t-k}) \tag{3.12}$$

Kemudian dari (3.12) dicari nilai harapan dengan cara sebagai berikut:

$$E(X_t.X_{t-k}) = \Phi_1 E(X_{t-12} X_{t-k}) + \Phi_2 E(X_{t-24} X_{t-k}) + E(e_t X_{t-k}) \tag{3.13}$$

Nilai harapan ruas kiri persamaan (3.13) yaitu $E(X_t X_{t-k})$ didefinisikan sebagai kovarian antara variabel X_t dan X_{t-k}. Kemudian berdasarkan definisi, $E(X_t.X_{t-k}) = \gamma_k$, $E(X_{t-k}.X_{t-k}) = \gamma_0$, $E(X_{t-k}.e_t) = 0$. Sehingga persamaan (3.13) tersebut dapat diubah menjadi:

$$\begin{aligned} E(X_t.X_{t-k}) &= \Phi_1 E(X_{t-12} X_{t-k}) + \Phi_2 E(X_{t-24} X_{t-k}) + E(e_t X_{t-k}) \\ \gamma_k &= \Phi_1 \gamma_{k-12} + \Phi_2 \gamma_{k-24} + 0 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Untuk mencari fungsi autokorelasi (ρ_k), di mana $\rho_k = \dfrac{\gamma_k}{\gamma_0}$ dan bahwa proses *white noise* (gerakan random) bersifat stasioner yang sering ditulis $X_t \sim WN(0, \sigma^2)$ yaitu $\mu = 0$ dan deviasi standar $\sigma = 1$, maka untuk memperoleh ρ_k yaitu dengan membagi kedua ruas persamaan (3.14) dengan deviasi standar (γ_0) sehingga diperoleh hasil yaitu:

$$\rho_k = \Phi_1 \rho_{k-12} + \Phi_2 \rho_{k-24} \ , \ \ k = 12, 24, \ldots \tag{3.15}$$

Persamaan (3.15) disebut dengan ***Persamaan Yule-Walker***.

Untuk $k = 12$ dan dengan menggunakan $\rho_0 = 1$ serta $\rho_{-12} = \rho_1$,

diperoleh $\rho_1 = \Phi_1 + \Phi_2 \rho_1$ atau $\rho_1 = \dfrac{\Phi_1}{1 - \Phi_2}$ (3.16)

Dengan menggunakan nilai-nilai yang telah diperoleh untuk ρ_0 dan ρ_1, persamaan (3.16) dapat digunakan untuk mendapatkan ρ_2, yaitu

$$\begin{aligned} \rho_2 &= \Phi_1 \rho_1 + \Phi_2 \rho_0 \\ &= \frac{\Phi_1^2 + \Phi_2 (1 - \Phi_2)}{1 - \Phi_2} \end{aligned} \tag{3.17}$$

Dengan menggunakan rumus yang dikemukakan oleh Durbin (1960)

$$\Phi_{kk} = \frac{\rho_k - \sum_{j=1}^{k-1} \Phi_{k-1,j} \ \rho_{k-j}}{1 - \sum_{j=1}^{k-1} \Phi_{k-1,j} \ \rho_j} \tag{3.18}$$

di mana

$$\Phi_{kj} = \Phi_{k-1,j} - \Phi_{kk} \ \Phi_{k-1,k-j} \quad \text{untuk} \ \ j = 1, 2, \ldots, k-1$$

Maka dapat ditentukan:

$$\Phi_{11} = \rho_1 = \frac{\Phi_1}{1 - \Phi_2} \tag{3.19}$$

$$\Phi_{22} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} = \Phi_2 \tag{3.20}$$

dan untuk $k > 2$, $\Phi_{kk} = 0$. Dengan demikian PACF dari proses AR(2) adalah *cuts off* setelah lag 2.

c. Proses Stasioner AR(p) Musiman

Sebagaimana telah diketahui definisi model AR musiman yaitu

$$X_t = \mu' + \Phi_1 X_{t-s} + \Phi_2 X_{t-2s} + \ldots + \Phi_p X_{t-ps} + e_t \quad (3.21)$$

Dari model (3.22), selanjutnya untuk mendapat nilai ACF dari proses AR$(p)^{12}$ adalah dengan cara mengalikan kedua sisi pada persamaan (3.21) dengan X_{t-k} :

$$\begin{aligned}(X_{t-k}.X_t) = (\Phi_1 X_{t-k} X_{t-s}) + (\Phi_2 X_{t-k} X_{t-2s}) + \ldots + (\Phi_P X_{t-k} X_{t-Ps}) \\ + (X_{t-k} e_t)\end{aligned} \quad (3.22)$$

Kemudian dari (3.22) dicari nilai harapan dengan cara sebagai berikut:

$$\begin{aligned}E(X_{t-k}.X_t) = \Phi_1 E(X_{t-k} X_{t-s}) + \Phi_2 E(X_{t-k} X_{t-2s}) + \ldots \\ + \Phi_P E(X_{t-k} X_{t-Ps}) + E(X_{t-k} e_t)\end{aligned} \quad (3.23)$$

Nilai harapan ruas kiri persamaan (3.23) yaitu $E(X_t X_{t-k})$ didefinisikan sebagai kovarian antara variabel X_t dan X_{t-k}. Kemudian berdasarkan definisi, $E(X_t X_{t-k}) = \gamma_k$, $E(X_{t-k} X_{t-k}) = \gamma_0$, $E(X_{t-k} e_t) = 0$. Sehingga persamaan (3.23) tersebut dapat diubah menjadi:

$$\begin{aligned}E(X_{t-k} X_t) &= \Phi_1 E(X_{t-k} X_{t-s}) + \Phi_2 E(X_{t-k} X_{t-2s}) + \ldots \\ &\quad + \Phi_P E(X_{t-k} X_{t-Ps}) + E(X_{t-k} e_t) \\ \gamma_k &= \Phi_1 \gamma_{k-s} + \Phi_1 \gamma_{k-2s} + \ldots + \Phi_P \gamma_{k-Ps} + 0 \\ \gamma_k &= \Phi_1 \gamma_{k-s} + \Phi_1 \gamma_{k-2s} + \ldots + \Phi_P \gamma_{k-Ps}\end{aligned} \quad (3.24)$$

Untuk mencari fungsi autokorelasi (ρ_k), di mana $\rho_k = \dfrac{\gamma_k}{\gamma_0}$ dan bahwa proses *white noise* (gerakan random) bersifat stasioner yang sering ditulis $X_t \sim WN(0, \sigma^2)$ yaitu $\mu = 0$ dan deviasi standar $\sigma = 1$, maka untuk memperoleh ρ_k yaitu dengan membagi kedua ruas persamaan (3.24) dengan deviasi standar (γ_0) sehingga diperoleh hasil yaitu:

$$\rho_k = \Phi_1\ \rho_{k-s} + \Phi_2\ \rho_{k-2s} + \ldots + \Phi_p\ \rho_{k-ps}, \quad k = 1,2,\ldots. \tag{3.25}$$

