

**SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN SAINT VENANT 3D
DAN PERSAMAAN NAVIER STOKES 3D**

SKRIPSI

oleh
SILVA AHMAD ADINI
NIM. 07610043



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MAULANA MALIK
IBRAHIM
MALANG
2011**

**SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN SAINT VENANT η D
DAN PERSAMAAN NAVIER STOKES η D**

SKRIPSI

Diajukan kepada

**Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)**

**oleh
SILVA AHMAD ADINI
NIM. 07610043**

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2011**

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Silva Ahmad Adini

NIM : 07610043

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri.

Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 10 Januari 2011
Yang membuat pernyataan

Silva Ahmad Adini
NIM. 07610043

**SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN SAINT VENANT 3D
DAN PERSAMAAN NAVIER STOKES 3D**

SKRIPSI

oleh
SILVA AHMAD ADINI
NIM. 07610043

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji

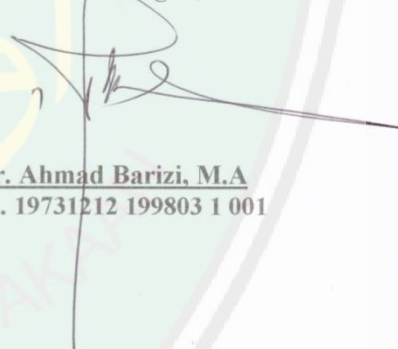
Tanggal: 11 Maret 2011

Pembimbing I,



Ari Kusumastuti, M.Pd
NIP. 19770521 200501 2 004

Pembimbing II,



Dr. Ahmad Barizi, M.A
NIP. 19731212 199803 1 001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19750106 200312 1 001

SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN SAINT VENANT 2D DAN PERSAMAAN NAVIER STOKES 2D

SKRIPSI

oleh

Silva Ahmad Adini

NIM. 07610043

Telah dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan Untuk
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal, 20 Maret 2011

Susunan Dewan Penguji

Tanda Tangan

- | | | |
|------------------|---|-----|
| 1. Penguji Utama | : <u>Usman Pagalay, M.Si</u>
NIP. 1960.0414 200312 1 0 1 | () |
| 2. Ketua | : <u>Abdul Aziz, M.Si</u>
NIP. 1976.0318 200604 1 0 2 | () |
| 3. Sekretaris | : <u>Ari Kusumastuti, M.Pd</u>
NIP. 1977.0511 200501 2 0 4 | () |
| 4. Anggota | : <u>Dr. H. Ahmad Barizi, M.A</u>
NIP. 19731212 199803 1 0 1 | () |

**Mengetahui dan Mengesahkan
Ketua Jurusan Matematika**

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19701006 200312 1 0 1

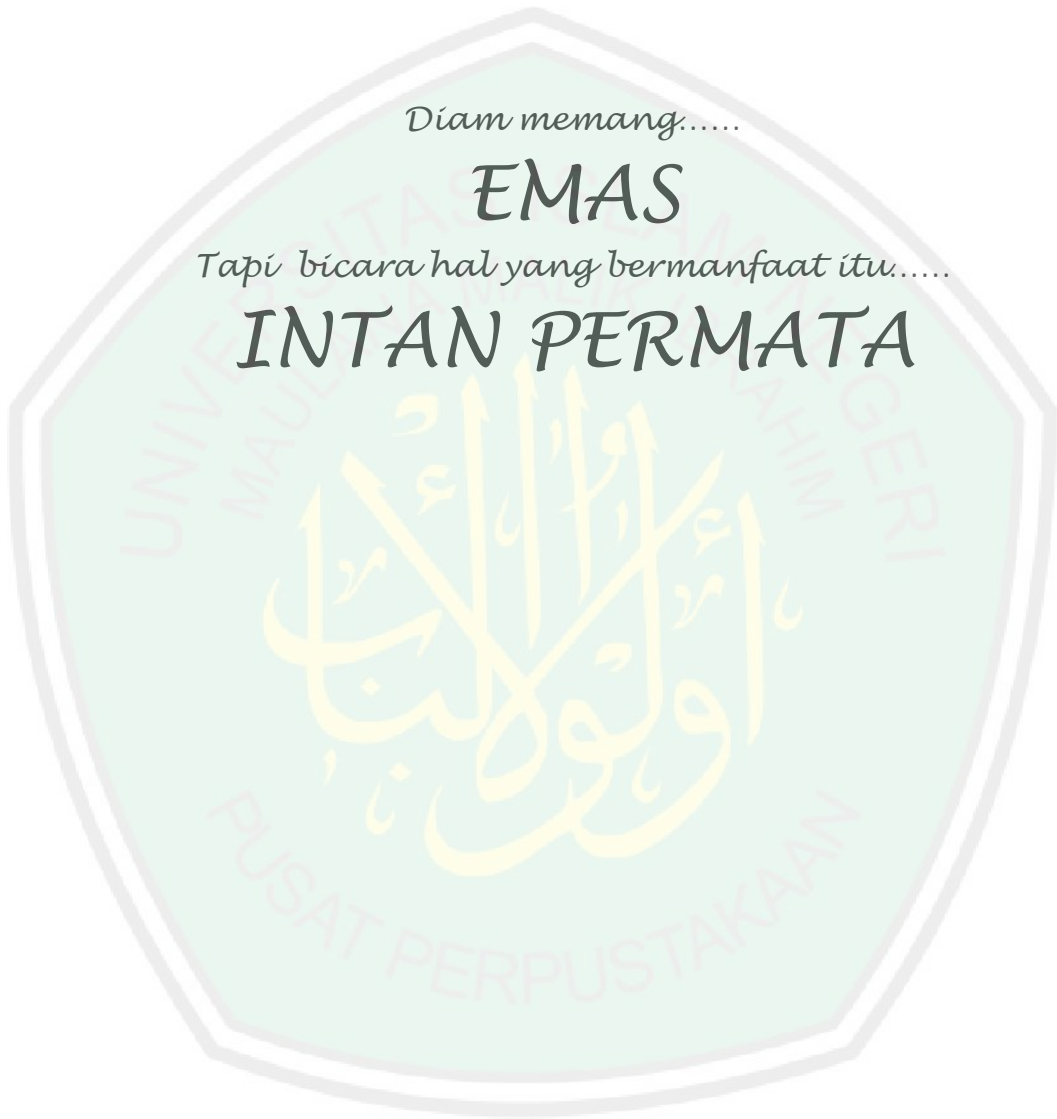
MOTTO

Diam memang.....

EMAS

Tapi bicara hal yang bermanfaat itu.....

INTAN PERMATA



PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan kepada...

Ayah & Ibu tercinta
Ahmad Farid & Trias Silfiati
Adik-adik tersayang
Dek Faiz, Dek Zaky
Serta orang-orang yang telah
Menorehkan kenangan manis dan pahit
Bersama penulis
Sehingga penulis dapat lebih tegar
Menghadapi hidup.

KATA PENGANTAR

Bismillahirrohmaanirrohiim

Alhamdulillahirobbil'alamiin... Tiada kata yang lebih pantas yang dapat penulis ungkapkan selain puji syukur ke hadirat Allah SWT yang telah memberikan rahmat, karunia dan Ridho-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini tepat pada waktunya.

Shalawat serta salam semoga senantiasa terlantunkan kepada Nabi Muhammad SAW yang telah membimbing ummat ke jalan yang lurus dan jalan yang diridhoi-Nya yakni agama Islam.

Skripsi ini disusun untuk memenuhi salah satu persyaratan guna memperoleh gelar strata satu Sarjana Sains (S.Si) di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Berkat rahmat Allah dan dengan bantuan, bimbingan juga dorongan dari berbagai pihak, maka penulis mengucapkan banyak terima kasih serta ucapan doa, semoga Allah SWT membalas semua kebaikan dan menyinari jalan yang diridhoi-Nya, khususnya kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, S.U, D.Sc selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.

٣. Abdussakir, M.Pd selaku ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
٤. Ari Kusumastuti, M.Pd sebagai pembimbing dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Atas bimbingan, arahan, saran, motivasi dan kesabarannya, sehingga penulis dapat menyelesaikan ini dengan baik, penulis sampaikan *Jazakumullah Ahsanal Jaza'*.
٥. Dr. H. Ahmad Barizi, M.A selaku pembimbing penulis dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Atas bimbingan, arahan, saran, motivasi dan kesabarannya, sehingga penulis dapat menyelesaikan ini dengan baik, penulis sampaikan *Jazakumullah Ahsanal Jaza'*.
٦. Seluruh dosen Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang, yang telah mendidik, membimbing, mengajarkan dan mencurahkan ilmu-ilmunya kepada penulis. Semoga Allah membalas amal kebbaikannya.
٧. Kedua orang tua tercinta, Trias Silfiati dan Drs. Ahmad Farid yang telah mencurahkan cinta dan kasih-sayang teriring do'a, motivasi, dan materi, sehingga penulis selalu optimis dalam menggapai kesuksesan hidup.
٨. Adik Faiz dan Adik Zaky tersayang yang telah memberikan dukungan, doa dan motivasi bagi penulis.
٩. Teman-teman penulis Fitrianti Rumfot, Dewi Erla Mahmudah, dan seluruh teman-teman jurusan matematika khususnya angkatan ٢٠٠٧ yang berjuang

bersama-sama untuk mencapai kesuksesan yang diimpikan. Terimakasih atas segala pengalaman berharga dan kenangan terindah yang telah terukir.

١٠. Ustadz Mukhlas, dan semua santri pengajian mingguan yang telah memberikan motivasi serta mengajari penulis makna hidup yang sebenarnya.

١١. Semua pihak yang telah membantu dalam penyelesaian skripsi ini, yang tidak dapat disebutkan satu per satu.

Semoga karya ilmiah yang berbentuk skripsi ini dapat bermanfaat dan berguna. Akhirul kalam semoga Allah berkenan membalas kebaikan kita semua.

Amin ya Robbal ‘Alamiin....

Malang, ٠٥ Januari ٢٠١١

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN SAMPUL	
HALAMAN PENGAJUAN	
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
HALAMAN MOTTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR	i
DAFTAR ISI.....	iv
DAFTAR GAMBAR	vi
DAFTAR TABEL.....	vii
ABSTRAK	vii
BAB I PENDAHULUAN.....	1
1.1. Latar Belakang	1
1.2. Rumusan Masalah.....	4
1.3. Tujuan Penelitian	4
1.4. Batasan Masalah	5
1.5. Manfaat Penelitian	5
1.6. Metode Penelitian	5
1.7. Sistematika Penulisan	6
BAB II KAJIAN PUSTAKA.....	7
2.1. Makna-Makna Matematika dari dalil naqli.....	7
2.2. Persamaan Differensial Parsial	8
2.3. Turunan Parsial	9
2.4. Persamaan Differensial Parsial Linear dan Tak Linear	11
2.5. Persamaan Differensial Ordo Pertama	11
2.6. Persamaan Navier-Stokes dan Saint Venant	14
2.7. Metode Numerik	21
2.8. Pendekatan Turunan Beda Hingga	22

۲.۹. Bilangan Reynolds	۲۴
BAB III PEMBAHASAN	۲۵
۳.۱. Implementasi Algoritma pada Persamaan Navier Stokes.....	۲۸
۳.۲. Implementasi Algoritma pada Persamaan Saint Venant.....	۳۶
BAB IV PENUTUP	۴۲
۴.۱. Kesimpulan	۴۲
۴.۲. Saran	۴۳
DAFTAR PUSTAKA	
LAMPIRAN-LAMPIRAN	

DAFTAR GAMBAR

Gambar ٢.١ Pergerakan Partikel di X Momentum ١٢

Gambar ٢.٢ Pola Beda Hingga ٢٣

Gambar ٣.١ *Shallow Water* ٢٦

Gambar ٣.٢ Pola x Momentum Navier Stokes ٢٩

Gambar ٣.٣ Pola y Momentum Navier Stokes ٣٣

Gambar ٣.٤ Pola x Momentum Saint Venant..... ٣٧

Gambar ٣.٥ Pola y Momentum Saint Venant ٣٩

Gambar ٤.١ Solusi Persamaan Navier Stokes ٢D..... ٤٣

Gambar ٤.٢ Solusi Persamaan Saint Venant ٢D ٤٣

DAFTAR TABEL

Tabel ٣.١ Kondisi Awal dan Kondisi Batas	٢٥
--	----



ABSTRAK

Adini, Silva Ahmad. 2011. **Solusi Numerik Persamaan Saint Venant 2D dan Persamaan Navier Stokes 2D**. Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Pembimbing: (I) Ari Kusumastuti, M.Pd
(II) Dr. H. Ahmad Barizi M.A

Kata Kunci: Persamaan Saint Venant 2D, Persamaan Navier Stokes 2D, metode ADI.

Salah satu permasalahan dalam topik Persamaan Differensial Parsial adalah menentukan solusi dari persamaan Saint venant dan Navier–Stokes 2D pada penerapannya di perairan dangkal (*shallow water*). Kedua persamaan ini termasuk dalam kategori Persamaan Diferensial Parsial non linier. Persamaan Diferensial Parsial adalah persamaan yang mengandung satu atau lebih turunan-turunan parsial. Persamaan seperti ini sangat rumit untuk dikaji secara eksak.

Dalam penelitian ini dipilih solusi numerik dengan metode *Alternating Direct Implicit* dalam memformulasikan solusi – solusi di setiap titik grid dari objek persegi. Software MATLAB untuk program yang dikonstruksi dapat menjelaskan solusi u dan v . Amplitudo baru untuk t selanjutnya dapat diinterpretasikan dalam grafik 2D dan 3D agar dapat dikaji lebih mendalam.

ABSTRACT

Adini, Silva Ahmad. ٢٠١١. **Numerical Solution for Saint Venant ٢D Equation and Navier Stokes ٢D Equation.** Thesis. Mathematics Departement Science and Technology Faculty Islamic State University Maulana Malik Ibrahim Malang.

Adviser: (I) Ari Kusumastuti, M.Pd
(II) Dr. H. Ahmad Barizi M.A

Key Word: MATLAB, Numeric, ADI, Numerical Solution, Saint Venant ٢D equation, Navier Stokes ٢D equation.

Partial Differential Equation is an equation that contains one or more partial derivatives. One of PDE's problem is determining the solution of ٢D Saint Venant equation and ٢D Navier-Stokes equation on shallow water implementation. Both equations are belonging to non-linear PDE. The exact solution of them are very difficult to find.

In this research, numerical solution with Alternating Direct Implicit methode is choosen to formulate solutions in every grid spot from rectangle object. Software MATLAB that has been built can explain u and v solution. New amplitude for new t hence it can describe in ٢D and ٣D graph to study further.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Al Quran wahyu Allah yang berisi aturan-aturan yang memuat segala aspek kehidupan manusia, tidak hanya masalah peribadatan ataupun sosial tetapi juga masalah keilmuan masa lampau, kini, dan masa depan. Hal ini disebutkan dalam Al Quran

﴿ إِنَّمَا إِلَهُكُمُ اللَّهُ الَّذِي لَا إِلَهَ إِلَّا هُوَ وَسِعَ كُلَّ شَيْءٍ عِلْمًا ﴾

Artinya: Sesungguhnya Tuhanmu hanyalah Allah, yang tidak ada Tuhan selain Dia. Pengetahuan-Nya meliputi segala sesuatu".

Dalam suatu hadist diceritakan:

﴿ إِنَّ أَوَّلَ مَا خَلَقَ اللَّهُ الْقَلَمَ فَقَالَ لَهُ: اكْتُبْ، قَالَ: رَبِّ وَمَاذَا أَكْتُبُ؟ قَالَ: أَكْتُبُ مَقَادِيرَ كُلِّ شَيْءٍ حَتَّى تَقُومَ السَّاعَةُ. ﴾

Artinya: Sesungguhnya yang pertama kali diciptakan Allah adalah qalam, lalu berfirman kepada-Nya, "Tulislah" Qalam berkata, "Wahai Rabb, apa yang harus kutulis?" Allah berkata, "Tulislah ketentuan-ketentuan segala sesuatu hingga terjadinya Kiamat (Diriwayatkan oleh Abu Daud dan Ahmad) (anonim, 2011).

