STUDI COPULA *FRANK FAMILY* 2-DIMENSI DALAM IDENTIFIKASI STRUKTUR DEPENDENSI

SKRIPSI

Oleh:
LAILIL WAKHIDATUS SOLIKHA
NIM. 08610005

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2012

STUDI COPULA *FRANK FAMILY* 2-DIMENSI
DALAM IDENTIFIKASI STRUKTUR DEPENDENSI

SKRIPSI

Oleh:
LAILIL WAKHIDATUS SOLIKHA
NIM. 08610005

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2012

STUDI COPULA *FRANK FAMILY* 2-DIMENSI
DALAM IDENTIFIKASI STRUKTUR DEPENDENSI

SKRIPSI

Diajukan kepada:
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
LAILIL WAKHIDATUS SOLIKHA
NIM. 08610005

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2012

STUDI COPULA *FRANK FAMILY* 2-DIMENSI
DALAM IDENTIFIKASI STRUKTUR DEPENDENSI

SKRIPSI

Oleh:
LAILIL WAKHIDATUS SOLIKHA
NIM. 08610005

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji:
Tanggal: 16 Januari 2012

Pembimbing I,

Fachrur Rozi, M.Si
NIP. 19800527 200801 1 012

Pembimbing II,

Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag
NIP. 19720420 200212 1 003

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

STUDI COPULA *FRANK FAMILY* 2-DIMENSI
DALAM IDENTIFIKASI STRUKTUR DEPENDENSI

SKRIPSI

Oleh:
LAILIL WAKHIDATUS SOLIKHA
NIM. 08610005

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal: 21 Januari 2012

Penguji Utama:	Sri Harini, M.Si NIP. 19731010 200112 2 001	....
Ketua Penguji:	Hairur Rahman, M.Si NIP. 19800429 200604 1 003	....
Sekretaris Penguji:	Fachrur Rozi, M.Si NIP. 19800527 200801 1 012	....
Anggota Penguji:	Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag NIP. 19720420 200212 1 003	....

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP.19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Lailil Wakhidatus Solikha

NIM : 08610005

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 21 Januari 2012
Yang membuat pernyataan,

Lailil Wakhidatus Solikha
NIM. 08610005

MOTTO

بِسۡمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحۡمَـٰنِ ٱلرَّحِيمِ ۝١

إِنَّ ٱللَّهَ لَا يُغَيِّرُ مَا بِقَوۡمٍ حَتَّىٰ يُغَيِّرُواْ مَا بِأَنفُسِهِمۡۗ

"Sesungguhnya Allah tidak merubah keadaan suatu kaum sehingga mereka Merubah keadaan yang ada pada diri mereka sendiri"
(Q.S. Ar Ra'd: 11)

"Terpenting bukanlah kemampuan tapi kemauan"

PERSEMBAHAN

Dengan mengucapkan syukur Alhamdulillah, karya sederhana ini

dipersembahkan kepada:

ibunda dan ayahanda, adik dan kakak-kakak serta seluruh keluarga

tercinta, juga tidak lupa watashi no koibitou.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Tiada ucapan yang lebih utama selain syukur *Alhamdulillah* penulis haturkan kepada Tuhan Yang Maha Sempurna, Allah Swt. yang telah melimpahkan segala nikmat, rahmat, karunia serta hidayah-Nya dari segala arah, sehingga penulis dapat menyelesaikan studi di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang sekaligus penulisan skripsi ini dengan baik.

Selanjutnya penulis bingkiskan ucapan terima kasih kepada semua pihak yang telah meringankan, menuntun, dan memapah langkah penulis. Ucapan terima kasih ini penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Drs. Sutiman B. Sumitro, SU., DSc, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
4. Fachrur Rozi, M.Si, sebagai pembimbing dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Atas bimbingan, arahan, saran, motivasi, dan kesabarannya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik, penulis sampaikan *jazakumullah ahsanul jaza'.*

5. Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag, sebagai pembimbing dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Atas bimbingan dan sarannya penulis sampaikan *jazakumullah ahsanul jaza'*.
6. Seluruh dosen Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, yang telah mendidik, membimbing, mengajarkan, dan mencurahkan ilmu-ilmunya kepada penulis. Semoga Allah membalas amal kebaikannya.
7. Kepada ibunda, ibunda, ibunda dan ayahanda tercinta, tersayang yang senantiasa menapaki jalan terjal serta tetesan butiran bening yang tiada henti mengalir untuk ketenangan dan keberkahan langkah penulis. *Allahummaghfirli wa li wa lidayya warhamhuma kama rabbayani shoghiro*.
8. Adik, kakak-kakak tersayang, serta *watashi no koibitou* yang telah memberikan dukungan, do'a, dan motivasi bagi penulis.
9. Sahabat-sahabat terbaik Novita R. Deviani, Yeni Rahmawati, dan Ida Putri Rarasati terima kasih atas do'a, semangat, kebersamaan, dan kenangan indah selama ini.
10. Seluruh teman-teman seperjuangan Jurusan Matematika khususnya angkatan 2008. Terima kasih atas segala goresan kenangan yang telah terukir saat menuntut ilmu bersama.
11. Semua pihak yang tidak mungkin penulis sebutkan satu persatu, terima kasih atas keikhlasan bantuan moral dan spiritual yang sedah diberikan pada penulis.

Penulis menyadari bahwa dalam penyusunan skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan. Oleh karena itu penulis mengharap saran dan kritik dari semua pihak guna kesempurnaan dan kebaikan skripsi ini. Akhirnya semoga skripsi ini menjadi khasanah kepustakaan baru yang akan memberi celah manfaat bagi semua pihak. *Amin Ya Rabbal Alamin.*

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Malang, Januari 2012

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

DAFTAR SIMBOL

Simbol-simbol yang digunakan dalam skripsi ini adalah:

$\overline{\mathbb{R}}$: Garis bilangan real yang diperluas

$C'(u, v)$: Fungsi distribusi subcopula 2-dimensi

$C(u, v)$: Fungsi distribusi copula 2-dimensi

$\varphi(u)$: Fungsi generator

$\varphi^{-1}(u)$: Invers dari fungsi generator

$c(u, v)$: Fungsi padat peluang copula 2-dimensi

V_C : Volume dari fungsi copula

I : Selang tertutup [0,1]

ABSTRAK

Solikha, Lailil Wakhidatus. 2012. **Studi Copula *Frank Family* 2-Dimensi dalam Identifikasi Struktur Dependensi.** Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: (I) Fachrur Rozi, M.Si.
(II) Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag.

Kata kunci: Copula *Frank*, Struktur Dependensi

Salah satu kuantifikasi yang sering digunakan dalam mengukur besarnya dependensi antar variabel adalah korelasi Pearson, tapi korelasi Pearson hanya berasumsi untuk variabel yang berdistribusi normal. Jika variabel tersebut berdistribusi tidak normal maka korelasi pearson tidak dapat digunakan, oleh karena itu dalam penelitian ini akan dipaparkan metode alternatif yang digunakan untuk memodelkan struktur dependensi antara dua variabel yang distribusi marginalnya bisa berbeda yaitu copula. Copula akhir-akhir ini banyak dikembangkan dalam bidang biostatistika, ilmu aktuaria dan keuangan, salah satunya copula *Frank* yang banyak digunakan dalam aplikasi empiris khususnya bidang asuransi. Sebelum mengidentifikasi dependensi antara dua variabel berdasarkan kaitan ukuran Kendall's Tau dan Spearman Rho dengan copula *Frank*, variabel yang akan dianalisis ditransformasi ke Uniform [0,1] dengan cara mencari fungsi distribusi empiris dari masing-masing variabel. Kemudian identifikasi struktur dependensi antara dua variabel menggunakan analisis numerik. Jika $\theta < 0$ maka $\tau_C < 0$ dan jika $\theta > 0$ maka $\tau_C > 0$ serta jika $\theta < 0$ maka $\rho_C < 0$ dan jika $\theta > 0$ maka $\rho_C > 0$. Hal tersebut menunjukkan bahwa copula *Frank* dapat mengidentifikasi dependensi positif dan negatif.

ABSTRACT

Solikha, Lailil Wakhidatus. 2012. **Study of 2-Dimensional *Frank Family* Copula in Identification of Dependence Structure.** Thesis. Mathematics Programme Faculty of Science and Technology The State Islamic University Maulana Malik Ibrahim Malang.
Advisors: (I) Fachrur Rozi, M.Si.
(II) Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag.

Key words: *Frank* Copula, Dependence Structure

One of quantification that is often used in measuring the amount of dependencies between variables is the Pearson correlation, Pearson correlation but just assume for normally distributed variables. If the variable is not normally distributed then the Pearson correlation can not be used, therefore in this study will be presented an alternative method that is used to model the structure of dependencies between two variables can be different marginal distributions of copula. Copula recently been developed in the field biostatistics, actuarial science and finance, one of which *Frank* copula which is widely used in empirical applications, especially in insurance. Before identifying the dependencies between two variables based on the terms of the size of the Kendall's Tau and Spearman's Rho with *Frank* copula, the variables to be analyzed is transformed into the Uniform [0,1] by looking for empirical distribution function of each variable. Then identify the structure of dependencies between two variables using numerical analysis. If $\theta < 0$ then $\tau_C < 0$ and if $\theta > 0$ then $\tau_C > 0$ and if $\theta < 0$ then $\rho_C < 0$ and if $\theta > 0$ then $\rho_C > 0$. This shows that the *Frank* copula can identify positive and negative dependencies.

الملخص

صالحة، ليل الوحيدة. 2012. ***دراسات الأسرة حباك صريح في تحد يد هيكل تنائى الأبعاد من التبعيات.***
أطروحة. قسمر الرياضيات بكلية العلوم والتكنو لوجيا الد ولة الإسلامية جامعة مولانا الملك ابراهيم مالانغ.
المشرف : (1) فخرر رازي الماجستير
(2) دمو نيرو العابدين الماجستير

الكلمات الرئيسية : الأسرة حباك فرانك، هيكل التبعية

واحدة من القياس الكمي الذي يستخدم غالبافي قياس كمية تبعيات بين المتغيرات هوارتباط بيرسون، ولكن إذ الم يتم توزيعها عادة متغير ثم لا يمكن الارتباط. ارتباط بيرسون لمجردا فتراض المتغيرات توزع عادة بير سون أن تسدخدم، وبالتا لي سيكون في هذه الدراسة أن تقدم طريقة بد يلة يستحدم نموذ ج هيكل تبعيات بين حباك مؤخراتم تطوير هافي مجالات الإحصاء الحيوي، متغيرين يمكن التوزيعات الها مشية مختلفة من حباك والعلوا رية والمالية، واحدة منها فرانك حباك الأسرة والذي يستخدم على نطاق واسع في التطبيقات قبل تحد يد التبعيات بين متغيرين استناد الأحكام حجم تاو وكدال ورو. العملية، وخاصة في مجال التأمين من يبحث عن [0،1] سبيرمان مع الأسرةحباك فرانك، يتم تحم يل المتغيرات التي سيتم تحليلها في الموحد. ثم تحديد هيكل تبعيات بين متغير ين با ستخدام التحليل العد دي. وضليفة التو زيع التجر بيية لكل متغي. إذا 0<θ ثم τ_C<0 وإذا 0>θ ثم 0>τ_C، إذا 0<θ ثم 0> ρ_c واذا 0>θ ثم 0>ρ_c. وهذا يدل على أن الأسرة حباك فرانك يمكن تحديد تبعيات ايجا بية وسلبية

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Allah Swt. berfirman dalam QS. Yasin : 36,

سُبْحَـٰنَ ٱلَّذِى خَلَقَ ٱلْأَزْوَٰجَ كُلَّهَا مِمَّا تُنۢبِتُ ٱلْأَرْضُ وَمِنْ أَنفُسِهِمْ وَمِمَّا لَا يَعْلَمُونَ ﴿٣٦﴾

Artinya: *Maha Suci Tuhan yang telah menciptakan pasangan-pasangan semuanya, baik dari apa yang ditumbuhkan oleh bumi dan dari diri mereka maupun dari apa yang tidak mereka ketahui*. (QS. Yasin : 36)

Dari ayat tersebut dijelaskan bahwasanya segala sesuatu mempunyai pasangan dan memiliki keterkaitan. Begitu juga dalam kehidupan sehari-hari, sering dipertemukan dengan fenomena hubungan antara beberapa karakteristik yang diduga mempunyai keterkaitan antara karakteristik yang satu dengan karakteristik yang lain. Seperti firman Allah,

أَلَمْ تَرَ أَنَّ ٱللَّهَ أَنزَلَ مِنَ ٱلسَّمَآءِ مَآءً فَتُصْبِحُ ٱلْأَرْضُ مُخْضَرَّةً ۗ إِنَّ ٱللَّهَ لَطِيفٌ خَبِيرٌ ﴿٦٣﴾

Artinya: *Apakah kamu tiada melihat, bahwasanya Allah menurunkan air dari langit, lalu jadilah bumi itu hijau? Sesungguhnya Allah Maha Halus lagi Maha Mengetahui*. (QS. Al Hajj : 63)

Ayat di atas menggambarkan bahwa air memiliki keterkaitan dengan sesuatu yang ada di bumi, tidak hanya berhubungan dengan manusia tapi juga tumbuhan, yang nantinya tumbuhan akan berkaitan dengan kebutuhan manusia. Allah SWT menciptakan sesuatu tidak lepas dari sesuatu yang lain, segalanya memiliki keterkaitan. Dalam statistika, keterkaitan ini sering disebut dependensi (keterhubungan) antara variabel yang satu dengan variabel yang lain. Jogde (1982) mengatakan "Hubungan ketergantungan (dependensi) antara beberapa variabel acak adalah salah satu persoalan yang sangat banyak dipelajari dalam ilmu probabilitas dan statistika...".

Salah satu kuantifikasi yang sering digunakan dalam mengukur besarnya dependensi antara variabel adalah korelasi Pearson, yang kemudian akan memberi petunjuk kepada praktisi untuk mengambil keputusan yang tepat. Hal ini dikarenakan keputusan yang salah akan mengakibatkan kerugian yang signifikan, maka analisis keterhubungan tersebut dilakukan dengan teliti dan cermat.

Perlu diketahui bahwa dalam hal ini korelasi Pearson merupakan kuantifikasi untuk mengukur dependensi yang diasumsikan berdistribusi normal. Namun jika dependensi yang terjadi antara dua variabel berdistribusi tidak normal, maka dalam hal ini korelasi Pearson memiliki kelemahan untuk menjelaskan fenomena tersebut. Praktiknya seringkali praktisi mengabaikan bahkan tidak mengetahui distribusi marginal dari variabel yang akan dianalisis, sehingga seringkali korelasi Pearson menjadi pilihan paling mudah dan sederhana untuk menganalisis kuantifikasi dependensinya.

Untuk itu diperlukan pendekatan kuantifikasi lain yang mampu menjelaskan dependensi jika variabelnya berdistribusi tidak normal. Maka penulis termotivasi untuk menyajikan suatu metode yang banyak mendapat perhatian akhir-akhir ini dalam statistika yaitu copula. Nelsen (1999) mengatakan bahwa konsep dari copula adalah memperhatikan dua komponen yang terdapat dalam model multivariat, yaitu:

a. Komponen marginal (individu) yang menyatakan karakteristik dari masing-masing variabelnya, dan
b. Struktur dependensi antara variabel marginal.

Selain itu copula berperan penting ketika variabel tersebut berdistribusi tidak normal. Banyak distribusi bivariat atau multivariat yang dikembangkan sebagai alternatif untuk kasus yang berdistribusi tidak normal, seperti bivariat gamma, distribusi bivariat eksponensial, dan sebagainya. Tapi distribusi tersebut terbatas pada distibusi marginal yang sama. Oleh karena itu copula hadir untuk memperluas metode dalam memodelkan dependensi antar variabel acak, yang distribusi marginalnya bisa berbeda. Copula akhir-akhir ini banyak dikembangkan dalam bidang biostatistika, ilmu aktuaria, dan keuangan. Salah satunya copula *Frank* yang merupakan salah satu *family* dari copula *Archimedean* yang banyak digunakan dalam aplikasi empiris khususnya bidang asuransi. Sehingga penulis termotivasi untuk mengkaji tentang identifikasi struktur dependensi dari copula 2-dimensi, yaitu pada copula *Frank*.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang di atas, maka masalah dalam penelitian ini dapat dirumuskan sebagai berikut:

a. Bagaimana sifat-sifat dari copula *Frank* 2-dimensi dalam identifikasi struktur dependensi?
b. Bagaimana aplikasi copula *Frank* 2-dimensi dalam identifikasi struktur dependensi?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan yang ingin dicapai dalam penelitian ini adalah:

a. Mengetahui sifat-sifat dari copula *Frank* 2-dimensi dalam identifikasi struktur dependensi.

b. Mengetahui aplikasi copula *Frank* 2-dimensi dalam identifikasi struktur dependensi.

