# TITIK DAN SISI PENUTUP MINIMAL PADA GRAF BINTANG $(m)_c\ S_n^k$ DAN GRAF RODA $(m)_c\ W_n^k$

**SKRIPSI**

**Oleh:**
**NURUL HIJRIYAH**
**NIM. 08610048**

**JURUSAN MATEMATIKA**
**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**
**UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM**
**MALANG**
**2012**

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

**TITIK DAN SISI PENUTUP MINIMAL PADA**
**GRAF BINTANG $(m)_c\, S_n^k$ DAN GRAF RODA $(m)_c\, W_n^k$**

**SKRIPSI**

Diajukan Kepada:
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

**Oleh:**
**NURUL HIJRIYAH**
**NIM. 08610048**

**JURUSAN MATEMATIKA**
**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI**
**UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM**
**MALANG**
**2012**

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

**TITIK DAN SISI PENUTUP MINIMAL PADA**
**GRAF BINTANG $(m)_c\, S_n^k$ DAN GRAF RODA $(m)_c\, W_n^k$**

**SKRIPSI**

**Oleh:**
**NURUL HIJRIYAH**
**NIM. 08610048**

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal: 6 Februari 2012

| Dosen Pembimbing I, | Dosen Pembimbing II, |
|---|---|
| Wahyu Henky Irawan, M.Pd | Dr. Ahmad Barizi, MA |
| NIP. 19710420 200003 1 003 | NIP. 19731212 199803 1 001 |

Mengetahui
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

**TITIK DAN SISI PENUTUP MINIMAL PADA GRAF BINTANG $(m)_c\, S_n^k$ DAN GRAF RODA $(m)_c\, W_n^k$**

# SKRIPSI

**Oleh:**
**NURUL HIJRIYAH**
**NIM. 08610048**

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal: 1 Maret 2012

| | | |
|---|---|---|
| Penguji Utama: | Abdussakir, M.Pd<br>NIP. 19751006 200312 1 001 | .................. |
| Ketua Penguji: | Hairur Rahman, M.Si<br>NIP. 19800249 200604 1 003 | .................. |
| Sekretaris Penguji: | Wahyu Henky Irawan, M.Pd<br>NIP. 19710420 200003 1 003 | .................. |
| Anggota Penguji: | Dr. Ahmad Barizi, MA<br>NIP. 19731212 199803 1 001 | .................. |

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

## PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

| | |
|---|---|
| Nama | : Nurul Hijriyah |
| NIM | : 08610048 |
| Jurusan | : Matematika |
| Fakultas | : Sains dan Teknologi |
| Judul Skripsi | : Titik dan Sisi Penutup Minimal pada Graf Bintang $(m)_c\ S_n^k$ dan Graf Roda $(m)_c\ W_n^k$ |

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambil alihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencatumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 7 Februari 2012
Yang membuat pernyataan,

Nurul Hijriyah
NIM. 08610048

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

## MOTTO

فَإِنَّ مَعَ ٱلۡعُسۡرِ يُسۡرًا

*" karena Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan"*

*Tata Niat untuk Menuntut Ilmu*
*Supaya Menjadi Ilmu yang Bermanfaat.*
*Nilai Kemanfaatan di Tentukan oleh,*
*Proses Belajar Kita.*
*Jika Kita Merasa Pandai Sama Saja dengan,*
*Menghancurkan Potensi Diri Kita.*
*(penulis)*

**طلب العلم با لحمسة**

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

**PERSEMBAHAN**

*Dengan iringan Do'a dan Syukur yang teramat besar,*
*Skripsi  ini penulis persembahkan kepada:*

*Abi Mudjib dan ibunda Sri Utami tercinta yang telah memberikan segalanya,*
*Adik tersayang Hawin dan Qisto,*
*Serta guru-guru yang selama ini senantiasa memberikan ilmunya.*

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

## KATA PENGANTAR

*Assalamu'alaikum Wr. Wb.*

*Alhamdulillahirobbil'alamiin...* penulis haturkan puji syukur ke hadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat, taufik, hidayah dan inayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan studi di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang sekaligus menyelesaikan tugas akhir/skripsi ini dengan baik.

Selanjutnya penulis haturkan ucapan terima kasih seiring do'a dan harapan *Jazakumullah Ahsanal jaza'* kepada semua pihak yang telah membantu selesainya skripsi ini. Ucapan terima kasih ini penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. Imam Suprayogo, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU. DSc, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Wahyu Henky Irawan, M.Pd dan Dr. Ahmad Barizi, MA selaku dosen pembimbing yang telah banyak memberikan arahan dan pengalaman yang berharga.
5. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, terutama seluruh dosen, terima kasih atas segenap ilmu dan bimbingannya.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

6. Kedua orang tua penulis Bapak H. Moch. Mudjib dan Ibu Sri Utami yang senantiasa memberikan kasih sayang, do'a dan dorongan semangat kepada penulis selama ini.
7. Teman-teman terbaik penulis, Hawzah Sa'adati, M. Rofiq Nanang dan Azwar Riza H, dan seluruh teman-teman matematika angkatan 2008 yang berjuang bersama-sama untuk mencapai kesuksesan yang diimpikan.
8. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini baik berupa materiil maupun moril.

Semoga Allah SWT, melimpahkan rahmat dan karunia-Nya kepada kita semua. Penulis menyadari sepenuhnya bahwa di dunia ini tidak ada yang sempurna. Begitu juga dalam penulisan skripsi ini, yang tidak luput dari kekurangan dan kesalahan. Oleh karena itu, dengan segala ketulusan dan kerendahan hati, penulis sangat mengharapkan saran dan kritik yang bersifat membangun.

Akhirnya, penulis berharap semoga dengan rahmat dan izin-Nya mudah-mudahan skripsi ini bermanfaat bagi penulis dan bagi pembaca.

*Amin ya Robbal 'alamiin...*

*Wassalamu'alaikum Wr. Wb.*

Malang, 7 Februari 2012

Penulis

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

## DAFTAR ISI



CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

**BAB III PEMBAHASAN**



**BAB IV PENUTUP**



**DAFTAR PUSTAKA**

**LAMPIRAN**

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

## DAFTAR GAMBAR



CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

## DAFTAR TABEL



CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

# ABSTRAK


Hijriyah, Nurul. 2012.**Titik dan Sisi Penutup Minimal pada Graf Bintang $(\boldsymbol{m})_c\, \boldsymbol{S_n^k}$ dan Graf Roda $(\boldsymbol{m})_c \boldsymbol{W_n^k}$**. Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Wahyu Henky Irawan, M.Pd (II) Dr. Ahmad Barizi, MA

**Kata Kunci:** Titik Penutup, Sisi Penutup, Minimal, Graf Bintang, Graf Roda.

Suatu titik dan sisi dikatakan saling menutup pada graf *G* jika titik dan sisi tersebut berinsiden di *G*. Titik penutup di *G* merupakan himpunan dari titik-titik yang menutup semua sisi di *G* dan sisi penutup pada graf *G* merupakan himpunan sisi-sisi yang menutup semua titik di *G*. Himpunan titik dan sisi penutup di katakan minimal karena banyaknya anggota paling sedikit atau himpunan yang kardinalnya terkecil. Titik penutup minimal dilambangkan dengan $\alpha(G)$ dan sisi penutup minimal dilambangkan dengan $\alpha_1(G)$. Skripsi ini bertujuan untuk mengetahui rumusan umum titik dan sisi penutup minimal pada graf bintang $(m)_c\, S_n^k$ dan graf roda $(m)_c W_n^k$.

Hasil dari penelitian ini adalah titik dan sisi penutup minimal pada graf bintang $(m)_c\, S_n^k$ dan graf roda $(m)_c W_n^k$. Kemudian dirumuskan menjadi suatu lemma dan dibuktikan kebenarannya secara umum.

1. Graf bintang $(m)_c\, S_n^k$ dengan $n \in N, n \geq 3$. maka rumusan titik dan sisi penutup minimal masing-masing adalah:
   a. $\alpha(S_n) = 1$ dan $\alpha_1(S_n) = n$.
   b. $\alpha((m)_c\, S_n^1) = m$ dan $\alpha_1((m)_c\, S_n^1) = m\ x\ n$.
   c. $\alpha((m)_c\, S_n^k) := \begin{cases} m\left(\frac{1}{2}kn + 1\right); untuk\ k\ genap \\ m\left(\frac{1}{2}n(k+1) + 1\right); untuk\ \ k\ ganjil \end{cases}$

   dan $\alpha_1((m)_c\, S_n^k) := \begin{cases} m\left(n\left(\frac{1}{2}k + 1\right)\right); untuk\ k\ genap \\ m\left(\frac{1}{2}n(k+1) + 1\right); untuk\ \ k\ ganjil \end{cases}$

2. Graf roda $(m)_c W_n^k$ dengan $n \in N, n \geq 3$. maka rumusan titik dan sisi penutup minimal masing-masing adalah:
   a. $\alpha(W_n) := \begin{cases} \frac{1}{2}n + 1; untuk\ n\ genap \\ \frac{1}{2}(n+1) + 1;\ untuk\ \ n\ ganjil \end{cases}$ dan $\alpha_1(W_n) := \begin{cases} \frac{1}{2}n + 1; untuk\ n\ genap \\ \frac{1}{2}(n+1);\ untuk\ \ n\ ganjil \end{cases}$
   b. $\alpha((m)_c W_n^1) := \begin{cases} m\left(\frac{1}{2}n + 1\right); untuk\ n\ genap \\ m\left(\frac{1}{2}(n+1) + 1\right);\ untuk\ \ n\ ganjil \end{cases}$

   dan $\alpha_1((m)_c W_n^1) := \begin{cases} m\left(\frac{1}{2}n + 1\right); untuk\ n\ genap \\ m\left(\frac{1}{2}(n+1)\right);\ untuk\ \ n\ ganjil \end{cases}$
   c. $\alpha((m)_c W_n^k)\ dan\ \alpha_1((m)_c\, W_n^k) := \begin{cases} m\left(\frac{1}{2}(2kn + n + 2)\right); n\ genap, k\ genap \\ m\left(\frac{1}{2}(2kn + n + 3)\right); n\ ganjil, k\ genap \end{cases}$

   $\alpha((m)_c W_n^k) := \{m(nk+1)\ dan\ \alpha_1((m)_c\, W_n^k) := \{m(n(k+1));\ k\ ganjil\ dan\ n \in N, n \geq 3$


CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

## ABSTRACT

Hijriyah, Nurul. 2012. **Minimal Vertex and Edge Cover of Star Graph $(m)_c\, S_n^k$ and Wheel Graph $(m)_c W_n^k$.** Thesis. Mathematics department Faculty of Science And Technology the State of Islamic University Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors : (I) Wahyu Henky Irawan, M.Pd (II) Dr. Ahmad Barizi, MA

**Keywords:** Vertex Cover, Edge Cover, Minimal, Start Graph, Wheel Graph.

A vertex and edge in graph $G$ is called covering each other if they incident in $G$. Vertex cover in $G$ is the set of vertices that covering all edges in $G$. And edge cover in $G$ is the set of edges that covering all vertices in $G$. Minimal number of vertex cover is called minimal vertex cover and denoted by $\alpha(G)$, and minimal number of edge cover is called minimal edge cover and denoted by $\alpha_1(G)$. The thesis is want to determine the minimal vertex and edge cover of star graph $(m)_c\, S_n^k$ and wheel graph $(m)_c W_n^k$.

The results of this research the are minimal vertex and edge cover on a star graph and wheel graph. Further more the pattern is formulated into a lemma then the truth is generally proven.

1. Star Graph $(m)_c\, S_n^k$ with $n \in N, n \geq 3$. So formula minimal vertex and edge cover is:
   a. $\alpha(S_n) = 1$ and $\alpha_1(S_n) = n$.
   b. $\alpha((m)_c\, S_n^1) = m$ and $\alpha_1((m)_c\, S_n^1) = m \; x \; n$.
   c. $\alpha((m)_c\, S_n^k) := \begin{cases} m\left(\frac{1}{2}kn+1\right) \; ; for\ even\ k \\ m\left(\frac{1}{2}n(k+1)+1\right); \; for\ odd\ \ k \end{cases}$

      and $\alpha_1((m)_c\, S_n^k) := \begin{cases} m\left(n\left(\frac{1}{2}k+1\right)\right) \; ; for\ even\ k \\ m\left(\frac{1}{2}n(k+1)+1\right); \; for\ odd\ \ k \end{cases}$

2. Wheel Graph $(m)_c W_n^k$ with $n \in N, n \geq 3$. So formula minimal vertex and edge cover is:
   a. $\alpha(W_n) := \begin{cases} \frac{1}{2}n+1 \; ; for\ even\ n \\ \frac{1}{2}(n+1)+1 \; ; \; for\ odd\ \ n \end{cases}$ and $\alpha_1(W_n) := \begin{cases} \frac{1}{2}n+1 \; ; for\ even\ n \\ \frac{1}{2}(n+1) \; ; \; for\ odd\ \ n \end{cases}$
   b. $\alpha((m)_c W_n^1) := \begin{cases} m\left(\frac{1}{2}n+1\right) \; ; for\ even\ n \\ m\left(\frac{1}{2}(n+1)+1\right) \; ; for\ odd\ \ n \end{cases}$

      and $\alpha_1((m)_c W_n^1) := \begin{cases} m\left(\frac{1}{2}n+1\right) \; ; for\ even\ n \\ m\left(\frac{1}{2}(n+1)\right) \; ; \; for\ odd\ \ n \end{cases}$
   c. $\alpha((m)_c W_n^k)$ and $\alpha_1((m)_c\, W_n^k) := \begin{cases} m\left(\frac{1}{2}(2kn+n+2)\right); for\ even\ n, for\ even\ k \\ m\left(\frac{1}{2}(2kn+n+3)\right); for\ odd\ \ n, for\ even\ k \end{cases}$

      $\alpha((m)_c W_n^k) := \{m(nk+1)\ and\ \alpha_1((m)_c\, W_n^k) := \{m(n(k+1)); for\ odd\ k\ and\ n \in N, n \geq 3$


CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

## مخلص البحث

الهجرية, نور. ٢٠١٢. **نقطة وجانب التغطية الأدنى من رسم النجمة $(m)_c\, S_n^k$ و رسم العجلة $(m)_c\, W_n^k$ .**
بحث الجامعي. شعبة الرياضية. كلية العلوم والتكنو لوجي. جامعة مولانا مالك إبراهم الإسلامية الحكومية مالانج.
مشريف: ١. وحيو هنكي إراوان الماجستير في العلوم
٢. احمد بارزى الماجستير في الدين

**الكلمة الرئي سية:** نقطة التغطية, جانب التغطية, الأدنى, رسم النجمة ، رسم العجلة .

ويقال ان نقطة الجانب يتغاطيان في مجموعة الرسم $G$ إذا ربط ارتبطا مباشرا النقطة بين نقطة وجانب ونقطة $G$ هو مجموعة من النقاط التى تغطى جميع جوانب $G$ والغطاء الجانب فى مجموعة رسم $G$ (من دون نقاط معزولة) هو مجموعة من الجوانب التى تغطى جميع النقاط $G$ تعقيد للتعقيد. مجموعة نقطة والجانب الغطاء على الأقل كما يقول كثير من أعضاء على الأقل ، أومجموعة من أصغر الكاردينال. نقطة التغطية الأدنى الرمز مع $\alpha(G)$ و جانب التغطية الأدنى الرمز مع $\alpha_1(G)$. هذا البحث تهدف للتعريف النقطة و الجانب التغطية أدنى من رسم النجمة $(m)_c\, S_n^k$ و رسم العجلة $(m)_c\, W_n^k$

نتائج هذا البحث هو للتعريف النقطة و الجانب التغطية أدنى من رسم النجمة $(m)_c\, S_n^k$ و رسم العجلة $(m)_c\, W_n^k$. ثم وضعت في الانمطل يما وثبت أن يكون صحيح بشكل عام.

١. رسم النجمة $(m)_c\, S_n^k$ مع $n \in N, n \geq 3$ ثم رمز النقطة و الجانب التغطية أدنى هو:

أ. $\alpha(S_n) = 1$ و $\alpha_1(S_n) = n$

ب. $\alpha((m)_c\, S_n^1) = m$ و $\alpha_1((m)_c\, S_n^1) = m\ x\ n$

ت. $$\alpha((m)_c\, S_n^k) := \begin{cases} m\left(\frac{1}{2}kn + 1\right); & \text{لعداد } k \text{ زوجي} \\ m\left(\frac{1}{2}n(k+1) + 1\right); & \text{لعداد } k \text{ فردى} \end{cases}$$

ث. $$\alpha_1((m)_c\, S_n^k) := \begin{cases} m\left(n\left(\frac{1}{2}k + 1\right)\right); & \text{لعداد } k \text{ زوجي} \\ m\left(\frac{1}{2}n(k+1) + 1\right); & \text{لعداد } k \text{ فردى} \end{cases}$$

٢ . رسم العجلة $(m)_c\, W_n^k$ مع $n \in N, n \geq 3$ ثم رمز النقطة و الجانب التغطية أدنى هو:

أ. $$\alpha(W_n) := \begin{cases} \frac{1}{2}n + 1; & \text{لعداد } n \text{ زوجي} \\ \frac{1}{2}(n+1) + 1; & \text{لعداد } n \text{ فردى} \end{cases} \quad \text{و} \quad \alpha_1(W_n) := \begin{cases} \frac{1}{2}n + 1; & \text{لعداد } n \text{ زوجي} \\ \frac{1}{2}(n+1); & \text{لعداد } n \text{ فردى} \end{cases}$$

ب. $$\alpha((m)_c W_n^1) := \begin{cases} m\left(\frac{1}{2}n + 1\right); & \text{لعداد } n \text{ زوجي} \\ m\left(\frac{1}{2}(n+1) + 1\right); & \text{لعداد } n \text{ فردى} \end{cases}$$

و $$\alpha_1((m)_c W_n^1) := \begin{cases} m\left(\frac{1}{2}n + 1\right); & \text{لعداد } n \text{ زوجي} \\ m\left(\frac{1}{2}(n+1)\right); & \text{لعداد } n \text{ فردى} \end{cases}$$

ت. $$\alpha((m)_c W_n^k) \text{ و } \alpha_1((m)_c\, W_n^k) := \begin{cases} m\left(\frac{1}{2}(2kn + n + 2)\right); & \text{لعداد } n \text{ زوجي لعداد } k \text{ زوجي} \\ m\left(\frac{1}{2}(2kn + n + 3)\right); & \text{لعداد } n \text{ فردى لعداد } k \text{ زوجي} \end{cases}$$

$$\alpha((m)_c W_n^k) := \{m(nk+1) \text{ و } \alpha_1((m)_c\, W_n^k) := \{m(n(k+1)); \text{فردى } k \text{ و } n \in N, n \geq 3$$

# BAB I

# PENDAHULUAN

## 1.1 Latar Belakang

Teori graf merupakan salah satu cabang dari ilmu matematika yang masih sangat menarik untuk dibahas karena teori-teorinya masih aplikatif sampai saat ini dan dapat diterapkan untuk memecahkan masalah dalam kehidupan sehari-hari. Dengan mengkaji dan menganalisis model atau rumusan, teori graf dapat diperlihatkan peranan dan kegunaannya dalam memecahkan berbagai masalah. Permasalahan yang dirumuskan dengan teori graf dibuat sederhana, yaitu diambil aspek-aspek yang diperlukan dan dibuang aspek-aspek lainnya (Purwanto, 1998:1).

Graf telah dikembangkan sejak tahun 1960-an yang didefinisikan sebagai himpunan titik *(vertex)* yang tidak kosong dan himpunan sisi *(edge)* yang mungkin kosong. Graf itu menghubungkan pasangan dari suatu himpunan, dalam Al-Quran yang di hubungkan dengan *Hablum min An-Nas* dan *Hablum min Allah*. Jika direlevansikan dengan kajian agama sejajar dengan ayat yang menyebutkan bahwa umat manusia yang beriman itu bersaudara. Sehingga mereka harus menjalin hubungan yang baik antar sesamanya. Sebagaimana dalam surat Al-Hujurat 49:10, yaitu:

إِنَّمَا ٱلْمُؤْمِنُونَ إِخْوَةٌ فَأَصْلِحُوا۟ بَيْنَ أَخَوَيْكُمْ ۚ وَٱتَّقُوا۟ ٱللَّهَ لَعَلَّكُمْ تُرْحَمُونَ ﴿١٠﴾

Artinya:*"Orang-orang beriman itu Sesungguhnya bersaudara. sebab itu damaikanlah (perbaikilah hubungan) antara kedua saudaramu itu dan takutlah terhadap Allah, supaya kamu mendapat rahmat"*.(QS. Al-Hujurat 49:10)



CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Ayat di atas menjelaskan bahwa orang-orang mukmin itu bersaudara dalam agama Allah SWT. Apabila terjadi perselisihan di antara mereka, orang-orang mukmin lain harus mendamaikan di antara mereka, disertai ketakwaan kepada Allah SWT dengan melaksanakan perintah-Nya dan menjauhi larangan-Nya.

Hubungan antara Allah dengan manusia dapat dijelaskan bahwa secara umum seluruh alam ini ta'at dan tunduk kepada Allah SWT, sehingga berfungsi maksimal dan saling memberikan manfaat kepada bagian alam lainnya bahkan tahu cara bertasbih dan sholatnya. Secara khusus ternyata seluruh alam semesta ini juga berhijab atau memakai penutup atau pelindung agar berjalan sesuai fungsinya dan selamat dari hal-hal yang membahayakan. Contoh kecil seperti pena tanpa penutup maka tintanya akan menjadi kering, seperti rumah juga perlu adanya penutup yakni atap dan dinding.

