CENTRALIZER, NORMALIZER, DAN CENTER SUBGRUP DARI GRUP SIMETRI-n $(S_n,\circ)$

SKRIPSI

Oleh:

FITROTIN NISA'

NIM. 07610042

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG

2011

CENTRALIZER, NORMALIZER, DAN CENTER SUBGRUP DARI GRUP SIMETRI-n $(S_n, \circ)$

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
FITROTIN NISA'
NIM. 07610042

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2011

CENTRALIZER, NORMALIZER, DAN CENTER SUBGRUP DARI GRUP SIMETRI-n $(S_n,\circ)$

SKRIPSI

Oleh:
FITROTIN NISA'
NIM. 07610042

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji

Tanggal: 14 Juli 2011

Dosen Pembimbing I,	**Dosen Pembimbing II,**
Evawati Alisah, M.Pd	**Abdul Aziz, M.Si**
NIP.19720604 199903 2 001	**NIP. 19760318 200604 1 002**

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

CENTRALIZER, NORMALIZER, DAN CENTER SUBGRUP DARI GRUP SIMETRI-n $(S_n,\circ)$

SKRIPSI

Oleh:
FITROTIN NISA'
NIM. 07610042

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal: 22 Juli 2011

Susunan Dewan Penguji			Tanda Tangan
1. Penguji Utama	:	Abdussakir, M.Pd NIP. 19751006 200312 1 001	____________
2. Ketua Penguji	:	Wahyu Henky Irawan, M.Pd NIP. 19710420 200003 1 003	____________
3. Sekretaris Penguji	:	Evawati Alisah, M.Pd NIP. 19720604 199903 2 001	____________
4. Anggota Penguji	:	Abdul Aziz, M.Si NIP. 19760318 200604 1 002	____________

Mengetahui dan Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika,

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Fitrotin Nisa'

NIM : 07610042

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambil-alihan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 14 Juli 2011

Yang membuat pernyataan,

FITROTIN NISA'
NIM. 07610042

MOTTO

Sesungguhnya Allah tidak merubah keadaan suatu kaum sehingga mereka merubah keadaan (Q.S. Al-A’rad: 11)

PERSEMBAHAN

Penulis persembahkan karya ini untuk mereka yang penulis sayangi dan menyayangi penulis:

Ayah H. M. Nadhir

Ibu Suparlik

Kakak Lailatul Muarofah

Kakak Abdul Fatah

Kakak Mutiatul Hasanah

Adik Arini Ainun Nadhifah

KATA PENGANTAR

بِسْمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحْمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

Alhamdulillah, puji syukur ke hadirat Allah SWT yang telah memberikan rahmat, taufik, dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik. Shalawat dan salam semoga tercurahkan kepada Rasulullah Muhammad SAW, atas jasa beliau kita dapat keluar dari kegelapan menuju cahaya nur Ilahi

Penulisan skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik berkat bantuan, bimbingan, dan motivasi dari berbagai pihak. Oleh sebab itu, dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih, semoga Allah SWT membalas semua kebaikan dan menyinari jalan yang diridhoi-Nya, khususnya kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, sebagai rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, S.U, D.Sc sebagai dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd, sebagai ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Evawati Alisah, M.Pd dan Abdul Aziz, M.Si sebagai dosen pembimbing skripsi.
5. Semua guru yang telah memberikan ilmu yang sangat berharga kepada penulis.
6. Wahyu Henky Irawan, M.Pd yang selalu memberikan arahan, nasihat, dan motivasi kepada penulis.

7. Teman-teman penulis Puspita Dyan, Muslihatin, Reni Tri D, Ani Tsalasatul, Ema Provita, Nurjianah, Arif Yuwono, dan Ahmad Syaiful.
8. Seluruh mahasiswa Jurusan Matematika angkatan 2007.
9. Kepada semua pihak yang telah membantu dalam penyelesaian skripsi ini, yang tidak bisa disebutkan satu per satu.

Semoga skripsi ini dapat bermanfaat. Amin.