1.4 Batasan Masalah

Sesuai rumusan masalah dan tujuan penelitian, serta agar pembahasan lebih fokus maka pembahasan masalah yang diberikan adalah:

a. Kajian copula yang dibahas dalam penelitian ini adalah sifat-sifat copula *Frank* 2-dimensi dalam identifikasi struktur dependensi.

b. Struktur dependensi yang dibahas adalah dependensi antara dua variabel, dengan asumsi variabel berdistribusi tidak normal.

c. Identifikasi dependensi yang dianalisis, dikaitkan dengan ukuran dependensi Kendall's Tau dan Spearman Rho.

d. Keterkaitan Kendall's Tau dan Spearman Rho dengan copula dianalisis menggunakan analisis numerik.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari penelitian ini adalah:

a. Bagi penulis

Mengetahui tentang sifat-sifat dan aplikasi copula *Frank* 2-dimensi dalam mengidentifikasi struktur dependensi. Dapat menjadi wacana pengembangan ilmu pengetahuan khususnya dalam pengembangan ilmu matamatika yang dapat diaplikasikan dalam kehidupan sehari-hari dan di berbagai disiplin ilmu.

a. Bagi lembaga

Pengembangan ilmu dalam memberikan alternatif bila dihadapkan pada permasalahan dependensi dari variabel yang berdistribusi tidak normal, sehingga dapat menjadi khasanah kepustakaan baru dalam perkuliahan.

b. Bagi pembaca

Memberikan gambaran tentang sifat dan aplikasi copula *Frank* 2-dimensi dalam mengidentifikasi struktur dependensi. Pembaca juga dapat menggunakan copula *Frank* sebagai referensi atau tolak ukur jika ingin menggali lebih lanjut dalam permasalahan ini.

1.6 Metode Penelitian

1.6.1 Pendekatan Penelitian

Penelitian yang dilakukan menggunakan pendekatan penelitian kepustakaan (*library research*) dan deskriptif kuantitatif. Untuk menganalisis copula *Frank* 2-dimensi dalam identifikasi struktur dependensi, terlebih dulu dikaji mengenai definisi dan sifat-sifat dasar dari copula. Selanjutnya dilakukan analisis deskriptif mengenai bagaimana copula *Frank* digunakan untuk mengidentifikasi adanya dependensi antara dua variabel.

1.6.2 Data dan Variabel Penelitian

Data penelitian yang digunakan adalah data simulasi, yaitu membangkitkan data yang terdiri dari dua variabel yang didesain berdistribusi tidak normal .

1.6.3 Metode Analisis

a. Studi Literatur

Studi literatur yang akan dilakukan adalah mengenai teori dasar copula, copula *Frank* dan teori dependensi.

b. Analisis

Analisis terhadap studi literatur sesuai dengan masalah yang dirumuskan, yaitu bagaimana secara teori copula *Frank* dapat digunakan untuk mengidentifikasi adanya dependensi antara dua variabel. Adapun langkah-langkahnya, antara lain:

(i) Membahas sifat copula *Frank*

(ii) Identifikasi distibusi marginal

(iii) Transformasi ke dalam distribusi marginal Uniform [0,1]

(iv) Identifikasi struktur dependensi berdasarkan ukuran Kendall's Tau dan Spearman Rho dari copula *Frank*.

c. Aplikasi

Membangkitkan data sesuai dengan pendefinisian variabel penelitian dan mengaplikasikan teori copula *Frank* yang telah dianalisis terhadap data tersebut untuk mengidentifikasi adanya dependensi antara dua variabel.

1.7 Sistematika Penulisan

Untuk mempermudah memahami penulisan ini secara keseluruhan, maka penulis menggambarkan sistematika penulisannya sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN

Pada bab ini membahas tentang latar belakang, perumusan masalah, tujuan, batasan masalah, manfaat, metode penelitian dan sistematika penulisan.

BAB II KAJIAN PUSTAKA

Pada bab ini menyajikan kajian teori mengenai teori dasar, fungsi distribusi, teori dasar copula 2-dimensi termasuk teori copula *Archimedean*, teori dependensi termasuk tentang konkordan, Kendall's Tau dan Spearman rho dalam identifikasi struktur dependensi yang diambil dari beberapa referensi yang terkait dengan topik tersebut. Serta kajian dependensi dalam Al Qur'an.

BAB III PEMBAHASAN

Pada bab ini membahas tentang konsep dasar copula *Frank* 2-dimensi, sifat-sifat copula *Frank* 2-dimensi dan simulasi copula *Frank* 2-dimensi dalam identifikasi struktur dependensi.

BAB IV PENUTUP

Pada bab ini berisi kesimpulan dari pembahasan serta saran-saran yang berkaitan dengan hasil pembahasan.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Teori Dasar

Didefinisikan simbol dari garis bilangan real yang diperluas adalah $\overline{\mathbb{R}}$, di mana $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\}$. Analogi yang sama, maka $\overline{\mathbb{R}}^2$ mendefinisikan ruang dua dimensi bilangan real yang diperluas.

Untuk dua vektor $\vec{u} = (x_1, y_1)^t$ dan $\vec{v} = (x_2, y_2)^t$ di $\overline{\mathbb{R}}^2$ dengan $(x, y)^t$ adalah transpose dari $\binom{x}{y}$, akan dituliskan $\vec{u} \leq \vec{v}$, jika $x_1 \leq x_2$ dan $y_1 \leq y_2$.

(Nelsen, 1999: 5)

Definisi 1. (Purcell dan Varberg, 1982: 387)

Invers ln disebut fungsi eksponensial asli dan ditulis sebagai exp, yaitu

$$x = \exp y \Leftrightarrow y = \ln x.$$

Selanjutnya diperoleh $\exp(\ln x) = x$ dan $\ln(\exp y) = y$

Definisi 2. (Purcell dan Varberg, 1982: 387)

Bilangan e adalah bilangan real positif yang bernilai $\ln e = 1$.

Teorema 1. (Purcel dan Varberg, 1982: 471)

Aturan $l'H\hat{o}pital$ untuk bentuk $\frac{0}{0}$. Andaikan $\lim_{x \to u} f(x) = \lim_{x \to u} g(x) = 0$.

Apabila $\lim \left(\frac{f'(x)}{g'(x)}\right)$ ada, baik ia berhingga atau tak berhingga, maka

$$\lim_{x \to u} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \lim_{x \to u} \left(\frac{f'(x)}{g'(x)}\right)$$

di mana u dapat mewakili sebarang simbol $a, a^-, a^+, -\infty,$ atau $+\infty$.

Teorema 2. (Purcel dan Varberg, 1982: 375)

Apabila a dan b bilangan-bilangan real positif dan *r* sebuah bilangan rasional, maka

(i) $\ln 1 = 0$

(ii) $\ln ab = \ln a + \ln b$

(iii) $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

(iv) $\ln a^r = r \ln a$

Bukti:

(i) $\ln 1 = \int_1^1 \frac{1}{t} dt = 0$

(ii) Karena untuk $x > 0$,

$$D_x \ln ax = \frac{1}{ax} \cdot a = \frac{1}{x}$$

dan

$$D_x \ln x = \frac{1}{x}$$

Sehingga diperoleh

$$\ln ax = \ln x + C$$

Untuk menghitung nilai C, ambil $x = 1$, maka $\ln a = C$. Sehingga

$$\ln ax = \ln x + \ln a$$

Kemudian ambil $x = b$, diperoleh $\ln ab = \ln a + \ln b$.

(iii) Berdasarkan bukti (ii), ambil $a = \frac{1}{b}$, maka

$$\ln \frac{1}{b} + \ln b = \ln\left(\frac{1}{b} \cdot b\right) = \ln 1 = 0$$

Jadi

$$\ln\frac{1}{b} = -\ln b$$

Dengan menggunakan bukti (ii), diperoleh

$$\ln\frac{a}{b} = ln\left(a \cdot \frac{1}{b}\right) = \ln a + \ln\frac{1}{b} = \ln a - \ln b$$

(iv) Karena untuk $x > 0$,

$$D_x(\ln x^r) = \frac{1}{x^r} \cdot rx^{r-1} = \frac{r}{x}$$

dan

$$D_x(r \ln x) = r \cdot \frac{1}{x} = \frac{r}{x}$$

Berdasarkan bukti (ii) diperoleh

$$\ln x^r = r \ln x + C$$

Misalkan $x = 1$, maka memberikan $C = 0$, sehingga

$$\ln x^r = r \ln x$$

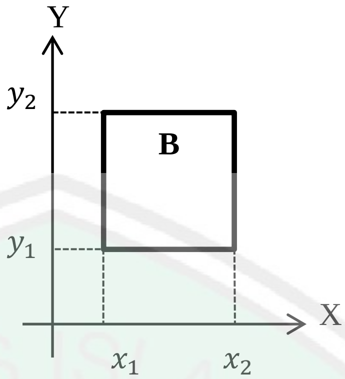
Definisi 3. Persegi Panjang (Nelsen, 1999: 6)

Suatu persegi panjang atau interval di $\overline{\mathbb{R}}^2$ adalah perkalian silang dari dua interval di $\overline{\mathbb{R}}^1$ dalam bentuk

$$B = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2], \vec{a} \leq \vec{b} \tag{2.1}$$

Di mana $\vec{a} = (x_1, y_1)^t$ dan $\vec{b} = (x_2, y_2)^t$ di $\overline{\mathbb{R}}^2$

Himpunan dari semua persegi panjang di $\overline{\mathbb{R}}^2$ akan didefinisikan sebagai $\mathfrak{R}^2$. Titik ujung dari persegi panjang B adalah titik $(x_1, y_1), (x_2, y_1), (x_1, y_2)$ dan (x_2, y_2).



Gambar 2.1: Persegi Panjang B di $\overline{\mathbb{R}}^2$

Definisi 4. Volume-*H* (Nelsen, 1999: 6)

Misalkan S_1, S_2 subhimpunan berupa selang tak kosong dari $\overline{\mathbb{R}}$ dan $H : \overline{\mathbb{R}}^2 \to \mathbb{R}$ adalah fungsi sedemikian hingga $Dom(H) = S_1 \times S_2$. Misalkan $B = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ adalah suatu persegi panjang, di mana $B \subset dom(H)$. Maka volume-*H* dari persegi panjang B didefinisikan oleh:

$$V_H(B) = H(x_2, y_2) - H(x_2, y_1) - H(x_1, y_2) + H(x_1, y_1) \quad (2.2)$$

Jika didefinisikan turunan pertama dari *H* pada persegi panjang B sebagai

$$\Delta_{x_1}^{x_2} H(x, y) = H(x_2, y) - H(x_1, y) \quad (2.2a)$$

$$\Delta_{y_1}^{y_2} H(x, y) = H(x, y_2) - H(x, y_1) \quad (2.2b)$$

Maka volume-*H* dari persegi panjang B merupakan turunan kedua dari *H* pada persegi panjang B, yaitu

$$V_H(B) = \Delta_{y_1}^{y_2} \Delta_{x_1}^{x_2} (x, y) \quad (2.3)$$

Definisi 5. Fungsi *2-increasing* (Nelsen, 1999: 6)

Misalkan H fungsi bernilai real. H dikatakan 2-*increasing* jika $V_H(B) \geq 0$ untuk semua persegi panjang B di $\overline{\mathbb{R}}^2$ yang mana semua titik ujung dari B berada di $Dom(H)$.

Contoh 1:

Misalkan $H(x, y) = (2x - 1)(2y - 1)$ dengan $Dom(H) = I^2$, di mana $I = [0,1]$ maka H merupakan fungsi *2-increasing*.

Contoh:

H dikatakan fungsi *2-increasing* jika $V_H(B) \geq 0$, sehingga

$$
\begin{aligned}
V_H(B) &= H(x_2, y_2) - H(x_2, y_1) - H(x_1, y_2) + H(x_1, y_1) \\
&= (2x_2 - 1)(2y_2 - 1) - (2x_2 - 1)(2y_1 - 1) - (2x_1 - 1)(2y_2 - 1) \\
&\qquad + (2x_1 - 1)(2y_1 - 1) \\
&= 4x_2y_2 - 2x_2 - 2y_2 + 1 - 4x_2y_1 + 2x_2 + 2y_1 - 1 - 4x_1y_2 + 2x_1 \\
&\qquad + 2y_2 - 1 + 4x_1y_1 - 2x_1 - 2y_1 + 1 \\
&= 4x_2y_2 - 4x_2y_1 - 4x_1y_2 + 4x_1y_1 \\
&= 4x_2(y_2 - y_1) - 4x_1(y_2 - y_1)
\end{aligned}
$$

Misal $y_2 - y_1 = a$, karena $y_1 \leq y_2$ maka a bernilai positif

$4x_2(y_2 - y_1) = p$ dan $4x_1(y_2 - y_1) = q$, karena $x_1 \leq x_2$ maka $p > q$

Sehingga jika $p > q$, maka $p - q \geq 0$. Oleh karena itu terbukti $V_H(B) \geq 0$

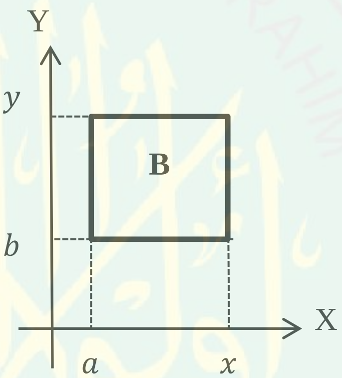
Definisi 6. Fungsi *Grounded* (Nelsen, 1999)

Misalkan $S_1,\ S_2$ subhimpunan tak kosong dari $\overline{\mathbb{R}}$ dan $H :\ \overline{\mathbb{R}}^2 \to \mathbb{R}$ adalah fungsi sedemikian hingga $Dom(H) = S_1 \times S_2$. Misalkan $S_1,\ S_2$ mempunyai elemen terkecil masing-masing a dan b. Maka H dikatakan fungsi *grounded* jika

$$H(a, y) = 0 = H(x, b), \text{ untuk setiap } x \in S_1,\ y \in S_2 \qquad (2.4)$$

Akibatnya dapat mengatakan jika H fungsi *grounded*, maka

$$V_H(B) = H(x, y), \text{ untuk setiap } B = [a, x] \times [b, y] \subset Dom\ (H) \qquad (2.5)$$



Gambar 2.2: Persegi Panjang $B = [a, x] \times [b, y]$

Maka,

$$V_H(B) = H(x, y) - H(x, b) - H(a, y) + H(a, b) \qquad (2.5a)$$

$$= H(x, y)$$

Karena $H(x, b) = H(a, x) = H(a, b) = 0$

2.2 Fungsi Distribusi

Peluang bahwa suatu variabel acak Z lebih kecil atau sama dengan z, ditulis $P(Z \leq z)$ adalah *F(z)*, nilai *F(z)* berada di antara 0 dan 1, selanjutnya *F(z)* disebut dengan fungsi distribusi.

Definisi 7. Fungsi Distribusi Marginal (Nelsen, 1999: 14)

Fungsi distribusi (marginal) adalah suatu fungsi F dengan $Dom(F) = \overline{\mathbb{R}}$ sehingga:

1. F fungsi tak turun
2. $F(-\infty) = 0$ dan $F(\infty) = 1$

Definisi 8. Fungsi Distribusi Gabungan (Nelsen, 1999: 14)

Fungsi distribusi gabungan adalah suatu fungsi H dengan $Dom(H) = \overline{\mathbb{R}}^2$ sedemikian sehingga:

1. H fungsi 2-*increasing*
2. $H(x, -\infty) = H(-\infty, y) = 0$ dan $H(\infty, \infty) = 1$

2.3 Copula

Salah satu metode dependensi yang sangat populer akhir-akhir ini adalah copula. Kata copula berasal dari kata benda Latin yang berarti 'hubungan (*a link*), ikatan (*bond*)' dan pertama kali digunakan dalam pengertian matematika atau statistik oleh Abe Sklar pada 1959 (Muller, 2006).

Secara matematis, copula merupakan suatu fungsi yang memungkinkan untuk menggabungkan distribusi univariat untuk menghasilkan distribusi gabungan dengan struktur dependensi tertentu. Copula memberikan cara yang nyaman untuk distribusi gabungan dari dua atau lebih variabel acak.

Beberapa pengukuran/analisis dari dependensi hanya bisa pada copula. Misalnya, korelasi Kendall's τ dan Spearman's ρ, tapi biasanya pada korelasi linier Pearson bergantung pada distribusi marginal. Pengukuran koefisien korelasi Pearson tidak memberikan informasi tentang variasi atau jenis distribusinya.

