ANALISIS TURUNAN FUZZY PADA SUATU FUNGSI

SKRIPSI

Oleh:
IRHASHA FITROTUL AFIFI
NIM. 08610049

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2012

ANALISIS TURUNAN FUZZY PADA SUATU FUNGSI

SKRIPSI

Diajukan kepada :
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan
dalam Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
IRHASHA FITROTUL AFIFI
NIM. 08610049

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2012

ANALISIS TURUNAN FUZZY PADA SUATU FUNGSI

SKRIPSI

Oleh:

IRHASHA FITROTUL AFIFI
NIM. 08610049

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal: 09 Maret 2012

Dosen Pembimbing I,	Dosen Pembimbing II,
Drs. H. Turmudi, M.Si	**Abdussakir, M.Pd**
NIP. 19571005 198203 1 006	**NIP. 19751006 200312 1 001**

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

ANALISIS TURUNAN FUZZY PADA SUATU FUNGSI

SKRIPSI

Oleh:
IRHASHA FITROTUL AFIFI
NIM. 08610049

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal: 4 April 2012

Penguji Utama:	Evawati Alisah, M.Pd NIP. 19720604 199903 2 001	....
Ketua Penguji:	Hairur Rahman, M.Si NIP. 19800429 200604 1 003	....
Sekretaris Penguji:	Drs. H. Turmudi, M.Si NIP. 19571005 198203 1 006	....
Anggota Penguji:	Abdussakir, M.Pd NIP. 19751006 200312 1 001	....

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Irhasha Fitrotul Afifi

NIM : 08610049

Fakultas/Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika

Judul Penelitian : Analisis Turunan Fuzzy Pada Suatu Fungsi

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 2 April 2012

Yang membuat pernyataan,

Irhasha Fitrotul Afifi

NIM. 08610049

MOTTO

JANGAN PERNAH TAKUT UNTUK BERMIMPI KARENA SEMUA BERAWAL DARI MIMPI…..

PERSEMBAHAN

Dengan iringan do'a dan rasa syukur yang sangat besar karya ini penulis persembahkan sebagai cinta kasih dan bakti penulis untuk:

Slamet (ayahanda) dan Indah Sulistyowati (ibunda),
Ghulam dan Nawal (adik).
Terimakasih atas segala ketulusan do'a, nasihat, kasih sayang dan slalu menjadi motivator serta penyemangat dalam setiap langkah penulis untuk terus berproses menjadi insan kamil.

KATA PENGANTAR

Bismillahirrohmaanirrohiim

Assalamu'alaikum Wr.Wb.

Alhamdulillahirobbil'alamiin… segala puji dan syukur bagi Allah, yang telah memberikan rahmat kepada semua makhluk di bumi, yang Maha Perkasa dan Maha Bijaksana, penguasa alam semesta yang telah memberikan kekuatan kepada penulis sehingga penulis dapat menyelesaikan skiripsi ini.

Berkat bantuan, bimbingan dan dorongan dari berbagai pihak, maka penulis mengucapkan banyak terima kasih serta ucapan doa, semoga Allah SWT membalas semua kebaikan dan menyinari jalan yang diridhoi-Nya, khususnya kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU, DSc selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang dan sekaligus pembimbing agama yang telah memberikan pengarahan dalam penyelesaian skripsi ini.
4. Drs. H. Turmudi M.Si selaku pembimbing penulis dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Atas bimbingan, arahan, saran, motivasi dan kesabarannya, sehingga penulis dapat menyelesaikan ini dengan baik.

5. Seluruh dosen Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang, yang telah mendidik, membimbing, mengajarkan dan mencurahkan ilmu-ilmunya kepada penulis.
6. Bapak Slamet dan Ibu Indah Sulistyowati tercinta selaku orang tua penulis, yang telah mencurahkan cinta dan kasih-sayang teriring do'a, motivasi, dan materi, sehingga penulis selalu optimis dalam menggapai salah satu kesuksesan hidup.
7. Kedua adik penulis Ghulam Rijal Arsyad dan Nawal Abdi tercinta dan tersayang yang telah memberikan dukungan, doa, dan motivasi.
8. Teman-teman terbaik penulis Azizizah Noor Aini, Ummu Aiman Chabasiyah, Dewi Ratna, Moh. Rofhik Nanang, Hawzah Sa'adati, Yunita Kertasari, dan seluruh teman-teman jurusan matematika khususnya angkatan 2008 yang berjuang bersama-sama untuk mencapai kesuksesan yang diimpikan. Terimakasih atas segala pengalaman berharga dan kenangan terindah yang telah terukir.
9. Seluruh karyawan jurusan Matematika yang telah membantu proses administrasi penyelesaiaan skripsi.
10. Kepada semua pihak yang telah membantu dalam penyelesaian skripsi ini, yang tidak dapat disebutkan satu per satu.

Akhirnya dengan segala keterbatasan pengetahuan dan waktu penulis, sekiranya ada sesuatu yang kurang berkenan sehubungan dengan penyelesaian skripsi ini, penulis mohon maaf yang sebesar-besarnya. Kritik dan saran dari para pembaca yang budiman demi kebaikan karya ini merupakan harapan besar bagi penulis. Semoga karya ilmiah yang berbentuk skripsi ini dapat bermanfaat dan berguna.

Wassalamu'alaikum Wr.Wb

Alhamdulillahirobbil Alamin

Malang, April 2012

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR SIMBOL

$\mathbb{N}$	: Himpunan semua bilangan asli
$\mathbb{R}$	: Himpunan semua bilangan riil
$\mathbb{R}^+$	: Himpunan semua bilangan riil non-negatif
$\mathbb{R}^{++}$	: Himpunan semua bilangan riil positif
$\mathbb{Z}$	: Himpunan semua bilangan bulat
ε	: Epsilon
δ	: Delta
$\in$	: Anggota
$\cap$	: Irisan
$\cup$	: Gabungan
$\forall$	: Untuk setiap
$\exists$	: Ada
$[a, b\ ]$	: Interval tertutup
∞	: Tak hingga
$a = r\text{-lim}\, l$	: Bilangan a adalah r-limit dari barisan l
$D(f)$	: Domain fungsi f
$R(f)$	: Range fungsi f
$f: M \to L$	: f fungsi dari M ke L
$\|x\|$	: Harga mutlak dari x.
$b\ =\ st_r^{ct} d/dx\, f(a)$	: Turunan Fuzzy kuat memusat
$b\ =\ st_r^{1} d/dx\, f(a)$	: Turunan Fuzzy kuat ke kiri
$b\ =\ st_r^{r} d/dx\, f(a)$	: Turunan Fuzzy Kuat ke Kanan
$b\ =\ st_r^{t} d/dx\, f(a)$	: Turunan Fuzzy Kuat ke Dua sisi

ABSTRAK

Afifi, Irhasha Fitrotul. 2012. **Analisis Turunan Fuzzy Pada Suatu Fungsi.** Skripsi. Jurusan Matematika. Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Pembimbing: (I) Drs. H. Turmudi, M.Si
(II) Abdussakir, M.Pd

Kata Kunci : *turunan fuzzy, limit fuzzy, barisan , fungsi*

Analisis neo-klasik merupakan sintesis analisis klasik, teori himpunan fuzzy dan turunan. Pada dasarnya, bentuk analisisnya sederhana, seperti fungsi-fungsi dan operasi-operasi yang telah dipelajari berdasarkan pengertian konsep fuzzy : limit fuzzy dan kekontinyuan fuzzy. Oleh karena itu, butuh metode-metode baru untuk menguraikan ketaksamaan. Untuk mencapai tujuan pembahasan pada turunan fuzzy, konsep turunan diperluas pada konsep turunan fuzzy atau *r*-turunan. Penelitian ini bertujuan untuk menjelaskan sifat-sifat atau teorema-teorema turunan fuzzy kuat dari suatu fungsi di $\mathbb{R}^+$Sehingga penulis menggunakan konsep turunan fuzzy kuat dari suatu fungsi di $\mathbb{R}^+$ yang merupakan perluasan dari turunan fungsi. Pada penelitian ini, penulis menggunakan metode kajian pustaka (*Library research*), yakni dengan mempelajari, mencermati, menelaah dan mengidentifikasi buku-buku, makalah-makalah, maupun jurnal-jurnal yang berkaitan dengan penelitian yang telah diangkat oleh penulis.

Pembahasan mengenai turunan fuzzy dari suatu fungsi, awalnya, mengembangkan dan menunjukkan konstruksi turunan fuzzy kuat dari fungsi yang hampir mirip dengan turunan fuzzy dari barisan. Oleh karena itu, turunan fuzzy kuat dari fungsi ini tingkatannya lebih tinggi dari konsep klasik turunan fungsi. Pendefinisian *r*-turunan dari fungsi $f(x)$ di titik $a \in \mathbb{R}$ berdasar pada konsep *r*-turunan barisan. Barisan yang digunakan yaitu barisan yang konvergen. Pada akhir penelitian, diperoleh sifat-sifat turunan fuzzy kuat dari suatu fungsi di $\mathbb{R}^+$

Disarankan untuk penelitian selanjutnya berlanjut pada pembahasan sifat-sifat turunan fuzzy dengan membahas turunan fuzzy lemah.

ABSTRACT

Afifi, Irhasha Fitrotul 2012. **Analysis Fuzzy Derivative of Function.** Thesis. Mathematics Department Faculty of Science And Technology the State of Islamic University Maulana Malik Ibrahim Malang.
Advisors: (I) Drs. H. Turmudi, M.Si
(II) Abdussakir, M.Pd

Keywords: *fuzzy derivative, fuzzy limits, sequence, function*

Neoclassical analysis is synthesis of classical analysis, fuzzy set theory and derivative. On based, the form of analysis is simple, such functions and operations that have studied based on definition of fuzzy concept: fuzzy limit and fuzzy continuity. Because of that, need new methods to analyze inequality. To get the purpose to explain the properties or theorems of strong fuzzy derivative of function in $\mathbb{R}^+$. So that, the writer uses strong fuzzy derivative concept of function in $\mathbb{R}^+$ that form extended of derivative of function. In this research, the writer use library studies metods, that is study, precise, research and identify the books, papers or journals that is related to research that has raised by the writer.

The discussion about fuzzy derivative of function, at the first play up and show the construstion of strong fuzzy derivative of function that almost resemble to fuzzy derivative of sequence. So that, the level of strong fuzzy derivative of function is higher than classical derivative concept of function. To define r-derivative of function $f(x)$ at the point $a \in \mathbb{R}$ based on r-derivative sequence concept. The sequence that is use convergent sequence. At the end of research is got the properties of strong fuzzy derivative of function in $\mathbb{R}^+$.

It is recommended to next research to discuss the properties of fuzzy derivative with discussion about weak fuzzy derivative.

ملخص البحث

افيفي, إرهاصا فطرة.٢٠١٢. **تحليل غامض مشتق في الوظيفة**. بحث جامعي. قسم الرياضيات, كلية العلوم و التكنولوجيا. الجامعة الاسلامية الحكومية مولانا مالك إبراهيم بمالانج.
المشرف:(١) ترمذي الماجستير في العلوم
(٢) عبد الساكر الماجستير في التعلم

الكلمات الأساسية: غامض المششتق, غامض الحد,خط, وظيفةالاساس

التحليل شكل بسيط, هذه الوظائف والعلميات التي خضعت للد راسة بناء على فهم مفهوم غا مض: غا مض الحدد, غامض الاستمرارية, وغا مض مشتق. لتحقيق الغرض من النقاش حول غامض المشتقة, مشتق مفهوم ىوسع في مفهوم مستق غامض اوآر-مشتق. تهدف هذه الدراسة الي وصف خصا ئص اوالنظريات المستمد ة من و ظيفة غا مض قوى في R^+. بحيث كاتب يستخدم قوي مشتق من مفهوم غامض وظيفة في R^+ الذي هوا متداد لوظيفة مشتق. في هذه المفافشة, كاتب يستخدم طرق مراجعة الادبيات, هذاهوللتعلم. ورصد ودراسة وتحديد الكتاب والصحف والمجلات ذات الصلة واضعوا الدراسة.

مناقشة المشتقما غامض من وظيفة, في البداية, تطوير وتظهر قوى البناء المشتقمات غامض وظيفة على غرار غامض المستمدة على الخط. ولذلك المشتقات غامض قوي من الوظيفة على مستوى اعلى من المفهوم الكلا سيكى لل الدالة المشتقمة. تحديد r- مشتق من من وظيفة f (x) في نقطة R a يستنا دا الى مفهوم r- مشتق في صفوف. تسلسل المستخدمة هو تسلسل المتقاربة. في نهاية الدراسة, يكتسب خصا ئص المشتقات غا مض قوعا من و ظيفة في R^+.

ينصح للمزيذ من البحوث خصا ئص غا مض مشتق لمنا قشة المشتقات ضعيفة غا مض

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Al-Qur'an adalah kalam Allah yang tiada tandingannya (mu'jizat), diturunkan kepada nabi Muhammad saw. Penutup para Nabi dan Rasul, dengan perantaraan malaikat Jibril ditulis dalam mushaf-mushaf yang disampaikan kepada umatnya dengan jalan mutawatir (oleh orang banyak), serta mempelajarinya bernilai ibadah, dimulai dengan al-fatihah dan ditutup dengan surah an-Naas. Dan dalam pengertian lain ditambahkan kalimat "terpelihara dari setiap perobahan dan pergantian. Ia menyeru hati nurani untuk menghidupkan faktor-faktor perkembangan dan kemajuan serta dorongan kebaikan dan keutamaan. Kemukjizatan ilmiah Al-Qur'an bukanlah terletak pada pencakupannya akan teori-teori ilmiah yang baru, berubah, dan merupakan hasil usaha manusia dalam penelitian dan pengamatan. Semua persoalan dan kaidah ilmu pengetahuan yang telah mantap dan meyakinkan, merupakan manifestasi dari pemikiran yang kokoh yang dianjurkan Al-Qur'an, tidak ada pertentangan sedikitpun dengannya. Ilmu pengetahuan telah maju dan telah banyak pula masalah-masalahnya, namun apa yang telah tetap dan mantap daripadanya tidak bertentangan sedikitpun dengan salah satu ayat-ayat Al-Qur'an. (Al-Qaththan, 2006 : 338).

Al-Qur'an mengangkat derajat orang Muslim karena ilmunya

يَرْفَعِ اللهُ الَّذِيْنَ اٰمَنُوْامِنْكُمْ وَالَّذِيْنَ اُوْتُواالعِلْمَ دَرَجٰتٍ وَاللهُ بِمَا تَعْمَلُوْنَ خَبِيْرٌ

"Allah meninggikan orang-orang yang beriman di antara kamu dan orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat....." (Al-Mujadilah:11) (Syaikh Manna Al-Qaththan, 2006 : 338)

Dari Al-Qur'an dapat dikembangkan beberapa konsep dasar beberapa ilmu pengetahuan, di antaranya matematika. Salah satu konsep dasar dari ilmu matematika yang juga dibahas dalam Al-Qur'an ialah himpunan fuzzy. Dalam salah satu ayat Al-Qur'an yaitu pada surat Al-Hajj ayat 11 memberi penjelasan tentang celaan terhadap orang-orang yang tidak mempunyai pendirian dalam hidupnya.

وَمِنَ ٱلنَّاسِ مَن يَعۡبُدُ ٱللَّهَ عَلَىٰ حَرۡفٍۖ فَإِنۡ أَصَابَهُۥ خَيۡرٌ ٱطۡمَأَنَّ بِهِۦۖ وَإِنۡ أَصَابَتۡهُ فِتۡنَةٌ ٱنقَلَبَ عَلَىٰ وَجۡهِهِۦ خَسِرَ ٱلدُّنۡيَا وَٱلۡأٓخِرَةَۚ ذَٰلِكَ هُوَ ٱلۡخُسۡرَانُ ٱلۡمُبِينُ ﴿١١﴾

" Dan di antara manusia ada orang yang menyembah Allah dengan berada di tepi; Maka jika ia memperoleh kebajikan, tetaplah ia dalam keadaan itu, dan jika ia ditimpa oleh suatu bencana, berbaliklah ia ke belakang. Rugilah ia di dunia dan di akhirat. yang demikian itu adalah kerugian yang nyata."(Al-Hajj:11)

Pada ayat di atas menjelaskan tentang orang-orang yang tidak mempunyai pendirian. Pada saat allah memberikan kemudahan atau kebaikan dalam hidupnya orang ini akan tetap menyembah Allah dan menjalani semua perintahnya. Namun, pada saat terkena musibah atau bencana orang-orang seperti ini akan berpaling dari Allah dan mencari jalan keluar yang instan yaitu mengikuti ajaran yang sesat. Orang-orang seperti ini menjalani hidupnya tidak dengan kepastian, penuh keragu-raguan dan mudah terpengaruh dengan hal lain yang tidak jelas. Hal ini sama dengan konsep matematika, yaitu pada konsep fuzzy.