Malang, 14 Juli 2011

Penulis

DAFTAR ISI

BAB II KAJIAN TEORI

BAB III PEMBAHASAN

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

ABSTRAK

Nisa', Fitrotin. 2011. ***Centralizer*, *Normalizer*, dan *Center* Subgrup dari Grup Simetri-$\boldsymbol{n}$ $(\boldsymbol{S_n},\circ)$.** Skripsi. Jurusan Matematika. Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: (I) Evawati Alisah, M.Pd
(II) Abdul Aziz, M.Si

Kata kunci: grup **simetri-$\boldsymbol{n}$ $(\boldsymbol{S_n},\circ)$,** subgrup, *centralizer, normalizer, center*

Matematika mempunyai beberapa cabang keilmuan yang masing-masing mempunyai penerapan dengan berbagai disiplin ilmu lain. Salah satu dari cabang-cabang ilmu tersebut adalah Aljabar abstrak. Beberapa pokok bahasan dalam Aljabar adalah *centralizer, normalizer*, dan *center* subgrup dari grup simetri-n $(S_n,\circ)$. Grup simetri-n $(S_n,\circ)$ Grup Simetri-n $(S_n,\circ)$ merupakan himpunan berhingga yang terdiri dari n elemen yang merupakan fungsi satu-satu dari himpunan S ke himpunan S itu sendiri. Jumlah elemen dari grup simetri adalah n!. selanjutnya, subgrup dari grup simetri yang terdiri dari elemen rotasi dan refleksi ternyata juga memenuhi aksioma-aksioma grup, yaitu $S_n = \{r_1, r_2, \dots, r_n, f_1, f_2, \dots, f_n\}$ dengan r yang menunjukkan rotasi dan f yang menunjukkan refleksi. Subgrup ini tidak abelian, sehingga terdapat suatu pola dalam menentukan *centralizer*, *normalizer*, dan *center* dari subgrupnya.

Dalam penelitian ini, metode yang digunakan adalah metode penelitian pustaka, dengan langkah-langkah penelitian sebagai berikut: (1) merumuskan masalah; (2) Mengidentifikasi unsur-unsur dari S_3 - S_9; (3) Menentukan subgrup dari S_3 - S_9; (4) Menentukan *centralizer* semua subgrup pada masing-masing S_3 - S_9; (5) Menentukan *center* semua S_3 - S_9; (6) Menentukan *normalizer* semua subgrup pada S_3 - S_9; (7) Membuat pola umum banyaknya subgrup, tipe *centralizer*, *normalizer*, dan *center* subgrup di grup simetri-*n*; (8) Membuktikan pola umum banyaknya subgrup di grup simetri-*n*, tipe dari *centralizer*, *normalizer*, dan *center* subgrup di grup simetri-*n*; (9) Membuat kesimpulan.

Hasil dari penelitian ini adalah: (1) Pola banyaknya subgrup dari S_n adalah $n+3$ untuk n bilangan prima, dan $a(n)+b(n)$ untuk n bilangan komposit. (2) Pola *centralizer* dari P_n, n bilangan prima adalah $C_{S_n}(r_n) = S_n$, $C_{S_n}(S_n) = r_n$, $C_{S_n}(A) = A, A \neq \{r_n\}; A \neq S_n$. Dan untuk bilangan komposit $C_{S_n}(\{\mathrm{r_n}\}) = C_{S_n}\left(\left\{\mathrm{r}_{\frac{n}{2}}, \mathrm{r_n}\right\}\right) = S_n$; $C_{S_n}\left(\left\{\mathrm{r_n}, r_{\frac{nk}{i}}\right\}\right) = \{\mathrm{r_1}, \mathrm{r_2}, \dots, \mathrm{r_n}\}$;$C_{S_n}(\{\mathrm{r_n}, \mathrm{f_i}\}) = \left\{r_{\frac{n}{2}}, r_n, f_i, f_j\right\}$; $C_{S_n}(A) = \left\{r_{\frac{n}{2}}, r_n\right\}$, $A \neq \left\{\mathrm{r_n}, r_{\frac{nk}{i}}\right\} \neq \{\mathrm{r_n}, \mathrm{f_i}\}$. (4) pola *normalizer* dari S_n, n bilangan prima adalah $N_{S_n}(r_n, f_i) = (r_n, f_i)$, $N_{S_n}(A) = S_n$, $A \neq \{r_n, f_i\}$. Dan untuk bilangan komposit $N_{S_n}(\mathrm{r_n}, \mathrm{f_i}) = \mathrm{r_n}, \mathrm{r}_{\frac{n}{2}}, \mathrm{f_i}, \mathrm{f_j}$; $N_{S_n}\left(\mathrm{r_n}, \mathrm{r}_{\frac{n}{2}}, \mathrm{f_i}, \mathrm{f_j}\right) = S_n$; (5) Pola *center* dari S_n adalah $Z(S_n) = r_n$ untuk n bilangan prima, dan $Z(S_n) = (r_{\frac{n}{2}}, r_n)$ untuk n bilangan komposit.