Suatu titik dan sisi dikatakan saling menutup pada graf *G* jika titik dan sisi tersebut terkait langsung di *G*. Titik penutup di *G* merupakan himpunan dari titik-titik yang menutup semua sisi di *G* dan sisi penutup pada graf *G* (tanpa titik terisolasi) merupakan himpunan sisi-sisi yang menutup semua titik di *G* (Chartrand dan Lesniak, 1986: 243). Banyak topik-topik bahasan teori graf yang belum terpecahkan membuat para ilmuwan yang ingin menggunakan teori atau teorema tentang bahasan tersebut menjadi terhambat, karena tidak mungkin menggunakan suatu ilmu yang belum jelas kebenarannya. Hal ini dijelaskan dalam firman Allah surat Al-Isra' 17: 36, yaitu:

وَلَا تَقۡفُ مَا لَيۡسَ لَكَ بِهِۦ عِلۡمٌۚ

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Artinya:*“Dan janganlah kamu mengikuti apa yang kamu tidak mempunyai pengetahuan tentangnya”* (QS. Al-Isra’ 17: 36).

Menurut Tafsir Imam Qurthubi yaitu jangan mengikuti apa yang tidak di ketahui dan tidak penting. Jika memiliki pengetahuan, maka manusia boleh menetapkan suatu hukum berdasarkan pengetahuannya itu. Menurut Tafsir Ibnu Katsir adalah Allah SWT melarang mengatakan sesuatu tanpa pengetahuan, bahkan melarang pula mengatakan sesuatu berdasarkan *zan* (dugaan) yang bersumber dari sangkaan dan ilusi. Disinilah akan dibuktikan suatu pengetahuan yang belum diketahui, sehingga akan dapat digunakan kebenarannya. Hikmah dari ayat ini adalah memberikan batasan-batasan hukum, karena banyak kerusakan yang disebabkan oleh perkataan yang tanpa dasar. Maka janganlah kamu mengikuti perkataan dan perbuatan yang tidak diketahui ilmunya (Qurtubhi, 2009: 29).

Hal yang menarik untuk dikaji adalah mengenai titik dan sisi penutup minimal pada graf bintang dan graf roda. Sejauh ini penelitian tentang ini masih jarang dilakukan. Tidak banyak teori yang mengkaji masalah titik dan sisi penutup pada graf terhubung sehingga hal ini membuka peluang bagi matematikawan dan pemerhati matematika untuk melakukan riset-riset dalam membangun teori-teori khususnya tentang titik dan sisi penutup dari graf bintang dan graf roda. Oleh karena itu penulis tertarik untuk melanjutkan meneliti tentang titik dan sisi penutup minimal pada suatu graf. Penulis merumuskan judul untuk skripsi ini yakni **“Titik dan Sisi Penutup Minimal pada Graf Bintang $(m)_c\, S_n^k$ dan Graf Roda $(m)_c\, W_n^k$”.**

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah yang telah dipaparkan di atas maka masalah yang dapat dirumuskan adalah bagaimana rumus umum titik dan sisi penutup minimal pada graf bintang $(m)_c\, S_n^k$ dan graf roda $(m)_c W_n^k$?

## 1.3 Tujuan

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan penulisan skripsi ini adalah untuk mengetahui rumus umum titik dan sisi penutup minimal pada graf bintang $(m)_c\, S_n^k$ dan graf roda $(m)_c W_n^k$.

## 1.4 Definisi Operasional

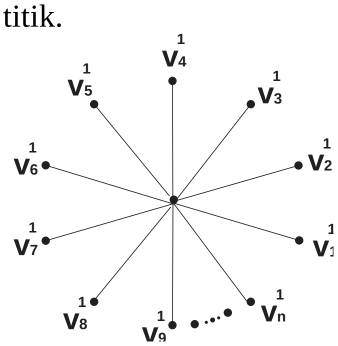
Dalam penelitian ini penulis mendefinisikan untuk beberapa istilah yang digunakan agar tidak terjadi penafsiran ganda terhadap istilah-istilah tersebut yaitu, $S_n$ adalah graf bintang dengan $n$ titik, selanjutnya $S_n$ ditulis sebagai $S_n^1$, $(m)_c\, S_n^1$ diperoleh dari $S_n^1$ sebanyak $m$ kali dengan $v_0^i\ v_0^{i+1}$ sisi di $(m)_c\, S_n^1$ , $S_n^k$ adalah setiap anting graf bintang $S_n$ yang diberi $k$ titik, sehingga $(m)_c\, S_n^k$ diperoleh dari $S_n^k$ sebanyak $m$ kali dengan $v_0^i\ v_0^{i+1}$ sisi di $(m)_c\, S_n^k$.

$V((1)_c\, S_n^1) = \{v_0^1, v_1^1, \dots, v_n^1\}$

$V((2)_c\, S_n^1) = \{v_0^1, v_1^1, \dots, v_n^1\} \cup \{v_0^2, v_1^2, \dots, v_n^2\}$

$V((m-1)_c S_n^1) \cup \{v_0^m, v_1^m, \dots, v_n^m\}$

$S_n$ : graf bintang dengan $n$ titik.

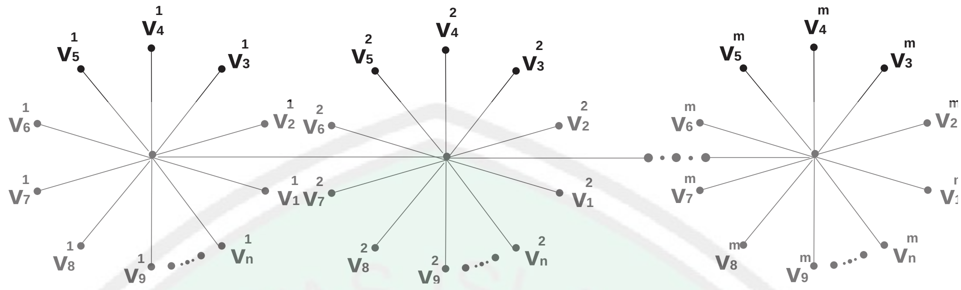



Gambar 1.1 Graf Bintang $S_n$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

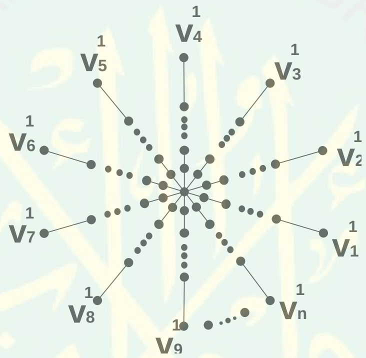
Selanjutnya $S_n$ ditulis sebagai $S_n^1$ sehingga,

$(m)_c\ S_n^1$: graf bintang $S_n^1$ sebanyak $m$ kali dan $v_0^i\ v_0^{i+1}$ sisi di$(m)_c\ S_n^1$.



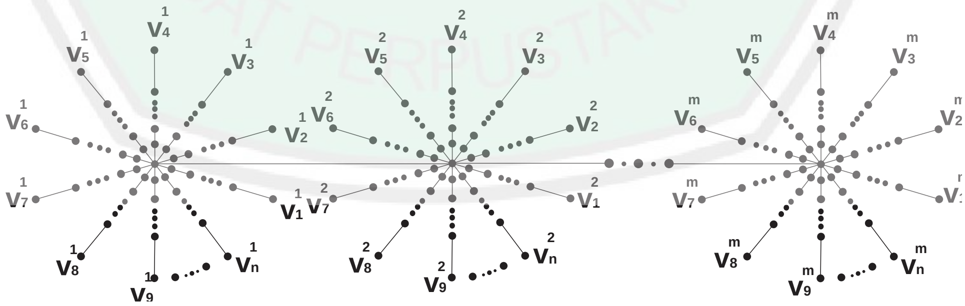
Gambar 1.2 Graf Bintang $(\boldsymbol{m})_{\boldsymbol{c}}\ \boldsymbol{S_n^1}$

$S_n^k$: setiap anting graf bintang $S_n$ yang diberi $k$ titik.



Gambar 1.3 Graf Bintang $\boldsymbol{S_n^k}$

$(m)_c\ S_n^k$: graf bintang $S_n$ sebanyak $m$ kali yang setiap anting graf bintang $S_n$ yang memiliki $k$ titik dan $v_0^i\ v_0^{i+1}$ sisi di$(m)_c\ S_n^k$.



Gambar 1.4 Graf Bintang $(\boldsymbol{m})_{\boldsymbol{c}}\ \boldsymbol{S_n^k}$

Selanjutnya $W_n$ adalah graf roda dengan $n$ titik, selanjutnya $W_n$ ditulis sebagai $W_n^1$, $(m)_c\ W_n^1$ diperoleh dari $W_n^1$ sebanyak $m$ kali dengan $v_0^i\ v_0^{i+1}$ sisi di

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

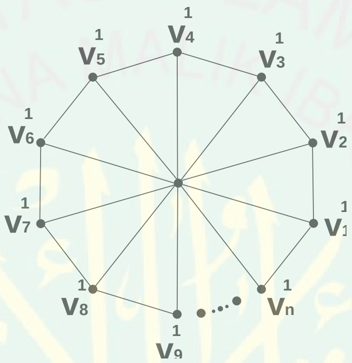
$(m)_c\, W_n^1$ ,$W_n^k$ adalah setiap sisi graf roda $W_n$ yang diberi $k$ titik, sehingga $(m)_c\, W_n^k$ diperoleh dari $W_n^k$ sebanyak $m$ kali dengan $v_0^i\, v_0^{i+1}$ sisi di $(m)_c\, W_n^k$.

$V((1)_c\, W_n^1)) = \{v_0^1, v_1^1, \dots, v_n^1\}$

$V((2)_c\, W_n^1) = \{v_0^1, v_1^1, \dots, v_n^1\} \cup \{v_0^2, v_1^2, \dots, v_n^2\}$

$V((m-1)_c S_n^1) \cup \{v_0^m, v_1^m, \dots, v_n^m\}$

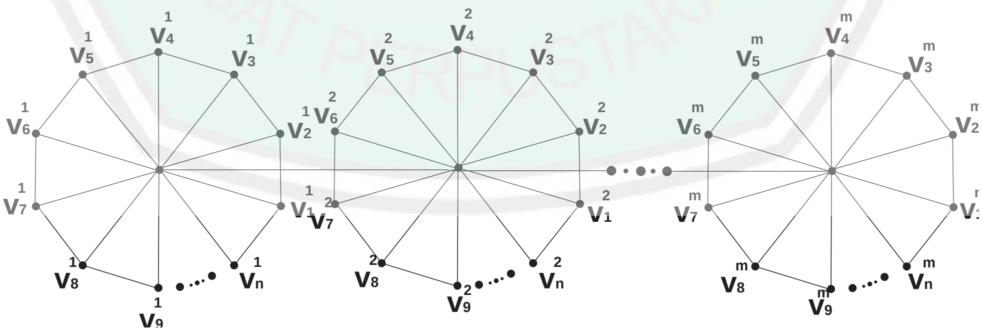
$W_n$ : graf roda dengan $n$ titik




Gambar 1.5 Graf Roda $\boldsymbol{W_n}$

Selanjutnya $W_n$ ditulis sebagai $W_n^1$:

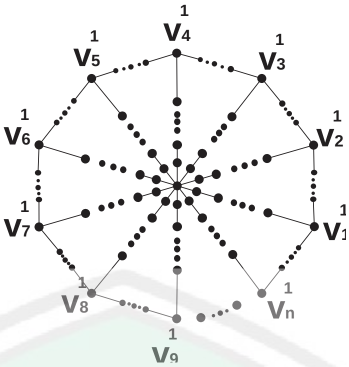
$(m)_c\, W_n^1$: graf roda $W_n^1$ sebanyak $m$ kali dan $v_0^i\, v_0^{i+1}$ sisi di $(m)_c\, W_n^1$.




Gambar 1.6 Graf Roda $(\boldsymbol{m})_c\, \boldsymbol{W_n^1}$

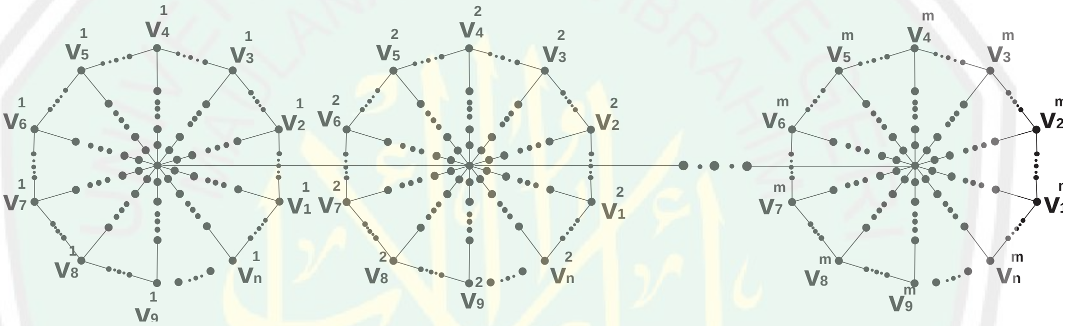
$W_n^k$ : setiap sisi yang ada pada graf roda $W_n$ diberi $k$ titik.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG




Gambar 1.7 Graf Roda $\boldsymbol{W_n^k}$

$(m)_c\, W_n^k$: graf roda $W_n^k$ sebanyak $m$ kali dan $v_0^i\ v_0^{i+1}$ sisi di$(m)_c\, W_n^k$.



Gambar 1.8 Graf Roda $(\boldsymbol{m})_c\, \boldsymbol{W_n^k}$

## 1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari skripsi ini adalah:

1. Bagi Pengembangan Ilmu Pengetahuan

Skripsi ini diharapkan memberikan wacana terhadap pengembangan khasanah keilmuan bidang ilmu matematika tentang graf, khususnya pada topik titik dan sisi penutup minimal pada graf bintang $(m)_c\, S_n^k$ dan graf roda $(m)_c\, W_n^k$.

2. Bagi Penulis

Skripsi ini diharapkan dapat memberikan pemahaman sebagai wawasan baru secara menyeluruh.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

3. Bagi Lembaga UIN Maliki Malang,

Sebagai bahan kepustakaan yang dijadikan sarana pengembangan wawasan keilmuan khususnya di jurusan matematika untuk mata kuliah teori graf.

## 1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode penelitian kepustakaan *(library research)* atau kajian pustaka, yakni melakukan penelitian untuk memperoleh data-data dan informasi-informasi serta objek yang digunakan dalam pembahasan masalah tersebut. Studi kepustakaan merupakan penampilan argumentasi penalaran keilmuan untuk memaparkan hasil olah pikir mengenai suatu permasalahan atau topik kajian kepustakaan yang dibahas dalam penelitian ini.

Adapun langkah-langkah yang digunakan oleh peneliti dalam membahas penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Merumuskan masalah
2. Melakukan penyusunan rencana.
3. Mengumpulkan data

Mengumpulkan data dari literatur yang mendukung baik yang bersumber dari buku, jurnal, artikel, skripsi, maupun sumber lainnya yang berhubungan dengan permasalahan yang dikaji. Data pendukungnya adalah:

a. Definisi tentang graf.

b. Sifat-sifat graf yaitu terhubung langsung (*Adjacent*) dan terkait langsung (*Incident*).

c. Sifat-sifat graf yaitu terhubung dan tidak terhubung pada suatu graf.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

d. Jenis-jenis graf yaitu graf bintang dan graf roda.

e. Definisi penutup pada graf.

Data utamanya adalah:

a. Menggambar graf bintang dimulai dari $S_3$ sampai dengan $S_{10}$.

b. Menentukan titik penutup pada graf bintang dimulai dari $S_3$ sampai dengan $S_{10}$.

c. Menentukan sisi penutup pada graf bintang dimulai dari $S_3$ sampai dengan $S_{10}$.

d. Menggambar graf roda dimulai dari $W_3$ sampai dengan $W_{10}$.

e. Menentukan titik penutup pada graf roda dimulai dari $W_3$ sampai dengan $W_{10}$.

f. Menentukan sisi penutup pada graf bintang dimulai dari $W_3$ sampai dengan $W_{10}$.

4. Membuat kesimpulan
5. Melaporkan hasil dari kajian.

## 1.7 Sistematika Penulisan

Agar penulisan skripsi ini lebih terarah, mudah ditelaah dan dipahami, maka digunakan sistematika penulisan yang terdiri dari empat bab. Masing-masing bab dibagi ke dalam beberapa sub bab dengan rumusan sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN

Pendahuluan meliputi: latar belakang permasalahan, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB II KAJIAN PUSTAKA

Bagian ini terdiri atas konsep-konsep (teori-teori) yang mendukung bagian pembahasan. Konsep-konsep tersebut antara lain membahas tentang definisi tentang graf, sifat-sifat graf yaitu terhubung langsung (*adjacent*) dan terkait langsung (*incident*), sifat-sifat graf yaitu terhubung dan tidak terhubung pada suatu graf, jenis-jenis graf yaitu graf bintang dan graf roda, definisi tentang titik dan sisi penutup pada suatu graf terhubung, lemma graf lintasan dan sikel serta kajian agama.

BAB III PEMBAHASAN

Menggambar graf bintang dimulai dari $S_3$ sampai dengan $S_{10}$ dan menggambar graf roda dimulai dari $W_3$ sampai dengan $W_{10}$. Menentukan himpunan titik dan sisi penutup minimal pada graf bintang dan graf roda. Menentukan pola dari titik dan sisi penutup minimal pada graf bintang dan graf roda. Pola tersebut kemudian dirumuskan sebagai lemma dan dibuktikan lemma tersebut benar secara umum. Kemudian mengembangkan graf bintang $S_n$ menjadi $(m)_c\, S_n^k$dan mengembangkan graf roda $W_n$ menjadi $(m)_c\, W_n^k$. Menentukan himpunan titik dan sisi penutup minimal pada graf bintang dan graf roda. Menentukan pola dari titik dan sisi penutup minimal pada graf bintang dan graf roda. Pola tersebut kemudian dirumuskan sebagai lemma dan dibuktikan lemma tersebut benar secara umum (berlaku untuk setiap $n \in N; n \geq 3$).

BAB IV PENUTUP

Berisi tentang kesimpulan dari hasil penelitian dan saran sebagai acuan bagi peneliti selanjutnya.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

# BAB II

# KAJIAN PUSTAKA

## 2.1 *Covering* dalam Al-Qur’an

Dalam Al-Qur’an kata “penutup” itu diartikan sebagai “*Hijab dan Himar*” yang memiliki arti sebagai penutup (aurat) baik laki-laki maupun perempuan dan penutup kepala. Memakai *hijab* yang benar akan mendatangkan kebaikan. Dalam kajian matematika khususnya dalam teori graf ada juga kata penutup yaitu penutup *(covering)* yang di dalam Al-Qur’an Allah SWT berfirman dalam surat al-Ahzab/33 ayat 53:

وَإِذَا سَأَلْتُمُوهُنَّ مَتَٰعًا فَسْـَٔلُوهُنَّ مِن وَرَآءِ حِجَابٍ ۚ ذَٰلِكُمْ أَطْهَرُ لِقُلُوبِكُمْ وَقُلُوبِهِنَّ ۚ وَمَا كَانَ لَكُمْ أَن تُؤْذُوا۟ رَسُولَ ٱللَّهِ وَلَآ أَن تَنكِحُوٓا۟ أَزْوَٰجَهُۥ مِنۢ بَعْدِهِۦٓ أَبَدًا ۚ إِنَّ ذَٰلِكُمْ كَانَ عِندَ ٱللَّهِ عَظِيمًا ﴿٥٣﴾

Artinya: *“Apabila kamu meminta sesuatu (keperluan) kepada mereka (isteri-isteri Nabi), maka mintalah dari belakang tabir. cara yang demikian itu lebih suci bagi hatimu dan hati mereka. dan tidak boleh kamu menyakiti (hati) Rasulullah dan tidak (pula) mengawini isteri- isterinya selama-lamanya sesudah ia wafat. Sesungguhnya perbuatan itu adalah amat besar (dosanya) di sisi Allah”.* (QS. al-Ahzab/33:53)

Ini adalah ayat *hijab* yang di dalamnya mengandung beberapa hukum dan beberapa adat *syar’i*, di mana sebab turunnya adalah menyetujui perkataan ‘Umar ra. Dan berkata: ‘Ya Rasulullah, sesungguhnya orang yang baik dan orang yang



CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

buruk, terkadang masuk kepada isteri-isterimu, maka kiranya engkau memberikan mereka *hijab*, lalu Allah menurunkan ayat hijab.

Perkara *hijab* yang di perintahkan dan syari'atkan kepada kalian ini adalah lebih suci dan lebih baik. Firman Allah Ta'ala: "*Dan tidak boleh kamu menyakiti (hati) Rasulullah dan tidak (pula) mengawini isteri-isterinya selama-lamanya sesudah ia wafat. Sesungguhnya perbuatan itu adalah amat besar (dosanya) di sisi Allah.*"

Beberapa mufassir mengartikan kata *"hijab*" dalam ayat di atas adalah sebuah penutup, itu bermakna sebagai penutup kepala kepada setiap perempuan karena sesungguhnya merupakan dosa besar jika membukanya karena rambut (kepala) merupakan aurat dari perempuan. Kemudian Allah Ta'ala berfirman: "*Jika kamu melahirkan sesuatu atau menyembunyikannya, maka sesungguhnya Allah adalah maha mengetahui segala sesuatu*". Bagaimanapun yang disembunyikan oleh hati-hati kalian dan dipendam oleh rahasia-rahasia kalian, sesungguhnya Allah mengetahuinya karena tidak satu pun yang tersembunyi dari-Nya.*"Allah mengetahui (pandangan) mata yang khianat dan apa yang disembunyikan oleh hati"* (QS. Al-mu'minun:19) (Abdurrahman, 2007:515-518).