Melalui penjabaran $k = 1,2,\ldots,p$ kedalam persamaan (3.25) ini dan menggunakan $\rho_0 = 1$ serta $\rho_{-k} = \rho_k$, maka diperoleh ***Persamaan Yule-Walker*** yang didefinisikan sebagai berikut

$$\begin{aligned}
&\rho_1 = \Phi_1 + \Phi_2\rho_1 + \Phi_3\rho_2 + \ldots + \Phi_p\rho_{p-1},\\
&\rho_2 = \Phi_1\rho_1 + \Phi_2 + \Phi_3\rho_1 + \ldots + \Phi_p\rho_{p-2},\\
&\rho_3 = \Phi_1\rho_1 + \Phi_2\rho_2 + \Phi_3 + \ldots + \Phi_p\rho_{p-3},\\
&\vdots\\
&\rho_p = \Phi_1\rho_{p-1} + \Phi_2\rho_{p-2} + \Phi_3\rho_{p-3} + \ldots + \Phi_p.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Dari persamaan (3.26) ini selanjutnya dapat diselesaikan untuk mendapat taksiran $\Phi_1,\Phi_2,\ldots,\Phi_p$ dan autokorelasi $\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_p$ dari pengujian kestasioneran model AR maka nilai ACF dan PACF model $AR(p)$[12] didapat sebagai berikut:

Tabel 3.1 ACF dan PACF $AR(p)$[12]

Model	ACF	PACF
$AR(1)$[12]	$\rho_1 = \Phi_1$	$\Phi_1 = \rho_1$
$AR(2)$[12]	$\rho_1 = \Phi_1 + \rho_1\Phi_2$ $\rho_2 = \Phi_1\ \rho_1 + \Phi_2\ \rho_0$	$\Phi_{11} = \rho_1 = \dfrac{\Phi_1}{1-\Phi_2}$ $\Phi_{22} = \dfrac{\rho_2 - \rho_1^2}{1-\rho_1^2} = \Phi_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$AR(p)$[12]	$\rho_p = \Phi_1\rho_{p-1} + \Phi_2\rho_{p-2} + \Phi_3\rho_{p-3} + \ldots + \Phi_p$	$\Phi_{pp} = \dfrac{\rho_p - \rho_{p-1}^2 - \ldots - \rho_{p-(p-1)}^2}{1-\rho_{p-1}^2 - \ldots - \rho_{p-(p-1)}^2} = \Phi_p$

Sehingga dari tabel (3.1) di atas dapat disimpulkan bahwasanya untuk proses $AR(p)^{12}$ memiliki pola ACF *dies down* (turun eksponensial) dan PACF *cuts off* (terputus) setelah lag p .

d. Proses MA(1)^{12}

Suatu proses $\{X_t\}$ dikatakan mengikuti model MA$(1)^{12}$ jika $\{X_t\}$ mengikuti model :

$$X_t = e_t - \Theta_1 e_{t-12}\,, \tag{3.27}$$

Dari model (3.27), selanjutnya untuk mendapat nilai ACF dari proses MA$(1)^{12}$ adalah dengan cara mengalikan kedua sisi pada persamaan (3.27) dengan X_{t-k} :

$$(X_t.X_{t-k}) = [(e_t - \Theta_1 a_{t-12}) \times (e_{t-k} - \Theta_1 e_{t-k-12})] \tag{3.28}$$

Kemudian dari (3.28) dicari nilai harapan dengan cara sebagai berikut:

$$E(X_t.X_{t-k}) = E[(e_t - \Theta_1 e_{t-12}) \times (e_{t-k} - \Theta_1 e_{t-k-12})] \tag{3.29}$$

Berdasarkan definisi, $E(X_t.X_{t-1}) = \gamma_1$, $E(e_t e_{t-k}) = \gamma_0$ untuk $k = 0$ dan $E(e_t.e_{t-k}) = 0$ untuk $k \neq 0$. Diasumsikan bersifat stasioner, sehingga persamaan (3.29) tersebut dapat diubah menjadi:

$$\gamma_k = E[(e_t - \Theta_1 e_{t-1}) \times (e_{t-k} - \Theta_1 e_{t-k-s})] \tag{3.30}$$

$$\gamma_k = E[(e_t e_{t-k} - e_t \Theta_1 e_{t-k-1} - \Theta_1 e_{t-1} e_{t-k} - \Theta_1^2 e_{t-1} e_{t-k-1})] \tag{3.31}$$

Nilai harapan persamaan (3.31) akan bergantung pada nilai *k*. Sehingga apabila $k = 0,$ persamaan (3.31) menjadi

$$\gamma_0 = E(e_t e_{t-0}) + \Theta_1^2 E(e_{t-1} e_{t-0-1}) \tag{3.32}$$

Karena definisi $E(e_t e_{t+i}) = 0$ untuk $i \neq 0$ dan $E(e_t e_{t+i}) = \sigma_e^2$ untuk $i = 0$. Jadi, persamaan (3.32) dapat disederhanakan menjadi

$$\gamma_0 = \sigma_e^2 + \Theta_1^2 \sigma_e^2 \tag{3.33}$$

Bila faktor σ_e^2 dipisahkan , maka persamaan (3.33) dapat ditulis sebagai

$$\gamma_0 = (1 + \Theta_1^2)\sigma_e^2 \tag{3.34}$$

Persamaan (3.34) adalah varian dari proses MA(q).

Bila $k = 1$, persamaan (3.31) menjadi

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= -\Theta_1 E(e_{t-1} e_{t-1}), \\ \gamma_1 &= -\Theta_1 \sigma_e^2 \end{aligned} \tag{3.35}$$

Bila persamaan (3.35) dibagi (3.34) maka menghasilkan

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \frac{(-\Theta_1)\sigma_e^2}{(1+\Theta_1^2)\sigma_e^2} \tag{3.36}$$

Jadi untuk MA(1)[12], maka persamaaan (3.36) menjadi

$$\rho_k = \frac{-\Theta_k}{1+\Theta_1^2} \tag{3.37}$$

Sehingga persamaan untuk autokorelasi model MA(1)[12] menjadi

$$\rho_{12} = \frac{-\Theta_1}{1+\Theta_1^2} \tag{3.38}$$

Persamaan (3.38) dapat dipecahkan untuk Θ_1, untuk memperoleh

$$\rho_1 + \rho_1 \Theta_1^2 + \Theta_1 = 0 \tag{3.39}$$

Memecahkan persamaan (3.39) memperoleh dua nilai untuk Θ_1. Yang satu adalah nilai absolut yang lebih kecil dari 1, kemudian ini dipilih sebagai nilia awal Θ_1.

Dengan menggunakan rumus yang dikemukakan oleh Durbin (1960) yaitu:

$$\Theta_{kk} = \frac{\rho_k - \sum_{j=1}^{k-1} \Theta_{k-1,j}\ \rho_{k-j}}{1-\sum_{j=1}^{k-1} \Theta_{k-1,j}\ \rho_j} \tag{3.40}$$

di mana

$$\Theta_{kj} = \Theta_{k-1,j} - \Theta_{kk}\ \Theta_{k-1,k-j} \quad \text{untuk } j = 1,2,\ldots,k-1$$

maka dapat dicari nilai PACF untuk model $MA(1)^{12}$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\Theta_{11} = \rho_1 &= \frac{-\Theta}{1+\Theta_1^2}\cdot\frac{(1-\Theta_1^2)}{(1-\Theta_1^2)} \\ &= \frac{-\Theta(1-\Theta_1^2)}{1+\Theta_1^4}\end{aligned} \quad \text{untuk } k \geq 1 \tag{3.41}$$

dan untuk $k > 1$, $\Theta_{kk} = 0$. Dengan demikian PACF dari proses MA(1) adalah *cuts off* setelah lag 1.