Hadits di atas menerangkan salah satu ayat Al Quran:

﴿ إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَاهُ بِقَدَرٍ ﴾

Artinya: Sesungguhnya Kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran.(Al Qomar:49)

Dari dalil – dalil di atas telah jelas bahwa yang menetapkan setiap hukum, ketentuan, ataupun sifat segala sesuatu di jagat raya ini hingga kiamat nanti adalah

Allah. Sedangkan manusia hanyalah diberi kewajiban untuk mempelajarinya agar semakin tebal keimanannya seperti salah satu hadits nabi “*Mencari ilmu itu wajib atas setiap muslim.*” (HR. Ahamad dan Ibnu Majah).

Seorang filsuf dan matematikawan, Carl Friedrich Gauss pernah mengatakan bahwa matematika adalah "Ratunya Ilmu Pengetahuan" dalam bahasa aslinya, Latin: Regina Scientiarum. Hal ini tidak berlebihan mengingat Matematika (dari bahasa Yunani: *mathēmatiká*) adalah studi besaran, struktur, ruang, dan perubahan sedangkan segala sesuatu di alam raya ini mempunyai hal tersebut (Anonim, 2011).

Pemodelan matematika dan metode numerik merupakan salah satu cabang matematika yang masih menarik untuk dibahas karena teori-teorinya masih aplikatif sampai saat ini dan dapat diterapkan untuk memecahkan masalah secara cepat dalam kehidupan sehari-hari.

Suatu model matematis akan sangat membantu dalam memudahkan persoalan perhitungan untuk masalah-masalah fenomena alam sehari-hari. Model matematika juga memberi kemudahan dalam perhitungan, analisis besaran, pengaruh dan selanjutnya justifikasi masalah. Karena memang model yang baik adalah model yang menyederhanakan kenyataan sekedar untuk memungkinkan kalkulasi matematika tetapi cukup akurat untuk memberikan kesimpulan yang berharga (Stewart, 2003).

Allah berfirman:

وَلَقَدْ ضَرَبْنَا لِلنَّاسِ فِي هَٰذَا الْقُرْآنِ مِن كُلِّ مَثَلٍ لَّعَلَّهُمْ يَتَذَكَّرُونَ ﴿٢٧﴾

Artinya: *Sesungguhnya telah Kami buatkan bagi manusia dalam Al Quran ini Setiap macam perumpamaan supaya mereka dapat pelajaran.*

Salah satu hikmah yang dapat diambil dari ayat di atas secara praktis sebagai saintis adalah jika ingin mendapatkan pelajaran dari suatu fenomena alam, maka sepatutnya harus memodelkannya agar dapat dipelajari lebih lanjut.

Persoalan yang melibatkan model matematika banyak muncul dalam berbagai disiplin ilmu pengetahuan, seperti dalam bidang fisika, kimia, ekonomi, atau pada persoalan rekayasa (engineering), seperti Teknik Sipil, Teknik Mesin, Elektro, dan sebagainya. Seringkali model matematika tersebut muncul dalam bentuk yang tidak ideal alias rumit sehingga sangat sulit untuk dicari solusinya. Model matematika yang rumit ini adakalanya tidak dapat atau sangat sulit diselesaikan dengan metode analitik yang sudah umum untuk mendapatkan solusi sejatinya (*exact solution*), seperti mencari solusi persamaan Navier-Stokes dan Saint Venant 2D pada masalah *shallow water*. Metode analitik adalah metode penyelesaian model matematika dengan rumus-rumus aljabar yang sudah baku (lazim) (Munir, 2006). Tentang solusi pendekatan ini Albert Einstein menyatakan bahwa "*sejauh hukum-hukum matematika merujuk kepada kenyataan, maka mereka tidaklah pasti; dan sejauh mereka pasti, mereka tidak merujuk kepada kenyataan.*" (Anonim, 2011). Di samping itu metode numerik dipakai karena kecepatan iterasinya yang sangat tinggi serta akan sangat memudahkan ilmuwan untuk menganalisis model karena metode numerik dapat mencitrakan dan mensimulasikan suatu model.

Persamaan Navier-Stokes adalah persamaan yang mendeskripsikan bagaimana fluida mengalir. Fluida adalah substansi yang dapat mengalir, seperti gas dan air, persamaan Navier-Stokes dapat menjelaskan permasalahan –

permasalahan dalam kehidupan sehari-hari, misalnya mengapa pesawat dapat terbang, ataupun berapa waktu yang dibutuhkan secangkir kopi yang diaduk hingga tenang. Untuk dapat mendeskripsikan aliran fluida, Navier Stokes membutuhkan dua hal yaitu: kekentalan fluida (dalam fisika kekentalan adalah gaya gesek internal pada fluida), dan kondisi awal, yaitu amplitudo fluida di setiap titik pada saat $t = 0$, kontinu dan tersusun pada suatu domain (Anonim, 2010).

Persamaan Saint Venant merupakan turunan dari persamaan Navier Stokes yang mempertimbangkan masalah tertentu, seperti arus perairan dangkal dimana skala horizontal jauh lebih besar daripada vertikal (Thesis Elisa Aldrighetti, 2007).

Dari paparan di atas, penulis bermaksud mengajukan penelitian untuk skripsi ini dengan judul *Solusi Numerik Persamaan Saint Venant 2D dan Persamaan Navier Stokes 2D*.

1.2 Rumusan Masalah

Dari latar belakang diatas, penulis mengambil rumusan masalah

1. Bagaimanakah solusi numerik persamaan Navier Stokes 2D di perairan dangkal/shallow water?
2. Bagaimanakah solusi numerik persamaan Saint Venant 2D di perairan dangkal/shallow water?

1.3 Tujuan Penelitian

1. Mengetahui solusi numerik persamaan Navier Stokes 2D di perairan dangkal/shallow water.

2. Mengetahui solusi numerik persamaan Saint Venant 2D di perairan dangkal/*shallow water*.

1.4 Batasan Masalah

1. Menggunakan Persamaan Navier Stokes 2D dan persamaan Saint Venant 2D dengan kondisi batas $u = v = 0$ pada dinding..
2. Fluida bersifat tak termampatkan (*Steady State*)
3. Menggunakan metode ADI (*Alternating Direct Implicit*).

1.5 Manfaat Penelitian

1. Bagi Penulis
Sebagai sarana tolak ukur kemampuan dan kreatifitas keilmuan selama masa kuliah untuk diterapkan pada permasalahan di lapangan.
2. Bagi Lembaga Pendidikan
Untuk pengembangan keilmuan khususnya matematika terapan dan metode numerik.
3. Bagi Masyarakat
Diharapkan penelitian ini di jadikan referensi dan dilanjutkan untuk ditemukan tindakan preventif untuk mengurangi dampak kerusakan alam

1.6 Metode Penelitian

Untuk mencari solusi persamaan Saint Venant 2D dan Navier Stokes 2D dilakukan langkah-langkah sebagai berikut

1. Dibuat bentuk persamaan diskrit dari persamaan yang dipilih dengan metode beda hingga secara sederhana.

2. Dibuat pola iterasinya di *surface* 2D
3. Didefinisikan kondisi awal dan kondisi batas pada semua titik grid.
4. Dibuat matriks-matriks untuk menyelesaikan persamaan tersebut dengan software MATLAB.

1.7 Sistematika Penulisan

Agar dalam pembahasan penelitian ini sistematis dan mempermudah pembaca memahami tulisan ini, penulis membagi tulisan ini ke dalam empat bab sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN : Dalam bab ini dijelaskan latar belakang masalah, permasalahan, tujuan penelitian, manfaat penelitian, kerangka teori, metode penelitian dan sistematika pembahasan.

BAB II KAJIAN TEORI : Dalam bab ini dikemukakan hal-hal yang mendasari dalam teori yang dikaji, yaitu memuat dalil matematika, Metode Numerik, Metode ADI, Persamaan Diferensial Parsial dan Beda Hingga.

BAB III PEMBAHASAN: Dalam bab ini dipaparkan bagaimana mencari *Solusi Numerik persamaan Saint Venant 2D dan Persamaan Navier Stokes 2D* dengan metode ADI.

BAB IV PENUTUP : Dalam bab ini dikemukakan kesimpulan akhir penelitian dan beberapa saran.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Makna – Makna Matematika dari Dalil Naqli

إِنَّمَا إِلَهُكُمُ اللَّهُ الَّذِي لَا إِلَهَ إِلَّا هُوَ وَسِعَ كُلَّ شَيْءٍ عِلْمًا ﴿٨٨﴾

Artinya: Sesungguhnya Tuhanmu hanyalah Allah, yang tidak ada Tuhan selain Dia. Pengetahuan-Nya meliputi segala sesuatu".

Kata ‘ilma dengan harakat fathah pada huruf mim, dengan pengertian bahwa Allah Maha mengetahui atas segala sesuatu, ilmu-Nya meliputi segala sesuatu, dan Allah mampu menghitung jumlah segala sesuatu, tidak akan terlepas meski hanya sebesar biji sawi. Tidak ada satu daun pun yang jatuh kecuali Allah mengetahuinya dan tidak ada satu bijipun di kegelapan bumi, tidak yang basah dan tidak pula yang kering melainkan telah tertulis di kitab yang nyata (*lauh mahfudz*) (Ghofar, 2008).

Ayat di atas senada dengan ayat

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَاهُ بِقَدَرٍ ﴿٤٩﴾

Artinya: Sesungguhnya Kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran.

Sebagaimana firman-Nya

الَّذِي لَهُ مُلْكُ السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضِ وَلَمْ يَتَّخِذْ وَلَدًا وَلَمْ يَكُنْ لَهُ شَرِيكٌ فِي الْمُلْكِ وَخَلَقَ كُلَّ شَيْءٍ فَقْدَرَهُ تَقْدِيرًا ﴿٢٠٠﴾

Artinya: Yang kepunyaan-Nya-lah kerajaan langit dan bumi, dan Dia tidak mempunyai anak, dan tidak ada sekutu baginya dalam kekuasaan(Nya),

dan Dia telah menciptakan segala sesuatu, dan Dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya.(Al Furqon:2)

Maksudnya: segala sesuatu yang dijadikan Allah diberi-Nya perlengkapan-perengkapan dan persiapan-persiapan, sesuai dengan naluri, sifat-sifat dan fungsinya masing-masing dalam hidup, jadi secara kasar dapat dikatakan bahwa sebenarnya Allah telah membuat “Fungsi matematis” dalam setiap ciptaannya, yaitu fungsi yang bergantung waktu, amal, perlakuan, dan lain sebagainya.

وَلَقَدْ ضَرَبْنَا لِلنَّاسِ فِي هَٰذَا الْقُرْآنِ مِن كُلِّ مَثَلٍ لَّعَلَّهُمْ يَتَذَكَّرُونَ

Artinya: Sesungguhnya telah Kami buat bagi manusia dalam Al Quran ini Setiap macam perumpamaan supaya mereka dapat pelajaran.

Telah dijelaskan kepada manusia tentang apa yang terdapat di dalamnya dengan membuat berbagai perumpamaan. Karena perumpamaan mendekatkan makna kepada pikiran (Ghofar, 2008). Arti secara praktis sebagai saintis adalah jika ingin mendapatkan pelajaran dari suatu fenomena alam, maka sepatutnya harus dimodelkan agar dapat dipelajari lebih lanjut.

2.2 Persamaan Diferensial Parsial

Persamaan diferensial parsial dapat dikatakan sebagai persamaan yang mengandung satu atau lebih turunan-turunan parsial. Persamaan tersebut merupakan laju perubahan terhadap dua atau lebih variabel bebas, yang dikatakan dengan waktu dan jarak (ruang) (Triatmojo, 2002:199).

Ketika ada sebuah fungsi $w(x,y)$ yang bergantung pada dua variabel bebas x dan y , dan jika diturunkan terhadap x maka y bernilai konstan dan jika diturunkan terhadap y , x bernilai konstan. Adapun notasi pelambangannya secara

berturut-urut adalah $\frac{\partial w}{\partial x}$ dan $\frac{\partial w}{\partial y}$, dengan simbol ∂ menunjukkan turunan parsialnya.

Notasi itu dapat dipakai untuk pengerjaan turunan orde dua. Turunan terhadap x dari $\frac{\partial w}{\partial x}$ dilambangkan dengan $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ dan turunan terhadap y dari $\frac{\partial w}{\partial x}$ adalah $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ dan seterusnya. Turunan parsial x dapat dituliskan berupa w_x (Levine, 1997:4).

2.3 Turunan Parsial

Dalam persamaan diferensial parsial muncul turunan parsial yang menyatakan hukum Fisika tertentu. Misalnya, persamaan diffensial parsial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.1)$$

yang menggambarkan gerak bentuk gelombang, dapat berbentuk gelombang samudera, gelombang suara, gelombang cahaya dan gelombang yang lainnya.

Persamaan diferensial parsial (PDP) adalah suatu persamaan yang mengandung dua atau lebih derivatif parsial untuk suatu fungsi dari dua atau lebih variabel bebas. Tingkat derivatif parsial tertinggi merupakan tingkat persamaan diferensial parsial tersebut. Sedangkan pangkat tertinggi dari order tertinggi merupakan derajat dari persamaan diferensial tersebut (Soeharjo, 1996).

Andaikan bahwa f adalah suatu fungsi dua peubah x dan y . Jika y konstan, misalkan $y = y_0$, maka $f(x, y_0)$ menjadi fungsi satu peubah x . Turunannya di $x = x_0$ disebut turunan parsial f terhadap x di (x_0, y_0) . Jadi,

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \quad (2.2)$$

Demikian pula, turunan parsial f terhadap y di (x_0, y_0) dinyatakan oleh $f_y(x_0, y_0)$ dan dituliskan sebagai

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} \quad (2.3)$$

Daripada menghitung $f_x(x_0, y_0)$ dan $f_y(x_0, y_0)$ secara langsung dari definisi di atas, lebih baik mencari $f_x(x, y)$ dan $f_y(x, y)$ dengan menggunakan aturan baku untuk turunan kemudian disubstitusikan $x = x_0$ dan $y = y_0$ (Purcell, 1987:251).

Notasi untuk turunan parsial, jika $z = f(x, y)$, maka,

$$f_x(x, y) = f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = f_1 = D_1 f = D_x f \quad (2.4)$$

$$f_y(x, y) = f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = f_2 = D_2 f = D_y f \quad (2.5)$$

$$f_x(x_0, y_0) = \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} \quad (2.6)$$

$$f_y(x_0, y_0) = \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} \quad (2.7)$$

Dari notasi turunan tersebut di atas, maka dapat diketahui turunan parsial dari $z = f(x, y)$ yaitu:

1. Untuk mencari f'_x pandang y sebagai konstanta dan diferensialkan $f(x, y)$ terhadap x
2. Untuk mencari f'_y pandang x sebagai konstanta dan diferensialkan $f(x, y)$ terhadap y

Untuk turunan yang lebih tinggi, jika f adalah fungsi dari dua variabel, maka turunan parsialnya f_x dan f_y juga fungsi dua variabel. Sehingga, dapat ditinjau turunan parsial dari $(f_x)x'$, $(f_x)y'$, $(f_y)x'$ dan $(f_y)y'$ yang disebut turunan parsial kedua dari f . Jika $z = f(x, y)$, dengan menggunakan notasi tersebut maka,

$$(f_x)x = f_{xx} = f_{11} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \quad (2.8)$$

$$(f_x)y = f_{xy} = f_{12} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \quad (2.9)$$

$$(f_y)_x = f_{yx} = f_{21} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \quad (2.10)$$

$$(f_y)_y = f_{yy} = f_{22} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \quad (2.11)$$

Dari notasi f_{xy} (atau $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$) berarti bahwa dideferensialkan terhadap x kemudian terhadap y . Sedangkan dalam menghitung f_{yx} urutannya dibalik (Stewart, 2003).