Ada juga ayat lain yang menjelaskan tentang konsep khimar (penutup/jilbab), sebagaimana firman Allah dalam Surat Al-Ahzab/33 ayat 59:

يَٰٓأَيُّهَا ٱلنَّبِيُّ قُل لِّأَزۡوَٰجِكَ وَبَنَاتِكَ وَنِسَآءِ ٱلۡمُؤۡمِنِينَ يُدۡنِينَ عَلَيۡهِنَّ مِن جَلَٰبِيبِهِنَّۚ ذَٰلِكَ أَدۡنَىٰٓ أَن يُعۡرَفۡنَ فَلَا يُؤۡذَيۡنَۗ وَكَانَ ٱللَّهُ غَفُورٗا رَّحِيمٗا ﴿٥٩﴾

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Artinya: *"Hai Nabi, Katakanlah kepada isteri-isterimu, anak-anak perempuanmu dan isteri-isteri orang mukmin: "Hendaklah mereka mengulurkan jilbabnya ke seluruh tubuh mereka". yang demikian itu supaya mereka lebih mudah untuk dikenal, karena itu mereka tidak di ganggu. dan Allah adalah Maha Pengampun lagi Maha Penyayang".* (QS. Al-Ahzab 33:59)

*Al-Jalabib:* Jamak dari Jilbab, yaitu baju kurung yang meliputi seluruh tubuh wanita, lebih dari sekedar baju biasa dan kerudung. *Yudnina:* mengulurkan dan menguraikan, kepada wanita yang tersingkap dari wajahnya. *Adna*: Lebih dekat. *Yu'rafna*: Dikenal sehingga terhindar dari gangguan. Allah SWT menyuruh Nabi SAW agar memerintahkan wanita-wanita muslimat, khususnya para istri dan anak-anak perempuan beliau supaya mengulurkan pada tubuh mereka jilbab-jilbab apabila mereka keluar dari rumah mereka, supaya dapat dibedakan dari wanita-wanita budak.

Allah Ta'ala berfirman memerintahkan Rosulullah SAW untuk memerintahkan wanita *khususnya istri-istri dan anak-anak perempuan beliau karena kemuliaan mereka* untuk mengulurkan jilbab mereka, agar mereka berbeda dengan wanita Jahiliyyah dan ciri-ciri wanita budak. Jilbab adalah *ar-rida'* (kain penutup) di atas kerudung. Itulah yang dikatakan oleh para mufassir. Jilbab sama dengan *izar* (kain) saat ini. Al-Jauhari berkata: "Jilbab adalah pakaian yang menutupi seluruh tubuh"( Abdurrahman, 2007:536-537).

Menurut Maraghi (1992: 62), Tuhanmu adalah Maha Pengampun terhadap apa yang bisa terjadi akibat lalai menutupi aurat, juga banyak rahmat-Nya bagi orang yang mematuhi perintah-Nya dalam bersikap kepada kaum wanita, sehingga Allah memberinya pahala yang besar dan membalasinya dengan balasan yang paling sempurna. Disempurnakan lagi dalam Surat An-Nur/24 ayat 31,

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Alquran juga datang dengan kata lain selain kata jilbab dalam mengutarakan penutup kepala sebagaimana yang termaktub dibawah ini:

وَقُل لِّلْمُؤْمِنَٰتِ يَغْضُضْنَ مِنْ أَبْصَٰرِهِنَّ وَيَحْفَظْنَ فُرُوجَهُنَّ وَلَا يُبْدِينَ زِينَتَهُنَّ

إِلَّا مَا ظَهَرَ مِنْهَا ۖ وَلْيَضْرِبْنَ بِخُمُرِهِنَّ عَلَىٰ جُيُوبِهِنَّ ۖ ..... ﴿٣١﴾

Artinya:*“Katakanlah kepada wanita yang beriman: "Hendaklah mereka menahan pandangannya, dan kemaluannya, dan janganlah mereka Menampakkan perhiasannya, kecuali yang (biasa) nampak dari padanya. dan hendaklah mereka menutupkan kain kudung kedadanya”.* (QS. An-Nur 24:31)

الخمر jamak dari خمار yaitu kain yang menutupi kepala wanita (kudung). الجيوب jamak dari جيب yaitu bagian atas baju yang terbuka yang dari situ tampak sebagian tubuh (Maraghi, 1992:175).

Setelah melarang menampakkan perhiasan, selanjutnya Allah memberi petunjuk agar menyembunyikan sebagian anggota tubuh tempat perhiasan itu. Hendaklah mereka mengulurkan kudungnya ke dada bagian atas di bawah leher, agar dengan demikian mereka dapat menutupi rambut, leher dan dadanya, sehingga tidak sedikitpun dari padanya yang terlihat.

Menurut Maraghi (1992:180), sering wanita menutupkan sebagian kudungnya ke kepala dan sebagian lainnya diulurkannya ke punggung, sehingga tampak pangkal leher dan sebagian dadanya, seperti telah menjadi adat orang Jahiliyyah. Maka mereka dilarang berbuat demikian. ‘Aisyah r.a berkata, “Semoga Allah mengasihi kaum Muhajirin yang pertama, karena ketika Allah

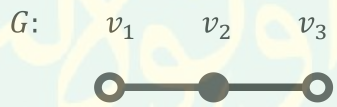
CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

menurunkan ayat: *walyadribna bikhumurihinna ‘ala juyubihinna* , mereka segera mengambil pakaian bulu mereka lalu berkudung dengannya”.

Berkaitan dengan firman Allah Ta’ala: *“Dan hendaklah mereka menutupkan,”* Sa’id bin Jubair berkata: “Yakni mengikatnya.”Firman Allah Ta’ala: *“Kain kudung ke dada mereka.”* Yakni ke leher dan dada hingga tidak terlihat sedikit pun (Abdurrahman, 2007:45-46).

Dalam surat di atas jika dipandang dalam segi matematika yang dimaksud sebagai *hijab/khimar* adalah suatu *covering*. *Covering* pada suatu graf menjadi bukti bahwa dengan mengamati petunjuk Allah, yang berupa penutup *(hijab)*.

Terkait dengan kejadian di atas, maka kasus tersebut dapat direpresentasikan *covering* pada suatu graf yang terdapat suatu penutup:




Gambar 2.1 Representasi Penutup

Gambar 2.1 merupakan salah satu contoh penutup, Allah memberikan sesuatu sesuai dengan fungsinya, seperti pena tanpa adanya penutup juga tintanya akan kering, dan seperti rumah yang membutuhkan penutup dinding dan atap. Titik $v_2$ ibarat aurat jika $v_2$ ditutup maka akan aman dan terhindar dari mara bahaya yang ada di luar. Jika dikaitkan dalam matematika ada titik penutup dan sisi penutup, begitu sangat penting dan dianjurkan oleh Allah bagi semua perempuan Islam supaya bisa menjadi pelindung bagi dirinya sendiri.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

## 2.2 Graf

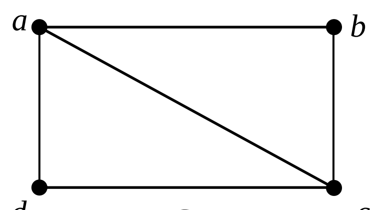
Graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang sudah banyak aplikasinya dalam kehidupan sehari-hari, akan tetapi dalam teori graf masih banyak sekali kajian di dalamnya. Graf $G$ terdiri atas himpunan yang tidak kosong dari elemen-elemen yang disebut titik *(vertex)* dalam penulisan ini disimbolkan dengan $V(G)$, sedangkan himpunan sisi *(edge)* disimbolkan dengan $E(G)$dan seterusnya menggunakan istilah titik dan sisi. Secara sistematis graf didefinisikan sebagai berikut:

**Definisi 1. Graf *G*** (Chartrand dan Lesniak, 1986:4)

Graf $G$ adalah pasangan himpunan $(V, E)$ dengan $V$ adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut sebagai titik dan $E$ adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di $V$ yang disebut sebagai sisi.

Himpunan titik di $G$ dinotasikan dengan $V(G)$ dari himpunan sisi dinotasikan dengan $E(G)$. Sedangkan banyaknya unsur di $V$ disebut *order* dari $G$ dan dilambangkan dengan $p(G)$ dan banyaknya unsur di $E$ disebut *size* dari $G$ dan dilambangkan dengan $q(G)$. Jika graf yang dibicarakan hanya graf $G$, maka *order* dan *size* dari $G$ tersebut cukup ditulis dengan $G(p,q)$.

**Contoh 1**




G

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Gambar 2.2 Graf Terhubung $\boldsymbol{G(4,5)}$

Graf $G$ pada Gambar 2.1 mempunyai order 4 dan mempunyai 5 sisi, dapat dinyatakan sebagai $G = (V(G), E(G))$dengan $V(G) = \{a, b, c, d\}$dan $E(G) = \{ab, ad, ac, bc, cd\}$atau ditulis dengan $V(G) = \{a, b, c, d\}$dan$E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ untuk $e_1 = (a, b)$, $e_2 = (a, c)$, $e_3 = (b, d)$, $e_4 = (c, d)$, $e_5 = (d, e)$.

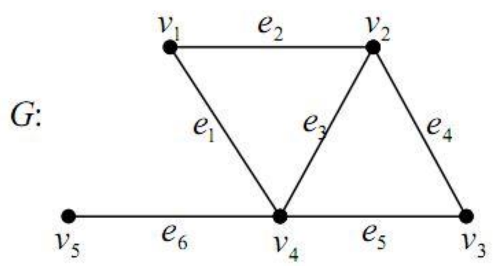
### 2.2.1 *Adjacent* dan *Incident*

**Definisi 2. *Adjacent* dan *Incident*** (Chartrand dan Lesniak, 1986:4)

Sisi $e = \{u, v\}$ dikatakan menghubungkan titik $u$ dan $v$. Jika $e = \{u, v\}$ adalah sisi pada graf $G$, maka $u$ dan $v$ adalah titik yang terhubung langsung (*adjacent*), sementara itu $u$ dan $e$ sama halnya dengan $v$ dan $e$ disebut terkait langsung (*incident*). Lebih jauh, jika $e_1$ dan $e_2$ berbeda pada $G$ terkait langsung (*incident*) dengan sebuah titik bersama, maka $e_1$ dan $e_2$ disebut sisi adjacent.

**Contoh 2**

Misal $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ maka $G$ dapat digambarkan dalam gambar 2.3 berikut:




Gambar 2.3 Titik dan Sisi yang *Adjacent* dan *Incident*

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Pada gambar 2.3, order dari $G$ adalah 5, atau dapat ditulis $p(G) = 5$, sedangkan ukuran dari $G$ adalah 6 atau dapat ditulis $q(G) = 6$. Pada gambar 2.3 titik yang terhubung langsung di graf $G$ adalah titik $v_1$ dan $v_2$, $v_1$ dan $v_4$, $v_2$ dan $v_3$, $v_2$ dan $v_4$, $v_3$ dan $v_4$, serta $v_4$ dan $v_5$. Maka dapat dikatakan bahwa titik $v_1$ *adjacent* dengan titik $v_2$, $v_1$ *adjacent* dengan titik $v_4$, $v_2$ *adjacent* dengan titik $v_3$, $v_2$ *adjacent* dengan titik $v_4$, dan $v_4$ *adjacent* dengan titik $v_5$. Titik $v_1$ dan $v_5$, titik $v_2$ dan $v_5$, serta titik $v_3$ dan $v_5$ tidak *adjacent* karena tidak terdapat sisi di antara kedua titik tersebut. Sedangkan titik yang *incident* adalah pada sisi $e_1$ yang *incident* dengan $v_1$ dan $v_4$, pada sisi $e_2$ yang *incident* dengan $v_1$ dan $v_2$, pada sisi $e_3$ yang *incident* dengan $v_2$ dan $v_4$, pada sisi $e_4$ yang *incident* dengan $v_2$ dan $v_3$, pada sisi $e_5$ yang *incident* dengan $v_3$ dan $v_4$, pada sisi $e_6$ yang *incident* dengan $v_4$ dan $v_5$. Sisi $e_1$ dan $e_3$ disebut *adjacent* sedangkan $e_4$ dan $e_6$ tidak *adjacent*.

### 2.2.2 Graf Terhubung dan Tak Terhubung

**Definisi 3. Jalan** (Chartrand dan Lesniak, 1986:26)

Misalkan $u$ dan $v$ (yang tidak harus berbeda) adalah titik pada graf $G$. Jalan $u$-$v$ pada graf $G$ adalah barisan berhingga yang berselang-seling,

$$u = u_0, e_1, u_1, e_2, \dots, u_{k-1}, e_k, u_k = v$$

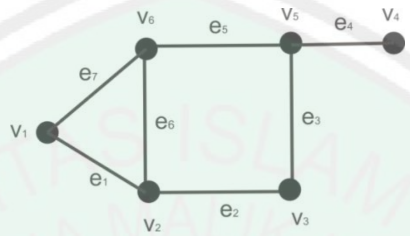
antara titik dan sisi, yang dimulai dari titik $u$ dan diakhiri di titik $v$, dengan $e_i = u_{i-1}u_i$ untuk $i = 1, 2, \dots, k$.

**Definisi 4. Trail** (Chartrand dan Lesniak, 1986:26)

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Jalan $u$-$v$ yang tidak mengulang sisi atau semua sisinya berbeda disebut *trail* $u$-$v$.

**Contoh 3**




Gambar 2.4 Graf Terhubung Sederhana

Pada gambar 2.4, jalan $v_5, e_3, v_3, e_2, v_2, e_6, v_6, e_5, v_5, e_4, v_4$ adalah contoh *trail*.

**Definisi 5. Lintasan** (Chartrand dan Lesniak, 1986: 26)

Jalan $u$-$v$ yang semua titiknya berbeda disebut *path* (lintasan) $u$-$v$. Dengan demikian, semua lintasan adalah *trail*. Contoh pada gambar 2.4 yaitu jalan $v_3, e_2, v_2, e_1, v_1, e_7, v_6, e_5, v_5, e_4, v_4$ adalah lintasan.

**Definisi 6. Sirkuit** (Chartrand dan Lesniak, 1986:28)

*Trail* tertutup (*closed trail*) dan tak *trivial* pada graf $G$ disebut *sirkuit* $G$. Contoh pada gambar 2.4 yaitu jalan $v_5, e_5, v_6, e_7, v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_5$ adalah *sirkuit*.

**Definisi 7. Sikel** (Chartrand dan Lesniak, 1986:28)

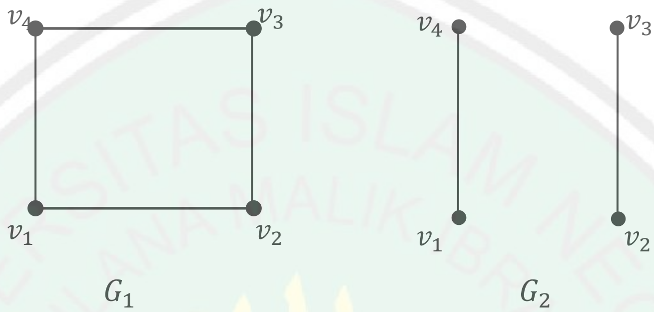
Sirkuit $v_1, v_2, .., v_n, v_1 (n \geq 3)$ memiliki $n$ titik dengan $v_i$ adalah titik-titik berbeda untuk $1 \leq i \leq n$ disebut sikel (*Cycle*). Contoh pada gambar 2.4 yaitu jalan $v_5, e_5, v_6, e_6, v_2, e_2, v_3, e_3, v_5$ adalah contoh sikel.

**Definisi 8. Keterhubungan** (Chartrand dan Lesniak, 1986:28)

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Pasangan titik $u$ dan $v$ dapat dikatakan terhubung (*connected*), jika terdapat lintasan $u$-$v$ di $G$. Suatu graf $G$ dapat dikatakan terhubung (*connected*) jika untuk setiap titik $u$ dan $v$ di $G$ terhubung.

**Contoh 4**




Gambar 2.5 $\boldsymbol{G_1}$ Terhubung, $\boldsymbol{G_2}$ Tidak Terhubung

Dari gambar di atas $G_1$ terhubung, $G_2$ tidak terhubung.

### 2.2.3 Operasi pada Graf

Terdapat beberapa cara untuk menghasilkan graf baru dari graf-graf lainnya. Pada bagian ini akan disajikan beberapa operasi biner pada graf. Pada definisi-definisi berikut, diasumsikan bahwa $G_1$ dan $G_2$ adalah graf dengan himpunan titik yang saling lepas (*disjoint*).

**Definisi 9. Gabungan (*union*)** (Abdussakir, 2009:33)

Gabungan (*union*) dari $G_1$ dan $G_2$, ditulis $G = G_1 \cup G_2$, adalah graf dengan $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2)$. Jika graf $G$ merupakan gabungan dari sebanyak $n$ graf $H$, $n \geq 2$, maka ditulis $G = nH$.

**Definisi 10. Penjumlahan (*join*)** (Abdussakir, 2009:33)

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Penjumlahan (*join*) dari $G_1$ dan $G_2$, ditulis $G = G_1 + G_2$, adalah graf dengan $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ dan $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{uv|u \in V(G_1) \text{ dan } v \in V(G_2)\}$.

## 2.3 Jenis-jenis Graf

### 2.3.1 Graf Bintang *(Star Graph)*

Graf $G$ dikatakan komplit jika setiap dua titik yang berbeda saling terhubung langsung (*adjacent*). Graf komplit dengan order $n$ dinyatakan dengan $K_n$. Dengan demikian, maka graf $K_n$ merupakan graf beraturan-$(n-1)$ dengan order $p = n$ dan ukuran $q = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$.

Graf $G$ dikatakan *bipartisi* jika himpunan tititk pada $G$ dapat dipartisi menjadi dua himpunan tak kosong $V_1$ dan $V_2$ sehingga masing-masing sisi pada graf $G$ tersebut menghubungkan satu titik di $V_1$ dengan satu titik di $V_2$. Jika $G$ adalah graf bipartisi beraturan-$r$, dengan $r \geq 1$, maka $|V_1| = |V_1|$. Graf $G$ dikatakan partisi-$n$ jika himpunan titiknya dapat dipartisi menjadi sebanyak $n$ himpunan tak kosong $V_1$, $V_2$, ..., $V_n$, sehingga masing-masing sisi pada graf $G$ menghubungkan titik pada $V_i$ dengan titik pada $V_j$, untuk $i \neq j$. Jika $n = 3$, graf partisi-$n$ disebut graf tripartisi.

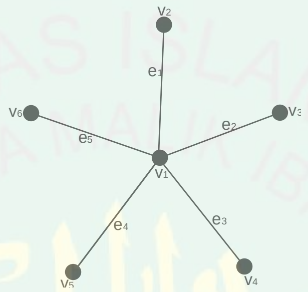
Suatu graf $G$ disebut bipartisi komplit jika $G$ adalah graf bipartisi dan masing-masing titik pada suatu partisi terhubung langsung dengan semua titik pada partisi yang lain. Graf bipartisi komplit dengan $m$ titik pada salah satu partisi dan $n$ titik pada partisi yang lain ditulis $K_{m,n}$.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

**Definisi 11. Graf Bintang** (Abdussakir, 2009:21-22)

Graf bipartisi komplit $K_{1,n}$ disebut graf bintang (*star*) dan dinotasikan dengan $S_n$. Jadi, $S_n$ mempunyai order $(n+1)$ dan ukuran $n$. Pada gambar berikut ini, graf $G$ adalah graf bintang $K_{1,5}$ atau $S_5$:

**Contoh 5**



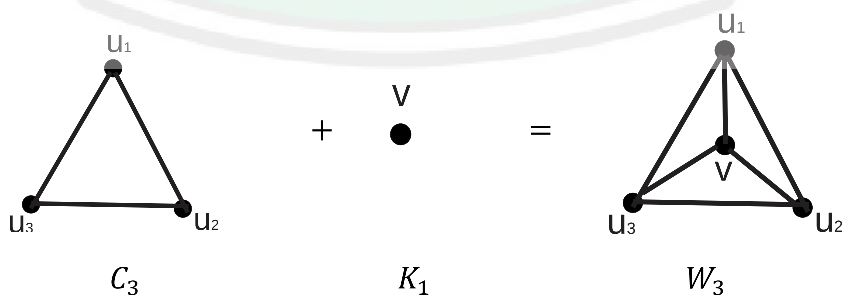

Gambar 2.6 Graf Bintang $S_5$

### 2.3.2 Graf Roda *(Wheel Graph)*

**Definisi 12. Graf Roda** (Chartrand dan Lesniak, 1996:8)

Graf roda $(W_n)$ adalah graf yang memuat satu sikel yang setiap titik pada sikel terhubung langsung dengan titik pusat. Graf roda $W_n$ diperoleh dengan operasi penjumlahan graf sikel $C_n$ dengan graf komplit $K_1$. Jadi, $W_n = C_n + K_1, n > 2$.

**Contoh 6**




Gambar 2.7 Graf Roda-3

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Berdasarkan gambar 2.7 maka $C_3 + K_1 = W_3$ dari $V(G) = V(C_3) \cup V(K_1)$ dan $E(G) = E(C_3) \cup E(K_1) \cup \{uv | u \in V(C_3), v \in V(K_1)\}$.

## 2.4 Penutup pada Graf

### 2.4.1 Titik Penutup

**Definisi 10. Titik Penutup** (Bondy dan Murty, 2008:420)

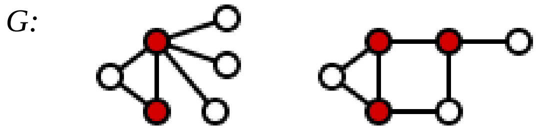
Titik penutup dari graf $G$ adalah $A \subseteq V(G)$ sedemikian sehingga semua titik di $A$ menutup semua sisi di $G$, artinya setiap sisi dari $G$ adalah terhubung langsung untuk setidaknya salah satu di titik $A$. Gambar berikut menunjukkan contoh titik penutup dari masing-masing dua graf (Himpunan $A$ ditandai dengan merah).