ABSTRACT

Nisa', Fitrotin. 2011. ***Centralizer*, *Normalizer*, and *Center* of Subgroup from n-Symmetric Group $(S_n,\circ)$.** Thesis. Department of mathematics, faculty of science and technology, The State Islamic University of Maulana Malik Ibrahim Malang.
Advisors: (I) Evawati Alisah, M.Pd
(II) Abdul Aziz, M.Si

Keywords: n-symmetric group $(S_n,\circ)$**,** subgroup, centralizer, normalizer, center

Mathematics has same of branch of science of each it has application with otherof all sorts of disciplines of sciences. One of those branches of science are abstract algebra. Some of the this topic at algebra are centralizer, normalizer, and center of subgroup from n-symmetric group $(S_n,\circ)$. n-symmetric group $(S_n,\circ)$ is finite set consist of n element is one to one function from set S to itself. The number of element from symmetric group is $n!$. Furthermore, subgroup from symmetric group consist of element of rotation and reflection also fulfill axioms of group, that is $S_n = \{r_1, r_2, \dots, r_n, f_1, f_2, \dots, f_n\}$ with r shows the rotation and f shows the reflection. This group is not abelian, so that there is an pattern to determining centralizer, normalizer, and center fromthese subgroup.

In this research, research method the used is method research of book with the following research step: (1) formulating problem; (2) identifying elements from S_3 - S_9; (3) determining subgroupfrom P_3 - P_9; (4) determining centralizer of all subgroup at each S_3 - S_9; (5) determining center of all S_3 - S_9; (6) determining centralizer of all subgroup at each S_3 - S_9; (7) making general pattern of the number of subgroup, type centralizer, normalize, and center subgroup general; (9) making conclusion.

The result from this research are: (1) pattern of the number of subgroup S_n is $a(n) + 3$ for n is prime number, and $a(n) + b(n)$ for n composite number; (2) pattern of centralizer to S_n , n is prime number is $C_{S_n}(r_n) = S_n$, $C_{S_n}(S_n) = r_n$, $C_{S_n}(A) = A, A \neq \{r_n\}; A \neq S_n$. And for composite number is $C_{S_n}(\{\mathrm{r_n}\}) = C_{S_n}\left(\left\{\mathrm{r}_{\frac{n}{2}}, \mathrm{r_n}\right\}\right) = S_n$; $C_{S_n}\left(\left\{\mathrm{r_n}, r_{\frac{nk}{i}}\right\}\right) = \{\mathrm{r_1, r_2, \dots, r_n}\}$;$C_{S_n}(\{\mathrm{r_n, f_i}\}) = \left\{r_{\frac{n}{2}}, r_n, f_i, f_j\right\}$; $C_{S_n}(A) = \left\{r_{\frac{n}{2}}, r_n\right\}$, $A \neq \left\{\mathrm{r_n}, r_{\frac{nk}{i}}\right\} \neq \{\mathrm{r_n, f_i}\}$; (3) pattern of normalizer to S_n , n is prime number is $N_{S_n}(r_n, f_i) = (r_n, f_i)$, $N_{S_n}(A) = S_n$, $A \neq \{r_n, f_i\}$. And for composite number is $N_{S_n}(\mathrm{r_n, f_i}) = \mathrm{r_n}, \mathrm{r}_{\frac{n}{2}}, \mathrm{f_i, f_j}$; $N_{S_n}\left(\mathrm{r_n}, \mathrm{r}_{\frac{n}{2}}, \mathrm{f_i, f_j}\right) = S_n$; (5) pattern of center to S_n , n is prime number is $Z(S_n) = r_n$ and for composite number is $Z(S_n) = (r_{\frac{n}{2}}, r_n)$.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Secara bahasa, kata "matematika" berasal dari bahasa Yunani yaitu "*mathema*" atau mungkin juga "*mathematikos*" yang artinya hal-hal yang dipelajari. Orang Belanda menyebut matematika dengan *wiskunde* yang artinya ilmu pasti. Sedangkan orang Arab menyebut matematika dengan *'ilmu al-hisab*, artinya ilmu berhitung (Abdussakir,2007:5). Sedangkan secara istilah, sampai saat ini belum ada definisi yang tepat mengenai matematika. Definisi-definisi yang dibuat para ahli matematika semuanya benar menurut sudut pandang tertentu. Meskipun belum ada definisi yang tepat, matematika mempunyai ciri khas yang tidak dimiliki pengetahuan lain, yaitu merupakan abstraksi dari dunia nyata, menggunakan bahasa simbol, dan menganut pola pikir deduktif, yaitu pola berpikir yang didasarkan pada kebenaran-kebenaran yang secara umum sudah terbukti kebenarannya.