Dari persamaan (3.41) diperoleh nilai PACF untuk model $MA(1)^{12}$ bernilai tidak sama dengan nol hanya pada lag 12, 24, 36, dan seterusnya. Sehingga dapat disimpulkan bahwa untuk model $MA(1)^{12}$, pola teoritik ACF adalah terputus setelah lag 12 dan PACFnya turun eksponensial pada lag-lag musimannya.

e. Proses MA(2)^{12}

Suatu proses $\{X_t\}$ dikatakan mengikuti model MA(2)^{12} jika $\{X_t\}$ mengikuti model :

$$X_t = e_t - \Theta_1 e_{t-s} - \Theta_2 e_{t-2s} \qquad (3.42)$$

Dari model (3.42), selanjutnya untuk mendapat nilai ACF dari proses $\mathrm{MA}(2)^{12}$ adalah dengan cara mengalikan kedua sisi pada persamaan (3.42) dengan X_{t-k} :

$$(X_t.X_{t-k}) = [(e_t - \Theta_1 e_{t-12} - \Theta_2 e_{t-24}) \times (e_{t-k} - \Theta_1 e_{t-12-k} - \Theta_2 e_{t-24-k})] \qquad (3.43)$$

Kemudian dari (3.43) dicari nilai harapan dengan cara sebagai berikut:

$$E(X_t.X_{t-k}) = E[(e_t - \Theta_1 e_{t-12} - \Theta_2 e_{t-24})(e_{t-k} - \Theta_1 e_{t-12-k} - \Theta_2 e_{t-24-k})] \qquad (3.44)$$

Berdasarkan definisi, $E(X_t X_{t-1}) = \gamma_1$, $E(e_t e_{t-k}) = \gamma_0$ untuk $k = 0$ dan $E(e_t e_{t-k}) = 0$ untuk $k \neq 0$. Diasumsikan bersifat stasioner, sehingga persamaan (3.44) tersebut dapat diubah menjadi:

$$\gamma_k = E[(e_t - \Theta_1 e_{t-s} - \Theta_2 e_{t-2s}) \times (e_{t-k} - \Theta_1 e_{t-k-s} - \Theta_2 e_{t-k-2s})] \qquad (3.45)$$

Nilai harapan persamaan (3.45) akan bergantung pada nilai k. Sehingga apabila $k = 0$, persamaan (3.45) menjadi:

$$\gamma_0 = E(e_t e_{t-0}) + \Theta_1^2 E(e_{t-1} e_{t-0-1}) + \Theta_2^2 E(e_{t-2} e_{t-0-2}) \qquad (3.46)$$

Karena definisi $E(e_t e_{t+i}) = 0$ untuk $i \neq 0$ dan $E(e_t e_{t+i}) = \sigma_e^2$ untuk $i = 0$.

Jadi, persamaan (3.46) menjadi

$$\gamma_0 = \sigma_e^2 + \Theta_1^2 \sigma_e^2 + \Theta_2^2 \sigma_e^2 \qquad (3.47)$$

Bila faktor σ_e^2 dipisahkan , maka persamaan (3.47) dapat ditulis sebagai

$$\gamma_0 = (1+\Theta_1^2+\Theta_2^2)\sigma_e^2. \tag{3.48}$$

Persamaan (3.48) adalah varian dari proses MA(2) .

Bila $k = 2$, persamaan (3.45) menjadi

$$\begin{aligned}
\gamma_2 &= -\Theta_1 E(e_{t-1}e_{t-1}) + \Theta_1\Theta_2 E(e_{t-2}e_{t-2}),\\
\gamma_2 &= -\Theta_1\sigma_e^2 + \Theta_1\Theta_2\sigma_e^2\\
\gamma_2 &= (-\Theta_1 + \Theta_1\Theta_2)\sigma_e^2
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Bila persamaan (3.49) dibagi (3.48) maka menghasilkan

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \frac{(-\Theta_1+\Theta_1\Theta_2)\sigma_e^2}{(1+\Theta_1^2+\Theta_2^2)\sigma_e^2} \tag{3.50}$$

Sehingga persamaan untuk autokorelasi model MA(2) menjadi

$$\rho_{24} = \frac{-\Theta_k + \Theta_1\Theta_{k+1}}{1+\Theta_1^2+\Theta_2^2} \tag{3.51}$$

dan

$$\rho_k = 0 \quad \text{untuk } k \neq 24$$

Sehingga pola teoritik ACF dari proses MA(2) adalah terputus setelah lag 24.

Kemudian dengan menggunakan rumus yang dikemukakan oleh Durbin (1960) yaitu:

$$\Theta_{kk} = \frac{\rho_k - \sum_{j=1}^{k-1} \Theta_{k-1,j}\ \rho_{k-j}}{1\text{-}\sum_{j=1}^{k-1} \Theta_{k-1,j}\ \rho_j} \tag{3.52}$$

di mana

$$\Theta_{kj} = \Theta_{k-1,j} - \Theta_{kk}\ \Theta_{k-1,k-j} \quad \text{untuk } j = 1,2,\ldots,k-1$$

maka dapat dicari nilai PACF untuk model MA(2)[12] sebagai berikut:

$$\Theta_{11} = \rho_1 = \frac{-\Theta_1}{1+\Theta_1^2} = \frac{-\Theta_1(1-\Theta_1^2)}{1-\Theta_1^4}$$

$$\Theta_{22} = \frac{\rho_1^2}{1-\rho_1^2} = \frac{-\Theta_1^2}{1+\Theta_1^2+\Theta_1^4} = \frac{-\Theta_1^2(1-\Theta_1^2)}{1-\Theta_1^6}$$

(3.53)

dan untuk $k > 2$, $\Theta_{kk} = 0$. Dengan demikian PACF dari proses MA(2) adalah *cuts off* setelah lag 2.

f. Proses Stasioner MA (q) Musiman

Sebagaimana telah diketahui model MA musiman yaitu

$$X_t = \mu + e_t - \Theta_1 e_{t-s} - \Theta_2 e_{t-2s} - \ldots - \Theta_q e_{t-qs} \tag{3.54}$$

Sehingga untuk mendapatkan ACF dari proses $\mathrm{MA}(q)^s$ adalah dengan mengalikan kedua sisi pada persamaan (3.54) dengan X_{t-k} dan kemudian mengambil ekspektasinya sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} X_{t-k}X_t = {} & (e_t - \Theta_1 e_{t-s} - \Theta_2 e_{t-2s} - \Theta_3 e_{t-3s} - \ldots - \Theta_Q e_{t-Qs}) \\ & \times\ (e_{t-k} - \Theta_1 e_{t-k-s} - \Theta_2 e_{t-k-2s} - \Theta_3 e_{t-k-3s} - \ldots - \Theta_Q e_{t-k-Qs}) \end{aligned} \tag{3.55}$$

Kemudian memasukkan nilai harapan (*expected value*) pada kedua sisi persamaan (3.55) sehingga persamaan tersebut akan menjadi

$$\begin{aligned} \gamma_k = {} & E[(e_t - \Theta_1 e_{t-1} - \Theta_2 e_{t-2} - \Theta_3 e_{t-3} - \ldots - \Theta_q e_{t-q}) \\ & \times (e_{t-k} - \Theta_1 e_{t-k-1} - \Theta_2 e_{t-k-2} - \Theta_3 e_{t-k-3} - \ldots - \Theta_q e_{t-k-q})] \end{aligned} \tag{3.56}$$

$$\begin{aligned} \gamma_k = E[& (e_t e_{t-k} - e_t\Theta_1 e_{t-k-1} - e_t\Theta_2 e_{t-k-2} - \ldots - e_t\Theta_q e_{t-k-q}) + \\ & (-\Theta_1 e_{t-1}e_{t-k} - \Theta_1^2 e_{t-1}e_{t-k-1} - \ldots - \Theta_1\Theta_q e_{t-1}e_{t-k-q}) + \\ & (-\Theta_2 e_{t-2}e_{t-k} - \Theta_2\Theta_1 e_{t-2}e_{t-k-1} - \ldots - \Theta_2\Theta_q e_{t-2}e_{t-k-q}) + \\ & \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ & (-\Theta_q e_{t-q}e_{t-k} - \Theta_q e_{t-q}e_{t-k-1} - \ldots - \Theta_q^2 e_{t-q}e_{t-k-q})] \end{aligned} \tag{3.57}$$

Nilai harapan persamaan (3.57) akan bergantung pada nilai k. Sehingga apabila $k=0,$ persamaan (3.57) menjadi

$$\gamma_0 = E(e_t e_{t-0}) + \Theta_1^2 E(e_{t-1} e_{t-0-1}) + \theta_2^2 E(e_{t-2} e_{t-0-2}) + \ldots + \Theta_q^2 E(e_{t-q} e_{t-0-q}) \qquad (3.58)$$

Karena definisi $E(e_t e_{t+i}) = 0$ untuk $i \neq 0$ dan $E(e_t e_{t+i}) = \sigma_e^2$ untuk $i = 0$.