Terobosan baru yang diperkenalkan oleh Zadeh dalam karangan ilmiahnya berjudul "Fuzzy Set" adalah memperluas konsep "himpunan" klasik menjadi himpunan kabur (fuzzy set). Dalam teori himpunan klasik, yang dikembangkan oleh George Cantor (1845-1918) himpunan didefinisikan sebagai suatu koleksi obyek-obyek yang terdefinisi secara tegas. Dengan demikian suatu himpunan tegas A dalam semesta X dapat didefinisikan dengan menggunakan suatu fungsi $x_A \ : X \to \{0,1\}$, yang disebut fungsi karakteristik dari himpunan A dimana untuk setiap $x \in X$. Logika fuzzy yang merupakan cabang ilmu matematika memiliki konsep yang sederhana. Konsep logika fuzzy ini muncul dalam kehidupan sehari-hari yang tidak dapat memutuskan suatu masalah dengan jawaban sederhana yaitu "Ya" atau "Tidak". Atas dasar inilah Zadeh (1965) berusaha memodifikasikan teori himpunan, dimana setiap anggotanya memiliki derajat keanggotaan yang bernilai kontinu antara 0 dan 1. Himpunan inilah yang disebut himpunan fuzzy (Fuzzy Sets).

Sebelum membahas tentang fuzzy harus mengetahui dasar-dasar dari himpunan fuzzy. Dasar pada himpunan fuzzy yang akan dibahas terdapat pada kajian teori kalkulus. Kalkulus diferensial adalah salah satu dari dua bagian utama dari kalkulus dan analisis. Konsep utama kalkulus diferensial adalah konsep turunan. Tujuan utama penelitian ini adalah untuk mengembangkan konstruksi klasik turunan dan untuk membuatnya lebih fleksibel dan lebih relevan dengan kondisi kehidupan nyata dimana data diperoleh dari pengukuran dan perhitungan.

Turunan konvensional didefinisikan dalam matematika dengan proses limit. Ide dasar dari turunan fuzzy menggunakan limit fuzzy bukan limit konvensional.

Pada dasarnya turunan fuzzy memperluas ruang lingkup fungsi yang terdiferensialkan. Akibatnya, turunan fuzzy memungkinkan seseorang untuk meneliti fungsi pada turunan klasik yang tidak ada atau tidak dapat dihitung. Misalnya, metode berdasarkan wavelet kontinyu dengan mengubah fungsi wavelet Haar (Shao, et al, 2000) untuk perhitungan turunan perkiraan sinyal analitik. Selain itu, turunan fuzzy memungkinkan untuk memecahkan masalah optimasi. Di sisi lain, turunan fuzzy adalah pengembangan dari turunan klasik dan melestarikan banyak sifat penting turunan klasik. Misalnya, diferensiabilitas fuzzy yang menyiratkan kontinuitas klasik dari suatu fungsi.

Dalam penelitian ini, suatu teknik matematika untuk bekerja dengan model diferensial dengan ketidakpastian yang muncul dalam perhitungan dan pengukuran dikembangkan. Hal ini didasarkan pada konsep limit fuzzy. Untuk memperhitungkan ketidakpastian intrinsik model, disarankan menggunakan turunan fuzzy bukan turunan konvensional fungsi dalam model tersebut. Hal ini membuat konsep yang tepat pada turunan untuk manajemen informasi yang tidak tepat, tidak jelas, tidak pasti, dan tidak lengkap. Dua jenis turunan fuzzy diperkenalkan yakni turunan lemah dan turunan kuat. Turunan fuzzy kuat mirip dengan turunan biasa dari fungsi riil, menjadi ekstensi fuzzy. Turunan fuzzy lemah menghasilkan konsep baru turunan lemah bahkan dalam kasus klasik limit yang tepat. Turunan Fuzzy Bersyarat menyatukan berbagai jenis kuat dan lemah pada turunan fuzzy. Pada saat yang sama, memungkinkan untuk mempertimbangkan komputasi dan pengukuran prosedur yang digunakan untuk mendapatkan nilai-nilai turunan. Turunan fuzzy diperpanjang dapat mengambil nilai-nilai yang tak terbatas dan berguna untuk mencari minimum dan maximum fuzzy.

Ketika suatu fungsi terdiferensialkan, ada tingkat instan tunggal di mana variabel tergantung berubah secara relatif terhadap variabel independen. Namun, nilai yang tepat dari tingkat ini adalah seringkali tidak dihitung. Pada saat yang sama, ada banyak fungsi yang tidak memiliki turunan pada beberapa atau bahkan di semua titik domain. Dengan demikian, dalam banyak kasus, juga tidak memiliki tingkat instan tunggal atau tidak dapat tepat mengevaluasi tingkat ini. Artinya turunan klasik tidak bekerja dalam kasus ini dan diperlukan turunan fuzzy. Seperti dalam kasus klasik, turunan fuzzy merupakan suatu pendekatan untuk menilai di mana variabel tergantung perubahan relatif terhadap variabel independen. Turunan fuzzy kuat merupakan perkiraan dari semua nilai instan, sementara turunan fuzzy lemah mencerminkan perkiraan tingkat instan tertentu dari perubahan variabel.

Tingkat perubahan sangat penting dalam ilmu pengetahuan. Misalnya, kecepatan adalah tingkat perubahan posisi, dan percepatan adalah laju perubahan kecepatan. Dalam beberapa kasus, tingkat yang tepat tidak ada. Dalam kasus lain, itu ada tetapi tidak mungkin untuk mengukur tingkat yang tepat tersebut. Misalnya, tingkat laju perubahan posisi partikel, sebuah kemustahilan intrinsik untuk mengukur tingkat ini dengan presisi penuh adalah salah satu konsekuensi dari Prinsip Ketidakpastian diperkenalkan oleh Heisenberg. Semua instrumen pengukuran dapat memberikan pendekatan nilai properti terus menerus, seperti kecepatan, massa, daya, percepatan, dan lain-lain. Selain itu, ada kasus ketika tingkat yang tepat ada, itu layak untuk mengukurnya, tetapi tidak mungkin untuk menghitung nilai dari tingkat yang tepat dengan presisi mutlak. Semua dan situasi lain banyak menyiratkan kegunaan dan kebutuhan untuk belajar turunan fuzzy.

Turunan fuzzy diterapkan untuk masalah optimasi, dengan penekanan pada konteks matematika dari masalah ini, turunan fuzzy digunakan untuk mempelajari kemonotonan fungsi. Hal ini memungkinkan tidak hanya untuk mengembangkan tetapi juga untuk menyelesaikan beberapa hasil klasik. Misalnya, salah satu teorema dasar kalkulus yang menyatakan:

> Jika fungsi real f terdiferensiasi pada interval terbuka dan $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) untuk semua x pada interval ini, maka f adalah naik (turun) pada interval ini.

Teorema ini hanya memberikan syarat cukup untuk kemonotonan tajam dan hanya untuk fungsi yang terdiferensialkan. Turunan yang lemah menyimpulkan kriteria lengkap untuk kemonotonan tajam.

Turunan fuzzy dalam bentuk perkiraan turunan atau turunan fuzzy muncul berbeda pada aplikasi kalkulus. Sebagai contoh, turunan pada diskrit perkiraan yang digunakan sebagai dasar untuk tingkat rendah ekstraksi fitur. Mulai dari himpunan alami pada tahap pengolahan pertama dari sistem visual, Lindeberg memberikan aksiomatis derivasi dari representasi multi-skala perkiraan turunan dari sinyal diskrit. Representasi ini memiliki struktur aljabar yang sama dengan yang dimiliki oleh turunan dari representasi skala-ruang tradisional dalam domain kontinu.

Hal ini memerlukan pembuktian tentang diferensiasi yang telah diperkenalkan dari kalkulus diferensial yang dikembangkan untuk berbagai jenis kefuzzian. Di sini disebutkan hanya beberapa pendekatan. Zadeh (1978), Goetshel dan Voxman (1986), dan Puri dan Ralescu (1983) memfokuskan pada fungsi yang tidak selalu fuzzy tapi "membawa" dengan ketidakjelasan (Zimmerman, 2001). Ketidakpastian pengetahuan tentang lokasi tepat argumen menginduksi ketidakpastian tentang nilai turunan dari suatu fungsi pada saat ini. Untuk mencapai hal ini, fungsi dengan bilangan fuzzy sebagai domain dan range adalah dipertimbangkan. Diferensiasi fungsi Fuzzy konvensional dianggap dalam (Kaleva, 1987; Buckley dan Yunxia, 1991; Kalina, 1997). Pada (Kalina, 1998; 1999), tiga jenis dasar ketidakjelasan menganggap (pada sumbu y, pada sumbu x, dan pada kedua). Ini menyiratkan tiga konstruksi untuk turunan fuzzy.

Turunan Fuzzy di sini terkait dengan kedekatan turunan dari suatu fungsi yang diperkenalkan oleh Kalina (1998) dan dikembangkan oleh Janis (1999), sedangkan turunan fuzzy lemah terkait dengan gagasan kontinu lemah (Collingwood dan Lohwater, 1966) dan kontinu simetris lemah (Ciesielski dan Larson, 1993-94; Ciesielski, 1995-96).

Namun, ada perbedaan antara pendekatan klasik untuk diferensiasi, turunan fuzzy dan konstruksi yang diperkenalkan di sini. Yakni, perhitungan dari turunan klasik mengasumsikan bahwa hasilnya tidak tergantung pada pilihan titik dan prosedur dan dapat diperoleh dengan presisi yang tak terbatas karena hanya ada satu (jika ada) nilai turunan klasik. Asumsi yang sama yang dibuat untuk turunan fuzzy pada fungsi. Pada saat yang sama, turunan fuzzy dasarnya tergantung pada data awal dan komputasi prosedur, mencerminkan presisi terbatas perhitungan. Mengambil titik lebih dekat dan lebih dekat ke beberapa titik, mendekati nilai turunan klasik dari $f(x)$ menunjukkan jika turunan klasik ada. Semua perkiraan ini adalah turunan fuzzy. Ketika turunan klasik dari $f(x)$ tidak ada, dapat membangun dan memanfaatkan konsep umum baru dari turunan $f(x)$ pada suatu titik, yaitu turunan fuzzy. Berdasarkan paparan di atas, maka pada penelitian ini penulis mengangkat tema yang berjudul **"Analisis Turunan Fuzzy pada Suatu Fungsi"**.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan dari latar belakang di atas, dapat diambil rumusan masalah yaitu bagaimanakah sifat-sifat turunan fuzzy khususnya pada turunan fuzzy kuat dari suatu fungsi di $\mathbb{R}^+$?

1.3 Tujuan Penelitian

Dari rumusan masalah di atas dapat diketahui tujuan penelitian ini adalah untuk menjelaskan sifat-sifat turunan fuzzy khususnya pada turunan fuzzy kuat dari suatu fungsi di turunan fuzzy khususnya pada turunan fuzzy kuat dari suatu fungsi di $\mathbb{R}^+$.

1.4 Batasan Masalah

Pada penelitian ini, penulis membatasi turunan fuzzy yang dikaji hanya di $\mathbb{R}^+$. Topik yang dibahas dalam penelitian ini adalah turunan fuzzy kuat yang dirujuk pada buku yang berjudul "NEOCLASSICAL ANALYSIS Calculus Closer to the Real World" oleh Mark Burgin (2006).

1.5 Manfaat Penelitian

Skripsi ini dapat diambil manfaat bagi:

1. **Penulis**

   a. Merupakan partisipasi penulis dalam memberikan kontribusi terhadap pengembangan keilmuan, khususnya dalam bidang matematika.

   b. Memperdalam pemahaman penulis mengenai konsep fuzzy khususnya pada turunan fuzzy.

2. **Pembaca**

Sebagai bahan untuk menambah khasanah keilmuan matematika khususnya tentang konsep fuzzy khususnya turunan fuzzy dan diharapkan dapat menjadi rujukan untuk penelitian yang akan datang. Pembaca dapat mengetahui konsep fuzzy khususnya turunan fuzzy.

3. **Lembaga**

Sebagai tambahan bahan pustaka tentang analisis konsep fuzzy dan sebagai tambahan rujukan untuk materi kuliah.

4. **Pengembangan Ilmu Pengetahuan**

Berdasarkan hasil penelitian yang telah dilakukan diharapkan memberikan konstribusi bagi pengembangan ilmu pengetahuan terutama dalam pengembangan ilmu matematika tentang analisis konsep fuzzy yang dapat diterapkan dalam kehidupan sehari-hari dan berbagai disiplin ilmu.

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode literature (*Library studies*), yakni dengan mempelajari buku-buku yang berkaitan dengan penelitian yang telah diangkat oleh penulis. Penulis mengumpulkan data dan informasi dari berbagai sumber seperti buku, jurnal, atau makalah-makalah. Penelitian dilakukan dengan melakukan kajian terhadap buku-buku dan jurnal-jurnal atau makalah-makalah yang memuat topik tentang turunan fungsi fuzzy.

Studi kepustakaan merupakan penampilan argumentasi penalaran keilmuan yang memaparkan hasil olah pikir mengenai suatu permasalahan atau topic kajian kepustakaan yang berisi satu topik kajian yang didalamnya memuat beberapa gagasan atau proposisi yang terkait dan harus di dukung oleh data yang diperoleh dari berbagai sumber kepustakaan.

Dalam penelitian ini data-data yang diperoleh bersumber pada sebuah buku yang berjudul "NEOCLASSICAL ANALYSIS: Calculus Closer to the Real World" oleh Mark Burgin (2006). Langkah selanjutnya adalah mendalami, mencermati, menelaah, dan mengidentifikasi pengetahuan yang ada dalam kepustakaan. Langkah-langkah tersebut meliputi:

1. Merumuskan masalah dalam bentuk kalimat tanya yaitu bagaimana sifat-sifat turunan fuzzy khususnya pada turunan fuzzy kuat.
2. Mencari data dari berbagai referensi berupa definisi, teorema, lemma, proporsisi yang berhubungan dengan rumusan masalah.

3. Menganalisis data :
    a. Menyusun konsep/ definisi turunan fuzzy kuat yang meliputi definisi dan teorema.
    b. Membuktikan teorema-teorema yang ada pada turunan fuzzy kuat dari suatu fungsi di $\mathbb{R}^+$
    c. Memberikan contoh dan mendeskripsikannya yang berkaitan dengan turunan fuzzy kuat.
    d. Menyelesaikan contoh-contoh yang berkaitan dengan turunan fuzzy kuat dengan menerapkan teorema-teorema yang telah dibuktikan.
4. Memberikan kesimpulan akhir dari pembahasan.

1.7 Sistematika Penulisan

Untuk mempermudah pembaca memahami tulisan ini, penulis membagi tulisan ini kedalam empat bab sebagai berikut :

1. BAB I PENDAHULUAN : Pada bab ini penulis memaparkan tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, metode penelitian, manfaat penelitian serta sistematika penulisan.
2. BAB II KAJIAN TEORI: Penulis membahas tentang landasan teori yang dijadikan ukuran standarisasi dalam pembahasan pada bab yang merupakan tinjauan teoritis, yaitu tentang teori turunan, fuzzy, turunan fuzzy, fungsi, dan turunan fungsi.

3. BAB III PEMBAHASAN : Dalam bab ini dipaparkan pembahasan tentang analisis dari turunan fuzzy kuat di $\mathbb{R}^{+}$ yang disertai dengan pembuktian dari teorema-teorema yang mendasarinya.
4. BAB IV PENUTUP : Dalam bab ini dikemukakan kesimpulan akhir penelitian dan beberapa saran.

BAB II

KAJIAN TEORI

2.1 Fungsi

Konsep fungsi sangat berperan dalam kalkulus. Semua topik dalam kalkulus baik dalam membicarakan limit, kekontinuan, maupun turunan selalu melibatkan suatu fungsi.

Definisi 2.1.1

Misal A dan B adalah himpunan. Maka fungsi dari A ke B adalah himpunan f dari pasangan terurut di $A \times B$ sedemikian hingga $\forall a \in A, \exists b \in B$ tunggal dengan $(a, b) \in f$ (Bartle dan Sherbert, 2000: 53).

Himpunan A pada elemen pertama di fungsi f disebut sebagai domain f dan dinotasikan dengan $D(f)$. Sedangkan himpunan pada unsur kedua di f disebut sebagai range f dan dinotasikan dengan $R(f)$.