**Contoh 7**


Gambar 2.8 Titik Penutup dari $G_1$ dan $G_2$ (warna merah)

Titik penutup minimal dari graf $G$ dinotasikan $\alpha(G)$ adalah bilangan kardinal terkecil dari himpunan titik penutup yang paling sedikit. Untuk lebih jelasnya diberikan contoh di bawah ini:

**Contoh 8**




CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$G_1$ $G_2$

Gambar 2.9 $\boldsymbol{\alpha(G_1) = 2}$ dan $\boldsymbol{\alpha(G_2) = 3}$

### 2.4.2 Sisi Penutup

**Definisi 11. Sisi Penutup** (Bondy dan Murty, 2008:420)

Sisi penutup graf $G$ adalah $A \subseteq V(G)$ sedemikian hingga semua sisi di $A$ menutup semua titik di $G$, artinya adalah setiap titik di $G$ berinsiden dengan setidaknya satu sisi di $A$. Gambar berikut menunjukkan contoh sisi penutup dari masing-masing dua graf (Himpunan $A$ ditandai dengan merah).

**Contoh 9**

*G:*

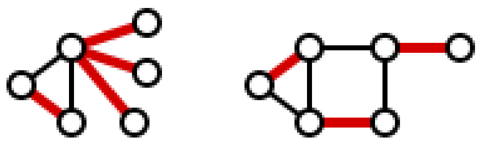
$G_1$ $G_2$

Gambar 2.10 Sisi Penutup dari $G_1$ dan $G_2$ (warna merah)

Sisi penutup minimal dari graf $G$ dinotasikan $\alpha_1(G)$ adalah bilangan kardinal terkecil dari himpunan sisi penutup yang paling sedikit. Untuk lebih jelasnya diberikan contoh di bawah ini:

**Contoh 10**

*G:*



$G_1$ $G_2$

Gambar 2.11 $\boldsymbol{\alpha_1(G_1) = 4}$ dan $\boldsymbol{\alpha_1(G_2) = 3}$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

## 2.5 Lemma Titik dan Sisi Penutup Minimal pada Graf Lintasan

Lemma graf lintasan ini diperoleh dari titik dan sisi penutup minimal pada graf lintasan yang sudah dihitung mulai dari dua titik sampai dengan sepuluh titik. Berikut adalah tabel dari pola graf lintasan:

Tabel 2.1 Titik dan Sisi Penutup Minimal pada Graf Lintasan

| Simpul | Banyak Titik | Banyak Sisi | $\alpha$ | $\alpha_1$ |
|---|---|---|---|---|
| $P_2$ | 2 | 1 | 1 | 1 |
| $P_3$ | 3 | 2 | 1 | 2 |
| $P_4$ | 4 | 3 | 2 | 2 |
| $P_5$ | 5 | 4 | 2 | 3 |
| $P_6$ | 6 | 5 | 3 | 3 |
| $P_7$ | 7 | 6 | 3 | 4 |
| $P_8$ | 8 | 7 | 4 | 4 |
| $P_9$ | 9 | 8 | 4 | 5 |
| $P_{10}$ | 10 | 9 | 5 | 5 |

Sumber: (Penelitian Dosen dan Mahasiswa, 2011)

Dari semua lintasan tersebut dapat dibuat lemma titik dan sisi penutup minimal dari sebarang graf lintasan $P_n$ $(n \geq 2)$ adalah sebagai berikut:

**Lemma 2.5.1**

Titik penutup minimal dari graf lintasan $P_n$ $(n \geq 2)$ adalah

$$\alpha(P_n) \coloneqq \begin{cases} \frac{1}{2}n; untuk\ n\ genap \\ \frac{1}{2}(n-1);\ untuk\ \ n\ ganjil \end{cases}$$

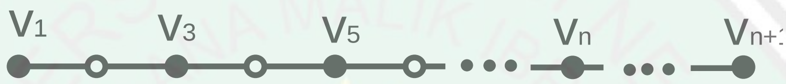
**Bukti Lemma 2.5.1**

Untuk $n$ genap, titik penutup minimal graf lintasan $P_n$ adalah $\frac{1}{2}n$. Untuk $n = 2$ maka $P_2$ memiliki titik penutup minimal $\frac{1}{2}n = \frac{1}{2}(2) = 1$. Untuk $n = 4$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

maka $P_4$ memiliki banyak penutup minimal $\frac{1}{2}n = \frac{1}{2}(4) = 2$ dan seterusnya. Asumsikan benar untuk $n = 2k$ maka $P_{2k}$ memiliki titik penutup minimal $\frac{1}{2}n = \frac{1}{2}(2k) = k.$

Akan ditunjukkan benar untuk $n = 2(k+1)$, yaitu untuk $n = 2(k+1)$ maka $P_{2(k+1)}$ memiliki titik penutup minimal $\frac{1}{2}n = \frac{1}{2}2(k+1) = k+1.$




Gambar 2.12 Pembuktian Titik Penutup pada Graf Lintasan Genap

Dari $n = 2k$ maka $P_{2k}$ memiliki himpunan titik penutup minimal, misal $\{v_1, v_3, v_5, \dots, v_{2(k-1)}\}$ atau $\{v_2, v_4, v_6, \dots, v_{2k}\}$, maka kardinalitas titik penutup minimalnya adalah $k$. Ambil sisi $(v_i, v_{i+1})$ di $P_{2k}$ , dalam sisi ini $v_i$ atau $v_{i+1}$ menjadi salah satu titik penutup, sisipkan 2 titik di $(v_i, v_{i+1})$. Misal $(v_i, v_x, v_y, v_{i+1})$, $v_x$ adalah titik penutup yang menutup sisi $(v_i, v_x)$ dan $(v_x, v_y)$, $v_y$ adalah titik penutup yang menutup sisi $(v_x, v_y)$ dan $(v_y, v_{i+1})$ sehingga pada sisi $(v_i, v_{i+1})$, jika $v_i$ menjadi titik penutup maka $v_y$menjadi titik penutup tambahan, sebaliknya jika $v_{i+1}$ menjadi titik penutup maka $v_x$ menjadi titik penutup tambahan. Sehingga titik penutup tambahan adalah salah satu dari $v_x$ atau $v_y$. Jadi $P_{2(k+1)}$ memiliki titik penutup minimal $k+1$.

Untuk $n$ ganjil, titik penutup minimal pada graf lintasan $P_n$ adalah $\frac{1}{2}(n-1)$. Untuk $n = 3$ maka $P_3$ memiliki titik penutup minimal adalah $\frac{1}{2}(3-1) = 1$. Untuk $n = 5$ maka $P_5$ memiliki titik penutup minimal adalah $\frac{1}{2}(5-1) = 2$ dan

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

seterusnya. Asumsikan benar untuk $n = 2k + 1$, maka $P_{2k+1}$ memiliki titik penutup minimal adalah $\frac{1}{2}(n-1) = \frac{1}{2}((2k+1)-1) = k$.

Akan ditunjukkan benar untuk $n = 2(k+1)+1$, yaitu untuk $n = 2(k+1)+1$ maka $P_{2(k+1)+1}$ memiliki titik penutup minimal $\frac{1}{2}n - 1 = \frac{1}{2}(2(k+1)+1) - 1 = k + 1$.

Gambar 2.13 Pembuktian Titik Penutup pada Graf Lintasan Ganjil

Dari $n = 2k + 1$ maka $P_{2k+1}$ memiliki himpunan titik penutup minimal, misal $\{v_1, v_3, v_5, \ldots, v_{2k-1}, v_{2k+1}\}$ atau $\{v_2, v_4, v_6, \ldots, v_{2k}, v_{2k+1}\}$ maka banyak titik penutup adalah $k$. Ambil sisi $(v_i, v_{i+1})$ di $P_{2k+1}$, dalam sisi ini $v_i$ atau $v_{i+1}$ menjadi salah satu titik penutup, sisipkan 2 titik di $(v_i, v_{i+1})$. Misal $(v_i, v_x, v_y, v_{i+1})$, $v_x$ adalah titik penutup yang menutup sisi $(v_i, v_x)$ dan $(v_x, v_y)$, $v_y$ adalah titik penutup yang menutup sisi $(v_x, v_y)$ dan $(v_y, v_{i+1})$ sehingga pada sisi $(v_i, v_{i+1})$, jika $v_i$ menjadi titik penutup maka $v_y$ menjadi titik penutup tambahan, sebaliknya jika $v_{i+1}$ menjadi titik penutup maka $v_x$ menjadi titik penutup tambahan. Sehingga titik penutup tambahan adalah salah satu dari $v_x$ atau $v_y$. Jadi $P_{2(k+1)}$ memiliki titik penutup minimal $k + 1$.

**Lemma 2.5.2**

Sisi penutup minimal dari graf lintasan $P_n$ $(n \geq 2)$ adalah

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\alpha_1(P_n) := \begin{cases} \dfrac{1}{2}n; untuk\ n\ genap \\ \dfrac{1}{2}(n+1);\ untuk\ \ n\ ganjil \end{cases}$$

**Bukti Lemma 2.5.2**

Untuk $n$ genap, sisi penutup minimal graf lintasan $P_n$ adalah $\frac{1}{2}n$. Untuk $n = 2$ maka $P_2$ memiliki sisi penutup minimal $\frac{1}{2}n = \frac{1}{2}(2) = 1$. Untuk $n = 4$ maka $P_4$ memiliki sisi penutup minimal $\frac{1}{2}n = \frac{1}{2}(4) = 2$ dan seterusnya. Asumsikan benar untuk $n = 2k$ maka $P_{2k}$ memiliki sisi penutup minimal $\frac{1}{2}n = \frac{1}{2}(2k) = k$.

Akan ditunjukkan benar untuk $n = 2(k+1)$, yaitu untuk $n = 2(k+1)$ maka $P_{2(k+1)}$ memiliki sisi penutup minimal $\frac{1}{2}n = \frac{1}{2}\big(2(k+1)\big) = k+1$.


Gambar 2.14 Pembuktian Sisi Penutup pada Graf Lintasan Genap

Dari $n = 2k$ maka $P_{2k}$ memiliki himpunan sisi penutup minimal, misal $\{e_1, e_3, e_5, \dots, e_{2(k+1)}\}$ atau $\{e_2, e_4, e_6, \dots, e_{2k}\}$, maka sisi penutup minimalnya adalah $k$. Ambil sisi $(v_i, v_{i+1})$ di $P_n$, dalam sisi ini disisipkan 2 titik. Jika $(v_i, v_x)$ menjadi sisi penutup maka $(v_y, v_{i+1})$ menjadi sisi penutup tambahan sebaliknya jika $(v_y, v_{i+1})$ jadi sisi penutup maka $(v_i, v_x)$ menjadi sisi penutup tambahan. Jadi $P_{2(k+1)}$ memiliki sisi penutup minimal $k+1$.

Untuk $n$ ganjil, sisi penutup minimal pada graf lintasan $P_n$ adalah $\frac{1}{2}(n+1)$. Untuk $n = 3$ maka $P_3$ memiliki sisi penutup minimal $\frac{1}{2}(3+1) = 2$. Untuk

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$n = 5$ maka $P_5$ memiliki sisi penutup minimal $= \frac{1}{2}(5+1) = 3$ dan seterusnya. Asumsikan benar untuk $n = 2k+1$ maka $P_{2k+1}$ memiliki sisi penutup minimal adalah $\frac{1}{2}(n+1) = \frac{1}{2}((2k+1)+1) = k+1$.

Akan ditunjukkan benar untuk $n = 2(k+1)+1$, yaitu untuk $n = 2(k+1)+1$ maka $P_{2(k+1)+1}$ memiliki sisi penutup minimal $\frac{1}{2}(n+1) = \frac{1}{2}(2(k+1)+1) = k+2$

Gambar 2.15 Pembuktian Sisi Penutup pada Graf Lintasan Ganjil

Dari $n = 2k+1$ maka $P_{2k+1}$ memiliki himpunan sisi penutup minimal, misal $\{e_1, e_3, e_5, \dots, e_{2k-1}, e_{2k+1}\}$ atau $\{e_2, e_4, e_6, \dots, e_{2k}, e_{2k+1}\}$, maka sisi penutup minimalnya adalah $k+1$. Ambil sisi $(v_i, v_{i+1})$ di $P_n$, dalam sisi ini disisipkan 2 titik. Jika $(v_i, v_x)$ menjadi sisi penutup maka $(v_y, v_{i+1})$ menjadi sisi penutup tambahan sebaliknya jika $(v_y, v_{i+1})$ jadi sisi penutup maka $(v_i, v_x)$ menjadi sisi penutup tambahan. Jadi $P_{2(k+1)+1}$ memiliki sisi penutup minimal $k+2$.

## 2.6 Lemma Titik dan Sisi Penutup Minimal pada Graf Sikel

Lemma graf sikel ini diperoleh dari pola titik dan sisi penutup minimal pada graf sikel yang sudah dihitung mulai dari tiga titik sampai dengan sepuluh titik. Berikut adalah tabel dari pola graf sikel:

Tabel 2.2 Titik dan Sisi Penutup Minimal pada Graf Sikel

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

| Simpul | Banyak Titik | Banyak Sisi | $\alpha$ | $\alpha_1$ |
|---|---|---|---|---|
| $C_3$ | 3 | 3 | 2 | 2 |
| $C_4$ | 4 | 4 | 2 | 2 |
| $C_5$ | 5 | 5 | 3 | 3 |
| $C_6$ | 6 | 6 | 3 | 3 |
| $C_7$ | 7 | 7 | 4 | 4 |
| $C_8$ | 8 | 8 | 4 | 4 |
| $C_9$ | 9 | 9 | 5 | 5 |
| $C_{10}$ | 10 | 10 | 5 | 5 |

Sumber: (Penelitian Dosen dan Mahasiswa, 2011)

Dari semua sikel tersebut dapat dibuat teorema tentang banyaknya titik dan sisi penutup minimal dari sebarang graf sikel $(n \geq 3)$ adalah sebagai berikut:

**Lemma 2.6.1**

Banyak titik penutup minimal dari graf sikel $C_n$ $(n \geq 3)$ adalah

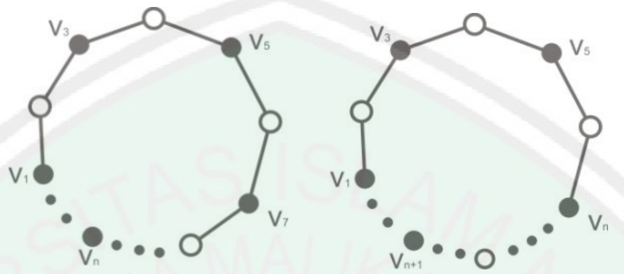
$$\alpha(C_n) := \begin{cases} \frac{1}{2}n; untuk\ n\ genap \\ \frac{1}{2}(n+1);\ untuk\ \ n\ ganjil \end{cases}$$

**Bukti Lemma 2.6.1**

Untuk $n$ genap, titik penutup minimal graf sikel $C_n$ adalah $\frac{1}{2}n$. Untuk $n = 4$ maka $C_4$ memiliki titik penutup minimal $\frac{1}{2}n = \frac{1}{2}(4) = 2$. Untuk $n = 6$ maka $C_6$ memiliki titik penutup minimal $\frac{1}{2}n = \frac{1}{2}(6) = 3$ dan seterusnya. Asumsikan benar untuk $n = 2k$ maka $C_{2k}$ memiliki titik penutup minimal $= \frac{1}{2}n = \frac{1}{2}(2k) = k$.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Akan ditunjukkan benar untuk $n = 2(k+1)$, yaitu untuk $n = 2(k+1)$ maka $C_{2(k+1)}$ memiliki titik penutup minimal $\frac{1}{2}n = \frac{1}{2}\left(2(k+1)\right) = k+1$.




Gambar 2.16 Pembuktian Titik Penutup pada Graf Sikel Genap

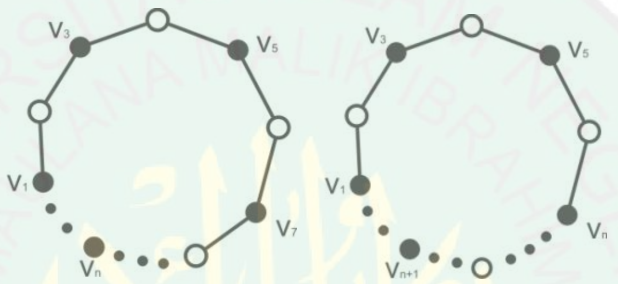
Dari $n = 2k$ maka $C_{2k}$ memiliki himpunan titik penutup minimal, misal $\{v_1, v_3, v_5, \dots, v_{2(k-1)}\}$ atau $\{v_2, v_4, v_6, \dots, v_{2k}\}$. Maka kardinalitas titik penutup minimal adalah $k$. Ambil sisi $(v_i, v_{i+1})$ di $C_n = 2k$, dalam sisi ini $v_i$ atau $v_{i+1}$ menjadi salah satu titik penutup. Sisipkan 2 titik di $(v_i, v_{i+1})$. Misal $(v_i, v_x, v_y, v_{i+1})$, $v_x$ adalah titik penutup yang menutup sisi $(v_i, v_x)$ dan $(v_x, v_y)$, $v_y$ adalah titik penutup yang menutup sisi $(v_x, v_y)$ dan $(v_y, v_{i+1})$ sehingga pada lintasan $(v_i, v_{i+1})$, jika $v_i$ menjadi titik penutup maka $v_y$ menjadi titik penutup tambahan, sebaliknya jika $v_{i+1}$ menjadi titik penutup maka $v_x$ menjadi titik penutup tambahan. Sehingga titik penutup tambahan adalah salah satu dari $v_x$ atau $v_y$. Jadi $C_{2(k+1)}$ memiliki titik penutup minimal $k+1$.

Untuk $n$ ganjil, titik penutup minimal pada graf sikel $C_n$ adalah $\frac{1}{2}(n+1)$. Untuk $n = 3$ maka $C_3$ memiliki titik penutup minimal adalah $\frac{1}{2}(3+1) = 2$. Untuk $n = 5$ maka $C_5$ memiliki titik penutup minimal adalah $\frac{1}{2}(5+1) = 3$ dan

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

seterusnya. Asumsikan benar untuk $n = 2k + 1$ maka $C_{2k+1}$ memiliki titik penutup minimalnya adalah $\frac{1}{2}(n + 1) = \frac{1}{2}((2k + 1) + 1 = k + 1$ .

Akan ditunjukkan benar untuk $n = 2(k + 1) + 1$, yaitu untuk $n = 2(k + 1) + 1$ maka $C_{2(k+1)+1}$ memiliki titik penutup minimal $\frac{1}{2}(n + 1) = \frac{1}{2}(2k + 1 + 1) + 1 = k + 2$.




Gambar 2.17 Pembuktian Titik Penutup pada Graf Sikel Ganjil

Dari $n = 2k + 1$ maka $C_{2k+1}$ memiliki himpunan titik penutup minimal, misal $\{v_1, v_3, v_5, \ldots, v_{2(k-1)}, v_{2(k+1)}\}$ atau $\{v_2, v_4, v_6, \ldots, v_{2k}, v_{2(k+1)}\}$, maka titik penutup minimalnya adalah $k + 1$. Ambil sisi $(v_i, v_{i+1})$ di $C_n = 2k + 1$, dalam sisi ini $v_i$ atau $v_{i+1}$ menjadi salah satu titik penutup, sisipkan 2 titik di $(v_i, v_{i+1})$. Misal $(v_i, v_x, v_y, v_{i+1})$, $v_x$ adalah titik penutup yang menutup sisi $(v_i, v_x)$ dan $(v_x, v_y)$ , $v_y$ adalah titik penutup yang menutup sisi$(v_x, v_y)$ dan $(v_y, v_{i+1})$ sehingga jika pada sisi $(v_i, v_{i+1})$, jika $v_i$ menjadi titik penutup maka $v_y$ menjadi titik penutup tambahan, sebaliknya jika $v_{i+1}$ menjadi titik penutup maka $v_x$ menjadi titik penutup tambahan. Sehingga titik penutup tambahan adalah salah satu dari $v_x$ atau $v_y$. Jadi $C_{2(k+1)+1}$ memiliki titik penutup minimal $k + 2$.

**Lemma 2.6.2**

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Banyak sisi penutup minimal dari sebarang graf sikel $C_n$ $(n \geq 3)$ adalah

$$\alpha_1(C_n) \coloneqq \begin{cases} \frac{1}{2}n; untuk\ n\ genap \\ \frac{1}{2}(n+1);\ untuk\ \ n\ ganjil \end{cases}$$

**Bukti Lemma 2.6.2**

Untuk $n$ genap, sisi penutup minimal pada graf sikel $C_n$ adalah $\frac{1}{2}n$. Untuk $n = 4$ maka $C_4$ memiliki sisi penutup minimal $\frac{1}{2}n = \frac{1}{2}(4) = 2$. Untuk $n = 6$ maka $C_6$ memiliki sisi penutup minimal $\frac{1}{2}n = \frac{1}{2}(6) = 3$ dan seterusnya. Asumsikan benar untuk $n = 2k$ maka $C_{2k}$ memiliki sisi penutup minimal $\frac{1}{2}n = \frac{1}{2}(2k) = k$.

Akan ditunjukkan benar untuk $n = 2(k+1)$, yaitu untuk $n = 2(k+1)$ maka $C_{2(k+1)}$ memiliki sisi penutup minimal $\frac{1}{2}n = \frac{1}{2}\ 2(k+1) = k+1$.