Jadi, persamaan (3.58) menjadi

$$\gamma_0 = \sigma_e^2 + \Theta_1^2 \sigma_e^2 + \Theta_2^2 \sigma_e^2 + \Theta_3^2 \sigma_e^2 + \ldots + \Theta_q^2 \sigma_e^2 \qquad (3.59)$$

Bila faktor σ_e^2 dipisahkan , maka persamaan (3.59) dapat ditulis sebagai

$$\gamma_0 = (1 + \Theta_1^2 + \Theta_2^2 + \Theta_3^2 + \ldots + \Theta_q^2)\sigma_e^2 \qquad (3.60)$$

Persamaan (3.60) adalah varian dari proses MA(q) .

Bila $k=1$, persamaan (3.57) menjadi

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= -\Theta_1 E(e_{t-1} e_{t-1}) + \Theta_1 \Theta_2 E(e_{t-2} e_{t-2}) + \ldots + \Theta_{q-1} \Theta_q E(e_{t-q-1} e_{t-q-1}), \\ \gamma_1 &= -\Theta_1 \sigma_e^2 + \Theta_1 \Theta_2 \sigma_e^2 + \ldots + \Theta_{q-1} \Theta_q \sigma_e^2 \end{aligned} \qquad (3.61)$$

Nilai suatu suku lainnya adalah 0 karena $E(e_t) = 0$,,

Secara umum untuk $k=k$, persamaan (3.57) menjadi

$$\begin{aligned} \gamma_k &= -\Theta_k \sigma_e^2 + \Theta_1 \Theta_{k+1} \sigma_e^2 + \Theta_2 \Theta_{k+2} \sigma_e^2 + \ldots + \Theta_{q-k} \Theta_q \sigma_e^2, \\ &\text{atau} \\ \gamma_k &= (-\Theta_k + \Theta_1 \Theta_{k+1} + \Theta_2 \Theta_{k+2} + \ldots + \Theta_{q-k} \Theta_q)\sigma_e^2. \end{aligned} \qquad (3.62)$$

Bila persamaan (3.62) di bagi (3.60) maka menghasilkan

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \frac{(-\Theta_k + \Theta_1 \Theta_{k+1} + \Theta_2 \Theta_{k+2} + \ldots + \Theta_{q-k} \Theta_q)\sigma_e^2}{(1 + \Theta_1^2 + \Theta_2^2 + \Theta_3^2 + \ldots + \Theta_q^2)\sigma_e^2} \qquad (3.63)$$

Akhirnya dari pengujian kestasioneran maka nilai ACF dan PACF model $MA(q)$[12] dapat dilihat di tabel (3.2) sebagai berikut:

Tabel 3.2 ACF dan PACF $MA(q)^{12}$

Model	ACF	PACF
$MA(1)^{12}$	$\rho_{12}=\dfrac{-\Theta_1}{1+\Theta_1^2}$	$\Theta_1=\dfrac{-\Theta_1^k(1-\Theta_1^2)}{1-\Theta_1^{2(k+1)}}$
$MA(2)^{12}$	$\rho_{12}=\dfrac{-\Theta_1+\Theta_1\Theta_2}{1+\Theta_1^2+\Theta_2^2}$ $\rho_{24}=\dfrac{-\Theta_2}{1+\Theta_1^2+\Theta_2^2}$	$\Theta_{11}=\rho_1=\dfrac{-\Theta_1}{1+\Theta_1^2}$ $=\dfrac{-\Theta_1(1-\Theta_1^2)}{1-\Theta_1^4}$ $\Theta_{22}=\dfrac{\rho_1^2}{1-\rho_1^2}=\dfrac{-\Theta_1^2}{1+\Theta_1^2+\Theta_1^4}$ $=\dfrac{-\Theta_1^2(1-\Theta_1^2)}{1-\Theta_1^6}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$MA(q)^{12}$	$\rho_k=\dfrac{(-\Theta_k+\Theta_1\Theta_{k+1}+\Theta_2\Theta_{k+2}+\ldots+\Theta_{q-k}\Theta_q)\sigma_e^2}{(1+\Theta_1^2+\Theta_2^2+\Theta_3^2+\ldots+\Theta_q^2)\sigma_e^2}$	$\Theta_{kk}=\dfrac{-\Theta_1^k+\Theta_2^k+\ldots+\Theta_k^k(1-\Theta_k^2)}{1-\Theta_k^{2(k+1)}}$

Sehingga dari tabel (3.2) diatas dapat disimpulkan bahwasanya untuk proses $MA(q)^{12}$ memiliki pola ACF *cuts off* (terputus) setelah lag q, sedangkan pola PACF *dies down* (turun eksponensial).

3.2 Kausalitas

Dari pengujian kestasioneran model ARIMA musiman menggunakan ACF dan PACF didapatkan bahwasanya model ARIMA musiman yang stasioner, memiliki parameter model AR musiman yaitu $\Phi<1$ dan parameter model MA musiman $\Theta<1$. Hal tersebut merupakan kausalitas, yaitu akibat parameter model **kurang dari satu** menyebabkan model ARIMA musiman menjadi model yang stasioner.

Dari fungsi autokorelasi yang di dapat pada persamaan (3.26) yaitu:

$$\rho_k-\Phi_1\rho_{k-s}-\Phi_1\rho_{k-2s}-\ldots-\Phi_1\rho_{k-ps}=0 \tag{3.64}$$

$$(1-\Phi_1 B-\Phi_2 B^{2s}-...-\Phi_p B^{ps})\rho_k=0 \quad (3.65)$$

yang ditulis

$$\Phi(B)=0 \quad (3.66)$$

$$(1-\Phi_1 B)(1-\Phi_2 B)...(1-\Phi_{ps} B)\rho_k=0 \quad (3.67)$$

Agar nilai-nilai ρ_k tetap stasioner maka $|\Phi|<1$. Maka syarat model yang stasioner untuk $AR(p)^{12}$ adalah akar-akar persamaan $\Phi(B)=1-\Phi_1 B-\Phi_2 B^{2s}-...-\Phi_p B^{ps}=0$ yaitu dengan $|\Phi|<1$.

Sehingga untuk mengetahui $|\Phi|<1$ maka dapat dilakukan sebagai berikut:

$$X_t=\Phi_1 X_{t-s}+\Phi_2 X_{t-2s}+e_t \quad (3.68)$$

Agar stasioner (kausal) maka akar-akar dari polinomial $D(z)=|-\Phi_1 z-\Phi_2 z^2|$ harus berada di luar *unit circle* (lingkaran satuan), yakni $|z_i|>1, i=1,2$.