Definisi 2.1.2

Misal $f: A \to B$ merupakan fungsi dari A ke B,

a. Fungsi f dikatakan injektif (satu-satu) jika untuk sebarang $a_1, a_2 \in A$ dengan $a_1 \neq a_2$ dan $f(a_1) = b_1$, $f(a_2) = b_2$ maka $b_1 \neq b_2$. Jika fungsi f adalah fungsi injektif, maka f dikatakan injeksi.

b. Fungsi f dikatakan surjektif (onto) jika untuk setiap $b \in B$, ada $a \in A$ sehingga $f(a) = b$. Jika fungsi f adalah fungsi surjektif, maka f dikatakan surjeksi.

c. Jika injektif dan surjektif, maka f adalah bijektif. Jika fungsi f adalah fungsi bijektif, maka f dikatakan bijeksi (Bartle dan Sherbert, 2000: 8).

Contoh 2.1.3

$f(x) = 2x + 1, \forall\, x \in \mathbb{R}$ adalah fungsi bijektif.

Penyelesaian:

Suatu fungsi dikatakan sebagai fungsi bijektif jika fungsi tersebut 1-1 dan onto. Maka untuk membuktikan fungsi tersebut adalah fungsi injektif (1-1) adalah misal diambil sebarang $, y \in \mathbb{R}$, jika $f(x) = f(y)$ maka $x = y$.

$$\begin{aligned} f(x) &= f(y) \\ 2x + 1 &= 2y + 1 \\ 2x &= 2y \\ x &= y \end{aligned}$$

Terbukti bahwa fungsi tersebut injektif.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa fungsi tersebut adalah fungsi surjektif adalah jika $\forall\, y \in \mathbb{R}, \exists\, x \in \mathbb{R}, \ni f(x) = y$.

$$\begin{aligned} f(x) &= y \\ 2x + 1 &= y \\ x &= \tfrac{y-1}{2}, \text{ maka} \\ f(x) &= f(\frac{y-1}{2}) \\ &= 2\left(\frac{y-1}{2}\right) + 1 \\ &= y \end{aligned}$$

$\forall\, y \in \mathbb{R}, \exists\, x = \frac{y-1}{2} \in \mathbb{R}$, sedemikian hingga $f(x) = y$. Maka terbukti bahwa fungsi $f(x)$ adalah surjektif. Karena telah terbukti fungsi $f(x)$ adalah injektif dan surjektif maka fungsi $f(x)$ adalah bijektif.

2.2 Barisan

Secara sederhana barisan bilangan dapat didefinisikan sebagai suatu himpunan bilangan yang tersusun dengan pola tertentu. Dalam analisis riil barisan didefinisikan sebagaimana definisi 2.2.1

Definisi 2.2.1 (Barisan)

Barisan bilangan riil adalah fungsi yang terdefinisi pada himpunan $\mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}$ yang mempunyai range berupa himpunan $\mathbb{R}$ (Bartle dan Sherbert, 2000: 53).

Contoh 2.2.2:

Jika $b \in \mathbb{R}$, maka $B \coloneqq (b^n)$ adalah barisan $B = (b, b^2, b^3, \dots, b^n, \dots)$. Secara khusus jika $b = \frac{1}{2}$, maka kita mendapatkan barisan

$$\left(\frac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots\right)$$

Definisi 2.2.3 (Konvergen)

Barisan $X = (x_n)$ di $\mathbb{R}$ dikatakan konvergen ke $x \in \mathbb{R}$, atau x dikatakan sebagai limit dari (x_n), jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, ada bilangan asli $K(\varepsilon)$ sehingga untuk setiap $n \geq K(\varepsilon)$ berlaku $|x_n - x| < \varepsilon$ (Bartle dan Sherbert, 2000: 54).

Jika suatu barisan mempunyai limit, maka barisan tersebut dikatakan konvergen. Jika tidak mempunyai limit, maka barisan tersebut dikatakan divergen.

Contoh 2.2.4

$X_n = \left(\frac{2n}{n} + 1\right)$ konvergen ke 2.

Penyelesaian:

a. Langkah pertama untuk menunjukkan bahwa X_n konvergen ke 2 adalah mendapatkan nilai $\lim_{n\to\infty} X_n$.

Maka, $\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1} = 2$

b. Langkah selanjutnya adalah mebuktikan dengan definisi 2.2.3

$\forall\varepsilon > 0, \exists K(\varepsilon) \in \mathbb{N},$ sedemikian hingga $\forall n \geq K(\varepsilon)$, berlaku $|X_n - x| < \varepsilon$

$$|X_n - x| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left|\frac{2n}{n+1} - 2\right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2n}{n+1} - \frac{2n+2}{n+1}\right) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \frac{-2}{n+1} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow n + 1 > -\frac{2}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow n > -\frac{2}{\varepsilon} - 1$$

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$ sebarang, pilih $K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sehingga $K(\varepsilon) > -\frac{2}{\varepsilon} - 1$. Jika $n \geq K(\varepsilon) > -\frac{2}{\varepsilon} - 1$, maka diperoleh $|x_n - 2| < \varepsilon$. Sehingga barisan X_n konvergen ke nilai limitnya yaitu 2.

Teorema 2.2.5

Misal $X = (x_n)$ adalah barisan bilangan riil dan $x \in \mathbb{R}$. Maka pernyataan-pernyataan berikut ekuivalen (Bartle dan Sherbert, 2000: 55).

a. X konvergen ke x.

b. Untuk setiap $\varepsilon > 0$, ada bilangan asli $n \geq K$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq K$, x_n memenuhi $|x_n - x| < \varepsilon$.

c. Untuk setiap $\varepsilon > 0$, ada bilangan asli $n \geq K$ sedemikian hingga untuk setiap $n \geq K$, x_n memenuhi $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$.

d. Untuk setiap persekitaran-ε $V_\varepsilon(x)$ pada x, ada bilangan asli K sedemikian hingga untuk setiap $n \geq K$, x_n termasuk pada $V_\varepsilon(x)$.

Bukti:

Pernyataan (a) ekuivalen dengan pernyataaan (b), karena pernyataan (b) adalah definisi dari pernyataan (a). Sedangkan pernyataan (b), (c), (d) ekuivalen berdasarkan implikasi berikut:

$|x_n - x| < \varepsilon \iff -\varepsilon < |x_n - x| < \varepsilon \iff x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon \iff x_n \in V_\varepsilon(x)$.

Definisi 2.2.6

Barisan bilangan riil $X = (x_n)$ dikatakan terbatas jika terdapat bilangan riil $M > 0$, sedemikian hingga $|x_n| \leq M$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ (Bartle dan Sherbert, 2000: 60).

Teorema 2.2.7

Barisan bilangan riil yang konvergen adalah terbatas (Bartle dan Sherbert, 2000: 60).

Bukti:

Anggap bahwa $\lim(x_n) = x$dan $\varepsilon := 1$. Maka ada bilangan asli $K = K(1)$ sedemikian hingga $|x_n - x| < 1$ untuk setiap $n \geq K$. Jika menggunakan pertidaksamaan segitiga dengan $n \geq K$, maka didapatkan:

$$|x_n| = |x_n - x + x| \leq |x_n - x| + |x| < 1 + |x|$$

Jika dianggap bahwa

$$M := \sup\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_{K-1}|, 1 + |x|\}$$

Maka diperoleh bahwa $|x_n| \leq M$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Jadi, (x_n) terbatas.

Teorema 2.2.8 (Bartle dan Sherbert, 2000: 61)

Misal $X = (x_n)$ dan $Y = (y_n)$ adalah barisan bilangan riil yang konvergen ke x dan y, dan misal $c \in \mathbb{R}$. Maka

a. Barisan $X + Y$ konvergen ke $x + y$.

b. Barisan $X - Y$ konvergen ke $x - y$.

c. Barisan $X \cdot Y$ konvergen ke $x \cdot y$.

d. Barisan cX konvergen ke cx.

e. Jika $X = (x_n)$ konvergen ke x dan $Z = (z_n)$ adalah barisan bilangan riil tak nol yang konvergen ke z dan jika $z \neq 0$, maka hasil bagi barisan $\frac{X}{Z}$ konvergen ke $\frac{x}{z}$

Bukti:

a. Untuk menunjukkan bahwa $\lim(x_n + y_n) = x + y$, dibutuhkan estimasi jarak $|(x_n + y_n) - (x + y)|$. Untuk mengerjakan ini, digunakan pertidaksamaan segitiga sehingga didapatkan:

$$\begin{aligned}(x_n + y_n) - (x + y) &= |(x_n - x) + (y_n - y)| \\ &\leq |x_n - x| + |y_n - y|\end{aligned}$$

Dengan hipotesis, jika $\varepsilon > 0$ maka ada bilangan asli K_1 sedemikian hingga jika $n \geq K_1$, maka $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$, juga ada bilangan asli K_2 sedemikian hingga jika $n \geq K_2$, maka $|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}$. Oleh karena itu, jika $K(\varepsilon) \coloneqq \sup\{K_1, K_2\}$, mengikuti bahwa jika $n \geq K(\varepsilon)$, maka

$$\begin{aligned}(x_n + y_n) - (x + y) &= |(x_n - x) + (y_n - y)| \\ &\leq |x_n - x| + |y_n - y|\end{aligned}$$

$$< \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon$$

Karena $\varepsilon > 0$ telah ditentukan, maka disimpulkan bahwa $X + Y = (x_n + y_n)$ konvergen ke $(x + y)$.

b. Argumen yang sama dapat digunakan untuk menunjukkan bahwa $X - Y = (x_n - y_n)$ konvergen ke $(x - y)$.

c. Untuk menunjukkan bahwa $X.Y = x_n.y_n$ konvergen ke $x.y$, maka digunakan estimasi:

$$\begin{aligned} |x_n y_n - xy| &= |(x_n y_n - x_n y) + (x_n y - xy)| \\ &\leq |x_n(y_n - y)| + |(x_n - x)y| \\ &= |x_n||y_n - y| + |x_n - x||y| \end{aligned}$$

Berdasarkan teorema 2.2.5 ada bilangan riil $M_1 > 0$ sedemikian hingga $|x_n| \leq M_1$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dan jika dimisalkan $M := \sup\{M_1, |y|\}$. Sehingga didapatkan estimasi sebagai berikut:

$$|x_n y_n - xy| \leq M|y_n - y| + M|x_n - x|.$$

Dari kekonvergenan X dan Y, dapat disimpulkan bahwa jika diberikan $\varepsilon \geq 0$, maka ada bilangan asli K_1 dan K_2 sedemikian hingga jika $n \geq K_1$ maka $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2M}$, dan jika $n \geq K_2$ maka $|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2M}$. Misal $K(\varepsilon) = \sup\{K_1, K_2\}$; maka, jika $n \geq K(\varepsilon)$, maka dapat disimpulkan bahwa:

$$\begin{aligned} |x_n y_n - xy| &\leq M|y_n - y| + M|x_n - x| \\ &< M\left(\frac{\varepsilon}{2M}\right) + M\left(\frac{\varepsilon}{2M}\right) = \varepsilon \end{aligned}$$

Karena $\varepsilon > 0$ telah ditentukan, maka telah terbukti bahwa barisan $X.Y = (x_n.y_n)$ konvergen ke $x.y$.

d. Fakta bahwa $cX = cx_n$ konvergen ke cx dapat dibuktikan dengan cara yang sama dan mengambil Y sebagai barisan konstan $\{c, c, c, ...\}$.

Untuk menunjukkan bahwa $cX = cx_n$ konvergen ke cx, maka digunakan estimasi:

$$\begin{aligned} |x_n y_n - cx| &= |(x_n y_n - x_n c) + (cx_n - cx)| \\ &\leq |x_n(y_n - c)| + |(x_n - x)c| \\ &= |x_n||y_n - c| + |x_n - x||c| \end{aligned}$$

Berdasarkan teorema 2.2.5 ada bilangan riil $M_1 > 0$ sedemikian hingga $|x_n| \leq M_1$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dan jika dimisalkan $M \coloneqq \sup\{M_1, |c|\}$. Sehingga didapatkan estimasi sebagai berikut:

$$|x_n y_n - cx| \leq M|y_n - c| + M|x_n - x|.$$

Dari kekonvergenan X dan Y, dapat disimpulkan bahwa jika diberikan $\varepsilon \geq 0$, maka ada bilangan asli K_1 dan K_2 sedemikian hingga jika $n \geq K_1$ maka $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2M}$, dan jika $n \geq K_2$ maka $|y_n - c| < \frac{\varepsilon}{2M}$. Misal $K(\varepsilon) = \sup\{K_1, K_2\}$; maka, jika $n \geq K(\varepsilon)$, maka dapat disimpulkan bahwa:

$$\begin{aligned} |x_n y_n - xc| &\leq M|y_n - c| + M|x_n - x| \\ &< M\left(\frac{\varepsilon}{2M}\right) + M\left(\frac{\varepsilon}{2M}\right) = \varepsilon \end{aligned}$$

Karena $\varepsilon > 0$ telah ditentukan, maka telah terbukti bahwa barisan $cX = (cx_n)$ konvergen ke cx.

e. Misal $\alpha \coloneqq \frac{1}{2}|z|$ sehingga $\alpha > 0$. Karena $\lim(z_n) = z$, maka ada K_1 sedemikian hingga jika $n \geq K_1$maka $|z_n - z| < \alpha$. Dengan menggunakan pertidaksamaan segitiga bahwa $-\alpha \leq -|z_n - z| \leq |z_n| - |z|$ untuk $n \geq K_1$, dimana $\frac{1}{2}|z| = |z| - \alpha \leq |z_n|$ untuk $n \geq K_1$. Oleh karena itu, $\frac{1}{|z_n|} \leq \frac{2}{|z|}$ untuk $n \geq K_1$, sehingga didapatkan

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{z_n} - \frac{1}{z}\right| &= \left|\frac{z - z_n}{z_n z}\right| \\ &= \frac{1}{|z_n z|}|z - z_n| \\ &\leq \frac{2}{|z|^2}|z - z_n|, \text{ untuk setiap } n \geq K_1 \end{aligned}$$

Jika diberikan $\varepsilon > 0$, maka ada K_2 sedemikian hingga jika $n \geq K_2$, maka $|z_n - z| < \frac{1}{2}\varepsilon|z|^2$. Oleh karena itu, jika $K(\varepsilon) = \sup\{K_1, K_2\}$, maka

$$\left|\frac{1}{z_n} - \frac{1}{z}\right| < \varepsilon, \quad \text{untuk setiap } n > K(\varepsilon)$$

Karena telah ditentukan $\varepsilon > 0$, maka $\lim\left(\frac{1}{z_n}\right) = \left(\frac{1}{z}\right)$.

Jika diambil Y adalah barisan $\left(\frac{1}{z_n}\right)$ dan menggunakan fakta bahwa $x.y = \frac{(x_n)}{(z_n)}$ konvergen ke $x\left(\frac{1}{z}\right) = \left(\frac{x}{z}\right)$.

Teorema 2.2.9 (Teorema Bolzano-Weirstrass)

Barisan bilangan riil yang terbatas mempunyai subbarisan yang konvergen.

Bukti:

Jika $X = (x_n)$ adalah barisan yang terbatas, maka subbarisan $X' = (x_{n_k})$ adalah monoton. Karena subbarisan ini juga terbatas, maka subbarisan ini konvergen.

2.3 Limit Fungsi

Definisi 2.3.1 (Titik Limit)

Misal $A \subseteq \mathbb{R}$, suatu titik $c \in \mathbb{R}$ adalah titik limit pada A jika untuk setiap $\delta > 0$, ada paling sedikit satu titik $x \in A$, $x \neq c$, sedemikian hingga $|x - c| < \delta$ (Bartle dan Sherbert, 2000: 97).

Definisi 2.3.2 (Limit)

Misal $A \subseteq \mathbb{R}$, c adalah titik limit pada A dan $f: A \to \mathbb{R}, L \in \mathbb{R}$ dikatakan limit f pada c ditulis $\lim_{x \to c} f = L$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, ada $\delta > 0$, sedemikian hingga jika $x \in A$ dan $0 < |x - c| < \delta$, maka $|f(x) - L| < \varepsilon$ (Bartle dan Sherbert, 2000: 98).

Contoh 2.3.3

Buktikan dengan definisi bahwa $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$.

Penyelesaian:

Diberikan sebarang bilangan $\varepsilon > 0$, akan dicari bilangan $\delta > 0$ sehingga berlaku

$0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow |f(x) - 4| < \varepsilon$

$0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow |x^2 - 4| < \varepsilon$

$0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow |x - 2||x + 2| < \varepsilon$

Misalkan $0 < \delta \leq 1$, maka apabila $0 < |x - 2| < \delta \leq 1$ diperoleh

$$|x + 2| = |x - 2 + 4| < |x - 2| + 4 < 1 + 4 = 5$$

Sehingga dengan pemisalan δ seperti di atas diperoleh

$$0 < |x - 2| < \delta \leq 1 \Rightarrow |x - 2||x + 2| < 5|x - 2| < \varepsilon$$

Dari sini dapat dipilih δ yang terkecil di antara 1 dan $\frac{\varepsilon}{5}$.