Gambar 2. 18 Pembuktian Sisi Penutup pada Graf Sikel Genap

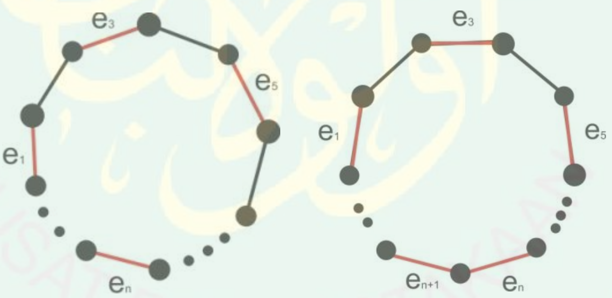
Dari $n = 2k$ maka $C_{2k}$ memiliki himpunan sisi penutup minimal, misal $\{e_1, e_3, e_5, \dots, e_{2(k+1)}\}$ atau $\{e_2, e_4, e_6, \dots, e_{2k}\}$, maka sisi penutup minimalnya adalah $k$. Ambil sisi $(v_i, v_{i+1})$ di $C_n$, dalam sisi ini disisipkan 2 titik. Misal $(v_i, v_x, v_y, v_{i+1})$ jika $(v_i, v_x)$ menjadi sisi penutup maka $(v_y, v_{i+1})$ menjadi sisi

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

penutup tambahan sebaliknya. Jika $(v_y, v_{i+1})$ jadi sisi penutup maka $(v_i, v_x)$ menjadi sisi penutup tambahan. Jadi $C_{2(k+1)}$ memiliki sisi penutup minimal $k+1$.

Untuk $n$ ganjil, sisi penutup minimal pada graf sikel $C_n$ adalah $\frac{1}{2}(n+1)$. Untuk $n=3$ maka $C_3$ memiliki sisi penutup minimal $\frac{1}{2}(n+1) = \frac{1}{2}(3+1) = 2$. Untuk $n=5$ maka $C_5$ memiliki sisi penutup minimal $\frac{1}{2}(n+1) = \frac{1}{2}(5+1) = 3$ dan seterusnya. Asumsikan benar untuk $n = 2k+1$ maka $C_{2k+1}$ memiliki sisi penutup minimal $\frac{1}{2}(n+1) = \frac{1}{2}(2k+1+1) = k+1$.

Akan ditunjukkan benar untuk $n = 2(k+1)+1$, yaitu untuk $n = 2(k+1)+1$ maka $C_{2(k+1)+1}$ memiliki sisi penutup minimal adalah $\frac{1}{2}(n+1) = \frac{1}{2}(2k+1+1)+1 = k+2$.




Gambar 2.19 Pembuktian Sisi Penutup pada Graf Sikel Ganjil

Dari $n = 2k+1$ maka $C_{2k+1}$ memiliki himpunan sisi penutup minimal, misal $\{e_1, e_3, e_5, \ldots, e_{2k-1}, e_{2k+1}\}$ atau $\{e_2, e_4, e_6, \ldots, e_{2k}, e_{2k+1}\}$ maka sisi penutup minimalnya adalah $k+1$. Ambil sisi $(v_i, v_{i+1})$ di $C_n$, dalam sisi ini di sisipkan 2 titik. Misal $(v_i, v_x, v_y, v_{i+1})$ jika $(v_i, v_x)$ menjadi sisi penutup maka $(v_y, v_{i+1})$ menjadi sisi penutup tambahan sebaliknya. Jika $(v_y, v_{i+1})$ jadi sisi penutup maka $(v_i, v_x)$ menjadi sisi penutup tambahan. Jadi $C_{2(k+1)+1}$ memiliki sisi penutup minimal $k+2$.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

# BAB III

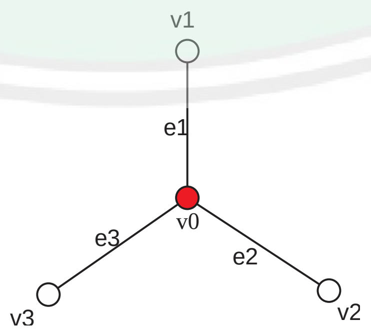
# PEMBAHASAN

Suatu titik dan sisi dikatakan saling penutup pada graf $G$ jika titik dan sisi tersebut inciden di $G$. Titik penutup di $G$ merupakan himpunan dari titik-titik yang menutup semua sisi di $G$ dan sisi penutup pada graf $G$ (tanpa titik terisolasi) merupakan himpunan sisi-sisi yang menutup semua titik di $G$. Di katakan minimal karena banyaknya anggota paling sedikit atau himpunan penutup yang kardinalnya terkecil.

## 3.1 Titik dan Sisi Penutup Minimal pada Graf Bintang $S_n$

### 3.1.1 Titik dan Sisi Penutup Minimal pada Graf Bintang $(m)_c\, S_n^1$

Pembahasan pada bab ini akan dimulai dari (1) menggambar graf bintang; (2) menentukan titik penutup minimalnya; (3) menentukan sisi penutup minimalnya; (4) mengembangkan gambar grafnya sampai $(m)_c\, S_n^k$; (5) menentukan titik dan sisi penutup minimalnya dari bagian 4; (6) mencari pola pada bagian 2, 3 dan 5; dan (7) membuat sebuah lemma dan membuktikan lemma benar secara umum.

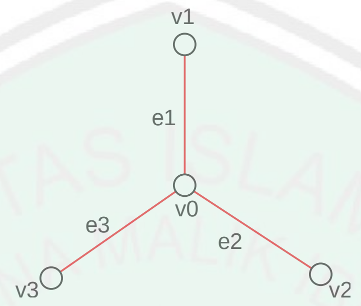



Gambar 3.1 Titik Penutup Minimal pada Graf Bintang $S_3$



CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

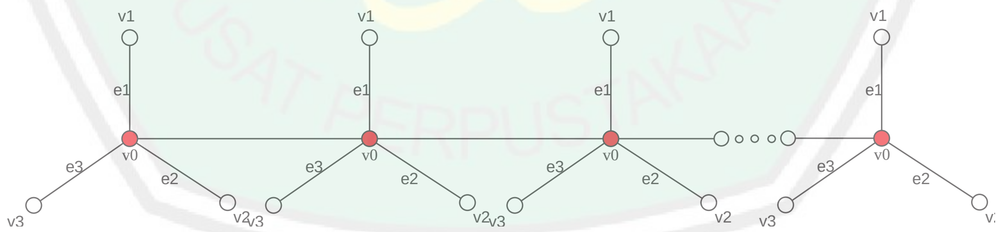
Titik penutup minimal pada graf bintang $S_3$ adalah 1 yakni $v_0$. Sehingga terlihat bahwa titik $v_0$ ini sudah dapat menutup semua sisi yang ada pada $S_3$. Berikut adalah gambar sisi penutup minimal pada graf bintang $S_3$:




Gambar 3.2 Sisi Penutup Minimal pada Graf Bintang $\boldsymbol{S_3}$

Sisi penutup minimal pada graf bintang $S_3$ adalah yaitu sebanyak 3, sesuai dengan banyak sisi pada graf bintang $S_3$ adalah 3 titik. (Perhitungan manual untuk graf-graf bintang berikutnya di lampirkan)

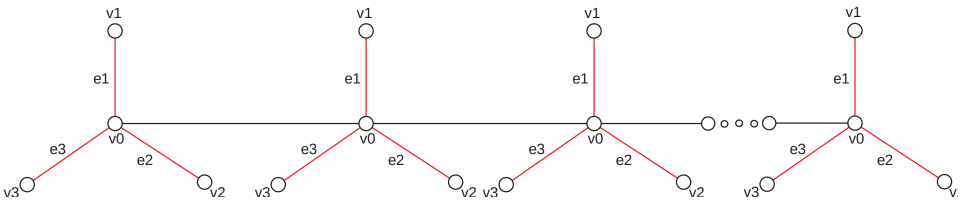
Kemudian ketika graf bintang $S_3$ dihitung sampai sengan $m$ kali maka menjadi $(m)_c\, S_3^1$ yang gambarnya seperti di bawah ini:




Gambar 3.3 Titik Penutup Minimal pada Graf Bintang $\boldsymbol{(m)_c\, S_3^1}$

Titik penutup minimal pada graf bintang $S_3$ adalah 1. Karena masing-masing titik pusat yang terhubung langsung, sehingga titik penutup minimal pada graf bintang $(m)_c\, S_3^1$ adalah sebanyak $1\, x\, m$. Untuk sisi penutup minimal pada graf bintang $S_3$ adalah sebagai berikut:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG




Gambar 3.4 Sisi Penutup Minimal pada Graf Bintang $(\boldsymbol{m})_c\, \boldsymbol{S_3^1}$

Sisi penutup minimal pada graf bintang $S_3$ adalah 3, karena masing-masing titik pusat yang terhubung langsung, sehingga sisi penutup minimal pada graf bintang $(m)_c\, S_3^1$ adalah sebanyak $3\ x\ m$.

Berdasarkan penjelasan maka didapatkan pola titik dan sisi penutup minimal pada graf bintang $S_3$ sampai dengan $S_n$ seperti pada tabel berikut:

Tabel 3.1 Titik dan Sisi Penutup Minimal pada Graf Bintang $(\boldsymbol{m})_c\, \boldsymbol{S_n^1}$

| Simpul | $\boldsymbol{\alpha(S_n)}$ | $\boldsymbol{\alpha_1(S_n)}$ | $\boldsymbol{\alpha((m)_c\, S_n^1)}$ | $\boldsymbol{\alpha_1((m)_c\, S_n^1)}$ |
|---|---|---|---|---|
| $S_3$ | 1 | 3 | $1\ x\ m$ | $3\ x\ m$ |
| $S_4$ | 1 | 4 | $1\ x\ m$ | $4\ x\ m$ |
| $S_5$ | 1 | 5 | $1\ x\ m$ | $5\ x\ m$ |
| $S_6$ | 1 | 6 | $1\ x\ m$ | $6\ x\ m$ |
| $S_7$ | 1 | 7 | $1\ x\ m$ | $7\ x\ m$ |
| $S_8$ | 1 | 8 | $1\ x\ m$ | $8\ x\ m$ |
| $S_9$ | 1 | 9 | $1\ x\ m$ | $9\ x\ m$ |
| $S_{10}$ | 1 | 10 | $1\ x\ m$ | $10\ x\ m$ |
| .. | .. | .. | .. | .. |
| $S_n$ | 1 | $n$ | $m$ | $n\ x\ m$ |

Berdasarkan Tabel 3.1 maka diperoleh lemma berikut:

**Lemma 1**

Titik penutup minimal pada graf bintang $S_n$ adalah 1.

**Bukti Lemma 1**

Misal titik pusat adalah $v_0$. Karena semua sisi $e_i$ insidensi dengan $v_0$ sehingga $v_0$ menutup semua sisi di $S_n$, atau $v_0$ berinsiden dengan $e_i$ $(i =$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$1, 2, \dots, n)$ maka $v_0$ adalah satu-satunya titik yang menutup semua sisi. Jadi titik penutup minimal graf bintang $(S_n)$ adalah 1.

**Lemma 2**

Sisi penutup minimal pada graf bintang $S_n$ adalah $n$.

**Bukti Lemma 2**

Misal $V(S_n) = \{v_0, v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$.Titik $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ tidak terhubung langsung tetapi titik $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ terhubung langsung dengan $v_0$ sehingga sisi $(v_i, v_0)$ menutup titik $v_i\ dan\ v_0\ (i = 1, 2, \dots, n)$. Maka sisi penutup minimal pada graf bintang $S_n$ terbukti sebanyak $n$.

**Lemma 3**

Titik penutup minimal pada graf bintang $(m)_c\, S_n^1$ adalah $m$.

**Bukti lemma 3**

Pada graf $(m)_c\, S_n^1$ masing-masing titik pusat yang berurutan adalah terhubung langsung, yaitu $(v_0^i, v_0^{i+1})$. Dari lemma 1 titik penutup minimal $S_n^1$ adalah 1. Sehingga diperoleh titik penutup minimal pada graf bintang $(m)_c\, S_n^1$ adalah $m$.

**Lemma 4**

Sisi penutup minimal pada graf bintang $(m)_c\, S_n^1$ adalah $m\ x\ n$.

**Bukti lemma 4**

Pada graf $(m)_c\, S_n^1$ masing-masing titik pusat yang berurutan adalah terhubung langsung, yaitu $(v_0^i, v_0^{i+1})$. Berdasarkan lemma 2, sisi penutup minimal pada graf bintang $S_n$ adalah $n$. Sehingga diperoleh sisi penutup minimal pada graf bintang $(m)_c\, S_n^1$ adalah $m\ x\ n$.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

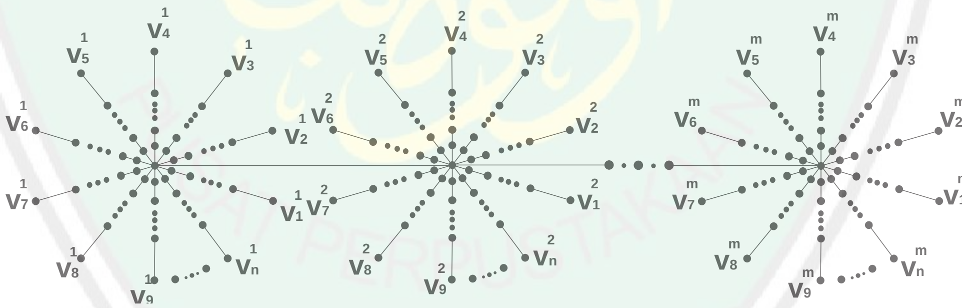
### 3.1.2 Titik dan Sisi Penutup Minimal pada Graf Bintang $(\boldsymbol{m})_c\, \boldsymbol{S_n^k}$

Ketika gambar graf bintang $S_n$ dikembangkan yaitu setiap anting dari graf bintang memiliki $k$ titik maka dapat dilihat pada gambar di bawah ini:

Misal graf bintang $S_n^k$:

Gambar 3.5 Graf Bintang $\boldsymbol{S_n^k}$

Ketika graf bintang $S_n^k$ sebanyak $m$ kali dan titik pusat yang berurutan dihubungkan langsung maka dapat dilihat gambar di bawah ini:



Gambar 3.6 Graf Bintang $(\boldsymbol{m})_c\, \boldsymbol{S_n^k}$

**Lemma 5**

Titik penutup minimal pada graf bintang $(m)_c\, S_n^k$ adalah

$$\alpha((m)_c S_n^k) := \begin{cases} m\left(\frac{1}{2}kn+1\right) ; untuk\ k\ genap \\ m\left(\frac{1}{2}n(k+1)+1\right); \ untuk\ \ k\ ganjil \end{cases} \quad , untuk\ n \in N, n \geq 3$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

**Bukti Lemma 5**

**1. Untuk $k$ genap**

Ambil $v_0$ sebagai titik penutup. Maka anting graf $S_n^k$ berupa lintasan $P_{k+1}$, dengan $(k+1)$ bilangan ganjil. Jadi $\alpha(P_{k+1}) = \frac{1}{2}k$. Karena terdapat sebanyak $n$ anting maka diperoleh $\alpha(S_n^k) = 1 + \frac{1}{2}k(n) = \frac{1}{2}nk + 1$.

**2. Untuk $k$ ganjil**

Ambil $v_0$ sebagai titik penutup. Maka anting graf $S_n^k$ berupa lintasan $P_{k+1}$, dengan $(k+1)$ bilangan genap. Jadi $\alpha(P_{k+1}) = \frac{1}{2}(k+1)$. Karena terdapat sebanyak $n$ anting maka diperoleh $\alpha(S_n^k) = \frac{1}{2}n(k+1) + 1$.

Dari 1 dan 2, karena $(m)_c\, S_n^k$ terdiri dari $m\, S_n^k$ yang titik pusat berurutan dihubungkan langsung maka titik penutup minimal pada graf bintang $(m)_c\, S_n^k$ ditunjukkan pada gambar 3.6 sehingga:

$$\alpha((m)_c\, S_n^k) := \begin{cases} m\left(\frac{1}{2}kn + 1\right); untuk\ k\ genap \\ m\left(\frac{1}{2}n(k+1) + 1\right);\ untuk\ \ k\ ganjil \end{cases}, untuk\ n \in N, n \geq 3$$

**Lemma 6**

Sisi penutup minimal pada graf bintang $(m)_c\, S_n^k$ adalah

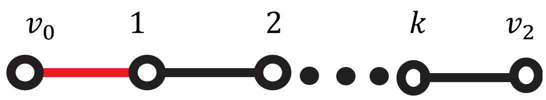
$$\alpha_1((m)_c\, S_n^k) := \begin{cases} m\left(n\left(\frac{1}{2}k + 1\right)\right); untuk\ k\ genap \\ m\left(\frac{1}{2}n(k+1) + 1\right);\ untuk\ \ k\ ganjil \end{cases}, untuk\ n \in N, n \geq 3$$

**Bukti Lemma 6**

**1. Untuk $k$ genap**

Pada graf $S_n^k$ pandang lintasan 1 anting berikut:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG




Gambar 3.7 Lintasan $\boldsymbol{P_{k+2}}$

Graf ini berupa $P_{k+2}$ dengan $(k+2)$ adalah genap, sehingga $\alpha_1(P_{k+2}) = \frac{1}{2}(k+2) = \frac{1}{2}k+1$. Dengan mengambil $(v_0, k_1)$ sebagai sisi penutup. Anting lainnya berupa $P_{k+1}$ dengan $(k+1)$ adalah ganjil maka $\alpha_1(P_{k+1}) = \frac{1}{2}\big((k+1)+1\big) = \frac{1}{2}k+1$. Karena lintasan $P_{k+1}$ sebanyak $(n-1)$ lintasan maka sisi penutup minimalnya $\left(\frac{1}{2}k+1\right)(n-1)$. Sehingga diperoleh $\alpha_1(S_n^k) = \left(\frac{1}{2}k+1\right) + \left(\frac{1}{2}k+1\right)(n-1) = \left(\frac{1}{2}k+1\right)n$.

**2. Untuk $\boldsymbol{k}$ ganjil**

Pada graf $S_n^k$ pandang lintasan 1 anting berikut:


Gambar 3.8 Lintasan $\boldsymbol{P_{k+2}}$

Graf ini berupa $P_{k+2}$ dengan $(k+1)$ adalah ganjil, maka $\alpha_1(P_{k+1}) = \frac{1}{2}\big((2+1)+1\big) = \frac{1}{2}(k+3) = \frac{1}{2}(k+1)+1$. Dengan mengambil$(v_0, k_1)$ sebagai sisi penutup. Anting lainnya berupa $P_{k+1}$ dengan $(k+1)$ genap maka $\alpha_1(P_k) = \frac{1}{2}(k+1)$. Karena lintasan $P_k$ sebanyak $(n-1)$ lintasan maka sisi penutup minimalnya $\left(\frac{1}{2}(k+1)\right)(n-1)$. Sehingga diperoleh $\alpha_1(S_n^k) = \frac{1}{2}(k+1)+1+\left(\frac{1}{2}k+1\right)(n-1) = \frac{1}{2}n(k+1)+1$.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

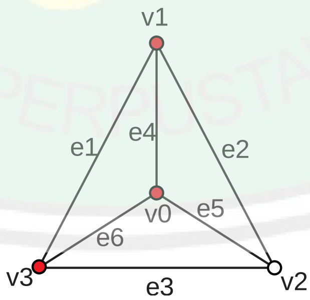
Dari 1 dan 2, karena $(m)_c\, S_n^k$ terdiri dari $m\, S_n^k$ yang titik pusat berurutan dihubungkan langsung maka titik penutup minimal pada graf bintang $(m)_c\, S_n^k$ ditunjukkan pada gambar 3.6 sehingga:

$$\alpha_1((m)_c\, S_n^k) := \begin{cases} m\left(n\left(\frac{1}{2}k+1\right)\right) ; untuk\ k\ genap \\ m\left(\frac{1}{2}n(k+1)+1\right); \ untuk\ \ k\ ganjil \end{cases} , untuk\ n \in N, n \geq 3$$

### 3.2 Titik dan Sisi Penutup Minimal pada Graf Roda $W_n$

#### 3.2.1 Titik dan Sisi Penutup Minimal pada Graf Roda $(m)_c\, W_n^1$

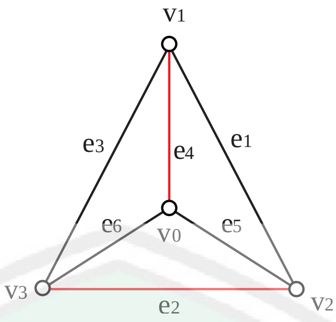
Pertama akan dimulai dari (1) menggambar graf roda; (2) menentukan titik penutup minimalnya; (3) menentukan sisi penutup minimalnya; (4) mengembangkan gambar grafnya sampai $(m)_c\, W_n^k$; (5) menentukan titik dan sisi penutup minimalnya dari bagian 4; (6) mencari pola pada bagian 2, 3 dan 5; dan (7) membentuk suatu lemma dan membuktikan lemma benar secara umum.




Gambar 3.9 Titik Penutup Minimal Graf Roda $\boldsymbol{W_3}$

Titik penutup minimal graf roda $W_3$ adalah 3 titik. Berikut adalah gambar sisi penutup minimal pada graf roda $W_3$:

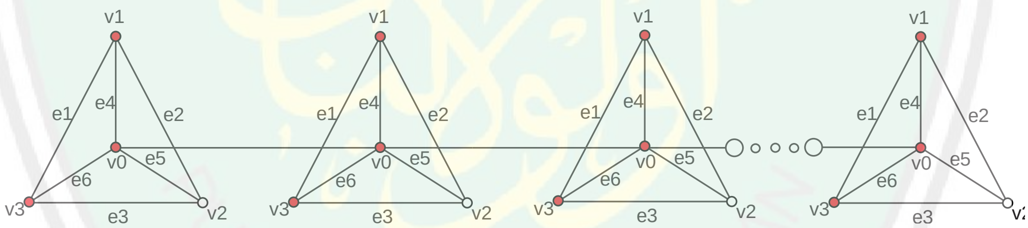
CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG




Gambar 3.10 Sisi Penutup Minimal Graf Roda $\boldsymbol{W_3}$

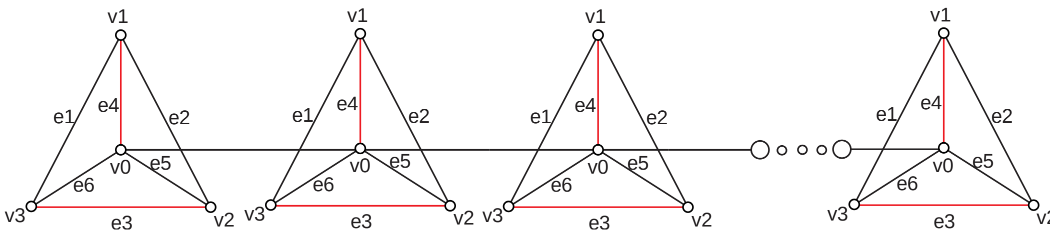
Sisi penutup minimal pada graf roda $W_3$ adalah sisi yang ditandai dengan warna merah. Dengan memilih kedua sisi tersebut sudah dapat menutup semua titik yang ada pada graf roda $W_3$. Jadi sisi penutup minimal graf roda $W_3$ adalah 2 sisi.