Definisi 9. ***Subcopula*** (Nelsen, 1999: 8)

Subcopula dua dimensi (2-*subcopula*) adalah fungsi C' yang memenuhi sifat-sifat:

a. $Dom(C') = S_1 \times S_2$, di mana S_1 dan S_2 adalah subhimpunan dari I = [0,1]
b. C' *grounded* dan 2-*increasing*
c. Untuk setiap $x \in S_1$ dan $y \in S_2$, berlaku

$$C'(x,1) = x \text{ dan } C'(1,y) = y \tag{2.6}$$

Perhatikan bahwa untuk setiap $\vec{u} = (x,y)^t \in Dom(C')$, maka $0 \leq C'(x,y) \leq 1$, ini berarti *Range* (C') adalah subhimpunan dari I.

Definisi 10. ***Copula*** (Nelsen, 1999: 8)

Copula dua dimensi (2-*copula*) adalah subcopula 2 dimensi (2-*subcopula)* C dengan $Dom(C) = I^2$

Ekivalen dengan mengatakan bahwa copula dua dimensi (2-*copula*) adalah fungsi $C: I^2 \to I$ yang memenuhi sifat-sifat:

a. Untuk setiap $u, v \in I$, maka berlaku

$$C(u,0) = 0 = C(0,v) \tag{2.7a}$$

Dan juga

$$C(u,1) = u \text{ dan } C(1,v) = v \tag{2.7b}$$

b. Untuk setiap $u_1, u_2, v_1, v_2 \in I$, sedemikian sehingga $u_1 \leq u_2$ dan $v_1 \leq v_2$ maka berlaku

$$C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0 \tag{2.8}$$

Teorema 3. Teorema Sklar (Nelsen, 1999: 14)

Misalkan *H* adalah fungsi distribusi gabungan dari variabel *X* dan *Y*, dengan *F* dan *G* masing-masing adalah fungsi distribusi marginal dari *X* dan *Y*. Maka terdapat sebuah copula *C* sedemikian sehingga untuk setiap $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$ berlaku

$$H(x, y) = C\big(F(x), G(y)\big) = C(u, v) \tag{2.9}$$

dengan $u = F(x)$ dan $v = G(y)$.

Jika *F*dan *G* kontinu, maka copula *C* tunggal, jika *F* dan *G* tidak kontinu, maka copula *C* tunggal pada $Range(F) \times Range(G)$.

Sebaliknya, misalkan *C* sebuah copula, *F* dan *G* masing-masing adalah fungsi distribusi marginal dari *X* dan *Y*. Maka terdapat fungsi distribusi gabungan *H*, sedemikian sehingga untuk setiap $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$ juga berlaku

$$H(x, y) = C\big(F(x), G(y)\big) = C(u, v) \tag{2.10}$$

2.3.1 Archimedean Copula

Copula yang akan didiskusikan adalah *Archimedean* copula yang merupakan aplikasi yang luas, alasanya adalah:

1. Dapat dikontruksi dengan mudah.
2. Mempunyai sub family yang besar dan bervariasi.

3. Banyak sifat-sifat yang dipengaruhi oleh anggota-anggota dari kelas copula ini.

Definisi 11. ***Pseudo-invers*** (Nelsen, 1999: 90)

Diberikan φ, di mana φ adalah fungsi *non-decreasing* yang memetakan $I = [0,1]$ ke $[0,\infty]$ sehingga $\varphi(0) = \infty$ dan $\varphi(1) = 0$. Pseudo-invers dari φ adalah fungsi $\varphi^{[-1]}$ dengan $Dom\ \varphi^{[-1]} = [0,\infty]$ dan $Ran\ \varphi^{[-1]} = [0,1]$, diberikan dengan

$$\varphi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \varphi^{-1}(t) & 0 \le t \le \varphi(0) \\ 0 & \varphi(0) \le t \le \infty \end{cases}$$

$\varphi^{[-1]}$ adalah fungsi kontinyu dan *non-increasing* pada $[0,\infty]$ dan fungsi tak turun pada $[0,\varphi(0)]$, maka $\varphi^{[-1]}(\varphi(u)) = u$ pada I, dan

$$\varphi\left(\varphi^{[-1]}(t)\right) = \begin{cases} t & 0 \le t \le \varphi(0) \\ \varphi(0) & \varphi(0) \le t \le \infty \end{cases}$$

Sehingga jika $\varphi(0) = \infty$ maka $\varphi^{[-1]} = \varphi^{-1}$

Teorema 4. (Nelsen, 1999: 90)

Copula *Archimedean* memiliki bentuk umum sebagai berikut:

$$C(u,v) = \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v)) \tag{2.11}$$

Di mana $\varphi(u)$ adalah fungsi generator.

$\varphi(u)$ adalah fungsi tidak turun yang memetakan $I = [0,1]$ ke $[0,\infty]$ sehingga $\varphi(0) = \infty$ dan $\varphi(1) = 0$.

2.4 Dependensi

Misal diberikan X dan Y adalah variabel acak kontinyu dengan fungsi distribusi gabungan H dan margianal F dan G. X dan Y dikatakan dependen kuadran positif jika $H(x,y) - F(x)G(y) \geq 0, \forall\, x,y \in \mathbb{R}$. (Walpole, 1978)

2.4.1 Kuantifikasi Umum dari Dependensi

Statistika yang menyatakan derajat hubungan linier antara dua variabel atau lebih disebut korelasi, korelasi ditemukan oleh Karl Pearson pada awal 1900. (Muller, 2006) Hubungan antara dua variabel di dalam teknik korelasi, bukan dalam artian hubungan sebab akibat (sebab akibat), melainkan dalam korelasi dikenal dengan hubungan searah (linier) saja. Oleh karena itu dalam korelasi dikenal data penyebab yang mempengaruhi, disebut variabel bebas (*independent*) dan data akibat atau yang dipengaruhi, disebut variabel terikat (*dependent*).

Tujuan utama dari analisis korelasi linear adalah untuk mengukur kekuatan hubungan linier antara dua variabel. Korelasi positif jika y cenderung meningkat dan negatif ketika y cenderung menurun. Jika pasangan terurut (X,Y) cenderung mengikuti garis yang lurus, maka terdapat adanya korelasi linear.

Koefisien korelasi linear (r) adalah ukuran numerik dari kekuatan hubungan linier antara dua variabel (Usman, 2008). Koefisien mencerminkan konsistensi dari efek bahwa perubahan dalam satu variabel berpengaruh pada yang lain. Nilai koefisien korelasi linear membantu menjawab ada atau tidaknya korelasi linier antara dua variabel yang dipertimbangkan. Koefisien korelasi linear (r) selalu memiliki nilai antara -1 dan +1. Nilai +1 menandakan korelasi positif yang sempurna, dan nilai -1 menunjukkan korelasi negatif yang sempurna. Nilai dari r, didefinisikan dengan formula dari Pearson's *product moment*:

$$r = \frac{\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{(n-1)S_x S_y} \tag{2.12}$$

Di mana : S_x dan S_y adalah standart deviasi dari variabel x dan y.

(Johnson, 2000)

Alternatif lain dari koefisien korelasi umum yang dikenal adalah Spearman Rank dan Kendall's Tau. Pada tahun 1900-an, Charles Spearman mengembangkan koefisien korelasi Rank. (Walpole, 1978) Koefisien korelasi Rank adalah alternatif dari statistik nonparametrik dengan koefisien korelasi linear. Asumsi dari koefisien korelasi Rank adalah pasangan terurut n dari data sampel acak dan menggunakan variabel ordinal atau numerik. Hipotesis nol bahwa tidak ada korelasi antara keduanya. Hipotesis alternatif mungkin terdapat korelasi, dua sisi, atau satu sisi, jika mengantisipasi adanya korelasi baik positif atau negatif. Wilayah kritis akan berada di sisi yang sesuai dengan alternatif tertentu yang diharapkan. Sebagai contoh, jika menduga korelasi negatif, daerah kritis akan berada di sebelah kiri.

2.4.2 Konkordan

Pasangan dari variabel acak adalah konkordan jika nilai "besar" yang satu cenderung dihubungkan dengan nilai "besar" yang lainnya dan nilai "kecil" yang satu dengan nilai "kecil" yang lainnya.

Misalkan diberikan (x_i, y_i) dan (x_j, y_j) adalah pengamatan dari variabel acak kontinyu (X, Y). (x_i, y_i) dan (x_j, y_j) dikatakan konkordan jika $x_i < x_j$ dan

$y_i < y_j$, atau jika $x_i > x_j$ dan $y_i > y_j$. Untuk (x_i, y_i) dan (x_j, y_j) dikatakan diskordan jika $x_i < x_j$ dan $y_i > y_j$ atau jika $x_i > x_j$ dan $y_i < y_j$.

Alternatif formula, bahwa (x_i, y_i) dan (x_j, y_j) dikatakan konkordan jika $(x_i - x_j)\,(y_i - y_j) > 0$ dan diskordan jika $(x_i - x_j)\,(y_i - y_j) < 0$

(Nelsen, 1999: 123)

2.4.3 Kendall's Tau

Ukuran dependensi Kendall's Tau (untuk suatu populasi) dari (X, Y) dengan distribusi *H*, dapat didefinisikan sebagai perbedaan antara peluang dari konkordan dan peluang dari diskordan untuk dua vektor acak yang independen (X_1, Y_1) dan (X_2, Y_2) dengan masing-masing berdistribusi *H*, berlaku bahwa

$$\tau_{XY} = P\big((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0\big) - P\big((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0\big) \qquad (2.13)$$

(Quesada-Molina, 2003)

Dalam praktiknya, dapat menentukan ukuran dependensi Kendall's Tau berdasarkan sampel. Misalkan $\{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$, $n \geq 2$ adalah sampel berukuran *n* dari vektor acak (X, Y). Setiap pasang sampel $\{(x_i, y_j), (x_i, y_j)\}$, $i, j \in (1, \dots, n), i \neq j$ merupakan suatu diskordan atau konkordan. Maka jelas terdapat $\binom{n}{2}$ pasangan yang berbeda dari sampel yang ada. Misalkan *K* menyatakan banyaknya pasangan konkordan dan *D* menyatakan banyaknya pasangan diskordan. Maka Kendall's Tau berdasarkan sampel dapat didefinisikan menjadi

$$\hat{\tau} = \frac{K-D}{K+D} = \frac{K-D}{\binom{n}{2}} \tag{2.14}$$

(Walpole, 1978)

Teorema 5. (Nelsen, 1999: 127)

Diberikan (X_1, Y_1) dan (X_2, Y_2) adalah vektor dari variabel acak kontinyu yang independen dengan fungsi distribusi gabungan H_1 dan H_2, dengan marginal F (untuk X_1dan X_2) dan G (untuk Y_1 dan Y_2). $C_1\ dan\ C_2$ dinotasikan sebagai *copula* dari (X_1, Y_1) dan (X_2, Y_2). Maka $H_1(x,y) = C_1\big(F(x), G(y)\big)$ dan $H_2(x,y) = C_2\big(F(x), G(y)\big)$. Diberikan Q yang dinotasikan sebagai perbedaan antara peluang konkordan dan diskordan dari (X_1, Y_1) dan (X_2, Y_2), di mana

$$Q = P\big((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0\big) - P\big((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0\big) \tag{2.15}$$

Maka

$$Q = Q(C_1 \cdot C_2) = 4 \int\int_{I^2}^{\infty} C_2(u,v)dC_1(u,v) - 1 \tag{2.16}$$

Bukti:

Karena *X* dan *Y* variabel acak kontinyu,

$$P\big((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0\big) = 1 - P\big((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0\big)$$

Oleh karena itu

$$\begin{aligned} Q &= P\big((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0\big) - P\big((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0\big) \\ &= P\big((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0\big) - \Big(1 - P\big((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0\big)\Big) \\ &= P\big((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0\big) - 1 + P\big((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0\big) \\ &= 2P\big((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0\big) - 1 \end{aligned}$$

Tapi $P\big((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0\big) = P(X_1 > X_2,\ Y_1 > Y_2) + P(X_1 < X_2,\ Y_1 < Y_2)$

Dan peluang tersebut dapat dievaluasi dengan mengintegralkan distribusi dari salah satu dari vektor (X_1, Y_1) atau (X_2, Y_2), misal vektor (X_1, Y_1), diperoleh

$$P(X_1 > X_2,\ Y_1 > Y_2) = P(X_2 < X_1,\ Y_2 < Y_1)$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} P(X_2 \leq x,\ Y_2 \leq y) dC_1\big(F(x), G(y)\big)$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} C_2\big(F(x), G(y)\big) dC_1\big(F(x), G(y)\big)$$

Misal $u = F(x)$ dan $v = G(y)$, sehingga persamaan di atas menjadi

$$P(X_1 > X_2,\ Y_1 > Y_2) = \iint_{I^2} C_2(u, v) dC_1(u, v)$$

Dengan cara yang serupa

$$P(X_1 < X_2,\ Y_1 < Y_2) = \iint_{\mathbb{R}^2} P(X_2 > x,\ Y_2 > y) dC_1\big(F(x), G(y)\big)$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} \big(1 - P(X_2 < x) - P(Y_2 < y)$$

$$+ P(X_2 \leq x,\ Y_2 \leq y)\big) dC_1\big(F(x), G(y)\big)$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} \Big(1 - F(x) - G(y) + C_2\big(F(x), G(y)\big)\Big) dC_1\big(F(x), G(y)\big)$$

$$= \iint_{I^2} \big(1 - u - v + C_2(u, v)\big) dC_1(u, v)$$

Tapi karena C_1 adalah fungsi distribusi gabungan dari (U, V) dari uniform $(0,1)$, $E(U) = E(V) = 1/2$, oleh karena itu

$$P(X_1 < X_2,\ Y_1 < Y_2) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \iint_{I^2} C_2(u, v) dC_1(u, v)$$

$$= \int \int_{I^2} C_2(u, v) dC_1(u, v).$$

Sehingga

$$P\big((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0\big) = P(X_1 > X_2,\ Y_1 > Y_2) + P(X_1 < X_2,\ Y_1 < Y_2)$$

$$P\big((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0\big) = \int\int_{I^2} C_2(u,v)dC_1(u,v) + \int\int_{I^2} C_2(u,v)dC_1(u,v)$$

$$P\big((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0\big) = 2\int\int_{I^2} C_2(u,v)dC_1(u,v)$$

Oleh karena itu, diperoleh

$$Q = 2P\big((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0\big) - 1$$

$$Q = 2 \cdot 2\int\int_{I^2} C_2(u,v)dC_1(u,v) - 1$$

$$Q = 4\int\int_{I^2} C_2(u,v)dC_1(u,v) - 1$$

Berdasarkan persamaan (2.13) dan persamaan (2.15), diperoleh Kendall's Tau untuk X dan Y (dinotasikan dengan τ_{XY} atau τ_C)

$$\tau_{XY} = \tau_C = Q(C \cdot C) = 4\int\int_{I^2}^{\infty} C(u,v)dC(u,v) - 1 \tag{2.17}$$

2.4.4 Spearman Rho

Misal diberikan $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2)$ dan (X_3, Y_3) adalah tiga vektor acak yang independen dengan fungsi distribusi gabungan H. Populasi dari Spearman's ρ didefinisikan sebagai perbedaan antara peluang dari konkordan dan peluang dari diskordan untuk dua vektor acak (X_1, Y_1) dan (X_2, Y_3). Maka koefisien Spearman's ρ dari (X, Y) dengan distribusi H, dapat didefinisikan sebagai

$$\rho_{XY} = 3(P\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0\} - P\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) < 0\}) \tag{2.18}$$

(Pasangan (X_3, Y_2) dapat digunakan bersamaan dengan baik)

(Quesada-Molina, 2003)

Teorema 6. (Nelsen, 1999: 135)

Diberikan X dan Y variabel acak kontinyu yang mempunyai copula C. Maka Spearman Rho dari X dan Y adalah

$$\rho_{XY} = \rho_C = 12 \iint_{I^2} C(u,v)dudv - 3 \tag{2.19}$$

Bukti:

Berdasarkan bukti pada Kendall's Tau, persamaan (2.18) menjadi

$$\begin{aligned}
\rho_{XY} = \rho_C &= 3(P\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0\} - P\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) < 0\}) \\
&= 3\big(2P\big((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0\big) - 1\big) \\
&= 3\left(2\left(2\iint_{I^2} C_2(u,v)dC_1(u,v)\right) - 1\right) \\
&= 3\left(\left(4\iint_{I^2} C_2(u,v)dC_1(u,v)\right) - 1\right) \\
&= 12\iint_{I^2} C(u,v)dudv - 3
\end{aligned}$$

2.5 Kajian Dependensi dalam Al Qur'an

Allah Swt. berfirman dalam QS. Adz Dzaariyaat: 49,

وَمِن كُلِّ شَيۡءٍ خَلَقۡنَا زَوۡجَيۡنِ لَعَلَّكُمۡ تَذَكَّرُونَ ٤٩

Artinya : *Dan segala sesuatu Kami ciptakan berpasang-pasangan supaya kamu mengingat kebesaran Allah.* (QS. Adz Dzaariyaat: 49)