Jika dipilih $\delta = \min\{1, \frac{1}{5}\varepsilon\}$, maka berlaku:

$$0 < |x - 2| < \delta \leq \frac{1}{5}\varepsilon \Rightarrow |x^2 - 4| = |x - 2||x + 2| < 5|x - 2| < 5(\frac{1}{5}\varepsilon) = \varepsilon$$

Ini berarti bahwa $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$.

Teorema 2.3.4

Jika $f: A \to \mathbb{R}$, dan jika c adalah titik limit pada A, maka f hanya mempunyai satu limit di c (Bartle dan Sherbert, 2000: 99).

Bukti:

Misalkan L dan L' adalah limit dari f di c. Untuk setiap $\varepsilon > 0$, ada $\delta_1 > 0$, sedemikian hingga $0 < |x - c| < \delta_1$, $|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$, ada $\delta_2 > 0$, sedemikian hingga $0 < |x - c| < \delta_2$, $|f(x) - L'| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Misal $\delta := inf\{\delta_1, \delta_2\}$

$$\begin{aligned} |L - L'| &\leq |L - f(x) + f(x) - L'| \\ &\leq |L - f(x)| + |f(x) - L'| \\ &\leq |f(x) - L| + |f(x) - L'| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Sehingga: $|L - L'| < \varepsilon$ dan $L - L' = 0$ maka $L = L'$, sehingga terbukti f hanya mempunyai satu limit di c.

Teorema 2.3.5 (Kriteria Barisan)

Misal $f: A \to \mathbb{R}$ dan c adalah titik limit pada A, maka pernyataan berikut adalah ekivalen.

(i) $\lim_{x \to c} f = L$.

(ii) Untuk setiap barisan (x_n) di A konvergen ke c sedemikian hingga $x_n \neq c$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, barisan $(f(x_n))$ konvergen ke L (Bartle dan Sherbert, 2000: 101).

Bukti:

(i) $\Rightarrow$ (ii)

Diasumsikan bahwa f mempunyai limit di c, dan dianggap bahwa (x_n) adalah barisan di A dengan $\lim(x_n) = c$ dan $x_n \neq c$ untuk setiap n. Maka harus dibuktikan bahwa barisan $\big(f(x_n)\big)$ konvergen ke L. Dengan menggunakan definisi limit maka $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ sedemikian hingga jika $x \in A$ memenuhi $0 < |x - c| < \delta$, maka $f(x)$ memenuhi $|f(x) - L| < \varepsilon$. Definisi ini diaplikasikan dengan definisi barisan konvergen dengan memberikan δ menjadi $K(\delta)$ sedemikian hingga jika $n > K(\delta)$ maka $|x_n - c| < \delta$. Tetapi, untuk setiap x_n ada $|f(x_n) - L| < \varepsilon$. Sehingga jika $n > K(\delta)$, maka $|f(x_n) - L| < \varepsilon$. Oleh karena itu, barisan $(f(x_n))$ konvergen ke L.

(ii) ⇒ (i)

(Bukti ini adalah kontraposisi dari argumen) Jika (i) salah, maka ada persekitaran-ε_0 $V_{\varepsilon_0}(L)$, maka akan ada minimal satu bilangan x_δ di $A \cap V_\delta(c)$ dengan $x_\delta \neq c$ sehingga $f(x_\delta)$ bukan elemen $V_{\varepsilon_0}(L)$, sehingga untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, persekitaran-$\frac{1}{n}$ pada c memuat bilangan x_n sehingga $0 < |x_n - c| < \frac{1}{n}$ dan $x_n \in A$ tetapi $|f(x_n) - L| \geq \varepsilon_0$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

Maka dapat disimpulkan bahwa barisan x_n di $A \setminus \{c\}$ konvergen ke c, tetapi barisan $(f(x_n))$ tidak konvergen ke L. Sehingga dapat ditunjukkan bahwa (i) salah, maka (ii) salah. Maka dapat disimpulkan bahwa (ii) implikasi (i).

Definisi 2.3.6 (Persekitaran)

Misalkan $a \in \mathbb{R}$ dan $\varepsilon > 0$, maka ε-persekitaran a adalah himpunan $V_\varepsilon(a) \coloneqq \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}$. Untuk $a \in \mathbb{R}$, x termasuk $V_\varepsilon(a)$ ekuivalen dengan

$-\varepsilon < x - a < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$ (Bartle dan Sherbert, 2000: 33).

Definisi 2.3.7

Misal $A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ adalah titik limit pada A. Maka f dikatakan terbatas pada persekitaran c, jika ada persekitaran-δ $V_\delta(c)$, dan bilangan konstan $M > 0$, sedemikian hingga ada $|f(x)| \leq M$ untuk setiap $x \in A \cap V_\delta(c)$ (Bartle dan Sherbert, 2000: 101).

Definisi 2.3.8

Misal $A \subseteq \mathbb{R}$, f dan g adalah fungsi yang terdefinisi pada A ke $\mathbb{R}$. Maka definisi penjumlahan $f + g$, selisih $f - g$, dan hasil kali fg pada A ke $\mathbb{R}$ adalah fungsi yang diberikan sebagai berikut:

$$(f + g)(x) \coloneqq f(x) + g(x)$$

$$(f - g)(x) \coloneqq f(x) - g(x)$$

$$(fg)(x) \coloneqq f(x)g(x)$$

untuk setiap $x \in A$. Selanjutnya, jika $b \in \mathbb{R}$, maka definisi perkalian bf adalah $(bf)(x) := bf(x)$, untuk setiap $x \in A$.

Jika $h(x) \neq 0$, untuk $x \in A$, maka definisi pembagian $\frac{f}{h}$ menjadi

$$\left(\frac{f}{h}\right)(x) := \frac{f(x)}{h(x)}, \text{ untuk setiap } x \in A.$$

Teorema 2.3.9

Misal $A \subseteq \mathbb{R}$, f dan g adalah fungsi yang terdefinisi pada A ke $\mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ adalah titik limit pada A. Selanjutnya, misal $b \in \mathbb{R}$.

a. Jika $\lim_{x \to c} f = L$ dan $\lim_{x \to c} g = M$, maka

$$\lim_{x \to c}(f + g) = L + M, \qquad \lim_{x \to c}(f - g) = L - M,$$

$$\lim_{x \to c}(fg) = LM, \qquad \lim_{x \to c}(bf) = bL.$$

b. Jika $h: A \to \mathbb{R}$, $h(x) \neq 0$ untuk setiap $x \in A$, dan jika $\lim_{x \to c} h = H$, maka

$$\lim_{x \to c} \left(\frac{f}{h}\right) = \frac{L}{H}$$

Bukti:

a. Jika diberikan sebarang $\varepsilon > 0$, maka $\frac{\varepsilon}{2} > 0$. Karena $\lim_{x \to c} f = L$, maka terdapat suatu bilangan positif δ_1 sedemikian hingga

$$0 < |x - c| < \delta_1 \Rightarrow |f - L| < \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Karena $\lim_{x \to c} g = M$, maka terdapat suatu bilangan positif δ_2 sedemikian hingga

$$0 < |x - c| < \delta_2 \Rightarrow |g - M| < \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Pilih $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, maka $0 < |x - c| < \delta$ menunjukkan

$$\begin{aligned} |f + g - (L + M)| &= |[f - L] + [g - M]| \\ &\leq |f - L| + |g - M| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Jadi, $\lim_{x \to c}(f + g) = L + M$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \to c}(f - g) &= \lim_{x \to c}[f + (-1)\, g]. \\ &= \lim_{x \to c} f + (-1) \lim_{x \to c} g \\ &= \lim_{x \to c} f - \lim_{x \to c} g \\ &= L - M \end{aligned}$$

Jadi, $\lim_{x \to c}(f - g) = L - M$.

Jika diberikan $\varepsilon > 0$, maka $\frac{\varepsilon}{|b|} > 0$. Menurut definisi limit terdapat suatu bilangan δ sedemikian hingga $0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f - L| < \frac{\varepsilon}{|b|}$. Sehingga diperoleh

$$|bf - bL| = |b||f - L| < |b|\frac{\varepsilon}{|b|} = \varepsilon$$

Hal ini menunjukkan bahwa $\lim_{x \to c}(bf) = bL$.

Menurut definisi 2.3.8 $(fg)(x) = f(x)g(x)$. Oleh karena itu, aplikasi teorema 2.2.8 menghasilkan $\lim((fg)(x)) = \lim(f(x)g(x))$

$$= [\lim(f(x))][\lim(g(x))] = LM$$

b. Menurut definisi 2.3.8 $\left(\frac{f}{h}\right)(x) \coloneqq \frac{f(x)}{h(x)}$. Oleh karena itu, aplikasi teorema 2.2.8 menghasilkan $\lim\left(\frac{f}{h}\right)(x) = \frac{\lim f(x)}{\lim h(x)} = \frac{L}{H}$

Contoh 2.3.10

$\lim_{x \to 2}((x^2 + 4x) + (2x + 7))$

$= \lim_{x \to 2}(x^2 + 4x) + \lim_{x \to 2}(2x + 7)$

$= 12 + 11 = 23$

Teorema 2.3.11 (Teorema Apit).

Misalkan f, g dan h adalah fungsi-fungsi yang memenuhi $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ untuk semua x dekat c, kecuali mungkin di c. Jika $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = L$, maka $\lim_{x \to c} g(x) = L$ **(**Purcell dan Varberg, 1987: 87).

Bukti:

Misalkan diberikan $\varepsilon > 0$. Pilih δ_1 sedemikian sehingga

$$0 < |x - c| < \delta_1 \rightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$

dan δ_2 sedemikian sehingga

$$0 < |x - c| < \delta_3 \rightarrow f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

Pilih δ_3 sehingga

$$0 < |x - c| < \delta \rightarrow L - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \varepsilon$$

Misalkan $\delta = min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$. Maka

$$0 < |x - c| < \delta_3 \rightarrow L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon$$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa $\lim_{x \to c} g(x) = L$.

2.4 Kekontinuan Fungsi

Secara intuitif konsep kekontinuan dalam matematika sama seperti pengertian dalam bahasa sehari-hari yaitu, tersambung, berkelanjutan, atau tidak terputus. Misalkan suatu fungsi dikatakan kontinu bila grafikfungsi tersebut tidak terputus.

Definisi 2.4.1

Misal $A \in \mathbb{R}$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dan $a \in \mathbb{R}$. Maka f dikatakan kontinu di c jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, ada $\delta > 0$, sedemikian hingga jika x adalah sebarang titik di A memenuhi $|x - c| < \delta$, maka $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ (Bartle dan Sherbert, 2000: 120).

Catatan 2.4.2

(i) Jika $f(x)$ kontinu di suatu titik, maka:

a. Harga limit $f(x)$ harus ada di titik tersebut.

b. $f(x)$ harus mempunyai harga tertentu di titik tersebut.

(ii) Jika $f(x)$ tidak kontinu di suatu titik, maka dikatakan $f(x)$ adalah diskontinu di titik tersebut.

Definisi 2.4.3 (Kriteria Barisan untuk Kekontinuan)

Suatu fungsi $f: A \to \mathbb{R}$ kontinu pada titik $c \in A$ jika dan hanya jika untuk setiap barisan (x_n) di A yang konvergen ke c, barisan $(f(x_n))$ konvergen ke $f(c)$ (Bartle dan Sherbert, 2000: 121).

Definisi 2.4.3 (Kriteria Kediskontinuan)

Suatu fungsi $f: A \to \mathbb{R}$ kontinu pada titik $c \in A$. Maka f adalah diskontinu di c jika dan hanya jika untuk setiap barisan (x_n) di A yang konvergen ke c, tetapi barisan $(f(x_n))$ tidak konvergen ke $f(c)$.

Teorema 2.4.4

Misal $A \subseteq \mathbb{R}$, f dan g adalah fungsi pada A ke $\mathbb{R}$, dan $b \in \mathbb{R}$. Maka dianggap benar jika $c \in A$, f dan g kontinu di c (Bartle dan Sherbert, 2000: 125).

(i) Maka $f+g, f-g$ dan bf kontinu di c.

(ii) Jika $h: A \to \mathbb{R}$ kontinu di $c \in A$ dan jika $h(x) \neq 0$ untuk setiap $x \in A$, maka $\frac{f}{h}$ kontinu di c.

Bukti :

Diasumsikan bahwa c adalah titik limit pada A.

(i) Karena f dan g kontinu di c, maka:

$$f(c) = \lim_{x\to c} f \quad \text{dan} \quad g(c) = \lim_{x\to c} g$$

Sehingga,

$$(f+g)(c) = f(c) + g(c) = \lim_{x\to c} f + g$$

Oleh karena itu, $f+g$ kontinu di c

(ii) Karena $c \in A$, maka $h(c) \neq 0$. Tetapi karena $h(c) = \lim_{x \to c} h$, maka

$$\frac{f}{h}(c) = \frac{f(c)}{h(c)} = \frac{\lim_{x \to c} f}{\lim_{x \to c} h} = \lim_{x \to c} \left(\frac{f}{h}\right)$$

Oleh karena itu $\frac{f}{h}$ kontinu di c.

Contoh 2.4.5

Fungsi kosinus adalah kontinu di $\mathbb{R}$.

Penyelesaian:

Untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{R}$, penulis mempunyai

$$|\sin z| \leq |z|, \qquad |\sin z| \leq 1,$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \left[\frac{1}{2}(x + y)\right] \sin \left[\frac{1}{2}(x - y)\right].$$

karena jika $c \in \mathbb{R}$, maka didapatkan:

$$|\cos x - \cos c| \leq 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}|c - x| = |x - c|.$$

Oleh karena itu, cos adalah kontinu di c. Karena telah ditentukan $c \in \mathbb{R}$, maka diperoleh fungsi kosinus adalah kontinu di $\mathbb{R}$.

Definisi 2.4.6

Suatu fungsi $f: A \to \mathbb{R}$ dikatakan terbatas pada A jika ada suatu konstanta $M > 0$ sedemikian hingga $|f(x)| \leq M$ untuk setiap $x \in A$. (Bartle dan Sherbert, 2000: 129).

Teorema 2.4.7

Misalkan $I \coloneqq [a, b]$ adalah interval tertutup dan $f: I \to \mathbb{R}$ kontinu pada A. Maka f terbatas pada I.

Bukti:

Anggap bahwa f tidak terbatas pada I. Maka untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, ada bilangan $x_n \in I$ sedemikian hingga $|f(x_n)| > n$. Karena I terbatas, maka barisan $X \coloneqq (x_n)$ juga terbatas. Oleh karena itu, ada subbarisan $X' = (x_n)$ konvergen ke x. Karena I tertutup dan elemen-elemen X' termasuk dalam I, maka $x \in I$. Maka f kontinu di x, sehingga $\left(f(x_n)\right)$ konvergen ke $\left(f(x)\right)$. Maka dapat disimpulkan bahwa barisan konvergen $\left(f(x_n)\right)$ harus terbatas. Tetapi ini adalah kontradiksi

$$\left|f\left(x_{n_r}\right)\right| > n_r \geq r \qquad \text{untuk setiap } r \in \mathbb{N}.$$

Sehingga, pengandaian bahwa fungsi kontinu f tidak terbatas pada interval tertutup I adalah kontradiksi.

Teorema 2.4.8 (Teorema Nilai Antara)

Misalkan I adalah suatu interval dan $f: I \to \mathbb{R}$ kontinu pada I. Jika $a, b \in I$ dan $k \in \mathbb{R}$ memenuhi $f(a) < k < f(b)$, maka ada $c \in I$ diantara a dan b sedemikian hingga $f(c) = k$ (Bartle dan Sherbert, 2000: 133).

Bukti:

Misalkan $a < b$ dan $g(x) \coloneqq f(x) - k$; maka $g(a) < 0 < g(b)$. Maka ada titik c dengan $a < c < b$ sedemikian hingga $0 = g(c) = f(c) - k$. Sehingga $f(c) = k$. Jika $b < a$, misalkan $h(x) \coloneqq k - f(x)$ sedemikian hingga $h(b) < 0 < h(a)$. Oleh karena itu, terdapat titik c dengan $b < c < a$ sedemikian hingga $0 = h(c) = k - f(c)$, sehingga $f(c) = k$.

Definisi 2.4.9 (Kekontinuan Seragam)

Misal $A \subseteq \mathbb{R}$ dan $f: A \to \mathbb{R}$, maka f dikatakan kontinu seragam pada A jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada $\delta(\varepsilon) > 0$ sedemikian hingga jika $x, u \in A$ adalah bilangan yang memenuhi $|x - u| < \delta(\varepsilon)$, maka $|f(x) - f(u)| < \varepsilon$ (Bartle dan Sherbert, 2000: 137).