Sebagaimana sumber ilmu pengetahuan lainnya, sumber studi matematika dalam Islam adalah tauhid, yaitu ke-Esa-an Allah. Akan tetapi al-Qur'an tidak mengangkat metode baru dalam masalah ini, melainkan telah menunjukkan tentang adanya eksistensi dari sesuatu yang ada di balik alam semesta itu sendiri. Alam semesta serta segala isinya diciptakan Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mapan, dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi.

Dalam al-Qur'an surat al-Qamar ayat 49 disebutkan

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَٰهُ بِقَدَرٍ

Artinya: Sesungguhnya kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran.

Ayat diatas menjelaskan bahwa semua yang ada di alam ini ada ukurannya, ada hitung-hitungannya, ada rumus-rumusnya, atau ada persamaannya. Ahli matematika atau fisika tidak membuat suatu rumus sedikitpun. Mereka hanya menemukan rumus atau persamaan (Abdussakir, 2007: 80). Jadi, matematika sebenarnya telah diciptakan sejak zaman dahulu, manusia hanya menyimbolkan fenomena-fenomena yang ada dalam kehidupan sehari-hari.

Manusia dianugerahi Allah petunjuk dengan kedatangan sekian rasul untuk membimbing mereka. Allah juga menganugerahkan akal agar mereka berpikir tentang kebesaran Tuhan. Semua anugerah itu termasuk dalam sistem yang sangat tepat, teliti, dan rapi yang telah ditetapkan Allah SWT. Sebagaimana dalam al-Qur'an surat al-Furqaan ayat 2 berikut:

ٱلَّذِى لَهُۥ مُلْكُ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضِ وَلَمْ يَتَّخِذْ وَلَدًا وَلَمْ يَكُن لَّهُۥ شَرِيكٌ فِى ٱلْمُلْكِ وَخَلَقَ كُلَّ شَيْءٍ فَقَدَّرَهُۥ تَقْدِيرًا ﴿٢﴾

Artinya: Yang kepunyaan-Nya-lah kerajaan langit dan bumi, dan Dia tidak mempunyai anak, dan tidak ada sekutu bagiNya dalam kekuasaan(Nya), dan Dia Telah menciptakan segala sesuatu, dan dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya (Q. S. Al-Furqaan: 2).

Dalam kehidupan di dunia, manusia tidak lepas dari permasalahan. Permasalahan-permasalahan tersebut menyangkut berbagai aspek yang memerlukan suatu pemahaman melalui suatu metode dan ilmu tertentu untuk menyelesaikan masalah tersebut. Matematika merupakan salah satu cabang ilmu yang mendasari berbagai macam ilmu dan selalu menghadapi berbagai permasalahan yang kompleks sehingga penting untuk dipelajari. Ilmu aljabar abstrak merupakan salah satu cabang matematika yang penting dan banyak manfaatnya karena teori-teorinya dapat diterapkan untuk memecahkan masalah dalam kehidupan sehari-hari. Ilmu aljabar yang merupakan bagian dari ilmu matematika, pada dasarnya berkembang pesat karena dia berhubungan dengan himpunan, grup, dan lain sebagainya.

Menurut Raishinghania dan Aggarwal (1991:13), penulis dapat menyimpulkan bahwa grup merupakan sebuah pasangan berurutan $(G,\circ)$ dimana G adalah sebuah himpunan dan " $\circ$ " adalah sebuah operasi biner pada G yang memenuhi aksioma-aksioma tertentu yaitu tertutup, bersifat assosiatif, memuat identitas, dan memuat invers dari setiap elemennya. Seperti konsep dalam himpunan, dalam grup juga terdapat subgrup yaitu jika $(G,\circ)$ grup, $H \subseteq G$, maka $(H,\circ)$ adalah subgrup dari grup $(G,\circ)$ jika $(H,\circ)$ juga grup. Dalam grup juga dipelajari tentang *centralizer*, *normalizer*, dan *center* dari suatu grup yang menunjukkan sifat komutatif dari elemen-elemen tertentu pada grup tersebut.