Ayat tersebut menjelaskan bahwasanya Allah Swt. menciptakan segala sesuatu memiliki pasangan-pasangannya dan setiap pasangan memiliki keterkaitan atau keterhubungan. Dijelaskan juga pada tafsir Ibnu Katsir, semua makhluk diciptakan oleh Allah Swt. dengan berpasangan seperti halnya langit dan bumi, malam dan siang, matahari dan bulan, daratan dan lautan, terang dan gelap, iman dan kufur, mati dan hidup, celaka dan bahagia, terang dan gelap hingga hewan-hewan dan tumbuhan. Semuanya memiliki hubungan, tidak ada yang dapat berdiri sendiri. Allah Swt. juga berfirman tentang hal yang serupa yaitu QS. Yasin: 36, bahwa

سُبۡحَـٰنَ ٱلَّذِى خَلَقَ ٱلۡأَزۡوَٲجَ كُلَّهَا مِمَّا تُنۢبِتُ ٱلۡأَرۡضُ وَمِنۡ أَنفُسِهِمۡ وَمِمَّا لَا يَعۡلَمُونَ ﴿٣٦﴾

Artinya: *Maha Suci Tuhan yang telah menciptakan pasangan-pasangan semuanya, baik dari apa yang ditumbuhkan oleh bumi dan dari diri mereka maupun dari apa yang tidak mereka ketahui.* (QS. Yasin : 36)

Dari ayat tersebut juga dijelaskan dalam tafsir Ibnu Katsir (2000: 992) bahwasannya Allah Swt. menciptakan apa yang di tumbuhkan di bumi baik itu buah-buahan maupun tumbuhan yang lain semuanya berpasang-pasangan, seperti yang tertuang pada kata (*wa min anfusihim*) tidak hanya manusia yang berhubungan yaitu laki-laki dan perempuan, tapi setiap segala sesuatu mempunyai pasangan dan memiliki keterkaitan tidak hanya pada manusia tapi semua makhluk hidup maupun segala sesuatu yang Allah Swt. ciptakan, baik itu makhluk lain yang tidak diketahui. Begitu juga dalam kehidupan sehari-hari, sering dipertemukan dengan fenomena hubungan antara beberapa karakteristik yang diduga mempunyai keterkaitan antara karakteristik yang satu dengan karakteristik yang lain. Seperti firman Allah Swt., bahwa:

أَلَمْ تَرَ أَنَّ ٱللَّهَ أَنزَلَ مِنَ ٱلسَّمَآءِ مَآءً فَتُصْبِحُ ٱلْأَرْضُ مُخْضَرَّةً ۗ إِنَّ ٱللَّهَ لَطِيفٌ خَبِيرٌ ﴿٦٣﴾

Artinya: *Apakah kamu tiada melihat, bahwasanya Allah menurunkan air dari langit, lalu jadilah bumi itu hijau? Sesungguhnya Allah Maha Halus lagi Maha Mengetahui.* (QS. Al Hajj : 63)

Ayat di atas menggambarkan bahwa air memiliki keterkaitan dengan sesuatu yang ada di bumi, tidak hanya berhubungan dengan manusia tapi juga tumbuhan, yang nantinya tumbuhan akan berkaitan dengan kebutuhan manusia. Penekanan tentang hubungan air dengan makhluk hidup seperti firman Allah Swt.

لِّنُحْـِۧيَ بِهِۦ بَلْدَةً مَّيْتًا وَنُسْقِيَهُۥ مِمَّا خَلَقْنَآ أَنْعَـٰمًا وَأَنَاسِيَّ كَثِيرًا ﴿٤٩﴾

Artinya: *Agar Kami menghidupkan dengan air itu negeri (tanah) yang mati, dan agar Kami memberi minum dengan air itu sebagian besar dari makhluk Kami, binatang-binatang ternak dan manusia yang banyak.* (QS. Al Furqan: 49)

Dyayadi (2008) mengatakan bahwa "kebutuhan air setiap orang digunakan dua liter untuk minum, tiga liter untuk masak...". Dapat dikatakan bahwasanya air memang memiliki hubungan dengan makhluk hidup. Oleh karena itu Allah Swt. menciptakan sesuatu tidak lepas dari sesuatu yang lain, segalanya memiliki keterkaitan.

Seperti pada QS. Furqan: 49 surat ini diturunkan setelah surat Yasin, tafsir Ibnu Katsir (2000: 553) menjelaskan bahwa Allah Swt. berkuasa untuk mengutus angin sebagai kabar akan datangnya awan, hingga angin dengan awan mengakibatkan turunnya hujan. Sehingga dari langit turun air untuk sarana manusia thaharah maupun keperluan yang lainnya. Seperti pada ayat tersebut yaitu *agar Kami menghidupkan dengan air itu negeri (tanah) yang mati*, yaitu tanah yang gersang, tidak ada pepohonan karena tidak hujan. Setelah hujan turun maka tanah tersebut menjadi hidup dan tumbuh berbagai tumbuhan serta semua makhluk hidup dapat memperoleh air, hewan dapat meminumnya, manusia pun sangat membutuhkan air untuk kebutuhannya setiap hari. Hal ini seperti firman Allah Swt. yaitu "*agar Kami memberi minum dengan air itu sebagian besar dari makhluk Kami, binatang-binatang ternak dan manusia yang banyak"*. Sehingga air memiliki keterkaitan yang erat dengan makhluk hidup. Selain air yang dekat dengan kehidupan manusia, hewan maupun tumbuhan sehingga memiliki hubungan dengan makhluk hidup, atmosfer pun yang sangat jauh dari bumi memiliki hubungan dengan segala sesuatu yang ada di bumi termasuk makhluk hidup. Seperti firman Allah Swt.,

وَجَعَلۡنَا ٱلسَّمَآءَ سَقۡفٗا مَّحۡفُوظٗاۖ وَهُمۡ عَنۡ ءَايَٰتِهَا مُعۡرِضُونَ ٣٢

Artinya: *Dan Kami menjadikan langit itu sebagai atap yang terpelihara, sedang mereka berpaling dari segala tanda-tanda (kekuasaan Allah) yang terdapat padanya.* (QS. Al Anbiya': 32)

Ayat tersebut menjelaskan bahwa langit sebagai atap atau pelindung dan kata (*maḫfû zhâ*) diartikan yang dimaksud terpelihara, maksudnya bahwa segala yang ada di langit itu dijaga oleh Allah dengan peraturan dan hukum-hukum yang menyebabkan dapat berjalannya dengan teratur dan tertib. Ayat tersebut juga menyiratkan bahwa langit yang dilindungi oleh Allah Swt. sebagai atap pelindung segala sesuatu di bumi. Dyayadi (2008) mengatakan bahwa "Tidak dapat dibayangkan bagaimana panasnya bumi jika panas sinar matahari sampai ke bumi hingga $100℃$ dan setiap jam akan terus meningkat maka panas panas aspal di jalan akan mendekati titik didih, demikian pula suhu pada malam hari mencapai $-100℃$ maka air di laut akan membeku”. Sehingga atmosfer sebagai langit yaitu atap atau pelindung bagi segala sesuatu di bumi seperti halnya atap rumah yang melindungi penghuni rumah dari panas teriknya matahari ataupun melindungi dari hujan lebat. Oleh karena itu langit memiliki hubungan dengan segala sesuatu di bumi. Keterkaitan ini, dalam statistika sering disebut dependensi (keterhubungan) antara variabel yang satu dengan variabel yang lain. Misalkan hubungan air dengan makhluk hidup atau hubungan atmosfer sebagai langit dengan segala sesuatu di bumi.

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Konsep Dasar Copula *Frank*

Copula *Frank* termasuk dalam copula *Archimedean*, yang memungkinkan memiliki struktur dependensi yang lebih luas. Copula *Frank* banyak digunakan dalam aplikasi empiris khususnya bidang asuransi keuangan, selain itu copula *Frank* dapat mengidentifikasi dependensi positif dan dependensi negatif, di mana hal ini tidak terdapat pada *family* dari copula *Archimedean* yang lain (Muller, 2006).

Karena copula *Frank* adalah salah satu *family* dari copula *Archimedean*, maka copula *Frank* memiliki fungsi generator. Copula *Frank* mempunyai fungsi generator sebagai berikut (Nelsen, 1998: 94)

$$\varphi_\theta(t) = -ln\left(\frac{e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1}\right), \theta \in (-\infty, \infty) \setminus \{0\} \tag{3.1}$$

Fungsi distribusi kumulatif dari copula *Frank* dapat dibangkitkan dari fungsi generatornya. Misal $\varphi_\theta(t) = y$, karena φ_θ adalah fungsi generator maka φ_θ memiliki invers, sehingga

$$t = \varphi_\theta^{-1}(y) \Leftrightarrow \varphi_\theta(t) = y \tag{3.2}$$

(Purcell dan Varberg, 1982: 382)

Sehingga

$$\varphi_\theta(t) = -ln\left(\frac{e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1}\right)$$

$$y = -ln\left(\frac{e^{-\theta t}-1}{e^{-\theta}-1}\right)$$

Berdasarkan definisi 1, diperoleh

$$e^{-y} = \left(\frac{e^{-\theta t}-1}{e^{-\theta}-1}\right)$$

$$\left(e^{-\theta}-1\right)e^{-y} = e^{-\theta t}-1$$

$$\left(e^{-\theta}-1\right)e^{-y}+1 = e^{-\theta t}$$

$$ln\left(\left(e^{-\theta}-1\right)e^{-y}+1\right) = -\theta t, \qquad \text{(definisi 1)}$$

$$-\frac{1}{\theta}ln\left(\left(e^{-\theta}-1\right)e^{-y}+1\right) = t$$

$$t = -\frac{1}{\theta}ln\left(\left(e^{-\theta}-1\right)e^{-y}+1\right)$$

$$\varphi_\theta^{-1}(y) = -\frac{1}{\theta}ln\left(\left(e^{-\theta}-1\right)e^{-y}+1\right)$$

$$\varphi_\theta^{-1}(t) = -\frac{1}{\theta}ln\left(\left(e^{-\theta}-1\right)e^{-t}+1\right)$$

$$\varphi_\theta^{-1}(t) = -\frac{1}{\theta}ln\left(1+\left(e^{-\theta}-1\right)e^{-t}\right) \tag{3.3}$$

Substitusi persamaan (3.3) ke persamaan (2.11)

$$C(u,v) = \varphi_\theta^{-1}(\varphi(u)+\varphi(v))$$

$$= -\frac{1}{\theta}ln\left(1+\left(e^{-\theta}-1\right)e^{-(\varphi_\theta(u)+\varphi_\theta(v))}\right) \tag{3.4}$$

Kemudian substitusi persamaan (3.1) ke persamaan (3.4)

$$= -\frac{1}{\theta}ln\left(1+\left(e^{-\theta}-1\right)e^{-(\varphi_\theta(u)+\varphi_\theta(v))}\right)$$

$$= -\frac{1}{\theta}ln\left(1+\left(e^{-\theta}-1\right)e^{-\varphi_\theta(u)}e^{-\varphi_\theta(v)}\right)$$

$$= -\frac{1}{\theta} ln\left(1 + (e^{-\theta} - 1)e^{-\left(-ln\left(\frac{e^{-\theta u}-1}{e^{-\theta}-1}\right)\right)} e^{-\left(-ln\left(\frac{e^{-\theta v}-1}{e^{-\theta}-1}\right)\right)}\right)$$

$$= -\frac{1}{\theta} ln\left(1 + (e^{-\theta} - 1)e^{ln\left(\frac{e^{-\theta u}-1}{e^{-\theta}-1}\right)} e^{ln\left(\frac{e^{-\theta v}-1}{e^{-\theta}-1}\right)}\right)$$

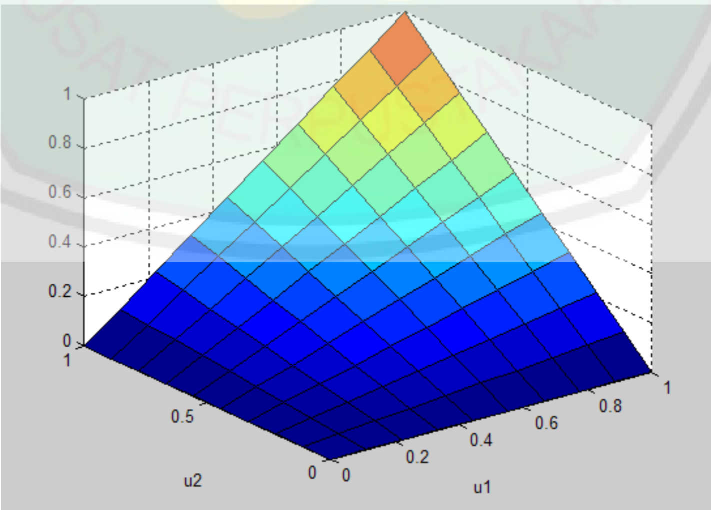
Berdasarkan definisi 1, diperoleh

$$= -\frac{1}{\theta} ln\left(1 + (e^{-\theta} - 1)\frac{e^{-\theta u} - 1}{e^{-\theta} - 1} \cdot \frac{e^{-\theta v} - 1}{e^{-\theta} - 1}\right)$$

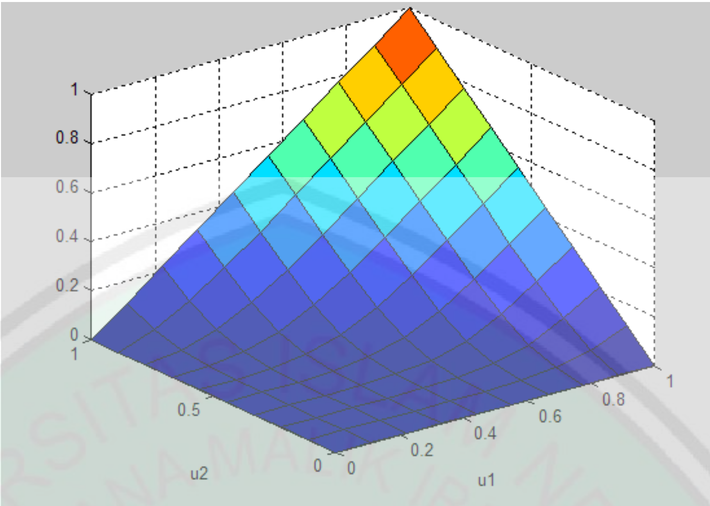
Sehingga fungsi distribusi kumulatif dari copula *Frank* sebagai berikut:

$$C_\theta(u, v) = -\frac{1}{\theta} ln\left(1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1}\right) \tag{3.5}$$

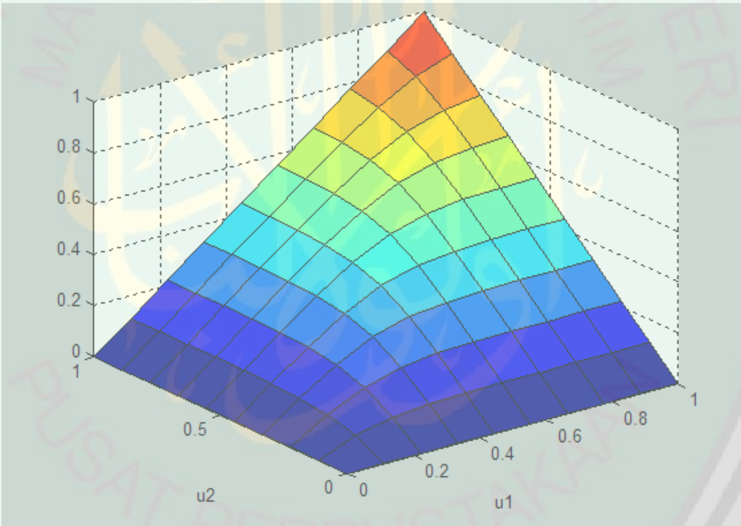
dengan $\theta \neq 0$ dan distribusi marginal $F_X(x) = u$ dan $F_Y(y) = v$, ketika $\theta \to 0$ diperoleh $F_{XY}(x, y) = F_X(x) \cdot\ F_Y(y)$, ketika $\theta > 0$ diperoleh dependensi positif (Assuncao, 2004: 1). Berikut adalah gambar fungsi distribusi kumulatif dari copula *Frank* dengan sebarang nilai θ.



Gambar 3.1: Fungsi Distribusi Kumulatif dari Copula *Frank* dengan $\theta = 0$



Gambar 3.2: Fungsi Distribusi Kumulatif dari Copula *Frank* dengan $\theta = -10$



Gambar 3.3: Fungsi Distribusi Kumulatif dari Copula *Frank* dengan $\theta = 10$

Sedangkan fungsi padat peluang dari copula *Frank* dinyatakan sebagai berikut: (Kelly, 2007: 4)

$$c_\theta(u,v) = \frac{\partial^2 C_\theta(u,v)}{\partial u \partial v}$$

Diketahui $C_\theta(u,v) = -\frac{1}{\theta} ln\left(1 + \frac{(e^{-\theta u}-1)(e^{-\theta v}-1)}{e^{-\theta}-1}\right)$

Perhatikan bahwa

$$\frac{\partial C_\theta(u,v)}{\partial u} = \frac{-\frac{1}{\theta}\left(\frac{-\theta e^{-\theta u}\left(e^{-\theta v}-1\right)}{e^{-\theta}-1}\right)}{1+\frac{(e^{-\theta u}-1)(e^{-\theta v}-1)}{e^{-\theta}-1}}$$

$$= \frac{\left(\frac{e^{-\theta u}\left(e^{-\theta v}-1\right)}{e^{-\theta}-1}\right)}{1+\frac{(e^{-\theta u}-1)(e^{-\theta v}-1)}{e^{-\theta}-1}}$$

$$= \frac{\left(\frac{e^{-\theta u}\left(e^{-\theta v}-1\right)}{e^{-\theta}-1}\right)}{\frac{e^{-\theta}-1+(e^{-\theta u}-1)(e^{-\theta v}-1)}{e^{-\theta}-1}}$$

$$= \frac{e^{-\theta u}\left(e^{-\theta v}-1\right)}{e^{-\theta}-1}\cdot\frac{e^{-\theta}-1}{e^{-\theta}-1+(e^{-\theta u}-1)(e^{-\theta v}-1)}$$

$$= \frac{e^{-\theta u}\left(e^{-\theta v}-1\right)}{e^{-\theta}-1+(e^{-\theta u}-1)(e^{-\theta v}-1)}$$

Selanjutnya perhatikan bahwa

$$\frac{\partial^2 C_\theta(u,v)}{\partial u \partial v} = \frac{-e^{-\theta u}\theta e^{-\theta v}\left(e^{-\theta}-1+\left(e^{-\theta u}-1\right)\left(e^{-\theta v}-1\right)\right)+e^{-\theta u}\left(e^{-\theta u}-1\right)\left(e^{-\theta v}-1\right)\theta e^{-\theta v}}{\left(e^{-\theta}-1+(e^{-\theta u}-1)(e^{-\theta v}-1)\right)^2}$$

$$= \frac{-\theta e^{-\theta(u+v)}\left(e^{-\theta}-1+\left(e^{-\theta u}-1\right)\left(e^{-\theta v}-1\right)\right)+\theta e^{-\theta(u+v)}\left(e^{-\theta u}-1\right)\left(e^{-\theta v}-1\right)}{\left(e^{-\theta}-1+(e^{-\theta u}-1)(e^{-\theta v}-1)\right)^2}$$

$$= \frac{-\theta e^{-\theta(u+v)}e^{-\theta}+\theta e^{-\theta(u+v)}-\theta e^{-\theta(u+v)}\left(e^{-\theta u}-1\right)\left(e^{-\theta v}-1\right)+\theta e^{-\theta(u+v)}\left(e^{-\theta u}-1\right)\left(e^{-\theta v}-1\right)}{\left(e^{-\theta}-1+(e^{-\theta u}-1)(e^{-\theta v}-1)\right)^2}$$

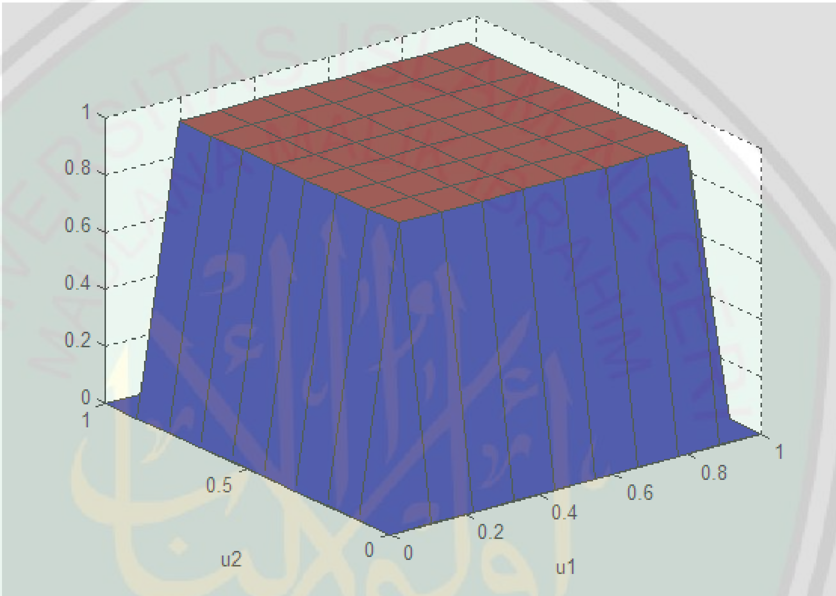
$$= \frac{-\theta e^{-\theta(u+v)}e^{-\theta}+\theta e^{-\theta(u+v)}}{\left(e^{-\theta}-1+(e^{-\theta u}-1)(e^{-\theta v}-1)\right)^2}$$

$$= \frac{-\theta e^{-\theta(u+v)}\left(e^{-\theta}-1\right)}{\left(e^{-\theta}-1+(e^{-\theta u}-1)(e^{-\theta v}-1)\right)^2}$$

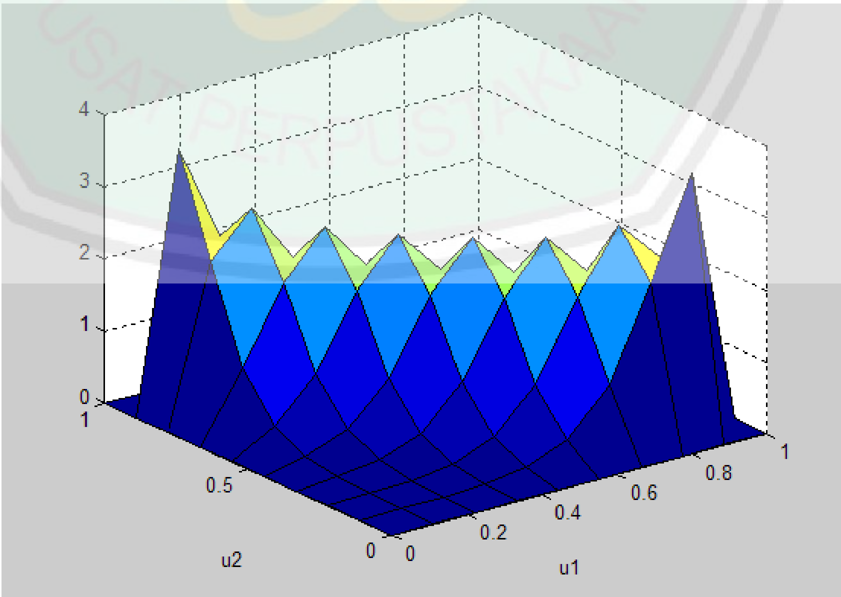
Sehingga diperoleh fungsi padat peluang dari copula *Frank* adalah

$$c_\theta(u,v) = \frac{-\theta e^{-\theta(u+v)}\left(e^{-\theta}-1\right)}{\left(e^{-\theta}-1+(e^{-\theta u}-1)(e^{-\theta v}-1)\right)^2}$$

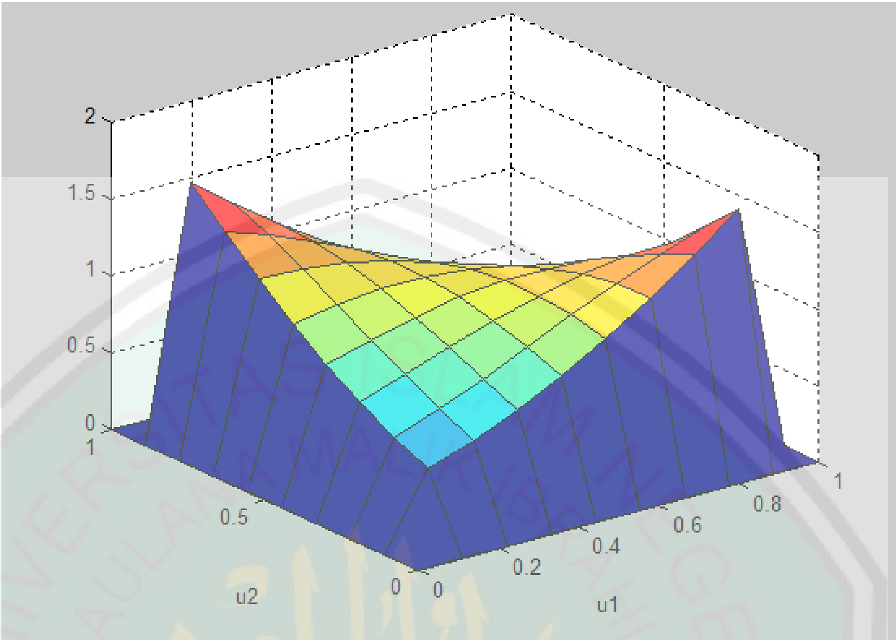
Berikut beberapa gambar fungsi padat peluang dari copula *Frank* dengan beberapa nilai θ.



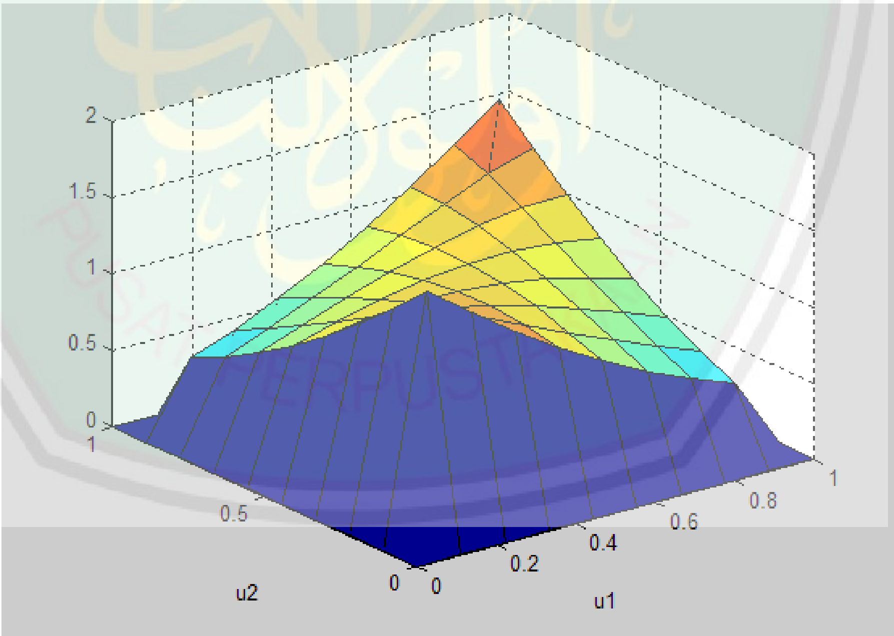
Gambar 3.4: Fungsi Density dari Copula *Frank* dengan $\theta = 0$ (independen)



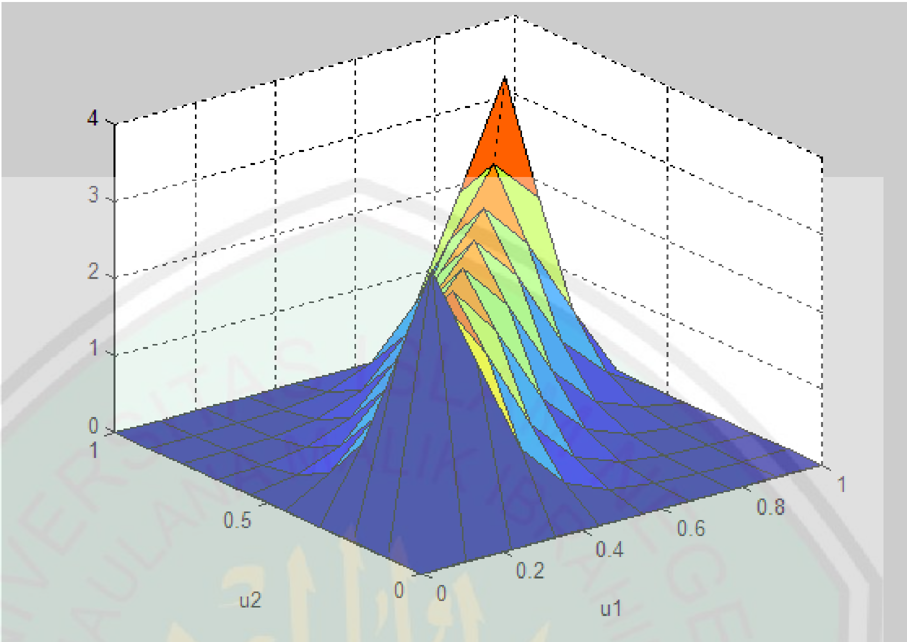
Gambar 3.5: Fungsi Density dari Copula *Frank* dengan $\theta = -10$ (dependensi negatif, $\rho_r < 0$)



Gambar 3.6: Fungsi Density dari Copula *Frank* dengan $\theta = -2$ (dependensi negatif, $\rho_r < 0$)



Gambar 3.7: Fungsi Density dari Copula *Frank* dengan $\theta = 2$ (dependensi positif, $\rho_r > 0$)



Gambar 3.8: Fungsi Density dari Copula *Frank* dengan $\theta = 10$ (dependensi positif, $\rho_r > 0$)

3.2 Analisis Sifat-sifat Copula *Frank*

Berdasarkan definisi copula umum, maka copula *Frank* adalah suatu fungsi C dari I^2 ke I yang memenuhi sifat-sifat sebagai berikut:

a. Untuk setiap u, v di I, berlaku

1. $C_\theta(u,0) = 0 = C_\theta(0,v)$
2. $C_\theta(u,1) = u$ dan $C_\theta(1,v) = v$

Bukti:

a.1. $C_\theta(u,0) = 0 = C_\theta(0,v)$

$$C_\theta(u,0) = -\frac{1}{\theta} ln\left(1 + \frac{(e^{-\theta u}-1)(e^{-\theta v}-1)}{e^{-\theta}-1}\right)$$

$$= -\frac{1}{\theta} ln\left(1 + \frac{(e^{-\theta u}-1)(e^{-\theta \cdot 0}-1)}{e^{-\theta}-1}\right)$$

$$= -\frac{1}{\theta} ln\left(\frac{e^{-\theta}-1+(e^{-\theta u}-1)(1-1)}{e^{-\theta}-1}\right)$$

$$= -\frac{1}{\theta} ln\left(\frac{e^{-\theta} - 1}{e^{-\theta} - 1}\right)$$

$$= -\frac{1}{\theta} ln(1)$$

Berdasarkan teorema 2 (i), diperoleh

$$= -\frac{1}{\theta} \cdot 0$$

$$= 0$$

dan

$$C_\theta(0, v) = -\frac{1}{\theta} ln\left(1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1}\right)$$

$$= -\frac{1}{\theta} ln\left(1 + \frac{(e^{-\theta \cdot 0} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1}\right)$$

$$= -\frac{1}{\theta} ln\left(\frac{e^{-\theta} - 1 + (1 - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1}\right)$$

$$= -\frac{1}{\theta} ln\left(\frac{e^{-\theta} - 1}{e^{-\theta} - 1}\right)$$

$$= -\frac{1}{\theta} ln(1)$$

$$= -\frac{1}{\theta} \cdot 0, \qquad \text{(teorema 2(i))}$$

$$= 0$$

a.2. $C_\theta(u, 1) = u$ dan $C_\theta(1, v) = v$

$$C_\theta(u, 1) = -\frac{1}{\theta} ln\left(1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1}\right)$$

$$= -\frac{1}{\theta} ln\left(1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta \cdot 1} - 1)}{e^{-\theta} - 1}\right)$$

$$= -\frac{1}{\theta} ln\left(1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta} - 1)}{e^{-\theta} - 1}\right)$$

$$= -\frac{1}{\theta} ln\left(1 + (e^{-\theta u} - 1)\right)$$

$$= -\frac{1}{\theta} ln(e^{-\theta u})$$

Berdasarkan teorema 2 (iv), diperoleh

$$= -\frac{1}{\theta}(-\theta u) ln(e)$$

$$= u \ln(e)$$

$$= u \cdot 1, \qquad \text{(definisi 2)}$$

$$= u$$

dan

$$C_\theta(1, v) = -\frac{1}{\theta} ln\left(1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1}\right)$$

$$= -\frac{1}{\theta} ln\left(1 + \frac{(e^{-\theta \cdot 1} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1}\right)$$

$$= -\frac{1}{\theta} ln\left(1 + \frac{(e^{-\theta} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1}\right)$$

$$= -\frac{1}{\theta} ln\left(1 + (e^{-\theta v} - 1)\right)$$

$$= -\frac{1}{\theta} ln(e^{-\theta v})$$

Berdasarkan teorema 2 (iv), diperoleh

$$= -\frac{1}{\theta}(-\theta v) ln(e)$$

$= v \ln(e)$

$= v \cdot 1,$ (definisi 2)