Contoh 2.4.10

Jika $f(x) := x^2$ pada $A := [0, b]$, dimana $b > 0$, maka $|f(x) - f(u)| = |x + u||x - u| \leq 2b|x - u|$ untuk setiap x, u di $[0, b]$. Sehingga f memenuhi $|f(x) - f(u)| \leq K|x - u|$ dengan $K := 2b$ pada A, oleh karena itu f adalah kontinu seragam pada A.

Proposisi 2.4.11

Misal $A \subseteq \mathbb{R}$ dan $f: A \to \mathbb{R}$. Maka pernyataan-pernyataan berikut adalah ekuivalen:

(i) f bukan kontinu seragam pada A.

(ii) Ada $\varepsilon_0 > 0$ sedemikian hingga untuk setiap $\delta > 0$ ada x_δ, $u_\delta \in A$ sedemikian hingga $|x_\delta - u_\delta| < \delta$ dan $|f(x_\delta) - f(u_\delta)| \geq \varepsilon_0$.

(iii) Ada $\varepsilon_0 > 0$ dan dua barisan (x_n) dan (u_n) di A sedemikian hingga $\lim(x_n - u_n) = 0$ dan $|f(x_n) - f(u_n)| \geq \varepsilon_0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ (Bartle dan Sherbert, 2000: 138).

2.5 Turunan Fungsi

Dapat dilihat bahwa kemiringan garis singgung dan kecepatan sesaat adalah manifestasi dari pemikiran dasar yang sama. Pengertian matematis yang baik menyarankan menelaah konsep ini terlepas dari kosa kata yang khusus dan terapan yang beraneka ragam. Dipilih nama netral turunan. Ini merupakan kata kunci dalam kalkulus selain kata fungsi dan limit.

Definisi 2.5.1

diberikan $I \subseteq \mathbb{R}$ adalah suatu interval, $f: I \to \mathbb{R}$ dan $c \in I$. Dikatakan bahwa bilangan riil L adalah turunan dari f pada c jika diberikan $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta(\varepsilon) < 0$ seperti itu jika $x \in I$ menjadi $0 < |x - c| < \delta(\varepsilon)$ maka

$$\left|\frac{f(x) - f(c)}{x - c} - L\right| < \varepsilon$$

Pada kasus ini f adalah turunan pada c dan dapat ditulis $f'(c)$ pada L

Dengan kata lain, turunan f pada c yang diberikan oleh limit,

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Ketika turunan pada $f: I \to \mathbb{R}$ ada pada suatu titik $c \in I$ nilainya ditandai oleh $f'(c)$. dengan cara ini kita memperoleh suatu fungsi f dengan domain adalah suatu subset daerah asal f.

Teorema 2.5.2

jika $f: I \to \mathbb{R}$ mempunyai turunan pada $c \in I$ maka f kontinu pada c.

Bukti:

untuk semua $x \in I, x \neq c$ mempunyai

$$f(x) - f(c) = \left(\frac{f(x) - f(c)}{x - c}\right)(x - c)$$

Karena $f'(c)$ ada maka

$$\lim_{x \to c}\big(f(x) - f(c)\big) = \lim_{x \to c}\left(\frac{f(x) - f(c)}{x - c}\right)\left(\lim_{x \to c}(x - c)\right)$$

$$= f'(c).0 = 0$$

Oleh karena itu $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ jadi f kontinu di c.

Teorema 2.5.3

Misal $I \subseteq \mathbb{R}$ adalah suatu interval,l $f : I \to \mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$ dan $c \in I$ adalah fungsi yang daoat diturunkan pada c maka:

a. jika $\alpha \in \mathbb{R}$ kemudian αf adalah dapat diturunkan pada c.

$$(\alpha f)'(c) = (\alpha f)'(c)$$

b. fungsi $f + g$ adalah dapat diturunkan pada c.

$$(f + g)'(c) = f'(c) + g'(c)$$

c. fungsi fg dapat diturunkan pada c

$$(fg)'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c)$$

Misal $p \coloneqq fg$ kemudian pada $x \in I, x \neq c$ mempunyai

$$\frac{p(x) - p(c)}{x - c} = \frac{f(x)g(x) - f(c)g(c)}{x - c}$$

$$= \frac{f(x)g(x) - f(c)g(x) + f(c)g(x) - f(c)g(c)}{x - c}$$

$$= \frac{f(x) - f(c)}{x - c} . g(x) + f(c) . \frac{g(x) - g(c)}{x - c}$$

Oleh karena itu g kontinu di c maka $\lim_{x \to c} g(x) = g(c)$. oleh karena itu juga f dan g dapat diturunkan pada c.

$$\lim_{x \to c} \frac{p(x) - p(c)}{x - c} = f'(c)g(c) + f(c)g'(c)$$

d. jika $g(c) \neq 0$ maka fungsi $\frac{f}{g}$ adalah dapat diturunkan di c.

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(c) = \frac{f'(c)g(c) - f(c)g'(c)}{(g(c))^2}$$

Misal $q \coloneqq \frac{f}{g}$. oleh karena itu g adalah dapat diturunkan di c. ketika $g(c) \neq 0$ terdapat interval $J \subseteq I$ dengan $c \in J$ maka $g(x) \neq 0$ untuk semua $x \in J$.

$$\frac{q(x) - q(c)}{x - c} = \frac{f(x)/g(x) - f(c)/g(c)}{x - c} = \frac{f(x)g(c) - f(c)g(x)}{g(x)g(c)(x - c)}$$

$$= \frac{f(x)g(c) - f(c)g(c) + f(c)g(c) - f(c)g(x)}{g(x)g(c)(x - c)}$$

$$= \frac{1}{g(x)g(c)}\left[\frac{f(x) - f(c)}{x - c}.g(c) - f(c).\frac{g(x) - g(c)}{x - c}\right]$$

Menggunakan kontinu g pada c dan dapat diturunkan dari f dan g pada c, didapatkan

$$q'(c) = \lim_{x \to c} \frac{q(x) - q(c)}{x - c} = \frac{f'(c)g(c) - f(c)g'(c)}{(g(c))^2}$$

2.6 Logika Fuzzy

Logika fuzzy pertama kali dicetuskan oleh L.A. Zadeh pada tahun 1965. Logika fuzzy tidak diterima di Negara Amerika akan tetapi di Negara Eropa dan Jepang logika fuzzy sangat diminati. Logika fuzzy berkembang dan diaplikasikan ke berbagai bidang. Logika fuzzy sangat berguna bagi kehidupan sehari-hari, banyak peristiwa yang terdapat dalam kehidupan yang tidak bisa dipecahkan dengan cara tegas (*crips*), misalnya bersifat keambiguan (*ambiguity*), keacakan (*randomness*), ketidakjelasan, ketidaktepatan (*imprecision*), dan kekaburan semantik.

Dasar logika fuzzy adalah teori himpunan fuzzy. Pada teori himpunan fuzzy, peranan derajat keanggotaan sebagai penentu keberadaan elemen dalam suatu himpunan sangatlah penting. Nilai keanggotaan atau derajat keanggotaan atau *membership function* menjadi ciri utama dari penalaran dengan logika fuzzy tersebut. Dalam banyak hal, logika fuzzy digunakan sebagai suatu cara untuk memetakan permasalahan dari *input* menuju ke *output* yang diharapkan (Frans, 2006:5).

2.6.1 Himpunan Fuzzy

Dalam teori himpunan klasik, himpunan didefinisikan sebagai kumpulan obyek-obyek yang terdefinisi scara tegas dalam arti bahwa untuk setiap elemen dalam semestanya selalu dapat ditentukan secara tegas apakah merupakan anggota dari himpunan itu atau tidak. Dengan kata lain, terdapat batas yang tegas antara unsur-unsur yang tidak merupakan anggota dari suatu himpunan. Tetapi dalam kenyataannya tidak semua himpunan yang dijumpai dalam kehidupan sehari-hari terdefinisi secara demikian, misalnya himpunan orang tinggi. Pada himpunan orang yang tinggi, misalnya, kita tidak dapat menentukan secara tegas apakah seseorang adalah tinggi atau tidak.

Permasalahan himpunan dengan batas yang tidak tegas itu diatasi oleh Zadeh dengan mengaitkan himpunan semacam itu dengan suatu fungsi yang menyatakan derajat kesesuaian unsur-unsur dalam semestanya dengan konsep yang merupakan syarat keanggotaan himpunan tersebut. Fungsi itu disebut fungsi keanggotaan dan nilai fungsinya disebut sebagai derajat keanggotaan suatu unsur dalam himpunan itu. Derajat keanggotaan dinyatakan dengan suatu bilangan real dalam selang tertutup [0,1]. Nilai fungsi sama dengan 1 menyatakan keanggotaan penuh dan nilai fungsi sama dengan 0 menyatakan sama sekali bukan anggota himpunan (Frans, 2006:49-50).

2.6.2 Fungsi Keanggotaan

Definisi 2.6.2.1

Fungsi keanggotaan (*membership function*) adalah suatu kurva yang menunjukkan pemetaan titik-titik input data ke dalam nilai keanggotaannya (sering disebut dengan derajat keanggotaan) yang memiliki interval antara 0 sampai 1.

Salah satu cara yang dapat digunakan untuk mendapatkan nilai keanggotaan adalah dengan melalui pendekatan fungsi. Ada beberapa fungsi yang dapat digunakan yaitu Representasi Linear, Representasi Kurva Segitiga, Representasi Kurva Trapesium, Representasi Kurva Bentuk Bahu, Representasi Kurva-S, Representasi Kurva Bentuk Lonceng (*Bell Curve*) (Kusumadewi, 2004: 8).

Setiap himpunan kabur dapat dinyatakan dengan suatu fungsi keanggotaan. Ada beberapa cara untuk menyatakan himpunan kabur dengan fungsi keanggotaannya. Untuk semesta hingga diskrit biasanya dipakai cara daftar, yaitu daftar anggota-anggota semesta bersama dengan derajat keanggotaannya

Contoh 2.6.2.2:

Dalam semesta X={Rudi, Eni, Linda, Anton, Ika} yang terdiri dari para mahasiswa dengan indeks prestasi berturut-turut 3.2, 2.4, 3.6, 1.6, 2.8, himpunan kabur $\tilde{A}$="himpunan mahasiswa yang pandai" dapat dinyatakan dengan cara daftar sebagai berikut:

$$\tilde{A} = \{0.8/\text{Rudi}, 0.6/\text{Eni}, 0.9/\text{Linda}, 0.4/\text{Anton}, 0.7/\text{Ika}\}$$

Sedangkan untuk semesta tak hingga yang kontinu, cara yang paling sering digunakan adalah cara analitik yang mempresentasikan fungsi keanggotaan himpunan kabur yang bersangkutan dalam bentuk suatu formula matematis yang dapat disajikan dalam bentuk grafik.

2.7 Limit Fuzzy pada Suatu Barisan

Misalkan $r \in \mathbb{R}^{+}$dan $l = \{a_i \in \mathbb{R}; i \in \omega\}$.

Definisi 2.7.1

Suatu bilangan a disebut r-limit pada barisan l ($a = r\text{-}lim_{i\to\infty} a_i$ atau $a = r$-$\lim l$) jika untuk setiap $\varepsilon \in \mathbb{R}^{++}$, pertidaksamaan $\rho(a, a_i) \leq r + \varepsilon$ adalah valid untuk semua a_i atau terdapat n sehingga untuk setiap $i > n$ diperoleh $\rho(a, a_i) \leq r + \varepsilon$ (Burgin, 2007: 71).

Definisi 2.7.2

Barisan l yang mempunyai r-limit disebut r-konvergen dan dikatakan bahwa l r-konvergen ke r-limit a (Burgin, 2007: 71).

Contoh 2.7.3

Misalkan $l = \{\frac{1}{i}; i \in \omega\}$. Maka 1 dan -1 adalah 1-limit l; $\frac{1}{2}$ adalah $(\frac{1}{2})$-limit l tetapi 1 bukan $(\frac{1}{2})$- limit l.

Berdasarkan definisi 2.6.1

a disebut r-lim barisan l (dinotasikan $a = r - \lim_{i\to\infty} a_i$)

$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^{++},$ sedemikian hingga $\rho(a, a_i) < r + \varepsilon$

$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^{++},$ sedemikian hingga $|a - a_i| < r + \varepsilon$, untuk $\forall a, a_i \in \mathbb{R}$

Misal $l = \{\frac{1}{i}, i = \omega\}$, maka

a. $1 = 1\text{-}\lim l$

b. $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\text{-}\lim l$

c. $1 \neq \frac{1}{2}\text{-}\lim l$

Penyelesaian:

a. $1 = 1\text{-}\lim l$

Jika diambil sebarang $\varepsilon > 0$, maka:

$$\rho\left(1, \frac{1}{i}\right) < 1 + \varepsilon$$

$$\left|1 - \frac{1}{i}\right| < 1 + \varepsilon$$

$$-(1 + \varepsilon) < \frac{1}{i} - 1 < 1 + \varepsilon$$

$$1 - 1 - \varepsilon < \frac{1}{i} < 1 + 1 + \varepsilon$$

$$-\varepsilon < \frac{1}{i} < 2 + \varepsilon$$

b. $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\text{-}\lim l$

Jika diambil sebarang $\varepsilon > 0$, maka:

$$\rho\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{i}\right) < \frac{1}{2} + \varepsilon$$

$$\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{i}\right| < \frac{1}{2} + \varepsilon$$

$$-\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right) < \frac{1}{i} - \frac{1}{2} < \frac{1}{2} + \varepsilon$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \varepsilon < \frac{1}{i} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \varepsilon$$

$$-\varepsilon < \frac{1}{i} < 1 + \varepsilon$$

c. $1 \neq \frac{1}{2}$ - lim l

Jika diambil sebarang $\varepsilon > 0$, maka:

$$\rho\left(1, \frac{1}{i}\right) < \frac{1}{2} + \varepsilon$$

$$\left|1 - \frac{1}{i}\right| < \frac{1}{2} + \varepsilon$$

$$-\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right) < \frac{1}{i} - 1 < \frac{1}{2} + \varepsilon$$

$$1 - \frac{1}{2} + \varepsilon < \frac{1}{i} < 1 + \frac{1}{2} + \varepsilon$$

$$\frac{1}{2} + \varepsilon < \frac{1}{i} < \frac{3}{2} + \varepsilon$$

Definisi 2.7.4

a. Suatu bilangan disebut limit fuzzy dari barisan l jika bilangan itu merupakan $r -$ limit l dari beberapa $r \in R^{+}$.

b. Suatu barisan l fuzzy konvergen dan dikatakan sebagi fuzzy konvergen jika mempunyai limit fuzzy (Burgin, 2007: 72)

Beberapa pembaca yang tidak begitu familiar dengan ide awal himpunan fuzzy bertanya mengapa r-limit dikatakan sebagai fuzzy limit. Pada dasarnya ada 3 alasan untuk hal ini. Pertama, karena konsep fuzzy limit mengenalkan nilai tingkatan pada konsep limit dasar (tegas). Kedua, bilangan r pada r-limit memberikan beberapa estimasi tentang luas titik yang disebut sebagai limit barisan. Ketiga, konsep r-limit pada barisan membangun fuzzy limit pada barisan.

Definisi 2.7.5

Suatu bilangan a disebut sebagai r-limit kiri/kanan atau r-limit dari kiri/kanan pada barisan l jika beberapa a_i pada l infinit sedemikian hingga $a_i \leq a + r(a_i \geq$

$a - r$), untuk setiap $\varepsilon \in R^{++}$ pertidaksamaan $|a - a_i| < r + \varepsilon$ valid untuk semua a_i sedemikian hingga $a_i < a + r(a_i \geq a - r)$, sehingga ada n bahwa untuk $i > n$, didapatkan $|a - a_i| < r + \varepsilon$ untuk setiap a_i (Burgin, 2007: 73).

Suatu limit kanan a dinotasikan dengan $a = (+r)$- $\lim_{i\to\infty} a_i$ atau $a = r$-$\lim l$ dan limit kiri b dinotasikan dengan $b = (-r)$- $\lim_{i\to\infty} a_i$ atau $b = (-r)$-$\lim l$.

Teorema 2.7.8

Jika $a = r$-$\lim l$ dan $a > b + r$, maka $a_i > b$ untuk setiap a_i dari l (Burgin, 2007: 74).

Bukti:

Misal $a = r - \lim l$, dan $a > b + r$, maka untuk beberapa bilangan positif p, kita mempunyai $a - b > r + p$. Misal diambil $\varepsilon = \frac{1}{2}p$. Maka pertidaksamaan $|a - a_i| < r + \varepsilon$ valid untuk setiap a_i pada l.