Kemudian ketika graf roda $W_3$ dihubungkan sampai sengan $m$ kali menjadi $(m)_c\, W_3^1$ yang gambarnya seperti di bawah ini:



Gambar 3.11 Titik Penutup Minimal pada Graf Roda $(\boldsymbol{m})_c\, \boldsymbol{W_3^1}$

Titik penutup minimal pada graf roda $W_3$ adalah 3. Karena masing-masing titik pusat yang berurutan terhubung langsung, maka titik penutup minimal pada graf roda $(m)_c\, W_3^1$ adalah sebanyak $3\ x\ m$.



Gambar 3.12 Sisi Penutup Minimal pada Graf Roda $(\boldsymbol{m})_c\, \boldsymbol{W_3^1}$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Sisi penutup minimal pada graf roda $W_3$ adalah 2. Karena masing-masing titik pusat yang berurutan terhubung langsung, maka sisi penutup minimal pada graf roda $(m)_c\, W_3^1$ adalah sebanyak $2\ x\ m$.

Berdasarkan penjelasan di atas maka didapatkan pola titik dan sisi penutup minimal pada graf roda $W_3$ sampai dengan $W_n$ seperti pada tabel berikut:

Tabel 3.2 Titik dan Sisi Penutup Minimal pada Graf Roda $(\boldsymbol{m})_c\, \boldsymbol{W_n^1}$

| **Simpul** | $\boldsymbol{\alpha(W_n)}$ | $\boldsymbol{\alpha_1(W_n)}$ | $\boldsymbol{\alpha((m)_c\, W_n^1)}$ | $\boldsymbol{\alpha_1((m)_c\, W_n^1)}$ |
|---|---|---|---|---|
| $W_3$ | 3 | 2 | $3\ x\ m$ | $2\ x\ m$ |
| $W_4$ | 3 | 3 | $3\ x\ m$ | $3\ x\ m$ |
| $W_5$ | 4 | 3 | $4\ x\ m$ | $3\ x\ m$ |
| $W_6$ | 4 | 4 | $4\ x\ m$ | $4\ x\ m$ |
| $W_7$ | 5 | 4 | $5\ x\ m$ | $4\ x\ m$ |
| $W_8$ | 5 | 5 | $5\ x\ m$ | $5\ x\ m$ |
| $W_9$ | 6 | 5 | $6\ x\ m$ | $5\ x\ m$ |
| $W_{10}$ | 6 | 6 | $6\ x\ m$ | $6\ x\ m$ |
| .. | .. | .. | .. | .. |
| .. | .. | .. | .. | .. |
| $W_n$ | $\frac{1}{2}n+1; n\ genap$<br>$\frac{1}{2}(n+1)+1; n\ ganjil$ | $\frac{1}{2}n+1; n\ genap$<br>$\frac{1}{2}(n+1); n\ ganjil$ | $m(\frac{1}{2}n+1); n\ genap$<br>$m(\frac{1}{2}(n+1)+1); n\ ganjil$ | $m(\frac{1}{2}n+1); n\ genap$<br>$m(\frac{1}{2}(n+1))\ ganjil$ |

Berdasarkan Tabel 3.2 maka diperoleh lemma berikut:

**Lemma 9**

Titik penutup minimal pada graf roda $W_n$ adalah

$$\alpha(W_n) \coloneqq \begin{cases} \frac{1}{2}n + 1\ ; untuk\ n\ genap \\ \frac{1}{2}(n+1) + 1;\ untuk\ \ n\ ganjil \end{cases}$$

**Bukti Lemma 9**

Misal $v_0$ titik pusat pada $W_n$ dan $(v_1, v_2, v_3, \dots, v_n)$ adalah titik pada sikel luar. Karena $v_0$ akan menutup semua sisi di selain sikel luar dan

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\alpha(C_n) \coloneqq \begin{cases} \frac{1}{2}n\,; untuk\ n\ genap \\ \frac{1}{2}(n+1);\ untuk\ \ n\ ganjil \end{cases}$$

Maka diperoleh: $\alpha(W_n) \coloneqq \begin{cases} \frac{1}{2}n+1\,; untuk\ n\ genap \\ \frac{1}{2}(n+1)+1;\ untuk\ \ n\ ganjil \end{cases}$

**Lemma 10**

Sisi penutup minimal pada graf roda $W_n$ adalah

$$\alpha_1(W_n) \coloneqq \begin{cases} \frac{1}{2}n+1\,; untuk\ n\ genap \\ \frac{1}{2}(n+1);\ untuk\ \ n\ ganjil \end{cases}$$

**Bukti Lemma 10**

Misal $v_0$ titik pusat pada $W_n$ dan $(v_1, v_2, v_3, \dots, v_n)$ adalah titik pada sikel luar. Ambil $(v_0, v_1)$ sebagai sisi penutup, maka pada $C_n\colon v_1, v_2, v_3, \dots, v_n, v_1$ titik $v_1$ sudah tertutup oleh $(v_0, v_1)$. $\alpha_1(C_n) \coloneqq \frac{1}{2}n$, untuk $n$ genap dan tidak terpengaruh oleh tertutupnya $v_1$. $\alpha_1(C_n) \coloneqq \frac{1}{2}(n+1)$, untuk $n$ ganjil dan terpengaruh oleh tertutupnya $v_1$, sehingga harus dikurangi 1.

Maka diperoleh: $\alpha_1(W_n) \coloneqq \begin{cases} \frac{1}{2}n+1\,; untuk\ n\ genap \\ \frac{1}{2}(n+1);\ untuk\ \ n\ ganjil \end{cases}$

**Lemma 11**

Titik penutup minimal pada graf roda $(m)_c\, W_n^1$ adalah

$$\alpha((m)_c\, W_n^1) \coloneqq \begin{cases} m\left(\frac{1}{2}n+1\right); untuk\ n\ genap \\ m\left(\frac{1}{2}(n+1)+1\right);\ untuk\ \ n\ ganjil \end{cases}$$

**Bukti Lemma 11**

Pada graf $(m)_c\, W_n^1$ masing-masing titik pusat yang berurutan adalah terhubung langsung, yaitu $(v_0^i, v_0^{i+1})$. Berdasarkan lemma 9, titik penutup minimal pada graf roda $W_n$ adalah adalah $\frac{1}{2}n+1$; untuk $n$ genap dan $\frac{1}{2}(n+1)+1$; untuk $n$ ganjil. Sehingga diperoleh titik penutup minimal pada graf roda$(m)_c\, W_n^1$ adalah: $\alpha((m)_c\, W_n^1) \coloneqq \begin{cases} m\left(\frac{1}{2}n+1\right); untuk\ n\ genap \\ m\left(\frac{1}{2}(n+1)+1\right);\ untuk\ \ n\ ganjil \end{cases}$

**Lemma 12**

Sisi penutup minimal pada graf roda $(m)_c W_n^1$ adalah

$$\alpha_1((m)_c\, W_n^1) \coloneqq \begin{cases} m\left(\dfrac{1}{2}n+1\right); untuk\ n\ genap \\ m\left(\dfrac{1}{2}(n+1)\right);\ untuk\ \ n\ ganjil \end{cases}$$

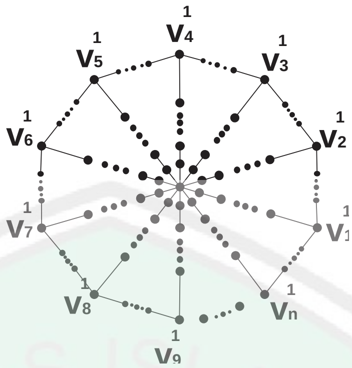
**Bukti Lemma 12**

Pada graf $(m)_c\, W_n^1$ masing-masing titik pusat yang berurutan adalah terhubung langsung, yaitu $(v_0^i, v_0^{i+1})$. Berdasarkan lemma 10, sisi penutup minimal pada graf roda $W_n$ adalah adalah $\frac{1}{2}n+1$; untuk $n$ genap dan $\frac{1}{2}(n+1)$; untuk $n$ ganjil. Sehingga diperoleh sisi penutup minimal pada graf roda$(m)_c\, W_n^1$ adalah: $\alpha_1((m)_c\, W_n^1) \coloneqq \begin{cases} m\left(\frac{1}{2}n+1\right); untuk\ n\ genap \\ m\left(\frac{1}{2}(n+1)\right);\ untuk\ \ n\ ganjil \end{cases}$

### 3.2.2 Titik dan Sisi Penutup Minimal pada Graf Roda $(m)_c\, W_n^k$

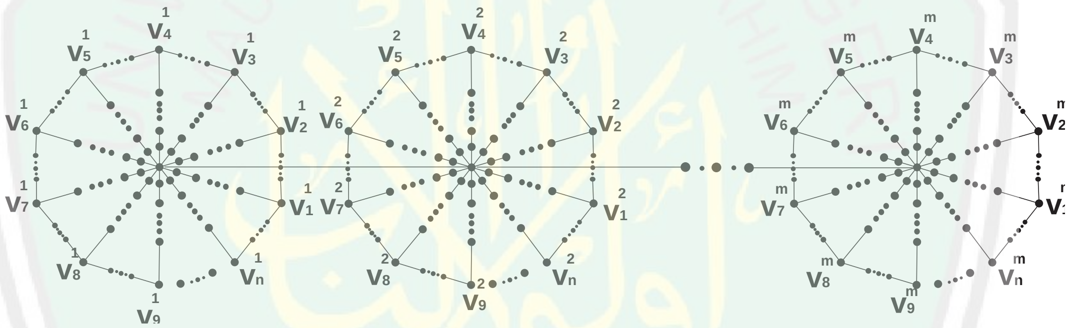
Ketika graf roda $W_n$ dikembangkan yaitu setiap sisi dari graf roda $W_n$ diberi $k$ titik maka graf roda $W_n^k$ adalah sebagai berikut:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG



Gambar 3.13 Graf Roda $\boldsymbol{W_n^k}$

Ketika graf roda $W_n^k$ sebanyak $m$ kali dan titik pusat yang berurutan dihubungkan langsung maka gambarnya sebagai berikut:



Gambar 3.14 Graf Roda $(\boldsymbol{m})_c\ \boldsymbol{W_n^k}$

Graf roda $W_n$ dapat dipandang sebagai graf bintang $S_n$ yang titik anting dihubungkan sehingga membentuk sikel $n$.

**Lemma 13**

Titik penutup minimal pada graf roda $(m)_c\ W_n^k$ adalah:

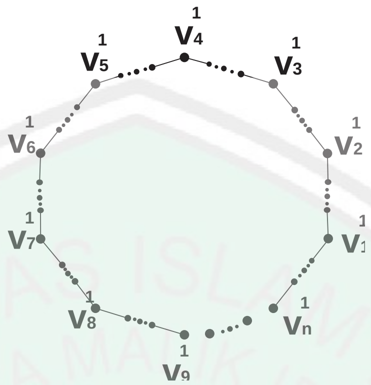
$$\alpha((m)_c\ W_n^k) := \begin{cases} m\left(\frac{1}{2}(2kn+n+2)\right); n\ genap\ dan\ k\ genap \\ m\left(\frac{1}{2}(2kn+n+3)\right); n\ ganjil\ dan\ k\ genap \\ \quad m(nk+1));\ \ k\ ganjil, n \in N, n \geq 3 \end{cases}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

**Bukti Lemma 13**

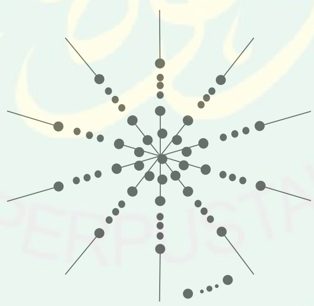
**1. Untuk $k$ genap**

Pada graf $W_n^k$ pandang sikel luarnya:




Gambar 3.15 Graf Sikel $\boldsymbol{C_{n(k+1)}}$

Graf tersebut berupa $C_{n(k+1)}$. Jika $n$ ganjil maka $n(k+1)$ adalah ganjil, dan jika $n$genap maka $n(k+1)$ adalah genap. Sehingga $\alpha\left(C_{n(k+1)}\right) = \frac{1}{2}(n(k+1)+1)$ untuk $n$ ganjil dan $\alpha\left(C_{n(k+1)}\right) = \frac{1}{2}\left(n(k+1)\right)$ untuk $n$ genap. Selanjutnya pandang graf bintang tanpa titik terluarnya:



Gambar 3.16 Graf Bintang $\boldsymbol{S_n^{k-1}}$

Graf $S_n^k$ tanpa titik terluar ini sama dengan graf $S_n^{k-1}$. Karena $k$ genap maka $k-1$ ganjil. Sesuai bukti lemma 5, diperoleh:

$$\alpha(S_n^{k-1}) := \frac{1}{2}n\left((k-1)+1\right)+1 = \frac{1}{2}nk+1$$

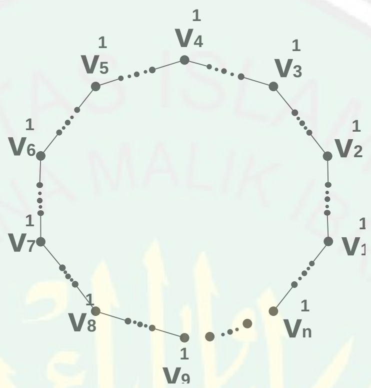
Jadi,

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\alpha(W_n^k) := \begin{cases} \frac{1}{2}\big(n(k+1)\big) + \frac{1}{2}nk + 1 = \frac{1}{2}(2kn + n + 2); \text{untuk } n \text{ genap} \\ \frac{1}{2}(n(k+1)+1) + \frac{1}{2}nk + 1 = \frac{1}{2}(2kn + n + 3); \text{untuk } n \text{ ganjil} \end{cases}$$

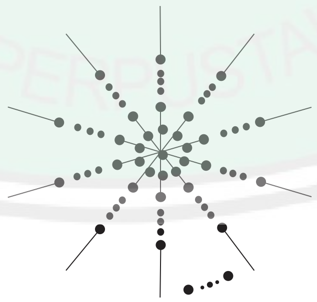
**2. Untuk $k$ ganjil**

Pada graf $W_n^k$ pandang sikel luarnya:




Gambar 3.17 Graf Sikel $\boldsymbol{C_{n(k+1)}}$

Graf tersebut berupa $C_{n(k+1)}$. Karena $k$ ganjil maka $(k+1)$ genap, sehingga $n(k+1)$ selalu genap. Jadi $\alpha\big(C_{n(k+1)}\big) = \frac{1}{2}\big(n(k+1)\big)$. Selanjutnya pandang graf bintang tanpa titik terluarnya:



Gambar 3.18 Graf Bintang $\boldsymbol{S_n^{k-1}}$

Graf $S_n^k$ tanpa titik terluar ini sama dengan graf $S_n^{k-1}$. Karena $k$ ganjil maka $k-1$ genap. Sesuai bukti lemma 5, maka:

$$\alpha(S_n^{k-1}) := \frac{1}{2}n(k-1) + 1$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Jadi diperoleh,

$$\alpha(W_n^k) := \frac{1}{2}\big(n(k+1)\big) + \frac{1}{2}n(k-1) + 1 = \frac{1}{2}(2nk+2) = nk+1;\ n \in N, n \geq 3$$

Dari 1 dan 2, karena $(m)_c\, W_n^k$ terdiri dari $m\, W_n^k$ yang titik pusat berurutan dihubungkan langsung maka titik penutup minimal pada graf roda $(m)_c\, W_n^k$ ditunjukkan pada gambar 3.14 sehingga:

$$\alpha((m)_c\, W_n^k) := \begin{cases} m\left(\frac{1}{2}(2kn+n+2)\right); n\ genap\ dan\ k\ genap \\ m\left(\frac{1}{2}(2kn+n+3)\right); n\ ganjil\ dan\ k\ genap \\ m(nk+1));\ untuk\ \ k\ ganjil, n \in N, n \geq 3 \end{cases}$$

**Lemma 14**

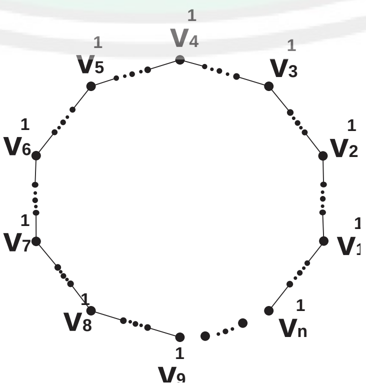
Sisi penutup minimal pada graf roda $(m)_c\, W_n^k$ adalah:

$$\alpha_1((m)_c\, W_n^k) := \begin{cases} m\left(\frac{1}{2}(2kn+n+2)\right); n\ genap\ dan\ k\ genap \\ m\left(\frac{1}{2}(2kn+n+3)\right); n\ ganjil\ dan\ k\ genap \\ m(n(k+1));\ untuk\ \ k\ ganjil, n \in N, n \geq 3 \end{cases}$$

**Bukti Lemma 14**

**1. Untuk $k$ genap**

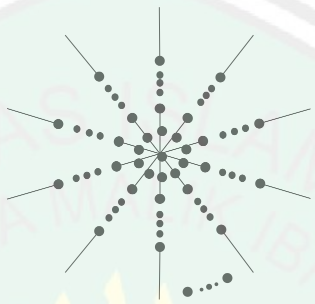
Pada graf $W_n^k$ pandang sikel luarnya:




Gambar 3.19 Graf Sikel $\boldsymbol{C_{n(k+1)}}$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Graf tersebut berupa $C_{n(k+1)}$. Jika $n$ ganjil maka $n(k+1)$ adalah ganjil, dan jika $n$genap maka $n(k+1)$ adalah genap. Sehingga $\alpha\big(C_{n(k+1)}\big) = \frac{1}{2}(n(k+1)+1)$ untuk $n$ ganjil dan $\alpha\big(C_{n(k+1)}\big) = \frac{1}{2}\big(n(k+1)\big)$ untuk $n$ genap. Selanjutnya pandang graf bintang tanpa titik terluarnya:



Gambar 3.20 Graf Bintang $\boldsymbol{S_n^{k-1}}$

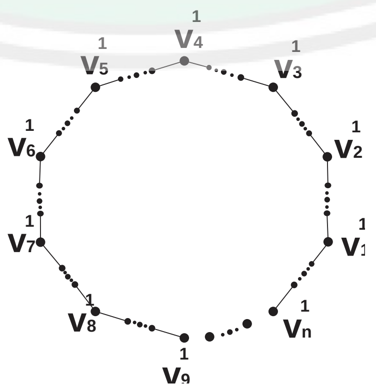
Graf $S_n^k$ tanpa titik terluar ini sama dengan graf $S_n^{k-1}$. Karena $k$ genap maka $k-1$ ganjil. Sesuai bukti lemma 6, diperoleh:

$$\alpha_1(S_n^{k-1}) := \frac{1}{2}n\big((k-1)+1\big)+1 = \frac{1}{2}nk+1$$

Jadi, $\alpha_1(W_n^k) := \begin{cases} \frac{1}{2}\big(n(k+1)\big)+\frac{1}{2}nk+1 = \frac{1}{2}(2kn+n+2); \text{untuk } n \text{ genap} \\ \frac{1}{2}(n(k+1)+1)+\frac{1}{2}nk+1 = \frac{1}{2}(2kn+n+3); \text{untuk } n \text{ ganjil} \end{cases}$

**2. Untuk $k$ ganjil**

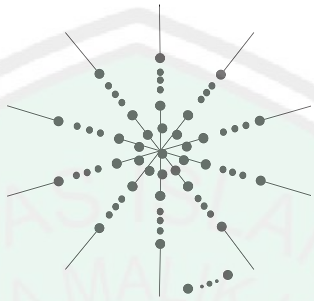
Pada graf $W_n^k$ pandang sikel luarnya:




Gambar 3.21 Graf Sikel $\boldsymbol{C_{n(k+1)}}$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Graf tersebut berupa $C_{n(k+1)}$. Karena $k$ ganjil maka $(k+1)$ genap, sehingga $n(k+1)$ selalu genap. Jadi $\alpha\left(C_{n(k+1)}\right) = \frac{1}{2}\left(n(k+1)\right)$. Selanjutnya pandang graf bintang tanpa titik terluarnya:



Gambar 3.22 Graf Bintang $S_n^{k-1}$

Graf $S_n^k$ tanpa titik terluar ini sama dengan graf $S_n^{k-1}$. Karena $k$ ganjil maka $k-1$ genap. Sesuai bukti lemma 6, maka:

$$\alpha_1(S_n^{k-1}) := \frac{1}{2}n((k-1)+1)+1$$

Jadi diperoleh,

$$\alpha_1(W_n^k) := \frac{1}{2}\left(n(k+1)\right) + \frac{1}{2}n((k-1)+1)+1 = n(k+1);\ n \in N, n \geq 3$$