2.4 Persamaan Diferensial Parsial Linear dan Tak Linear

Persamaan diferensial parsial (PDP) diklasifikasikan menjadi PDP linear dan tak linear. Bentuk umum PDP linear tingkat dua dengan dua variabel bebas

$$\text{adalah: } A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu + G = 0 \quad (2.12)$$

Dimana A, B, C, D, E, F , dan G diberikan oleh fungsi x dan y , dalam kasus tertentu fungsi tersebut merupakan fungsi konstant (Kaplan, 1963). Persamaan (2.1) merupakan PDP linear. Sedangkan, PDP orde kedua dalam dua variabel yang tidak memenuhi persamaan (2.1) adalah PDP tidak linear, perhatikan contoh berikut:

- a. $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (Linear)
- b. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u = \sin x$ (Linear)
- c. $u \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + u = 1$ (Tidak Linear)
- d. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u^2 = 0$ (Tidak Linear)

2.5 Persamaan Diferensial Parsial Ordo Pertama

Persamaan diferensial parsial linear ordo satu yang paling umum adalah dalam dua variabel bebas yaitu x dan t , dengan bentuk

$$au_x + bu_t = cu_t + d \quad (2.13)$$

$$a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial t} = cu + d \quad (2.14)$$

Dengan $a, b, c, d \in R$ adalah fungsi x dan t . u, x, t adalah variabel (variabel t yang dipilih karena berhubungan dengan waktu, permasalahan fisika), dan penulisan umum persamaan diferensial parsial ordo pertama adalah

$$u_t + f(x, t, u, u_x) = 0$$

Solusi umum suatu persamaan diferensial parsial ordo pertama melibatkan suatu fungsi bebas. Dalam suatu aplikasi pada umumnya tidak memperoleh solusi umum, akan tetapi solusi yang mengarah pada beberapa kondisi tambahan, seperti syarat awal atau syarat batas, atau bahkan pada keduanya.

Suatu masalah dasar pada persamaan diferensial parsial ordo pertama adalah untuk memecahkan

$$u_t + F(x, t, u, u_t) = 0, x \in R, t > 0 \quad (2.15)$$

mengarah pada syarat awal

$$u(x, 0) = u_0(x), x \in R$$

dengan $u_0(x)$ adalah fungsi yang ditentukan interval untuk x terbatas dan dipandang sebagai syarat pada waktu $t = 0$. Syarat awal suatu gelombang adalah suatu distribusi ruang u dan a yang menggambarkan tentang gelombang yang diperoleh dari grafik $u = u_0(x)$ dalam ruang x_u . Kemudian persamaan diferensial parsial 2.10 sebagai suatu persamaan yang menguraikan perkembangan gelombang pada saat bertambahnya waktu

Ordo/orde suatu persamaan diferensial adalah orde turunan tertinggi yang muncul dalam persamaan tersebut (Stewart, 2003: 5).

Persamaan diferensial parsial dengan dua variabel bebas dikatakan berorde satu jika turunan tertinggi dari variabel terikatnya adalah satu. Bentuk umum persamaan diferensial parsial linear dan non linear berorde satu adalah

$$a(x, t) \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} + b(x, t) \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = c(x, t)v(x, t) + d(x, t) \quad (2.16)$$

dengan a, b, c , dan d adalah fungsi dan di setiap titik (x, t) merupakan vektor $[a(x, t), b(x, t)]$ yang terdefinisi dan tidak nol. Persamaan (2.16) dapat ditulis dalam bentuk

$$F(x, t, v(x, t), v_x(x, t), v_t(x, t)) = 0$$

dengan $v_x(x, t) = \frac{\partial v(x, t)}{\partial x}$ dan $v_t(x, t) = \frac{\partial v(x, t)}{\partial t}$ (Zauderer, 2006: 63).

Demikian halnya dengan persamaan diferensial parsial dengan dua variabel bebas dikatakan berorde dua, tiga, empat hingga berorde m jika turunan tertinggi dari variabel terikatnya adalah dua, tiga, empat atau m . Bentuk umum persamaan diferensial parsial linear dan non linear berorde dua, tiga, empat dan berorde n :

$$\begin{aligned} \text{i.} \quad & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu + d = 0 \\ \text{ii.} \quad & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ijk} \frac{\partial^3 u}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n c_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + du + e = 0 \\ \text{iii.} \quad & \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \sum_{i_3=1}^n \sum_{i_4=1}^n a_{i_1 i_2 i_3 i_4} \frac{\partial^4 u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \partial x_{i_3} \partial x_{i_4}} + \\ & \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \sum_{i_3=1}^n b_{i_1 i_2 i_3} \frac{\partial^3 u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \partial x_{i_3}} + \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n c_{i_1 i_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}} + \\ & \sum_{i_1=1}^n d_{i_1} \frac{\partial u}{\partial x_{i_1}} + eu + f = 0 \\ \text{iv.} \quad & \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \dots \sum_{i_m=1}^n \sum_{i_4=1}^n a_{i_1, i_2, i_3, \dots, i_m} \frac{\partial^m u}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_m}} + \dots + 0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

(Zauderer, 2006: 137)

2.6 Persamaan Navier Stokes dan Saint Venant

Persamaan ini adalah persamaan diferensial parsial non linier yang ditemukan oleh ahli matematika Perancis, L.M.H Navier (1758-1836) dan Sir Gorge Gabriel Stokes (1819-1903) dan Persamaan Navier Stokes merupakan sistem dari persamaan momentum dan persamaan kontinuitas, yang dapat berlaku pada aliran fluida laminar atau turbulen (Munson, 2002).

Deskripsi matematis gerakan fluida berdasarkan asumsi berikut ini:

- Konstanta kekentalan, ρ
- Konstanta kecepatan, μ
- kekontinuan (aliran tak termampatkan), $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$

$$\begin{aligned} \text{x momentum: } \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ \text{y momentum: } \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (2.18)$$

diketahui definisi bilangan Reynold (Re):

$$Re = \frac{\rho u d}{\mu} \quad (2.19)$$

dengan u adalah kecepatan, d diameter pipa, ρ densitas fluida dan μ viskositas absolut fluida (Godwin.et All,1986).

Jika disubstitusikan bilangan Reynold tersebut pada persamaan (2.71) maka akan menjadi persamaan Navier Stokes dalam 2D, yaitu:

$$\begin{aligned} \text{x momentum: } \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ \text{y momentum: } \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (2.20)$$

Persamaan Saint Venant didapatkan dari penurunan persamaan Navier Stokes. Persamaan ini dikerjakan pada perairan dangkal 2D dan diturunkan dengan asumsi bahwa distribusi tekanan adalah hidrostatik. Selanjutnya objek perairan di partisi dalam bentuk layer dengan asumsi bahwa panjang sungai sebagai sumbu x dan kedalaman sungai sebagai sumbu y . Akhirnya, persamaan-persamaan tersebut akan diintegrasikan di seluruh bagian dengan menggunakan kondisi batasnya untuk mendapatkan Persamaan Saint Venant (Aldrighetti, 2007:1).

Integral Persamaan Momentum Navier Stokes terhadap batas kanan dan kiri dengan mengasumsikan bahwa

$x_1 = r(x, y)$ dan $x_2 = l(x, y)$, $B(x, y) = |x_2 - x_1| = |l(x, y) - r(x, y)|$, dan

integral percepatan = kecepatan, yaitu $\int \frac{\partial u}{\partial x} dz = u$ dan $\int \frac{\partial u}{\partial x} dz = [\int u dz]_x$,

Sehingga rata-rata kecepatan sepanjang x adalah:

$$U_1 = \frac{1}{B} \int_{x_1=r}^{x_2=l} u dx \quad (2.21)$$

Rata-rata kecepatan sepanjang y adalah:

$$U_2 = \frac{1}{B} \int_{x_1=r}^{x_2=l} u dy \quad (2.22)$$

Rata-rata permukaan η :

$$\eta_1 = \frac{1}{B} \int_{x_1}^{x_2} \eta dx \quad (2.23)$$

$$\eta_2 = \frac{1}{B} \int_{x_1}^{x_2} \eta dy \quad (2.24)$$

Rata-rata kecepatan searah sumbu y :

$$V_1 = \frac{1}{B} \int_r^l v dx \quad (2.25)$$

$$V_2 = \frac{1}{B} \int_r^l v dy \quad (2.26)$$

Selanjutnya adalah integral Navier Stokes sepanjang sumbu x sebagai berikut:

x momentum persamaan Navier Stokes:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -g\eta_x + \nu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \quad (2.27)$$

Persamaan Kontinuitas:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.28)$$

Maka integral ruas kiri x momentum Navier Stokes menjadi

$$\begin{aligned} & \int_{x_1=r}^{x_2=l} \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right] dx \\ & = \\ & \left(\int_{x_1=r}^{x_2=l} u dx \right)_t + \left(\int_r^l uu dx \right)_x + \left(\int_r^l vu dx \right)_y + u \Big|_r^l \left(\int_r^l u dx \right)_x + v \Big|_r^l \left(\int_r^l u dx \right)_y \end{aligned}$$

Karena $v \Big|_r^l \left(\int_r^l u dx \right)_y$ diabaikan maka:

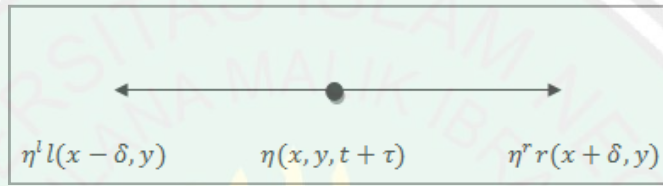
$$\begin{aligned} & = (BU_1)_t + (U_1BU_1)_x + (BV_1U_1)_y + u^r [ur_x(x, y) + vr_y(x, y) - u^r] - \\ & u^l [ul_x(x, y) + vl_y(x, y) - u^l] = (BU_1)_t + (BU_1U_1)_x + (BV_1U_1)_y + \\ & (u^r [ur_x(x, y) - u^r] - u^l [ul_x(x, y) - u^l]) + u^r [vr_y(x, y)] - u^l [vl_y(x, y)] \\ & = (BU_1)_t + (BU_1U_1)_x + (BV_1U_1)_y + [u(u^r r_x(x, y) - u^l l_x(x, y))] - u^r u^r + \\ & u^l u^l + [u^r vr_y(x, y)] - [u^l vl_y(x, y)] \\ & = (BU_1)_t + (BU_1U_1)_x + (BV_1U_1)_y + \left[\int_r^l (u - U_1) dx \right]_x + \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$\left[\int_r^l (u - U_1)(v - V_1) dx \right]_y$$

Selanjutnya adalah integral gradient tekanan barotropik di x sebagai berikut:

x momentum Navier Stokes

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial y}{\partial x} + V \frac{\partial u}{\partial y} = -g\eta_x + v \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \quad (2.30)$$



Gambar 2.1 Pergerakan Partikel di x Momentum

sehingga

$$\eta((x, y, t + \tau) = \eta^l(x - \delta, y) + \eta^r(x + \delta, y)$$

dapat diuraikan kembali menjadi

$$\begin{aligned} \eta(x, y) + \tau \eta_t(x, y) &= \eta[l(x, y) - \delta l_x(x, y)] + \eta[r(x, y) + \delta r_x(x, y)] \\ &= \eta[l(x, y) - r(x, y)] - \eta \delta l_x(x, y) + \eta \delta r_x(x, y) \\ &= \eta(x, y) - \eta \delta l_x(x, y) + \eta \delta r_x(x, y) \end{aligned}$$

sehingga diperoleh

$$\tau \eta_t(x, y) = -\delta \eta l_x(x, y) + \delta \eta r_x(x, y)$$

atau

$$\begin{aligned} \eta_t(x, y) &= \frac{-\delta}{\tau} \eta l_x(x, y) + \frac{\delta}{\tau} \eta r_x(x, y) \\ &= \gamma \eta l_x(x, y) + \gamma \eta r_x(x, y), \quad \forall \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ \tau \rightarrow 0}} \frac{\delta}{\tau} = \gamma \end{aligned}$$

sehingga

$$\int_r^l \eta_x dx = \left(\int_r^l \eta dx \right)_x + \eta_t(x, y)$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\int_r^l \eta \, dx \right)_x - \eta^l l_x(x, y) + \eta^r r_x(x, y) \\
&= (B\eta_1)_x - (\eta^l - \eta_1)l_x + (\eta^r - \eta_1)r_x
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Selanjutnya integral kekentalan di sepanjang x dari kiri ke kanan adalah sebagai berikut:

x momentum Navier Stokes

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} + V \frac{\partial u}{\partial y} = -g\eta_x + \nu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \tag{2.32}$$

Maka

$$\int_r^l \nu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] dx = \int_r^l [(vu_x)_x + (vu_y)_y] dx \tag{2.33}$$

Dengan menggunakan asumsi kondisi batas kekentalan di sepanjang sumbu x yaitu

$$\nu(u_x l_x - u_y) = \gamma_l u$$

$$\nu(u_x r_x - u_y) = \gamma_r u$$

dalam hal ini

$$\nu u(x, y, t + \tau) = \nu u_r(x + \delta, y) + \nu u_l(x - \delta, y)$$

Bentuk di atas dapat diuraikan kembali menjadi

$$\begin{aligned}
\nu u(x, y) + \nu \tau u_t(x, y) &= \nu u_r(x, y) + \nu \delta r_x(x, y) + \nu u_l(x, y) - \nu \delta l_x(x, y) \\
&= \nu u(r(x, y) - l(x, y)) + \nu \delta r_x(x, y) - \nu \delta l_x(x, y) \\
&= \nu u(x, y) + \nu \delta r_x(x, y) - \nu \delta l_x(x, y)
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh

$$\nu \tau u_t(x, y) = \nu \delta r_x(x, y) - \nu \delta l_x(x, y)$$

atau

$$\begin{aligned}vu_t(x, y) &= vu \frac{\delta}{\tau} r_x(x, y) - vu \frac{\delta}{\tau} l_x(x, y) \\&= vur_x(x, y) - vul_x(x, y)\end{aligned}$$

Sehingga integral ruas kiri pada kekentalan Navier Stokes adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}&\int_r^l (vu_x)_x dx + \int_r^l (vu_y)_y dx \\&= \left(\int_r^l vu_x dx \right)_x + \left(\int_r^l vu_y dx \right)_y + v(u_x l_x - u_y) - v(u_x r_x - u_y) \\&= \left(\int_r^l vu_x dx \right)_x + \left(\int_r^l vu_y dx \right)_y + v(u_x l_x - u_x r_x) + v(u_y - u_y) \\&= (V_1 B(U_1)_x)_x + (V_1 B(U_1)_y)_y + v(u_x l_x - u_x r_x) \\&= (V_1 B(U_1)_x)_x + (V_1 B(U_1)_y)_y + vU_1\end{aligned}\tag{2.34}$$

Sehingga diperoleh kesimpulan umum integral x momentum Navier Stokes sebagai berikut:

1. Ruas kiri Navier Stokes

$$(BU_1)_t + (BU_1 U_1)_x + (BV_1 U_1)_y + \left[\int_r^l (u - U_1) dx \right]_x + \left[\int_r^l (u - U_1)(v - V_1) dx \right]_y$$

$$\left[\int_r^l (u - U_1) dx \right]_x + \left[\int_r^l (u - U_1)(v - V_1) dx \right]_y \text{ diabaikan karena terlalu}$$

kecil

2. Integral tekanan

$$(B\eta_1)_x - (\eta^l - \eta_1)l_x + (\eta^r - \eta_1)r_x$$

$$-(\eta^l - \eta_1)l_x + (\eta^r - \eta_1)r_x \text{ diabaikan karena terlalu kecil}$$

3. Integral kekentalan

$$(\nu_1 B(U_1)_x)_x + (\nu_1 B(U_1)_y)_y + \nu U_1$$

Sehingga formula integral x momentum Navier Stokes:

$$\begin{aligned} (BU_1)_t + (BU_1U_1)_x + (BV_1U_1)_y \\ = -g(B\eta_1)_x + (\nu_1 B(U_1)_x)_x + (\nu_1 B(U_1)_y)_y + \nu U_1, \end{aligned} \quad (2.35)$$

Dengan cara yang analog, maka dapat dikonstruksi y momentum Saint Venant menjadi:

1. Ruas Kiri Navier Stokes

$$\begin{aligned} (BV_2)_t + (U_2BV_2)_x + (BV_2V_2)_y + [u(v^r r_x(x, y) - v^l l_x(x, y))] - v^r v^r \\ + v^l v^l + [v^r v r_y(x, y)] - [v^l v l_y(x, y)] \\ [u(v^r r_x(x, y) - v^l l_x(x, y))] - v^r v^r + v^l v^l + [v^r v r_y(x, y)] \\ - [v^l v l_y(x, y)] \end{aligned}$$

diabaikan karena terlalu kecil

2. Integral Tekanan

$$\begin{aligned} (B\eta_2)_y - (\eta^l - \eta_1)l_x + (\eta^r - \eta_1)r_x \\ - (\eta^l - \eta_1)l_x + (\eta^r - \eta_1)r_x \end{aligned}$$

diabaikan karena terlalu kecil

3. Integral Kekentalan

$$(\nu_2 B(U_2)_x)_x + (\nu_2 B(U_2)_y)_y + \gamma U_2$$

Sehingga formula integral y momentum Navier Stokes:

$$\begin{aligned} (BV_2)_t + (U_2BV_2)_x + (BV_2V_2)_y \\ = -g(B\eta_2)_y + (\nu_2 B(V_2)_x)_x + (\nu_2 B(V_2)_y)_y + \gamma V_2, \end{aligned} \quad (2.36)$$

2.7 Metode Numerik

Metode analitik disebut juga metode sejati karena ia memberi solusi sejati (*exact solution*) atau solusi yang sesungguhnya, yaitu solusi yang memiliki galat (*error*) sama dengan nol! Sayangnya, metode analitik hanya unggul untuk sejumlah persoalan yang terbatas, yaitu persoalan yang memiliki tafsiran geometri sederhana serta bermatra rendah. Padahal persoalan yang muncul dalam dunia nyata seringkali tak linear serta dengan bentuk dan proses yang rumit. Akibatnya nilai praktis penyelesaian metode analitik menjadi terbatas.

Bila metode analitik tidak dapat lagi diterapkan, maka solusi persoalan sebenarnya masih dapat dicari dengan menggunakan metode numerik. Metode numerik adalah teknik yang digunakan untuk memformulasikan persoalan matematik sehingga dapat dipecahkan dengan operasi perhitungan/aritmetika biasa (tambah, kurang, kali, dan bagi). Metode artinya cara, sedangkan numerik artinya angka. Jadi metode numerik secara harfiah berarti cara berhitung dengan menggunakan angka-angka.

Perbedaan utama antara metode numerik dengan metode analitik terletak pada dua hal. Pertama, solusi dengan menggunakan metode numerik selalu berbentuk angka. Bandingkan dengan metode analitik yang biasanya menghasilkan solusi dalam bentuk fungsi matematik yang selanjutnya fungsi matematik tersebut dapat dievaluasi untuk menghasilkan nilai dalam bentuk angka.

Kedua, dengan metode numerik, hanya diperoleh solusi yang menghampiri atau mendekati solusi sejati sehingga solusi numerik dinamakan juga solusi

hampiran atau solusi pendekatan, namun solusi hampiran dapat dibuat seteliti yang diinginkan. Solusi hampiran jelas tidak tepat sama dengan solusi sejati, sehingga ada selisih antara keduanya. Selisih inilah yang disebut dengan galat (*error*) (Munir., 2006).

Metode beda hingga *implicit* menyediakan sarana untuk memecahkan persamaan parabolik ke dimensi spasial menggunakan matriks tridiagonal dengan menggunakan prinsip metode beda hingga untuk mencari nilai $u_{i,j}^{t+1}$ dengan *initial value* $u_{i,j}^t$. dapat diselesaikan dengan software, ataupun cara manual (Chapra, 2002).

2.8 Pendekatan Turunan dengan Beda Hingga

Diberikan persamaan:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

variabel u selanjutnya didefinisikan sebagai $u = u(x, y)$ dan $u(x + h, y + k)$

Berdasar deret Taylor mempunyai hubungan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} u(x + h, y + k) &= u(x, y) + \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right) u(x, y) + \frac{1}{2!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 u(x, y) \\ &+ \dots + \frac{1}{(n-1)!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^{n-1} u(x, y) + R_n \end{aligned}$$

dengan R_n adalah suku sisa yang dinyatakan dalam bentuk sbb:

$$R_n = \frac{1}{n!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y}\right)^n u(x + \xi h, y + \xi k), \quad 0 < \xi < 1$$

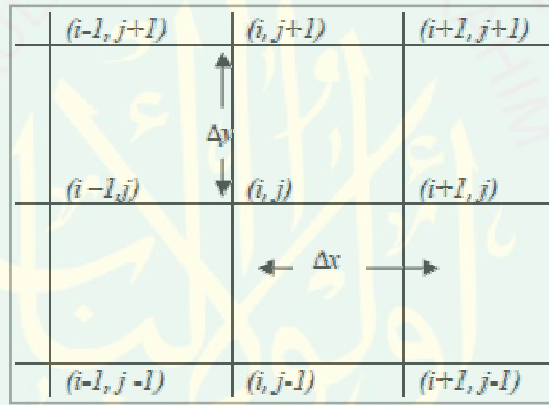
atau

$$R_n = O[(h/k)^n]$$

Titik dalam ruang atau disebut titik grid (i, j) dan titik-titik grid terdekat digambarkan pada Gambar 2.2. Pengembangan deret Taylor di sekitar titik $u_{i,j}$ akan menghasilkan

$$u_{i-1,j} = u_{i,j} - \Delta x u_x + \frac{(\Delta x)^2}{2!} u_{xx} - \frac{(\Delta x)^3}{3!} u_{xxx} + \frac{(\Delta x)^4}{4!} u_{xxxx}$$

$$u_{i+1,j} = u_{i,j} + \Delta x u_x + \frac{(\Delta x)^2}{2!} u_{xx} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} u_{xxx} + \frac{(\Delta x)^4}{4!} u_{xxxx}$$



Gambar 2.2 Pola beda hingga

Dalam hal ini, $u_x = \frac{\partial y}{\partial x}$ dan $u_{xx} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$. Semua turunan dievaluasi pada titik (i, j) .

Berdasar cara yang sama diperoleh turunan dengan orde yang lebih tinggi.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} + O(\Delta x), \quad (\text{forward difference})$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} + O(\Delta x), \quad (\text{backward difference})$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} + O[(\Delta x)^2], \quad (\text{central difference})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{(\Delta x)^2} + O[(\Delta x)^2]$$

Selanjutnya bentuk berikut juga dimungkinkan untuk dibuat

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j-1}}{4 \Delta x \Delta y} + O[(\Delta x + \Delta y)^2]$$

(catatan kuliah, Dr. Ir. Lilik Eko Widodo, MS)

Dalam kasus khusus, suatu iterasi numerik seperti ini dihadapkan pada kenyataan perlunya penggunaan matriks tridiagonal.

2.9 Bilangan Reynolds

$$Re = \frac{\rho v_s L}{\mu} = \frac{v_s L}{\nu} = \frac{\text{Gaya inersia}}{\text{Gaya viskos}}$$

Dalam mekanika fluida, bilangan Reynolds adalah rasio antara gaya inersia ($\rho v_s^2 L$) terhadap gaya viskos ($\mu v_s / L$) yang mengkuantifikasikan hubungan kedua gaya tersebut dengan suatu kondisi aliran tertentu. Bilangan ini digunakan untuk mengidentifikasi jenis aliran yang berbeda, misalnya laminar dan turbulen. Namanya diambil dari Osborne Reynolds (1842–1912) yang mengusulkannya pada tahun 1883. Bilangan Reynold merupakan salah satu bilangan tak berdimensi yang paling penting dalam mekanika fluida dan digunakan, seperti halnya dengan bilangan tak berdimensi lain, untuk memberikan kriteria untuk menentukan dynamic similitude. Jika dua pola aliran yang mirip secara geometris, mungkin pada fluida yang berbeda dan laju alir yang berbeda pula, memiliki nilai bilangan tak berdimensi yang relevan, keduanya disebut memiliki kemiripan dinamis. (Anonim, 2011).

BAB III

PEMBAHASAN

Untuk menyelesaikan persamaan Saint Venant 2D dan Navier Stokes 2D secara numerik dengan metode ADI dengan bantuan MATLAB dalam skripsi ini, diperlukan obyek Layer yang diambil dari perairan dangkal yang berbentuk persegi $m \times m$ dan dipartisi atas beberapa grid dengan tebakan awal adalah bergantung pada operator program. Untuk memudahkan pemahaman pembaca, dalam skripsi ini penulis memilih kondisi awal dan kondisi batas sebagai berikut:

	Saint Venant 2D	Navier Stokes 2D
Kondisi Awal	$u^0 = 0.03$	$u^0 = 0.03$
	$v^0 = 0.03$	$v^0 = 0.03$
	$dx = 0.8571$	$dx = 0.7143$
	$dy = 0.8571$	$dy = 0.7143$
	$dt = 1$	$dt = 0.1$
	$B = 1$	$P = 0.01$
	Viskositas (air) = 1.0037	$Re = 50$
	$g = 10$	
	$\eta = 0.01$	
Kondisi Batas	$u(1,y,t) = u(x,1,t) = u(10,y,t) = u(x,10,t) = 0$	
	$v(1,y,t) = v(x,1,t) = v(10,y,t) = v(x,10,t) = 0$	

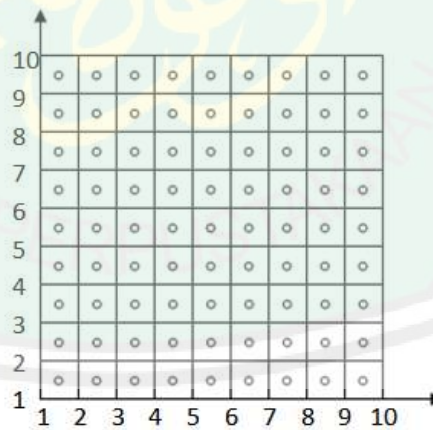
Tabel 3.1 Kondisi awal dan kondisi batas

Kondisi awal yang dimaksud dalam skripsi ini adalah amplitudo pada batas (dinding-dinding), sedangkan kondisi awal adalah nilai-nilai awal yang

diberikan pada semua titik Grid. Amplitudo pada batas-batas diasumsikan bernilai nol, maka banyaknya solusi bagi amplitudo yang harus dihitung adalah komponen amplitudo sepanjang sumbu x yaitu u dan komponen amplitudo sepanjang sumbu y yaitu v di dalam sistem grid.

Adapun asumsi yang digunakan dalam penyelesaian masalah untuk mencari amplitudo, η , dan tekanan adalah pada keadaan awal diberikan tekanan (pada persamaan Navier Stokes), η (pada persamaan Saint Venant) dan amplitudo pada semua titik grid.

Gambaran permasalahan perairan dangkal (*shallow water*) yang ditulis dalam skripsi ini untuk menghitung komponen-komponen amplitudo (u^{n+1}, v^{n+1}) dimana $n + 1$ menunjukkan level (tingkat) iterasi, seperti ditunjukkan pada gambar berikut



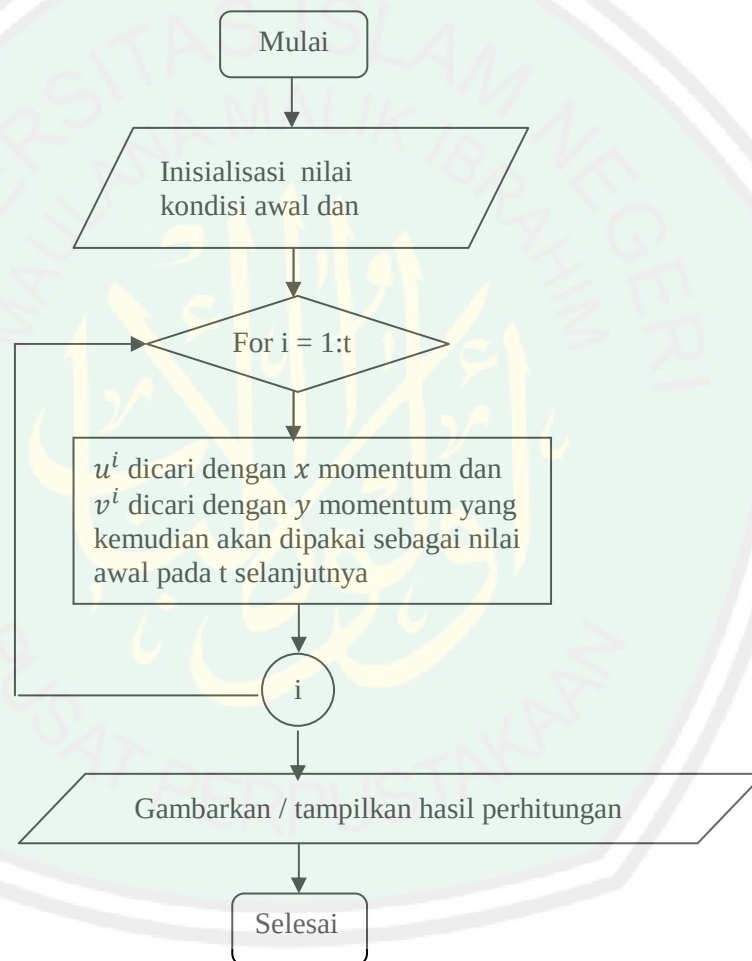
Gambar 3.1 *Shallow Water*

Metode yang digunakan dalam penyelesaian masalah ini adalah dengan menggunakan algoritma sebagai berikut:

1. Dibuat bentuk persamaan diskrit dari persamaan yang dipilih dengan metode beda hingga secara sederhana.

2. Didefinisikan kondisi awal dan kondisi batas pada semua titik grid.
3. Dibuat pola iterasinya di *surface* 2D
4. Dibuat matrikss-matrikss untuk menyelesaikan persamaan tersebut dengan software MATLAB.