Maka didapatkan $a_i - b = a_i - a + a - b \geq -|a_i - a| + a - b > -r - \varepsilon + (a - b) > -r - \varepsilon + r + p = p - \varepsilon$ untuk setiap a_i pada l. Sehingga, $a_i > b$ untuk setiap a_i pada l. Teorema terbukti.

2.8 Limit Fuzzy pada Suatu fungsi

Limit fuzzy (r-limit) pada fungsi merupakan dasar dari konsep kekontinuan fuzzy. Di bawah ini akan dijelaskan mengenai definisi limit fuzzy pada suatu fungsi.

Misalkan $r \in \mathbb{R}^+$ dan $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ menjadi fungsi parsial

Definisi 2.8.1

Suatu bilangan b disebut r-limit pada suatu fungsi f di titik $a \in \mathbb{R}$ (dinotasikan dengan $b = r - \lim_{x \to a} f(x)$), jika ada barisan $l = \{a_i \in D(f); i \in \omega, a_i \neq a\}$, kondisi $a = \lim l$ jika dan hanya jika $b = r - \lim_{i \to \infty} f(a_i)$

Konsep fuzzy dari suatu limit diperoleh dengan mengubah bilangan kecil ε sebarang dengan sejumlah bilangan berhingga kecil yang nilainya $r + \varepsilon$. Konsep dari limit fuzzy (r-limit) merupakan perluasan dari konsep limit biasa.

Contoh 2.8.2

$$\frac{3}{2} = \frac{1}{2} - \lim_{x \to 1} x^2$$

Penyelesaian:

Berdasarkan definisi 2.7.1, maka diketahui:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ sedemikian hingga $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < r + \varepsilon$.

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ sedemikian hingga $0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow \left|x^2 - \frac{3}{2}\right| < \frac{1}{2} + \varepsilon$.

$$0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow \left|x^2 - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2} + \varepsilon$$

$$0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow |x^2 - 1| < \frac{1}{2} + \varepsilon$$

$$0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow |x - 1||x + 1| < \frac{1}{2} + \varepsilon$$

Misalkan $0 < \delta \leq 1$, maka apabila $0 < |x - 1| < \delta \leq 1$ diperoleh

$$|x + 1| = |x - 1 + 2| < |x - 1| + 2 < 1 + 2 = 3$$

Sehingga dengan pemisalan δ seperti di atas diperoleh

$$0 < |x - 1| < \delta \leq 1 \Rightarrow |x - 1||x + 1| < 3|x - 1| < r + \varepsilon$$

Pilih $\delta = \min\{1, \frac{1}{3}(r + \varepsilon)\}$

$$|x^2 - 1| = |x - 1||x + 1| < 3|x - 1| < 3\frac{1}{3}(r + \varepsilon) = r + \varepsilon.$$

Terbukti bahwa $\frac{3}{2} = \frac{1}{2} - \lim_{x\to 1} x^2$.

Lemma 2.8.3

Jika $D(f) = \mathbb{R}$, maka $b = 0 - \lim_{x\to a} f(x)$ jika dan hanya jika $b = \lim_{x\to a} f(x)$ dalam arti klasik.

Bukti:

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{++}$ sedemikian hingga $\rho(f(x), b) = |f(x) - b| < r + \varepsilon$

$$= |f(x) - b| < 0 + \varepsilon$$

$$= |f(x) - b| < \varepsilon$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ sedemikian hingga $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$.

Hal ini menunjukkan bahwa konsep *r-limit* pada fungsi adalah perluasan alami dari konsep limit fungsi biasa.

Teorema 2.8.4

Kondisi $b = r\text{-}\lim_{x\to a} f(x)$ adalah benar jika dan hanya jika ada persekitaran Ob dari b yang terdiri dari interval $[b - r, b + r]$, maka ada persekitaran Oa di a seperti $f(Oa \cap D(f)) \subseteq Ob$.

Bukti:

Syarat perlu. Jika $b = r - \lim_{x\to a} f(x)$ dan Ob adalah persekitaran terbuka dari b yang intervalnya terdiri dari $[b - r, b + r]$.

Misal ditunjukkan bahwa ada persekitaran Oa di a, ada titik $a_i \neq a$ sebagaimana $f(a_i)$ tidak menuju ke Ob. Ambil barisan dari persekitaran $O_i a$ sebagaimana $O_i a \subseteq O_{i-1} a, \forall 1 = 2,3, \ldots$

Pada persekitaran $O_i a$ ada titik $a_i \neq a$, sebagaimana $f(a_i)$ tidak menuju ke Ob dan $\cap O_i a = \{a\}$. Maka barisan $l = \{a_i \in \mathbb{R}; i \in \omega, a_i \neq a\}$, dimana kondisi $a = \lim l$ tidak mengimplikasikan $b = r - \lim_{x \to a} f(a_i)$. Hal ini kontradiksi dengan kondisi awal $b = r - \lim_{x \to a} f(x)$.

Syarat cukup. Jika untuk setiap persekitaran terbuka Ob di b yang intervalnya $[b - r, b + r]$, ada persekitaran Oa di a seperti $f(Oa) \subseteq Ob$ dan $l = \{a_i \in \mathbb{R}, i \in \omega, a_i \neq a\}$ adalah barisan seperti halnya $a = \lim l$. Maka semua elemen menuju ke Oa. Oleh karena itu, semua elemen $f(a_i)$ menuju ke Ob. Dari definisi r-*limit*, berlaku $b = r - \lim_{i \to \infty} f(a_i)$.

2.9 Kajian Teori dalam Al-Qur'an

Al-Qur'an adalah kitab akidah dan hidayah. Ia menyeru hati nurani untuk menghidupkan di dalamnya faktor-faktor perkembangan dan kemajuan serta dorongan kebaikan dan keutamaan. Kemukjizatan ilmiah Al-Qur'an bukanlah terletak pada pencakupannya akan teori-teori ilmiah yang baru, berubah, dan merupakan hasil usaha manusia dalam penelitian dan pengamatan (Al-Qaththan, 2006 : 338). Al-Qur'an dapat dikembangkan beberapa konsep dasar dari beberapa ilmu pengetahuan, diantaranya matematika. Salah satu konsep dasar dari ilmu matematika yang juga dibahas dalam Al-Qur'an ialah himpunan fuzzy.

Himpunan *fuzzy* (*fuzzy set*) didasarkan pada gagasan untuk memperluas jangkauan fungsi karakteristik sedemikian hingga fungsi tersebut akan mencakup bilangan riil pada interval [0,1]. Nilai keanggotaannya menunjukkan bahwa suatu item tidak hanya bernilai benar atau salah. Nilai 0 menunjukkan salah, nilai 1 menunjukkan benar, dan masih ada nilai-nilai yang terletak antara benar dan salah (Sudrajat, 2008). Seperti halnya permasalahan orang-orang yang tidak memiliki pendirian dan menjalani kehidupan yang tidak pasti dalam Islam, orang-orang seperti ini berada diantara orang mukmin (percaya) dan kafir (tidak percaya) seperti yang dijelaskan dalam surat Al-Hajj : 11

وَمِنَ ٱلنَّاسِ مَن يَعۡبُدُ ٱللَّهَ عَلَىٰ حَرۡفٖۖ فَإِنۡ أَصَابَهُۥ خَيۡرٌ ٱطۡمَأَنَّ بِهِۦۖ وَإِنۡ أَصَابَتۡهُ فِتۡنَةٌ ٱنقَلَبَ عَلَىٰ وَجۡهِهِۦ خَسِرَ ٱلدُّنۡيَا وَٱلۡأٓخِرَةَۚ ذَٰلِكَ هُوَ ٱلۡخُسۡرَانُ ٱلۡمُبِينُ ١١

"Dan di antara manusia ada orang yang menyembah Allah dengan berada di tepi, Maka jika ia memperoleh kebajikan, tetaplah ia dalam keadaan itu, dan jika ia ditimpa oleh suatu bencana, berbaliklah ia ke belakang. Rugilah ia di dunia dan di akhirat. yang demikian itu adalah kerugian yang nyata."(QS Al-Hajj: 11)

Manusia berdasarkan imannya, di dalam Al-Quran di awal surat Al-Baqarah dibagi ke dalam 3 golongan, yaitu Al-Mukminun, Al-Kuffar (kafir) dan al-munafiqun. Ketiga golongan manusia inilah yang dengan sifat-sifatnya yang khas memberi warna bagi kehidupan dunia. Bagi umat Islam (Al-Mukminun) yang perlu diwaspadai keberadaannya dari kedua golongan yang lain (kafir dan munafik) adalah yang munafik. Mereka sangat berbahaya karena dapat membaur tanpa terlihat. Kata pepatah, ibarat musang berbulu ayam - serigala berbulu domba - musuh dalam selimut. Kebanyakan mereka adalah orang cerdik pandai, pintar bicara, mampu meyakinkan orang dengan kefasihan lidahnya (Anonemous, 2010). Sehingga dari sini dapat kita lihat bahwa orang munafik itu berada diantara golongan orang mukmin dan golongan orang kafir. Jika digambarkan, maka kedudukan antara orang mukmin, kafir, dan munafik dalam Islam sebagai berikut. Dari gambar di atas telah nampak bahwa orang munafik berada dalam keraguan dan ketidakpastian dalam Islam. Seperti yang dijelaskan pada surat Al-Baqarah : 8 (pada bab I) bahwasanya diantara manusia terdapat mereka yang mengatakan kami beriman kepada Allah dan hari pembalasan, (namun) mereka tidak beriman, mereka hendak menipu Allah dan orang-orang yang benar-benar beriman. Sungguh celaka mereka, mereka tidak menipu siapapun selain diri mereka sendiri, tetapi mereka tidak mengetahui. Jadi, berbohong bukanlah dosa yang sepele, karena bisa berakibat mengubah seorang mukmin menjadi munafik. Didalam Al-Qur'an (QS. Al-Baqarah: 11-12), Allah SWT menguraikan perihal berbohong dan menyembah berhala secara beriringan :

وَإِذَا قِيلَ لَهُمْ لَا تُفْسِدُوا۟ فِى ٱلْأَرْضِ قَالُوٓا۟ إِنَّمَا نَحْنُ مُصْلِحُونَ ۝١١ أَلَآ إِنَّهُمْ هُمُ
ٱلْمُفْسِدُونَ وَلَٰكِن لَّا يَشْعُرُونَ ۝١٢

Jika dikatakan kepada mereka, "Janganlah membuat kerusakan di bumi." Mereka berkata, "Sesungguhnya kami melakukan perbaikan."Ingatlah, sesungguhnya merekalah yang membuat kerusakan, tetapi mereka tidak menyadarinya (QS. Al-Baqarah: 11-12).

Dari ayat di atas dapat dijelaskan bahwa pada hakikatnya, mereka adalah musuh-musuh Islam. Permusuhan itu timbul dari hati yang keras (akibat benci, dengki, hasud), sehingga pada umumnya orang mengira bahwa mereka adalah kaum cerdik pandai yang akan mengadakan reformasi (perbaikan), namun kenyataannya mereka sebenarnya adalah orang-orang sesat yang berusaha merusak sendi-sendi agama. Sehingga orang yang tidak mempunyai pendirian itu belum tentu golongan mukmin dan belum tentu juga golongan kafir, sehingga seperti halnya fuzzy, orang yang tidak mempunyai pendirian berada pada selang 0 sampai 1 dimana 0 merupakan kategori orang kafir (tidak percaya) dan 1 merupakan kategori orang mukmin (percaya).

BAB III

PEMBAHASAN

Secara tradisional dilakukan dalam kursus kalkulus, dimulai dengan turunan fuzzy lokal. Ada banyak jenis turunan fuzzy: kuat, lemah, berpusat kuat, kiri, kanan, dua sisi, bersyarat, dan turunan fuzzy yang diperpanjang. Pada pembahasan ini, akan didefinisikan turunan fuzzy kuat, yang lebih dekat dengan turunan konvensional fungsi dan mewarisi banyak sifat.

3.1 Turunan Fuzzy Kuat Pada Fungsi

Misalkan $X, Y \subseteq R, f: X \rightarrow Y$ adalah fungsi, $a \in X, b \in R,$ dan menganggap X yang berisi beberapa interval terbuka $(a-k, a+k)$ dan $r \in R^+$.

Definisi 3.1.1

a) b dikatakan r-turunan kuat memusat dari fungsi $f(x)$ pada titik $a \in X$ jika $b = r - \lim \left\{\frac{f(a)-f(x_i)}{(a-x_i)}; i = 1, 2, 3, \ldots\right\}$ untuk semua barisan $\{x_i\,;\ x_i \in (a-k, a+k);\ x_i \neq a;\ i = 1, 2, 3, \ldots\}$ yang konvergen ke a.

b) b dikatakan r-turunan kuat ke kiri dari fungsi $f(x)$ pada titik $a \in X$ jika $b = r - \lim \left\{\frac{f(a)-f(x_i)}{(a-x_i)}; i = 1, 2, 3, \ldots\right\}$ untuk semua barisan $\{x_i\,;\ x_i \in (a-k, a+k);\ x_i < a;\ i = 1, 2, 3, \ldots\}$ yang konvergen ke a.

c) b dikatakan r-turunan kuat ke kanan dari fungsi $f(x)$ pada titik $a \in X$ jika $b = r - \lim\left\{\frac{f(a)-f(x_i)}{(a-x_i)}; i = 1,2,3,\dots\right\}$ untuk semua barisan $\{x_i\,;\, x_i \in (a - k, a + k);\, x_i > a;\, i = 1,2,3,\dots\}$ yang konvergen ke a.

d) b dikatakan r-turunan kuat ke dua sisi dari fungsi $f(x)$ pada suatu titik $a \in X$ jika $b = r - \lim\left\{\frac{f(z_i)-f(x_i)}{(z_i-x_i)}; i = 1,2,3,\dots.\right\}$ untuk semua barisan $\{x_i,\, x_i \in (a - k,\, a + k);\, x_i < a;\, i = 1,2,3,\dots\}$ dan $\{z_i, z_i \in (a - k, a + k); z_i > a; i = 1,2,3,\dots\}$ yang konvergen ke a.

r-turunan kuat memusat (kiri, kanan, dan dua-sisi) dari suatu fungsi $f(x)$ pada suatu titik $a \in X$ dinotasikan dengan $b = \frac{st_r^{ct}d}{dx}f(a), b = \frac{st_r^{l}d}{dx}f(a)$, $b = \frac{st_r^{r}d}{dx}f(a)$ dan $b = \frac{st_r^{t}d}{dx}f(a)$.

r-turunan kuat berpusat dan dua-sisi fuzzy sama halnya pada turunan klasik, sementara yang r-turunan kuat kanan adalah anggota fuzzy dari turunan kanan dan r-turunan kuat kiri adalah anggota turunan fuzzy kiri.

Contoh 3.1.1

Ambil fungsi $f(x) = x$ jika x adalah nol atau bilangan positif, dan $f(x) = -x$ jika x adalah angka negatif, yaitu, $f(x) = |\,x\,|$ nilai mutlak dari x dan pilih a sampai 0. jika $x_i > 0$ maka hasil bagi $\frac{f(a)-f(x_i)}{(a-x_i)}$ adalah 1, sedangkan, jika $x_i < 0$, maka hasil bagi $\frac{f(a)-f(x_i)}{(a-x_i)}$ adalah sama dengan -1. Jadi, $f(x)$ tidak tidak memiliki turunan pada $a = 0$ karena mendekati 0, hasil bagi perbedaan mengasumsikan nilai 1 dan -1.

Selesaian:

$f(x) = x \geq 0$

$f(x) = -x \rightarrow x < 0$

$f(x) = |x|$

$x_i > 0$ maka $f(a)$

$\alpha = 0$

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{, jika } x \geq 0 \\ -x & \text{, jika } x \leq 0 \end{cases}$$

a. $b = r - \lim \frac{f(a)-f(x_i)}{(a-x_i)}$

$$= r - \lim \frac{f(0) - f(x_i)}{(0 - x_i)}$$

$$= r - \lim \frac{-f(x_i)}{-x_i}$$

$$= 1$$

b. $b = r - \lim \frac{f(a)-f(x_i)}{(a-x_i)}$

$$= r - \lim \frac{f(0) - f(-x_i)}{(0 - x_i)}$$

$$= r - \lim \frac{-f(-x_i)}{-x_i}$$

$$= r - \lim \frac{f(x_i)}{-x_i}$$

$$= -1$$

Namun, menurut **Definisi 3.1.1** angka 0 adalah dua sisi yang kuat 1-turunan dari $f(x)$ pada 0, angka 1 juga merupakan kuat ke kanan, sedangkan jumlah -1 adalah 0 kuat ke kiri 0-turunan dari $f(x)$ pada 0.