Grup Simetri-n $(S_n,\circ)$ merupakan himpunan berhingga yang terdiri dari n elemen yang merupakan fungsi satu-satu dari himpunan S ke himpunan S itu sendiri. Jumlah elemen dari grup simetri adalah n!. Grup simetri bukan merupakan grup *abelian*, maka memungkinkan adanya suatu pola dalam menentukan banyaknya subgrup, tipe *centralizer, normalizer*, dan *center* dari grup simetri-n. Akan tetapi, Bagaimana jika *centralizer, normalizer, dan center* dikenakan pada obyek subgrup? Apakah akan terdapat suatu pola seperti pada grupnya? Bagaimana pola yang dihasilkan?

Berdasarkan latar belakang tersebut, peneliti tertarik untuk membahas tentang "*centralizer*, *normalizer*, dan *center* subgrup di grup simetri-*n* $(S_n,\circ)$ " dengan harapan dapat lebih memperdalam materi dan dapat memberikan referensi yang berhubungan dengan penelitian tersebut. Hasil dari penelitian ini dapat dijadikan teorema sebagai tambahan pustaka perkuliahan, khususnya bidang aljabar.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, rumusan masalah dalam penelitian ini adalah:

1. Bagaimana pola banyaknya subgrup dari subgrup simetri-*n* $(S_n,\circ)$ yang terdiri dari elemen rotasi dan refleksi?
2. Bagaimana pola *centralizer* subgrup di subgrup simetri-*n* $(S_n,\circ)$ yang terdiri dari elemen rotasi dan refleksi?
3. Bagaimana pola *normalizer* subgrup di subgrup simetri-*n* $(S_n,\circ)$ yang terdiri dari elemen rotasi dan refleksi?
4. Bagaimana pola *center* dari subgrup simetri-*n* $(S_n,\circ)$ yang terdiri dari elemen rotasi dan refleksi?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, tujuan dari penelitian ini adalah:

1. Mengetahui pola banyaknya subgrup dari subgrup simetri-n $(S_n,\circ)$ yang terdiri dari elemen rotasi dan refleksi.
2. Mengetahui pola *centralizer* subgrup di subgrup simetri-n $(S_n,\circ)$ yang terdiri dari elemen rotasi dan refleksi.
3. Mengetahui pola *normalizer* subgrup di subgrup simetri-n $(S_n,\circ)$ yang terdiri dari elemen rotasi dan refleksi.
4. Mengetahui pola *center* dari subgrup simetri-n $(S_n,\circ)$ yang terdiri dari elemen rotasi dan refleksi.

1.4 Batasan Masalah

Dalam penelitian ini, subgrup dari grup simetri yang digunakan adalah terdiri dari elemen rotasi dan refleksi yang juga memenuhi aksioma-aksioma grup.

1.5 Manfaat Penelitian

1. Bagi Penulis

   Peneliti memperoleh tambahan pengetahuan tentang Aljabar Abstrak, khususnya tentang *centralizer*, *normalizer*, dan *center* subgrup dari subgrup dari subgrup simetri-n $(S_n,\circ)$ yang terdiri dari elemen rotasi dan refleksi.

2. Bagi Lembaga

   Sebagai tambahan pustaka untuk bahan perkuliahan tentang *centralizer*, *normalizer*, dan *center* subgrup dari subgrup dari subgrup simetri-*n* $(S_n,\circ)$ yang terdiri dari elemen rotasi dan refleksi.

3. Bagi Pembaca

   Pembaca memperoleh pengetahuan tambahan mengenai salah satu materi disiplin ilmu Matematika, yaitu bidang Aljabar Abstrak, khususnya tentang *centralizer*, *center*, dan *normalizer* subgrup dari subgrup dari subgrup simetri-*n* $(S_n,\circ)$ yang terdiri dari elemen rotasi dan refleksi.

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode studi literatur yaitu penelitian yang dilakukan dengan mengumpulkan teori dan informasi yang berhubungan dengan penelitian dengan bantuan referensi yang terdapat di ruang perpustakaan seperti buku-buku.

Adapun langkah-langkah yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Identifikasi masalah mengenai permasalahan yang ada pada *centralizer*, *normalizer*, dan *center* subgrup dari grup grup simetri-*n* $(S_n,\circ)$.
2. Mengumpulkan sumber-sumber referensi pendukung dari internet yang berupa definisi, sifat-sifat, dan teorema-teorema tentang grup, subgrup, *centralizer*, *normalizer*, dan *center*, dan grup simetri-*n* $(S_n,\circ)$.