$= v$

b. Untuk setiap u, v di I berlaku

$C_\theta(u,v) = V_{C_\theta}([0,u] \times [0,v]) \geq 0.$

Bukti:

$$V_{C_\theta}([0,u] \times [0,v]) = C_\theta(u_2,v_2) - C_\theta(u_2,v_1) - C_\theta(u_1,v_2) + C_\theta(u_1,v_1)$$

$$= -\frac{1}{\theta} ln\left(1 + \frac{(e^{-\theta u_2} - 1)(e^{-\theta v_2} - 1)}{e^{-\theta} - 1}\right)$$

$$+\frac{1}{\theta} ln\left(1 + \frac{(e^{-\theta u_2} - 1)(e^{-\theta v_1} - 1)}{e^{-\theta} - 1}\right)$$

$$+\frac{1}{\theta} ln\left(1 + \frac{(e^{-\theta u_1} - 1)(e^{-\theta v_2} - 1)}{e^{-\theta} - 1}\right)$$

$$-\frac{1}{\theta} ln\left(1 + \frac{(e^{-\theta u_1} - 1)(e^{-\theta v_1} - 1)}{e^{-\theta} - 1}\right)$$

$$= -\frac{1}{\theta} ln\left(1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1}\right)$$

$$+\frac{1}{\theta} ln\left(1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{0} - 1)}{e^{-\theta} - 1}\right)$$

$$+\frac{1}{\theta} ln\left(1 + \frac{(e^{0} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1}\right)$$

$$-\frac{1}{\theta} ln\left(1 + \frac{(e^{0} - 1)(e^{0} - 1)}{e^{-\theta} - 1}\right)$$

$$= -\frac{1}{\theta} ln\left(1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1}\right) + \frac{1}{\theta} ln\left(1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(1 - 1)}{e^{-\theta} - 1}\right)$$

$$+\frac{1}{\theta} ln\left(1 + \frac{(1 - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1}\right)$$

$$-\frac{1}{\theta} ln\left(1 + \frac{(1 - 1)(1 - 1)}{e^{-\theta} - 1}\right)$$

$$= -\frac{1}{\theta} ln\left(1 + \frac{\left(e^{-\theta u} - 1\right)\left(e^{-\theta v} - 1\right)}{e^{-\theta} - 1}\right) + \frac{1}{\theta} ln(1) + \frac{1}{\theta} ln(1) - \frac{1}{\theta} ln(1)$$

$$= -\frac{1}{\theta} ln\left(1 + \frac{\left(e^{-\theta u} - 1\right)\left(e^{-\theta v} - 1\right)}{e^{-\theta} - 1}\right) + 0 + 0 - 0, (\text{teorema } 2(\text{i}))$$

$$= -\frac{1}{\theta} ln\left(1 + \frac{\left(e^{-\theta u} - 1\right)\left(e^{-\theta v} - 1\right)}{e^{-\theta} - 1}\right)$$

$$= C_\theta(u, v)$$

Terbukti bahwa $C_\theta(u, v) = V_{C_\theta}([0, u] \times [0, v]) \geq 0.$

Sehingga, copula *Frank* memenuhi sifat-sifat dari copula.

c. Special cases

Special case dari copula *Frank* untuk $C_0 = uv$

Bukti:

Diberikan $C_\theta(u, v) = -\frac{1}{\theta} ln\left(1 + \frac{\left(e^{-\theta u} - 1\right)\left(e^{-\theta v} - 1\right)}{e^{-\theta} - 1}\right)$, untuk $\theta \to 0$ maka akan ditunjukkan bahwa

$$\lim_{\theta \to 0} \left(\frac{ln\left(1 + \frac{\left(e^{-\theta u} - 1\right)\left(e^{-\theta v} - 1\right)}{e^{-\theta} - 1}\right)}{(-\theta)} \right) = uv$$

Misal pandang $f(\theta) = ln\left(1 + \frac{(e^{-\theta u}-1)(e^{-\theta v}-1)}{e^{-\theta}-1}\right)$ dan $g(\theta) = -\theta$.

Karena $\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{f(\theta)}{g(\theta)}\right) = \frac{0}{0}$, maka dengan menggunakan teorema 1, akan ditunjukkan $\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{f(\theta)}{g(\theta)}\right) = \lim_{\theta\to 0}\left(\frac{f'(\theta)}{g'(\theta)}\right)$.

Pandang $f(\theta) = ln\left(1 + \frac{(e^{-\theta u}-1)(e^{-\theta v}-1)}{e^{-\theta}-1}\right)$ dan $g(\theta) = -\theta$, akan dicari $f'(\theta)$ dan $g'(\theta) = -1$.

Sehingga misal:

Untuk $f(\theta) = ln\left(1 + \frac{(e^{-\theta u}-1)(e^{-\theta v}-1)}{e^{-\theta}-1}\right)$,

didefinisikan dengan

$$a = (e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1) \text{ dan } b = e^{-\theta} - 1$$

maka $a = (e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)$

$$a' = -ue^{-\theta u}(e^{-\theta v} - 1) + (-v)e^{-\theta v}(e^{-\theta u} - 1)$$

$$a' = -ue^{-\theta u}(e^{-\theta v} - 1) - ve^{-\theta v}(e^{-\theta u} - 1)$$

dan

$$b = e^{-\theta} - 1$$

$$b' = -e^{-\theta}$$

Oleh karena itu diperoleh

$$f'(\theta) = \frac{\frac{\left(-ue^{-\theta u}(e^{-\theta v}-1) - ve^{-\theta v}(e^{-\theta u}-1)\right)(e^{-\theta}-1) - (-e^{-\theta})(e^{-\theta u}-1)(e^{-\theta v}-1)}{(e^{-\theta}-1)^2}}{1 + \frac{(e^{-\theta u}-1)(e^{-\theta v}-1)}{e^{-\theta}-1}}$$

$$= \frac{\frac{-ue^{-\theta u}(e^{-\theta v}-1)(e^{-\theta}-1) - ve^{-\theta v}(e^{-\theta u}-1)(e^{-\theta}-1) + e^{-\theta}(e^{-\theta u}-1)(e^{-\theta v}-1)}{(e^{-\theta}-1)^2}}{1 + \frac{(e^{-\theta u}-1)(e^{-\theta v}-1)}{e^{-\theta}-1}}$$

$$=\frac{\frac{-ue^{-\theta u}\left(e^{-\theta v}-1\right)}{e^{-\theta}-1}-\frac{ve^{-\theta v}\left(e^{-\theta u}-1\right)}{e^{-\theta}-1}+\frac{e^{-\theta}\left(e^{-\theta u}-1\right)\left(e^{-\theta v}-1\right)}{\left(e^{-\theta}-1\right)^{2}}}{1+\frac{\left(e^{-\theta u}-1\right)\left(e^{-\theta v}-1\right)}{e^{-\theta}-1}} \tag{3.6}$$

Sedangkan untuk $g(\theta)=-\theta$, diperoleh

$$g'(\theta)=-1 \tag{3.7}$$

Sehingga berdasarkan persamaan (3.6) dan (3.7), diperoleh

$$\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{f'(\theta)}{g'(\theta)}\right)=\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\frac{\frac{-ue^{-\theta u}\left(e^{-\theta v}-1\right)}{e^{-\theta}-1}-\frac{ve^{-\theta v}\left(e^{-\theta u}-1\right)}{e^{-\theta}-1}+\frac{e^{-\theta}\left(e^{-\theta u}-1\right)\left(e^{-\theta v}-1\right)}{\left(e^{-\theta}-1\right)^{2}}}{1+\frac{\left(e^{-\theta u}-1\right)\left(e^{-\theta v}-1\right)}{e^{-\theta}-1}}}{-1}\right). \tag{3.8}$$

Sebelum menyelesaikan persamaan (3.8) di atas, maka diperlukan lemma berikut:

Lemma.1

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{e^{-\theta a}-1}{e^{-\theta}-1}=a$$

Bukti:

Misal $\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{e^{-\theta a}-1}{e^{-\theta}-1}\right)=\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{f_1(\theta)}{g_1(\theta)}\right)$

Berdasarkan teorema 1, maka

$$\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{f_1(\theta)}{g_1(\theta)}\right)=\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{f'_1(\theta)}{g'_1(\theta)}\right)$$

$$=\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{-ae^{-\theta a}}{-e^{-\theta}}\right)$$

$$=-a\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{e^{-\theta a}}{-e^{-\theta}}\right)$$

$$=-a\left(\frac{e^{0}}{-e^{0}}\right)$$

$$= -a\left(\frac{1}{-1}\right)$$

$$= a$$

Berdasarkan lemma 1, persamaan (3.8) diperoleh

$$\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{f'(\theta)}{g'(\theta)}\right) = \lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\dfrac{\dfrac{-ue^{-\theta u}(e^{-\theta v}-1)}{e^{-\theta}-1} - \dfrac{ve^{-\theta v}(e^{-\theta u}-1)}{e^{-\theta}-1} + \dfrac{e^{-\theta}(e^{-\theta u}-1)(e^{-\theta v}-1)}{(e^{-\theta}-1)^2}}{1+\dfrac{(e^{-\theta u}-1)(e^{-\theta v}-1)}{e^{-\theta}-1}}}{-1}\right)$$

$$= -1\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\dfrac{-ue^{-\theta u}(e^{-\theta v}-1)}{e^{-\theta}-1} - \dfrac{ve^{-\theta v}(e^{-\theta u}-1)}{e^{-\theta}-1} + \dfrac{e^{-\theta}(e^{-\theta u}-1)(e^{-\theta v}-1)}{(e^{-\theta}-1)^2}}{1+\dfrac{(e^{-\theta u}-1)(e^{-\theta v}-1)}{e^{-\theta}-1}}\right)$$

$$= -1\left(\frac{-uv - vu + uv}{1}\right)$$

$$= -1(-uv)$$

$$= uv$$

Terbukti bahwa $C_0 = uv$

Berdasarkan analisis sifat copula *Frank* di atas dengan ditunjukkan beberapa gambar copula *Frank* dengan sebarang θ, menunjukkan bahwa copula *Frank* dapat mengidentifikasi dependensi positif dan negatif, dimana selanjutnya akan ditunjukkan dengan simulasi dari dua variabel yang berdistribusi tidak normal menggunakan analisis numerik.

3.3 Keterkaitan Kendall's Tau dan Spearman Rho dengan Copula *Frank*

Berdasarkan persamaan (2.17) dan persamaan (2.19), sehingga jika copula *Frank* memiliki fungsi distribusi kumulatif, maka formula Kendall's Tau dan

Spearman Rho dari copula *Frank* dapat dinyatakan sebagai berikut (Genest, 1987: 550).

$$\tau_\theta = 1 - \frac{4}{\theta}[1 - D_1(\theta)] \text{ dan } \rho_\theta = 1 - \frac{12}{\theta}[D_1(\theta) - D_2(\theta)] \tag{3.9}$$

di mana $D_k(\theta)$ adalah fungsi Debye, yang didefinisikan dengan

$$D_1(\theta) = \frac{1}{\theta^k}\int_0^\theta \frac{t^k}{e^t - 1}dt \tag{3.10}$$

3.4 Simulasi

3.4.1 Kendall's Tau

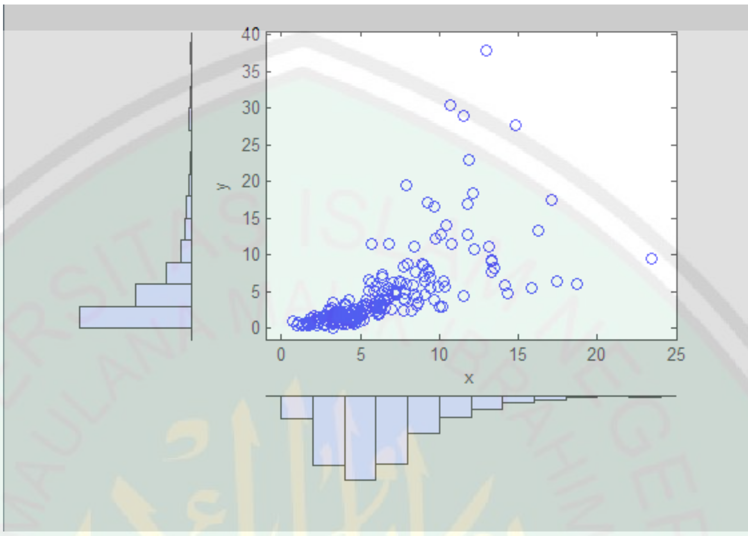
Berdasarkan persamaan (3.9) untuk Kendall's Tau maka dengan menggunakan analisis numerik yaitu integral simpson $\frac{3}{8}$, diperoleh

Tabel 3.1: Nilai Dependensi Kendall's Tau dari Copula *Frank Family* dengan Beberapa Sebarang Nilai θ

No	θ	τ_C
1	-15	-0.7628
2	-10	-0.6662
3	5	0.4551
4	10	0.6654
5	15	0.7624

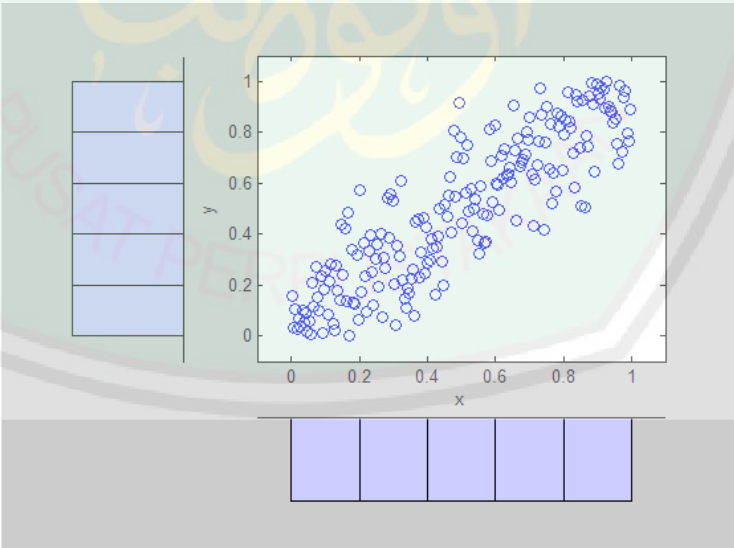
Dari tabel 3.1 diketahui bahwa jika $\theta < 0$ maka $\tau_C < 0$ dan jika $\theta > 0$ maka $\tau_C > 0$. Hal ini menunjukkan bahwa copula *Frank* dapat mengidentifikasi dependensi positif dan negatif.

Simulasi 1. Jika diberikan dua variabel *X* dan *Y* dengan fungsi distribusi marginal berturut-turut adalah fungsi distribusi Gamma (3,2) dan fungsi distribusi lognormal (1,1) dengan n = 200 dan $\theta = 10$. Maka dengan simulasi menggunakan program MATLAB, diperoleh



Gambar 3.9: Scatter Plot Fungsi Distribusi Gamma (3,2) dan Fungsi Distribusi (1,1) Lognormal dengan $\theta = 10$

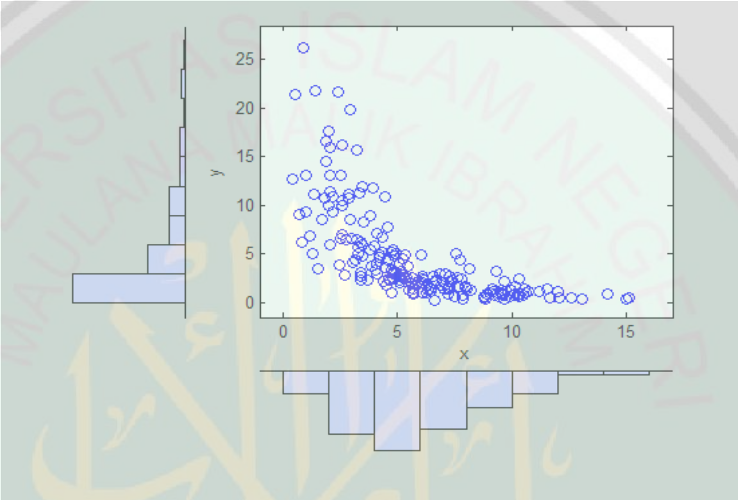
Kemudian kedua variabel ditransformasi ke Uniform [0,1]



Gambar 3.10: Scatter Plot Fungsi Distribusi Gamma (3,2) dan Fungsi Distribusi Lognormal (1,1) dengan $\theta = 10$ dalam Skala Transformasi (Uniform [0,1])

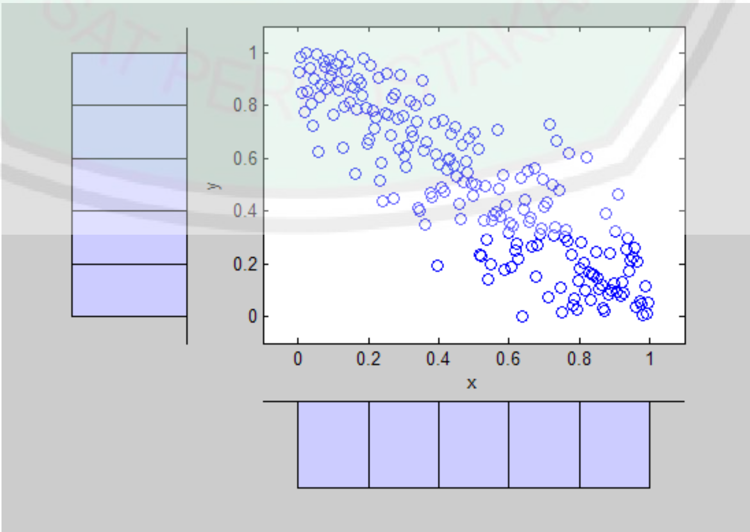
Sehingga diperoleh nilai Kendall's Tau 0.6724 untuk $\theta = 10$. Hasil ini menunjukkan adanya dependensi positif.