Kondisi stasioner dari $AR(2)$ dapat dinyatakan dengan parameter Φ_1, Φ_2. Akar-akar dari $D(z)=1-\Phi_1 z-\Phi_2 z^2$ adalah

$$z_1=\frac{\Phi+\sqrt{\Phi_1^2+4\Phi_2}}{-2\Phi_2}\;,\; z_2=\frac{\Phi_1-\sqrt{\Phi_1^2+4\Phi_2}}{-2\Phi_2} \quad (3.69)$$

Jika z_1, z_2 akar-akar dari persamaan $D(z)$ maka

$$D(z)=(1-\frac{1}{z_1}z)(1-\frac{1}{z_2}z)=0$$

$$=1-(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2})z+(\frac{1}{z_1}\frac{1}{z_2})=0$$

$$\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}=\frac{-2\Phi_2}{\Phi_1+\sqrt{\Phi_1^2+4\Phi_2}}+\frac{-2\Phi_2}{\Phi_1-\sqrt{\Phi_1^2+4\Phi_2}}=-\Phi_1$$

$$\frac{1}{z_1}.\frac{1}{z_2}=\frac{4\Phi_2^2}{4\Phi_2^2}=\Phi_2$$

Kondisi untuk stasioner : $|z_i|>1 \Leftrightarrow \left|\frac{1}{z_i}\right|<1, i=1,2$ maka

$$|\Phi_2|=\left|\frac{1}{z_1}\frac{1}{z_2}\right|<1 \Rightarrow -1<\Phi_2<1$$

$$|\Phi_2|=\left|\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}\right|<2 \Rightarrow -2<\Phi_1<2$$

Untuk akar-akar real:

$$\Phi_1^2+4\Phi_2^2\geq 0$$

$$-1<\frac{1}{z_1}=\frac{2a_2}{-\Phi_1+\sqrt{\Phi_1^2+4\Phi_2}}\leq\frac{2\Phi_2}{-\Phi-\sqrt{\Phi_1^2+4\Phi_2}}=\frac{1}{z_2}<1$$

$$-1<\frac{2\Phi_2}{-\Phi+\sqrt{\Phi_1^2+4\Phi_2}}<1,$$

$$\frac{2\Phi_2}{-\Phi+\sqrt{\Phi_1^2+4\Phi_2}}<1$$

$$2\Phi_2+\Phi_1<\sqrt{\Phi_1^2+4\Phi_2},$$

$$\Leftrightarrow 4\Phi_2^2+4\Phi_2\Phi_1+\Phi_1^2<\Phi_1^2+4\Phi_2$$

$$\Leftrightarrow 4\Phi_2^2+4\Phi_2\Phi_1-4\Phi_2<0$$

$$\Leftrightarrow 4(\Phi_2)(\Phi_2+\Phi_1-1)<0$$

$$\Leftrightarrow (\Phi_2+\Phi_1)<1$$

$$\frac{2\Phi_2}{-\Phi_1+\sqrt{\Phi_1^2+4\Phi_2}}>-1$$

$$\Leftrightarrow 2\Phi_2-\Phi_1>\sqrt{\Phi_1^2+4\Phi_2}$$

$$\Leftrightarrow \Phi_1-2\Phi_2<\sqrt{\Phi_1^2+4\Phi_2}$$

$$\Leftrightarrow -4\Phi_2(\Phi_1-\Phi_2+1)<0$$

$$\Leftrightarrow \Phi_1-\Phi_2<1$$

3.3 Invertabilitas

Sesuai dengan pengertian *invertible* yaitu dapat dibalik. Yang mana invertible berlaku pada model yang stasioner. Sehingga sesuai dengan pembahasan tentang model yang stasioner, maka dapat dilihat bahwasanya *invertible* akan berlaku pada model MA.

Proses MA(q) dikatakan *invertible*, dapat ditulis dalam bentuk AR tingkat tak berhingga, dan *invertible* akan berlaku jika harga koefisien-koefisien π merupakan deret yang konvergen, yaitu hanya apabila akar-akar $\pi(B)=0$ yaitu semuanya terletak di luar lingkaran satuan, yang mana hal tersebut merupakan suatu syarat yang serupa dengan syarat stasioneritas dari suatu proses AR(p). Persamaan (3.68) menunjukkan bahwa proses MA(q) ekivalen dengan suatu proses AR, $\Phi(B)X_t = e_t$ dengan $\Phi(B)=\pi(B)=\Theta^{-1}(B)$, yaitu proses AR($\infty$). Dengan cara yang sama, suatu proses AR(p), $\Phi(B)X_t = e_t$ (yang selalu *invertible*) dapat ditulis sebagai suatu proses MA(∞), $X_t = \psi(B)e_t$, dimana $\psi(B)=\Phi^{-1}(B)$.

Pada model MA(q)[12] terdapat syarat invertabilitas yaitu syarat kekonvergenan untuk e_t dengan bukti sebagai berikut:

$$\Theta^{-1}(B)X_t = e_t \tag{3.70}$$

atau dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} X_t &= (1 - e_1 B - e_2 B^{2s} - \ldots - e_q B^{qs})e_t \\ &= \Theta(B)e_t \end{aligned} \tag{3.71}$$

$$e_t = \frac{1}{\Theta(B)} X_t$$
$$= \frac{1}{(1-\Theta_1 B - \Theta_2 B^{2s} - \ldots - \Theta_q B^{qs})} X_t \quad (3.72)$$

Syarat invertabilitas untuk model MA(q)[12] adalah $1-\Theta_1 B - \Theta_2 B^{2s} - \ldots - \Theta_q B^{qs}$ yaitu dengan $|\Phi| < 1$.

Suatu proses ARMA (p,q) didefinisikan dengan persamaan:

$$D(B)X_t = C(B)e_t \quad (3.73)$$

Dengan

$$D(z) = 1 - \Theta_1 z - \ldots - \Theta_p z^p$$
$$C(z) = 1 + \Theta_1 z + \ldots + \Theta_q z^q \quad (3.74)$$

Jadi proses autoregresif dan moving average dapat dipandang sebagai ekivalen, sehingga apabila model tersebut merupakan model tingkat rendah yaitu misal tingkat satu (AR atau MA) maka akan dapat menjelaskan dengan baik suatu *time* series. Demikian juga dengan model tingkat tinggi tipe yang lain. Namun dengan menggunakan prinsip parsimony (sederhana) maka akan terpilih model dengan tingkat rendah sebagai representasi *time series* itu atau sebagai model yang terbaik.

Sehingga dapat disimpulkan bahwasanya model MA akan dapat menjadi model AR tak hingga sehingga dapat dikatakan bahwasanya model MA akan selalu stasioner (kondisi yang *invertible* pasti stasioner).

3.4 Integrasi Model Arima dalam Agama Islam

Allah SWT dalam salah satu ayat-Nya menjelaskan pentingnya manusia untuk berencana dan berfikir mengenai hari esok, yakni dalam Q.S Al-Hasyr (59): 18

يَٰٓأَيُّهَا ٱلَّذِينَ ءَامَنُوا۟ ٱتَّقُوا۟ ٱللَّهَ وَلْتَنظُرْ نَفْسٌ مَّا قَدَّمَتْ لِغَدٍ ۖ وَٱتَّقُوا۟ ٱللَّهَ ۚ إِنَّ ٱللَّهَ خَبِيرٌۢ
بِمَا تَعْمَلُونَ ﴿١٨﴾

"Hai orang-orang yang beriman, bertakwalah kepada Allah dan hendaklah setiap diri memperhatikan apa yang telah diperbuatnya untuk hari esok (akhirat); dan bertakwalah kepada Allah, Sesungguhnya Allah Maha mengetahui apa yang kamu kerjakan"

Ayat di atas apabila dikaitkan dengan ilmu Matematika, maka sama halnya dengan salah satu model peramalan matematika yang memperkirakan apa yang terjadi dimasa yang akan datang. Salah satu metode peramalan tersebut yaitu dengan menggunakan model ARIMA.