Dari 1 dan 2, karena $(m)_c\, W_n^k$ terdiri dari $m\, W_n^k$ yang titik pusat berurutan dihubungkan langsung maka sisi penutup minimal pada graf roda $(m)_c\, W_n^k$ ditunjukkan pada gambar 3.14 sehingga:

$$\alpha_1((m)_c\, W_n^k) := \begin{cases} m\left(\frac{1}{2}(2kn+n+2)\right); n\ genap\ dan\ k\ genap \\ m\left(\frac{1}{2}(2kn+n+3)\right); n\ ganjil\ dan\ k\ genap \\ \quad m(n(k+1));\ k\ ganjil, n \in N, n \geq 3 \end{cases}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

# BAB IV

# PENUTUP

## 4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada BAB III, maka diperoleh kesimpulan berikut:

1. Graf bintang $(m)_c\, S_n^k$ dengan $n \in N, n \geq 3$. maka rumusan titik dan sisi penutup minimal masing-masing adalah:

   a. $\alpha(S_n) = 1$ dan $\alpha_1(S_n) = n$.

   b. $\alpha((m)_c\, S_n^1) = m$ dan $\alpha_1((m)_c\, S_n^1) = m\ x\ n$.

   c. $$\alpha((m)_c\, S_n^k) \coloneqq \begin{cases} m\left(\frac{1}{2}kn + 1\right) ; untuk\ k\ genap \\ m\left(\frac{1}{2}n(k+1) + 1\right) ; untuk\ \ k\ ganjil \end{cases}$$

   dan $$\alpha_1((m)_c\, S_n^k) \coloneqq \begin{cases} m\left(n\left(\frac{1}{2}k + 1\right)\right) ; untuk\ k\ genap \\ m\left(\frac{1}{2}n(k+1) + 1\right) ; untuk\ \ k\ ganjil \end{cases}$$

2. Graf roda $(m)_c W_n^k$ dengan $n \in N, n \geq 3$. maka rumusan titik dan sisi penutup minimal masing-masing adalah:

   a. $$\alpha(W_n) \coloneqq \begin{cases} \frac{1}{2}n + 1 ; untuk\ n\ genap \\ \frac{1}{2}(n+1) + 1 ;\ untuk\ \ n\ ganjil \end{cases}$$

   $$\alpha_1(W_n) \coloneqq \begin{cases} \frac{1}{2}n + 1 ; untuk\ n\ genap \\ \frac{1}{2}(n+1) ;\ untuk\ \ n\ ganjil \end{cases}$$

   b. $$\alpha((m)_c W_n^1) \coloneqq \begin{cases} m\left(\frac{1}{2}n + 1\right) ; untuk\ n\ genap \\ m\left(\frac{1}{2}(n+1) + 1\right) ;\ untuk\ \ n\ ganjil \end{cases}$$



CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\text{dan } \alpha_1((m)_c W_n^1) \coloneqq \begin{cases} m\left(\frac{1}{2}n+1\right) ; untuk\ n\ genap \\ m\left(\frac{1}{2}(n+1)\right) ;\ untuk\ \ n\ ganjil \end{cases}$$

c. $$\alpha\big((m)_c W_n^k\big)\ dan\ \alpha_1\big((m)_c\ W_n^k\big) \coloneqq \begin{cases} m\left(\frac{1}{2}(2kn+n+2)\right); n\ genap,\ k\ genap \\ m\left(\frac{1}{2}(2kn+n+3)\right); n\ ganjil,\ k\ genap \end{cases}$$

$$\alpha((m)_c W_n^k) \coloneqq \{m(nk+1)$$

dan $\alpha_1((m)_c\ W_n^k) \coloneqq \{m\big(n(k+1)\big);\ k$ ganjil dan $n \in N, n \geq 3$

## 4.2 Saran

Dalam penulisan tugas akhir ini, penulis hanya memberikan saran kepada pembaca yang tertarik pada permasalahan ini supaya mengembangkannya dengan membangun lemma dari titik dan sisi penutup minimal pada graf yang lainnya dengan memanfaatkan lemma-lemma yang sudah ada sebelumnya.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

## DAFTAR PUSTAKA


Abdullah Bin Muhammad.2007. *Tafsir Ibnu Katsir Jilid 6*. Bogor: Pustaka Imam Asy-Syafii

Abdussakir, dkk. 2009. *Teori Graf*. Malang: UIN Press

Al-Maragi, Ahmad Musthafa.1992. *Tafsir Al-Maraghi Juz 18 dan 22* . Semarang: Toha Putra

Al-Qurthubi, Syaikh Imam. 2009. Tafsir Al-Qurthubi. Penj. Fathurrahman Abdul Hamid dkk. Jakarta: Pustaka Azzam

Balakrishnan.V.K. 1995. *Schaum's Outline of Theory and Problems of Combinatorics*. New York: Mc Graw Hill. Inc

Bondy, J.A. and Murty, U.S.R. 2008. *Graph Theory*. USA: Elsevier Science Publishing Co

Chatrand, Gery and Lesniak, Linda. 1986. *Graphs and Digraphs Second Edition*. California: a Division of Wadsworth.Inc.

Gallian, J. A. 2007. "A Dynamic Survey of Graph Labeling. (Online:http//www. Combinatorics.org/Surveys/dr6.pdf). Diakses 11 Oktober 2011

Purwanto. 1998. *Teori Graph*. Malang: IKIP MALANG.

Rosen, Kenneth H. 2003. *Discrete Mathemathics ang Its Application*: Fifth Edition. Singapore: Mc. Graw-Hill.

Wilson, Robin J dan Watkins. 1990. *Graph and Introductory Approach*. Singapore: Open University course.

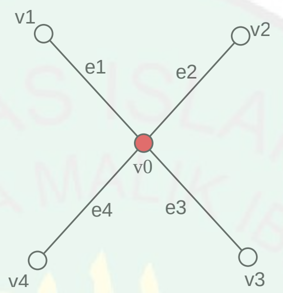

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

# LAMPIRAN

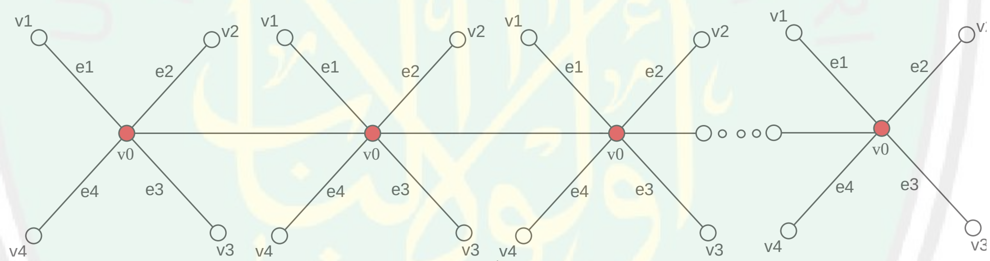
## LAMPIRAN 1

Gambar titik dan sisi penutup minimal pada Graf Bintang

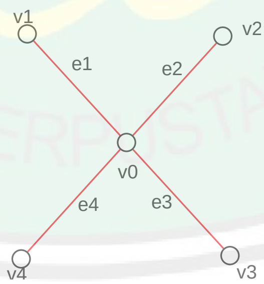
**1. Graf bintang $S_4$:**



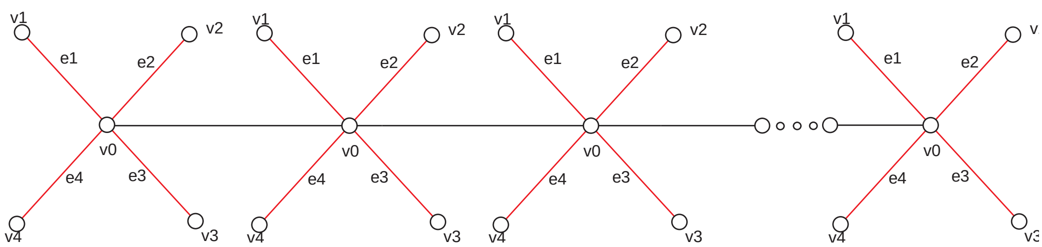

$$\alpha(S_4) \coloneqq 1$$




$$\alpha((m)_c\, S_4^1) \coloneqq 1\ x\ m$$



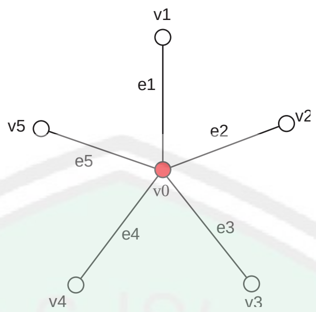

$$\alpha_1(S_4) \coloneqq 4$$



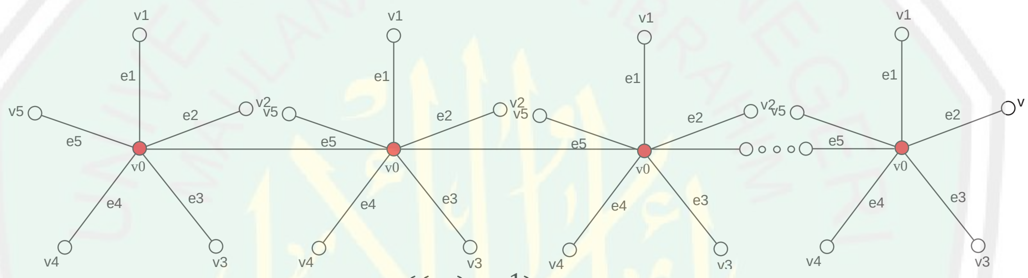

$$\alpha_1((m)_c\, S_4^1) \coloneqq 4\ x\ m$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

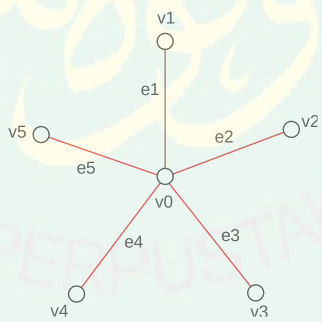
2. **Graf bintang $S_5$:**



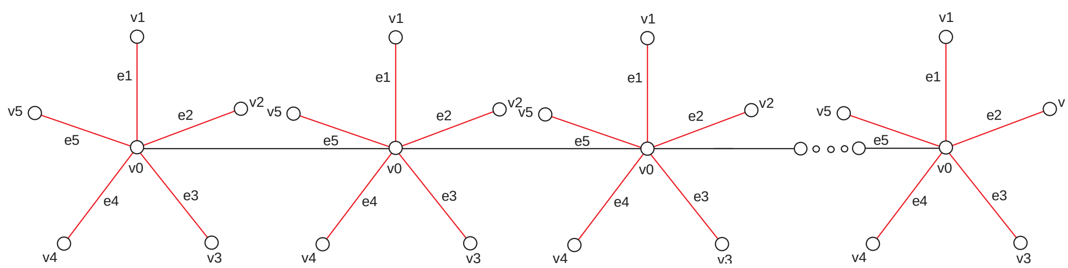

$$\alpha(S_5) \coloneqq 1$$




$$\alpha((m)_c\, S_5^1) \coloneqq 1\; x\; m$$



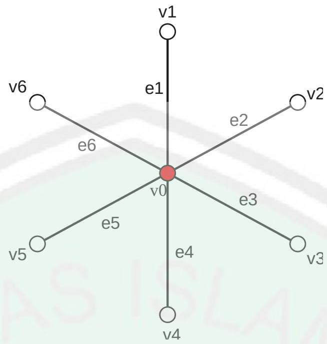

$$\alpha_1(S_5) \coloneqq 5$$



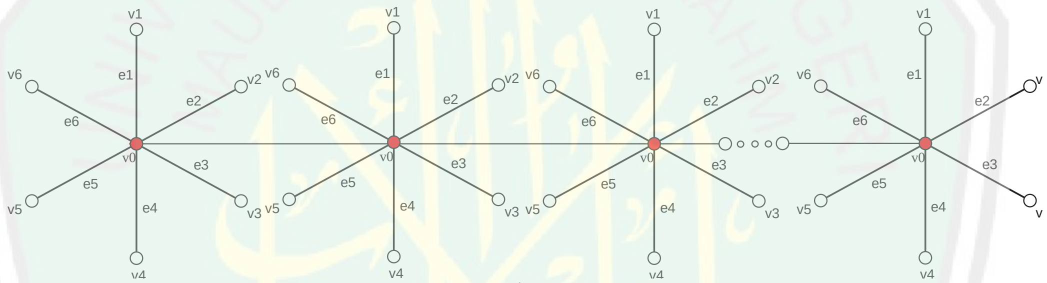

$$\alpha_1((m)_c\, S_5^1) \coloneqq 5\; x\; m$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

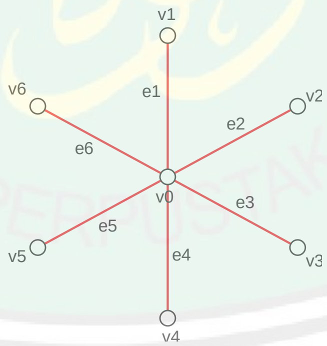
**3. Graf bintang $S_6$:**



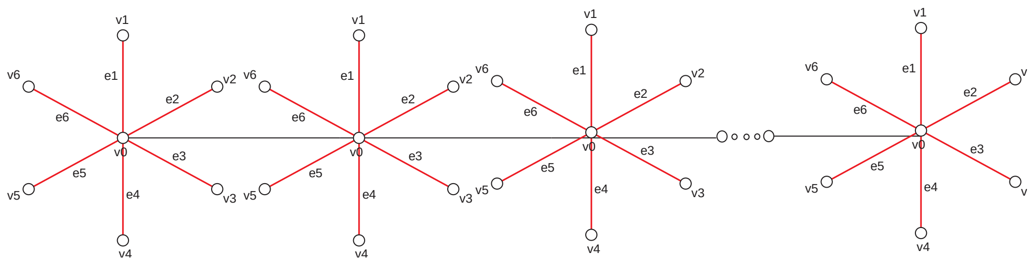

$$\alpha(S_6) \coloneqq 1$$




$$\alpha((m)_c\, S_6^1) \coloneqq 1\; x\; m$$



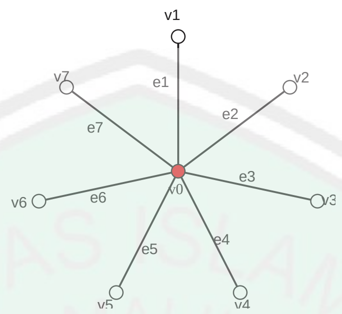

$$\alpha_1(S_6) \coloneqq 6$$



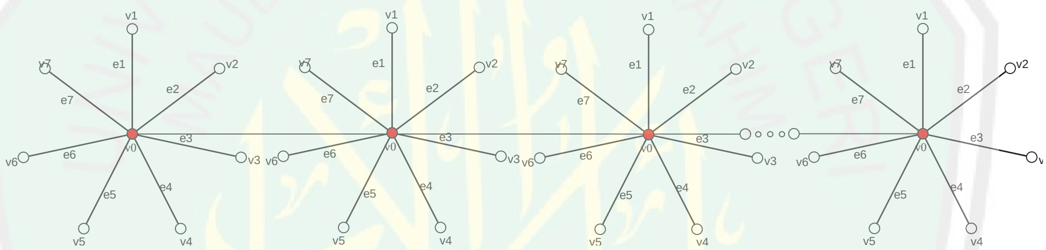

$$\alpha_1((m)_c\, S_6^1) \coloneqq 6\; x\; m$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

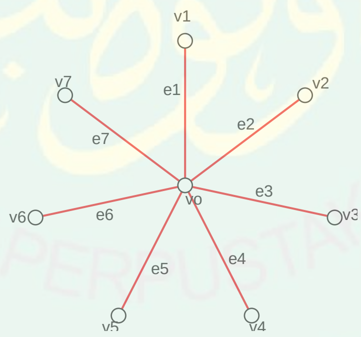
**4. Graf bintang $S_7$:**



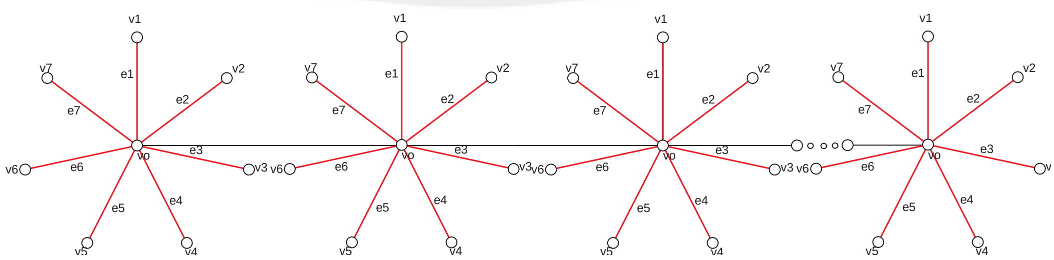

$$\alpha(S_7) \coloneqq 1$$




$$\alpha((m)_c\, S_7^1) \coloneqq 1\ x\ m$$



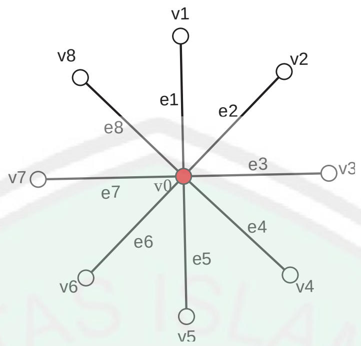

$$\alpha_1(S_7) \coloneqq 7$$



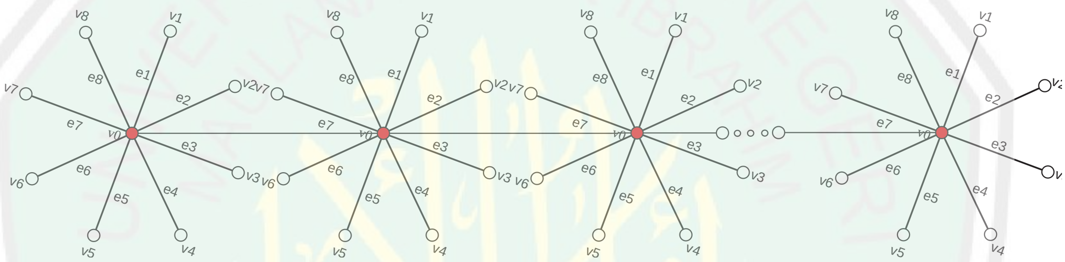

$$\alpha_1((m)_c\, S_7^1) \coloneqq 7\ x\ m$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

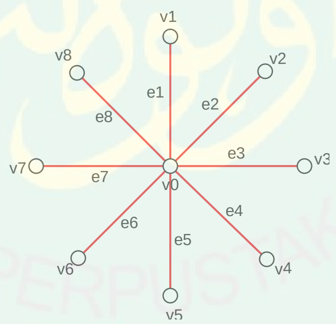
**5. Graf bintang $S_8$:**



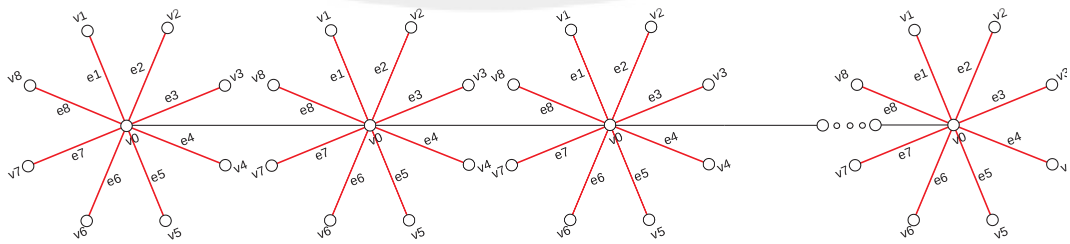

$$\alpha(S_8) \coloneqq 1$$




$$\alpha((m)_c\, S_8^1) \coloneqq 1\; x\; m$$



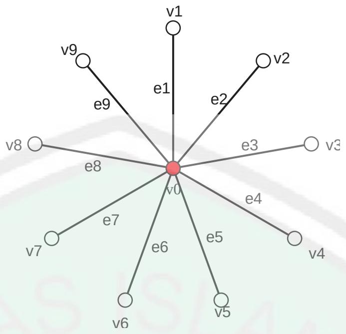

$$\alpha_1(S_8) \coloneqq 8$$



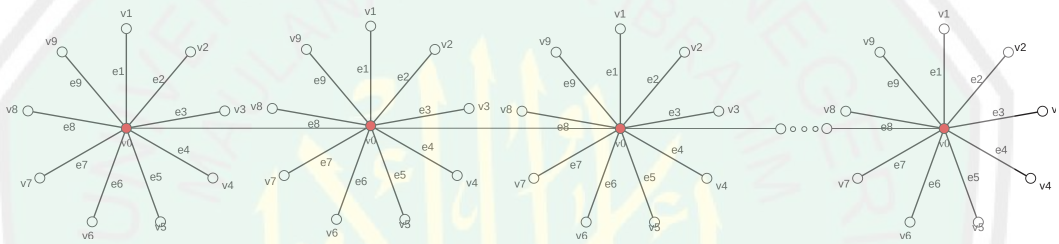

$$\alpha_1((m)_c\, S_8^1) \coloneqq 8\; x\; m$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

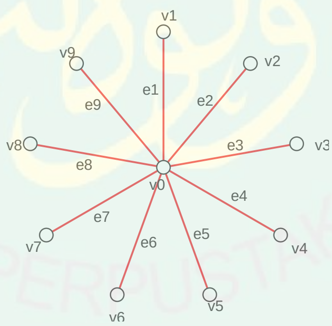
## 6. Graf bintang $S_9$:



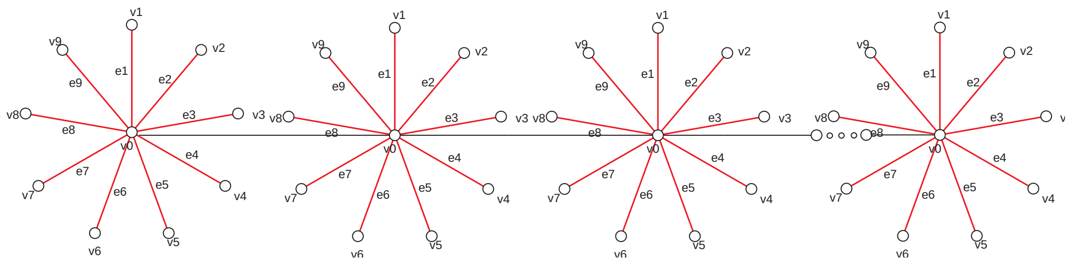

$$\alpha(S_9) \coloneqq 1$$




$$\alpha((m)_c S_9^1) \coloneqq 1\ x\ m$$



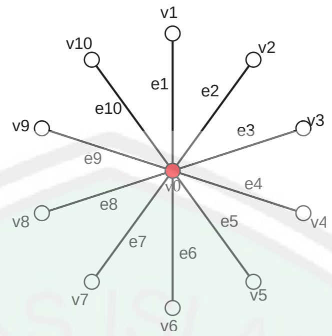

$$\alpha_1(S_9) \coloneqq 9$$



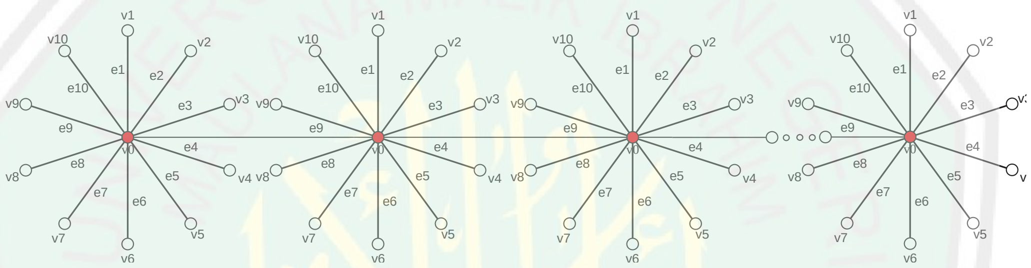

$$\alpha_1((m)_c S_9^1) \coloneqq 9\ x\ m$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

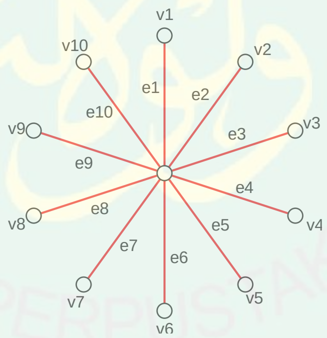
7. **Graf bintang $S_{10}$:**



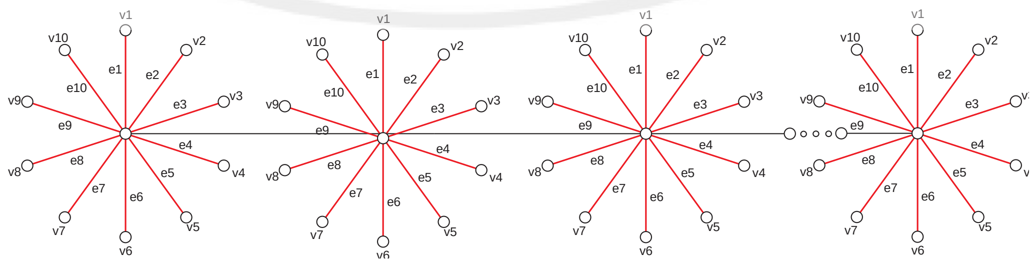

$$\alpha(S_{10}) \coloneqq 1$$




$$\alpha((m)_c S_{10}^1) \coloneqq 1\ x\ m$$




$$\alpha_1(S_{10}) \coloneqq 10$$



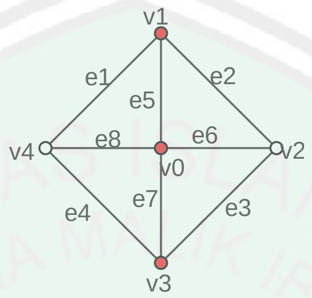

$$\alpha_1((m)_c\, S_{10}^1) \coloneqq 10\ x\ m$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

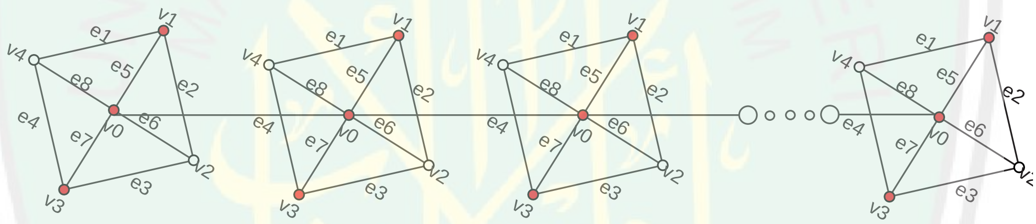
**LAMPIRAN 2**

Gambar titik dan sisi penutup minimal pada graf roda.

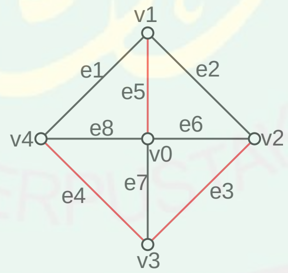
**1. Graf roda $W_4$:**



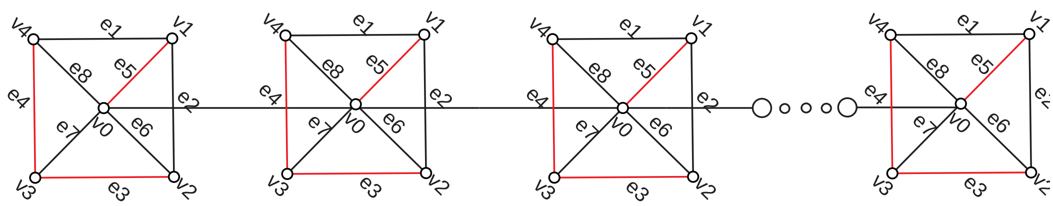

$$\alpha(W_4) \coloneqq 3$$



$$\alpha((m)_c\, W_4^1) \coloneqq 3\ x\ m$$



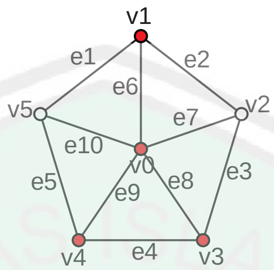

$$\alpha_1(W_4) \coloneqq 3$$



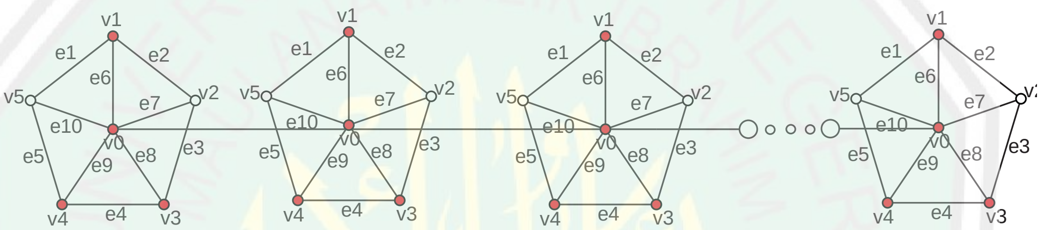
$$\alpha_1((m)_c\, W_4^1) \coloneqq 3\ x\ m$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

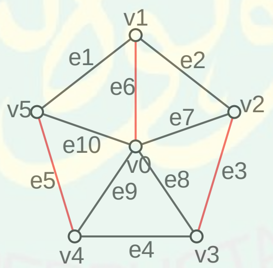
**2. Graf roda $W_5$:**



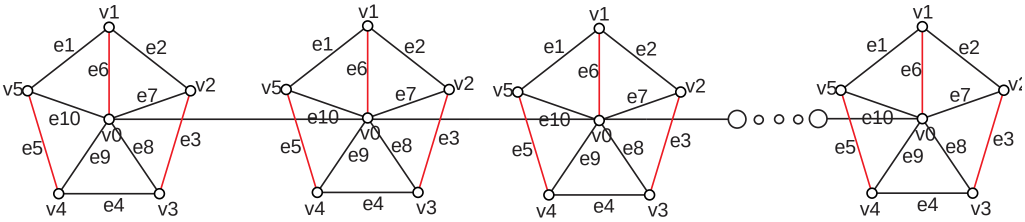

$$\alpha(W_5) \coloneqq 4$$




$$\alpha((m)_c\, W_5^1) \coloneqq 4\ x\ m$$



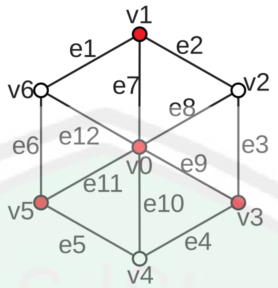

$$\alpha_1(W_5) \coloneqq 3$$



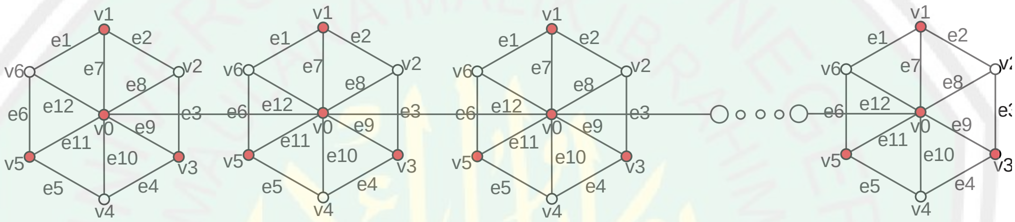

$$\alpha_1((m)_c W_5^1) \coloneqq 3\ x\ m$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

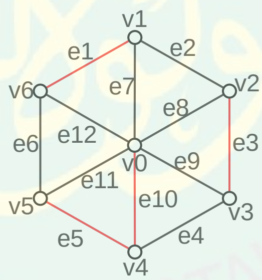
3. **Graf roda $W_6$:**



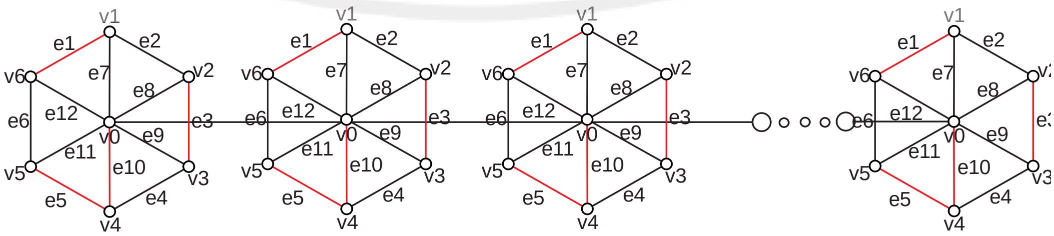

$\alpha(W_6) \coloneqq 4$




$\alpha((m)_c\, W_6^1) \coloneqq 4\ x\ m$



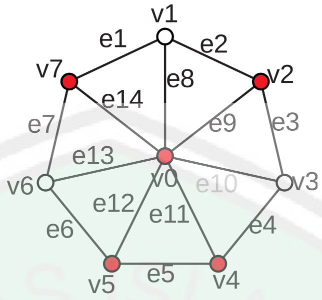

$\alpha_1(W_6) \coloneqq 4$



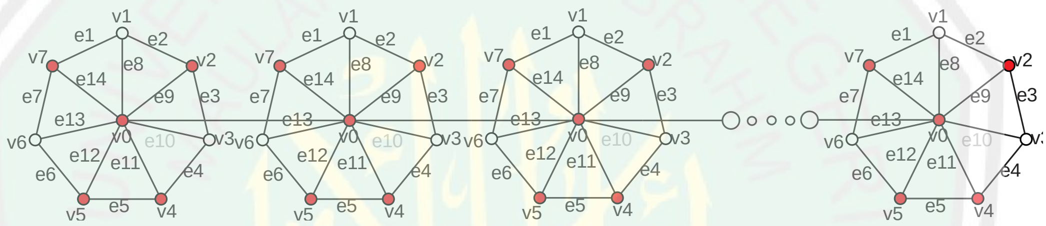

$\alpha_1((m)_c W_6^1) \coloneqq 4\ x\ m$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

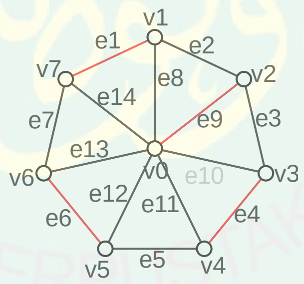
**4. Graf roda $W_7$:**



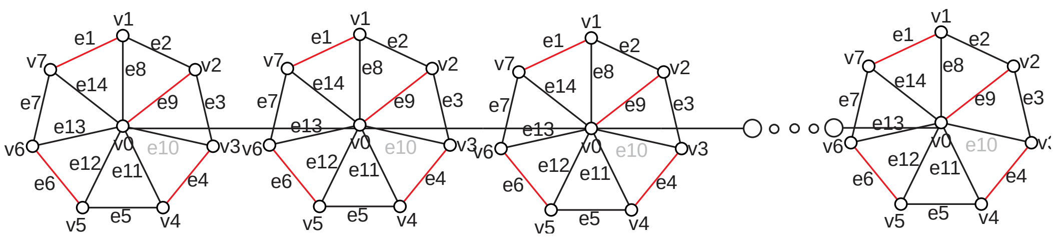

$\alpha(W_7) \coloneqq 5$




$\alpha((m)_c\, W_7^1) \coloneqq 5\ x\ m$



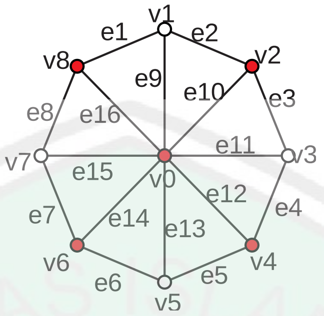

$\alpha_1(W_7) \coloneqq 4$



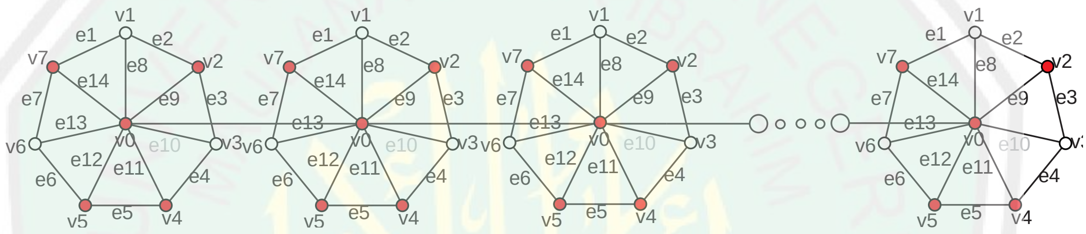

$\alpha_1((m)_c W_7^1) \coloneqq 4\ x\ m$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

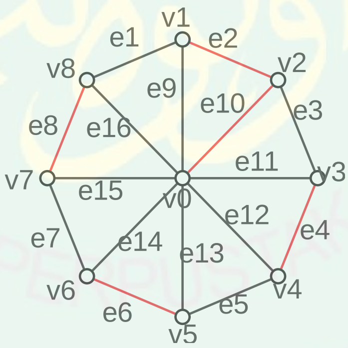
5. **Graf roda $W_8$:**



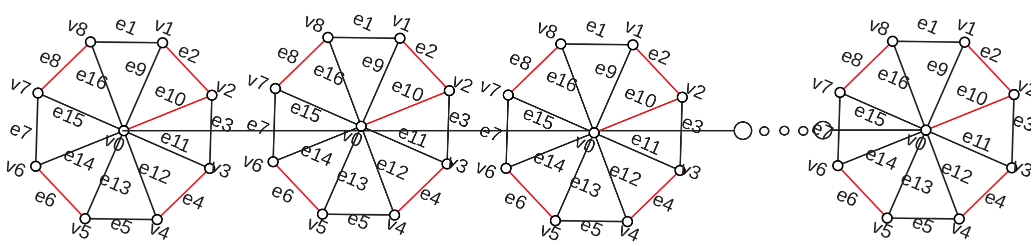

$\alpha(W_8) \coloneqq 5$




$\alpha((m)_c\, W_8^1) \coloneqq 5\ x\ m$



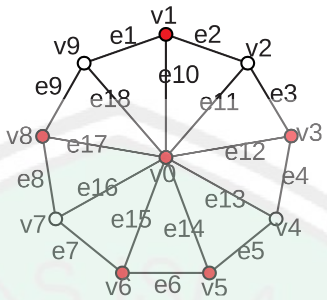

$\alpha_1(W_8) \coloneqq 5$



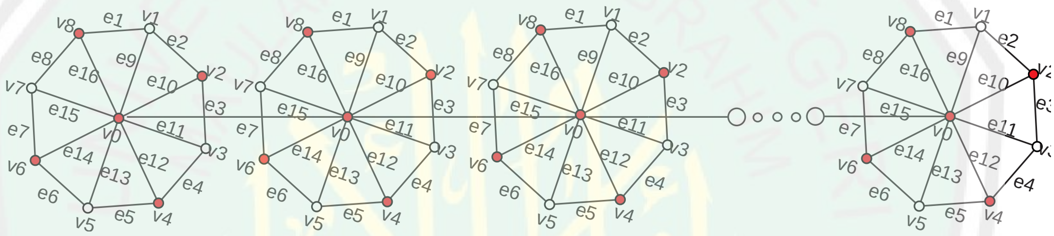

$\alpha_1((m)_c W_8^1) \coloneqq 5\ x\ m$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

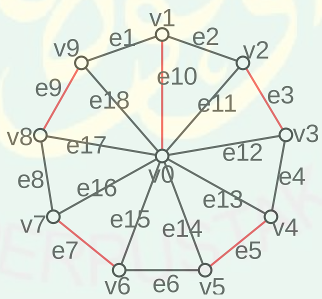
**6. Graf roda $W_9$:**



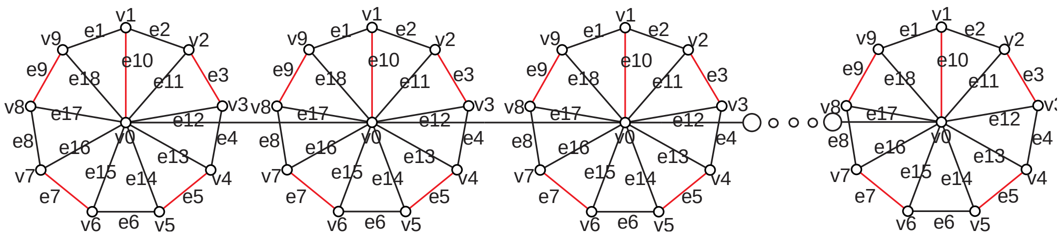

$$\alpha(W_9) \coloneqq 6$$




$$\alpha((m)_c\, W_9^1) \coloneqq 6\ x\ m$$



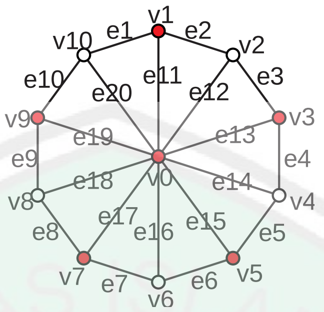

$$\alpha_1(W_9) \coloneqq 5$$



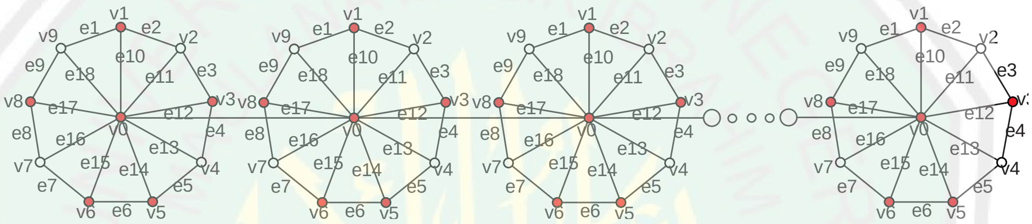

$$\alpha_1((m)_c\, W_9^1) \coloneqq 5\ x\ m$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

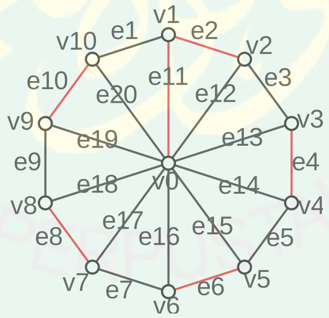
**7. Graf roda $W_{10}$:**



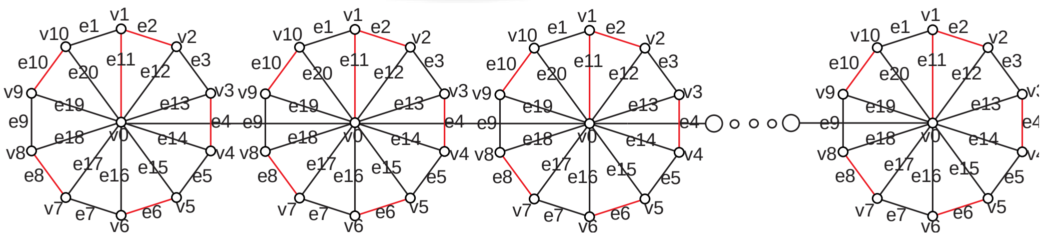

$\alpha(W_{10}) \coloneqq 6$




$\alpha((m)_c\, W_{10}^1) \coloneqq 6\ x\ m$




$\alpha_1(W_{10}) \coloneqq 6$




$\alpha_1((m)_c\, W_{10}^1) \coloneqq 6\ x\ m$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG