UJI KEKONVERGENAN DERET TAK HINGGA PADA BILANGAN REAL

SKRIPSI

OLEH:
ALIFIAH NABILLAH ROSYADAH
NIM. 18610050

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2024

UJI KEKONVERGENAN DERET TAK HINGGA PADA BILANGAN REAL

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
ALIFIAH NABILLAH ROSYADAH
NIM. 18610050

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2024

UJI KEKONVERGENAN DERET TAK HINGGA PADA BILANGAN REAL

SKRIPSI

Oleh
ALIFIAH NABILLAH ROSYADAH
NIM. 18610050

Telah Disetujui Untuk Diuji

Malang, 24 Juni 2024

Dosen Pembimbing I	Dosen Pembimbing II
Dr. Elly Susanti, M.Sc	Mohammad Nafie Jauhari, M.Si
NIP. 19741129 200012 2 005	NIPPPK. 19870218 202321 1 018

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

UJI KEKONVERGENAN DERET TAK HINGGA PADA BILANGAN REAL

SKRIPSI

Oleh
Alifiah Nabillah Rosyadah
NIM. 18610050

Telah Dipertahankan di Depan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Tanggal 28 Juni 2024

Ketua Penguji	: Prof. Dr. H. Turmudi, M.Si., Ph.D.	....
Anggota Penguji 1	: Dian Maharani, S.Pd., M.Si.	....
Anggota Penguji 2	: Dr. Elly Susanti, M.Sc.	....
Anggota Penguji 3	: Mohammad Nafie Jauhari, M.Si.	....

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

PERNYATAN KEASLIAN TULISAN

Saya bertanda tangan dibawah ini

Nama	: Alifiah Nabillah Rosyadah
NIM	: 18610050
Program Studi	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul Skrips	: Uji Kekonvergenan Deret Tak Hingga pada Bilangan Real

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini merupakan hasil karya saya sendiri, bukan pengambilan tulisan atau pemikiran orang lain yang saya akui sebagai pemikiran saya, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka di halaman terakhir. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 28 Juni 2024

METERAI TEMPEL
637F0ALX239861671

Alifiah Nabillah Rosyadah
NIM. 18610050

HALAMAN MOTO

“*Jika kamu menolong agama Allah,*
niscaya Dia akan menolongmu dan meneguhkan kedudukanmu.”
- *QS. Muhammad : 7* -

“Allah ingin hambaNya merasakan prosesnya, perjuangannya, belajarnya, dengan segala lika-liku suka dukanya. Dengan begitu, hambaNya bisa lebih merasakan cintaNya dan nikmatnya “Syukur” padaNya.”
- *@alifiahnabiila* -

HALAMAN PERSEMBAHAN

Bismillahirrahmanirrahim

Skripsi ini dipersembahkan kepada:

Seluruh keluarga penulis, terkhusus kepada kedua orang tua penulis, Bapak Hasanudin Sholihin, S.E., dan Ibu Elvy Diah Kartikarini, S.S., yang mempercayai penulis dalam setiap proses demi proses yang dilewati serta senantiasa menemani penulis melalui doa yang tidak pernah lelah dipanjatkan di sepertiga malam. Tidak lupa atas besarnya pengorbanan dukungan moril dan material yang diberikan keduanya untuk kelancaran penulis dalam menyelesaikan tugas akhir ini. Kepada adik penulis Muhammad Dzakwan Arkanudin Mujahidullah, saudari penulis, Shofi Alimatuzidni, dan sahabat penulis Atina Fahma Rosyada yang selalu bersedia menjadi pendengar keluh kesah penulis dan tak lupa memberi nasihat agar penulis semangat mengerjakan skripsi. *Last but not least,* kepada diri saya sendiri yang telah berjuang hingga sejauh ini, yang memilih untuk tetap berjuang tidak menyerah, dan memilih untuk selalu menyertakan Allah di setiap prosesnya, serta percaya atas segala ketetapan adalah ketetapan terbaik-Nya.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Dengan segala syukur, penulis ingin mengungkapkan rasa syukur yang tak terhingga kepada Allah Yang Maha Pengasih dan Maha Penyayang atas segala limpahan nikmat-Nya, termasuk kesehatan, kebahagiaan, serta kemudahan yang telah diberikan-Nya. Berkat rahmat, kasih sayang, dan petunjuk-Nya, penulis berhasil menyelesaikan tugas akademis yang penuh dengan perjuangan ini, yakni menyusun proposal skripsi dengan judul "Uji Kekonvergenan Deret Tak Hingga pada Bilangan Real", dengan dedikasi yang penuh dan sebaik-baiknya.

Skripsi ini bukanlah sekadar karya akademis semata, namun juga merupakan perjalanan spritual yang Allah berikan kepada penulis, yang di dalamnya ada banyak sekali hikmah dan pelajaran, juga sebagai pelajaran hidup bagi penulis, sehingga dengan melalui proses panjang di bidang pendidikan ini, penulis mendapat gelar sarjana dalam bidang Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Sholawat serta salam yang penuh dengan kecintaan kepada Nabi Muhammad SAW tak lupa senantiasa penulis sampaikan kepada sosok yang telah menjadi panutan dan pembimbing bagi umat manusia dari zaman kegelapan dan kebodohan (jahiliyah) menuju cahaya kebenaran yaitu agama Islam. Semoga segala upaya dan perjuangan penulis menjadi ladang amal yang diridhai oleh Allah SWT, serta menjadi bagian dari kontribusi kecil untuk perkembangan ilmu di muka bumi ini.

Dalam perjalanan penyusunan skripsi ini, tentu saja tidaklah berjalan seindah yang diharapkan, dan dipenuhi dengan berbagai tantangan yang memerlukan perjuangan, proses yang tidak mudah dan tidak sebentar, banyak air mata, tenaga, materi, dan rintangan lainnya. Namun, dengan kerendahan hati, penulis ingin menyampaikan rasa syukur yang mendalam atas segala doa, semangat, dukungan, serta arahan yang diberikan oleh berbagai pihak. Dengan karunia Allah SWT, skripsi ini berhasil diselesaikan. Oleh karena itu, penulis ingin menyampaikan banyak terimakasih kepada:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M.A., selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.

2. Prof. Dr. Hj. Sri Harini, M.Si., selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
3. Dr. Elly Susanti, M.Sc., selaku ketua Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim, dan selaku dosen Pembimbing I yang telah begitu sabar sekali dalam membimbing penulis, bersedia meluangkan waktunya untuk memberikan bimbingan disela-sela kesibukan di hari aktif maupun hari libur, memberikan banyak banyak ilmu, arahan, masukan, semangat, serta motivasi kepada penulis, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan benar dan baik.
4. Mohammad Nafie Jauhari, M.Si., selaku dosen Pembimbing II yang telah bersedia meluangkan waktunya untuk memberikan ilmu, arahan, bimbingannya, dan masukan, khususnya mengenai integrasi topik penelitian skripsi ini dengan Al-Qur'an, dan ilmu Islam, serta motivasi kepada penulis dalam proses penulisan skripsi ini.
5. Prof. Dr. H. Turmudi, M.Si., Ph.D., selaku Ketua Penguji yang telah bersedia meluangkan waktunya untuk menguji penulis dan memberikan ilmu, arahan, masukan, serta motivasi kepada penulis.
6. Dian Maharani, M.Si., selaku Anggota Penguji yang telah bersedia meluangkan waktunya untuk menguji penulis dan memberikan ilmu, arahan, bimbingan, masukan, serta motivasi dan semangat kepada penulis.
7. Seluruh civitas Akademi Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim, khususnya para dosen yang membimbing, dan memberikan ilmu selama perkuliahan.
8. Terkhusus untuk kedua orang tua Aba Hasanudin Sholihin, S.E., dan Ummi Elvy Diah Kartikarini, S.S., yang tak henti-hentinya untuk mendoakan, melimpahkan kasih dan sayangnya, memberikan dukungan moril dan materil, serta mendengarkan keluh kesah penulis dan seluruh keluarga besar yang menjadi kekuatan besar bagi penulis untuk terus bersemangat, sabar, tekun, dan *lillahita'ala* dalam menyelesaikan skripsi ini.
9. Penulis juga berterimakasih kepada seluruh sahabat-sahabat penulis, mbak Shofi Alimatuzidni, mbak Atina Fahma Rosyada, Diyanah Hanin Sabiila, mbak Nur Fazilah, mbak Nurul Fadhilah Fakaubun, mbak Nur Syamsiyah,

mbak Wa Ode Supiamarsafela, mbak Nur Mayta Khoiriyah, Wulan Cendani, Rizka Lutfika A., Najdah yang senantiasa memberikan dukungan juga semangat dalam proses penyelesaian skripsi ini.

10. Penulis juga berterimakasih kepada seluruh teman-teman mahasiswa angkatan 2018, terkhusus Zira Gemilia Putri teman seperjuangan angkatan 2018 yang selalu membersamai perjuangan untuk menyelesaikan skripsi ini, dan teman-teman angkatan 2018 lainnya yaitu Nurus Shubhiyyah Ismail, Siti Khanifah, Etna Liafitroh Falabibah, Angelina Agustin, Oktavia Eka A.
11. Penulis juga berterimakasih kepada teman-teman konsorsium Analisis angkatan 2018, 2019, 2020, 2021 yang telah membantu memberikan dukungan, doa, dan motivasi kepada penulis. Terkhususkan terimakasih kepada adik angkatan 2020, Ferira Febri Arianti, Wira, Ajeng, Tegar, Yunita yang bersedia meluangkan waktunya untuk menjadi teman diskusi bagi penulis tentang penelitian skripsi ini, dan memberikan dukungan juga semangat dalam proses penyelesaian skripsi ini.

Semoga Allah SWT memberikan balasan atas jasa yang diberikan terhadap penulis, dan penulis mengharapkan kritik serta saran agar dapat menyempurnakan tugas akhir ini. Penulis berharap semoga penelitian ini dapat bermanfaat bagi peneliti dan pembaca pada umumnya.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, 28 Juni 2024

Penulis

DAFTAR ISI

ABSTRAK

Rosyadah, Alifiah Nabillah. 2024. **Uji Kekonvergenan Deret Tak Hingga pada Bilangan Real**. Skripsi. Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. Elly Susanti, M.Sc. (II) Mohammad Nafie Jauhari, M.Si.

Kata kunci: Deret, Deret Tak Hingga Bilangan Real, Kriteria Kekonvergenan Cauchy, Uji Kekonvergenan, Uji Perbandingan, Uji Integral, Uji Rasio, Uji Akar.

Kekonvergenan deret tak hingga menyatakan bahwa sebuah deret $\sum a_k$ konvergen jika jumlah parsialnya mendekati nilai tertentu seiring bertambahnya jumlah suku. Penelitian ini membahas uji kekonvergenan deret tak hingga pada Bilangan Real, dengan tujuan membuktikan teorema-teorema kekonvergenan deret tak hingga pada Bilangan Real. Metode yang digunakan dalam penelitian ini meliputi uji perbandingan, uji integral, uji rasio, dan uji akar. Salah satu teorema utama yang dibuktikan adalah Kriteria Kekonvergenan Cauchy, yang menyatakan bahwa sebuah deret $\sum a_k$ konvergen jika dan hanya jika untuk setiap Bilangan Real $\varepsilon > 0$, terdapat $N \in \mathbb{N}$ sehingga $\left|a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_{k+p}\right| < \varepsilon$, untuk setiap $k \geq N$ dan setiap $p \in \mathbb{N}$. Hasil penelitian ini adalah berhasil dibuktikannya teorema-teorema deret tak hingga pada Bilangan Real dengan berbagai metode uji kekonvergenan. Pembuktian ini memberikan pemahaman yang lebih mendalam tentang sifat-sifat deret konvergen dan aplikasi praktisnya dalam berbagai bidang matematika, dan dari penelitia ini diharapkan memberikan kontribusi yang signifikan dalam pengembangan teori matematika dasar dan menjadi referensi bagi peneliti dan mahasiswa dalam memahami konsep-konsep dasar dalam analisis matematika, sehingga pada penelitian lebih lanjut mengenai uji kekonvergenan deret tak hingga pada Bilangan Real dapat diperluas dengan menggunakan metode kekonvergenan lainnya dan menerapkannya pada bilangan lainnya selain Bilangan Real, seperti bilangan kompleks, dan lainnya.

ABSTRACT

Rosyadah, Alifiah Nabillah. 2024. **Convergence Tests of Infinite Series on Real Numbers.** Thesis. Department of Mathematics. Faculty of Science and Technology, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (I) Dr. Elly Susanti, M.Sc. (II) Mohammad Nafie Jauhari, M.Si.

Keywords: Series, Infinite Series of Real Numbers, Cauchy Convergence Criterion, Convergence Test, Comparison Test, Integral Test, Ratio Test, Root Test.

The convergence of infinite series states that a series $\sum a_k$ converges if its partial sum approaches a certain value as the number of terms increases. This research discusses the test of convergence of infinite series on Real Numbers, with the aim of proving the theorems of convergence of infinite series on Real Numbers. The methods used in this study include comparison test, integral test, ratio test, and root test. One of the main theorems proved is the Cauchy Convergence Criterion, which states that a sequence $\sum a_k$ converges if and only if for every real number $\varepsilon > 0$, there exists $N \in \mathbb{N}$ such that $|a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_{k+p}| < \varepsilon$ for every $k \geq N$ and every $p \in \mathbb{N}$. The result of this research is the successful proof of infinite series theorems on Real Numbers with various convergence test methods. This proof provides a deeper understanding of the properties of convergent series and their practical applications in various fields of mathematics, and from this research is expected to make a significant contribution in the development of basic mathematical theory and become a reference for researchers and students in understanding basic concepts in mathematical analysis, so that further research on the convergence test of infinite series on Real Numbers can be extended by using other convergence methods and applying them to other numbers besides Real Numbers, such as complex numbers, and others.

مستخلص البحث

روسيادة، أليفيه نابيلاه. ٢٠٢٤. **اختبار تقارب المتسلسلات اللانهائية في الأعداد الحقيقية**. البحث الجامعي. قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا بجامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج. المشرفة الأولى: د .إيلي سوسانتي، الماجستيرة. المشرف الثاني :محمد نافع جوهري، الماجستير.

الكلمات الرئيسية: السلاسل، السلاسل اللانهائية في الأعداد الحقيقية، معيار تقارب كوشي، اختبارات التقارب، اختبار المقارنة، اختبار التكامل، اختبار النسبة، اختبار الجذر.

تنص نظرية تقارب المتسلسلات غير المنتهية على أن المتسلسلة $\sum a_k$ تتقارب إذا اقترب مجموعها الجزئي من قيمة معينة كلما زاد عدد الحدود. يناقش هذا البحث اختبار تقارب المتسلسلات غير المنتهية على الأعداد الحقيقية، بهدف إثبات نظريات تقارب المتسلسلات غير المنتهية على الأعداد الحقيقية. تشمل الطرق المستخدمة في هذه الدراسة اختبار المقارنة، واختبار التكامل، واختبار النسبة، واختبار الجذر. إحدى النظريات الرئيسية التي تم إثباتها هي معيار كوتشي للتقارب، والذي ينص على أن المتسلسلة $\sum a_k$ تتقارب إذا وفقط إذا كان لكل عدد حقيقي $0 < \varepsilon$، يوجد $N \in \mathbb{N}$ بحيث $\left|a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_{k+p}\right| < \varepsilon$ ، لكل $k \geq N$ ولكل $p \in \mathbb{N}$. نتيجة هذا البحث هو البرهان الناجح لنظريات المتسلسلة اللانهائية على الأعداد الحقيقية مع طرق اختبار التقارب المختلفة. وتوفر هذه البراهين فهماً أعمق لخصائص المتسلسلات المتقاربة وتطبيقاتها العملية في مختلف مجالات الرياضيات، ومن المتوقع أن يقدم هذا البحث مساهمة كبيرة في تطوير النظرية الرياضية الأساسية ويصبح مرجعاً للباحثين والطلاب في فهم المفاهيم الأساسية في التحليل الرياضي، بحيث يمكن توسيع نطاق البحث في اختبار تقارب المتسلسلات غير المنتهية على الأعداد الحقيقية باستخدام طرق تقارب أخرى وتطبيقها على أعداد أخرى إلى جانب الأعداد الحقيقية كالأعداد المركبة وغيرها.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Deret tak hingga adalah jumlah dari barisan bilangan yang tidak terbatas (Bartel, 1927). Memahami kekonvergenan deret ini sangat penting dalam berbagai cabang matematika, dan pemahaman yang mendalam tentang deret tak hingga pada Bilangan Real memiliki implikasi yang signifikan dalam berbagai aplikasi, termasuk dalam analisis matematika, teori probabilitas, fisika matematika, dan lainnya (Paskin, 2009). Penelitian ini ditujukan untuk melakukan uji kekonvergenan pada teorema-teorema deret tak hingga pada Bilangan Real, karena kekonvergenan deret memberikan dasar yang kuat dalam analisis fungsi dan integrasi, yang merupakan dasar dalam banyak teori matematis lainnya.

Deret tak hingga dapat dikatakan konvergen jika jumlah parsial dari deret tersebut mendekati suatu nilai tertentu seiring dengan bertambahnya jumlah suku. Konsep ini pertama kali diperkenalkan oleh para matematikawan seperti *Leonhard Euler* dan *Augustin-Louis Cauchy*, yang mengembangkan kriteria-kriteria untuk menentukan kekonvergenan. Salah satu kriteria terkenal adalah Kriteria Kekonvergenan Cauchy, yang menyatakan bahwa suatu deret $\sum a_k$ konvergen jika dan hanya jika untuk setiap Bilangan Real $\varepsilon > 0$, terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\left|a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_{k+p}\right| < \varepsilon$ untuk semua $k \geq N,\ n \in \mathbb{N}$, dan $p \geq 1$, $p \in \mathbb{N}$ (Fischer, 2015). Pada bab pendahuluan ini akan menjadi latar belakang dengan landasan yang kuat untuk dijadikan dasar penelitian lebih lanjut.

Deret $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ dikatakan konvergen ke L apabila barisan jumlah parsial $\{S_n\}$ konvergen ke L. (Parzynski & Zipse, 1987).

Deret tak hingga pada Bilangan Real dapat memiliki berbagai pola perilaku kekonvergenan, konvergen atau divergen tergantung pada susunan suku-suku dalam deret tersebut (Parzynski & Zipse, 1987). Pada penelitian ini nantinya akan fokus kepada pembuktian teorema-teorema, dengan melakukan pengumpulan, pembacaan data kepustakaan, dan pemahaman terkait masalah pada pembuktian teorema-teorema uji kekonvergenan deret tak hingga pada Bilangan Real yang ditemukan dari berbagai sumber buku, sebagai bahan teori yang akan di pakai pada obyek kajian penelitian pustaka. Penelitian tentang uji kekonvergenan deret tak hingga pada Bilangan Real tidak hanya memberikan wawasan mendalam tentang konsep dasar dalam analisis matematika, tetapi juga memberikan pemahaman yang kuat tentang sifat-sifat khusus dari Bilangan Real (Parzynski & Zipse, 1987) .

Integrasi antara ayat-ayat Al-Qur’an dengan penelitian ini di mana akan dibuktikannya teorema-teorema, dapat memperluas pemahaman tentang kedalaman pesan-pesan ilahi. Salah satu contoh ayat yang relevan dapat ditemukan dalam Surah Al-Anfal ayat 2, Allah SWT berfirman:

إِنَّمَا ٱلْمُؤْمِنُونَ ٱلَّذِينَ إِذَا ذُكِرَ ٱللَّهُ وَجِلَتْ قُلُوبُهُمْ وَإِذَا تُلِيَتْ عَلَيْهِمْ ءَايَٰتُهُۥ زَادَتْهُمْ إِيمَٰنًا وَعَلَىٰ رَبِّهِمْ يَتَوَكَّلُونَ

Artinya: “*Sesungguhnya orang-orang yang beriman ialah mereka yang bila disebut nama Allah gemetarlah hati mereka, dan apabila dibacakan ayat-ayat-Nya bertambahlah iman mereka (karenanya), dan hanya kepada Tuhanlah mereka bertawakkal.”* (Awaludin, 2012).

Penjelasan Tafsir Jalalain menegenai ayat ini, adalah di mana “Orang-orang yang beriman yang mencapai kesempurnaan dalam keimanan mereka adalah yang ketika mereka mendengar ancaman Allah, hati mereka gemetar karena takut kepada-Nya. Dan ketika mereka dibacakan ayat-ayat-Nya, keimanan dan keyakinan mereka bertambah, serta mereka bertawakal hanya kepada Tuhan mereka, tidak kepada selain-Nya.” (As-suyuthi et al., 2017).

Berdasarkan Surat Al-Anfal ayat 2 dan tafsirnya, ayat tersebut menjadi landasan pada penelitian ini yang akan membuktikan teorema-teorema yang nantinya akan menghasilkan karakteristik atau ciri-ciri pada suatu topik. Pada penelitian ini fokus terhadap teorema-teorema deret tak hingga pada Bilangan Real, yang dengan ayat-ayat Al-Qur’an tentang ciri-ciri ini akan membentuk pondasi bagi pemahaman bagi peneliti sebagai dasar materi yang akan digunakan dalam tahap penelitian yang akan dibuktikan. Ayat-ayat Al-Qur’an, seperti yang terdapat dalam Surat Al-Anfal ayat 2, menekankan bahwa ciri-ciri orang yang beriman adalah gemetar hati mereka saat menyebut nama Allah, dan iman mereka meningkat ketika mendengarkan ayat-ayat-Nya, serta hanya bertawakal kepada-Nya. Dalam hal ini, teorema matematika yang menggambarkan ciri-ciri pada suatu topik yang merupakan pengetahuan yang dapat dipahami tentang struktur dan sifat-sifat yang mendasari hal tersebut. Kedua pendekatan ini, baik melalui penelitian matematis maupun ajaran Al-Qur’an, saling melengkapi dan membantu dalam membentuk pemahaman yang komprehensif. Dengan memadukan pengetahuan yang diperoleh dari kedua sumber ini, manusia dapat mengembangkan wawasan yang lebih dalam dan menyeluruh tentang sifat dan karakteristik suatu topik, sehingga memperkaya perspektif dan pemahaman tentang alam semesta ini secara keseluruhan.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan pada latar belakang penelitian di atas, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah bagaimana kekonvergenan deret tak hingga pada Bilangan Real dengan membuktikan teorema-teorema menggunakan uji kekonvergenan?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan pada latar belakang penelitian di atas, penulis menjadikan tujuan rumusan masalah dalam penelitian ini adalah mengetahui kekonvergenan deret tak hingga pada Bilangan Real dengan membuktikan teorema-teorema menggunakan uji kekonvergenan.

1.4 Manfaat Penelitian

Melalui adanya penelitian ini diharapkan dapat mengembangkan pemahaman yang lebih mendalam tentang konsep uji kekonvergenan deret tak hingga pada Bilangan Real dan pembuktian teorema-teorema terkait, sehingga mengasah penalaran dan logika yang dimiliki oleh penulis. Adapun manfaat bagi pembaca dari penelitian ini, penulis berharap penelitian ini memiliki manfaat akademis yang signifikan dalam bidang matematika, berupa hasil pembuktian teorema-teorema deret tak hingga pada Bilangan Real dengan menggunakan metode uji kekonvergenan seperti uji perbandingan, uji integral, uji rasio, dan uji akar, serta pembuktikan Kriteria Kekonvergenan Cauchy. Diharapkan penelitian ini memberikan panduan bagi mahasiswa dan pengajar dalam memahami dan mengaplikasikan konsep-konsep kekonvergenan deret, serta dapat digunakan sebagai referensi ilmiah yang bermanfaat dalam pendidikan dan penelitian lanjutan.

1.5 Batasan Masalah

Batasan masalah yang ada dalam penelitian ini adalah membatasi hanya pada pembuktian teorema-teorema yang berkaitan dengan uji kekonvergenan deret tak hingga pada Bilangan Real. Berikut batasan-batasan masalahnya :

1. Deret Tak Hingga: Penelitian ini akan membatasi pembahasan hanya pada deret tak hingga, khususnya deret berurutan Bilangan Real dan tidak akan membahas deret dengan elemen non-real atau deret dengan elemen lainnya di luar kategori Bilangan Real.
2. Kekonvergenan: Penelitian akan membatasi diri pada uji kekonvergenan deret tak hingga hanya pada Bilangan Real.
3. Bilangan Real: Batasan masalah akan mempertimbangkan deret yang terdiri dari Bilangan Real, termasuk deret yang terdiri dari bilangan bulat, pecahan, dan irasional. Penelitian tidak akan membahas deret yang melibatkan bilangan kompleks.
4. Metode Uji Kekonvergenan: Penelitian akan membatasi analisis pada berbagai metode yang digunakan untuk menguji kekonvergenan deret tak hingga pada Bilangan Real, seperti uji perbandingan, uji integral, uji rasio, dan uji akar.

Dengan memperhatikan batasan-batasan ini, penelitian ini diharapkan dapat memberikan kontribusi yang signifikan terhadap pemahaman tentang kekonvergenan deret tak hingga pada Bilangan Real dan metode-metode yang digunakan untuk menguji kekonvergenannya.

BAB II

KAJIAN TEORI

2.1 Teori Pendukung

Pada bab kajian teori ini akan diberikan teori-teori pendukung berupa Definisi, beserta contoh-contohnya, dan beberapa Teorema untuk mempermudah dalam pembuktian hasil uji kekonvergenan deret tak hingga pada Bilangan Real.

2.1.1 Sistem Bilangan Real

Bilangan real adalah himpunan bilangan yang mencakup semua bilangan rasional, seperti bilangan bulat dan pecahan yaitu misal $(1, \frac{2}{3},$ dan $-4)$, serta bilangan irasional seperti $\sqrt{2}$ dan π, yang tidak dapat dinyatakan sebagai perbandingan dua bilangan bulat (Goldberg, 1976). Bilangan real dapat diwakili oleh setiap titik pada garis bilangan, mencakup bilangan positif, negatif, dan nol. Salah satu sifat fundamental dari Bilangan Real adalah sifat kelengkapan, yang menyatakan bahwa setiap himpunan bagian non-kosong dari Bilangan Real yang memiliki batas atas, pasti memiliki supremum yang merupakan batas atas terkecil dalam Bilangan Real itu sendiri. Demikian pula, setiap himpunan bagian non-kosong dari Bilangan Real yang memiliki batas bawah, pasti memiliki infimum yang merupakan batas bawah terbesar. Sifat kelengkapan ini membedakan Bilangan Real dari bilangan rasional dan merupakan dasar dari banyak konsep dalam analisis matematika, termasuk teori limit dan kontinuitas (Walter Rudin, 1976).

Dua konsep utama yang tentang kelengkapan ini adalah supremum dan infimum, masing-masing mewakili batasan atas dan batasan bawah dari suatu himpunan Bilangan Real. Pemahaman yang mendalam tentang supremum dan infimum memainkan peran kunci dalam berbagai aspek matematika, mulai dari analisis real hingga optimisasi. Oleh karena itu, studi tentang sistem Bilangan Real tidak lengkap tanpa pemaparan yang memadai tentang konsep supremum dan infimum serta implikasinya terhadap kelengkapan sistem Bilangan Real (Walter Rudin, 1976).

Definisi 2.1 (Bartel, 1927)

Misalkan S adalah himpunan pada bagian yang tak kosong dari $\mathbb{R}$.

1. Himpunan S dikatakan terbatas di atas, apabila terdapat bilangan $u \in \mathbb{R}$ dengan demikian $s \leq u$ untuk semua $s \in S$. Setiap bilangan u disebut batas atas S.
2. Himpunan S dikatakan terbatas di bawah, apabila terdapat bilangan $w \in \mathbb{R}$ dengan demikian $w \leq s$ dan untuk semua $s \in S$. Setiap bilangan w disebut batas bawah S.

Lemma 2.1 (Bartel, 1927)

Suatu bilangan u adalah supremum yakni dari himpunan bagian tidak kosong S dari $\mathbb{R}$ jika dan hanya jika u memenuhi syarat berikut:

1. $Untuk\ setiap\ bilangan\ s \in S$*, berlaku* $s \leq u$.
2. *Untuk setiap Bilangan Real $v < u$, terdapat $s' \in S$ sehingga $v < s'$.*

Dengan T adalah himpunan bagian tak kosong dari S, maka u memenuhi syarat: $\sum_{n=1}^{\infty}\{a_n + b_n\} = S + T$*, dimana T merupakan himpunan bagian tak kosong dari S. Artinya, T juga merupakan himpunan Bilangan Real tak kosong.*

Lemma 2.2 (Bartel, 1927)

Batas atas u dari himpunan tak kosong S di $\mathbb{R}$ merupakan supremum dari S jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ dan $s_\varepsilon \in S$ sehingga $u - \varepsilon < s_\varepsilon$.

Bukti.

Jika u adalah batas atas dari S dengan memenuhi syarat yang dinyatakan dan apabila

$$v < u$$

maka dapat dimasukkan

$$\varepsilon \coloneqq u - v\ .$$

Maka dengan $\varepsilon > 0$, akan didapat $s_\varepsilon \in S$ sedemikian sehingga

$$v = u - \varepsilon < s_\varepsilon\ .$$

Oleh karena itu, v bukanlah batas atas dari S, dan disimpulkan bahwa

$$u = \sup S.$$

Adapun sebaliknya, misalkan terdapat

$$u = \sup S \text{ dan } \varepsilon > 0.$$

Karena

$$u - \varepsilon < u\ ,$$

maka $u - \varepsilon$ bukan batas atas S.

Maka dari itu, beberapa elemen s_ε dari S harus lebih besar dari $u - \varepsilon$ yaitu,

$$u - \varepsilon < s_\varepsilon\ .$$

∎

2.1.2 Barisan

Sebuah barisan dalam sebuah himpunan A yang merupakan fungsi, di mana domainnya adalah himpunan $\mathbb{N}$ bilangan asli, dan rangenya terdapat di dalam himpunan A. Barisan dinotasikan sebagai $\{a_n\}$ adalah suatu fungsi $A: \mathbb{N} \rightarrow X$,

$$a\{n\} = a_n\,,\;\; n \in \mathbb{N}$$

di mana X adalah suatu himpunan tertentu, biasanya himpunan bilangan Real $\mathbb{R}$ atau himpunan Bilangan Kompleks $\mathbb{C}$, dan a_n adalah suku ke-n dari barisan tersebut.

Pada bab ini, kita akan membahas barisan-barisan di dalam $\mathbb{R}$ dan mendiskusikan apa yang dimaksud dengan kekonvergenan barisan-barisan tersebut.

Definisi 2.2 (Rahman, 2017)

Barisan Bilangan Real atau suatu barisan di $\mathbb{R}$ yang merupakan merupakan suatu fungsi dari himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$ ke himpunan Bilangan Real $\mathbb{R}$.

Contoh 2.1 (Rahman, 2017)

Diberikan fungsi $A: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ yang didefinisikan dengan

$$A\{n\} = n\,,\; n \in \mathbb{N}\,,$$

maka A adalah barisan di $\mathbb{R}$.

Demikian, fungsi $A: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ yang didefinisikan dengan $n \rightarrow \frac{1}{n}$ maka,

$$A\{n\} = a_n = \frac{1}{n}\,,\; n \in \mathbb{N}\,.$$

A dikategorikan sebagai suatu barisan Bilangan Real karena domainnya adalah $\mathbb{N}$, yang merupakan himpunan bulat positif atau bilangan asli, dan daerah hasilnya merupakan himpunan Bilangan Real.

2.1.3 Barisan Konvergen

Definisi 2.3 (Rahman, 2017)

Misalkan $A = \{a_n\}$ adalah barisan Bilangan Real. Suatu Bilangan Real a dikatakan limit dari A, jika untuk masing-masing lingkungan V dari a terdapat suatu bilangan asli N sehingga untuk semua $n \geq N$, maka a_n adalah anggota V. Jika a adalah limit dari N, maka dikatakan N konvergen ke a (atau N mempunyai limit a). Jika suatu barisan mempunyai limit, maka barisan itu dikatakan konvergen. Jika tidak mempunyai limit, barisan itu dikatakan divergen. Jika barisan Bilangan Real $A = \{a_n\}$ mempunyai limit $a \in \mathbb{R}$, maka sering ditulis

$$a = \lim A , \qquad a = \lim \{a_n\}, \qquad a = \lim_{n\to\infty} \{a_n\}$$

Terkadang digunakan notasi $a_n \to a$ untuk menyatakan $A = \{a_n\}$ konvergen ke a. Dengan demikian dapat dinyatakan

$$a_n \to a \Leftrightarrow \forall V(a) \exists\, k \in \mathbb{N} \ni a_n \in v_{(a)}, n \geq N .$$

Definisi 2.4 Limit Barisan (Bartel, 1927)

Barisan $A = \{a_n\}$ adalah barisan bilangan real. A dikatakan terbatas jika terdapat bilangan real $M > 0$ sedemikian hingga $|a_n| \leq M,$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$. Berdasarkan definisi, maka barisan $A = \{a_n\}$ terbatas jika dan hanya jika himpunan $\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ terbatas.

Dari **definisi 2.4** diketahui A adalah barisan yang terbatas

Teorema 2.1 (Bartel, 1927)

Misalkan $\{a_n\}$ adalah barisan Bilangan Real. Jika barisan tersebut memiliki batas L, yang berarti bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$, ada suatu N sehingga untuk setiap $n > N, |a_n - L| < \varepsilon$, maka dapat dikatakan bahwa barisan tersebut konvergen ke L.

Bukti.

Misalkan diberikan barisan

$$a_n = \left\{\frac{1}{n}\right\} \text{, untuk setiap } n \in \mathbb{N} \text{ .}$$

Sehingga akan ditunjukkan bahwa barisan ini konvergen ke 0 saat n mendekati tak hingga. Berdasarkan **teorema 2.1**, untuk setiap $\varepsilon > 0$, harus ditemukan N sedemikian sehingga untuk

$$n > N, |a_n - 0| = \left|\frac{1}{n} - 0\right|$$

$$= \frac{1}{n} < \varepsilon \text{ .}$$

Dengan demikian, menunjukan bahwa a_n konvergen ke 0 saat n mendekati tak hingga.

2.1.4 Barisan Monoton

Definisi 2.5 (Rahman, 2017)

Misalkan $A = \{a_n\}$ adalah barisan Bilangan Real.

$A = \{a_n\}$ disebut monoton naik (monoton tidak turun) apabila

$$a_n \leq a_{n+1} \text{ , untuk semua } n \in \mathbb{N}.$$

$A = \{a_n\}$ disebut monoton turun (monoton tidak naik) apabila

$$a_n \geq a_{n+1} \text{ , untuk semua } n \in \mathbb{N}.$$

$A = \{a_n\}$ disebut monoton apabila monoton naik atau monoton turun.

Contoh 2.2

Barisan

$$A = \{a_n\} = \{2, 4, 6, \dots, 2_n, \dots\}$$

adalah monoton naik.

Barisan

$$B = \{b_n\} = \{-1, -2, -3, \dots, -n, \dots\}$$

adalah monoton turun.

Barisan

$$C = \{c_n\} = \{-1, 1, -1, \dots, (-1)^n, \dots\}$$

tidak monoton naik dan tidak monoton turun.

Teorema 2.2 Barisan Monoton Naik (Rahman, 2017)

Jika $A = \{a_n\}$ barisan Bilangan Real yang monoton naik dan terbatas di atas maka $A = \{a_n\}$ konvergen.

Bukti.

Diketahui $A = \{a_n\}$ monoton naik, dan misalkan

$$E = \{a_n | n \in \mathbb{N}\} \cdot$$

Maka $E \neq \emptyset$ dan terbatas di atas.

Misalkan $a = sup\, E$, dan ambil $\varepsilon > 0$ sebarang.

Karena $a - \varepsilon$ bukan batas atas, maka ada $K \in \mathbb{N}$ sehingga

$$a - \varepsilon < a_K < x \, .$$

Karena $\{a_n\}$ monoton naik, maka

$$a - \varepsilon < a_K < x \, ,$$

untuk semua $n \geq K$.

Jadi, jika $n \geq K$, maka diperoleh

$$-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon \, .$$

Terbukti bahwa $\{a_n\}$ konvergen ke a.

$\blacksquare$

Teorema 2.3 Barisan Monoton Turun (Rahman, 2017)

Jika $A = \{a_n\}$ barisan Bilangan Real yang monoton turun dan terbatas di bawah maka $A = \{a_n\}$ konvergen.

Bukti.

Diketahui $A = \{a_n\}$ monoton turun, maka diketahui $a_n \geq a_{n+1}$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Karena $A = \{a_n\}$ terbatas di bawah, dan ada suatu Bilangan Real m maka $a_n \geq m$, untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

Barisan $\{a_n\}$ adalah monoton turun dan terbatas di bawah, maka $\{a_n\}$ memiliki batas bawah. Misalkan L adalah batas bawah dari $\{a_n\}$. Maka dapat dinotasikan sebagai berikut

$$L = inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}\,.$$

Karena L adalah batas bawah dari $\{a_n\}$, untuk setiap $\varepsilon > 0$, ada suatu N sehingga $L \leq a_n < L + \varepsilon$, untuk semua $n \geq N$.

Karena a_n monoton turun, $a_n \geq L$ untuk semua n, dan a_n semakin mendekati L tetapi tidak pernah kurang dari L.

Maka, untuk

$$n \geq N\ , L \leq a_n < L + \varepsilon$$

yang berarti

$$|a_n - L| < \varepsilon\ .$$

Ini memenuhi syarat definisi kekonvergenan, yaitu $a_n \to L$ ketika $n \to \infty$.

Dikarenakan barisan $\{a_n\}$ monoton turun dan terbatas di bawah, serta mendekati limit bawahnya L, maka barisan $\{a_n\}$ konvergen ke L. Dengan demikian, terbukti bahwa barisan monoton turun yang terbatas di bawah adalah konvergen.

■

2.1.5 Kriteria Barisan Cauchy

Definisi 2.6 (Rahman, 2017)

Misalkan $A = \{a_n\}$ adalah barisan Bilangan Real. $A = \{a_n\}$ disebut barisan Cauchy apabila untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $M \in \mathbb{N}$ sehingga $|a_m - a_n| < \varepsilon$ untuk semua $m, n \ \leq M$.

Teorema 2.4 Barisan Cauchy (Rahman, 2017)

Jika $A = \{a_n\}$ adalah barisan bilangan real dan konvergen , maka $A = \{a_n\}$ adalah barisan Cauchy.

Bukti.

Misalkan $\{a_n\}$ konvergen ke $a \in \mathbb{R}$. Ambil sebarang $\varepsilon > 0$, maka terdapat $N \in \mathbb{N}$ sehingga

$$|a^n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

untuk semua $n \geq N$. Untuk $m, n \geq N$ diperoleh

$$|a_m - a_n| \leq \{a_m - a\} + |a_n - a|$$

$$|a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|a_m - a_n| = \varepsilon$$

Jadi terbukti, bahwa $\{a_n\}$ adalah barisan Cauchy.

■

2.1.6 Deret

Deret adalah jumlah n suku-suku pertama dalam suatu barisan. Deret pada umumnya yaitu deret aritmatika dan deret geometri. Deret aritmatika adalah deret yang suku-sukunya bertambah atau berkurang dengan suatu beda tetap, d.

Contohnya, deret $\sum_{k=1}^{\infty}(a+(n-1)d)$, dengan a sebagai suku pertama dan n sebagai indeks, selalu divergen jika $d \neq 0$. Hal ini karena suku-suku dalam deret aritmatika terus bertambah tanpa batas.

Adapun, deret geometri adalah deret yang suku-sukunya bertambah atau berkurang dengan suatu rasio tetap, r. Contohnya, deret $\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1}$, dengan a sebagai suku pertama dan k sebagai indeks, konvergen jika nilai mutlak dari rasio suku-sukunya, $|r| < 1$.

Pada penelitian ini akan digunakan deret geometri dalam berbagai metode uji kekonvergenan seperti uji rasio (Ratio Test) dan uji akar (Root Test), karena rasio suku berurutan yang konstan memudahkan analisis kekonvergenan.

Definisi 2.7 Deret (Anton, Howard, Irl C. Bivens, 2018)

Apabila $\{a_n\}$ adalah sebuah barisan, maka deret yang terkait dengan barisan tersebut ditulis sebagai

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

atau dalam notasi dapat dinotasikan

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \, .$$

Dalam definisi di atas, S_n adalah penjumlahan dari suku-suku pertama n dalam deret tersebut. S_n adalah jumlah parsial ke-n dari deret tersebut.

Adapun selanjutnya, apabila jumlah dari suku-suku tersebut memiliki limit seiring n menuju tak hingga, dan limit tersebut (jika ada) disebut sebagai jumlah deret tak hingga $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Contoh 2.3

Deret geometri adalah deret di mana rasio antara suku-suku berturutannya adalah konstan.

Contoh, $3 + 6 + 12 + 24 + \cdots$

Dalam bentuk umum, deret geometri dengan suku pertama a dan rasio r adalah

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$$

Jumlah n suku pertama dari deret geometri untuk $r > 1$ adalah

$$S_n = a\frac{r^n - 1}{r - 1}.$$

Untuk deret geometri tak hingga dengan $|r| < 1$, jumlah deret adalah

$$S_n = a\frac{1 - r^n}{1 - r}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = a\frac{1 - r^n}{1 - r}$$

$$= \frac{a}{r - 1}.$$

Kekonvergenan suatu deret adalah ketika jumlah elemen deret tersebut mendekati atau mencapai suatu nilai tertentu saat jumlah elemen deret tersebut diperbanyak hingga tak terbatas. Dengan kata lain, deret dikatakan konvergen jika jumlahnya memiliki batasan atau dapat mendekati suatu nilai tertentu ketika jumlah suku deretnya diperbesar hingga tak terbatas.

Teorema 2.5 Kekonvergenan Deret (Royden, H.; Fitzpatrick, 2010)

Sebuah deret geometri konvergen jika dan hanya jika nilai absolut dari rasio $|r|$ *dari dua suku berurutan kurang dari* 1. *Dalam hal ini, jumlah deret geometri* *dapat ditemukan dengan* $\frac{a_1}{1-r}$ *untuk* a_1 *yang merupakan suku pertama dan* r *adalah rasio dua suku berurutan*.

Bukti.

Perhatikan, diberikan deret geometri

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

Dalam deret ini, suku-suku a_n adalah $\frac{1}{2^n}$. Deret ini merupakan contoh deret geometri dengan suku pertama $a_1 = \frac{1}{2}$ dan rasio $r = \frac{1}{2}$.

Selanjutnya, dapat diperhatikan bahwa kekonvergenan deret ini dengan menggunakan Teorema Kekonvergenan Deret Geometri. Nilai absolut dari rasio r adalah $\frac{1}{2}$, kurang dari 1.

Oleh karena itu, deret ini konvergen. Jumlah deretnya dapat dihitung menggunakan rumus untuk jumlah deret geometri:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{a_1}{1-r}$, Subtitusi dengan $a_1 = \frac{1}{2}$ dan $r = \frac{1}{2}$ memberikan:

$= \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$, Jadi, jumlah dari deret tak hingga ini adalah 1.

∎

2.1.7 Limit Deret

Definisi 2.8 (Wahyuningsih, 2021)

Misalkan, S_n merupakan jumlah bagian ke-n dari deret $\sum_{k=1}^{n} a_k$.

Apabila barisan $\{S_n\}$ konvergen atau $\lim_{n\to\infty} S_n = L$, maka L disebut sebagai limit suatu deret $\sum_{k=1}^{n} a_k$

Contoh 2.4

Misalkan,

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} b_i$$

$$= \lim_{n\to\infty} S_n + \lim_{n\to\infty} T_n$$

$$= L + T$$

2.2 Kajian Integrasi Topik dengan Al-Quran/Hadits

Dalam dunia matematika yang kompleks, integrasi nilai-nilai agama seringkali terabaikan. Namun, konsep tabayyun atau klarifikasi yang ditekankan dalam Al-Qur'an dapat memberikan panduan yang berharga dalam proses pembuktian teorema-teorema.

Allah berfirman dalam Surah Al-Hujurat ayat 6, Allah SWT berfirman:

يَٰٓأَيُّهَا ٱلَّذِينَ ءَامَنُوٓاْ إِن جَآءَكُمْ فَاسِقُۢ بِنَبَإٍ فَتَبَيَّنُوٓاْ أَن تُصِيبُواْ قَوْمًۢا بِجَهَٰلَةٍ فَتُصْبِحُواْ عَلَىٰ مَا فَعَلْتُمْ نَٰدِمِينَ

Artinya: “*Hai orang-orang yang beriman, jika datang kepadamu orang fasik membawa suatu berita, maka periksalah dengan teliti agar kamu tidak menimpakan suatu musibah kepada suatu kaum tanpa mengetahui keadaannya yang menyebabkan kamu menyesal atas perbuatanmu itu.*” (Awaludin, 2012)

Berikut adalah telaah dari Tafsir Jalalain, mengenai Surat Al-Hujurat ayat 6 di atas, “Hai orang-orang yang beriman! Jika datang kepada kalian orang fasik membawa suatu berita maka periksalah oleh kalian kebenaran beritanya itu, apakah ia benar atau berdusta. Menurut suatu qiraat dibaca *Fatatsabbatuu* berasal dari lafal *Ats-Tsabaat*, artinya telitilah terlebih dahulu kebenarannya agar kalian tidak menimpakan musibah kepada suatu kaum, menjadi *Maf'ul* dari lafal *Fatabayyanuu*, yakni dikhawatirkan hal tersebut akan menimpa musibah kepada suatu kaum (tanpa mengetahui keadaannya) menjadi hal atau kata keterangan keadaan dari *Fa'il*, yakni tanpa sepengetahuannya (yang menyebabkan kalian) membuat kalian (atas perbuatan kalian itu) yakni berbuat kekeliruan terhadap kaum tersebut (menyesal) selanjutnya Rasulullah saw. mengutus Khalid kepada mereka sesudah mereka kembali ke negerinya. Ternyata Khalid tiada menjumpai mereka melainkan hanya ketaatan dan kebaikan belaka, lalu ia menceritakan hal tersebut kepada Nabi saw.”(As-suyuthi et al., 2017)

Dalam Surah Al-Hujurat ayat 12, Allah SWT berfirman:

يَٰٓأَيُّهَا ٱلَّذِينَ ءَامَنُوا۟ ٱجْتَنِبُوا۟ كَثِيرًا مِّنَ ٱلظَّنِّ إِنَّ بَعْضَ ٱلظَّنِّ إِثْمٌ ۖ وَلَا تَجَسَّسُوا۟ وَلَا يَغْتَب بَّعْضُكُم بَعْضًا ۚ
أَيُحِبُّ أَحَدُكُمْ أَن يَأْكُلَ لَحْمَ أَخِيهِ مَيْتًا فَكَرِهْتُمُوهُ ۚ وَٱتَّقُوا۟ ٱللَّهَ ۚ إِنَّ ٱللَّهَ تَوَّابٌ رَّحِيمٌ

Artinya: “*Wahai orang-orang yang beriman! Jauhilah banyak dari prasangka, sesungguhnya sebagian prasangka itu dosa dan janganlah kamu mencari-cari kesalahan orang lain dan janganlah ada di antara kamu yang menggunjing sebagian yang lain. Apakah ada di antara kamu yang suka memakan daging saudaranya yang sudah mati? Tentu kamu merasa jijik. Dan bertakwalah kepada Allah, sesungguhnya Allah Maha Penerima tobat, Maha Penyayang.*” (Awaludin, 2012)

Berikut adalah telaah dari Tafsir Al-Muyassar mengenai Surat Al-Hujurat ayat 12 di atas, “Wahai orang-orang yang beriman, jauhilah dirimu dari banyaknya buruk sangka terhadap orang-orang yang baik. Buruk sangka terhadap orang-orang mukmin itu dosa karena orang-orang mukmin itu pada asalnya adalah orang-orang yang baik yang tidak tepat untuk diduga melakukan perbuatan yang buruk, dan janganlah kamu meneliti kesalahan-kesalahannya dan jangan pula menyebarkan aib-aibnya, serta janganlah menggunjing atau menceritakan sesuatu yang tidak disukainya. Apakah di antara kamu suka makan daging saudaranya sendiri yang sudah menjadi mayat? Tentu kamu tidak menyukainya dan pasti merasa sangat jijik, oleh karena itu janganlah menggunjingnya karena kehormatan mereka itu sama dengan dagingnya. Takutlah kepada Allah dengan melakukan perintah-Nya dan menjauhi larangan-Nya. Sesungguhnya Allah Maha Penerima taubat dan Maha Penyayang." (Mashudi, M.A, 2020)

Konsep tabayyun atau klarifikasi dalam Al-Qur'an dapat diintegrasikan dengan proses pembuktian teorema-teorema dalam matematika. Sebagaimana Al-Qur'an menekankan pentingnya untuk mengadakan tabayyun sebelum menerima atau bertindak atas berita yang diterima, demikian pula para matematikawan harus melakukan klarifikasi yang cermat dan teliti sebelum menerima suatu teorema sebagai kebenaran matematika. Seperti yang dinyatakan dalam Surah Al-Hujurat ayat 6 dan ayat 12 beserta tafsirnya di atas, di mana orang-orang yang beriman dianjurkan untuk mengklarifikasi kebenaran sebelum sampai kepada mereka berita yang belum tervalidasi kebenarannya.

Demikian pula dalam pembuktian teorema, langkah-langkah pembuktian harus dijelaskan dengan jelas dan valid untuk menghindari kesimpulan yang salah. Oleh karena itu, dalam kedua konteks tersebut, tabayyun menjadi kunci untuk memastikan suatu kebenaran, baik dalam pemahaman agama maupun penemuan ilmiah. Dengan menggabungkan nilai-nilai Islam tentang tabayyun dengan teori uji kekonvergenan pada penelitian ini, akan memberikan validasi atau bukti kebenaran terhadap suatu berita dan teorema matematika, sehingga akan menghasilkan pemahaman dan hasil atau kesimpulan yang telah terbukti kebenarannya.

2.3 Kajian Topik dengan Teori Pendukung

Dalam bagian ini, akan disajikan beberapa definisi dan teorema yang akan menjadi acuan dalam membuktikan teorema-teorema deret tak hingga pada Bilangan Real menggunakan berbagai Uji Kekonvergenan.

Berikut adalah definisi dan teorema yang akan digunakan:

Definisi 2.10 (Parzynski & Zipse, 1987)

Deret

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

dikatakan konvergen ke L apabila barisan dari jumlah parsial $\{S_n\}$ konvergen ke L. Apabila $\{S_n\}$ divergen maka deret tersebut dikatakan deret divergen.

Definisi dan teorema yang disebutkan sebelumnya akan diterapkan dalam pembahasan untuk membuktikan teorema tentang uji kekonvergenan deret tak hingga pada Bilangan Real yang akan dibahas pada bab selanjutnya.

Berikut teorema-teorema yang akan dibuktikan pada penelitian ini:

Teorema Deret Tak Hingga (Parzynski & Zipse, 1987)

Jika deret $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergen maka $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

Teorema Kriteria Cauchy (Parzynski & Zipse, 1987)

Deret $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergen jika dan hanya jika diberikan sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli ℕ sehingga $|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon$ untuk setiap $n \geq$ ℕ dan setiap $p \in$ ℕ.