Selain itu, dalam salah satu ayat-Nya yang lain, Allah SWT juga menerangkan tentang istiqomah. Dalam kehidupan ini, Allah menjamin kebahagian untuk orang-orang yang istiqomah. Sebagaimana terdapat pada Q.S Fushshilat (41): 30

إِنَّ ٱلَّذِينَ قَالُوا۟ رَبُّنَا ٱللَّهُ ثُمَّ ٱسْتَقَٰمُوا۟ تَتَنَزَّلُ عَلَيْهِمُ ٱلْمَلَٰٓئِكَةُ أَلَّا تَخَافُوا۟ وَلَا تَحْزَنُوا۟
وَأَبْشِرُوا۟ بِٱلْجَنَّةِ ٱلَّتِى كُنتُمْ تُوعَدُونَ ﴿٣٠﴾

"Sesungguhnya orang-orang yang mengatakan: "Tuhan kami ialah Allah" Kemudian mereka meneguhkan pendirian mereka, Maka malaikat akan turun kepada mereka dengan mengatakan: "Janganlah kamu takut dan janganlah merasa sedih; dan gembirakanlah mereka dengan jannah yang Telah dijanjikan Allah kepadamu" (Q.S Fushshilat (41): 30"

Istiqomah merupakan suatu kondisi yang mana kondisi tersebut stabil dan kontinu. Terkait dengan pembahasan ARIMA, istiqomah tersebut dapat digambarkan dalam kestasioneran. Stasioner dalam model ARIMA yaitu model yang memiliki parameter $-1<\Phi<1$. Kondisi stasioner tersebut merupakan syarat kausalitas dan invertabilitas, yang apabila suatu model memenuhi syarat tersebut, maka model tersebut dapat dikatakan sebagai model yang baik. Sama halnya dengan istiqomah, yang mana apabila orang-orang melakukan suatu keistiqomahan (dalam kebaikan), tentunya hal tersebut menandakan bahwa orang tersebut tergolong orang-orang yang baik.

Untuk menjadi insan yang baik, tidak cukup bagi seseorang hanya dengan istiqomah saja, melainkan masih membutuhkan syarat lainnya, seperti menata niat, menjaga nafsu, dan lainnya. Hal ini juga tergambar dalam ARIMA. Sebagaimana yang telah disebutkan dalam Bab II, bahwa kestasioneran dalam model ARIMA merupakan syarat perlu, bukan syarat cukup, sebab masih diperlukan syarat lain untuk menjamin stasioner. Untuk membuat data stasioner, maka perlu melakukan pembedaan pertama terhadap deret berkala. Hal tersebut sebagaimana kita melihat keistiqomahan seseorang, yang mana tidak cukup sekali lalu kita dapat mengatakan orang tersebut istiqomah.

Dengan pembahasan integrasi antara kajian agama (istiqomah) dan model ARIMA (kestasioneran) tersebut, dapat diketahui dan yakin bahwa Allah SWT menciptakan segala sesuatu tanpa ada yang sia-sia, semua tentu ada kaitannya satu sama lain. Sungguh Allah maha benar dengan segala firman-Nya.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Dari hasil pembahasan dapat disimpulkan bahwa model terbaik dari ARIMA (p,d,q) musiman yaitu yang memenuhi unsur kausalitas dan invertabilitas adalah model ARIMA $(1,0,1)^{12}$.

4.2 Saran

Pada penelitian ini dilakukan untuk mengetahui kausalitas dan invertabilitas model ARIMA (p,d,q) musiman dengan menggunakan alat statistik ACF dan PACF. Untuk penelitian selanjutnya dapat melakukan analisis kausalitas dan invertabilitas model ARIMA (p,d,q) musiman dengan alat stasistik yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

Abidin, Danial Z. 2007. Al-Qur'an for Live Excellent. Jakarta: PT Mizan Publika.

Brockwell, P.J and Davis, R.A. 2006. *Time Series Theory and Methods*. New York: Springer Science+Business Media, LLC.

Cryer, J.D and Chan, Kung-Sik. 2008. *Time Series Analysis With Applications*. Iowa City: Springer Science+Business Media, LLC.

Durbin. 1960. *The Fitting of Time Series Models*. Review of the Institute of international Statistics.

Hanke, J.E., Wichern, D.W., Reitsch, A.G. 2003. *Peramalanan Bisnis*. Jakarta: PT Prenhallindo.

Reza. "Download Data Curah Hujan tahun 2006-2012." *http://pengairan.purworejokab.go.id/download-data-curah-hujan-tahun-2006-2012/* (diakses tanggal 9 September 2012).

Machmud, Sakib. 2005. Mutiara Juz 'Amma. Bandung: Mizan.

Makridakis. 1999. *Metode dan Aplikasi Peramalan* Jilid 1. Edisi ke-2 terjemahan Untung Sus Andriyanto. Jakarta: Erlangga.

Mulyono. 2000. *Ekonomi Internasional*. Yogyakarta: BPFE-Yogyakarta.

Katsir, Ibnu. 2004. *Tafsir Ibnu Katsir*. Bogor: Pustaka Imam Asy-Syafi'i.

Sugiarto dan Hardjono. 2000. *Peramalan Bisnis*. Jakarta: PT Gramedia Pustaka Utama.

Wei, W.W.S., 2006. *Time Series Analysis: Univariate and Multivariate Methods*. New York: Pearson Addison-Wesley.