Berbeda dengan turunan klasik, adalah mungkin bahwa bilangan yang berbeda r-turunan kuat terpusat (kiri, kanan, dua-sisi) dari fungsi $f(x)$ yang diberikan di titik a. Sebuah pendekatan alternatif untuk diferensiasi fuzzy dari fungsi sebenarnya adalah disarankan oleh Kalina (1998; 1999; 1999) dan Janis (1999). Mereka konstruksi untuk diferensiasi didasarkan pada konsep kontinuitas fuzzy dari (Burgin dan Šostak, 1992; 1994) dan kedekatan pada $\boldsymbol{R}$ himpunan bilangan real, yang diperkenalkan oleh Kalina (1997).

Mempertimbangkan kasus ketika ruang X memiliki titik yang terisolasi di a, maka tidak ada urutan konvergen di X ke titik a tetapi urutan hampir semua unsur yang sama dengan a. Namun, tidak menganggap urutan seperti dalam definisi turunan dan turunan fuzzy karena dalam persamaan $\frac{f(a)-f(x_i)}{(a-x_i)}$ menjadi sama dengan 0.

Lemma 3.1.1.

Setiap bilangan $b \in R$ adalah terpusat kuat (kiri, kanan, dua-sisi) r-turunan dari $f(x)$ pada titik yang terisolasi $a \in X$ untuk setiap $r \in R^+$.

Bukti:

Dikatakan bahwa tidak ada yang kuat terpusat (kiri, kanan, dua-sisi) r-turunan dari $f(x)$ di titik $a \in X$ untuk setiap bilangan $b \in R^+$ dan setiap $r \in R^+$. Ini adalah konstruktif pemahaman turunan fuzzy. Di ambil dari limit himpunan barisan untuk menentukan kuat turunan dalam cara yang berbeda (tapi setara dengan definisi awal). **Definisi 3.1.1** menunjukkan hasil sebagai berikut.

Lemma 3.1.2

Untuk setiap titik dari $\mathbb{R}$ dan setiap fungsi nyata $f(x)$, kita memiliki:

a. $b = \frac{st_r^{ct}d}{dx} f(a)$ jika dan hanya jika $b = r - \lim E_{ct}$ dimana $E_{ct} = \left\{\frac{f(a)-f(x_i)}{(a-x_i)}; i = 1, 2, 3, \dots\right\}$; $\{x_i \,;\, i = 1, 2, 3, \dots\}$ adalah barisan yang konvergen ke a.

b. $b = \frac{st_r^{l}d}{dx} f(a)$ jika dan hanya jika $b = r - \lim E_l$ dimana $E_l = \left\{\frac{f(a)-f(x_i)}{(a-x_i)}; i = 1, 2, 3, \dots\right\}$; $\{x_i \,;\, i = 1, 2, 3, \dots\}$ adalah barisan yang konvergen ke a dan semua $x_i < a$.

c. $b = \frac{st_r^{r}d}{dx} f(a)$ jika dan hanya jika $b = r - \lim E_r$ dimana $E_r = \left\{\frac{f(a)-f(x_i)}{(a-x_i)}; i = 1, 2, 3, \dots\right\}$; $\{x_i \,;\, i = 1, 2, 3, \dots\}$ adalah barisan yang konvergen ke a dan semua $x_i > a$

d. $b = \frac{st_r^{t}d}{dx} f(a)$ jika dan hanya jika $b = r - \lim E_t$ dimana $E_t = \left\{\frac{f(a)-f(x_i)}{(a-x_i)}; i = 1, 2, 3, \dots\right\}$; $\{x_i \,;\, i = 1, 2, 3, \dots\}$ adalah barisan yang konvergen ke a dan $z_i < a < x_i$ untuk semua $i = 1,2,3, \dots$.

Bukti:

Jika $b = r - \lim \left\{\frac{f(a)-f(x_i)}{(a-x_i)}; i = 1, 2, 3, \dots\right\}$ dan semua $x_i < a$; dan semua $x_i > a$; $b = r - \lim \left\{\frac{f(z_i)-f(x_i)}{(z_i-x_i)}; i = 1, 2, 3, \dots\right\}$ dengan $z_i < a < x_i$ untuk semua $i = 1, 2, 3, \dots$ dan barisan $\{x_i;\, i = 1, 2, 3, \dots\}$ dan $\{z_i;\, i = 1, 2, 3, \dots\}$ konvergen ke a, untuk semua barisan $\{x_i, x_i \neq a;\, i = 1, 2, 3, \dots\}$ konvergen ke a, kemudian dengan melihat definisi himpunan fuzzy pada limit fuzzy maka di dapatkan $b = r - \lim E_{ct}$, $b = r - \lim E_l$, $b = r - \lim E_r$ dan $b = r - \lim E_t$. Pada saat yang sama, $b = r - \lim E_{ct}$, $b = r - \lim E_l$, $b = r - \lim E_r$ dan $b = r - \lim E_t$) maka dari **Definisi 3.1.1** didapatkan:

$b = \frac{st_r^{ct} d}{dx} f(a), b = \frac{st_r^{l} d}{dx} f(a),\ b = \frac{st_r^{r} d}{dx} f(a)$ dan $b = \frac{st_r^{t} d}{dx} f(a)$.

Lemma 3.1.3.

Setiap r-turunan kuat memusat dari $f(x)$ pada suatu titik $a \in X$ juga merupakan r-turunan yang kuat kiri dan kuat kanan dari $f(x)$ pada titik yang sama untuk setiap $r \in \mathbb{R}^+$.

Bukti:

Dari **Definisi 3.1.1** r - turunan kuat berpusat yaitu $b = r - \lim \left\{ \frac{f(a) - f(x_i)}{(a - x_i)}; i = 1, 2, 3, \ldots \right\}$ untuk semua barisan $\{x_i\, ;\ x_i \in (a-k, a+k);\ x_i \neq a;\ i = 1, 2, 3, \ldots\}$ konvergen ke a. Sama halnya dengan r-turunan yang kuat kiri dan kuat kanan. Jadi definisi r-turunan kuat kiri dan r-turunan kuat kanan tersebut bisa di artikan dengan r-turunan kuat berpusat pada $f(x)$ pada suatu titik $a \in X$.

r - turunan kuat memusat $\begin{cases} r - \text{turunan kuat kiri} \\ r - \text{turunan kuat kanan} \end{cases}$

r - turunan kuat memusat $\begin{cases} b = r - \lim \left\{ \frac{f(a) - f(x_i)}{(a - x_i)}; i = 1, 2, 3, \ldots \right\} x_i < a \\ b = r - \lim \left\{ \frac{f(a) - f(x_i)}{(a - x_i)}; i = 1, 2, 3, \ldots \right\} x_i > a \end{cases}$

Lemma 3.1.4

Jika $d = st_r^z\, d/\, dx\, f\, (a)$, maka $d = st_q^z\, d/\, dx\, f\, (a)$, untuk setiap $z \in \{ct, l, r, t\}$ dan setiap $q > r$.

Bukti.

Mengikuti **definisi 3.1.1** dan **lemma 2.2.4** pada limit fuzzy yaitu jika $a = r - \lim l$ maka $a = q - \lim l$ untuk setiap $q > r$. jika ketaksamaan $|a - a_i| < r + \varepsilon$ adalah benar untuk semua a_i dari barisan l, sehingga ketaksamaan $|a - a_i| < q + \varepsilon$ juga benar untuk semua a_i dari barisan l.

Lemma 3.1.5

Jika b adalah r-turunan kuat kiri dan kanan dari $f(x)$ pada titik $a \in X$, maka b adalah r-turunan kuat memusat dari $f(x)$ pada titik yang sama untuk setiap $r \in \mathbb{R}^+$..

Bukti.

Mempertimbangkan barisan $\{x_i \in R;\ i = 1,2,3,\dots\}$ konvergen ke $a \in X$ dan membiarkan b menjadi r-turunan baik kuat kiri dan kuat kanan dari $f(x)$ pada a. Kemudian barisan $\{x_i \in R;\ i = 1,2,3,\dots\}$ terdiri dari dua subbarisan $\{v_i \in R;\ i = 1,2,3,\dots\}$ dan $\{z_i \in R\ ;\ i = 1,2,3,\dots\}$ seperti $v_i < a$ dan $z_i < a$ untuk semua $i, = 1,2,3,\dots$. Masing-masing dari mereka adalah terbatas atau konvergen ke a. Ketika salah satu subbarisan terbatas, maka definisi dari turunan fuzzy kiri atau kanan menyiratkan bahwa $b = r - \lim\left\{\frac{f(a)-f(x_i)}{(a-x_i)};\ i = 1,2,3,\dots\right\}, a = \lim_{i\to\infty} x_i\}$.

Untuk membuktikan pernyataan lemma tersebut, juga dapat mempertimbangkan kasus ketika kedua subbarisan $\{v_i \in R;\ i = 1,2,3,\dots\}$ dan $\{z_i \in R\ ;\ i = 1,2,3,\dots\}$ tak terbatas. Dalam kasus ini, dengan definisi r-turunan yang kuat, kita mempunyai $b = r - \lim\left\{\frac{f(a)-f(v_i)}{(a-v_i)};\ i = 1,2,3,\dots\right\}$ dan $b = r -$

$\lim\left\{\frac{f(a)-f(z_i)}{(a-z_i)}; i = 1,2,3,\ldots\right\}$. kita mempunyai $b = r - \lim\left\{\frac{f(a)-f(x_i)}{(a-x_i)}; i = 1,2,3,\ldots\right\}$. Sebagai urutan $\{x_i \in R;\ i = 1,2,3,\ldots\}$ yang konvergen ke a. Lemma terbukti.

Definisi 3.1.2

b disebut r-turunan penuh dari fungsi $f(x)$ pada suatu titik $a \in X$ jika b adalah pada saat yang sama r-turunan terpusat kuat, kiri, kanan, dan dua-sisi dari $f(x)$ pada titik a.

Proposisi 3.1.1

Jika b adalah r-turunan kuat berpusat dari fungsi $f(x)$ pada titik $a \in X$, maka b adalah r-turunan dua sisi yang kuat dari $f(x)$ di titik a.

Bukti:

Misal ambil sebarang barisan

$$\frac{f(z_i)-f(x_i)}{(z_i-x_i)};\ z_i > a > x_i, i = 1,2,3,\ldots,$$

$$\text{dan } a = \lim_{i\to\infty} x_i = \lim_{i\to\infty} z_i \}. \qquad (4.1)$$

Secara geometri menunjukkan bahwa

$$\frac{f(a)-f(x_i)}{(a-x_i)} \le \frac{f(z_i)-f(x_i)}{(z_i-x_i)} \le \frac{f(a)-f(z_i)}{(a-z_i)} \qquad (4.2)$$

Atau

$$\frac{f(a)-f(x_i)}{(a-x_i)} \ge \frac{f(z_i)-f(x_i)}{(z_i-x_i)} \ge \frac{f(a)-f(z_i)}{(a-z_i)} \qquad (4.3)$$

Di asumsikan bahwa

$$\frac{f(a)-f(x_i)}{(a-x_i)} \leq \frac{f(z_i)-f(x_i)}{(z_i-x_i)} \tag{4.4}$$

Kemudian didapat

$$\frac{f(a)-f(x_i)}{(z_i-x_i)} \leq \frac{f(z_i)-f(x_i)}{(a-x_i)}$$

Pada saat $z_i > a > x_i$. Dengan proses perkalian, didapat:

$$(f(a))z_i - (f(x_i))z_i - (f(a))x_i + (f(x_i))x_i \leq$$

$$(f(z_i))\, a - (f(x_i))a - (f(z_i))\, x_i + (f(x_i))x_i$$

Dengan menghapus $(f\ (x_i))\ x_i$ dari kedua ruas dari ketaksamaan ini, diperoleh

$$(f(a))z_i - (f(x_i))z_i - (f(a))x_i \leq (f(z_i))\, a - (f(x_i))a - (f(z_i))\, x_i$$

Menggunakan sifat ketaksamaan dan bilangan real, diperoleh urutan ketidaksetaraan berikut:

$$(f(a))z_i - (f(x_i))z_i - (f(a))x_i \leq (f(z_i))\, a - (f(x_i))a - (f(z_i))\, x_i$$

$$(f(a))z_i - (f(z_i))z_i - (f(a))x_i + (f(z_i))\, x_i$$
$$\leq (f(z_i))\, a - (f(x_i))a - (f(z_i))z_i + (f(x_i))z_i$$

$$(f(a) - f(z_i))(z_i - x_i) \leq (f(z_i) - f(x_i))(a - z_i)$$

$$\frac{f(z_i) - f(x_i)}{(z_i - x_i)} \leq \frac{f(a) - f(z_i)}{(a - z_i)}$$

Pada saat $(a - z_i) < 0$. Ini berarti bahwa jika bagian kanan dari ketidaksetaraan (4.2) adalah benar, maka bagian kiri ketidaksetaraan ini juga benar, atau bahwa ketidaksetaraan (4.4) mengimplikasikan ketidaksetaraan (4.2) dan ketidaksetaraan (4.5) mengimplikasikan ketidaksetaraan (4.3).

Dengan argumen yang sama, terjadi ketika

$$\frac{f(a)-f(x_i)}{(a-x_i)} \geq \frac{f(z_i)-f(x_i)}{(z_i-x_i)} \tag{4,5}$$

berarti ketidaksamaan

$$\frac{f(z_i)-f(x_i)}{(z_i-x_i)} \geq \frac{f(a)-f(z_i)}{(a-z_i)}$$

Karena semua bilangan real yang terurut secara linear maka (4,4) atau (4.5) adalah benar. Selain itu, (4.4) berarti (4.2), sedangkan (4,5) berarti (4.3). Jika jumlah b adalah r-turunan kuat berpusat dari $f(x)$, maka b adalah r-limit dari kedua barisan $\left\{\frac{f(a)-f(z_i)}{(a-z_i)};\ i = 1,2,3,\right\}$ dan $\left\{\frac{f(a)-f(x_i)}{(a-x_i)};\ i = 1,2,3,\dots\right\}$ oleh ketidaksetaraan (4.2) dan (4.3). Selain itu, sifat dari r-limit menyiratkan b merupakan r-limit barisan $\left\{\frac{f(z_i)-f(x_i)}{(z_i-x_i)};\ i = 1,2,3,\dots\right\}$. Pada saat $\left\{\frac{f(z_i)-f(x_i)}{(z_i-x_i)};\ z_i > a > x_i, i = 1,2,3,\dots\right\}$ adalah sebarang barisan dari proposisi ini, b merupakan r-turunan dua-sisi yang kuat dari $f(x)$ di titik $a \in X$.

Proposisi 3.1.1 terbukti.

Corollary 3.1.1

Jika b adalah r-turunan kuat berpusat dari fungsi $f(x)$ pada titik $a \in X$, maka b adalah r-turunan kuat penuh dari $f(x)$ di titik a.

Bukti:

Dengan **Proposisi 3.1.1,** jika b adalah r-turunan kuat memusat dari fungsi $f(x)$ pada suatu titik $a \in X$, maka b adalah r-turunan dua sisi yang kuat dari $f(x)$ di titik $a \in X$. Selain itu, menurut Lemma 3.1.3, b adalah baik r-turunan kuat kiri dan kuat kanan dari $f(x)$ di titik a. Jadi, dengan Definisi 3.1.2 b adalah r-turunan kuat penuh dari $f(x)$ di titik a.

Proposisi 3.1.2

Jika r-turunan dua sisi yang kuat dari $f(x)$ pada suatu titik $a \in X$ ada (dan sama dengan b), maka kedua satu sisi yang kuat r-turunan dari $f(x)$ pada suatu titik yang ada (dan bertepatan dengan b).

Bukti.