Teorema Uji Perbandingan (Parzynski & Zipse, 1987)

Diketahui a_k, b_k adalah barisan Bilangan Real. Dengan $0 < a_k \leq b_k$ untuk setiap $k \geq N$, dan $N \in$ ℕ. $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergen jika dan hanya jika $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergen.

Teorema Uji Integral (Parzynski & Zipse, 1987)

Jika $\{a_k\}$ adalah barisan suku-suku positif yang monoton turun menjadi nol dan jika f adalah fungsi monoton turun yang didefinisikan pada $[1, \infty]$ maka $f(k) = a$ untuk setiap bilangan asli k maka deret $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ dan barisan $\int_1^n f(x)\, dx$ keduanya konvergen atau divergen.

Teorema Uji Rasio (Parzynski & Zipse, 1987)

Jika $a_k > 0,\ lim\, sup(a_{k+1} / a_k) = R$, dan $lim\, inf\ (a_{k+1} / a_k) = r$ maka,

1. $R < 1$ berarti $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergen.
2. $r < 1$ berarti $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergen.

Teorema Uji Akar (Parzynski & Zipse, 1987)

Jika $a_k > 0$ dan $lim\, sup \sqrt[k]{a_k} = R$ maka

1. $R < 1$ berarti $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergen.
2. $R > 1$ berarti $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergen.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Pada penelitian ini menggunakan jenis penelitian kajian kepustakaan (*library research*) atau literatur (*literature research*). Penelitian ini dilakukan pengumpulan, pembacaan data kepustakaan, pemahaman terkait konsep obyek penelitian, penganalisaan dengan mempelajari buku-buku yang berkaitan dengan bahasan masalah pada pembuktian teorema-teorema mengenai deret tak hingga pada Bilangan Real yang ditemukan dari berbagai sumber buku, sebagai sumber datanya dalam obyek kajian penelitian pustaka.

3.2 Pra Penelitian

Pra penelitian yang dilakukan sebelum memulai penelitian ini, pertama peneliti menentukan lebih dahulu topik penelitian yang akan diteliti. Kemudian melakukan tinjauan pustaka dari berbagai sumber seperti buku, jurnal, dan referensi lainnya untuk merumuskan masalah penelitian serta membatasinya. Dengan pemahaman yang telah diperoleh dari literatur yang relevan, peneliti kemudian melanjutkan penelitian terhadap pembuktian teorema-teorema deret tak hingga pada Bilangan Real untuk menguji kekonvergenannya, dengan pengetahuan yang telah dipelajari sebagai landasan untuk membuktikan teorema-teorema deret tak hingga pada Bilangan Real yang nantinya akan dibuktikan pada pembahasan penelitian ini. Selama proses ini, peneliti juga mencari dan memilih dalil-dalil dari Al-Quran atau Al-Hadits yang bersinergi terhadap bahasan topik penelitian, bertujuan mengintregasikan topik penelitian dengan dalil-dalil dari Al-Quran atau Al-Hadits, sehingga menciptakan sinergi antara ilmu matematika dan aspek keagamaan dalam penelitian tersebut.

Tahap selanjutnya peneliti melaksanakan penelitian terhadap materi yang sudah dikaji oleh peneliti, dengan bekal pemahaman-pemahaman sebelumnya yang berkaitan dengan bahan dasar obyek penelitian ini yaitu membuktikan teorema-teorema deret tak hingga pada Bilangan Real.

3.3 Tahapan Penelitian

Tahapan penelitian ini dilakukan pada penelitian ini setelah menyelesaikan tahapan pra penelitian, yakni dengan menguji kekonvergenan deret tak hingga pada Bilangan Real dengan membuktikan teorema-teoremanya.

Berikut langkah-langkah yang akan dilakukan pada tahap ini diantaranya:

1. Menunjukkan bahwa jika $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergen maka $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.
2. Menunjukkan bahwa $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergen jika dan hanya jika diberikan sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli $\mathbb{N}$ sehingga $|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon$, untuk setiap $n \geq \mathbb{N}$ dan setiap $p \in \mathbb{N}$.
3. Menunjukkan bahwa *diketahui* a_k, b_k adalah barisan Bilangan Real. Dengan $0 < a_k \leq b_k$ untuk setiap $k \geq N, dan\ N \in \mathbb{N}$. $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergen jika dan hanya jika $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergen.
4. Menunjukkan bahwa jika $\{a_k\}$ adalah barisan suku-suku positif yang monoton turun menjadi nol dan jika f adalah fungsi monoton turun yang didefinisikan pada $[1, \infty]$ maka $f(k) = a$ untuk setiap bilangan asli k maka deret $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ dan barisan $\int_1^n f(x)\, dx$ keduanya konvergen atau divergen.

5. Menunjukkan bahwa jika suku $a_k > 0$, $lim\, sup(a_{k+1} \,/\, a_k) = R$, dan $lim\, inf\; (a_{k+1} \,/\, a_k) = r$ maka,
   1. $R < 1$ berarti $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergen.
   2. $r < 1$ berarti $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergen.
6. Menunjukkan bahwa jika $a_k > 0$ dan $lim\, sup\, \sqrt[k]{a_k} = R$ maka
   1. $R < 1$ berarti $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergen.
   2. $R > 1$ berarti $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergen.

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1. Deret Tak Hingga pada Bilangan Real

Pada bab ini akan dibahas mengenai pembuktian teorema-teorema deret tak hingga pada Bilangan Real yang sudah disebutkan pada bab kajian teori, **subbab 2.3**, dengan berbagai uji kekonvergenan yaitu uji perbandingan, uji integral, uji rasio, dan uji akar. Berikut adalah definisi yang digunakan untuk membuktikan teorema-teorema deret tak hingga pada Bilangan Real:

Definisi 4.2 (Parzynski & Zipse, 1987)

Deret $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ dikatakan konvergen ke L apabila barisan jumlah parsial $\{S_n\}$ konvergen ke L.

Apabila $\{S_n\}$ divergen maka deret tersebut juga dikatakan deret divergen.

Misalkan $r \in \mathbb{R}$ dan didefinisikan $a_k = r^{k-1}$ untuk $k = 1,2,3, \ldots$

maka

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} r^{k-1} = \begin{cases} \dfrac{1-r^n}{1-r}, & jika\ |r| < 1 \\ n, & jika\ r = 1 \\ \dfrac{r^n - 1}{r-1}, & jika\ r > 1 \end{cases}$$

Jika $|r| < 1$ kemudian

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-r^n}{1-r}.$$

Adapun r^n dengan $n \to \infty$, di mana r merupakan

$$-1 < r < 1 .$$

Karena $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$, Sehingga akan didapat,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-r^n}{1-r}$$

$$= \frac{1}{1-r} - \frac{r^n}{1-r}$$

$$= \frac{1}{1-r} - \frac{0}{1-r}$$

$$= \frac{1}{1-r}$$

Akibatnya jika $|r| < 1$ maka $\sum_{k=1}^{\infty} r^{k-1} = \frac{1}{1-r}$ adalah konvergen, sedangkan jika $r = 1$ maka akibatnya $\sum_{k=1}^{\infty} r^{k-1} = n$, untuk semua $n \in \mathbb{N}$ sehingga divergen, dan apabila $r > 1$ maka akibatnya $\sum_{k=1}^{\infty} r^{k-1} = \frac{r^n - 1}{r-1}$ sehingga divergen.

Dengan definisi ini, kita dapat melanjutkan ke pembuktian teorema-teorema terkait kekonvergenan deret tak hingga yang telah diidentifikasi sebelumnya pada bab kajian teori. Deret tak hingga pada Bilangan Real memiliki nilai kekonvergenan, baik konvergen atau divergen tergantung pada susunan suku-suku dalam deret tersebut. Pada subbab selanjutnya akan dibahas mengenai pembuktian teorema-teorema deret tak hingga pada Bilangan Real menggunakan berbagai uji kekonvergenan.

4.2. Pembuktian Teorema-Teorema Deret Tak Hingga pada Bilangan Real

Teorema 4.1 (Parzynski & Zipse, 1987)

Jika $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konvergen maka* $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

Bukti.

Misalkan $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergen, katakan konvergen ke L. Maka dapat ditulis

$$\lim_{n\to\infty} S_n = L\,.$$

Perhatikan $a_k = S_k - S_{k-1}$ untuk $k \geq 2$, sehingga didapat

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} a_k &= \lim_{k\to\infty}(S_k - S_{k-1})\\ &= \lim_{k\to\infty} S_k - \lim_{k\to\infty} S_{k-1}\\ &= L - L\\ &= 0\end{aligned}$$

Jadi, **teorema 4.1** terbukti.

■

Untuk membuktikan kekonvergenan suatu deret, diperlukan kriteria barisan Cauchy berdasarkan **definisi 2.6** dan **teorema 2.2**. Berikut akan dibuktikan teorema mengenai Kriteria Cauchy pada deret tak hingga.

Teorema 4.2 Kriteria Cauchy (Parzynski & Zipse, 1987)

Deret $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konvergen jika dan hanya jika diberikan sebarang* $\varepsilon > 0$ *terdapat bilangan asli* N *sehingga* $\left|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}\right| < \varepsilon$ *, untuk setiap* $n \geq N$ *dan setiap* $p \in \mathbb{N}$.

Bukti.

($\Rightarrow$) Diketahui jika deret $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergen ke L, apabila ada $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ konvergen ke L juga, akan dibuktikan untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada $N \in \mathbb{N}$ untuk setiap $n \geq N$ dan setiap $p \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\left|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}\right| < \varepsilon$. Misalkan deret $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergen. Sehingga dapat diketahui barisan jumlah parsialnya $\{S_n\}$ dengan $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ konvergen ke suatu limit L.

Maka, untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan asli N sehingga untuk semua $n \geq N$,

Berdasarkan kriteria barisan Cauchy pada **definisi 2.6**,

$$|S_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Selanjutnya, dapat diperhatikan

$$S_{n+p} = S_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}$$

Akibatnya S_{n+p} juga konvergen ke L, sehingga akan didapat

$$\left|S_{n+p} - L\right| < \tfrac{\varepsilon}{2} \text{ untuk } n \geq N \ .$$

Maka,

$$\left|S_{n+p} - S_n\right| = \left|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}\right|$$

Perhatikan, dengan menggunakan ketaksamaan segitiga akan didapat

$$\left|S_{n+p} - S_n\right| \leq \left|S_{n+p} - L\right| + |S_n - L|$$

Karena $n \geq N$, maka diketahui bahwa

$$\left|S_{n+p} - L\right| < \tfrac{\varepsilon}{2} \text{ dan } |S_n - L| < \tfrac{\varepsilon}{2}$$

sehingga,

$$\begin{aligned} \left|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}\right| &= \left|S_{n+p} - S_n\right| \\ &\leq \left|S_{n+p} - L\right| + |S_n - L| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

Ini membuktikan bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat N sehingga untuk setiap $n \geq N$ dan setiap $p \in \mathbb{N}$, berlaku $\left|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}\right| < \varepsilon$.

($\Leftarrow$) Akan dibuktikan jika memenuhi kriteria Cauchy, maka deret $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergen. Misalkan untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan asli N sehingga untuk setiap $n \geq N$ dan setiap $p \in \mathbb{N}$, berlaku

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon$$

Untuk membuktikan bahwa deret $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergen, akan digunakan kriteria Cauchy untuk deret. Berdasarkan kriteria Cauchy pada **teorema 4.2** menyatakan bahwa deret $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergen jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $M \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $m, n \geq M$,

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n} a_k\right| < \varepsilon$$

Diberikan $\varepsilon > 0$, pilih N sedemikian sehingga

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon$$

untuk setiap $n \geq N$ dan setiap $p \in \mathbb{N}$.

Kemudian untuk $m, n \geq M$ dan $m < n$, perhatikan jumlah parsial

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n} a_k\right|.$$

Misalkan $p = n - m$, maka

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n} a_k\right| = |a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{m+p}| < \varepsilon$$

Dengan demikian, kriteria Cauchy untuk deret $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ terpenuhi.

Oleh karena itu, deret $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergen. Jadi, **teorema 4.2** terbukti.

■

Teorema 4.2 menyatakan bahwa nilai dari "beberapa suku pertama" suatu deret tak hingga tidak berpengaruh terhadap konvergen atau tidaknya deret tersebut.

Dengan kata lain, sifat kekonvergenan suatu deret ditentukan sepenuhnya pada bagian akhir deret tersebut. Hal ini diperjelas dalam lemma berikut yang pembuktiannya merupakan konsekuensi langsung dari kriteria Cauchy.

Lemma 4.1 (Parzynski & Zipse, 1987)

Jika $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konvergen maka untuk sebarang bilangan asli* N *deret* $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$ *konvergen. Jika* $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$ *konvergen untuk suatu bilangan asli* N *maka* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konvergen.*

Bukti.

Untuk membuktikan **lemma 4.1**, berikut akan dibuktikan dua arah dengan membuktikan setiap pernyataan secara terpisah.

($\Rightarrow$) Akan dibuktikan jika $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergen maka untuk sebarang bilangan asli N deret $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$ konvergen.

Buktikan $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergen. Ini berarti bahwa barisan jumlah parsial $\{S_n\}$, dengan

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

konvergen ke suatu nilai L.

Untuk sebarang bilangan asli N, dapat ditulis sebagai

$$S_n = \sum_{k=1}^{N-1} a_k + \sum_{k=N}^{n} a_k$$

sehingga dapat didefinisikan barisan dari jumlah parsial baru deret $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$ sebagai

$$S'_n = \sum_{k=N}^{n} a_k$$

dan deret $\sum_{k=1}^{N-1} a_k$ sebagai

$$S_{N-1} = \sum_{k=1}^{N-1} a_k \, .$$

Maka, karena $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, dapat didefinisikan

$$S_n = S_{N-1} + S_n'$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{N-1} a_k + \sum_{k=N}^{n} a_k$$

dan dapat juga ditulis menjadi

$$S_n' = S_n - S_{N-1}$$

untuk $n \geq N$.

Selanjutnya, karena $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergen,

$$S_n \to L \text{ , ketika } n \to \infty \text{ .}$$

Oleh karena itu, akan di dapat

$$S_n' = S_n - S_{N-1} \to L - S_{N-1} \text{ , ketika } n \to \infty.$$

Ini menunjukkan bahwa barisan jumlah parsial $\{S_n'\}$ dari deret $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$ konvergen, dan oleh karena itu, deret $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$ juga konvergen.

($\Leftarrow$) Akan dibuktikan jika $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$ konvergen untuk suatu bilangan asli N maka $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergen.

Misalkan $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$ konvergen. Ini berarti bahwa barisan jumlah parsial $\{S_n'\}$, dengan

$$S_n' = \sum_{k=N}^{n} a_k$$

konvergen ke suatu nilai L'.

Akan ditunjukkan bahwa deret $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$konvergen.

Perhatikan bahwa

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

dapat ditulis sebagai

$$S_n = \sum_{k=1}^{N-1} a_k + \sum_{k=N}^{n} a_k \, .$$

Selanjutnya, dapat didenifisikan jumlahan parsial dari $\sum_{k=1}^{N-1} a_k$

menjadi

$$S_{N-1} = \sum_{k=1}^{N-1} a_k$$

yang merupakan jumlah tetap untuk sebarang bilangan asli N.

Dapat didefinisikan jumlah parsial dari deret $\sum_{k=N}^{n} a_k$ sebagai

$$S'_n = \sum_{k=N}^{n} a_k \, .$$

Selanjutnya, dari pembahasan di atas telah diketahui

$$S'_n \to L' \text{ , ketika } n \to \infty,$$

ini menunjukkan bahwa barisan jumlah parsial $\{S_n\}$ dari deret $\sum_{k=1}^{n} a_k$ konvergen.

Oleh karena itu oleh karena itu, deret $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ juga konvergen.

Jadi, kedua pernyataan dalam **lemma 4.1** telah dibuktikan.

■

Teorema 4.3 Uji Perbandingan (Parzynski & Zipse, 1987)

Diketahui a_k, b_k *adalah barisan Bilangan Real. Dengan* $0 < a_k \leq b_k$ *untuk setiap* $k \geq N$, *dan* $N \in \mathbb{N}$. $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *konvergen jika dan hanya jika* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konvergen.*

Bukti.

($\Rightarrow$) Akan dibuktikan jika $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergen, maka $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergen.

Diketahui a_k, b_k adalah barisan Bilangan Real. Dengan $0 < a_k \leq b_k$ untuk setiap $k \geq N$, dan $N \in \mathbb{N}$.

Maka dapat didefinisikan

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \ \ dan \ B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$$

Karena a_k dan b_k adalah suku-suku positif, maka barisan $\{A_n\}$ dan $\{B_n\}$ barisan monton naik. Selain itu, diketahui $a_k \leq b_k$ untuk setiap $k = 1,2,3, \dots$.

Karena

$$\sum\nolimits_{k=1}^{\infty} b_k \text{ konvergen,}$$

berdasarkan definisi artinya barisan dari

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \text{ konvergen,}$$

maka barisan

$$B_n = \{B_1, B_2, B_3, \dots, B_n\} \text{ juga konvergen.}$$

Karena

$$a_k \leq b_k$$

maka

$$A_n \leq B_n \, .$$

Sehingga karena barisan B_n konvergen, dan A_n monoton naik maka A_n juga konvergen. Jadi akan didapat bahwa A_n konvergen, dan A_n merupakan barisan dari jumlah parsial $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, oleh karena itu jumlah parsial dari $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergen. Jadi terbukti bahwa $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergen.

($\Leftarrow$) Sebaliknya, akan dibuktikan jika $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergen, maka $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergen.

Misalkan $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergen. Ini berarti bahwa barisan dari jumlah parsial

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \text{ konvergen},$$

artinya, terdapat suatu Bilangan Real L sehingga

$$\lim_{n\to\infty} A_n = L\ .$$

Sekarang akan ditunjukkan bahwa deret parsial

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$$

juga konvergen.

Selanjutnya, karena $0 < a_k \leq b_k$ untuk setiap $k \geq N$, dan $N \in \mathbb{N}$, sehingga dapat menyusun dua barisan baru untuk membuktikan hal ini.

Karena a_k dan b_k adalah suku-suku positif, maka barisan $\{A_n\}$ dan $\{B_n\}$ barisan monton naik. Diketahui bahwa A_n adalah monoton naik dan terbatas di atas oleh L, jadi A_n konvergen ke L. Oleh karena $a_k \leq b_k$, maka B_n tidak dapat kurang dari A_n. Namun, untuk memastikan bahwa B_n juga terbatas di atas, sehingga dapat diperiksa perbedaan antara B_n dan A_n. Dengan $a_k \leq b_k$ dapat dinyatakan bahwa

$$b_k = a_k + (b_k - a_k)$$

Maka,

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$$

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} \big(a_k + (b_k - a_k)\big)$$

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k)$$

Selanjutnya, berdasarkan yang telah didefinisikan di atas dimana

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \ ,$$

maka dapat ditulis

$$B_n = A_n + \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k).$$

Karena $a_k \leq b_k$, maka $b_k - a_k \geq 0$ untuk setiap k.

Sehingga didapatkan,

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) \geq 0$$

$$B_n \geq A_n \ .$$

Namun, untuk B_n konvergen, akan ditunjukkan bahwa B_n terbatas di atas. Karena diketahui $a_k \leq b_k$ dan a_k konvergen, maka dapat dinyatakan bahwa deret

$$\sum_{k=1}^{n} b_k - \sum_{k=1}^{n} a_k$$

konvergen ke suatu nilai tertentu.

Selanjutnya, dapat dimisalkan konstanta M adalah suatu batas atas untuk $b_k - a_k$, berdasarkan **definisi 2.4** dan **teorema 2.1**, dapat dinotasikan menjadi

$$|b_k - a_k| < M \ .$$

Diketahui $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergen, sehingga $A_n \to L$ untuk beberapa $L < \infty$. Selanjutnya berdasarkan yang diketahui,

$$B_n = A_n + \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k)$$

maka jika $\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k)$ konvergen dan misalkan konvergen ke suatu nilai tertentu M', akan didapat $B_n \leq L + M'$ yang menunjukkan bahwa B_n terbatas di atas dan karena monoton naik, B_n juga konvergen. Jadi, telah ditunjukkan bahwa jika $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergen, maka $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ juga konvergen. Dengan demikian, **teorema 4.3** terbukti.

■

Akibat 4.1 (Parzynski & Zipse, 1987)

Jika

$$a_k > 0, \qquad b_k > 0$$

untuk $k = 1,2,3, \ldots$ dan

$$\left\{\frac{a_k}{b_k}\right\}, \qquad \left\{\frac{b_k}{a_k}\right\}$$

karena keduanya merupakan barisan terbatas,

maka

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ dan } \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

keduanya konvergen atau keduanya divergen.

Bukti.

Diketahui $a_k > 0,\ b_k > 0$ untuk $k = 1,2,3, \ldots$ dan

$$\left\{\frac{a_k}{b_k}\right\}, \qquad \left\{\frac{b_k}{a_k}\right\}$$

keduanya merupakan barisan terbatas berdasarkan **definisi 2.4**, maka ada M_1, M_2 dengan

$$M_1 > 0 \text{ dan } M_2 > 0$$

sedemikian sehingga

$$\frac{a_k}{b_k} \le M_1 \text{ dan } \frac{b_k}{a_k} \le M_2 .$$

Selanjutnya diasumsikan $b_k > a_k$, sehingga dengan hasil kali silang akan didapat

$$\frac{a_k}{b_k} \leq \frac{M_1}{1}$$

dan

$$\frac{1}{M_1} \leq \frac{b_k}{a_k}$$

Selanjutnya berdasarkan yang diketahui $\frac{b_k}{a_k} \leq M_2$, maka

$$0 < \frac{1}{M_1} \leq \frac{b_k}{a_k} \leq M_2 \,.$$

Dengan mengalikan masing-masing ruas dengan a_k maka dapat didapat ditulis ulang menjadi,

$$0 < \tfrac{1}{M_1} a_k \leq b_k \leq M_2 a_k \;,$$

untuk setiap $k \in \mathbb{N}$.

Misalkan $\alpha = \frac{1}{M_1}$ dan $\beta = M_2$, sehingga

$$0 < \frac{1}{M_1} a_k \leq b_k \leq M_2 a_k$$

dapat ditulis menjadi

$$0 < \alpha a_k \leq b_k \leq \beta a_k$$

untuk setiap $k = 1,2,3, \ldots$.

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ dan $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ keduanya konvergen atau keduanya divergen dengan menggunakan uji perbandingan.

1. Jika $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergen. Akan dibuktikan $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergen, karena diketahui $0 < \alpha a_k \leq b_k$, selanjutnya untuk membuktikannya dapat menerapkan uji perbandingan. Berdasarkan uji perbandingan, jika $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergen, maka $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha a_k$ juga konvergen. Karena α adalah konstanta

positif, maka kekonvergenan $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha a_k$ setara dengan kekonvergenan $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

2. Jika $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergen. Akan dibuktikan $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergen, karena diketahui $b_k \leq \beta a_k$, selanjutnya untuk membuktikannya dapat menerapkan uji perbandingan. Berdasarkan uji perbandingan, jika $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergen, maka $\sum_{k=1}^{\infty} \beta a_k$ juga konvergen. Karena β adalah konstanta positif, maka kekonvergenan $\sum_{k=1}^{\infty} \beta a_k$ setara dengan kekonvergenan $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$.

Dengan demikian, telah terbukti bahwa $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ dan $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ keduanya konvergen.

■

Akibat 4.2 Bentuk Limit Uji Perbandingan (Parzynski & Zipse, 1987)

Jika $a_k > 0$, $b_k > 0$, untuk $k = 1,2,3, \ldots.$ dan jika ada $\lim\limits_{k\to\infty} \left(\frac{b_k}{a_k}\right)$ di mana $0 < L < \infty$ dengan L merupakan Bilangan Real positif, maka $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ dan $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ juga keduanya konvergen atau keduanya divergen.

Bukti.

Diketahui a_k dan b_k, dengan $a_k > 0$ dan $b_k > 0$ untuk setiap $k = 1,2,3, \ldots$.

Akan diberikan bahwa

$$\lim_{k\to\infty} \left(\frac{b_k}{a_k}\right) = L$$

di mana L adalah Bilangan Real positif.

Karena limitnya adalah $L > 0$ dan L terbatas, maka untuk setiap ε Bilangan Real positif, terdapat $N \in \mathbb{N}$, untuk $k \geq N$

$$L - \varepsilon < \frac{b_k}{a_k} < L + \varepsilon$$

Misalkan dipilih $\varepsilon = \frac{L}{2}$, maka akan dihasilkan

$$\frac{L}{2}a_k < b_k < \frac{3L}{2}a_k\,, \qquad \text{untuk semua } k \geq N.$$

Selanjutnya akan dibuktikan menggunakan uji perbandingan.

Jika $\lim_{k\to\infty}\left(\frac{b_k}{a_k}\right) = L$, di mana $L > 0$, akan dibuktikan jika $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergen, dan $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergen, dan jika $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergen, maka $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergen.

Berikut pembuktianya:

(⇒) Akan dibuktikan jika $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergen, maka $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergen.

Diketahui $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergen, dan $b_k < \frac{3L}{2}a_k$, karena konstanta tidak mengubah sifat kekonvergenan, maka dapat dikatakan $\sum_{k=N}^{\infty}\frac{3L}{2}a_k$ juga konvergen. Diketahui b_k dibatasi oleh $\frac{3L}{2}a_k$, dengan menambahkan suku-suku hingga dari 1 sampai $N-1$. Oleh karena itu dapat dinyatakan juga bahwa

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

konvergen. Terbukti $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ juga konvergen.

(⇐) Akan dibuktikan jika $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergen, maka $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergen.

Diketahui

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

konvergen, dan

$$\frac{L}{2}a_k < b_k\,,$$

maka dapat dikatakan $\sum_{k=N}^{\infty}\frac{L}{2}a_k$ juga konvergen, karena mengalikan dengan konstanta positif tidak mengubah sifat kekonvergenan.

Oleh karena itu dapat dinyatakan juga bahwa $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergen. Karena a_k dibatasi oleh $\frac{2}{L} b_k$, dengan menambahkan suku-suku hingga hingga dari 1 sampai $N-1$. Terbukti $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ juga konvergen.

Berikutnya akan dibuktikan jika salah satu deret divergen, misal $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergen, maka $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$ divergen, sehingga $\sum_{k=N}^{\infty} b_k$ juga divergen karena $\frac{L}{2} a_k \leq b_k$ maka $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ juga divergen.

Demikian pula, jika $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ divergen, maka $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ juga divergen dengan pembuktian dan alsan yang sama. Sehingga terbukti bahwa $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergen.

Terbukti dengan menggunakan uji perbandingan, dapat membuktikan bahwa jika $\lim_{k\to\infty} \left(\frac{b_k}{a_k}\right)$ ada dan merupakan Bilangan Real positif, maka baik $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ atau $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ keduanya konvergen atau keduanya divergen.

■

Teorema 4.4 Uji Integral (Parzynski & Zipse, 1987)

Diberikan $f: \mathbb{N} \to [1, \infty)$. *Jika* $\{a_k\}$ *adalah barisan suku-suku positif yang monoton turun menuju nol dan* f *adalah fungsi monoton turun sedemikian hingga* $f(k) = a$ *untuk setiap bilangan asli* k, $k \in \mathbb{N}$ *maka deret* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *dan barisan* $\int_1^n f(x)\,dx$ *keduanya konvergen atau divergen*.

Bukti.

Untuk setiap bilangan asli k, $a_{k+1} \leq f(x) \leq a_k$, untuk setiap $x \in [k,\ k+1]$. Oleh karena itu $a_{k+1} \leq \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leq a_k$, untuk setiap $k \in \mathbb{N}$.

Jika $n \geq 2$

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} a_k$$

maka

$$S_n - a_1 \leq \int_1^n f(x)\,dx \leq S_{n-1}\,.$$

Karena $a_k > 0$ untuk setiap $k \in \mathbb{N}$. Barisan dari jumlah parsial $\{S_n\}$ adalah barisan monoton naik. Demikian pula, karena $f(x) > 0$ pada $[1, \infty)$, $\int_1^n f(x)\,dx$ adalah barisan monoton naik.

Sekarang jika $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergen, dan misalkan $\{S_n\}$ konvergen ke L, maka

$$\int_1^n f(x)\,dx$$

dibatasi oleh L dan konvergen.

Sebaliknya jika

$$\int_1^n f(x)\,dx$$

konvergen ke l maka $\{S_n\}$ dibatasi oleh $l + a_1$, sehingga $\{S_n\}$ konvergen.

Oleh karena itu deret $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergen.

■

Teorema 4.5 Uji Rasio (Parzynski & Zipse, 1987)

Jika suku $a_k > 0, \lim\sup\left(\frac{a_{k+1}}{a_k}\right) = R$, *dan* $\lim\inf\left(\frac{a_{k+1}}{a_k}\right) = r$ *maka,*

1. $R < 1$ *berarti* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konvergen.*
2. $r < 1$ *berarti* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *divergen.*

Bukti.

1. Jika $R < 1$ maka diberikan ε, $0 < \varepsilon < 1 - R$ terdapat bilangan natural N sedemikian sehingga

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} < R + \varepsilon < 1, \text{ untuk setiap } k < N.$$

Jika

$$\eta = R + \varepsilon$$

dan

$$a_{k+1} < \eta a_k \text{ untuk semua } k > N,$$

dan karena

$$a_k < \eta^{k-N} a_N$$

untuk semua $k > N$.

Sehingga deret

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \eta^{k-N} a_N = a_N \sum_{j=1}^{\infty} \eta^j$$

konvergen karena $\eta < 1$, dan dengan berdasarkan uji rasio didapat $\sum_{k=N+1}^{\infty} a_k$ konvergen. Karena itu terbukti $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergen.

2. Jika $r > 1$ maka

$$a_{\mathrm{k}+1}/a_k > 1$$

untuk $k \geq N$, untuk beberapa N yang cukup besar.

Jadi karena $k > N$ berarti

$$a_k > a_N > 0$$

sehingga

$$\lim_{k\to\infty} a_k \neq 0\,.$$

Oleh karena itu $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergen.

Jadi, **teorema 4.5** terbukti.

■

Teorema 4.6 Uji Akar (Parzynski & Zipse, 1987)

Jika $a_k > 0$ *dan* $lim\ sup \sqrt[k]{a_k} = R,$

1. *Jika* $R < 1$, *maka* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konvergen.*
2. *Jika* $R > 1$, *maka* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *divergen.*

Bukti.

1. Jika $R < 1$, didefisinikan $lim\ sup \sqrt[n]{a_k} = R$ untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat suatu bilangan bulat N sehingga untuk setiap $n \geq N$, diketahui

   $$\sqrt[n]{a_k} < R + \varepsilon\,.$$

   Diasumsikan $R < r < 1$, maka $\varepsilon = r - R > 0$

   sehingga $\sqrt[n]{a_k} < r$ untuk n yang cukup besar.

   Dengan demikian, dapat ditulis $a_k < r^n$ untuk k yang cukup besar.

   Perhatikan deret geometri $\sum_{k=1}^{\infty} r^n$, yang merupakan deret konvergen karena $r < 1$. Karena $a_k < r^n$ untuk k yang cukup besar, maka berdasarkan uji rasio terbukti deret $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ juga konvergen.

2. Jika $R > 1$ didefinisikan $lim\ sup \sqrt[n]{a_k} = R$ untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat suatu bilangan bulat N sehingga untuk setiap $n \geq N$, didapat

   $$\sqrt[n]{a_k} > R - \varepsilon\,.$$

   Karena $R > 1$, maka $\varepsilon = R - 1 > 0$ sehingga $\sqrt[n]{a_k} > R$ untuk n yang cukup besar. Oleh karena itu $a_k > 1$ untuk k yang cukup besar. Karena suku-suku a_k tidak menuju ke nol, deret $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergen.

Dengan demikian, **teorema 4.6 t**erbukti.

■

Akibat 4.3 (Parzynski & Zipse, 1987)

Jika $a_k > 0$ untuk setiap $k \in N$ dan $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = l$,

1. Jika $l < 1$, maka $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergen.
2. Jika $l > 1$, maka $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergen.

Untuk membuktikan **akibat 4.3** menggunakan uji akar berdasarkan **teorema 4.6**. Diketahui berdasarkan **teorema 4.6** bahwa untuk deret $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ dengan $a_k > 0$ untuk setiap k, dapat ditentukan kekonvergenan dari deret tersebut dengan melihat limit dari akar k ke dari suku-suku deret.

Uji akar menyatakan:

Jika $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = R$,

1. Jika $R < 1$, maka $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergen.
2. Jika $R > 1$, maka $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergen.

Berikut akan diterapkan uji akar untuk membuktikan **akibat 4.3**.

Bukti.

Diketahui jika $a_k > 0$ untuk setiap $k \in N$ dan $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = l$,

1. Akan dibuktikan jika $l < 1$, maka $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergen.

   Asumsikan bahwa $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = l, l < 1$.

   Diketahui $l < 1$, dapat dipilih suatu $\varepsilon > 0$ sedemikian sehingga $l + \varepsilon < 1$. Karena $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = l$, maka terdapat bilangan bulat N sedemikian sehingga untuk semua $k > N$ berlaku:

   $$\sqrt[k]{a_k} < l + \varepsilon\,.$$

   Maka, karena $a_k > 0$, sehingga dapat ditulis ulang dari ketidaksamaan di atas sebagai $a_k < (l + \varepsilon)^k$.

Berdasarkan yang telah diketahui bahwa $l + \varepsilon < 1$, maka deret geometri $\sum_{k=N+1}^{\infty}(l + \varepsilon)^k$ adalah konvergen. Sehingga dapat dikatakan $\sum_{k=N+1}^{\infty} a_k$ juga konvergen karena a_k dibatasi oleh deret geometri yang konvergen. Jadi, berdasarkan pembuktian **lemma 4.1**, di mana jika deret berhingga $\sum_{k=N+1}^{\infty} a_k$, maka $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ juga konvergen.

2. Akan dibuktikan jika $l > 1$, maka $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergen.

   Asumsikan bahwa $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = l, l > 1.$

   Diketahui $l > 1$, dapat dipilih suatu $\varepsilon > 0$ sedemikian sehingga $l - \varepsilon > 1$. Karena $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = l$, maka terdapat bilangan bulat N sedemikian sehingga untuk semua $k > N$ berlaku:

$$\sqrt[k]{a_k} > l - \varepsilon\ .$$

   Maka, karena $a_k > 0$, sehingga dapat ditulis ulang dari ketidaksamaan di atas sebagai:

$$a_k > (l - \varepsilon)^k$$

   Berdasarkan yang telah diketahui bahwa $l - \varepsilon < 1$, maka deret geometri $\sum_{k=N+1}^{\infty}(l - \varepsilon)^k$ adalah divergen. Sehingga dapat dikatakan $\sum_{k=N+1}^{\infty} a_k$ juga divergen karena a_k lebih besar dari atau sama dengan oleh deret geometri yang divergen. Jadi, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergen.

Dengan demikian, **akibat 4.3** telah terbukti.

■

4.3. Integrasi Konsep Tabayyun dalam Islam dan Uji Kekonvergenan Deret Tak Hingga pada Bilangan Real

Tabayyun mengajarkan bahwa sebelum menerima suatu informasi atau konsep, penting untuk melakukan klarifikasi atau pemeriksaan lebih lanjut terhadap kebenaran informasi tersebut (Gunawan, 2016). Hal ini sejalan dengan prinsip dalam matematika di mana setiap langkah pembuktian harus jelas dan benar, tanpa asumsi yang keliru atau langkah-langkah yang tidak tepat (Sobur, 2015).

Dengan mengintegrasikan konsep tabayyun dalam penelitian ini, diharapkan dapat tercipta karya ilmiah yang kuat, akurat, dan terpercaya. Klarifikasi dan pemeriksaan yang cermat terhadap setiap langkah pembuktian teorema-teorema deret tak hingga pada Bilangan Real akan memastikan bahwa hasil yang diperoleh benar-benar sesuai dengan logika matematika yang berlaku, serta dapat diandalkan oleh para peneliti dan praktisi matematika dalam pengembangan ilmu pengetahuan lebih lanjut.

Allah berfirman dalam Qur’an Surat Yunus Ayat 94,

فَإِن كُنتَ فِي شَكٍّ مِّمَّآ أَنزَلۡنَآ إِلَيۡكَ فَسۡـَٔلِ ٱلَّذِينَ يَقۡرَءُونَ ٱلۡكِتَٰبَ مِن قَبۡلِكَۚ لَقَدۡ جَآءَكَ ٱلۡحَقُّ مِن
رَّبِّكَ فَلَا تَكُونَنَّ مِنَ ٱلۡمُمۡتَرِينَ

Artinya : “*Maka jika kamu (Muhammad) berada dalam keragu-raguan tentang apa yang Kami turunkan kepadamu, maka tanyakanlah kepada orang-orang yang membaca kitab sebelum kamu. Sesungguhnya telah datang kebenaran kepadamu dari Tuhanmu, sebab itu janganlah sekali-kali kamu temasuk orang-orang yang ragu-ragu* (Awaludin, 2012)*.”*

Hikmah dari tabayyun terdapat di dalam berbagai aspek kehidupan, baik dalam ilmu pengetahuan maupun dalam kehidupan sehari-hari. Allah berfirman dalam Qur’an Surat An-Nahl Ayat 43,

وَمَآ أَرۡسَلۡنَا مِن قَبۡلِكَ إِلَّا رِجَالٗا نُّوحِيٓ إِلَيۡهِمۡۚ فَسۡـَٔلُوٓاْ أَهۡلَ ٱلذِّكۡرِ إِن كُنتُمۡ لَا تَعۡلَمُونَ

Artinya: “*Dan Kami tidak mengutus sebelum kamu, kecuali orang-orang lelaki yang Kami beri wahyu kepada mereka; maka bertanyalah kepada orang yang mempunyai pengetahuan jika kamu tidak mengetahui* (Awaludin, 2012).”

Ayat Al-Qur’an pada Surat An-Nahl ayat 43, menjelaskan pentingnya tabayyun dalam mencari kebenaran atau mencari kebenaran dan menghindari kesalahan dengan bertanya kepada ahlinya, terutama dalam hal ilmu pengetahuan. Dalam konteks ini, "orang yang memiliki ilmu" merujuk kepada seseorang yang telah belajar dan memiliki pengetahuan tentang suatu masalah. Namun, ketika orang tersebut menghadapi sesuatu yang tidak diketahuinya atau tidak dipahaminya, disarankan untuk bertanya kepada ahlinya, yaitu orang yang memiliki keahlian atau pengetahuan lebih dalam tentang masalah tersebut.

Dengan melakukan tabayyun seperti ini, seseorang dapat memperoleh pemahaman yang lebih baik dan akurat tentang suatu masalah, serta menghindari kesalahan dalam menarik kesimpulan atau membuat keputusan. Hal ini sejalan dengan prinsip-prinsip ilmiah dan metodologi penelitian yang menekankan pentingnya verifikasi dan validasi atas setiap informasi atau hasil yang diperoleh (Tabrani ZA, 2022).

Tabayyun, yang berarti klarifikasi atau penjelasan yang teliti sebelum menarik kesimpulan atau bertindak, memiliki beberapa hikmah yang penting dalam kehidupan sehari-hari. Mencegah kesalahan pada tabayyun dapat mencegah dari membuat kesalahan dalam penilaian atau tindakan, dengan mencari informasi yang lebih jelas dan akurat, sehingga dapat menghindari kesalahpahaman dan keputusan yang tidak tepat. Tabayyun juga akan dapat meningkatan pengetahuan, dan membentuk sikap yang bertanggung jawab (Gunawan, 2016).

Integrasi konsep tabayyun dalam Islam dengan uji kekonvergenan deret tak hingga pada Bilangan Real menunjukkan betapa pentingnya proses klarifikasi dan verifikasi dalam matematika juga dalam kehidupan sehari-hari. Dalam konteks matematika, tabayyun diterapkan melalui uji kekonvergenan untuk memastikan apakah suatu deret tak hingga konvergen atau divergen. Sebagai contoh, Teorema Uji Kekonvergenan, yang menyatakan bahwa suatu deret $\sum a_n$ konvergen jika $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ mengajarkan pentingnya mengklarifikasi nilai limit sebelum menarik kesimpulan tentang kekonvergenan deret tersebut.

Demikian sejalan dengan prinsip tabayyun dalam kehidupan sehari-hari, di mana mencegah kesalahan dengan mencari informasi yang akurat dapat menghindarkan dari kesalahpahaman dan keputusan yang tidak tepat. Selain itu, penerapan tabayyun dalam matematika memperlihatkan bagaimana pengetahuan dan pemahaman yang mendalam dapat meningkatkan tanggung jawab kita dalam bertindak dan memperkuat hubungan logis dalam pemecahan masalah. Dengan demikian, baik dalam kehidupan sehari-hari maupun dalam matematika, tabayyun membantu kita untuk bertindak dengan bijak dan tepat berdasarkan klarifikasi dan penjelasan yang teliti (Tabrani ZA, 2022).

BAB V

PENUTUP

5.1. Kesimpulan

Dalam penelitian ini, telah berhasil dibuktikannya teorema-teorema deret tak hingga pada Bilangan Real dengan berbagai metode uji kekonvergenan berdasarkan definisi dan teorema-teorema sebelumnya. Hasil dari penelitian ini menunjukkan bahwa teorema-teorema yang digunakan secara efektif dapat menentukan apakah suatu deret tak hingga konvergen atau divergen. Secara khusus, kriteria Cauchy untuk kekonvergenan deret tak hingga telah terbukti sebagai alat yang sangat berguna dalam analisis matematika. Kriteria Cauchy ini menyatakan bahwa suatu deret $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergen jika dan hanya jika diberikan sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli N sehingga $\left|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}\right| < \varepsilon,$ untuk setiap $n \geq N$ dan setiap $p \in \mathbb{N}$. Pembuktian ini memberikan pemahaman yang lebih mendalam tentang sifat-sifat deret konvergen dan aplikasi praktisnya dalam berbagai bidang matematika. Secara keseluruhan, penelitian ini tidak hanya memberikan kontribusi teoritis dalam bidang matematika, tetapi juga memberikan panduan praktis bagi mahasiswa dan pengajar dalam memahami dan menerapkan konsep-konsep kekonvergenan deret tak hingga pada Bilangan Real.

5.2. Saran

Diharapkan pada penelitian lebih lanjut mengenai uji kekonvergenan deret tak hingga pada Bilangan Real dapat diperluas dengan mengkaji berbagai metode kekonvergenan lainnya yang mungkin belum banyak dieksplorasi. Penelitian selanjutnya juga dapat difokuskan pada analisis mendalam mengenai hubungan antara berbagai kriteria kekonvergenan dengan sifat kelengkapan deret tak hingga pada himpunan bilangan lainnya, seperti bilangan kompleks untuk memperluas pemahaman kita tentang konsep ini. Selain itu, studi komparatif dengan berbagai uji kekonvergenan yang ada dapat memberikan wawasan baru dan memperkaya pemahaman kita mengenai kekonvergenan deret tak hingga. Diharapkan juga penelitian ini dapat menjadi landasan bagi pengembangan teori-teori baru yang lebih komprehensif dalam bidang analisis real maupun bidang lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, Howard, Irl C. Bivens, and S. D. (2018). *Calculus: Early Transcendentals* (12th ed.). John Wiley & Sons.

As-suyuthi, J., Muhammad, J., & Ahmad, I. (2017). *Tafsir Jalalain*. Pustaka Al-Kautsar.

Awaludin, L. (2012). *Ummul Mukminin: Al-Qur'an dan Terjemahan untuk Wanita. Wali.*

Bartel, R. G. (1927). *Introduction To Real Analysis*.

Fischer, P. (2015). Cauchy's Cours d'analyse. In *Shizi*. https://doi.org/10.7312/columbia/9780231159067.003.0021

Goldberg, R. R. (1976). *Method of Real Analysis* (Second Edi).

Gunawan. (2016). *Tabayyun Dalam Al-Qur'an (Kajian Tahlili terhadap QS al-Hujurat/49: 6) Skripsi*. 1–98.

Mashudi, M.A, D. H. K. (2020). *Al-Muyassar*.

Parzynski, W. R., & Zipse, P. W. (1987). *Introduction to Mathematical Analysis*. Mcgraw Hill College; First International edition (January 1, 1983).

Paskin, M. (2009). *Introduction to Probability Theory*. CRC Press is an imprint of Taylor & Francis Group, an Informa business.

Rahman, H. (2017). Pengantar Analisis Real. *Jurnal Sains Dan Seni ITS*, *6*(1), 51–66.

Royden, H.; Fitzpatrick, P. M. (2010). *Real Analysis*. China Machine Press.

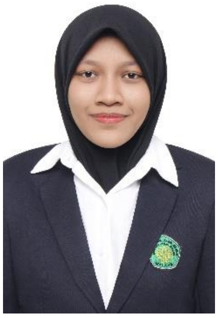
Sobur, K. (2015). Logika Dan Penalaran Dalam Perspektif Ilmu Pengetahuan. *TAJDID: Jurnal Ilmu Ushuluddin*, *14*(2), 387–414. https://doi.org/10.30631/tjd.v14i2.28

Tabrani ZA. (2022). Hoax Menjadi Gangguan Kesejahteraan Masyarakat: Pentingnya Implementasi Tabayyun Pada Masa Sekarang. *Al-Ijtima`i: International Journal of Government and Social Science*, *7*(1), 75–86. https://doi.org/10.22373/jai.v7i1.1442

Wahyuningsih, S. (2021). Barisan dan Deret Tak Hingga. *www.Academia.Edu*, 1w49.

Walter Rudin. (1976). *Principles of Mathematical Analysis (International Series in Pure and Applied Mathematics)*. McGraw-Hill Education.

RIWAYAT HIDUP



Alifiah Nabillah Rosyadah, atau yang akrab disapa dengan banyak nama panggilan Alifiah, Alif, Nabila, dan lainnya. Putri pertama atau anak sulung dari dua bersaudara, dari pasangan Bapak Hasanudin Sholihin, S.E., dan Ibu Elvy Diah Kartikarini, S.S., yang lahir di Kabupaten Pamekasan, Madura pada tanggal 23 Juni 2000 M / 20 Rabiul Awal 1421 H. Telah menempuh pendidikan pendidikan dasar hingga sekolah menengah akhir di berbagai kota yang berbeda. Pada tahun 2004 penulis memulai pendidikannya di TK Islam Al-Hidayah Sidoarjo dan lulus pada tahun 2006, kemudian penulis melanjutkan pendidikan sekolah dasar di SD Islam Sabilillah Sidoarjo pada tahun 2006-2007, di SD Islam Terpadu Al-Irsyad Al-Islamiyah Pamekasan pada tahun 2007-2009, dan berakhir menamatkan pendidikan sekolah dasar di SD Tahfidz Plus (STP) Khoiru Ummah 11 Sidoarjo pada tahun 2009 hingga lulus pada tahun 2012. Pada jenjang selanjutnya yaitu sekolah menegah pertama, penulis merantau ke kota Probolinggo, dan menimba ilmu di *Islamic Boarding School* Al-Amri atau biasa dikenal dengan Pondok Kyai Sekar Al-Amri. Sekaligus bersekolah di SMP Islam Terpadu Al-Amri Probolinggo pada tahun 2012, dan lulus pada tahun 2015. Pada tahun 2015 penulis memutuskan untuk fokus menghafal Al-Qur'an dengan melanjutkan pendidikan di sekolah menengah akhir, di SMA Tahfidz Plus Khoiru Ummah Surabaya pada tahun 2015 hingga lulus pada tahun 2018. Berbekalan ilmu yang telah didapatkan oleh penulis dari jenang sekolah dasar hingga sekolah menengah akhir, penulis memutuskan untuk melanjutkan ke jenjang perguruan tinggi untuk melanjutkan perjuangannya menimba ilmu dan mewujudkan impian-impiannya. Berbagai usaha, kesabaran, dan perjuangan penulis untuk dapat masuk pada salah satu perguruan tinggi yang diimpikan, *Alhamdulillah 'ala kulli hal* pada tahun 2018, melalui perjuangan jalur tes SBMPTN penulis dapat diterima dan melanjutkan pendidikannya di bangku perkuliahan sebagai mahasiswa di Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Memasuki jenjang perguruan tinggi atau bangku perkuliahan, penulis mengembangkan dirinya dengan mengikuti berbagai aktifitas dengan aktif di dalam kampus maupun di luar kampus. Dimulai dengan mengikuti aktifitas peningkatan soft-skill maupun hard-skill, kemudian bergabung dengan organisasi kampus HTQ UIN Malang, mengikuti kegiatan Prodi dengan bergabung dalam kepanitian acara Prodi Matematika yang diadakan oleh HMJ Matematika pada tahun 2019, berkontribusi di dalam tim media, di luar kampuspun aktif bergabung dengan komunitas lembaga dakwah mahasiswa Islam BMIC *"Back to Muslim Identity Comunity"* Malang, dan aktifitas kampus lainnya, serta aktif menjadi *content creator* di Instagram *@alifiahnabiila, graphic designer @artliph.design,* dan *photographer @cekreksekali.*

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Alifiah Nabillah Rosyadah
NIM : 18610050
Fakultas / Jurusan : Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi : Uji Kekonvergenan Deret Tak Hingga pada Bilangan Real
Pembimbing I : Dr. Elly Susanti, M.Sc
Pembimbing II : Mohammad Nafie Jauhari, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	7 Maret 2024	Konsultasi Topik dan Judul	1.
2.	8 Maret 2024	Konsultasi Bab I, II, dan III	2.
3.	13 Maret 2024	Konsultasi Bab I, II, dan III	3.
4.	14 Maret 2024	Konsultasi Bab I, II, dan III	4.
5.	15 Maret 2024	Konsultasi Bab I, II, dan III	5.
6.	18 Maret 2024	Konsultasi Bab I, II, dan III	6.
7.	26 Maret 2024	Konsultasi Bab I, II, dan III	7.
8.	27 Maret 2024	ACC Bab I, II, dan III	8.
9.	27 Maret 2024	Konsultasi Kajian Agama Bab I dan II	9.
10.	29 Maret 2024	Konsultasi Kajian Agama Bab I dan II	10.
11.	1 April 2024	Konsultasi Kajian Agama Bab II	11.
12.	2 April 2024	Konsultasi Kajian Agama Bab II	12.
13.	4 April 2024	ACC Kajian Agama Bab I dan II	13.
14.	4 April 2024	ACC Seminar Proposal	14.
15.	13 Mei 2024	Konsultasi Kajian Agama Bab IV	15.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

16.	14 Mei 2024	Konsultasi Revisi Seminar Proposal	16.
17.	29 Mei 2024	Konsultasi Bab IV dan V	17.
18.	30 Mei 2024	Konsultasi Bab IV dan V	18.
19.	31 Mei 2024	Konsultasi Kajian Agama Bab IV	19.
20.	31 Mei 2024	ACC Kajian Agama Bab IV	20.
21.	1 Juni 2024	Konsultasi Bab IV dan V	21.
22.	3 Juni 2024	ACC Bab IV dan V	22.
23.	3 Juni 2024	ACC Seminar Hasil	23.
24.	19 Juni 2024	Konsultasi Revisi Seminar Hasil	24.
25.	24 Juni 2024	ACC Sidang Skripsi	25.
26.	28 Juni 2024	ACC Keseluruhan	26.

Malang, 28 Juni 2024
Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005