Lampiran 1

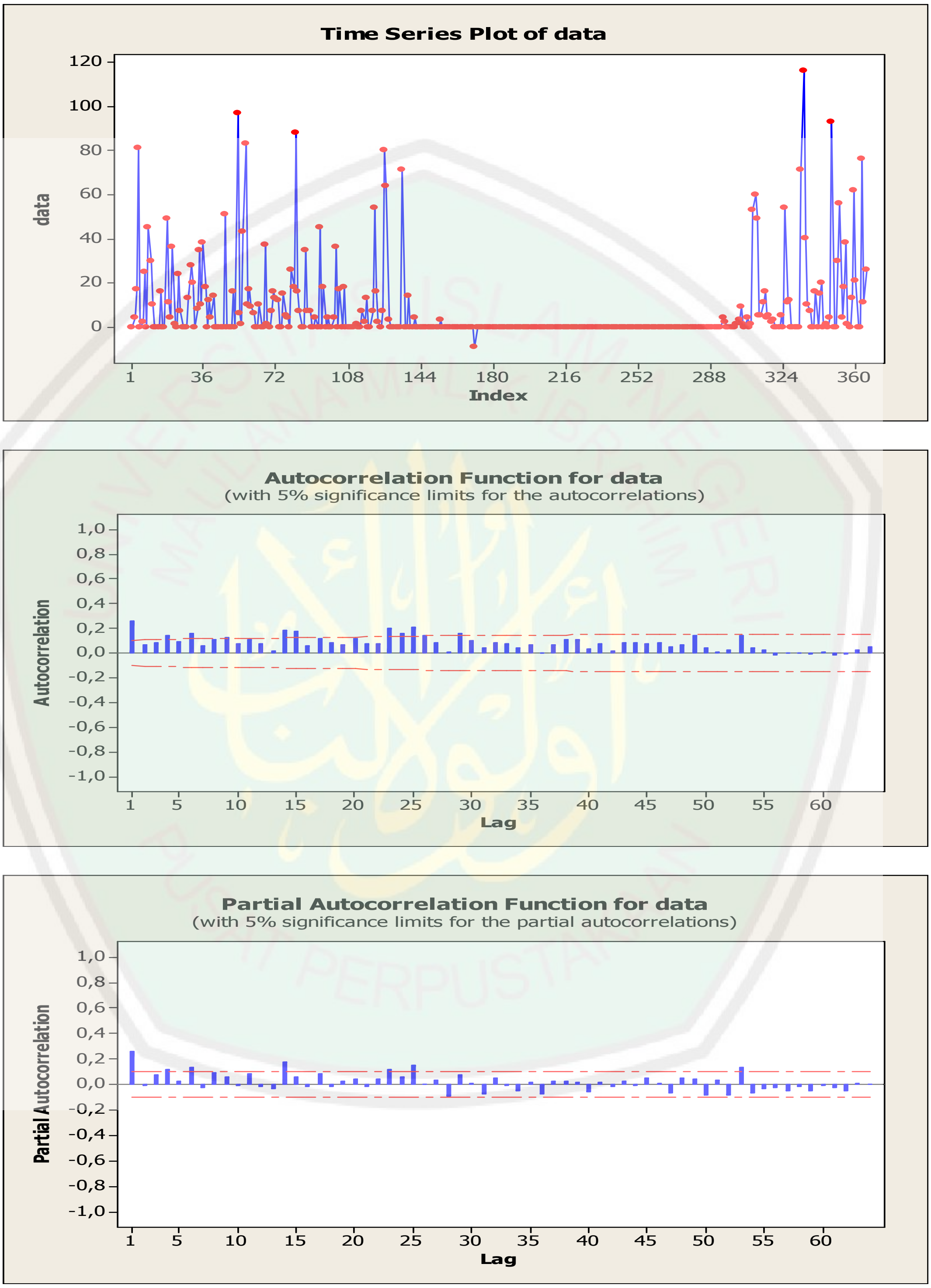
Data Curah Hujan Harian Purworejo Tahun 2011 (dalam mm/dtk)

TGL	JAN	FEB	MAR	APR	MEI	JUN	JUL	AGS	SEP	OKT	NOV	DES
1	0	0	9	0	54	0	0	0	0	0	0	40
2	4	8	6	4	16	0	0	0	0	0	4	10
3	17	35	0	0	2	3	0	0	0	0	0	7
4	81	10	0	45	0	0	0	0	0	0	1	0
5	0	38	10	0	7	0	0	0	0	0	53	0
6	2	18	0	18	80	0	0	0	0	0	60	16
7	25	0	0	0	64	0	0	0	0	0	49	0
8	0	12	37	4	3	0	0	0	0	0	5	15
9	45	4	1	0	0	0	0	0	0	0	5	20
10	30	14	0	0	0	0	0	0	0	0	11	0
11	10	0	7	4	0	0	0	0	0	0	16	1
12	0	0	16	36	0	0	0	0	0	0	4	0
13	0	0	13	0	0	0	0	0	0	0	5	4
14	0	0	12	17	0	0	0	0	0	0	2	93
15	16	0	0	0	71	0	0	0	0	0	3	0
16	0	51	0	18	0	0	0	0	0	0	0	0
17	0	0	15	0	0	0	0	0	0	0	0	30
18	49	0	5	0	14	0	0	0	0	0	0	56
19	11	0	4	0	0	0	0	0	0	0	5	4
20	4	16	0	0	0	-9	0	0	0	0	0	18
21	36	0	26	0	4	0	0	0	0	4	54	38
22	1	97	18	1	0	0	0	0	0	2	11	1
23	0	6	88	0	0	0	0	0	0	0	12	0
24	24	1	16	0	0	0	0	0	0	0	0	13
25	7	43	7	7	0	0	0	0	0	0	0	62
26	0	83	0	2	0	0	0	0	0	0	0	21
27	0	10	0	13	0	0	0	0	0	0	0	0
28	0	17	35	0	0	0	0	0	0	1	0	0
29	13		7	0	0	0	0	0	0	3	71	76
30	28		7	7	0	0	0	0	0	9	116	11
31	20		0		0		0	0		1		26

Sumber: http://pengairan.purworejokab.go.id/download-data-curah-hujan-tahun-2006-2012/

Lampiran 2

Plot data, ACF, dan PACF data curah hujan Purworejo Tahun 2011



Gambar 3.1 Plot data, ACF, dan PACF data curah hujan Purworejo Tahun 2011

Identifikasi awal dengan melihat plot data, nilai sampel ACF dan PACF-nya dapat dilihat pada gambar 3.1. Identifikasi ini mengindikasikan bahwa data curah hujan Purworejo Tahun 2011 model ARIMA(1,0,1) atau ARMA(1,1), karena bentuk grafik sampel ACF yang *dies down* dan grafik PACF juga *dies down* yaitu turun secara eksponensial setelah lag 1.

Lampiran 3
Output ACF:

Autocorrelation Function: data

Lag	ACF	T	LBQ
1	0,262485	5,01	25,36
2	0,064974	1,16	26,91
3	0,082429	1,47	29,43
4	0,144157	2,56	37,14
5	0,092924	1,62	40,35
6	0,159623	2,76	49,86
7	0,061258	1,04	51,26
8	0,112251	1,90	55,99
9	0,125620	2,10	61,93
10	0,074456	1,23	64,02
11	0,111667	1,84	68,74
12	0,075753	1,24	70,92
13	0,012546	0,20	70,98
14	0,184918	3,01	84,03
15	0,179409	2,85	96,35
16	0,059342	0,92	97,70
17	0,113814	1,76	102,68
18	0,083600	1,28	105,38
19	0,067819	1,04	107,16
20	0,119022	1,81	112,66
21	0,071653	1,08	114,66
22	0,074276	1,12	116,82
23	0,196413	2,95	131,93
24	0,157776	2,31	141,71
25	0,209383	3,03	158,98
26	0,140186	1,98	166,74
27	0,083803	1,17	169,53
28	0,004671	0,06	169,54
29	0,159115	2,21	179,63
30	0,099842	1,37	183,62
31	0,045533	0,62	184,45
32	0,079995	1,09	187,02
33	0,077572	1,05	189,45
34	0,042229	0,57	190,17
35	0,068510	0,93	192,08
36	-0,003412	-0,05	192,08
37	0,066680	0,90	193,90
38	0,108916	1,47	198,76
39	0,110515	1,48	203,77
40	0,037516	0,50	204,35
41	0,073782	0,98	206,61
42	0,019225	0,26	206,76
43	0,081464	1,08	209,52
44	0,082515	1,09	212,36
45	0,076815	1,01	214,83
46	0,080879	1,06	217,58
47	0,047850	0,63	218,54
48	0,069603	0,91	220,59
49	0,144715	1,89	229,47
50	0,041081	0,53	230,18
51	0,008159	0,11	230,21
52	0,028763	0,37	230,57
53	0,142524	1,84	239,29
54	0,042888	0,55	240,08
55	0,024717	0,32	240,34
56	-0,017396	-0,22	240,48
57	-0,003649	-0,05	240,48
58	0,003410	0,04	240,49

59	-0,004835	-0,06	240,50
60	0,007883	0,10	240,52
61	-0,012725	-0,16	240,60
62	-0,006365	-0,08	240,61
63	0,021797	0,28	240,82
64	0,050548	0,65	241,96