Simulasi 2. Jika diberikan dua variabel X dan Y dengan fungsi distribusi marginal berturut-turut adalah fungsi distribusi Gamma (3,2) dan fungsi distribusi lognormal (1,1) dengan n = 200 dan $\theta = -10$. Maka dengan simulasi menggunakan program MATLAB, diperoleh



Gambar 3.11: Scatter Plot Fungsi Distribusi Gamma (3,2) dan Fungsi Distribusi (1,1) Lognormal dengan $\theta = -10$

Kemudian kedua variabel ditransformasi ke Uniform [0,1],



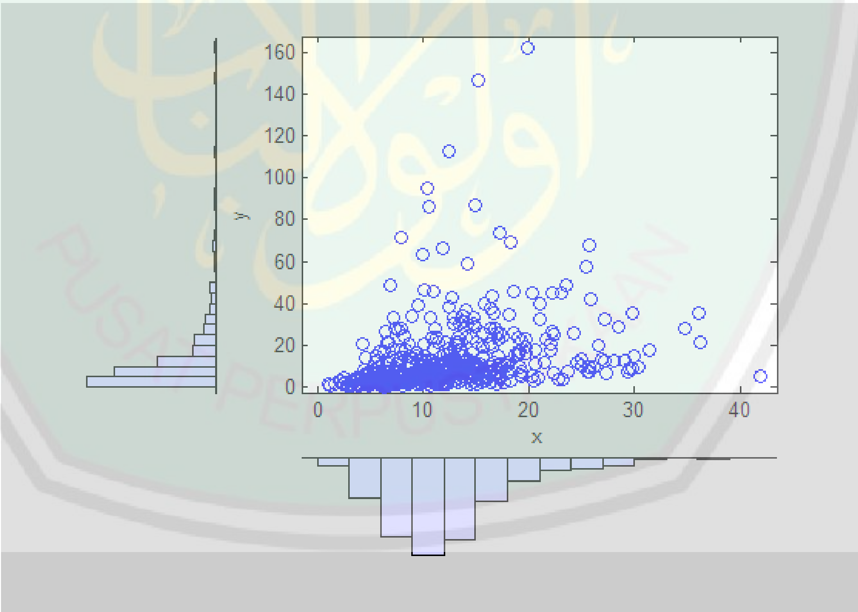
Gambar 3.12: Scatter Plot Fungsi Distribusi Gamma (3,2) dan Fungsi Distribusi Lognormal (1,1) dengan $\theta = -10$ dalam Skala Transformasi (Uniform [0,1])

Sehingga diperoleh nilai Kendall's Tau -0.6658 untuk $\theta = -10$. Hasil ini menunjukkan adanya dependensi negatif.

Simulasi 3. Jika diberikan dua variabel X dan Y dengan fungsi peluang marginal berturut-turut adalah fungsi Gamma (4,3) dan fungsi lognormal (2,1) dengan n = 500 dan tanpa diketahui nilai dari θ. Maka dengan simulasi menggunakan Ms. Excel dan program MATLAB, diperoleh

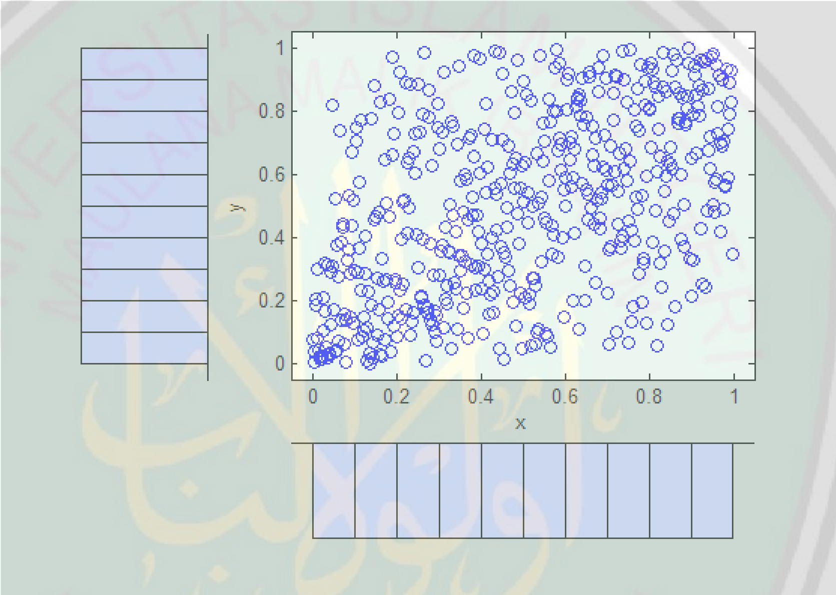
Tabel 3.2: Koefisien Korelasi Pearson

Mean	12,134	10,447
SD	6,259	16,887
Korelasi Pearson	0,2874	



Gambar 3.13: Scatter Plot antara Fungsi Distribusi Gamma (4,3) dan Fungsi Distribusi Lognormal (2,1) dalam Skala Asli

Karena nilai koefisien korelasi Pearson kecil, maka jika menggunakan ukuran korelasi ini akan mengakibatkan kesimpulan yang kurang tepat yaitu kedua variabal yang dianalisis tidak terdapat hubungan. Sehingga dalam praktiknya, kondisi seperti ini akan menyarankan untuk mengabaikan korelasi antara keduanya. Sehingga untuk menganalisis dependensi antara kedua variabel tersebut menggunakan copula *Frank* yaitu dengan mentransformai kedua variabel dalam skala transformasi Uniform [0,1]. Kemudian akan diperoleh nilai dependensi Kendall's Tau dalam kaitannya dengan copula *Frank*.



Gambar 3.14: Scatter Plot antara Fungsi Distribusi Gamma (4,3) dan Fungsi Distribusi Lognormal (2,1) dalam Skala Transformasi (Uniform [0,1])

Sehingga diperoleh nilai dependensi Kendall's Tau 0.3365 untuk $\theta = 3.3437$. Hasil tersebut menunjukkan nilai dependensi positif, di mana nilainya yang lebih besar dibandingkan korelasi pearson.

3.4.1 Spearman Rho

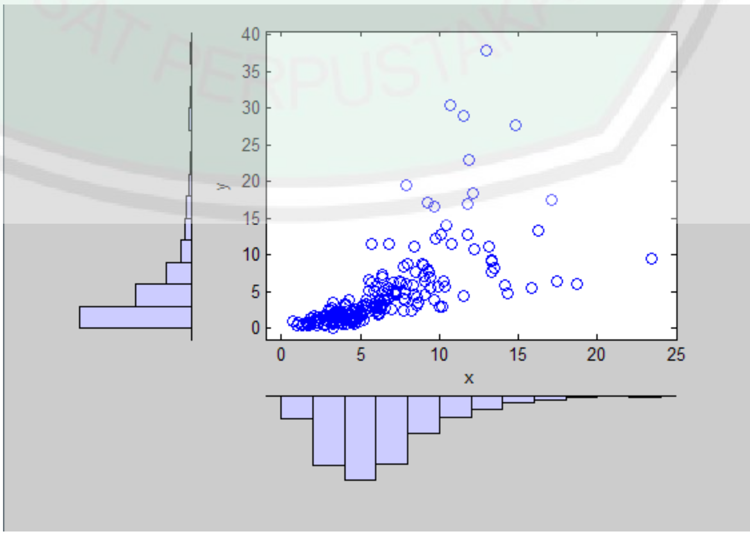
Berdasarkan persamaan (3.9) untuk Spearman Rho, maka dengan menggunakan analisis numerik yaitu integral simpson $\frac{3}{8}$, diperoleh

Tabel 3.3: Nilai Dependensi Spearman Rho dari copula *Frank Family* dengan Beberapa Sebarang Nilai θ

No	θ	ρ_C
1	-15	-0.9288
2	-10	-0.8590
3	5	0.6483
4	10	0.8614
5	15	0.9294

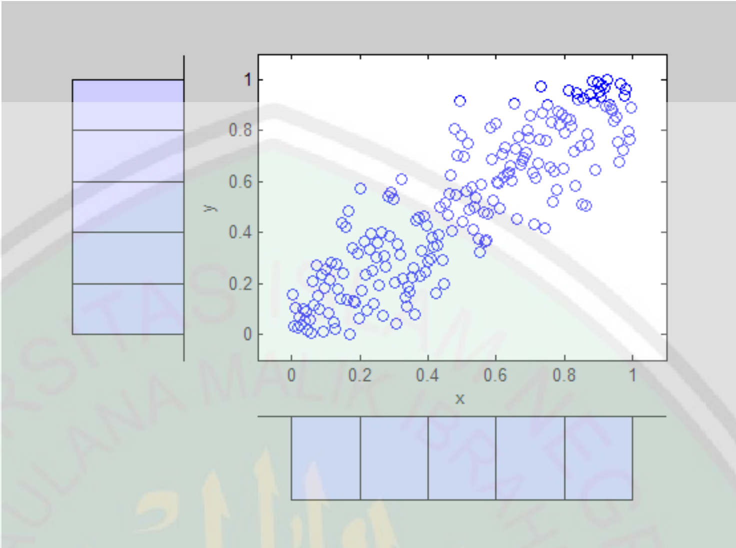
Dari tabel 3.3 diketahui bahwa jika $\theta < 0$ maka $\rho_C < 0$ dan jika $\theta > 0$ maka $\rho_C > 0$. Hasil tersebut menunjukkan bahwa copula *Frank* dapat mengidentifikasi struktur dependensi.

Simulasi 4. Jika diberikan dua variabel *X* dan *Y* dengan fungsi distribusi marginal berturut-turut adalah fungsi distribusi Gamma (3,2) dan fungsi distribusi lognormal (1,1) dengan n = 200. Maka dengan simulasi menggunakan program MATLAB, diperoleh



Gambar 3.15: Scatter Plot Fungsi Distribusi Gamma (3,2) dan Fungsi Distribusi Lognormal (1,1) dengan $\theta = 10$

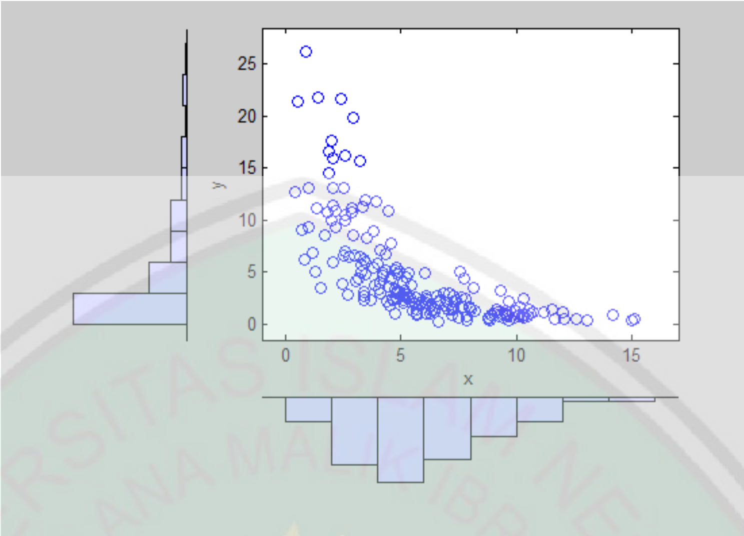
Kemudian kedua variabel ditransformasi ke Uniform [0,1],



Gambar 3.16: Scatter Plot Fungsi Distribusi Gamma (3,2) dan Fungsi Distribusi Lognormal (1,1) dengan $\theta = 10$ dalam skala transformasi (Uniform [0,1])

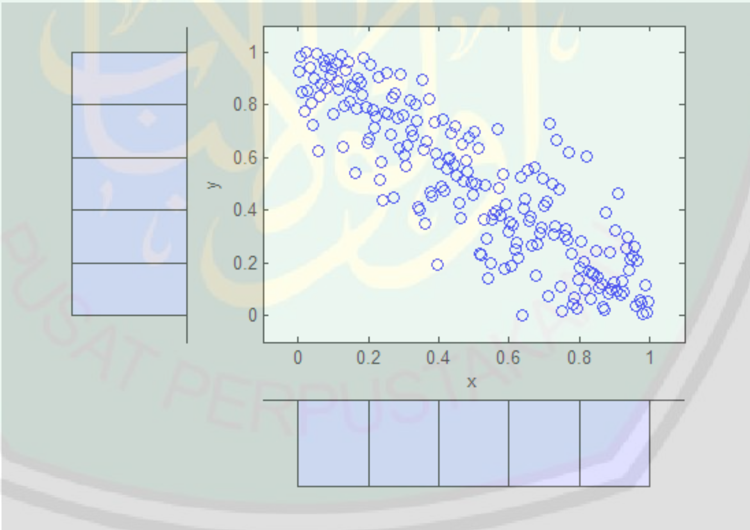
Sehingga diperoleh nilai Spearman Rho 0.8657 untuk $\theta = 10$. Hasil ini menunjukkan adanya dependensi positif.

Simulasi 5. Jika diberikan dua variabel X dan Y dengan fungsi distribusi marginal berturut-turut adalah fungsi distribusi Gamma (3,2) dan fungsi distribusi lognormal (1,1) dengan n = 200 dan $\theta = -10$. Maka dengan simulasi menggunakan program MATLAB, diperoleh



Gambar 3.17: Scatter Plot Fungsi Distribusi Gamma (3,2) dan Fungsi Distribusi Lognormal (1,1) dengan $\theta = -10$

Kemudian kedua variabel ditransformasi ke Uniform [0,1],



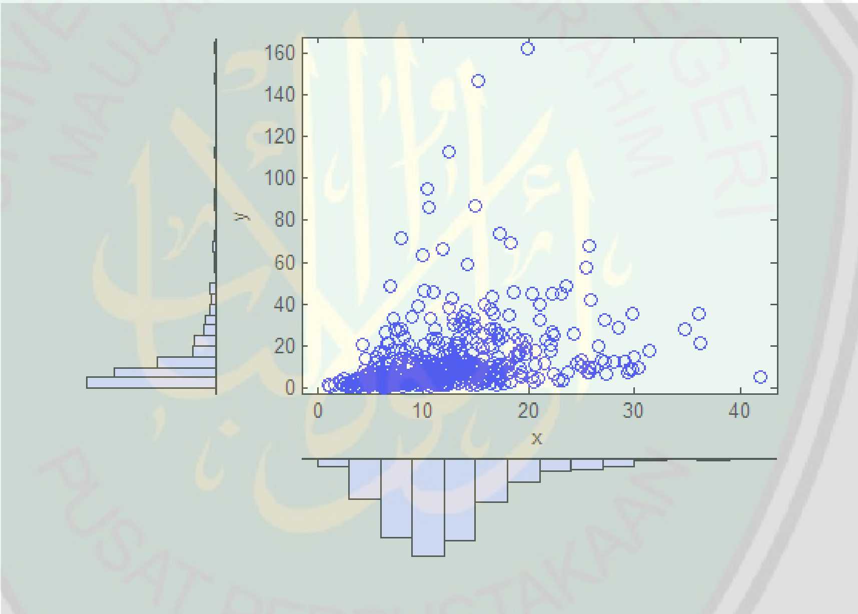
Gambar 3.18: Scatter Plot Fungsi Distribusi Gamma (3,2) dan Fungsi Distribusi Lognormal (1,1) dengan $\theta = -10$ dalam skala transformasi (Uniform [0,1])

Sehingga diperoleh nilai Spearman Rho -0.8602 untuk $\theta = -10$. Hasil ini menunjukkan adanya dependensi negatif.