Flow chart secara umumnya adalah sebagai berikut:



3.1 Implementasi Algoritma Pada Persamaan Navier Stokes

Dengan memandang kembali persamaan Navier Stokes dalam dua dimensi, maka dapat dibuat pola perhitungan untuk memperoleh amplitudo baru. Dalam hal ini amplitudo sepanjang sumbu x yang dimisalkan sebagai u diselesaikan menggunakan x momentum pada persamaan Navier Stokes, dan amplitudo terhadap sumbu y yaitu v diselesaikan dengan menggunakan y momentum pada persamaan Navier Stokes. Maka kondisi tersebut dapat dijabarkan sebagai berikut

Dengan memandang kembali persamaan 2.20, persamaan x momentum Navier Stokes 2D, untuk menghitung amplitudo sepanjang sumbu $x(u^{n+1})$ pada semua titik grid maka persamaan x momentum tersebut harus diubah ke dalam bentuk persamaan diskrit sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \left(\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} \right) + u_{i,j}^n \left(\frac{u_{i+1,j}^{n+1} - u_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta x} \right) + v_{i,j}^n \left(\frac{u_{i,j+1}^{n+1} - u_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta y} \right) \\ = - \left(\frac{p_{i,j}^n - p_{i-1,j}^n}{\Delta x} + \frac{p_{i,j-1}^n - p_{i-1,j-1}^n}{\Delta x} \right) \\ + \frac{1}{Re} \left(\frac{u_{i+1,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i-1,j}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i,j+1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1}}{(\Delta y)^2} \right), \quad (3.1) \end{aligned}$$

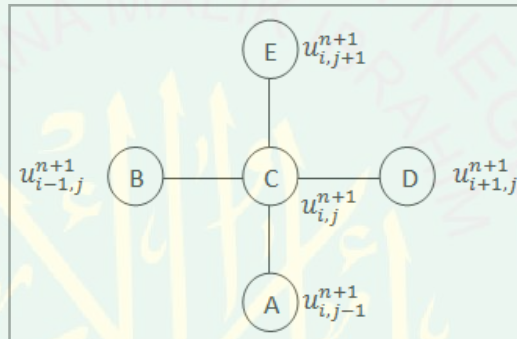
Persamaan 3.1 ini dapat disederhanakan menjadi

$$Au_{i,j-1}^{n+1} + Bu_{i-1,j}^{n+1} + Cu_{i,j}^{n+1} + Du_{i+1,j}^{n+1} + Eu_{i,j+1}^{n+1} = F, \quad (3.2)$$

dengan

$$\begin{aligned}
A &= \frac{v_{i,j}^n}{2\Delta y} + \frac{1}{Re(\Delta y)^2}, & D &= -\frac{u_{i,j}^n}{2\Delta x} + \frac{1}{Re(\Delta x)^2} \\
B &= \frac{u_{i,j}^n}{2\Delta x} + \frac{1}{Re(\Delta x)^2}, & E &= -\frac{v_{i,j}^n}{2\Delta y} + \frac{1}{Re(\Delta y)^2} \\
C &= -\frac{2}{Re(\Delta x)^2} - \frac{2}{Re(\Delta y)^2} - \frac{1}{\Delta t}, & F &= \frac{p_{i,j}^n - p_{i-1,j}^n}{\Delta x} + \frac{p_{i,j-1}^n - p_{i-1,j-1}^n}{\Delta x} - \frac{u_{i,j}^n}{\Delta t}
\end{aligned}$$

Maka persamaan 3.2 dapat dibuat pola perhitungan bagi $u_{i,j}^{n+1}$ pada setiap titik grid adalah sebagai berikut:



Gambar 3.2 pola x momentum Navier Stokes

Untuk menghitung besarnya amplitudo sepanjang sumbu x ($u_{i,j}^{n+1}$) dari pola perhitungan tersebut adalah dengan menerapkan pola x momentum pada gambar 3.2 dengan cara menggeser bentuk pola tersebut dari kiri ke kanan sistem dalam *Shallow Water*, sehingga terbentuk sistem persamaan:

$$Cu_{2,2}^{n+1} + Du_{3,2}^{n+1} + Eu_{2,3}^{n+1} = F_1$$

$$Bu_{2,2}^{n+1} + Cu_{3,2}^{n+1} + Du_{4,2}^{n+1} + Eu_{3,3}^{n+1} = F_2$$

$$Bu_{3,2}^{n+1} + Cu_{4,2}^{n+1} + Du_{5,2}^{n+1} + Eu_{4,3}^{n+1} = F_3$$

⋮

$$Bu_{8,2}^{n+1} + Cu_{9,2}^{n+1} + Eu_{9,3}^{n+1} = F_4$$

$$Au_{2,2}^{n+1} + Cu_{2,3}^{n+1} + Du_{3,3}^{n+1} + Eu_{2,4}^{n+1} = F_5$$

$$Au_{3,2}^{n+1} + Bu_{2,3}^{n+1} + Cu_{3,3}^{n+1} + Du_{4,3}^{n+1} + Eu_{3,4}^{n+1} = F_8$$

⋮

yang secara umum dapat diimplementasikan dalam bentuk matrikss sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} c_1 & d_1 & \cdots & e_1 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & c_2 & d_2 & 0 & e_2 & 0 & 0 \\ \vdots & b & \ddots & \ddots & 0 & \ddots & 0 \\ a_1 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & e_{56} \\ 0 & a_2 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & \ddots & \ddots & d_{56} \\ 0 & 0 & 0 & a_{56} & \cdots & b & c_{64} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{2,2}^{n+1} \\ u_{3,2}^{n+1} \\ \vdots \\ u_{9,2}^{n+1} \\ u_{2,3}^{n+1} \\ u_{3,3}^{n+1} \\ \vdots \\ u_{9,3}^{n+1} \\ \vdots \\ u_{9,9}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{p_{2,2}^n - p_{1,2}^n + p_{2,1}^n - p_{1,1}^n}{\Delta x} - \frac{u_{2,2}^n}{\Delta t} \\ \frac{p_{3,2}^n - p_{2,2}^n + p_{3,1}^n - p_{2,1}^n}{\Delta x} - \frac{u_{3,2}^n}{\Delta t} \\ \vdots \\ \frac{p_{9,2}^n - p_{8,2}^n + p_{9,1}^n - p_{8,1}^n}{\Delta x} - \frac{u_{9,2}^n}{\Delta t} \\ \frac{p_{2,3}^n - p_{1,3}^n + p_{2,2}^n - p_{1,2}^n}{\Delta x} - \frac{u_{2,3}^n}{\Delta t} \\ \frac{p_{3,3}^n - p_{1,3}^n + p_{3,2}^n - p_{2,2}^n}{\Delta x} - \frac{u_{3,3}^n}{\Delta t} \\ \vdots \\ \frac{p_{9,3}^n - p_{8,3}^n + p_{9,2}^n - p_{8,2}^n}{\Delta x} - \frac{u_{9,3}^n}{\Delta t} \\ \vdots \\ \frac{p_{9,9}^n - p_{8,9}^n + p_{9,8}^n - p_{8,8}^n}{\Delta x} - \frac{u_{9,9}^n}{\Delta t} \end{bmatrix}$$

Dalam hal ini, $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{56}\}$, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_{56}\}$, $C = \{c_1, c_2, \dots, c_{64}\}$, $D = \{d_1, d_2, \dots, d_{56}\}$, $E = \{e_1, e_2, \dots, e_{56}\}$ yang secara berurutan adalah nilai pada saat pola pada gambar 3.2 dijalankan pada grid pada gambar 3.1.

Sebagai contoh aplikasinya, dengan mensubstitusikan kondisi awal dan kondisi batas pada sistem saat $t = 0$ didapatkan nilai-nilai sebagai berikut:

$$\begin{aligned} A &= \{0.0272, 0.0272, \dots\}, B = \{0.0272, 0.0272, \dots\}, C = \{-10\}, D \\ &= \{-0.0272, -0.0272, \dots\}, E = \{-0.0272, -0.0272, \dots\}, F \\ &= \{-0.3, -0.3, \dots\} \end{aligned}$$

Sehingga

$$\begin{aligned} u(2,2,1) &= 0 + 0 + Cu_{2,2}^1 + Du_{3,2}^1 + Eu_{2,3}^1 = F_1 \\ &= (-10)u_{2,2}^1 + (-0.0272)u_{3,2}^1 + (-0.0272)u_{2,3}^1 = -0.3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u(3,2,1) &= 0 + Bu_{2,2}^1 + Cu_{3,2}^1 + Du_{4,2}^1 + Eu_{3,3}^1 = F_2 \\
&= (0.0272)u_{2,2}^1 + (-10)u_{3,2}^1 + (-0.0272)u_{4,2}^1 + (-0.0272)u_{3,3}^1 \\
&= -0.3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u(4,2,1) &= 0 + Bu_{3,2}^1 + Cu_{4,2}^1 + Du_{5,2}^1 + Eu_{4,3}^1 = F_3 \\
&= (0.0272)u_{3,2}^1 + (-10)u_{4,2}^1 + (-0.0272)u_{5,2}^1 + (-0.0272)u_{4,3}^1 \\
&= -0.3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u(9,2,1) &= 0 + Bu_{8,2}^1 + Cu_{9,2}^1 + 0 + Eu_{9,3}^1 = F_4 \\
&= (0.0272)u_{4,2}^1 + (-10)u_{5,2}^1 + (-0.0272)u_{5,3}^1 = -0.3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u(2,3,1) &= Au_{2,2}^1 + 0 + Cu_{2,3}^1 + Du_{3,3}^1 + Eu_{2,4}^1 = F_5 \\
&= (0.0272)u_{2,2}^1 + (-10)u_{2,3}^1 + (-0.0272)u_{3,3}^1 + (-0.0272)u_{2,4}^1 \\
&= -0.3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u(3,3,1) &= Au_{3,2}^1 + 0 + Bu_{2,3}^1 + Cu_{3,3}^1 + Du_{4,3}^1 + Eu_{3,4}^1 = F_8 \\
&= (0.0272)u_{3,2}^1 + (0.0272)u_{2,3}^1 + (-10)u_{3,3}^1 + (-0.0272)u_{4,3}^1 \\
&\quad + (-0.0272)u_{3,4}^1 = -0.3
\end{aligned}$$

⋮

Dari pola diatas, dapat dibentuk menjadi matrikss 5 diagonal dan akan menjadi:

$$\begin{bmatrix}
 -10 & -0.0272 & \dots & -0.0272 & 0 & 0 & 0 \\
 0.0272 & -10 & -0.0272 & 0 & -0.0272 & 0 & 0 \\
 \vdots & 0.0272 & \ddots & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\
 0.0272 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots & 0 & -0.0272 \\
 0 & 0.0272 & 0 & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
 0 & 0 & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & -0.0272 \\
 0 & 0 & 0 & 0.0272 & \dots & 0.0272 & -10
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 u_{2,2}^{n+1} \\
 u_{3,2}^{n+1} \\
 \vdots \\
 u_{9,2}^{n+1} \\
 u_{2,3}^{n+1} \\
 u_{3,3}^{n+1} \\
 \vdots \\
 u_{9,3}^{n+1} \\
 \vdots \\
 u_{9,9}^{n+1}
 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}
 -0.3 \\
 -0.3 \\
 \vdots \\
 -0.3 \\
 -0.3 \\
 -0.3 \\
 \vdots \\
 -0.3 \\
 \vdots \\
 -0.3
 \end{bmatrix}$$

Sehingga dari matriks diatas didapatkan u^1 yang kemudian akan menjadi nilai awal untuk u^2 pada iterasi berikutnya.

Sedangkan untuk persamaan 2.20, persamaan y momentum Navier Stokes 2D secara analog sama dengan metode pola perhitungan x momentum. Langkah pertama adalah pengubahan persamaan y momentum Navier Stokes ke dalam bentuk terdiskritisasi untuk mendapatkan amplitudo baru sepanjang sumbu y (v^{n+1}) sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^n}{\Delta t} \right) + u_{i,j}^n \left(\frac{v_{i+1,j}^{n+1} - v_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta x} \right) + v_{i,j}^n \left(\frac{v_{i,j+1}^{n+1} - v_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta y} \right) \\
& = - \left(\frac{p_{i,j}^n - p_{i-1,j}^n}{\Delta x} + \frac{p_{i,j-1}^n - p_{i-1,j-1}^n}{\Delta x} \right) \\
& + \frac{1}{Re} \left(\frac{v_{i+1,j}^{n+1} - 2v_{i,j}^{n+1} + v_{i-1,j}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{v_{i,j+1}^{n+1} - 2v_{i,j}^{n+1} + v_{i,j-1}^{n+1}}{(\Delta y)^2} \right),
\end{aligned}$$

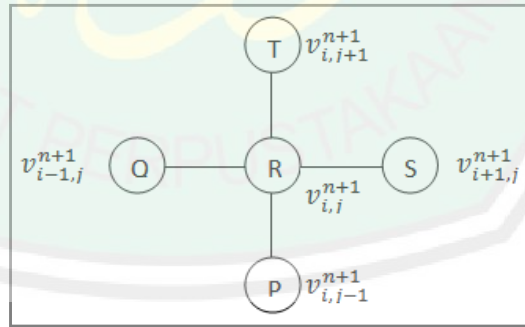
yang dapat disederhanakan menjadi:

$$Pv_{i,j-1}^{n+1} + Qv_{i-1,j}^{n+1} + Rv_{i,j}^{n+1} + Sv_{i+1,j}^{n+1} + Tv_{i,j+1}^{n+1} = W, \quad (3.5)$$

dengan

$$\begin{aligned}
P &= \frac{v_{i,j}^n}{2\Delta y} + \frac{1}{Re(\Delta y)^2}, & S &= -\frac{u_{i,j}^n}{2\Delta x} + \frac{1}{Re(\Delta x)^2} \\
Q &= \frac{u_{i,j}^n}{2\Delta x} + \frac{1}{Re(\Delta x)^2}, & T &= -\frac{v_{i,j}^n}{2\Delta y} + \frac{1}{Re(\Delta y)^2} \\
R &= -\frac{2}{Re(\Delta x)^2} - \frac{2}{Re(\Delta y)^2} - \frac{1}{\Delta t}, & W &= \frac{p_{i,j}^n - p_{i,j-1}^n}{\Delta y} + \frac{p_{i-1,j}^n - p_{i-1,j-1}^n}{\Delta y} - \frac{v_{i,j}^n}{\Delta t}
\end{aligned}$$

Maka persamaan 3.5 dapat dibuat pola perhitungan bagi $v_{i,j}^{n+1}$ sebagai berikut:



Gambar 3.3 Pola y Momentum Navier Stokes

Untuk menghitung besarnya amplitudo sepanjang sumbu y ($v_{i,j}^{n+1}$) dari pola perhitungan tersebut adalah dengan menerapkan pola y momentum pada gambar 3.5 dengan cara menggeser bentuk pola tersebut dari kiri ke kanan sistem dalam *Shallow Water*, sehingga terbentuk sistem persamaan :

$$Rv_{2,2}^{n+1} + Su_{2,3}^{n+1} + Tu_{3,2}^{n+1} = W_1$$

$$Qv_{2,2}^{n+1} + Ru_{2,3}^{n+1} + Su_{2,4}^{n+1} + Tu_{3,3}^{n+1} = W_2$$

$$Qu_{2,3}^{n+1} + Ru_{2,4}^{n+1} + Su_{2,5}^{n+1} + Tu_{3,4}^{n+1} = W_3$$

$$\vdots$$

$$Qu_{2,8}^{n+1} + Ru_{2,9}^{n+1} + Tu_{3,9}^{n+1} = W_4$$

$$Pu_{2,2}^{n+1} + Ru_{3,2}^{n+1} + Su_{3,3}^{n+1} + Tu_{2,5}^{n+1} = W_5$$

$$Pu_{2,3}^{n+1} + Qu_{3,2}^{n+1} + Ru_{3,3}^{n+1} + Su_{3,4}^{n+1} + Tu_{4,3}^{n+1} = W_8$$

$$\vdots$$

Secara analogi pengerjaannya sama dengan x momentum Navier Stokes yang dapat dibentuk menjadi matrikss 5 diagonal seperti berikut:

$$\begin{bmatrix} r_1 & s_1 & \cdots & t_1 & 0 & 0 & 0 \\ q_1 & r_2 & s_2 & 0 & t_2 & 0 & 0 \\ \vdots & q_2 & \ddots & \ddots & 0 & \ddots & 0 \\ p_1 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & t_{56} \\ 0 & p_2 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & \ddots & \ddots & s_{56} \\ 0 & 0 & 0 & p_{56} & \cdots & q_{56} & r_{64} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{2,2}^{n+1} \\ v_{2,3}^{n+1} \\ \vdots \\ v_{2,9}^{n+1} \\ v_{3,2}^{n+1} \\ v_{3,3}^{n+1} \\ \vdots \\ v_{3,9}^{n+1} \\ \vdots \\ v_{9,9}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{p_{2,2}^n - p_{2,1}^n + p_{1,2}^n - p_{1,1}^n}{\Delta y} - \frac{v_{2,2}^n}{\Delta t} \\ \frac{p_{2,3}^n - p_{2,2}^n + p_{1,3}^n - p_{1,2}^n}{\Delta y} - \frac{v_{2,3}^n}{\Delta t} \\ \vdots \\ \frac{p_{9,2}^n - p_{2,8}^n + p_{1,9}^n - p_{1,8}^n}{\Delta y} - \frac{v_{2,9}^n}{\Delta t} \\ \frac{p_{3,2}^n - p_{3,1}^n + p_{2,2}^n - p_{2,1}^n}{\Delta y} - \frac{v_{3,2}^n}{\Delta t} \\ \frac{p_{3,3}^n - p_{3,2}^n + p_{2,3}^n - p_{2,2}^n}{\Delta y} - \frac{v_{3,3}^n}{\Delta t} \\ \vdots \\ \frac{p_{3,9}^n - p_{3,8}^n + p_{2,9}^n - p_{2,8}^n}{\Delta y} - \frac{v_{3,9}^n}{\Delta t} \\ \vdots \\ \frac{p_{9,9}^n - p_{9,8}^n + p_{8,9}^n - p_{8,8}^n}{\Delta y} - \frac{v_{9,9}^n}{\Delta t} \end{bmatrix}$$

yang selanjutnya dibuat program MATLAB-nya agar lebih efisien.