Autocorrelation for data

Lampiran 4
Output PACF:

Partial Autocorrelation Function: Data

Lag	PACF	T
1	0,262485	5,01
2	-0,004214	-0,08
3	0,071324	1,36
4	0,113541	2,17
5	0,027603	0,53
6	0,133118	2,54
7	-0,026705	-0,51
8	0,090827	1,74
9	0,060039	1,15
10	-0,006033	-0,12
11	0,086480	1,65
12	-0,018225	-0,35
13	-0,031897	-0,61
14	0,173576	3,32
15	0,055260	1,06
16	-0,016282	-0,31
17	0,081588	1,56
18	-0,020747	-0,40
19	0,022001	0,42
20	0,042845	0,82
21	-0,017068	-0,33
22	0,041155	0,79
23	0,118440	2,26
24	0,058540	1,12
25	0,148085	2,83
26	-0,001066	-0,02
27	0,031865	0,61
28	-0,092972	-1,78
29	0,076497	1,46
30	0,007307	0,14
31	-0,077147	-1,47
32	0,048274	0,92
33	-0,011168	-0,21
34	-0,047904	-0,92
35	0,020173	0,39
36	-0,073236	-1,40
37	0,026783	0,51
38	0,027169	0,52
39	0,017734	0,34
40	-0,061141	-1,17
41	0,014972	0,29
42	-0,018590	-0,36
43	0,025935	0,50
44	-0,009140	-0,17
45	0,046488	0,89
46	0,011017	0,21
47	-0,064330	-1,23
48	0,046141	0,88
49	0,039272	0,75
50	-0,079902	-1,53
51	0,031076	0,59
52	-0,079416	-1,52
53	0,137516	2,63
54	-0,070790	-1,35
55	-0,032089	-0,61
56	-0,027738	-0,53
57	-0,053796	-1,03
58	-0,017065	-0,33

```
 59  -0,046987  -0,90
 60  -0,007237  -0,14
 61  -0,024698  -0,47
 62  -0,048288  -0,92
 63   0,004655   0,09
 64  -0,002972  -0,06
```

Partial Autocorrelation for data

Lampiran 5
Output peramalan curah hujan di Purworejo 24 bulan mendatang dengan ARIMA (1,0,1)^{12}

ARIMA Model: data

```
Estimates at each iteration

Iteration      SSE             Parameters
        0   137293  0,100  0,100   0,100  0,100
        1   116753  0,249  0,162  -0,050  0,038
        2   116167  0,278  0,312  -0,024  0,188
        3   115620  0,311  0,462   0,008  0,338
        4   115094  0,348  0,611   0,046  0,488
        5   114520  0,386  0,759   0,091  0,638
        6   113219  0,403  0,898   0,123  0,788
        7   112746  0,373  1,010   0,113  0,930
        8   109193  0,292  0,991   0,048  0,931
        9   109030  0,263  0,988   0,010  0,935
       10   109019  0,249  0,987  -0,008  0,936
       11   109018  0,241  0,987  -0,017  0,936
       12   109018  0,237  0,987  -0,022  0,936
       13   109018  0,234  0,987  -0,024  0,936
       14   109018  0,233  0,987  -0,026  0,936
       15   109018  0,233  0,987  -0,026  0,936
       16   109018  0,232  0,987  -0,026  0,936

Unable to reduce sum of squares any further

* WARNING * Back forecasts not dying out rapidly

Back forecasts (after differencing)

Lag  -86 - -81  11,268  13,472   7,815   3,414  0,864  14,989
Lag  -80 - -75   6,328   5,831   9,655  10,813  3,460   9,119
Lag  -74 - -69  11,415  13,649   7,918   3,459  0,875  15,185
Lag  -68 - -63   6,411   5,907   9,782  10,954  3,505   9,238
Lag  -62 - -57  11,565  13,827   8,021   3,504  0,887  15,384
Lag  -56 - -51   6,495   5,984   9,910  11,098  3,551   9,359
Lag  -50 - -45  11,716  14,008   8,126   3,550  0,898  15,586
Lag  -44 - -39   6,580   6,063  10,040  11,243  3,597   9,482
Lag  -38 - -33  11,870  14,192   8,233   3,596  0,910  15,790
Lag  -32 - -27   6,666   6,142  10,171  11,390  3,645   9,606
Lag  -26 - -21  12,025  14,377   8,340   3,644  0,922  15,996
Lag  -20 - -15   6,753   6,222  10,304  11,539  3,692   9,732
Lag  -14 -  -9  12,182  14,566   8,450   3,691  0,934  16,206
Lag   -8 -  -3   6,842   6,304  10,439  11,690  3,738   9,847
Lag   -2 -   0  12,289  14,527   7,572

Back forecast residuals

Lag  -86 - -81  0,236  0,273   0,113  0,038  0,001  0,380
Lag  -80 - -75  0,063  0,110   0,210  0,215  0,019  0,213
Lag  -74 - -69  0,454  0,531   0,221  0,074  0,002  0,740
Lag  -68 - -63  0,123  0,215   0,410  0,418  0,036  0,415
Lag  -62 - -57  0,661  0,777   0,323  0,109  0,002  1,082
Lag  -56 - -51  0,180  0,314   0,599  0,612  0,053  0,607
Lag  -50 - -45  0,858  1,011   0,420  0,141  0,003  1,408
Lag  -44 - -39  0,234  0,409   0,780  0,795  0,069  0,790
Lag  -38 - -33  1,045  1,233   0,512  0,172  0,004  1,718
Lag  -32 - -27  0,285  0,499   0,951  0,970  0,085  0,964
Lag  -26 - -21  1,224  1,445   0,600  0,202  0,004  2,013
Lag  -20 - -15  0,334  0,585   1,115  1,137  0,099  1,129
```

```
Lag  -14 -  -9  1,394  1,648   0,684  0,230  0,005  2,294
Lag   -8 -  -3  0,381  0,667   1,270  1,296  0,110  1,276
Lag   -2 -   0  1,507  1,625  -0,166

Final Estimates of Parameters

Type         Coef   SE Coef      T      P
AR    1    0,2322    0,1997   1,16  0,246
SAR  12    0,9871    0,0123  80,06  0,000
MA    1   -0,0264    0,2052  -0,13  0,898
SMA  12    0,9359    0,0313  29,89  0,000

Number of observations:  365
Residuals:    SS =  108964 (backforecasts excluded)
              MS =  302  DF = 361

Modified Box-Pierce (Ljung-Box) Chi-Square statistic

Lag             12      24      36      48
Chi-Square    21,4    59,2    90,3   104,3
DF               8      20      32      44
P-Value      0,006   0,000   0,000   0,000

Forecasts from period 24

                     95 Percent Limits
Period  Forecast     Lower     Upper   Actual
    25    7,3191  -26,7398  41,3780   7,0000
    26    1,9485  -33,2312  37,1282   0,0000
    27   13,9837  -21,2554  49,2228   0,0000
    28    9,0459  -26,1964  44,2882   0,0000
    29    4,7220  -30,5205  39,9645  13,0000
    30   10,4034  -24,8391  45,6458  28,0000
    31   10,4928  -24,7497  45,7353  20,0000
    32    2,9988  -32,2437  38,2412   0,0000
    33   11,3603  -23,8822  46,6027   8,0000
    34   10,5827  -24,6598  45,8252  35,0000
    35   11,3191  -23,9234  46,5616  10,0000
    36    7,4758  -27,7667  42,7183  38,0000
```