Simulasi 6. Jika diberikan dua variabel X dan Y dengan fungsi peluang marginal berturut-turut adalah fungsi Gamma (4,3) dan fungsi lognormal (2,1) dengan n = 500 dan tanpa diketahui nilai dari θ. Maka dengan simulasi menggunakan Ms. Excel dan program MATLAB, diperoleh

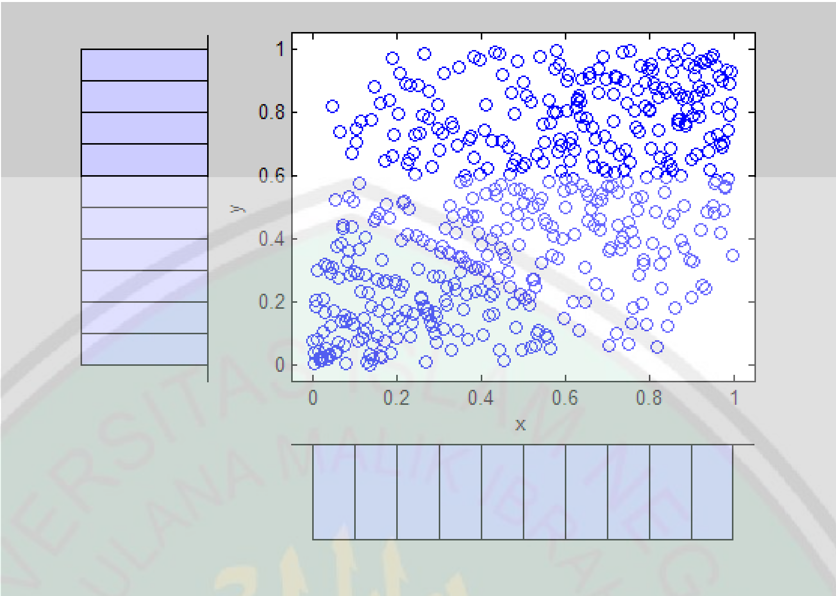
Tabel 3.4: Koefisien Korelasi Pearson

Mean	12,134	10,447
SD	6,259	16,887
Korelasi Pearson	0,2874	



Gambar 3.19: Scatter Plot antara Fungsi Distribusi Gamma (4,3) dan Fungsi Distribusi Lognormal (2,1) dalam skala asli

Dengan cara serupa dengan dependensi Kendall's Tau di atas, akan diperoleh nilai dependensi Spearman Rho dalam kaitannya dengan copula *Frank* .



Gambar 3.20: Scatter Plot antara Fungsi Distribusi Gamma (4,3) dan Fungsi Distribusi Lognormal (2,1) dalam Skala Transformasi (Uniform [0,1])

Sehingga diperoleh nilai dependensi Spearman Rho 0.4887 untuk $\theta = 3.3437$. Hasil tersebut menunjukkan nilai dependensi positif, di mana nilainya lebih besar dibandingkan korelasi pearson.

Dari hasil beberapa simulasi, diketahui bahwa varibel yang disimulasikan memiliki dependensi, artinya kedua variabel tersebut terdapat keterkaitan. Karena pada dasarnya Allah Swt. berfirman dalam QS. Adz Dzarriyaat: 49,

وَمِن كُلِّ شَيۡءٍ خَلَقۡنَا زَوۡجَيۡنِ لَعَلَّكُمۡ تَذَكَّرُونَ ٤٩

Artinya : *Dan segala sesuatu Kami ciptakan berpasang-pasangan supaya kamu mengingat kebesaran Allah.* (QS. Adz Dzaariyaat: 49)

Ayat tersebut menjelaskan bahwasannya Allah Swt. menciptakan segala sesuatu memiliki pasangan-pasangannya dan setiap pasangan memiliki keterkaitan atau keterhubungan. Dijelaskan juga pada tafsir Ibnu Katsir, semua makhluk diciptakan oleh Allah Swt. dengan berpasangan seperti halnya langit dan bumi, malam dan siang, matahari dan bulan, daratan dan lautan, terang dan gelap, iman dan kufur, mati dan hidup, celaka dan bahagia, terang dan gelap hingga hewan-hewan dan tumbuhan. Semuanya memiliki hubungan, tidak ada yang dapat berdiri sendiri. Begitu juga dalam ilmu pengetahuan, segala sesuatu memiliki keterkaitan, walaupun tidak keterhubungan yang sempurna, tapi dari hasil simulasi telah mengindikasikan terdapat hubungan.

Hasil dari simulasi juga menunjukkan adanya dependensi positif dan negatif, karena pada dasarnya copula *Frank* dapat mengidentifikasi dependensi positif dan negatif. Di mana hal ini tidak terdapat pada copula lain dari copula *Archimedean*. Dependensi positif dan negatif juga terdapat dalam firman Allah Swt.,

يَـٰٓأَيُّهَا ٱلَّذِينَ ءَامَنُوا۟ كُلُوا۟ مِن طَيِّبَـٰتِ مَا رَزَقْنَـٰكُمْ وَٱشْكُرُوا۟ لِلَّهِ إِن كُنتُمْ إِيَّاهُ تَعْبُدُونَ ﴿١٧٢﴾

Artinya: *Hai orang-orang yang beriman, makanlah di antara rezki yang baik-baik yang Kami berikan kepadamu dan bersyukurlah kepada Allah, jika benar-benar kepada-Nya kamu menyembah.* (QS. Al Baqarah: 172)

Ayat tersebut menjelaskan bahwa Allah memerintahkan untuk memakan makanan yang baik-baik, yaitu halal. Karena segala sesuatu yang berhubungan harus segala sesuatu yang halal, begitu juga dengan segala yang masuk ke dalam tubuh manusia harus yang baik dan halal. Hal ini merupakan wujud takwa kepada Allah Swt., di mana segala yang Allah Swt. perintahkan wajib dijalani dan segala yang Allah Swt. larang wajib ditinggalkan. Selain itu dalam kesehatan, segala yang dikonsumsi akan memberikan efek pada tubuh, jika manusia mengkonsumsi segala sesuatu yang tidak baik dan tidak halal, akan memberikan efek buruk pada tubuh, misal tubuh akan terserang penyakit. Sehingga hal ini menunjukkan adanya dependensi negatif, yaitu jika hubungan manusia dengan makanan, di mana salah satunya mendapat perlakuan negatif, misal makanan yang dikonsumsi tidak baik dan tidak halal maka akan memberikan hasil yang negatif. Begitu juga sebaliknya. Allah Swt. berfirman,

وَجَعَلۡنَا ٱلسَّمَآءَ سَقۡفٗا مَّحۡفُوظٗاۖ وَهُمۡ عَنۡ ءَايَٰتِهَا مُعۡرِضُونَ ٣٢

Artinya: *Dan Kami menjadikan langit itu sebagai atap yang terpelihara, sedang mereka berpaling dari segala tanda-tanda (kekuasaan Allah) yang terdapat padanya.* (QS. Al Anbiya': 32)

Ayat tersebut menyiratkan bahwa langit yang dilindungi oleh Allah Swt. sebagai atap pelindung segala sesuatu di bumi, sehingga atmosfer sebagai langit yaitu atap atau pelindung bagi segala sesuatu di bumi seperti halnya atap rumah yang melindungi penghuni rumah dari panas teriknya matahari ataupun melindungi dari hujan lebat. Hal ini menunjukkan adanya dependensi positif, karena itu langit memiliki hubungan dengan segala sesuatu di bumi. Tetapi, jika manusia tidak menjaga alam, dalam jangka waktu ke depan atmosfer sebagai langit atau pelindung akan rusak, tidak dapat dibayangkan bagaimana panasnya bumi jika panas sinar matahari langsung sampai ke bumi hingga 100℃ dan setiap jam akan terus meningkat maka panas panas aspal di jalan akan mendekati titik didih, demikian pula suhu pada malam hari mencapai -100℃ maka air di laut akan membeku. Sehingga hal ini menunjukkan adanya dependensi negatif, karena salah satu variabel dikenai perlakuan negatif, misal tingkah laku manusia yang tidak baik menghasilkan sesuatu yang negatif. Oleh karena itu, hubungan antar variabel tidak hanya menghasilkan dependensi positif, tapi juga dependensi negatif, manakala salah satu variabel dikenai perlakuan negatif seperti pada analisis dependendensi dengan copula *Frank,* jika $\theta > 0$ akan menghasilkan dependendensi positif, sebaliknya jika $\theta < 0$ akan menghasilkan dependendensi negatif.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan dari bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa:

1. Copula *Frank* termasuk dalam copula *Archimedean*, yang memiliki sifat yaitu *grounded* dan *2-increasing*, selain itu dapat mengidentifikasi struktur dependensi lebih luas dengan menggunakan fungsi distribusi kumulatif dari copula *Frank*. Hal ini karena copula *Frank* dapat mengidentifikasi dependensi positif dan dependensi negatif. Jika copula *Frank* (C_θ) dengan $\theta = 0$ maka kedua variabel acaknya independen.
2. Copula *Frank* dapat diaplikasikan pada variabel yang berdistribusi tidak normal, dengan cara terlebih dahulu variabel ditransformasi ke Uniform [0,1]. Hasil simulasi pada pembahasan bahwa jika $\theta < 0$ maka $\tau_C < 0$ dan jika $\theta > 0$ maka $\tau_C > 0$ serta jika $\theta < 0$ maka $\rho_C < 0$ dan jika $\theta > 0$ maka $\rho_C > 0$. Hal tersebut mengindikasikan dependensi positif dan negatif.

4.2 Saran

Penelitian ini masih perlu pengembangan keilmuan sehingga disarankan untuk penelitian selanjutnya dapat menggunakan jenis copula lainnya atau membandingkan beberapa jenis copula untuk mengetahui copula yang lebih baik dalam mengidentifikasi struktur dependensi.

DAFTAR PUSTAKA

Ar Rifa'i, Muhammad Nasib. 2000. *Kemudahan Dari Allah Ringkasan Tafsir Ibnu Katsir Jilid 3.* Jakarta: Gema Insani Press.

Assuncao, Renato. 2004. A Note On Testing Parameters of Frank's Copula Models. *Belgian Actuarial Bulletin*, Vol. 4, No. 1: 19-22.

Dyayadi. 2008. *Alam Semesta Bertawaf (Keajaiban Sains dalam Al Qur'an).* Yogyakarta: Lingkaran.

Genest, Christian. 1987. Journal of Frank's Family of Bivariate Distribution. *Biometrika Trust*, Vol. 74, No. 3: 549-555.

Jogde. K. 1982. Concepts of Dependence. *Encyclopedia of Statistical Sciences*, Vol. 1. S.Kotz dan N.L. Johnson, editor. John Wiley & Sons, New York.

Johnson, Robert. 2000. *Elementary Statistics*. USA: Duxbury.

Kelly, Dana L. 2007. Using Copulas to Model Dependence in Simulation Risk Assessment. *Idaho National Laboratory*, 7: 1-9.

Muller, Christine. 2006. *Risk Management and Solvency - Mathematical Methods in Theory and Practice*. Oldenburg: Vorgelegt Von.

Nelsen, B. Roger. 1999. *An Intoduction To Copulas.* New York: Springer-Verlag.

Purcell, Edwin J dan Varberg, Dale. 1982. *Kalkulus dan Geometri Analisis Jilid 1.* Bandung: Erlangga.

Quesada-Molina, Jose Juan, dkk. 2003. What are Copula?. *Monografias del Semin, Matem*, 27: 499-506.

Usman, Husaini. 2008. *Pengantar Statistika*. Jakarta: Bumi Aksara.

Walpole, G. Ronald. 1978. *Probability and Statistics for Engineers and Scientists.* New York: Macmillan Publishing.

LAMPIRAN

Gambar 3.1
```
>> u=linspace(0,1,10);
>> [U1,U2]=meshgrid(u,u);
>> F=copulacdf('frank',[U1(:) U2(:)],0);
>> surf(U1,U2,reshape(F,10,10))
>> xlabel('u1')
>> ylabel('u2')
```

Gambar 3.2
```
>> u=linspace(0,1,10);
>> [U1,U2]=meshgrid(u,u);
>> F=copulacdf('frank',[U1(:) U2(:)],-10);
>> surf(U1,U2,reshape(F,10,10))
>> xlabel('u1')
>> ylabel('u2')
```

Gambar 3.3
```
>> u=linspace(0,1,10);
>> [U1,U2]=meshgrid(u,u);
>> F=copulacdf('frank',[U1(:) U2(:)],10);
>> surf(U1,U2,reshape(F,10,10))
>> xlabel('u1')
>> ylabel('u2')
```

Gambar 3.4
```
>> u=linspace(0,1,10);
>> [U1,U2]=meshgrid(u,u);
>> F=copulapdf('frank',[U1(:) U2(:)],0);
>> surf(U1,U2,reshape(F,10,10))
>> xlabel('u1')
>> ylabel('u2')
```

Gambar 3.5
```
>> u=linspace(0,1,10);
>> [U1,U2]=meshgrid(u,u);
>> F=copulapdf('frank',[U1(:) U2(:)],-10);
>> surf(U1,U2,reshape(F,10,10))
>> xlabel('u1')
>> ylabel('u2')
```

Gambar 3.6
```
>> u=linspace(0,1,10);
>> [U1,U2]=meshgrid(u,u);
>> F=copulapdf('frank',[U1(:) U2(:)],-2);
>> surf(U1,U2,reshape(F,10,10))
>> xlabel('u1')
>> ylabel('u2')
```

Gambar 3.7
```
>> u=linspace(0,1,10);
>> [U1,U2]=meshgrid(u,u);
>> F=copulapdf('frank',[U1(:) U2(:)],2);
>> surf(U1,U2,reshape(F,10,10))
>> xlabel('u1')
>> ylabel('u2')
```

Gambar 3.8
```
>> u=linspace(0,1,10);
>> [U1,U2]=meshgrid(u,u);
>> F=copulapdf('frank',[U1(:) U2(:)],10);
>> surf(U1,U2,reshape(F,10,10))
>> xlabel('u1')
>> ylabel('u2')
```

Tabel 3.1
```
theta=5
f=inline('x/(exp(x)-1)','x');
a=0.01; b=theta; n=1000;
x=linspace(a,b,n);
h=x(2)-x(1);
L=0;
for i=1:3:n-3,
    L=L+((3*h/8)*(f(x(i))+3*(f(x(i+1))+f(x(i+2)))+f(x(i+3))));
end
Tau=1-(4/theta)*(1-(1/theta)*L)
```

Tabel 3.2

```
clc;
clear;
theta=15
f=inline('x/(exp(x)-1)','x');
f1=inline('x^2/(exp(x)-1)','x');
a=0.01; b=theta; n=1000;
x=linspace(a,b,n);
h=x(2)-x(1);
L=0;
L1=0;
for i=1:3:n-3,
   L=L+((3*h/8)*(f(x(i))+3*(f(x(i+1))+f(x(i+2)))+f(x(i+3))));
   L1=L1+((3*h/8)*(f1(x(i))+3*(f1(x(i+1))+f1(x(i+2)))+f1(x(i+3))));
end
Rho=1-(12/theta)*(((1/theta)*L)-((2/theta^2)*L1))
```

Gambar 3.9

```
>> Theta0=10;
>> U=copularnd('frank',Theta0,200);
>> u=U(:,1); v=U(:,2);
>> plot(u,v,'o');
>> x=gaminv(u,3,2);
>> y1=norminv(v,1,1);
>> y=exp(y1);
>> figure(2)
>> scatterhist(x,y);
>> [F1,x1] = ecdf(x);
>> [F2,x2] = ecdf(y);
>> Fx=[Copy data Fx dari Exel];
>> Gy=[Copy data Fx dari Exel];
>> figure(3);
>> scatterhist (Fx,Gy);
>> Tau=corr(x,y,'type','Kendall')
>> Rho=corr(x,y,'type','Kendall')
```

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN)
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang (0341) 558933 Fax. (0341) 558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : **Lailil Wakhidatus Solikha**
NIM : **08610005**
Fakultas/Jurusan : **Sains dan Teknologi/Matematika**
Judul Skripsi : **Studi Copula *Frank Family* 2-Dimensi dalam Identifikasi Struktur Dependensi**
Pembimbing I : **Fachrur Rozi, M.Si**
Pembimbing II : **Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag**

No	Tanggal	HAL	Tanda Tangan	
1	28 September 2011	Konsultasi Bab I	1.	
2	10 Oktober 2011	Konsultasi Kajian Agama		2.
3	12 Oktober 2011	ACC Bab I	3.	
4	13 Oktober 2011	Konsultasi Bab II		4.
5	15 Oktober 2011	Revisi Bab II	5.	
6	17 Oktober 2011	ACC Bab II		6.
7	16 November 2011	Konsultasi Bab III	7.	
8	24 Desember 2011	Revisi Bab III		8.
9	11 Januari 2012	ACC Bab III	9.	
10	12 Januari 2012	Konsultasi Bab IV		10.
11	13 Januari 2012	Konsultasi Kajian Agama	11.	
12	14 Januari 2012	ACC Kajian Agama		12.
13	14 Januari 2012	ACC Bab IV	13.	
14	15 Januari 2012	ACC Keseluruhan		14.

Malang, 16 Januari 2012

Mengetahui,

Ketua Jurusan Matematika,

<u>Abdussakir, M.Pd</u>
NIP. 19751006 200312 1 001