Dalam hal ini, $P = \{p_1, p_2, \dots, p_{56}\}$, $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_{56}\}$, $R = \{r_1, r_2, \dots, r_{64}\}$, $S = \{s_1, s_2, \dots, s_{56}\}$, $T = \{t_1, t_2, \dots, t_{56}\}$ yang secara berurutan adalah nilai pada saat pola pada gambar 3.3 dijalankan pada grid pada gambar 3.1.

Dari hasil perhitungan x momentum dan y momentum Navier Stokes pada prosedur yang telah dikerjakan diatas, maka diperoleh amplitudo-amplitudo yang baru (yaitu amplitudo – amplitudo sepanjang sumbu x dan y) dan masing – masing diinisialkan sebagai $u_{i,j}^{n+1}, v_{i,j}^{n+1}$ dengan $i, j = 2, \dots, 9$ dari data ini kemudian dapat dihitung dilatasi pada aliran fluida. Dilatasi yang dimaksud disini merupakan perpindahan fluida sepanjang sumbu x dan y yang dalam hal ini adalah suku pada persamaan kontinu. Kasus yang digunakan dalam skripsi ini melibatkan 81 proses perhitungan dilatasi pada setiap *looping* (level) iterasi untuk 1 sistem perairan dangkal penuh. Asumsi yang digunakan dalam perhitungan dilatasi adalah bahwa besarnya amplitudo pada batas adalah nol. Hal ini berarti bahwa $u_{1,n} = 0, u_{n,1} = 0, n = 1, 2, \dots, 10$.

Bentuk umum bagi persamaan dilatasi (D) yaitu: $D = u_x + v_y$ (Anderson et al, 1984), apabila diubah ke bentuk terdiskritisasi untuk masalah *shallow water* pada setiap satu levelnya akan menjadi

$$D_k = \frac{u_{i+1,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{u_{i+1,j+1}^{n+1} - u_{i,j+1}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{v_{i+1,j+1}^{n+1} - v_{i+1,j}^{n+1}}{\Delta y} + \frac{v_{i,j+1}^{n+1} - v_{i,j}^{n+1}}{\Delta y},$$

$$i, j \in 1, 2, \dots, 9, \text{ dan } k \in 1, 2, \dots, 64$$

Setelah proses perhitungan dilatasi pada 64 titik grid selesai maka dilakukan perhitungan tekanan baru. Bentuk umum dari perhitungan tekanan baru menggunakan dilatasi bentuk terdiskritisasi yang dapat ditulis

$$p_{i,j}^{n+1} = p_{i,j}^n - \beta D_k, \text{ untuk } i, j \in 1, 2, \dots, 9. \ k \in 1, 2, \dots, 81 \text{ dan } \beta = 1$$

3.2 Implementasi Algoritma pada Persamaan Saint Venant

Dengan memandang kembali persamaan Saint Venant dalam dua dimensi, maka dapat dibuat pola perhitungan untuk memperoleh amplitudo baru. Dalam hal ini amplitudo sepanjang sumbu x yang dimisalkan sebagai u diselesaikan menggunakan x momentum pada persamaan Saint Venant, dan amplitudo terhadap sumbu y yaitu v diselesaikan dengan menggunakan y momentum pada persamaan Saint Venant. Maka kondisi tersebut dapat dijabarkan sebagai berikut:

Dengan memandang kembali persamaan 2.35 persamaan x momentum Saint Venant (Steady State), untuk menghitung amplitudo sepanjang sumbu $x(u^{n+1})$ pada semua titik grid maka persamaan x momentum tersebut harus diubah ke dalam bentuk persamaan diskrit sebagai berikut:

$$\begin{aligned} & \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} + (u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n) \left[\left(\frac{u_{i+1,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i-1,j}^{n+1}}{B\Delta x} \right) \right] \\ & + (v_{i,j+1}^n - v_{i,j}^n) \left[\left(\frac{u_{i,j+1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1}}{B\Delta y} \right) \right] \\ & = - \frac{g(\eta_{i+1,j}^n - \eta_{i,j}^n)}{\Delta x} + v_1 \left(\frac{u_{i+1,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x^2} \right) \\ & + v_1 \left(\frac{u_{i,j+1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y^2} \right) \end{aligned}$$

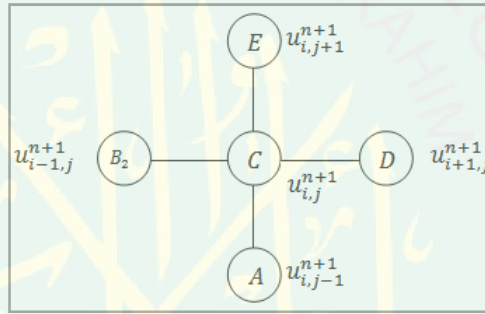
Persamaan di atas dapat desederhanakan menjadi

$$Au_{i,j-1}^{n+1} + B_2u_{i-1,j}^{n+1} + Cu_{i,j}^{n+1} + Du_{i,j+1}^{n+1} + Eu_{i+1,j}^{n+1} = F$$

dengan

$$\begin{aligned}
A &= \frac{v_{i,j+1}^n - v_{i,j}^n}{B\Delta y} - \frac{v_1}{\Delta y^2}, & D &= \frac{v_{i,j+1}^n}{\Delta y} - \frac{v_1}{\Delta y^2} \\
B_2 &= \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n}{B\Delta x} - \frac{v_1}{\Delta x^2}, & E &= \frac{u_{i+1,j}^n}{B\Delta x} - \frac{v_1}{\Delta x^2} \\
C &= -\frac{2(u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n)}{B\Delta x} - \frac{2(v_{i,j+1}^n - v_{i,j}^n)}{B\Delta y} + \frac{1}{\Delta t} + \frac{2v_1}{\Delta x^2} + \frac{2v_1}{\Delta y^2} \\
F &= -\frac{g(\eta_{i+1,j}^n - \eta_{i,j}^n)}{\Delta x} + \frac{u_{i,j}^n}{\Delta t}
\end{aligned}$$

Dari persamaan tersebut dibuat pola perhitungan bagi $u_{i,j}^{n+1}$ sebagai berikut:



Gambar 3.4 Pola x Momentum Saint Venant

Dari pola perhitungan tersebut, untuk menghitung besarnya amplitudo sepanjang sumbu x ($u_{i,j}^{n+1}$) adalah menerapkan pola x momentum pada gambar dengan cara menggeser bentuk pola tersebut dari kiri ke kanan sistem ke dalam sistem *Shallow Water*, sehingga terbentuk sistem persamaan

$$Cu_{2,2}^{n+1} + Du_{3,2}^{n+1} + Eu_{2,3}^{n+1} = F_1$$

$$Bu_{2,2}^{n+1} + Cu_{3,2}^{n+1} + Du_{4,2}^{n+1} + Eu_{3,3}^{n+1} = F_2$$

$$Bu_{3,2}^{n+1} + Cu_{4,2}^{n+1} + Du_{5,2}^{n+1} + Eu_{4,3}^{n+1} = F_3$$

⋮

$$Bu_{8,2}^{n+1} + Cu_{9,2}^{n+1} + Eu_{9,3}^{n+1} = F_4$$

$$Au_{2,2}^{n+1} + Cu_{2,3}^{n+1} + Du_{3,3}^{n+1} + Eu_{2,4}^{n+1} = F_5$$

$$Au_{3,2}^{n+1} + Bu_{2,3}^{n+1} + Cu_{3,3}^{n+1} + Du_{4,3}^{n+1} + Eu_{3,4}^{n+1} = F_8$$

⋮

Secara analogi pengerjaannya sama dengan x momentum Navier Stokes yang dapat dibentuk menjadi matrikss 5 diagonal

$$\begin{bmatrix} c_1 & d_1 & \dots & e_1 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & c_2 & d_2 & 0 & e_2 & 0 & 0 \\ \vdots & b & \ddots & \ddots & 0 & \ddots & 0 \\ a_1 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & e_{56} \\ 0 & a_2 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & \ddots & \ddots & d_{56} \\ 0 & 0 & 0 & a_{56} & \dots & b & c_{64} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{2,2}^{n+1} \\ u_{3,2}^{n+1} \\ \vdots \\ u_{9,2}^{n+1} \\ u_{2,3}^{n+1} \\ u_{3,3}^{n+1} \\ \vdots \\ u_{9,3}^{n+1} \\ \vdots \\ u_{9,9}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{g(\eta_{3,2}^n - \eta_{2,2}^n)}{\Delta y} + \frac{v_{2,2}^n}{\Delta t} \\ -\frac{g(\eta_{4,2}^n - \eta_{3,2}^n)}{\Delta x} + \frac{u_{3,2}^n}{\Delta t} \\ \vdots \\ -\frac{g(\eta_{10,2}^n - \eta_{9,2}^n)}{\Delta x} + \frac{u_{9,2}^n}{\Delta t} \\ -\frac{g(\eta_{3,3}^n - \eta_{2,3}^n)}{\Delta x} + \frac{u_{2,3}^n}{\Delta t} \\ -\frac{g(\eta_{4,3}^n - \eta_{3,3}^n)}{\Delta x} + \frac{u_{3,3}^n}{\Delta t} \\ \vdots \\ -\frac{g(\eta_{10,3}^n - \eta_{9,3}^n)}{\Delta x} + \frac{u_{9,3}^n}{\Delta t} \\ \vdots \\ -\frac{g(\eta_{10,9}^n - \eta_{9,9}^n)}{\Delta x} + \frac{u_{9,9}^n}{\Delta t} \end{bmatrix}$$

yang selanjutnya dibuat program MATLAB-nya agar lebih efisien.

Dalam hal ini, $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{56}\}$, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_{56}\}$, $C = \{c_1, c_2, \dots, c_{64}\}$, $D = \{d_1, d_2, \dots, d_{56}\}$, $E = \{e_1, e_2, \dots, e_{56}\}$ yang secara berurutan adalah nilai pada saat pola pada gambar 3.4 dijalankan pada grid pada gambar 3.1.

Sedangkan untuk menghitung amplitudo persamaan 2.36 (persamaan y momentum Saint Venant) sepanjang sumbu y (v^{n+1}) pada semua titik grid maka persamaan y momentum tersebut harus diubah ke dalam bentuk persamaan diskrit

$$\begin{aligned}
& \frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^n}{\Delta t} + (u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n) \left[\left(\frac{v_{i+1,j}^{n+1} - 2v_{i,j}^{n+1} + v_{i-1,j}^{n+1}}{B\Delta x} \right) \right] \\
& + (v_{i,j+1}^n - v_{i,j}^n) \left[\left(\frac{v_{i,j+1}^{n+1} - 2v_{i,j}^{n+1} + v_{i,j-1}^{n+1}}{B\Delta y} \right) \right] \\
& = -g \left(\frac{\eta_{i,j}^n - \eta_{i,j-1}^n}{\Delta y} + \frac{\eta_{i-1,j}^n - \eta_{i-1,j-1}^n}{\Delta y} \right) \\
& + v_2 \left(\frac{v_{i+1,j}^{n+1} - 2v_{i,j}^{n+1} + v_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x^2} \right) + v_2 \left(\frac{v_{i,j+1}^{n+1} - 2v_{i,j}^{n+1} + v_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y^2} \right)
\end{aligned}$$

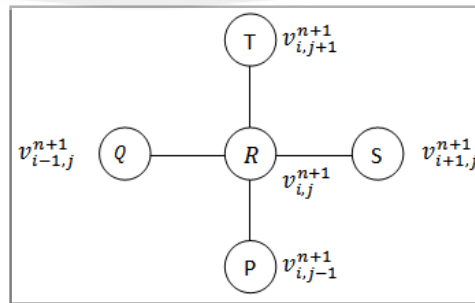
yang dapat disederhanakan menjadi:

$$Pv_{i,j-1}^{n+1} + Qv_{i-1,j}^{n+1} + Rv_{i,j}^{n+1} + Sv_{i,j+1}^{n+1} + Tv_{i+1,j}^{n+1} = W$$

dengan

$$\begin{aligned}
P &= \frac{v_{i,j+1}^n - v_{i,j}^n}{B\Delta y} - \frac{v_1}{\Delta y^2}, & S &= \frac{v_{i,j+1}^n}{\Delta y} - \frac{v_2}{\Delta y^2} \\
Q &= \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n}{B\Delta x} - \frac{v_1}{\Delta x^2}, & T &= \frac{u_{i+1,j}^n}{B\Delta x} - \frac{v_2}{\Delta x^2} \\
R &= -\frac{2(u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n)}{B\Delta x} - \frac{2(v_{i,j+1}^n - v_{i,j}^n)}{B\Delta y} + \frac{1}{\Delta t} + \frac{2v_1}{\Delta x^2} + \frac{2v_2}{\Delta y^2} \\
W &= -\frac{g(\eta_{i,j+1}^n - \eta_{i,j}^n)}{\Delta y} + \frac{v_{i,j}^n}{\Delta t}
\end{aligned}$$

Dari persamaan di atas dibuat pola perhitungan bagi $v_{i,j}^{n+1}$ sebagai berikut:



Gambar 3.5 Pola y Momentum Saint Venant

Untuk menghitung besarnya amplitudo sepanjang sumbu y ($v_{i,j}^{n+1}$) dari pola perhitungan tersebut adalah dengan menerapkan pola y momentum pada gambar 3.5 dengan cara menggeser bentuk pola tersebut dari kiri ke kanan sistem dalam *Shallow Water*, sehingga terbentuk sistem persamaan

$$\begin{aligned}
 Rv_{2,2}^{n+1} + Su_{2,3}^{n+1} + Tu_{3,2}^{n+1} &= W_1 \\
 Qv_{2,2}^{n+1} + Ru_{2,3}^{n+1} + Su_{2,4}^{n+1} + Tu_{3,3}^{n+1} &= W_2 \\
 Qu_{2,3}^{n+1} + Ru_{2,4}^{n+1} + Su_{2,5}^{n+1} + Tu_{3,4}^{n+1} &= W_3 \\
 &\vdots \\
 Qu_{2,8}^{n+1} + Ru_{2,9}^{n+1} + Tu_{3,8}^{n+1} &= W_4 \\
 Pu_{2,2}^{n+1} + Ru_{3,2}^{n+1} + Su_{3,3}^{n+1} + Tu_{2,5}^{n+1} &= W_5 \\
 Pu_{2,3}^{n+1} + Qu_{3,2}^{n+1} + Ru_{3,3}^{n+1} + Su_{3,4}^{n+1} + Tu_{4,3}^{n+1} &= W_8 \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Secara analogi pengerjaannya sama dengan x momentum Saint Venant yang dapat dibentuk menjadi matriks 5 diagonal

$$\begin{bmatrix} r_1 & s_1 & \cdots & t_1 & 0 & 0 & 0 \\ q_1 & r_2 & s_2 & 0 & t_2 & 0 & 0 \\ \vdots & q_2 & \ddots & \ddots & 0 & \ddots & 0 \\ p_1 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & t_{56} \\ 0 & p_2 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & \ddots & \ddots & s_{56} \\ 0 & 0 & 0 & p_{56} & \cdots & q_{56} & r_{64} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{2,2}^{n+1} \\ v_{2,3}^{n+1} \\ \vdots \\ v_{2,9}^{n+1} \\ v_{3,2}^{n+1} \\ v_{3,3}^{n+1} \\ \vdots \\ v_{3,9}^{n+1} \\ \vdots \\ v_{9,9}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{g(\eta_{2,3}^n - \eta_{2,2}^n)}{\Delta y} + \frac{v_{2,2}^n}{\Delta t} \\ -\frac{g(\eta_{2,4}^n - \eta_{2,3}^n)}{\Delta y} + \frac{v_{2,3}^n}{\Delta t} \\ \vdots \\ -\frac{g(\eta_{2,10}^n - \eta_{2,9}^n)}{\Delta y} + \frac{v_{2,9}^n}{\Delta t} \\ -\frac{g(\eta_{3,3}^n - \eta_{3,2}^n)}{\Delta y} + \frac{v_{3,2}^n}{\Delta t} \\ -\frac{g(\eta_{3,4}^n - \eta_{3,3}^n)}{\Delta y} + \frac{v_{3,3}^n}{\Delta t} \\ \vdots \\ -\frac{g(\eta_{3,10}^n - \eta_{3,9}^n)}{\Delta y} + \frac{v_{3,9}^n}{\Delta t} \\ \vdots \\ -\frac{g(\eta_{9,10}^n - \eta_{9,9}^n)}{\Delta y} + \frac{v_{9,9}^n}{\Delta t} \end{bmatrix}$$

yang selanjutnya dibuat program MATLAB-nya agar lebih efisien.