Pertimbangkan barisan $\{x_i \in R;\ i = 1, 2, 3, \dots\}$, yang konvergen ke $a \in X$ dan di mana semua $x_i < a$. $f(x)$ adalah fungsi kontinu pada a dan $a = \lim_{i\to\infty} x_i$, ini memungkinkan untuk bilangan z_i ke setiap bilangan x_i sedemikian rupa sehingga $z_i <, | a - z_i | < \delta n\ (| a - x_i |)$ dan $| f(a) - f(z_i) | < \varepsilon n\ (| a - x_i |)$ ketika i lebih besar dari pada n. Hal ini dimungkinkan untuk melakukan hal ini sedemikian rupa sehingga barisan $\{\delta n;\ n = 1, 2, 3, \dots\}$ dan $\{\varepsilon n;\ n = 1, 2, 3, \dots\}$ konvergen ke nol. Sebagai contoh, bisa diambil $\delta n = 1\,/\,n$ dan menemukan εn sesuai bilangan untuk semua $n = 1, 2, 3, \dots$. ambil $k \in R$ beberapa. Kemudian sebagai $a - x_i < z_i - x_i$, di dapat

$$\left| b - \left(\frac{f(a) - f(x_i)}{(a - x_i)} \right) \right| =$$

$$\left| b - \left(\frac{f(z_i) - f(x_i)}{(a - x_i)} + \frac{f(z_i) - f(a)}{(a - x_i)} \right) \right| \leq$$

$$\left| b - \left(\frac{f(z_i) - f(x_i)}{(a - x_i)} \right) \right| + \left| \frac{f(z_i) - f(a)}{(a - x_i)} \right| =$$

$$\left| b - \left(\frac{f(z_i) - f(x_i)}{(z_i - x_i)} + \frac{f(z_i) - f(x_i)}{(z_i - x_i)} \right) - \left(\frac{f(z_i) - f(x_i)}{(a - x_i)} \right) \right| + \left| \frac{f(z_i) - f(a)}{(a - x_i)} \right| \leq$$

$$\left|b - \left(\frac{f(z_i) - f(x_i)}{(z_i - x_i)}\right)\right| + \left|\left(\frac{f(z_i) - f(x_i)}{(z_i - x_i)} - \frac{f(z_i) - f(x_i)}{(a - x_i)}\right)\right| - \left|\left(\frac{f(z_i) - f(a)}{(a - x_i)}\right)\right| <$$

$$r + (1/3)\,k + \left|\left(\frac{f(z_i) - f(x_i)}{(z_i - x_i)} - \frac{f(z_i) - f(x_i)}{(a - x_i)}\right)\right| + \left|\left(\frac{f(z_i) - f(a)}{(a - x_i)}\right)\right|$$

b adalah r-turunan dua sisi yang kuat dari f di titik $a \in X$.

Pada saat yang sama, dengan pilihan urutan $\{z_i \in R;\ i = 1, 2, 3, \dots\}$, memiliki

$$\left|\left(\frac{f(z_i) - f(a)}{(a - x_i)}\right)\right| \leq \frac{|f(z_i) - f(a)|}{|(a - x_i)|} <$$

$$\frac{(\varepsilon_n(|a - x_i|)}{|a - x_i|} = \varepsilon_n$$

dan

$$\left|\left(\frac{f(z_i) - f(x_i)}{(z_i - x_i)} - \frac{f(z_i) - f(x_i)}{(a - x_i)}\right)\right| \leq$$

$$|\,(f\,(z_i) - f\,(x_i)\,|\,|\,((1\,/\,(z_i - x_i)) - (a\,1\,/\,(-x_i))\,| =$$

$$|\,(f\,(z_i) - f\,(x_i)\,|\,\left|\frac{(a - x_i - x_i + zi)}{(z_i - x_i)\,(a - x_i)}\right| =$$

$$|\,(f\,(z_i) - f\,(x_i)\,|\,\left|\frac{(a - zi)}{(z_i - x_i)\,(a - x_i)}\right| \leq$$

$$\left(\left|\frac{f(z_i) - f(x_i)}{(z_i - x_i)}\right|\right) \cdot \left(\left|\frac{(a - zi)}{(a - x_i)}\right|\right) <$$

$$\delta n \left(\left|\frac{f\,(z_i) - f\,(x_i)}{z_i - x_i}\right|\right)$$

Terdapat beberapa bilangan k sehingga $\left(\left|\frac{f\,(z_i) - f\,(x_i)}{z_i - x_i}\right|\right) < k$ karena b adalah r-turunan kuat dua sisi dari $f\,(x)$ di titik $a \in X$.

Akibatnya, $\left|b - \left(\frac{f(a)-f(x_i)}{(a - x_i)}\right)\right| < r + (\frac{1}{3})\, k + \delta n + \varepsilon n < r + k$ untuk beberapa $n = 1,2,3,\ldots$pada saat barisan $\{\delta n;\; n = 1,2,3,\ldots\}$ dan $\{\varepsilon n;\; n = 1,2,3,\ldots\}$ konvergen ke nol. Sebagai akibatnya $b \in \mathbb{R}$ adalah r-turunan kuat kiri dari $f(x)$ di titik a. Dalam cara yang sama, dapat membuktikan b yang r-turunan kuat kanan dari $f(x)$ di titik a. Proposisi terbukti

3.2 Kajian Turunan Fuzzy dalam Al-Qur'an

Turunan mempunyai aplikasi dalam semua bidang kuantitatif. Dalam bidang perekonomian misalnya. Pada prinsipnya kegiatan produksi sebagaimana kegiatan konsumsi terikat sepenuhnya dalam syari'at Islam. Allah SWT telah menyediakan bahan bakunya berupa kekayaan alam yang sepenuhnya diciptakan untuk kepentingan manusia. Itu semua baru bisa diperoleh dan bisa dinikmati manusia jika manusia mengelolanya agar menjadi barang dan jasa yang siap dikonsumsi dengan jalan diproduksi terlebih dahulu.

هُوَ ٱلَّذِىٓ أَنزَلَ مِنَ ٱلسَّمَآءِ مَآءًۖ لَّكُم مِّنۡهُ شَرَابٌ وَمِنۡهُ شَجَرٌ فِيهِ تُسِيمُونَ ١٠

Dia-lah, yang Telah menurunkan air hujan dari langit untuk kamu, sebahagiannya menjadi minuman dan sebahagiannya (menyuburkan) tumbuh-tumbuhan, yang pada (tempat tumbuhnya) kamu menggembalakan ternakmu. (An-Nahl :10)

Pada ayat di atas telah diuraikan secara singkat bahwa Allah telah menyediakan kekayaan alam untuk kepentingan dan kesejahteraan manusia. Allah memerintahkan manusia untuk bekerja keras memanfaatkan semua sumber daya itu seoptimal mungkin untuk memenuhi kebutuhan hidupnya. Al-Qur'an juga telah memberikan berbagai alternatif kepada manusia bagaimana melakukan perubahan yang lebih baik dengan menggali dan menggunakan sumber daya alam yang tak terbatas di dunia ini, melalui pengelolaan, modal, kemampuan dan kecenderungannya di dalam proses produksi.

Produksi dalam perspektif Islam adalah suatu usaha untuk menghasilkan dan menambah daya guna dari suatu barang baik dari sisi fisik materialnya maupun dari sisi moralitasnya, sebagai sarana untuk mencapai tujuan hidup manusia sebagaimana yang digariskan dalam agama Islam, yaitu mencapai kesejahteraan dunia dan akhirat. Karena pada dasarnya produksi adalah kegiatan yang menghasilkan barang dan jasa yang kemudian dimanfaatkan oleh konsumen, maka tujuan produksi harus sejalan dengan tujuan konsumsi sendiri yaitu mencapai *falah*.

وَقُلِ ٱعۡمَلُواْ فَسَيَرَى ٱللَّهُ عَمَلَكُمۡ وَرَسُولُهُۥ وَٱلۡمُؤۡمِنُونَۖ وَسَتُرَدُّونَ إِلَىٰ
عَٰلِمِ ٱلۡغَيۡبِ وَٱلشَّهَٰدَةِ فَيُنَبِّئُكُم بِمَا كُنتُمۡ تَعۡمَلُونَ ١٠٥

Dan Katakanlah: "Bekerjalah kamu, Maka Allah dan rasul-Nya serta orang-orang mukmin akan melihat pekerjaanmu itu, dan kamu akan dikembalikan kepada (Allah) yang mengetahui akan yang ghaib dan yang nyata, lalu diberitakan-Nya kepada kamu apa yang Telah kamu kerjakan. (At-Taubah : 105)

Dalam perekonomian, konsep matematika yang paling banyak di pakai adalah konsep turunan. Suatu masalah muncul ketika turunan digunakan untuk mengetahui nilai minimum atau maksimum. Turunan pertama dari suatu fungsi memberikan ukuran apakah fungsi tersebut menaik atau menurun pada suatu titik. Untuk menjadi maksimum atau minimum, fungsi tersebut harus menaik atau menurun yakni slop diukur dengan turunan pertama sama dengan nol. Pada saat nilai marjinal suatu fungsi sama dengan nol baik untuk nilai maksimum atau minimum, maka selanjutnya adalah menentukan titik maksimum atau minimum. Pengambilan keputusan manajerial sering memerlukan cara untuk menemukan nilai maksimum/minimum dari suatu fungsi. Suatu fungsi mencapai titik maksimum atau minimum pada saat slopnya atau nilai marginalnya sama dengan 0.

Konsep turunan digunakan untuk membedakan antara minimum dan maksimum sepanjang fungsi. Turunan merupakan derivatif fungsi asal yang ditentukan dengan cara yang sama. Sebagai contoh : jika persamaan total keuntungan $(\prod) = a - bQ + cQ2 - dQ3$, maka menunjukkan fungsi keuntungan marjinal sebagai berikut:

$$M\prod = -b + 2cQ - 3dQ2$$

Dan masih banyak lagi konsep turunan yang dipergunakan dalam bidang perdagangan. Misalnya dalam perhitungan pendapatan (revenue), keuntungan (profit), biaya (cost) dan lain-lain.

أَلَمۡ تَرَوۡاْ أَنَّ ٱللَّهَ سَخَّرَ لَكُم مَّا فِي ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَمَا فِي ٱلۡأَرۡضِ وَأَسۡبَغَ عَلَيۡكُمۡ نِعَمَهُۥ
ظَٰهِرَةٗ وَبَاطِنَةٗۗ وَمِنَ ٱلنَّاسِ مَن يُجَٰدِلُ فِي ٱللَّهِ بِغَيۡرِ عِلۡمٖ وَلَا هُدٗى وَلَا كِتَٰبٖ مُّنِيرٖ
٢٠

Tidakkah kamu perhatikan Sesungguhnya Allah Telah menundukkan untuk (kepentingan)mu apa yang di langit dan apa yang di bumi dan menyempurnakan untukmu nikmat-Nya lahir dan batin. dan di antara manusia ada yang membantah tentang (keesaan) Allah tanpa ilmu pengetahuan atau petunjuk dan tanpa Kitab yang memberi penerangan. (Lukman : 20)

Manusia oleh Allah telah diberi kesempurnaan indera dan akal pikiran sehingga memungkinkannya untuk dapat memanfaatkan kekayaan yang dikandung oleh alam semesta. Akal merupakan modal yang sangat mahal dan berharga yang dikaruniakan Allah hanya kepada manusia. Optimalisasi pemanfaatan akal akan mengantarkan manusia untuk mencapai tujuan. Dengan modal indera dan akal maka manusia sebagai khalifah dapat memaksimalkan potensinya untuk mencapai tingkat penghidupan yang lebih baik dengan memberdayakan segala kekayaan di alam yang telah dibentangkan oleh Allah bagi manusia. Dengan akal dan indera pula manusia 7 dapat menciptakan berbagai alat dan prasarana yang dapat memudahkannya untuk melaksanakan kegiatan produksi.

Akhlak harus mendasari bagi seluruh aktivitas ekonomi, termasuk aktivitas ekonomi produksi. Menurut Qardhawi, dikatakan bahwa,"Akhlak merupakan hal yang utama dalam produksi yang wajib diperhatikan kaum muslimin, baik secara individu maupun secara bersama-sama, yaitu bekerja pada bidang yang yang dihalalkan oleh Allah, dan tidak melampaui apa yang diharamkan-Nya."

Meskipun ruang lingkup yang halal itu luas, akan tetapi sebagain besar manusia sering dikalahkan oleh ketamakan dan kerakusan. Mereka tidak merasa cukup dengan yang sedikit dan tidak merasa kenyang dengan yang banyak. Hal ini dikatakan sebagai perbuatan yang melampaui batas, yang demikian inilah termasuk kategori orang-orang yang zalim.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Permasalahan yang terjadi dalam kehidupan sehari-hari begitu kompleks dan sulit untuk dikelompokkan secara tegas. Pengelompokan agar dapat sesuai dengan keadaan aslinya, dengan mempergunakan pengelompokan dengan fuzzy. turunan merupakan suatu perlakuan pendekatan suatu titik. Pendekatan suatu titik kadang bisa menjauhi dan juga bisa mendekati. Jarak antara titik pada suatu permasalahan sangatlah beragam. Oleh karena itu, fuzzy dapat mempertegas tingkat kedekatan atau kejauhan titik terhadap fungsi barisan. Sehingga dapat mempergunakan turunan fuzzy dari suatu fungsi di $\mathbb{R}^+$.

Dari pembahasan sebelumnya akan dapat diperoleh sifat-sifat turunan fuzzy kuat sebagai berikut :

1. Setiap bilangan $b \in R$ adalah r-turunan memusat kuat (kiri, kanan, dua-sisi) dari $f(x)$ pada titik yang terisolasi $a \in X$ untuk setiap $r \in R^+$.
2. $b = \frac{st_r^{ct} d}{dx} f(a)$ jika dan hanya jika $b = r - \lim E_{ct}$ dimana $E_{ct} = \left\{\frac{(f(a)-f(x_i))}{(a-x_i)}; i = 1, 2, 3, \dots\right\}$; $\{ x_i ;\ i = 1, 2, 3, \dots \}$ adalah barisan yang konvergen ke a.
3. $b = \frac{st_r^{l} d}{dx} f(a)$ jika dan hanya jika $b = r - \lim E_l$ dimana $E_l = \left\{\frac{(f(a)-f(x_i))}{(a-x_i)}; i = 1, 2, 3, \dots\right\}$; $\{x_i ;\ i = 1, 2, 3, \dots\}$ adalah barisan yang konvergen ke a dan semua $x_i < a$.

4. $b = \frac{st_r^r d}{dx} f(a)$ jika dan hanya jika $b = r - \lim E_r$ dimana $E_r = \left\{\frac{(f(a) - f(x_i)}{(a - x_i)}; i = 1, 2, 3, \ldots\right\}$; $\{x_i\ ;\ i = 1, 2, 3, \ldots\}$ adalah barisan yang konvergen ke a dan semua $x_i > a$
5. $b = \frac{st_r^t d}{dx} f(a)$ jika dan hanya jik $b = r - \lim E_t$ dimana $E_t = \left\{\frac{(f(a) - f(x_i)}{(a - x_i)}; i = 1, 2, 3, \ldots\right\}$; $\{x_i\ ;\ i = 1, 2, 3, \ldots\}$ adalah barisan yang konvergen ke a dan $z_i < a < x_i$ untuk semua $i = 1, 2, 3, \ldots$
6. Setiap r-turunan kuat memusat dari $f(x)$ pada suatu titik $a \in X$ adalah r-turunan kuat kiri dan kuat kanan dari $f(x)$ pada titik yang sama untuk setiap $r \in \mathbb{R}^+$.
7. Jika $d = st_r^z\, d/\, dx\, f\, (a)$, maka $d = st_q^z\, d/\, dx\, f\, (a)$, untuk setiap $z \in \{ct, l, r, t\}$ dan setiap $q > r$.
8. Jika b adalah r-turunan baik kuat kiri dan kanan dari $f(x)$ pada titik $a \in X$, maka b adalah r-turunan kuat memusat dari $f(x)$ pada titik yang sama untuk setiap $r \in \mathbb{R}^+$..

4.2 Saran

Penelitian ini masih jauh dari sempurna. Penulis hanya meneliti turunan fuzzy dari suatu fungsi di $\mathbb{R}^+$, yaitu khususnya pada turunan fuzzy kuat. Oleh karena itu, penulis berharap penelitian ini dilanjutkan pada pembahasan sifat-sifat turunan fuzzy selanjutnya yaitu turunan fuzzy lemah.

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir. 2006. *Ada Matematika dalam Al-Qur'an.* Malang : UIN-Malang Press.

Al-Qaththan, Syaikh Manna. 2006. *Pengantar Studi Ilmu Al-Qur'an.* Jakarta : Pustaka Al-Kautsar.

Baisuni, Hasyim. 1986. *Kalkulus.* Jakarta : UI-Press

Burgin, Mark. 2000. *Theory of Fuzzy Limits, Fuzzy Sets and Systems, v.115, No.3, pp 433-443.*

Burgin, Mark. 2007. *NEOCLASSICAL ANALYSIS Calculus Closer to the Real World.* New York: Nova Science Publisher, Inc.

Bartle, Robert. G dan Donald R. Sherbert. 2000. *Introduction to Real Analysis.* New York: John Wiley & sons.

Klir George J dan Bo Yuan. 1995. *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic*. London: Prentice-Hall.

Kusumadewi, Sri dan Hari Purnomo. 2010. *Aplikasi Logika Fuzzy untuk Pendukung Keputusan, edisi kedua*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

Purcell, Edwin J. & Dale Varberg. 1987. *Kalkulus dan Geometri Analitis (Jilid 1)*. Jakarta : Penerbit Erlangga

Sudrajat. 2008. *Jurnal* : *Dasar-dasar Fuzzy Logic.* Bandung.

Susilo, Frans. 2006. *Himpunan dan Logika Kabur serta Aplikasinya*. Yogyakarta: Graha Ilmu.