

KARAKTERISTIK $M_R(G)$ YANG DIBANGUN OLEH RING R

SKRIPSI

Oleh:
AHMAD ANAS SETIAWAN
NIM. 08610014



JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2012

KARAKTERISTIK $M_R(G)$ YANG DIBANGUN OLEH RING R

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan Dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
AHMAD ANAS SETIAWAN
NIM. 08610014

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2012**

KARAKTERISTIK $M_R(G)$ YANG DIBANGUN OLEH RING R

SKRIPSI

Oleh:
AHMAD ANAS SETIAWAN
NIM : 08610014

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal: 30 Juni 2012

Dosen Pembimbing I

Dosen Pembimbing II

Hairur Rahman, S.Pd, M.Si
NIP. 19800527 200801 1 012

H. Wahyu H. Irawan, M.Pd
NIP. 19710420 200003 1 003

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

KARAKTERISTIK $M_R(G)$ YANG DIBANGUN OLEH RING R

SKRIPSI

Oleh:
AHMAD ANAS SETIAWAN
NIM : 08610014

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal: 7 Juli 2012

Penguji Utama: Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

Ketua Penguji: Abdul Aziz, M.Si
NIP. 19760318 200604 1 002

Sekretaris Penguji: Hairur Rahman, M.Si
NIP. 19800429 200604 1 003

Anggota Penguji: H. Wahyu H. Irawan, M.Pd
NIP. 19710420 200003 1 003

**Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika**

Abdussakir, M.Pd
NIP.19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Ahmad Anas Setiawan
NIM : 08610014
Jurusan : Matematika
Fakultas : Sains dan Teknologi
Judul Penelitian : Karakteristik $M_R(G)$ yang Dibangun oleh Ring R

Menyatakan dengan sebenar – benarnya bahwa hasil penelitian saya ini tidak terdapat unsur – unsur penjiplakan atau karya ilmiah yang pernah dilakukan atau dibuat oleh orang lain, kecuali yang secara tertulis dikutip dalam naskah ini dan disebutkan dalam sumber kutipan dan daftar pustaka.

Apabila ternyata hasil penelitian ini terbukti terdapat unsur-unsur jiplakan, maka saya bersedia untuk mempertanggungjawabkan, serta diproses sesuai peraturan yang berlaku.

Malang, 29 Juni 2012

Yang membuat pernyataan

Ahmad Anas Setiawan
NIM. 08610014

MOTTO

*Lihatlah mereka yang lebih tidak beruntung
daripada kamu, sehingga kamu tidak mungkin
tidak berpuas diri atas keberuntungan yang
diberikan Allah padamu*



HALAMAN PERSEMBAHAN

Peneliti persembahkan skripsi ini untuk keluarga tercinta Ibu Ismawati, Bapak Moch. Imam Maksum, Kakak Ratna Nur Laila, Mas Surbini, Linda Kurniawati, dan keponakan tersayang, Ahmad Harun Haqqi, serta para Dosen dan teman-teman yang selalu mendukung.

KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Assalamu'alaikum Wr.Wb.

Syukur alhamdulillah penulis haturkan ke hadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat, taufik dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana Sains dalam bidang Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.

Penulis menyadari bahwa banyak pihak yang telah berpartisipasi dan membantu dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Oleh sebab itu, iringan do'a dan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya penulis sampaikan, terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah banyak memberikan pengetahuan dan pengalaman yang berharga.
2. Prof. Drs. Sutiman B. Sumitro, SU., DSc, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim.

4. Hairur Rahman, S.Pd, M.Si, selaku dosen pembimbing skripsi, yang telah bersedia meluangkan waktu untuk memberikan bimbingan dan pengarahan selama penulisan skripsi.
5. H. Wahyu H. Irawan, M.Pd sebagai dosen pembimbing agama yang telah banyak memberikan bimbingan dan pengarahan selama penulisan skripsi.
6. Segenap dosen pengajar, terima kasih atas ilmu yang telah diberikan kepada penulis.
7. Seluruh keluarga penulis yang senantiasa memberikan do'a dan dukungan yang terbaik bagi penulis untuk menyelesaikan skripsi ini.
8. Sahabat-sahabat senasib seperjuangan mahasiswa Matematika, terutama angkatan 2008, terima kasih atas segala pengalaman berharga dan kenangan terindah saat menuntut ilmu bersama.
9. Dan semua pihak yang telah memberikan dukungan kepada penulis.

Penulis menyadari bahwa dalam penyusunan skripsi ini masih terdapat kekurangan, dan penulis berharap semoga skripsi ini bisa memberikan manfaat kepada para pembaca khususnya bagi penulis secara pribadi. Amin Ya Rabbal Alamin.

Wassalamu 'alaikum Wr.Wb.

Malang, 30 Juni 2011

Penyusun

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PENGAJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
HALAMAN PERNYATAAN	
MOTTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	x
ABSTRAK	xi
ABSTRACT	xii
المخلص	xiii
BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	4
1.3 Tujuan Penelitian	4
1.4 Batasan Masalah	4
1.5 Manfaat Penelitian	5
1.6 Metode Penelitian	5
1.7 Sistematika Penulisan	6
BAB II KAJIAN PUSTAKA	
2.1 Matriks	8
2.1.1 Operasi Penjumlahan dan Perkalian pada Matriks	9
2.2 Grup	10
2.3 Ring	12
2.3.1 Ring dengan Elemen Satuan	14
2.3.2 Ring Komutatif	15
2.3.3 Homomorfisme Ring	15
2.4 Modul terhadap Ring.....	17
2.5 Kajian Agama.....	19
BAB III PEMBAHASAN	
3.1 Hasil Penelitian	23
3.2 Kajian Ring dalam Al-Qur'an.....	47
BAB IV PENUTUP	
4.1 Kesimpulan	49
4.2 Saran	50
DAFTAR PUSTAKA	
LAMPIRAN-LAMPIRAN	

ABSTRACT

Setiawan, Ahmad Anas. 2012. **Characteristics $M_R(G)$ Generated by Ring R.** Thesis. S1 Department of Mathematics Faculty of Science and Technology the State Islamic University of Malang Maulana Malik Ibrahim.

Supervisors : Hairur Rahman, S.Pd, M.Si
H. Wahyu H. Irawan, M.Pd

Given a ring R and R -module G . The set of all homogeneous functions on R , say $M_R(G) = \{f: G \rightarrow G \mid f(ra) = rf(a), r \in R, a \in G\}$ if equipped with binary operations of addition and composition of functions, then $M_R(G)$ can or can't satisfy the properties of the ring. The formation of ring or not ring at $M_R(G)$ depending on the ring R and the R -module G is given.

This study uses a literature study, namely by presenting arguments that explain the scientific reasoning literature review and the results of researchers think about the issues under study. In this thesis will present research data on the properties of $M_R(R^2)$ formed by the ring R in the orthogonal matrix of order 2×2 with R^2 is a module of R . This thesis may be useful for researchers, institutions, and also the reader. From this study it was found that $M_R(R^2)$ given that the two operations of addition and composition of functions satisfy the axioms of a ring that makes it ring.

Keywords: $M_R(G)$, Ring, Modules Over Ring.

ABSTRAK

Setiawan, Ahmad Anas. 2012. **Karakteristik $M_R(G)$ yang Terbentuk oleh Ring R**. Skripsi. Program S1 Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: Hairur Rahman, S.Pd, M.Si
H. Wahyu H. Irawan, M.Pd

Kata Kunci : $M_R(G)$, Ring, Modul atas Ring.

Diberikan suatu ring R dan R -modul G (G modul atas R). Himpunan semua fungsi homogen atas R , katakan $M_R(G) = \{f: G \rightarrow G \mid f(ra) = rf(a), r \in R, a \in G\}$ jika dilengkapi dengan operasi penjumlahan dan komposisi fungsi, maka $M_R(G)$ dapat memenuhi sifat-sifat ring namun juga tidak dapat memenuhi sifat-sifat ring. Terbentuknya ring atau bukan ring pada $M_R(G)$ tergantung dari ring R dan juga R -modul G yang diberikan.

Penelitian ini menggunakan studi kepustakaan, yakni dengan menampilkan argumentasi penalaran keilmuan yang memaparkan hasil kajian literatur dan hasil olah pikir peneliti mengenai permasalahan yang diteliti. Pada skripsi ini akan dipaparkan data hasil penelitian mengenai sifat-sifat dari $M_R(G)$ yang terbentuk oleh ring R pada daerah matriks orthogonal berordo 2×2 dengan R^2 merupakan modul terhadap R . Dari penelitian ini didapatkan bahwa $M_R(G)$ yang diberikan dua operasi yaitu penjumlahan dan komposisi fungsi memenuhi aksioma-aksioma ring yang menjadikannya suatu ring.

المخلص

سيتياوان، أحمد أنس . عام من ٢٠١٢. الخصائص $M_R(G)$ التي تم إنشاؤها ر الطوق أطروحة. S1 قسم الرياضيات بكلية العلوم والتكنولوجيا التابع لجامعة الدولة الإسلامية مالك مالانغ ابراهيم مولانا.

المستشار: Hairur Rahman, S.Pd, M.Si

H. Wahyu H. Irawan, M.Pd

الكلمات مفتاح: $M_R(G)$ ، الوحدات من خاتم، خاتم.

حلقة نظرا R و $R-G$ وحدة (R مدى على وحدة G). متجانسة وظائف من مجموعة كل ويقول، البحث على $M_R(G) = \{f: G \rightarrow G \mid f(ra) = rf(a), r \in R, a \in G\}$ كان اذا بالإضافة الثنائية العمليات مزودا إلى ثم، وظائف وتكوين، ذلك $M_R(G)$ يمكن أن ولك، الحلبة خصائص لها تكون أيضا يمكن لأن أن تلي الحلبة خصائص. في ليس أو عصابة عصابة تشكيل د وير $M_R(G)$ على اعتمادا R عصاب ومجموعة R وحدة نمطية.

تستخدم الدراسات هذه دراسة خلال من وهما، الأدب التي الحجج تقديم الأدب تفسر

والنتائرض الاستعالعلمي المنطق ج إذا يعتقد لباحثون القضايا حول قيد

الدراسة. سيكون على البحوث بيانات تقديم اوحة هذه في خصائص تقديم حة

$M_R(R^2)$ عصابة شكلتها R على بناء متعامد مصفوفة مر أمن 2×2 مع R^2 وحدة هو

ر من. قد هذه تكون الرسالة للمفيدة، سات والمؤساحين، للقارئ وأيضا.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika adalah salah satu dari banyaknya ilmu pengetahuan yang ada di alam semesta ini. Ada beberapa cabang ilmu pengetahuan yang ada dalam matematika, diantaranya aljabar, statistik, matematika terapan, dan masih banyak lagi yang lainnya. Bicara matematika, maka akan langsung membayangkan tentang ilmu pengetahuan yang sangat dominan dalam berhitung. Aljabar adalah salah satu dari cabang matematika yang dominan dalam hitung berhitung serta dalam hal himpunan maupun fungsi.

Al-Qur'an telah memberikan kepada manusia kunci ilmu pengetahuan dan menyediakan segala sesuatu yang dibutuhkan untuk dapat mengungkap dan menemukan keajaiban dari berbagai ilmu pengetahuan. Manusia diciptakan oleh Allah dengan dibekali sesuatu yang luar dapaata, yaitu akal. Selain diperintahkan untuk beribadah kepada Allah, manusia juga diperintahkan untuk berpikir dan menuntut ilmu untuk mengungkap semua keajaiban dan keindahan alam semesta yang telah diciptakan oleh Allah ini.

وَلْيَعْلَمَ الَّذِينَ أُوتُوا الْعِلْمَ أَنَّهُ الْحَقُّ مِنْ رَبِّكَ فَيُؤْمِنُوا بِهِ فَتُخْبِتَ لَهُ قُلُوبُهُمْ وَإِنَّ

اللَّهُ لَهَادِ الَّذِينَ ءَامَنُوا إِلَى صِرَاطٍ مُسْتَقِيمٍ ﴿١٥٦﴾

“Dan agar orang-orang yang telah diberi ilmu, meyakini bahwasanya Al-Quran itulah yang hak dari Tuhan-mu lalu mereka beriman dan tunduk hati mereka kepadanya dan sesungguhnya Allah adalah pemberi petunjuk bagi orang-orang yang beriman kepada jalan yang lurus” (QS. Al-Hajj, 22:54).

Telah banyak sekali ditemukan mukjizat ilmu pengetahuan dalam Al-Qur'an secara garis besar, termasuk matematika. Namun, Al-Qur'an tidak mengangkat metode baru atau teknik baru dalam masalah ini, melainkan telah menunjukkan tentang adanya eksistensi dari sesuatu yang ada di balik alam semesta dengan cara yang sama seperti yang ia tunjukkan mengenai eksistensi dari alam semesta itu sendiri (Rahman, 1992:15).

Allah berfirman dalam surat Al-Baqarah ayat 148 yang berbunyi:

وَلِكُلِّ وِجْهَةٍ هُوَ مُوَلِّيهَا ۖ فَاسْتَبِقُوا الْخَيْرَاتِ ۚ إِنَّ مَا تَكُونُوا يَأْتِ بِكُمْ اللَّهُ جَمِيعًا ۚ إِنَّ اللَّهَ

عَلَىٰ كُلِّ شَيْءٍ قَدِيرٌ

“Dan bagi tiap-tiap umat ada kiblatnya (sendiri) yang ia menghadap kepadanya. Maka berlomba-lombalah (dalam membuat) kebaikan. di mana saja kamu berada pasti Allah akan mengumpulkan kamu sekalian (pada hari kiamat). Sesungguhnya Allah Maha Kuasa atas segala sesuatu” (QS. Al-Baqarah, 02:148).

Ketika wahyu (dalam Islam adalah Al-Qur'an) memutuskan arah kiblat maka sebagai umat harus menurut, meski akal tidak mampu mencerna dan menangkap rahasia yang ada di sana. Hal terpenting adalah berlomba dalam kebaikan (Ulumiddin,2008:99). Dalam menuntut ilmu, sebagai umat Islam yang beriman dan bertaqwa, harus selalu ingat dan yakin akan agama dan Tuhan (Allah). Kita tidak boleh lupa bersyukur serta selalu menjalankan perintah-Nya dan menjauhi larangan-Nya. Karena sesungguhnya Allah Maha Kuasa atas segala sesuatu termasuk ilmu yang didapatkan. Seperti yang difirmankan oleh Allah dalam surat Al-Baqarah ayat 32 yang berbunyi:

قَالُوا سُبْحَانَكَ لَا عِلْمَ لَنَا إِلَّا مَا عَلَّمْتَنَا إِنَّكَ أَنْتَ الْعَلِيمُ الْحَكِيمُ ﴿٣٢﴾

"Mereka menjawab: "Maha suci Engkau, tidak ada yang Kami ketahui selain dari apa yang telah Engkau ajarkan kepada kami; Sesungguhnya Engkaulah yang Maha mengetahui lagi Maha Bijaksana." (QS. Al-Baqarah, 02:32).

Pada umumnya, aljabar abstrak adalah materi yang mempelajari tentang himpunan beserta dengan operasi yang berlaku pada himpunan tersebut. Grup adalah himpunan dengan satu operasi biner yang memenuhi sifat-sifat tertentu. Sedangkan Ring atau gelanggang adalah himpunan dengan dua operasi biner yang memiliki sifat-sifat tertentu. Suatu himpunan dapat dikatakan grup atau ring, jika memenuhi sifat-sifat untuk dapat menjadi grup maupun ring.

Pada jurnal karya Dwi Astuti dan Sri Wahyuni pada tahun 2010 yang berjudul “*Karakteristik Ring R dengan $M_R(G)$ Merupakan Ring*” dijelaskan bahwa terdapat $M_R(G)$ yaitu himpunan semua fungsi atas ring R yang didefinisikan $M_R(G) = \{f: G \rightarrow G \mid f(ra) = rf(a), r \in R, a \in G\}$. Apabila diberikan operasi penjumlahan dan komposisi fungsi, maka $M_R(G)$ akan memiliki sifat-sifat tertentu yang memungkinkannya menjadi ring atau bahkan tidak dapat menjadi ring. Oleh karena itu, peneliti tertarik untuk mengkaji lebih dalam lagi mengenai karakteristik yang dimiliki $M_R(G)$ akan tetapi dengan ring yang lebih khusus lagi, yaitu $M_R(G)$ yang dibangun oleh suatu ring R dengan daerah matriks diagonal berordo 2×2 dan R merupakan modul dari ring R (modul yang digunakan adalah dirinya sendiri). Judul dari penelitian ini adalah “**Karakteristik $M_R(G)$ yang Dibangun oleh Ring R** ”.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah yang telah diuraikan, maka rumusan masalah penelitian ini adalah “Bagaimana karakteristik $M_R(G)$ yang dibangun oleh ring R dengan R adalah himpunan matriks diagonal ordo 2×2 dan R merupakan modul atas ring R ?”

1.3 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan latar belakang dan rumusan masalah di atas, maka tujuan penelitian ini adalah untuk mengetahui karakteristik $M_R(G)$ yang dibangun oleh

ring R dengan R adalah himpunan matriks diagonal ordo 2×2 dan R merupakan modul atas ring R .

1.4 Batasan Masalah

Batasan masalah yang ada pada penelitian kali ini adalah:

1. Daerah ring R yang digunakan pada penelitian ini adalah himpunan matriks diagonal ordo 2×2 .
2. Modul atas ring R yang digunakan pada penelitian ini adalah R atau dirinya sendiri (R -modul G).

1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat yang diharapkan dari penelitian ini adalah:

1. Bagi Penulis

Mengetahui lebih dalam mengenai matematika khususnya di dalam bidang Aljabar tentang karakteristik $M_R(G)$ yang dibangun oleh ring R .

2. Bagi Pembaca

Penelitian ini bisa menambah pengetahuan pembaca tentang aljabar, serta dapat dijadikan acuan saat menghadapi kasus tersebut.

3. Bagi Lembaga

Penelitian ini dapat dijadikan sebagai tambahan kepustakaan dan menjadi masukan bagi pihak-pihak yang ingin meneliti masalah-masalah yang relevan dengan topik ini.

1.6 Metode Penelitian

Penelitian ini merupakan penelitian kepustakaan (*Library Research*), yakni mengumpulkan data dan literatur yang akan dipergunakan sebagai acuan dalam menganalisis masalah. Penelitian ini mengikuti langkah-langkah sebagai berikut:

1. Data yang diperoleh dari Jurnal Dwi Astuti dan Sri Wahyuni pada tahun 2010 dengan judul *Karakteristik Ring dengan $M_R(G)$ Merupakan Ring* dianalisis lebih dalam lagi untuk mencapai tujuan yang diharapkan peneliti.
2. Mengumpulkan dan mempelajari pustaka-pustaka yang berkenaan dengan materi penelitian untuk kemudian dianalisis dan dijadikan acuan dalam menjawab rumusan masalah sehingga mencapai tujuan penelitian yang diharapkan.
3. Menjawab rumusan masalah dan mendapatkan tujuan penelitian serta memberikan kesimpulan penelitian yang telah dilakukan.

1.7 Sistematika Penulisan

Penulisan hasil penelitian ini dibagi menjadi empat bab dan setiap bab dibagi menjadi beberapa sub bab. Materi pokok dari setiap bab adalah sebagai berikut :

BAB I Pendahuluan.

Bab pendahuluan ini merupakan bagian awal dari penulisan yang menyajikan latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian dan sistematika penulisan

BAB II Kajian Pustaka.

Dalam bab kajian pustaka akan dijelaskan referensi-referensi yang melandasi penelitian, seperti tinjauan umum tentang matriks, grup, ring, dan juga modul terhadap ring. Isi dari bab ini akan dijadikan bahan atau acuan dalam melakukan penelitian sehingga dapat mendapatkan tujuan penelitian yang dilakukan.

BAB III Pembahasan.

Bab pembahasan ini akan memaparkan dan menjelaskan hasil dari penelitian yang telah dilakukan mengenai karakteristik $M_R(G)$ yang dibangun oleh ring R pada himpunan matriks diagonal ordo 2×2 .

BAB IV Penutup.

Dalam bab penutup ini akan diuraikan kesimpulan dari pembahasan dan saran.

BAB II

PEMBAHASAN

2.1 Matriks

Definisi 1

Matriks adalah himpunan bilangan atau fungsi yang tersusun dalam baris dan kolom serta diapit oleh dua kurung siku ('Imrona, 2009:1).

Bilangan atau fungsi tersebut dinamakan *entri* atau *elemen* dari matriks.

Matriks dilambangkan dengan huruf besar. Perhatikan contoh berikut:

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -2 & 0,23451 & 4 & 0 \\ \pi & 3 & 1.032 & 80 & -13 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} x^2 + 1 & -2\ln x \\ \sin x & e^{3x+1} \end{bmatrix}$$

Pada matriks A , elemen matriksnya berupa bilangan real sedangkan matriks B mempunyai elemen yang berupa fungsi satu peubah (variable) x yang ditulis dengan huruf kecil. Dalam matriks, dikenal ukuran matriks yang disebut *ordo*, yaitu “banyak baris \times banyak kolom” (tanda \times bukan merupakan perkalian, melainkan sebagai pemisah), seperti pada contoh berikut ini:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}$$

Matriks A berordo 2×4 , dengan entri $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{21}, a_{22}, a_{23}$, dan a_{24} .

Secara umum suatu matriks dapat ditulis seperti:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Dua matriks disebut **sama** jika **ordonya sama** dan **entri yang seletak bernilai sama**, sehingga jika matriks A dan B sama maka dapat ditulis $A=B$.

2.1.1. Operasi Penjumlahan dan Perkalian pada Matriks

Misalkan ada matriks A dan B , yang didefinisikan:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

apabila dijumlahkan dapat ditulis $A + B$, dan menghasilkan (Lipschutz, 2004: 25):

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m2} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

Sedangkan untuk hasil matriks A dengan suatu skalar k , ditulis $k \cdot A$ atau hanya kA , seperti di bawah ini:

$$kA = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

Untuk perkalian 2 matriks A dan B ditulis AB . Pada perkalian 2 matriks, harus memenuhi syarat yaitu *banyak kolom A = banyak baris B*. Misalkan matriks A ordo 2×1 dan matriks B ordo 1×2 , dengan:

$$A = [a_{11} \quad a_{12}]$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix}$$

Maka:

$$AB = [a_{11}b_{21} + a_{12}b_{21}]$$

2.2 Grup

Definisi 2

Sistem matematika (G, \times) disebut grup jika memenuhi:

1. Sifat asosiatif. Untuk setiap a, b, c di G berlaku $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
2. Sifat identitas. Terdapat unsur I di G yang memenuhi $a \times I = I \times a = a$ untuk semua unsur a di G . Unsur I disebut unsur identitas.
3. Balikan. Untuk setiap unsur a di G terdapat a^{-1} di G yang memenuhi $a \times a^{-1} = a^{-1} \times a = I$. Unsur a^{-1} disebut balikan unsur a (Arifin, 2000:35).

Dari definisi di atas, yang dimaksud dengan operasi (\times) bukanlah benar-benar operasi perkalian (\times) melainkan simbol dari operasi biner. Untuk membedakan antara simbol operasi biner dengan operasi perkalian (\times) , maka penulis menggantinya dengan simbol $(*)$ sehingga **definisi 2** dapat dinyatakan sebagai berikut:

Sistem matematika $(G, *)$ dengan $(*)$ adalah suatu operasi biner disebut grup jika memenuhi:

1. Sifat asosiatif. Untuk setiap $a, b, c \in G$ berlaku $(a * b) * c = a * (b * c)$
2. Sifat identitas. Terdapat unsur I di G yang memenuhi $a * I = I * a = a$ untuk $\forall a \in G$. Unsur I disebut dengan unsur identitas.
3. Balikan. Untuk setiap unsur $a \in G$ terdapat a^{-1} di G yang memenuhi $a * a^{-1} = a^{-1} * a = I$. Unsur a^{-1} disebut balikan unsur a .

Karena $(*)$ adalah operasi biner, maka:

$$*: G \times G \rightarrow G$$

dengan artian apabila $a, b \in G$, misal $a * b = c$ dengan $c \in G$, sehingga operasi biner (*) memenuhi sifat tertutup.

Contoh 1

Diberikan himpunan bilangan bulat Z , maka $(Z, +)$ merupakan grup.

Bukti.

Untuk menunjukkan bahwa Z merupakan grup, maka Z harus memenuhi aksioma grup, yaitu:

a. Sifat Asosiatif

Diambil $a, b, c \in Z$, maka:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

Terbukti bahwa Z bersifat asosiatif.

b. Sifat Identitas

Diambil $a \in Z$, maka ada I yang memenuhi:

$$a + I = I + a = a$$

Sehingga didapatkan $I = 0$, karena $0 \in Z$, maka Z memiliki unsur identitas, yaitu 0.

c. Balikan

Diambil $a \in Z$ dan I merupakan identitas operasi $+$, maka:

$$a + a^{-1} = a^{-1} + a = I$$

Sehingga didapatkan bahwa $a^{-1} = (-a)$ dan $(-a) \in Z$, maka operasi $(+)$ memiliki balikan di Z .

Karena $(Z, +)$ memenuhi semua aksioma grup, maka $(Z, +)$ adalah grup.

Definisi 3

Grup G dikatakan komutatif jika untuk setiap a dan b di G berlaku $ab = ba$ (Arifin, 2000:36).

Untuk memperjelas definisi di atas, maka penulis memberikan $(G,*)$ adalah sebuah grup. $(G,*)$ disebut grup komutatif apabila untuk setiap $a, b \in G$ berlaku $a * b = b * a$.

Contoh 2

Jika $(Z, +)$ adalah grup dengan Z adalah himpunan bilangan bulat, maka $(Z, +)$ adalah grup komutatif.

Bukti.

Pada **contoh 1** sudah dibuktikan bahwa $(Z, +)$ adalah grup, maka sekarang akan ditunjukkan bahwa $(Z, +)$ memenuhi sifat komutatif.

Ambil $a, b \in Z$, maka:

$$a + b = b + a$$

Karena $a + b \in \mathbb{Z}$ dan $b + a \in \mathbb{Z}$, maka $(Z, +)$ merupakan *grup komutatif*.

2.3 Ring**Definisi 4**

Sistem matematika $(R, +, \times)$ disebut ring jika memenuhi:

1. Terhadap operasi pertama $(R, +)$ membentuk grup komutatif
2. Terhadap operasi kedua (R, \times) memenuhi sifat asosiatif: $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ untuk semua unsur $a, b, c \in R$.

3. Terhadap operasi pertama dan kedua secara bersama-sama memenuhi sifat distributif: $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ dan $(a + b) \times c = a \times c + b \times c$ untuk semua unsur $a, b, c \in R$ (Arifin, 2000:72).

Pada definisi di atas, operasi (+) dan (\times) bukanlah operasi penjumlahan dan perkalian yang sesungguhnya. Untuk membedakannya, penulis menggunakan (*) sebagai operasi pertama dan (\bullet) sebagai operasi kedua, sehingga **definisi 4** dapat dinyatakan sebagai berikut:

Sistem matematika $(R, *, \bullet)$ disebut ring jika memenuhi:

1. Terhadap operasi pertama $(R, *)$ membentuk grup komutatif
2. Terhadap operasi kedua (R, \bullet) memenuhi sifat asosiatif: $(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$ untuk semua unsur $a, b, c \in R$.
3. Terhadap operasi pertama dan kedua secara bersama-sama memenuhi sifat distributif: $a \bullet (b * c) = a \bullet b * a \bullet c$ dan $(a * b) \bullet c = a \bullet c * b \bullet c$ untuk semua unsur $a, b, c \in R$

Contoh 3

Diberikan $(Z, +, \times)$ dengan Z adalah himpunan bilangan bulat dengan (+) adalah operasi penjumlahan dan (\times) adalah operasi perkalian, maka berdasarkan definisi ring, dapat diselidiki bahwa:

1. $(Z, +)$ adalah grup komutatif

Pada **contoh 2** sudah dipaparkan bahwa $(Z, +)$ adalah grup komutatif

2. Operasi \times tertutup di Z yaitu untuk setiap $a, b \in Z$ maka $a \times b \in Z$
3. Operasi \times bersifat asosiatif di Z yaitu untuk setiap $a, b, c \in Z$ berlaku:

$$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$$

4. Operasi \times bersifat distributif terhadap operasi $+$ di Z yaitu untuk setiap $a, b, c \in Z$ berlaku $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$ dan $(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$

Karena $(Z, +, \times)$ memenuhi aksioma ring, maka Z merupakan *ring*.

2.3.1 Ring dengan Elemen Satuan (RS)

Definisi 5

Misal $(R, +, \times)$ adalah ring. Jika ada $x \in R$ sehingga $x \times y = y \times x = y$ dengan $y \in R$. Maka unsur x disebut unsur identitas di R dan ditulis 1. Maka ring yang memuat unsur identitas disebut ring dengan elemen satuan (RS) (Fanani, 2008:23).

Dari definisi di atas, yang dimaksud dengan $(+)$ dan (\times) adalah dua operasi biner yang berlaku pada R dan 1 bukanlah bilangan 1 yang sesungguhnya melainkan simbol dari identitas operasi kedua (\times) pada R . Untuk membedakan antara 1 dengan identitas operasi kedua, maka penulis menggunakan i sebagai simbol dari identitas operasi kedua (\times) pada ring R .

Contoh 4

Diberikan $(Z, +, \times)$ ring dengan Z adalah himpunan bilangan bulat, maka:

Untuk tiap $a \in Z$ maka $a \times i = i \times a = a$ diperoleh $i = 1$ dan $1 \in Z$, yang berarti ada elemen identitas di Z terhadap operasi kedua (operasi \times).

Jadi $(Z, +, \times)$ adalah *ring dengan elemen satuan (RS)*

2.3.2 Ring Komutatif (RK)

Definisi 6

Suatu ring $(R, +, \times)$ disebut ring komutatif (RK) jika dan hanya jika operasi kedua (\times) bersifat komutatif di R (Arifin, 2000:73).

Untuk memperjelas definisi di atas, penulis menggunakan $(*)$ sebagai operasi pertama dan (\bullet) sebagai operasi kedua, sehingga **definisi 6** dapat dinyatakan sebagai berikut:

Suatu ring $(R, *, \bullet)$ disebut ring komutatif (RK) apabila $\forall a, b \in R$ berlaku $a \bullet b = b \bullet a$.

Contoh 5

Diberikan $(Z, +, \times)$ ring dengan Z adalah himpunan bilangan bulat, maka:

Untuk setiap $a, b \in Z$ maka $a \times b = b \times a$, yang berarti operasi kedua (\times) bersifat komutatif di Z .

Jadi $(Z, +, \times)$ adalah *ring komutatif* (RK)

2.3.3 Homomorfisme ring

Definisi 7

Misal diberikan $(R_1, +, \times)$ dan $(R_2, +, \times)$ adalah ring. Suatu pemetaan $f : R_1 \rightarrow R_2$ disebut homomorfisme jika $\forall a, b \in R_1$ berlaku (Raisinghani & Anggarwal, 1980:184):

$$f(a + b) = f(a) + f(b)$$

$$f(a \times b) = f(a) \times f(b)$$

Pada definisi tersebut, operasi (+) dan (\times) adalah bukan merupakan operasi penjumlahan dan perkalian yang sesungguhnya. Untuk lebih memperjelas definisi tersebut, maka penulis memisalkan $(R_1, *, \bullet)$ dan (R_2, Δ, \square) . sehingga **definisi 7** dapat dinyatakan sebagai berikut:

Misal diberikan $(R_1, *, \bullet)$ dan (R_2, Δ, \square) adalah ring. Suatu pemetaan $f : R_1 \rightarrow R_2$ disebut homomorfisme jika $\forall a, b \in R_1$ berlaku:

$$f(a * b) = f(a) \Delta f(b)$$

$$f(a \bullet b) = f(a) \square f(b)$$

Contoh 6

Diberikan $(Z, +, \times)$ dan $(R, +, \times)$ adalah ring, akan dibuktikan bahwa $f: Z \rightarrow R$ dengan $f(x) = x, \forall x \in Z$ adalah merupakan suatu homomorfisme ring.

Bukti.

Untuk membuktikan bahwa $f: Z \rightarrow R$ dengan $f(x) = x, \forall x \in Z$ adalah merupakan suatu homomorfisme ring, maka akan ditunjukkan bahwa $f: Z \rightarrow R$ dengan $f(x) = x, \forall x \in Z$ memenuhi aksioma homomorfisme ring, yaitu:

a. $f(a + b) = f(a) + f(b), \forall a, b \in Z$

$$\begin{aligned} f(a + b) &= a + b \\ &= f(a) + f(b) \end{aligned}$$

b. $f(ab) = f(a)f(b)$

$$\begin{aligned} f(ab) &= (ab) \\ &= f(a)f(b) \end{aligned}$$

Terbukti bahwa $f: Z \rightarrow R$ merupakan homomorfisme ring.

2.4 Modul atas Ring

Definisi 8

Misalkan $(R, +, \times)$ adalah ring (tidak perlu RK maupun RS). R-modul kiri ataupun modul kanan di R adalah himpunan M yang memenuhi syarat:

1. Operasi biner $(+)$ di M dimana M adalah grup komutatif atau dapat ditulis $(M, +)$ adalah grup komutatif.
2. Aksi grup $(R, M) \rightarrow M$ dimana $(r, m), \forall r \in R, m \in M$ jika:
 - a. $(r + s) \times m = (r \times m) + (s \times m); \forall r, s \in R, m \in M$
 - b. $(r \times s) \times m = r \times (s \times m); \forall r, s \in R, m \in M$
 - c. $r \times (m + n) = (r \times m) + (r \times n); \forall r \in R, m, n \in M$

Jika R adalah ring dengan elemen satuan (RS), maka:

- d. $i \times m = m, \forall m \in M$ (Dummit & Foot, 1991:318).

Definisi tersebut merupakan definisi dari modul kiri, M disebut R-modul kanan apabila sifat 2.b diubah menjadi:

$$(r \times s) \times m = s \times (r \times m); \forall r, s \in R, m \in M$$

Untuk lebih memperjelas definisi tersebut, penulis menggunakan $(*)$ sebagai operasi biner pertama dan (\bullet) sebagai operasi biner kedua pada ring, sehingga **definisi 8** tentang modul atas ring R menjadi:

Misalkan $(R, *, \bullet)$ adalah ring (tidak perlu RK maupun RS). R-modul kiri ataupun modul kanan di R adalah himpunan M yang memenuhi syarat:

3. Operasi biner $(*)$ di M dimana M adalah grup komutatif atau dapat ditulis $(M, *)$ adalah grup komutatif.
4. Aksi grup $(R, M) \rightarrow M$ dimana $(r, m), \forall r \in R, m \in M$ jika:

- a. $(r * s) \cdot m = (r \cdot m) * (s \cdot m); \forall r, s \in R, m \in M$
- b. $(r \cdot s) \cdot m = r \cdot (s \cdot m); \forall r, s \in R, m \in M$
- c. $r \cdot (m * n) = (r \cdot m) * (r \cdot n); \forall r \in R, m, n \in M$

Jika R adalah ring dengan elemen satuan (RS), maka:

- d. $i \cdot m = m, \forall m \in M.$

Definisi di atas merupakan definisi dari modul kiri, M disebut R-modul kanan apabila sifat 2.b diubah menjadi:

$$(r \cdot s) \cdot m = s \cdot (r \cdot m); \forall r, s \in R, m \in M$$

Contoh 7

Diberikan $(R, +)$ adalah grup komutatif dengan R adalah himpunan bilangan real dan $(Z, +, \times)$ adalah ring dengan Z adalah himpunan bilangan bulat. Akan ditunjukkan bahwa R adalah Z -modul R .

Bukti.

Sebelum melangkah ke pembuktian, penulis mendefinisikan penulisan unsur-unsur yang dioperasikan dengan operasi perkalian (\times) pada ring Z dengan $a \times b = \boxed{b}$.

Untuk membuktikan bahwa R adalah modul dari Z , maka R harus memenuhi aksioma modul, yaitu:

- I. $(R, +)$ adalah grup komutatif.
- II. Aksi grup $Z \times R \rightarrow R$ melalui pengaitan $(a, x) \mapsto ax$ untuk semua pasangan $(a, x) \in Z \times R$, dan untuk setiap a, b di R dan x, y di Z berlaku:
 - I.a $a(x + y) = ax + ay$

Ambil $a \in R$ dan $x, y \in Z$, maka berlaku:

$$a(x + y) = ax + ay$$

I.b $(ab)x = a(bx)$

Ambil $a, b \in R$ dan $x \in Z$, maka berlaku:

$$(ab)x = a(bx) \text{ dan } (ab)x = b(ax)$$

I.c $(a + b)x = ax + bx$

Ambil $a, b \in R$ dan $x \in Z$, maka berlaku:

$$(a + b)x = ax + bx$$

Karena ring Z adalah ring dengan elemen satuan (RS) dengan $i = 1$, maka berlaku:

I.d $1x = x$

Ambil, $x \in Z$, maka ada $1 \in Z$ dan berlaku $1x = x$.

Dari pembuktian di atas, terbukti bahwa R adalah Z -modul R .

2.5 Kajian Agama

Pengertian iman menurut *bahasa Arab* artinya percaya. Sedangkan menurut *istilah*, pengertian iman adalah *membenarkan dengan hati, diucapkan dengan lisan, dan diamalkan dengan tindakan (perbuatan)*. Dengan demikian, pengertian iman kepada Allah adalah membenarkan dengan hati bahwa Allah itu benar-benar ada dengan segala sifat keagungan dan kesempurnaanNya, kemudian pengakuan itu diikrarkan dengan lisan, serta dibuktikan dengan amal perbuatan secara nyata (Rusdi, 2009).

Jadi, seseorang dapat dikatakan sebagai mukmin (orang yang beriman) sempurna apabila memenuhi ketiga unsur keimanan di atas. Apabila seseorang

mengakui dalam hatinya tentang keberadaan Allah, tetapi tidak diikrarkan dengan lisan dan dibuktikan dengan amal perbuatan, maka orang tersebut tidak dapat dikatakan sebagai mukmin yang sempurna. Sebab, ketiga unsur keimanan tersebut merupakan satu identitas yang utuh dan tidak dapat dipisahkan (Rusdi, 2009).

Beriman kepada Allah adalah kebutuhan yang sangat mendasar bagi seseorang. Allah memerintahkan agar umat manusia beriman kepada-Nya, sebagaimana firman Allah dalam Surat An-Nisa' ayat 136 yang berbunyi:

يٰۤاَيُّهَا الَّذِيْنَ ءَامَنُوْا ءَامِنُوْا بِاللّٰهِ وَرَسُوْلِهِۦ ۚ وَالْكِتٰبِ الَّذِيْ نَزَّلَ عَلٰى رَسُوْلِهِۦ
 وَالْكِتٰبِ الَّذِيْ اَنْزَلَ مِنْ قَبْلُ ۚ وَمَنْ يَّكْفُرْ بِاللّٰهِ وَمَلَٰٓئِكَتِهٖۙ وَكُتُبِهٖۙ وَرَسُوْلِهٖۙ
 وَالْيَوْمِ الْاٰخِرِ فَقَدْ ضَلَّ ضَلٰلًاۢ بَعِيْدًا ﴿١٣٦﴾

“Wahai orang-orang yang beriman, tetapkanlah beriman kepada Allah dan Rasul-Nya dan kepada kitab yang Allah turunkan kepada Rasul-Nya serta kitab yang Allah turunkan sebelumnya. Barangsiapa yang kafir kepada Allah, malaikat-malaikat-Nya, kitab-kitab-Nya, rasul-rasul-Nya, dan hari Kemudian, Maka Sesungguhnya orang itu telah sesat sejauh-jauhnya.” (QS. An-Nisa’:136)

Ayat di atas memberikan penjelasan bahwa apabila ada umat yang ingkar kepada Allah, maka akan mengalami kesesatan yang nyata. Orang yang sesat tidak akan merasakan kebahagiaan dalam hidup. Oleh karena itu, beriman kepada Allah sesungguhnya adalah untuk kebaikan manusia (Rusdi, 2009).

Allah berfirman dalam Surat At-Taubah ayat 71, yang berbunyi:

وَالْمُؤْمِنُونَ وَالْمُؤْمِنَاتُ بَعْضُهُمْ اَوْلِيَاءُ بَعْضٍ يٰۤاْمُرُونَ بِالْمَعْرُوفِ وَيَنْهَوْنَ عَنِ
 الْمُنْكَرِ وَيُقِيمُونَ الصَّلٰوةَ وَيُؤْتُونَ الزَّكٰوةَ وَيُطِيعُونَ اللّٰهَ وَرَسُوْلَهٗ ۗ اُولٰٓئِكَ
 سَيَرْحَمُهُمُ اللّٰهُ ۗ اِنَّ اللّٰهَ عَزِيْزٌ حَكِيْمٌ ﴿٧١﴾

“Dan orang-orang yang beriman, lelaki dan perempuan, sebahagian mereka (adalah) menjadi penolong bagi sebahagian yang lain. mereka menyuruh (mengerjakan) yang ma'ruf, mencegah dari yang munkar, mendirikan shalat, menunaikan zakat dan mereka taat pada Allah dan Rasul-Nya. mereka itu akan diberi rahmat oleh Allah; Sesungguhnya Allah Maha Perkasa lagi Maha Bijaksana”. (QS. At-Taubah: 71)

Dalam Surat At-Taubah ayat 71 di atas menjelaskan tentang sifat orang-orang beriman yang bersih jiwa dan hatinya, serta menerangkan pahala dan nikmat yang kekal yang telah disediakan bagi mereka. Semua ini akan diperoleh bila ia melakukan *amar ma'ruf nahi munkar* serta diiringi dengan beberapa perbuatan yang diperintahkan oleh Allah SWT (Wadud, 1996:65).

Amar ma'ruf artinya mengajak kepada yang baik, sedangkan *nahi munkar* artinya melarang perbuatan yang tidak baik. Allah SWT memerintahkan kepada semua manusia untuk berbuat *ma'ruf* dan melarang *kemunkaran* atau kedurhakaan. *Amar ma'ruf nahi munkar* adalah sangat penting bagi umat Islam, karena dia adalah salah satu ciri khas agama Islam. Antara *amar ma'ruf nahi munkar* hendaknya selalu beriringan (Wadud, 1996 : 66).

Adapun beberapa ayat Al-Qur'an yang menerangkan tentang ciri-ciri orang yang beriman, di antaranya adalah:

وَالَّذِينَ يُؤْمِنُونَ بِمَا أُنزِلَ إِلَيْكَ وَمَا أُنزِلَ مِنْ قَبْلِكَ وَبِالْآخِرَةِ هُمْ يُوقِنُونَ ﴿٤﴾

“Dan mereka yang beriman kepada kitab (Al Quran) yang telah diturunkan kepadamu dan Kitab-Kitab yang telah diturunkan sebelumnya, serta mereka yakin akan adanya (kehidupan) akhirat.” (QS. Al-Baqarah, ayat 4)

إِنَّمَا الْمُؤْمِنُونَ الَّذِينَ إِذَا ذُكِرَ اللَّهُ وَجِلَّتْ قُلُوبُهُمْ وَإِذَا تُلِيَتْ عَلَيْهِمْ آيَاتُهُ زَادَتْهُمْ إِيمَانًا وَعَلَىٰ رَبِّهِمْ يَتَوَكَّلُونَ ﴿٢﴾

“Sesungguhnya orang-orang yang beriman ialah mereka yang bila disebut nama Allah gemetarlah hati mereka, dan apabila dibacakan ayat-ayat-Nya bertambahlah iman mereka (karenanya), dan hanya kepada Tuhanlah mereka bertawakkal”. (QS. Al-Anfal, ayat 2)

Dari uraian di atas, dapat disimpulkan bahwa karakteristik orang beriman adalah seorang muslim yang dapat membenarkan dalam hati, mengucapkan dengan lisan, dan mengamalkan dengan perbuatan sebagai wujud ketaatan kepada Allah SWT. Dari ayat-ayat Al-Qur'an yang telah dituliskan di atas juga dapat diketahui beberapa ciri orang yang beriman di antaranya mencegah kemunkaran, mendirikan shalat, menunaikan zakat, menyakini kitab Allah, dan masih banyak lagi ciri-ciri dari orang yang beriman. Dari sini, maka peneliti akan mencoba mengaplikasikan teori ring dalang menjelaskan mengenai ciri-ciri orang-orang yang beriman.



BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Hasil Penelitian

Dari penelitian yang telah dilakukan, peneliti memperoleh beberapa hasil yang diharapkan dapat memberikan jawaban untuk rumusan masalah pada penelitian ini sehingga dapat mencapai tujuan yang diharapkan. Hasil dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

Dalam hasil penelitian ini, operasi $(+)$, (\times) , (\circ) merupakan operasi penjumlahan, perkalian, dan komposisi fungsi yang sesungguhnya (bukan lagi simbol). Pada operasi perkalian (\times) , apabila ada unsur yang dioperasikan, maka tanda (\times) boleh dihilangkan, menjadi:

$$a \times = ab$$

Diberikan R adalah himpunan dari matriks diagonal ordo 2×2 , didefinisikan:

$$R = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \mid a_1, a_2 \in R \right\},$$

maka $(R, +, \times)$ adalah ring.

Bukti.

Untuk membuktikan bahwa $(R, +, \times)$ adalah ring, maka akan ditunjukkan bahwa $(R, +, \times)$ memenuhi aksioma ring.

- I. $(R, +)$ merupakan grup komutatif
 - a. Asosiatif

Ambil $A, B, C \in R$, dengan:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} \text{ dan } C = \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}$$

maka berlaku:

$$\begin{aligned} \left(\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_1 + b_1 & 0 \\ 0 & a_2 + b_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_1 + b_1 + c_1 & 0 \\ 0 & a_2 + b_2 + c_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 + c_1 & 0 \\ 0 & b_2 + c_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} \right) \\ (A + B) + C &= A + (B + C) \end{aligned}$$

Operasi (+) terbukti asosiatif.

b. Memiliki identitas

Ambil $A \in R$, dengan:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}$$

maka ada I yang memenuhi:

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} + I = I + \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}$$

Sehingga didapatkan $I = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Terbukti operasi (+) memiliki identitas

di R .

c. Balikan

Ambil $A \in R$, dengan:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}$$

maka ada A^{-1} yang berlaku:

$$A + A^{-1} = I$$

dan ditemukan bahwa $A^{-1} = \begin{bmatrix} -a_1 & 0 \\ 0 & -a_2 \end{bmatrix}$ dan $A^{-1} \in R$, sehingga setiap unsur di R memiliki balikan.

d. Komutatif

Ambil $A, B \in R$, dengan:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}$$

maka berlaku:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_1 + b_1 & 0 \\ 0 & a_2 + b_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} b_1 + a_1 & 0 \\ 0 & b_2 + a_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \\ A + B &= B + A \end{aligned}$$

Terbukti bahwa operasi (+) bersifat komutatif, sehingga $(R, +)$ merupakan grup komutatif.

II. Terhadap operasi (\times) berlaku:

a. Tertutup

Ambil $A, B \in R$, didefinisikan:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}$$

maka berlaku:

$$AB = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 b_1 & 0 \\ 0 & a_2 b_2 \end{bmatrix}$$

$$AB \in R$$

Terbukti bahwa operasi (\times) bersifat tertutup di R .

b. Asosiatif

Ambil $A, B, C \in R$, dengan:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} \text{ dan } C = \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}$$

maka berlaku:

$$\begin{aligned} \left(\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_1 b_1 & 0 \\ 0 & a_2 b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_1 b_1 c_1 & 0 \\ 0 & a_2 b_2 c_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 c_1 & 0 \\ 0 & b_2 c_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

$$(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$$

Operasi (\times) terbukti asosiatif.

c. Distributif

Ambil $A, B, C \in R$, dengan:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} \text{ dan } C = \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}$$

maka berlaku:

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} b_1 + c_1 & 0 \\ 0 & b_2 + c_2 \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} a_1(b_1 + c_1) & 0 \\ 0 & a_2(b_2 + c_2) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_1b_1 + a_1c_1 & 0 \\ 0 & a_2b_2 + a_2c_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_1b_1 & 0 \\ 0 & a_2b_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1c_1 & 0 \\ 0 & a_2c_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Sifat distributif berlaku di operasi (\times) .

Jadi, terbukti bahwa $(R, +, \times)$ dengan R merupakan himpunan matriks diagonal ordo 2×2 adalah ring.

Diberikan $(R, +, \times)$ adalah ring dengan R adalah himpunan matriks diagonal ordo 2×2 dan $f: R \rightarrow R$ yang didefinisikan:

$$R = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \mid a_1, a_2 \in R \right\} \text{ dan } f(A) = A, \forall A \in R$$

maka $f: R \rightarrow R$ merupakan homomorfisme ring di R .

Bukti.

Karena R sudah terbukti ring, maka akan langsung ditunjukkan $f: R \rightarrow R$ memenuhi sifat homomorfisme ring.

$(R, +, \times)$ adalah ring, maka ada $f: R \rightarrow R$ dengan $A, B \in R$, yang berlaku:

$$\text{I. } f(A + B) = f(A) + f(B)$$

Ambil $A, B \in R$, dengan:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}$$

maka:

$$\begin{aligned}
f(A+B) &= f\left(\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}\right) \\
&= f\left(\begin{bmatrix} a_1+b_1 & 0 \\ 0 & a_2+b_2 \end{bmatrix}\right) \\
&= \begin{bmatrix} a_1+b_1 & 0 \\ 0 & a_2+b_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} \\
&= f\left(\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}\right) + f\left(\begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}\right) \\
&= f(A) + f(B)
\end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa $f(A+B) = f(A) + f(B)$ berlaku pada $f: R \rightarrow R$.

II. $f(AB) = f(A)f(B)$

Ambil $A, B \in R$, dengan:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}$$

maka:

$$\begin{aligned}
f(AB) &= f\left(\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}\right) \\
&= f\left(\begin{bmatrix} a_1 b_1 & 0 \\ 0 & a_2 b_2 \end{bmatrix}\right) \\
&= \begin{bmatrix} a_1 b_1 & 0 \\ 0 & a_2 b_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} \\
&= f\left(\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}\right) f\left(\begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}\right) \\
&= f(A)f(B)
\end{aligned}$$

Terbukti bahwa $f(AB) = f(A)f(B)$ berlaku pada $f: R \rightarrow R$.

Sehingga terbukti bahwa $f: R \rightarrow R$ merupakan homomorfisme ring di R .

Selanjutnya diberikan $(R, +, \times)$ adalah ring, maka R merupakan modul atas dirinya sendiri (R -modul R).

Bukti.

Untuk membuktikan bahwa R adalah modul dari dirinya sendiri (R -modul R), maka R memenuhi aksioma modul terhadap ring, yaitu:

- I. $(R, +)$ merupakan grup komutatif.

Karena R adalah ring, maka $(R, +)$ sudah pasti adalah grup komutatif.

- II. Aksi grup $R \times R \rightarrow R$ melalui pengaitan $(a, x) \mapsto ax$ untuk semua pasangan $(a, x) \in R \times R$, dan untuk setiap $a, b \in R$ dan $x, y \in R$ berlaku:

a. $a(x + y) = ax + ay$

$a \in R$ dan $x, y \in R$, karena perkalian bersifat distributif kiri terhadap penjumlahan, maka $a(x + y) = ax + ay$.

b. $(a + b)x = ax + bx$

$a, b \in R$ dan $x \in R$, karena perkalian bersifat distributif kanan terhadap penjumlahan, maka $(a + b)x = ax + bx$.

c. $(ab)x = a(bx)$

$a, b \in R$ dan $x \in R$, karena $((ab), x) \mapsto abx$, maka $(ab)x$ memenuhi pengaitan $R \times R \rightarrow R$, dan karena $(a, (bx)) \mapsto a(bx)$, maka $a(bx)$ juga memenuhi pengaitan $R \times R \rightarrow R$. Sehingga:

$$(ab)x = a(bx)$$

Jika R adalah ring dengan elemen satuan (RS), maka:

d. $1x = x$

R akan memenuhi sifat dari:

$$1x = x1 = x$$

Terbukti bahwa R merupakan modul atas dirinya sendiri (R-modul R)

Untuk lebih memperjelas, peneliti memberikan dua contoh yang menunjukkan bahwa R merupakan modul atas dirinya sendiri (R-modul R).

Contoh 8

Jika $(R, +, \times)$ adalah ring dengan R adalah himpunan matriks ordo 2×2 yang didefinisikan sebagai berikut:

$$R = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \mid a_1, a_2 \in R \right\},$$

maka R merupakan modul atas dirinya sendiri (R-modul R).

Bukti.

Pertama akan ditunjukkan bahwa R merupakan modul dari dirinya sendiri (R-modul R) dengan menunjukkan bahwa R memenuhi aksioma modul atas ring:

I. $(R, +)$ adalah grup komutatif

Karena R adalah ring, maka sudah pasti bahwa $(R, +)$ adalah grup komutatif.

II. Aksi grup $R \times R \rightarrow R$ melalui pengaitan $(A, X) \mapsto AX$ untuk semua pasangan $(A, X) \in R \times R$, dan untuk setiap $A, B \in R$ dan $X, Y \in R$ berlaku:

a. $A(X + Y) = AX + AY$

Ambil $A \in R$ dan $X, Y \in R$, dengan:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \text{ dan } X = \begin{bmatrix} 0 & x_1 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix} \text{ dan } Y = \begin{bmatrix} 0 & y_1 \\ 0 & y_2 \end{bmatrix}$$

maka:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 & x_1 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & y_1 \\ 0 & y_2 \end{bmatrix} \right) &= \begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & x_1 + y_1 \\ 0 & x_2 + y_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & a_1(x_2 + y_2) \\ 0 & a_2(x_2 + y_2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & a_1x_2 + a_1y_2 \\ 0 & a_2x_2 + a_2y_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & a_1x_2 \\ 0 & a_2x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_1y_2 \\ 0 & a_2y_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & x_1 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & y_1 \\ 0 & y_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Terbukti bahwa $A(X + Y) = AX + AY$.

b. $(A + B)X = AX + BX$

Ambil $A, B \in R$ dan $X \in R$, dengan:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} \text{ dan } X = \begin{bmatrix} 0 & x_1 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix}$$

maka:

$$\begin{aligned}
\left(\begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} 0 & x_1 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & a_1 + b_1 \\ 0 & a_2 + b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & x_1 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & (a_1 + b_1)x_2 \\ 0 & (a_2 + b_2)x_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & a_1x_2 + b_1x_2 \\ 0 & a_2x_2 + b_2x_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & a_1x_2 \\ 0 & a_2x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b_1x_2 \\ 0 & b_2x_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & x_1 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & x_1 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Terbukti bahwa $(A + B)X = AX + BX$ dengan $A, B \in R$ dan $X \in R$.

c. $(AB)X = A(BX)$

Ambil $A, B \in R$ dan $X \in R$, dengan:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} \text{ dan } X = \begin{bmatrix} 0 & x_1 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix}$$

maka:

$$\begin{aligned}
\left(\begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} 0 & x_1 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & a_1b_2 \\ 0 & a_2b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & x_1 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & a_1b_2x_2 \\ 0 & a_2b_2x_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & b_1x_2 \\ 0 & b_2x_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & x_1 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix}\right)
\end{aligned}$$

Terbukti bahwa $(AB)X = A(BX)$ untuk setiap $A, B \in R$ dan $X \in R$.

Karena R bukanlah ring dengan elemen satuan (RS), maka R tidak memenuhi aksioma berikut:

d. $1X = X$

Ambil $X \in R$ dengan:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & x_1 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix}$$

maka:

$$\begin{bmatrix} 0 & x_1 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix} i = i \begin{bmatrix} 0 & x_1 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & x_1 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix}$$

Didapatkan bahwa:

$$i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \notin R$$

Dari pembuktian di atas, terbukti bahwa R adalah modul kiri atas dirinya sendiri, sekarang akan ditunjukkan bahwa R juga memenuhi satu sifat untuk modul kanan, yaitu:

$$(AB)X = B(AX) \text{ untuk } A, B \in R \text{ dan } X \in R$$

Diambil $A, B \in R$ dan $X \in R$, dengan:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} \text{ dan } X = \begin{bmatrix} 0 & x_1 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix}$$

maka:

$$\begin{aligned} \left(\begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 & x_1 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & a_1 b_2 \\ 0 & a_2 b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & x_1 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & b_2 a_1 x_2 \\ 0 & b_2 a_2 x_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a_1 x_1 \\ 0 & a_2 x_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & x_1 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

Karena R juga memenuhi aksioma $(AB)X = B(AX)$, maka R merupakan modul kanan dari dirinya sendiri. Jadi, terbukti bahwa R adalah modul kanan maupun kiri atas dirinya sendiri (R -modul R).

Contoh 9

Jika $(R, +, \times)$ adalah ring dengan R adalah himpunan dari matriks diagonal berordo 2×2 , didefinisikan sebagai berikut:

$$R = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \mid a_1, a_2 \in R \right\},$$

maka R merupakan modul atas dirinya sendiri (R -modul R).

Bukti.

Pertama akan ditunjukkan bahwa R merupakan modul atas ring R dengan menunjukkan bahwa R memenuhi aksioma modul atas ring:

I. $(R, +)$ adalah grup komutatif

Karena R adalah ring, maka sudah pasti bahwa $(R, +)$ adalah grup komutatif.

II. Aksi grup $R \times R \rightarrow R$ melalui pengaitan $(A, X) \mapsto AX$ untuk semua pasangan $(A, X) \in R \times R$, dan untuk setiap $A, B \in R$ dan $X, Y \in R$ berlaku:

a. $A(X + Y) = AX + AY$

Ambil $A \in R$ dan $X, Y \in R$, dengan:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 & 0 \\ 0 & y_2 \end{bmatrix}$$

maka:

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 & 0 \\ 0 & y_2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 + y_1 & 0 \\ 0 & x_2 + y_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} a_1(x_1 + y_1) & 0 \\ 0 & a_2(x_2 + y_2) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_1x_1 + a_1y_1 & 0 \\ 0 & a_2x_2 + a_2y_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_1x_1 & 0 \\ 0 & a_2x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1y_1 & 0 \\ 0 & a_2y_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 & 0 \\ 0 & y_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Terbukti bahwa $A(X + Y) = AX + AY$.

b. $(A + B)X = AX + BX$

Ambil $A, B \in R$ dan $X \in R$, dengan:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} \text{ dan } X = \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix}$$

maka:

$$\begin{aligned}
\left(\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_1 + b_1 & 0 \\ 0 & a_2 + b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (a_1 + b_1)x_1 & 0 \\ 0 & (a_2 + b_2)x_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_1x_1 + b_1x_1 & 0 \\ 0 & a_2x_2 + b_2x_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_1x_1 & 0 \\ 0 & a_2x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1x_1 & 0 \\ 0 & b_2x_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 & 0 \\ 0 & y_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

terbukti bahwa $(A + B)X = AX + BX$ dengan $A, B \in R$ dan $X \in R$.

c. $(AB)X = A(BX)$

Ambil $A, B \in R$ dan $X \in R$, dengan:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} \text{ dan } X = \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix}$$

maka:

$$\begin{aligned}
\left(\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_1 b_2 & 0 \\ 0 & a_2 b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_1 b_2 x_2 & 0 \\ 0 & a_2 b_2 x_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 x_1 & 0 \\ 0 & b_2 x_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix}\right)
\end{aligned}$$

Terbukti bahwa $(AB)X = A(BX)$ untuk setiap $A, B \in R$ dan $X \in R$.

Karena R merupakan ring dengan elemen satuan (RS), maka memenuhi aksioma berikut:

d. $1X = X$

Ambil $X \in R$ dengan:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix}$$

maka ada i sedemikian hingga:

$$\begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix} i = i \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix}$$

didapatkan bahwa:

$$i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in R$$

Jadi, terbukti bahwa R memenuhi semua aksioma modul terhadap ring.

Sehingga dapat disimpulkan bahwa R merupakan modul atas dirinya sendiri (R-modul R). Untuk menjadikan R modul kanan atas dirinya sendiri, maka R harus memenuhi satu aksioma, yaitu:

$$(AB)X = B(AX) \text{ untuk } A, B \in R \text{ dan } X \in R$$

Diambil $A, B \in R$ dan $X \in R$, dengan:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} \text{ dan } X = \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix}$$

maka:

$$\begin{aligned} \left(\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_1 b_1 & 0 \\ 0 & a_2 b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} b_1 a_1 x_1 & 0 \\ 0 & b_2 a_2 x_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 x_1 & 0 \\ 0 & a_2 x_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

Karena R juga memenuhi aksioma $(AB)X = B(AX)$, maka R merupakan modul kanan atas dirinya sendiri (R -modul R).

Dari contoh di atas, maka penulis memutuskan untuk meneliti apakah $M_R(R)$ dengan operasi penjumlahan dan komposisi fungsi ditulis $(M_R(R), +, \circ)$ merupakan ring atau bukan dimana R merupakan ring dengan R adalah himpunan matriks diagonal ordo 2×2 yang diberikan operasi penjumlahan $(+)$ dan perkalian (\times) ditulis $(R, +, \times)$ dan R juga bertindak sebagai modul, dengan artian R merupakan modul atas dirinya sendiri (R -modul R).

Diberikan $(R, +, \times)$ adalah ring pada matriks diagonal ordo 2×2 dengan R merupakan modul atas dirinya sendiri (R -modul R), maka $M_R(R)$ adalah ring.

Bukti.

Ambil $A \in R$ dan $B \in R$, dengan:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}$$

maka berlaku:

$$M_R(R) = \{f: R \rightarrow R \mid f(BA) = Bf(A), B \in R, A \in R\}$$

Selanjutnya akan diteliti mengenai sifat-sifat dari $M_R(R)$ yang dikenakan operasi penjumlahan dan operasi komposisi fungsi untuk mengetahui $M_R(R)$ memenuhi aksioma-aksioma ring.

I. $(M_R(R), +)$ merupakan grup komutatif

a. Tertutup

Ambil $f, g \in M_R(R)$ dan $A, B \in R$ dengan:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}$$

maka:

$$\begin{aligned} f(BA) &= Bf(A) \\ &= \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} f\left(\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}\right) \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} g(BA) &= Bg(A) \\ &= \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} g\left(\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}\right) \end{aligned}$$

sehingga:

$$\begin{aligned} (f + g)(BA) &= f(BA) + g(BA) \\ &= \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} f\left(\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} g\left(\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} \left(f\left(\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}\right) + g\left(\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}\right)\right) \\ &= B(f(A) + g(A)) \end{aligned}$$

$$= B(f + g)(A)$$

Karena $(f + g)(BA) = B(f + g)(A)$, maka operasi $(+)$ terbukti tertutup di $M_R(R)$.

b. Asosiatif

Ambil $f, g, h \in M_R(R)$ dan $A \in R$ dengan:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}$$

maka:

$$\begin{aligned} ((f + g) + h)(A) &= (f + g) \left(\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \right) + h \left(\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \right) \\ &= f \left(\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \right) + g \left(\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \right) + h \left(\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \right) \\ &= f \left(\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \right) + (g + h) \left(\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \right) \\ &= f(A) + (g + f)(A) \\ &= (f + (g + f))(A) \end{aligned}$$

Karena $((f + g) + h)(A) = (f + (g + f))(A)$, maka operasi $(+)$ bersifat asosiatif di $M_R(R)$.

c. Ada identitas

Ambil $f, g \in M_R(R)$ dan $A \in R$ dengan:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \text{ dan } f(A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

maka:

$$(g + f)(A) = (g + f) \left(\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= g\left(\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}\right) + f\left(\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}\right) \\
&= g\left(\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= g\left(\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}\right)
\end{aligned}$$

Jadi $f(A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ adalah identitas operasi (+) di $M_R(R)$.

d. Balikan

Ambil $f \in M_R(R)$ dan $A \in R$ dengan:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}$$

ada $g \in M_R(R)$ sehingga:

$$\begin{aligned}
(f + g)(A) &= f\left(\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}\right) + g\left(\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}\right) \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Misalkan $f(A) = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$, maka:

$$\begin{aligned}
g(A) &= \begin{bmatrix} -b_1 & 0 \\ 0 & -b_2 \end{bmatrix} \\
&= -1 \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$= -1f\left(\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}\right)$$

$$= -f\left(\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}\right)$$

$$= -f(A)$$

Sehingga $-f(A)$ merupakan balikan dari $f(A)$ di $M_R(R)$.

e. Komutatif

Ambil $f, g \in M_R(R)$ dan $A \in R$ dengan:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}$$

maka:

$$\begin{aligned} (f + g)(A) &= (f + g) \left(\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \right) \\ &= f \left(\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \right) + g \left(\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \right) \\ &= g \left(\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \right) + f \left(\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \right) \\ &= g(A) + f(A) \\ &= (g + f)(A) \end{aligned}$$

Karena $(f + g)(A) = (g + f)(A)$, maka terbukti bahwa operasi $(+)$ bersifat komutatif di $M_R(R)$.

Sehingga dapat dikatakan pula $(M_R(R), +)$ merupakan *grup komutatif*.

II. Sifat pada operasi perkalian (\times) berlaku:

a. Tertutup

Ambil $f, g \in M_R(R)$ dan $A, B \in R$, dengan :

maka:

$$\begin{aligned} (f \circ g)(BA) &= f(g(BA)) \\ &= f(Bg(A)) \\ &= Bf(g(A)) \\ &= B(f \circ g)(A) \end{aligned}$$

Karena $B(f \circ g)(A) \in M_R(R)$, maka operasi (\circ) di $M_R(R)$ bersifat tertutup.

b. Asosiatif

Ambil $A \in R$ dan $f, g, h \in M_R(R)$, maka berlaku:

$$\begin{aligned} ((f \circ g) \circ h)(A) &= (f(g(A)) \circ h)(A) \\ &= f(g(h(A))) \\ &= (f \circ g(h(A)))(A) \\ &= (f \circ (g \circ h))(A) \end{aligned}$$

Karena $((f \circ g) \circ h)(A) = (f \circ (g \circ h))(A)$ terpenuhi, maka operasi (\circ) di $M_R(R)$ bersifat asosiatif.

c. Distributif

Ambil $A \in R$ dan $f, g, h \in M_R(R)$, maka berlaku:

$$\begin{aligned} (f \circ (g + h))(A) &= f((g + h)(A)) \\ &= f(g(A) + h(A)) \\ &= f(g(A) + h(A)) \\ &= f(g(A)) + f(h(A)) \\ &= (f \circ g)(A) + (f \circ h)(A) \end{aligned}$$

Sehingga terbukti bahwa operasi (\circ) di $M_R(R)$ berlaku sifat distributif kiri.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $M_R(R)$ memenuhi sifat distributif kanan.

Ambil $A \in R$ dan $f, g, h \in M_R(R)$, maka berlaku:

$$\begin{aligned}
((g + h) \circ f)(A) &= (g + h)(f(A)) \\
&= g(f(A)) + h(f(A)) \\
&= (g \circ f)(A) + (h \circ f)(A)
\end{aligned}$$

Dari pembuktian di atas, terbukti bahwa operasi (\circ) di $M_R(R)$ berlaku sifat distributif kanan.

Jadi, karakteristik $M_R(R)$ yang dibangun oleh ring R dengan R adalah himpunan matriks diagonal berordo 2×2 dan R sebagai modul dari ring R (modul terhadap dirinya sendiri) yang apabila dibentuk menjadi himpunan fungsi $M_R(R)$ dan dikenakan operasi penjumlahan dan komposisi fungsi ditulis $(M_R(R), +, \circ)$ akan menjadikannya ring.

3.2 Kajian Ring dalam Al-Qur'an

Matematika adalah salah satu dari sekian banyak ilmu pengetahuan yang tersirat dalam Al-Qur'an. Meskipun Al-Qur'an tidak menjelaskan secara langsung mengenai ilmu matematika, tetapi matematika dapat menjadi ilmu untuk mengimplementasikan ayat-ayat yang terkandung di dalam Al-Qur'an. Salah satu bidang matematika yang dapat digunakan adalah aljabar. Satu dari beberapa materi yang dipelajari dalam bidang aljabar adalah himpunan. Himpunan memiliki pengertian segala kumpulan objek-objek tertentu yang dianggap sebagai satu identitas. Walaupun hal ini merupakan ide yang sederhana, akan tetapi himpunan merupakan salah satu konsep penting dan mendasar dalam matematika modern, dan karenanya, studi mengenai teori himpunan sangatlah berguna.

Aplikasi himpunan sudah ada dalam al-Qur'an. Salah satunya adalah kehidupan manusia yang terdiri dari berbagai macam golongan. Di mana golongan juga merupakan himpunan karena himpunan sendiri merupakan kumpulan objek-objek yang terdefinisi. Dalam al-Quran surat Al-Fatihah ayat 7 disebutkan:

صِرَاطَ الَّذِينَ أَنْعَمْتَ عَلَيْهِمْ غَيْرِ الْمَغْضُوبِ عَلَيْهِمْ وَلَا الضَّالِّينَ ﴿٧﴾

“(yaitu) jalan orang-orang yang telah Engkau beri nikmat kepada mereka; bukan (jalan) mereka yang dimurkai dan bukan (pula jalan) mereka yang sesat”. (QS. Al-Fatihah, ayat 7)

Dalam ayat tersebut dijelaskan bahwa ada 3 golongan manusia di dunia ini yang memiliki ciri-ciri khusus dan dapat dipilah-pilah atau dibedakan antara satu dengan yang lainnya. Dengan artian, jika disambungkan ke dalam materi tentang himpunan, ada satu kelompok atau satu himpunan yang dapat dikatakan sebagai himpunan semesta, yaitu manusia, dan manusia itu dibagi menjadi 3 kelompok atau 3 himpunan manusia, himpunan pertama adalah manusia-manusia yang diberi nikmat oleh Allah SWT, kemudian himpunan kedua adalah manusia-manusia yang dimurkai oleh Allah, sedangkan himpunan ketiga atau terakhir adalah manusia-manusi yang sesat. Jika digambarkan, maka gambar yang terbentuk adalah sebagai berikut:

Ayat Al-Qur'an di atas merupakan satu dari sekian banyak ayat yang dapat kita jelaskan dalam bentuk matematika, tepatnya ke dalam himpunan. Melangkah tentang materi himpunan lebih lanjut lagi, maka akan didapatkan suatu himpunan dengan satu operasi biner yang dapat disebut dengan grup. Kemudian, ada juga

himpunan dengan dua operasi biner yang disebut ring atau gelanggang. Masing-masing dari grup dan ring memiliki ciri-ciri atau aksioma khusus sehingga suatu himpunan dengan operasi biner dapat dikatakan grup atau ring.

Suatu himpunan dengan satu operasi biner (disimbolkan $(G,+)$ dengan G adalah himpunan dan $+$ adalah operasi biner) dapat dikatakan grup apabila memenuhi sifat-sifat tertentu, yaitu bersifat tertutup dan asosiatif pada operasi $(+)$, serta memiliki balikan dan identitas pada operasi $(+)$. Kemudian apabila semua sifat itu berlaku dan ternyata juga berlaku sifat komutatif pada operasi $(+)$, maka grup tersebut dinamakan grup komutatif. Dalam Al-Qur'an, ada beberapa ayat yang dapat direpresentasikan ke dalam teori grup, seperti firman Allah pada surat Al-Baqarah ayat 4 yang berbunyi:

وَالَّذِينَ يُؤْمِنُونَ بِمَا أُنزِلَ إِلَيْكَ وَمَا أُنزِلَ مِنْ قَبْلِكَ وَبِالْآخِرَةِ هُمْ يُوقِنُونَ ﴿٤﴾

“Dan mereka yang beriman kepada kitab (Al Quran) yang telah diturunkan kepadamu dan Kitab-Kitab yang telah diturunkan sebelumnya, serta mereka yakin akan adanya (kehidupan) akhirat.” (QS. Al-Baqarah, ayat 4)

Pertama-tama yang akan ditentukan dahulu adalah himpunan apa yang akan digunakan. Dalam ayat tersebut himpunan yang dimaksud adalah himpunan orang-orang yang beriman. Iman menurut bahasa Arab memiliki arti “percaya”, sedangkan menurut istilah iman diartikan “membenarkan dalam hati, diucapkan dengan lisan, dan diamalkan dengan perbuatan”. Pada surat Al-Baqarah ayat 4 di atas diutarakan tentang beberapa ciri-ciri bagi orang yang beriman, yaitu orang yang percaya kepada kitab Allah (Al-Qur'an) dan percaya akan adanya akhirat. Satu dari dua ciri orang beriman tersebut dalam matematika dapat

diimplementasikan sebagai sebuah operasi yang berlaku pada himpunan orang-orang beriman. “percaya kepada kitab Allah (Al-Qur’an) merupakan perlakuan dari orang beriman dan dalam matematika dapat disebut operasi.

Setelah menentukan operasi yang diberikan, sekarang akan ditunjukkan bahwa himpunan orang-orang beriman dengan operasi percaya kepada Al-Qur’an memenuhi syarat untuk menjadi sebuah grup. Orang beriman yang percaya pada Al-Qur’an, maka dia akan tetap dikategorikan orang yang beriman, karena percaya pada Al-Qur’an merupakan salah satu rukun iman. Hal ini menunjukkan bahwa orang beriman dengan operasi percaya kepada Al-Qur’an bersifat tertutup. Kata “mereka” dalam ayat di atas menunjukkan lebih dari satu orang, dalam hal ini adalah orang beriman, oleh karena itu akan sama saja orang beriman yang satu dengan yang lainnya, karena mereka tetaplah orang beriman. Hal ini menunjukkan adanya sifat pengelompokan. Selanjutnya, orang yang beriman memiliki satu tujuan, yaitu beriman kepada Allah, oleh karena itu, Allah dapat dikatakan unsur identitas bagi orang yang beriman. Kemudian, jika ditanya “untuk siapakan mereka beriman?”, maka mereka beriman untuk diri mereka sendiri, atau dapat dikatakan terdapat sifat kebalikan. Selain itu juga, antara orang beriman yang satu dengan yang lainnya akan tetap menjadi orang beriman siapapun dia. Dari penjelasan ini, himpunan orang-orang beriman yang diberi perlakuan percaya kepada Al-Qur’an, dapat dijelaskan melalui teori grup karena memenuhi aksioma-aksioma dari grup.

Setelah dapat menjelaskan himpunan orang beriman dengan perlakuan percaya kepada Al-Qur’an menggunakan teori grup, selanjutnya himpunan orang

beriman akan dijelaskan dengan menggunakan teori ring dengan cara memberikan satu perlakuan lagi yang dapat disebut operasi.

Allah berfirman pada surat Al-Anfal ayat 2 yang berbunyi:

إِنَّمَا الْمُؤْمِنُونَ الَّذِينَ إِذَا ذُكِرَ اللَّهُ وَجِلَّتْ قُلُوبُهُمْ وَإِذَا تُلِيَتْ عَلَيْهِمْ آيَاتُهُ زَادَتْهُمْ إِيمَانًا وَعَلَىٰ رَبِّهِمْ يَتَوَكَّلُونَ ﴿٢﴾

“Sesungguhnya orang-orang yang beriman ialah mereka yang bila disebut nama Allah gemetarlah hati mereka, dan apabila dibacakan ayat-ayat-Nya bertambahlah iman mereka (karenanya), dan hanya kepada Tuhanlah mereka bertawakkal”. (QS. Al-Anfal, ayat 2)

Dalam Surat Al-Anfal ayat 2 di atas dijelaskan bahwa salah satu ciri orang beriman adalah yang apabila disebut nama Allah gemetarlah hatinya dan apabila dibacakan ayat-ayat Allah (Al-Qur’an) maka akan bertambahlah imannya. Dalam ayat tersebut, “dibacakan ayat suci Al-Qur’an” dapat disebut perlakuan untuk orang beriman dan dalam matematika disebut dengan operasi.

Pertama, apabila seorang beriman dibacakan ayat Al-Qur’an, maka mereka akan tetap disebut orang beriman karena menurut surat Al-Anfal ayat 2 bahwa orang beriman yang dibacakan ayat Al-Qur’an maka akan bertambah iman mereka. Hal ini dalam matematika dapat dikatakan memiliki sifat tertutupan. Karena kumpulan orang beriman merupakan himpunan dengan anggota lebih dari satu, maka juga berlaku pengelompokan. Selanjutnya, orang beriman yang percaya kepada Al-Qur’an dan dibacakan ayat Al-Qur’an, maka mereka akan tetap menjadi orang yang beriman karena salah satu ciri orang beriman adalah

percaya pada Al-Qur'an dan apabila dibacakan ayat Al-Qur'an maka akan bertambah iman mereka. Dalam matematika, sifat ini disebut distributif.

Kesimpulannya adalah himpunan orang beriman yang diberi perlakuan percaya pada Al-Qur'an dan dibacakan ayat Al-Qur'an dapat dijelaskan dengan menggunakan teori ring/gelanggang kerana memenuhi sifat-sifat dari ring.



BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Dari penelitian yang telah dilakukan, ada beberapa kesimpulan yang diperoleh, yaitu apabila diberikan R adalah sebuah ring, maka R adalah modul atas dirinya sendiri (R -modul R)

Apabila R adalah ring dengan operasi penjumlahan (+) dan perkalian (\times) ditulis $(R, +, \times)$ pada himpunan matriks ordo 2×2 yang didefinisikan:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \mid a_1, a_2 \in R \right\}$$

maka R merupakan modul atas dirinya sendiri (R -modul R)

Apabila R adalah ring dengan operasi penjumlahan (+) dan perkalian (\times) ditulis $(R, +, \times)$ pada himpunan matriks berordo 2×2 , yang didefinisikan:

$$\left\{ \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \mid a_1, a_2 \in R \right\}$$

maka R adalah merupakan modul atas dirinya sendiri (R -modul R).

Selanjutnya, apabila diberikan $(R, +, \times)$ adalah ring dengan R merupakan himpunan matriks diagonal ordo 2×2 dan R juga sebagai modul atas dirinya sendiri (R -modul R), maka apabila dimasukkan ke himpunan fungsi homogen $M_R(G)$ dengan G merupakan modul atas ring R dan menghasilkan:

$$M_R(R) = \{f: G \rightarrow G \mid f(BA) = Bf(A), B \in R, A \in R\}$$

dengan $R = G$ dan $B \in R, A \in R$. Apabila $M_R(R)$ diberikan operasi penjumlahan dan komposisi fungsi, ternyata $M_R(R)$ memenuhi semua aksioma pada ring yang menjadikan $(M_R(R), +, \circ)$ merupakan ring.

4.2 Saran

Penelitian ini masih perlu pengembangan keilmuan sehingga disarankan untuk penelitian selanjutnya, salah satu saran dari peneliti adalah menggunakan bilangan modulo sebagai ring R .



DAFTAR PUSTAKA

- Arifin, Achmad. 2000. *Aljabar*. Bandung: ITB Bandung.
- Dummit, David S dan Foote, Richard M. 1991. *Abstract Algebra*. New York: PrenticeHall International, Inc.
- Dwi Astuti dan Sri Wahyuni. 2010. *Kriteria Ring R dengan $M_R(G)$ Merupakan Ring*. Program Studi Matematika Program Pascasarjana Universitas Gajah Mada Yogyakarta.
- Fanani, Okta Tri Riyan. 2008. *Kajian Homomorfisme Modul dan Ring Endomorfisme*. Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
- Lipschutz, Seymour dan Lipson, Marc. 2004. *Teori dan Soal Aljabar Linear Edisi Ketiga*. Jakarta: Erlangga.
- Rahman, Afzalur. 1992. *Al-Qur'an Sumber Ilmu Pengetahuan*. Jakarta: Rineka Cipta.
- Raisinghania, M, D dan Anggarwal, R, S. 1980. *Modern Algebra*. New Delhi: Ram Nagar.
- Rusdi, Ahmad. 2009. *Pengertian iman*.
<http://islamagamaku.wordpress.com/2009/07/25/pengertian-iman/>.
Diakses tanggal 29 Juni 2012.
- Ulumiddin, Ihya'. 2008. *Rumah Hati Dengan Cahaya Ilahy*. Malang: an Nuha Publishing.
- Wadud, Abd. 1996. *Qur'an Hadits*. Semarang: PT Toha Putra.
- 'Imrona, Mahmud. 2009. *Aljabar Linier Dasar*. Jakarta: Erlangga.



KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MAULANA MALIK
IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang (0341) 551345 Fax. (0341)
572533

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Ahmad Anas Setiawan
NIM : 08610014
Fakultas/ Jurusan : Sains dan Teknologi/Matematika
Judul Skripsi : Karakteristik $M_R(G)$ Yang Dibangun Oleh Ring R
Pembimbing I : Hairur Rahman, S. Pd , M. Si
Pembimbing II : H. Wahyu H. Irawan, M. Pd

No	Tanggal	HAL	Tanda Tangan	
1	26 April 2012	Konsultasi BAB I	1.	
2	02 Mei 2012	Konsultasi BAB II dan Agama		2.
3	05 Mei 2012	Pengenalan Jurnal		3.
4	09 Mei 2012	Konsultasi Kajian Agama		4.
5	30 Mei 2012	Revisi BAB II		5.
6	02 Juni 2012	Konsultasi BAB I dan II	6.	
7	06 Juni 2012	Revisi BAB III	7.	
8	16 Juni 2012	Revisi BAB III	8.	
9	20 Juni 2012	Konsultasi BAB I dan II		9.
10	24 Juni 2012	Konsultasi BAB III		10.
11	25 Juni 2012	Konsultasi BAB I dan II	11.	
12	26 Juni 2012	Konsultasi BAB III	12.	
13	27 Juni 2012	Konsultasi BAB I, II, dan III	13.	

Malang, 30 Juni 2012
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP.19751006 200312 1 001