Dalam hal ini, $P = \{p_1, p_2, \dots, p_{56}\}$, $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_{56}\}$, $R = \{r_1, r_2, \dots, r_{64}\}$, $S = \{s_1, s_2, \dots, s_{56}\}$, $T = \{t_1, t_2, \dots, t_{56}\}$ yang secara berurutan adalah nilai pada saat pola pada gambar 3.5 dijalankan pada grid pada gambar 3.1.

Untuk u dan v baru (u^{t+1} dan v^{t+1}) dari persamaan Saint Venant 2D akan diperoleh dengan menyelesaikan matriks-matriks yang telah didapatkan diatas.

Untuk solusi dari semua titik grid pada saat t dapat dilihat pada lampiran.

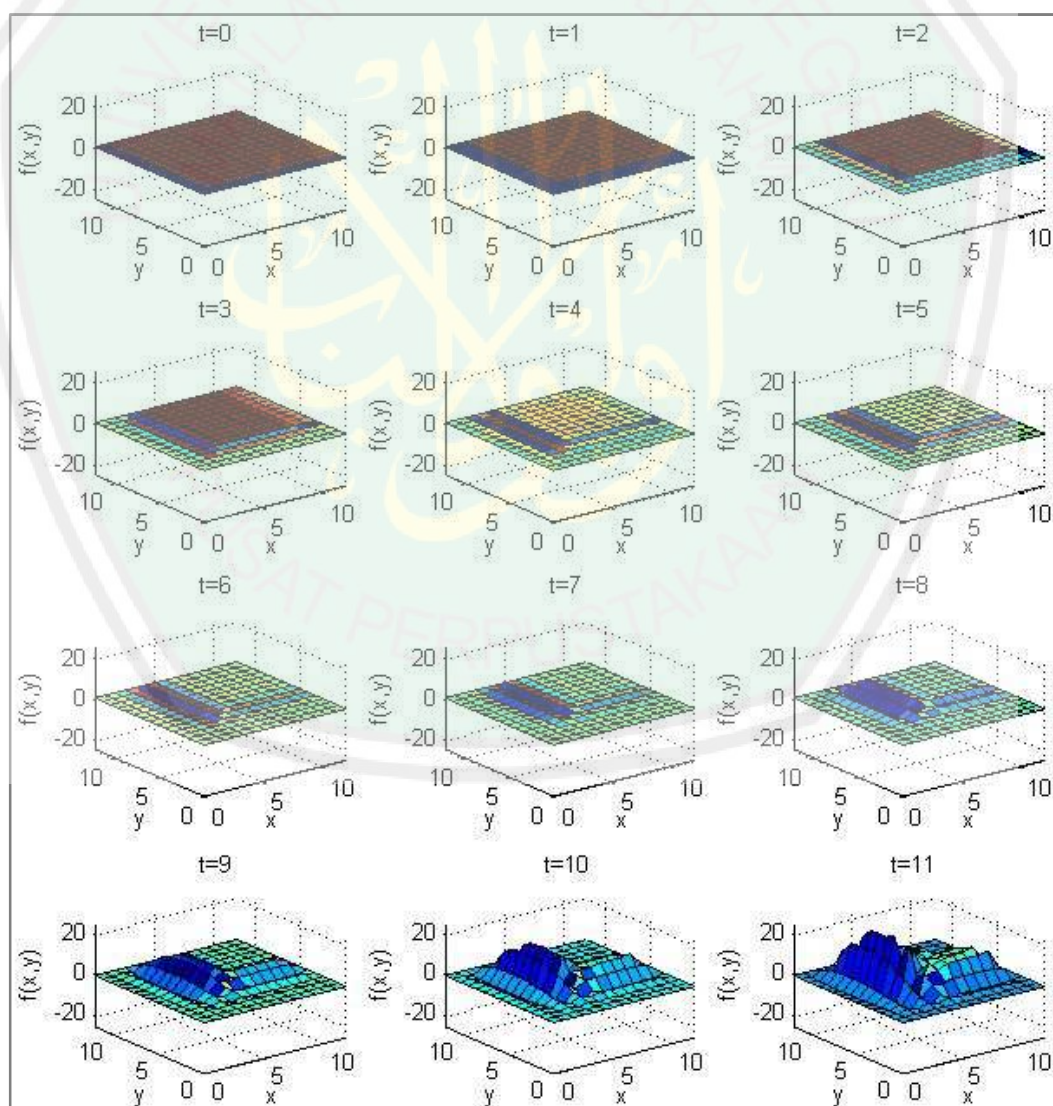
BAB IV

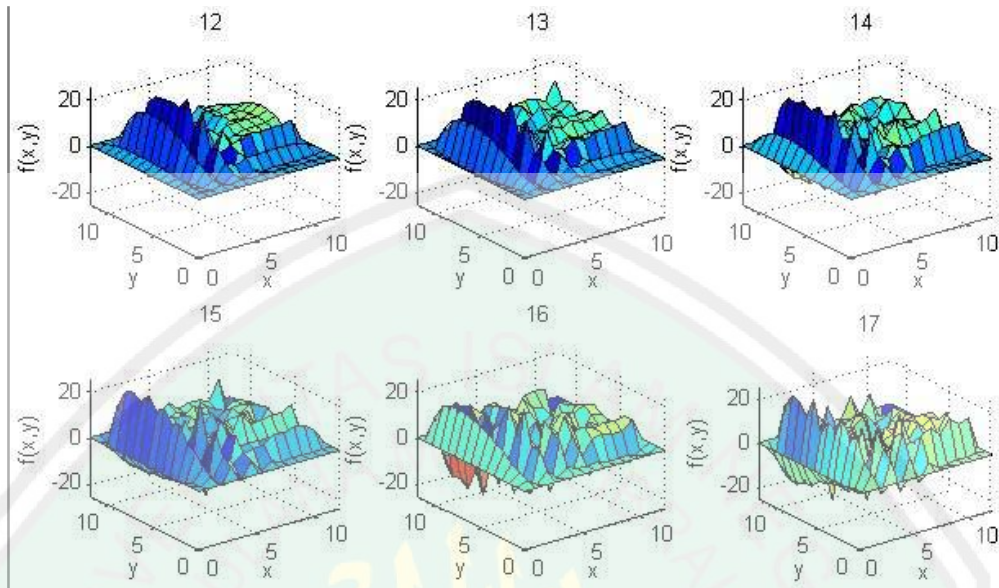
PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan, dapat diperoleh solusi numerik untuk,

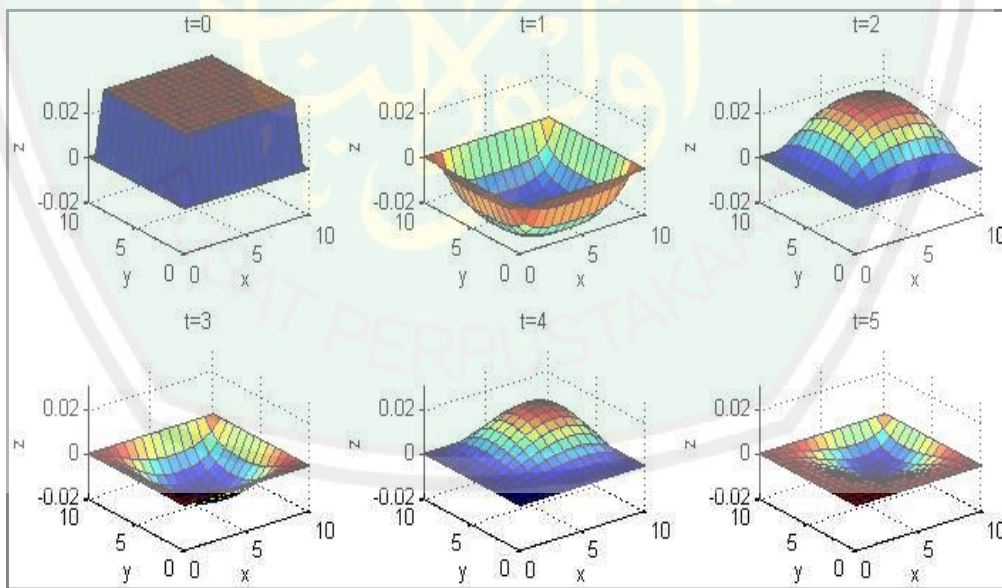
1. Persamaan Navier Stokes 2D di perairan dangkal dapat digambarkan dalam grafik





Gambar 4.1. Solusi Persamaan Navier-Stokes 2D

2. Persamaan Saint Venant 2D di perairan dangkal dapat digambarkan dalam grafik



Gambar 4.2. Solusi Persamaan Saint Venant 2D terhadap waktu

4.2. Saran

Metode numerik ADI dapat digunakan untuk mencari solusi persamaan differensial parsial tak linier dengan sangat cepat, tetapi ketepatan hasilnya tetap bergantung asumsi yang diberikan. Sehingga, untuk penelitian selanjutnya penulis

menyarankan penggunaan metode ini dengan minimalisasi asumsi agar hasilnya lebih akurat.



DAFTAR PUSTAKA

- Ghofar, Abdul, M. 2008. *Tafsir Ibnu Katsir*. Bogor: Pustaka Imam Syafi'i
- Aldrighetti, Elisa. 2007. Thesis
- Anonim. 2011. *Id.wikipedia.com*. diakses tanggal 5 januati 2011
- Anonim. 2011. *alsofwah.or.id*. diakses tgl 12 Jan 2011
- Anonim. 2011. *ariaturns.wordpress.com*. diakses tanggal 5 Desember 2010
- Chapra, Steven C. 2002. *Numerical Methods for Engineer*. New Jersey: The McGraw-Hill Companies Inc.
- Finzio, N dan Ladaz G. 1988. *Ordinary Diferential Equations, with Modern Applications*. Terjemahan Widiarti Santoso ITB. Jakarta: Erlangga
- Godwin, Priambodo B, Dugdale R H. 1986. *Mekanika Fluida Edisi Ketiga*. Jakarta: Erlangga
- Levine, Harold. 1997. *Partial Differential Equation*. International Press: American Mathematical society
- Munir, Rinaldi. 2006. *Metode Numerik*. Bandung: Informatika
- Nagle, Kent R dan Saff, Edward B. 1996. *Fundamentals of differential equations and boundary value problems*. Florida: University of South Florida
- Purcell, Edwin J.. 1987. *Kalkulus dan Geometri Analitis jilid II*. Jakarta: Erlangga
- Spiegel, Murray R. 1994. *Advanced Mathematics for Engineer and Scientists*. Terjemahan oleh Koko Martono. Jakarta: Erlangga
- Stewart, J. 2003. *Kalkulus jilid 2*. Terjemahan oleh I Nyoman Susila, Hendra Gunawan. Jakarta: Erlangga
- Triatmojo, Bambang. 2002. *Metode numerik*. Yogyakarta: Beta Offset

[illegible]

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	-0.0109	0.0086	-0.0045	-0.0002	-0.0001	-0.0001	-0.0001	-0.0001	-0.0001	-0.0001	0.0000	-0.0094	0.0112
0	-0.0224	0.0425	0.0151	0.0237	0.0238	0.0238	0.0238	0.0238	0.0238	0.0238	0.0240	0.0098	0.0261
0	-0.0274	0.0550	-0.0352	-0.0236	-0.0234	-0.0234	-0.0234	-0.0234	-0.0234	-0.0234	-0.0231	-0.0421	-0.0380
0	-0.0321	0.0552	-0.0410	0.0281	0.0292	0.0292	0.0292	0.0292	0.0292	0.0292	0.0295	0.0105	0.0191
0	-0.0321	0.0552	-0.0411	0.0289	0.0300	0.0300	0.0300	0.0300	0.0300	0.0300	0.0303	0.0112	0.0200
0	-0.0321	0.0552	-0.0411	0.0289	0.0300	0.0300	0.0300	0.0300	0.0300	0.0300	0.0303	0.0112	0.0200
0	-0.0321	0.0552	-0.0411	0.0289	0.0300	0.0300	0.0300	0.0300	0.0300	0.0300	0.0303	0.0112	0.0200
0	-0.0321	0.0552	-0.0411	0.0289	0.0300	0.0300	0.0300	0.0300	0.0300	0.0300	0.0303	0.0112	0.0200
0	-0.0321	0.0552	-0.0411	0.0289	0.0300	0.0300	0.0300	0.0300	0.0300	0.0300	0.0303	0.0112	0.0200
0	-0.0321	0.0552	-0.0411	0.0289	0.0300	0.0300	0.0300	0.0300	0.0300	0.0300	0.0303	0.0112	0.0200
0	-0.0321	0.0552	-0.0411	0.0289	0.0300	0.0300	0.0300	0.0300	0.0300	0.0300	0.0303	0.0112	0.0200
0	-0.0323	0.0509	-0.0413	0.0289	0.0300	0.0300	0.0300	0.0300	0.0300	0.0300	0.0303	0.0157	0.0201
0	-0.0210	0.0257	-0.0371	0.0294	0.0305	0.0305	0.0305	0.0305	0.0305	0.0305	0.0306	0.0209	0.0256
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$v^4 =$													
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0.0001	0.0002	0.0003	0.0005	0.0007	0.0008	0.0009	0.0010	0.0010	0.0010	0.0009	0.0007	0.0004
0	0.0002	0.0005	0.0009	0.0013	0.0017	0.0021	0.0024	0.0026	0.0027	0.0026	0.0024	0.0019	0.0011
0	0.0003	0.0009	0.0015	0.0023	0.0031	0.0038	0.0044	0.0048	0.0050	0.0049	0.0044	0.0036	0.0022
0	0.0005	0.0013	0.0023	0.0035	0.0048	0.0059	0.0069	0.0075	0.0078	0.0076	0.0070	0.0057	0.0035
0	0.0007	0.0017	0.0031	0.0048	0.0066	0.0082	0.0095	0.0103	0.0107	0.0105	0.0097	0.0079	0.0049
0	0.0008	0.0021	0.0039	0.0060	0.0082	0.0103	0.0119	0.0129	0.0134	0.0132	0.0121	0.0100	0.0062
0	0.0010	0.0024	0.0045	0.0069	0.0095	0.0119	0.0138	0.0150	0.0156	0.0153	0.0141	0.0116	0.0072
0	0.0010	0.0027	0.0049	0.0076	0.0104	0.0130	0.0151	0.0164	0.0170	0.0168	0.0155	0.0127	0.0079
0	0.0011	0.0027	0.0050	0.0078	0.0108	0.0135	0.0156	0.0171	0.0177	0.0175	0.0161	0.0132	0.0082
0	0.0010	0.0027	0.0049	0.0077	0.0106	0.0133	0.0154	0.0168	0.0175	0.0172	0.0159	0.0131	0.0081
0	0.0009	0.0024	0.0045	0.0071	0.0098	0.0123	0.0142	0.0155	0.0161	0.0159	0.0147	0.0122	0.0076
0	0.0007	0.0019											

Hasil perhitungan x dan y momentum persamaan St. Venant:

Implementasi algoritma pada Bab III menghasilkan amplitudo-amplitudo baru untuk persamaan Saint Venant sebagai berikut:

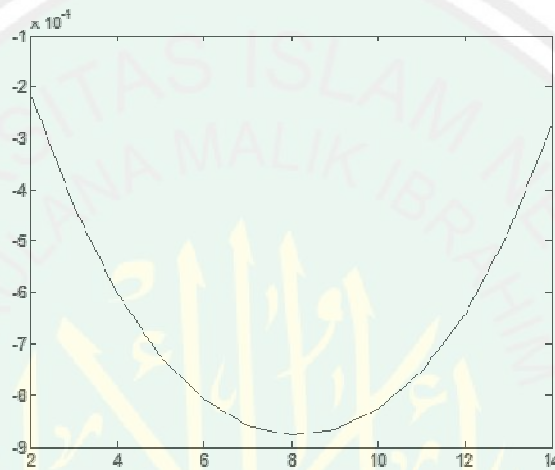
[illegible]

[illegible]

$$\dot{u}^2 =$$

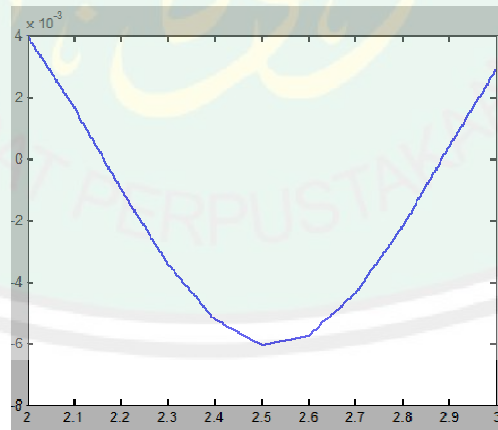
Komparasi Hasil Perhitungan Dengan Hasil Analitik

Solusi numerik persamaan Saint Venant 2D dalam grafik 2D dapat direpresentasikan sebagai berikut :



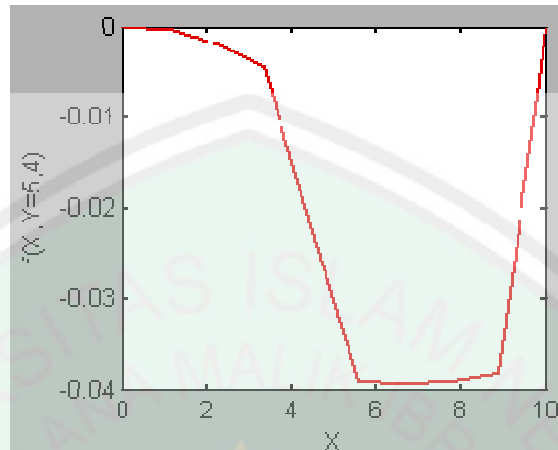
Gambar grafik numerik persamaan St.Venant 2D

Sedangkan solusi analitiknya $(y,t)=(x,t)$ adalah:



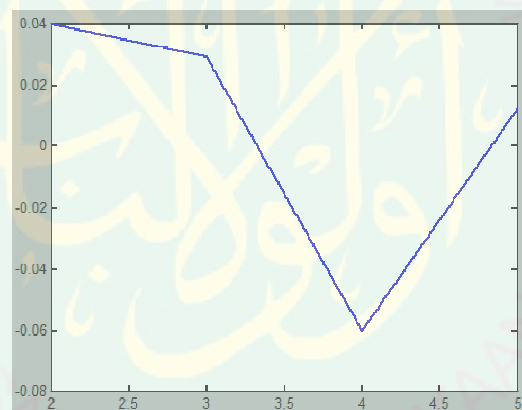
Gambar grafik analitik persamaan St.Venant 2D

Untuk solusi numerik persamaan Navier Stokes 2D dalam grafik 2D $(y,t)=(x,t)$ dapat direpresentasikan sebagai berikut :



Gambar grafik Numerik persamaan Navier Stokes 2D

Sedangkan solusi analitiknya



Gambar grafik analitik persamaan Navier Stokes 2D

Disini rentangan x antara numerik dan analitik tidak sama karena memang input dalam perhitungan numerik dan analitik tidak sama.

LISTING PROGRAM

```
clc, clear;
disp '#####'
disp '# xymomentum Navier-Stokes (steady state) #'
disp '# asumsi : #'
disp '# u(m,n)=0 | m V n = bondary condition #'
disp '#####'
disp ' '
format short
%%
Re=50;

UkuranRec=10;
pembagian=15;
banyakX=pembagian;
banyakY=pembagian;

X=linspace(0,UkuranRec,pembagian);
Y=linspace(0,UkuranRec,pembagian);
dx=X(2)-X(1);dy=Y(2)-Y(1);dt=.1;
dx,dy
it=10;
iterasi=1;
banyakData=(banyakX-2)*(banyakY-2);

%% disp '==== inputan tekanan pada titik p(i,j) ====='

P=zeros(banyakX-1,banyakY-1);
for i=1 : banyakY-1
    for j=1 : banyakX-1
        P(j,i)=0.01;
    end
end

%% disp 'inputan amplitudo pada titik (i,j) atau u(i,j)'

u=zeros(banyakX,banyakY,it);
for i=2 : banyakY-1
    for j=2 : banyakX-1
        u(j,i,iterasi)=0.03;
    end
end

%% disp 'inputan amplitudo pada titik (i,j) atau v(i,j)'

v=zeros(banyakX,banyakY,it);
for i=2 : banyakY-1
    for j=2 : banyakX-1
        v(j,i,iterasi)=0.03;
    end
end
```

```

v(:, :, 1);
a=zeros(banyakX-2, banyakY-2); b=zeros(banyakX-2, banyakY-
2); d=zeros(banyakX-2, banyakY-2); e=zeros(banyakX-2, banyakY-2);
c=(2/(Re*dx^2))-(2/(Re*dy^2))-(1/dt);

%% disp '===== u baru ===== v baru ===== u baru ===== v baru'

for perulangan=0:it
    if iterasi==it+1
        break
    end
    for i=1 : banyakY-2
        for j=1 : banyakX-2
            a(j,i)=(((v(j,i,iterasi))/(2*dy))+(1/(Re*dy^2)));
            b(j,i)=(((u(j,i,iterasi))/(2*dx))+(1/(Re*dx^2)));
            d(j,i)= (((-u(j,i,iterasi))/(2*dx))+(1/(Re*dx^2)));
            e(j,i)= (((-v(j,i,iterasi))/(2*dy))+(1/(Re*dy^2)));
        end
    end

    %% mencari nilai f (pada ms.word)
    f=zeros(banyakData,1);
    k=1;
    for i=2 : banyakX-1
        for j=2 : banyakY-1
            f(k,1)=(((P(j,i)-P(j-1,i)+P(j,i-1)-P(j-1,i-1))/dx)-(u(j-
1,i-1,iterasi)/dt));
            k=k+1;
        end
    end

    %% Membuat matrik baris x kolom
    Mtrx=zeros(banyakData,banyakData);
    for i= 1 : banyakData
        for j=1 : banyakData
            if j==i
                Mtrx(j,i)=c;
            end
            if j==i+1
                Mtrx(j,i)=b(i);
                if mod(i,(banyakX-2))==0
                    Mtrx(j,i)=0;
                end
            end
            if i==j+1
                Mtrx(j,i)=d(j);
                if mod(j,(banyakX-2))==0
                    Mtrx(j,i)=0;
                end
            end
            if j==i+(banyakY-2)
                Mtrx(j,i)=a(i);
            end
        end
    end
end

```

```

        end
        if i==j+(banyakX-2)
            Mtrx(j,i)=e(j);
        end
    end
end

%% u dan v baru :
u_baru=zeros(banyakData,1);
uBaru=(inv(Mtrx))*f;
aa=1;
for i=2 : banyakY-1
    for j=2 : banyakX-1
        u(j,i,iterasi+1)=uBaru(aa,1); % ini u barunya;
        aa=aa+1;
    end
end

f=zeros(banyakData,1);
k=1;
for i=2 : banyakX-1
    for j=2 : banyakY-1
        f(k,1)=(((P(i,j)-P(i-1,j)+P(i,j-1)-P(i-1,j-1))/dy)-(v(i-1,j-1,iterasi)/dt));
        k=k+1;
    end
end
iterasi=iterasi+1;

v_baru=zeros(banyakData,1);
vBaru=(inv(Mtrx))*f;
aa=1;
for i=2 : banyakY-1
    for j=2 : banyakX-1
        v(j,i,iterasi)=vBaru(aa,1); % ini u barunya;
        aa=aa+1;
    end
end

D=zeros(banyakX-1,banyakY-1);
for i=1 : banyakY-1
    for j=1 : banyakX-1
        D(j,i)=((u(j+1,i,iterasi)-u(j,i,iterasi))/dx)+((u(j+1,i+1,iterasi)-u(j,i+1,iterasi))/dx)+((v(j+1,i+1,iterasi)-v(j+1,i,iterasi))/dy)+((v(j,i+1,iterasi)-v(j,i,iterasi))/dy);
    end
end

for i=1 : banyakY-1
    for j=1 : banyakX-1
        P(j,i)=P(j,i)-D(j,i);
    end
end

```



```

        end
    end

%% hasil simulasi dalam 3D
% [X,Y]=meshgrid(X,Y);
% axis([0 12 0 12 -50 50])
% set(gca, 'nextplot', 'replacechildren');

% for j = 1:it
%     surf(X,Y,v(:, :, j))
%     F(j) = getframe;
% end
% movie(F,3,10)
%% atau dalam tampilan 2D
% t=0:it-1;
% uu=zeros(it,1);
% vv=zeros(it,1);
% n=3;
%
% for j=1:3
%     for i=1:it-1
%         uu(i)=u(n,n,i);
%         vv(i)=v(n,n,i);
%     end
%     subplot(2,3,j); plot(t,uu)
%     title('U baru, grid(')
%
%     subplot(2,3,3+j); plot(t,vv)
%     title('V baru, grid(')
%     n=n+3;
% end

clc, clear
disp '#####'
disp '# x,y momentum Saint Venant (steady state) #'
disp '# asumsi : #'
disp '# u(m,n)=0 | m v n = bondary condition #'
disp '# eta(x,y,t) = eta(x,y,t+1) #'
disp '# B=B, viskositas=sama disemua titik #'
disp '#####'
disp ' '
format short

UkuranRec=10;
pembagian=15;
banyakX=pembagian;
banyakY=pembagian;

X=linspace(0, UkuranRec, pembagian);
Y=linspace(0, UkuranRec, pembagian);
dx=X(2)-X(1); dy=Y(2)-Y(1); dt=1;;

```

```

dx, dy

B=1;
Vis=1.0037;
g=10;

it=20;
iterasi=1;
banyakData=(banyakX-2)*(banyakY-2);

%% disp 'inputan amplitudo pada titik (i,j) atau u(i,j)'
u=zeros(banyakX,banyakY,it);
    for i=2 : banyakY-1
        for j=2 : banyakX-1
            u(j,i,iterasi)=0.03;
        end
    end

%% disp 'inputan eta pada titik (i,j) atau eta(i,j)'
eta=zeros(banyakX-1,banyakY-1);
    for i=1 : banyakY-1
        for j=1 : banyakX-1
            eta(j,i)=0.01;
        end
    end

%% disp 'inputan amplitudo pada titik (i,j) atau v(i,j)'
v=zeros(banyakX,banyakY,it);
    for i=2 : banyakY-1
        for j=2 : banyakX-1
            v(j,i,iterasi)=0.03;
        end
    end

a=zeros(banyakX-2,banyakY-2);b=zeros(banyakX-2,banyakY-2);d=zeros(banyakX-2,banyakY-2);e=zeros(banyakX-2,banyakY-2);c=zeros(banyakX-2,banyakY-2);

%% disp 'u baru ===== v baru ===== u baru ===== v baru ====='

for perulangan=0:it
    if iterasi==it+1
        break
    end
    for i=1 : banyakY-2
        for j=1 : banyakX-2
            a(j,i)=((v(j,i+1,iterasi)-v(j,i,iterasi))/B*dy)-
            ((Vis)/dy^2);

```

```

        b(j,i)=((u(j+1,iterasi)-u(j,i,iterasi))/B*dx)-
        ((Vis)/dx^2);
        d(j,i)=(v(j,i+1,iterasi)/dy)-(Vis/dy^2);
        e(j,i)=(u(j,i+1,iterasi)/B*dx)-(Vis/dx^2);
        c(j,i)=(2*(u(j+1,i,iterasi)-u(j,i,iterasi))/(B*dx))-
        (2*(v(j+1,i,iterasi)-
        v(j,i,iterasi))/(B*dy)))+(1/dt)+(2*Vis/dx^2)+(2*Vis/dy^2);
    end
end

%% mencari nilai f (pada ms.word)
f=zeros(banyakData,1);
k=1;
for i=2 : banyakX-1
    for j=2 : banyakY-1
        f(k,1)=(-g*((eta(j,i)-eta(j-1,i)+eta(j,i-1)-eta(j-1,i-
        1))/dx) )-(u(j-1,i-1,iterasi)/dt);
        k=k+1;
    end
end

%% Membuat matrik baris x kolom
Mtrx=zeros(banyakData,banyakData);
for i= 1 : banyakData
    for j=1 : banyakData
        if j==i
            Mtrx(j,i)=c(i);
        end
        if j==i+1
            Mtrx(j,i)=b(i);
            if mod(i,(banyakX-2))==0
                Mtrx(j,i)=0;
            end
        end
        if i==j+1
            Mtrx(j,i)=d(j);
            if mod(j,(banyakX-2))==0
                Mtrx(j,i)=0;
            end
        end
        if j==i+(banyakY-2)
            Mtrx(j,i)=a(i);
        end
        if i==j+(banyakX-2)
            Mtrx(j,i)=e(j);
        end
    end
end

%% u baru
u_baru=zeros(banyakData,1);

```

```

uBaru=(inv(Mtrx))*f;
aa=1;
    for i=2 : banyakY-1
        for j=2 : banyakX-1
            u(j,i,iterasi+1)=uBaru(aa,1); % ini u barunya;
            aa=aa+1;
        end
    end
    %% v baru
    f=zeros(banyakData,1);
    k=1;
    for i=2 : banyakX-1
        for j=2 : banyakY-1
            f(k,1)=((eta(i,j)-eta(i-1,j)+eta(i,j-1)-eta(i-1,j-1))/dy) -(v(i-1,j-1,iterasi)/dt);
            k=k+1;
        end
    end
    v_baru=zeros(banyakData,1);
    vBaru=(inv(Mtrx))*f;
    aa=1;
    for i=2 : banyakY-1
        for j=2 : banyakX-1
            v(i,j,iterasi+1)=vBaru(aa,1); % ini v barunya;
            aa=aa+1;
        end
    end
    iterasi=iterasi+1;
end

%% hasil simulasi dalam 3D
% [X,Y]=meshgrid(X,Y);
% axis([0 10 0 10 -.05 .05])
% set(gca,'nextplot','replacechildren');

% for j = 1:it
%     surf(X,Y,v(:, :, j));
%     F(j) = getframe;
% end
% movie(F,1,3)

%% atau dalam tampilan2D
% t=0:it-1;
% uu=zeros(it,1);
% vv=zeros(it,1);
% n=3;
%
% for j=1:3
%     for i=1:it-1

```

```
%      uu(i)=u(n,n,i);
%      vv(i)=v(n,n,i);
%      end
%      subplot(2,3,j); plot(t,uu)
%      title('U baru, grid(')
%
%      subplot(2,3,3+j); plot(t,vv)
%      title('V baru, grid(')
%      n=n+3;
% end
```





KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN)
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang (0341)551345
Fax. (0341)572533

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Silva Ahmad Adini
Nim : 07610043
Fakultas/ jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul skripsi : Solusi Numerik Persamaan Saint Venant 2D
dan Persamaan Navier Stokes 2D
Pembimbing I : Ari Kusumastuti, M.Pd
Pembimbing II : Dr. H. Ahmad Barizi, M.A

No	Tanggal	HAL	Tanda Tangan	
1	30 Oktober 2010	Konsultasi BAB III	1.	
2	9 November 2010	Konsultasi BAB I dan II		2.
3	17 November 2010	revisi BAB I dan II	3.	
4	19 November 2010	Konsultasi BAB III		4.
5	19 Novemer 2010	ACC seminar proposal	5.	
6	26 November 2010	Konsultasi BAB III		6.
7	11 Januari 2011	Konsultasi Kajian Agama	7.	
8	14 Januari 2011	Revisi Kajian Agama		8.
9	11 Maret 2011	Konsultasi Keseluruhan	9.	
10	11 Maret 2011	ACC Keseluruhan		10.

Malang, 11 Maret 2011
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001