3. Merumuskan masalah tentang *centralizer*, *normalizer*, dan *center* subgrup dari grup simetri-*n* $(S_n,\circ)$.
4. Mengumpulkan data berupa penentuan subgrup, *centralizer*, *normalizer*, dan *center*, dari grup simetri-*n* $(S_n,\circ)$ yang dimulai dari $n = 3$ sampai dengan $n = 9$.
5. Menganalisis penentuan pola:
   a. Mengidentifikasi unsur-unsur dari S_3 sampai dengan S_9.
   b. Menentukan subgrup dari grup simetri-3 $(S_3,\circ)$ sampai dengan grup simetri -*n* $(S_n,\circ)$.
   c. Menentukan *centralizer* semua subgrup pada masing-masing grup simetri-3 $(S_3,\circ)$ sampai dengan grup simetri-*n* $(S_n,\circ)$.
   d. Menentukan *center* semua grup simetri-3 $(S_3,\circ)$ sampai dengan grup simetri-*n* $(S_n,\circ)$.
   e. Menentukan *normalizer* semua subgrup pada masing-masing grup simetri-3 $(S_3,\circ)$ sampai dengan grup simetri-*n* $(S_n,\circ)$.
   f. Membuat pola umum banyaknya subgrup dari grup simetri-*n* $(S_n,\circ)$, tipe dari *centralizer*, *normalizer*, dan *center* subgrup di grup simetri-*n* $(S_n,\circ)$.
   g. Membuktikan pola umum banyaknya subgrup di grup simetri-*n* $(S_n,\circ)$, tipe dari *centralizer*, *normalizer*, dan *center* subgrup di grup simetri-*n* $(S_n,\circ)$.
6. Merumuskan kesimpulan dari hasil pembahasan yang telah dikemukakan berdasarkan rumusan masalah.

1.7 Sistematika Penulisan

Untuk mempermudah pembaca memahami tulisan ini, penulis membagi tulisan ini kedalam empat bab sebagai berikut:

1. BAB I PENDAHULUAN : Dalam bab ini dijelaskan mengenai latar belakang masalah, permasalahan, batasan permasalahan, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika pembahasan
2. BAB II KAJIAN TEORI : Dalam bab ini dikemukakan hal-hal yang mendasari dalam teori yang dikaji, yaitu definisi grup beserta contohnya, sifat-sifat sederhana grup beserta teorema dan bukti, definisi centralizer, definisi normalizer, dan definisi center, dan definisi grup simetri beserta contohnya.
3. BAB III PEMBAHASAN : Bab ini membahas tentang analisis penentuan pola yang diperoleh berupa subgrup-subgrup dan banyaknya subgrup, tipe *centralizer*, *normalizer* , dan *center* subgrup dari grup grup simetri-*n* $(s_n,\circ)$, dan pola-pola umum beserta buktinya.
4. BAB IV PENUTUP : Dalam bab ini dikemukakan kesimpulan akhir penelitian dan beberapa saran bagi pembaca dan peneliti selanjutnya.

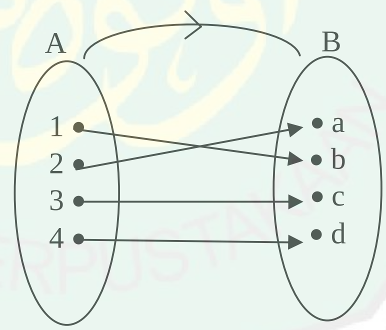
BAB II

KAJIAN TEORI

2.1 Fungsi

Definisi 1:

Misalkan X dan Y adalah dua himpunan yang tidak kosong. Suatu fungsi f dari X ke Y, dilambangkan dengan $f: X \rightarrow Y$, adalah aturan yang memetakan setiap elemen X tepat satu pada elemen Y. X adalah domain dari fungsi dan Y adalah himpunan kodomainnya. Jika y adalah elemen yang unik di Y dipetakan oleh fungsi f ke elemen x, kita katakan bahwa y adalah peta dari x dan x adalah prapeta dari y dan kita tulis $y = f(x)$. Himpunan $f(X)$ disebut range fungsi. Range fungsi adalah himpunan bagian dari kodomainnya (Balakrishnan, 1991:7).



Gambar 2.1 Fungsi f

Himpunan $f = \{(1, b), (2, a), (3, c), (4, d)\}$ merupakan fungsi dari $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ke $B = \{a, b, c, d\}$. Setiap elemen dari A dipetakan tepat satu pada B, 1 dipetakan tepat satu ke b, 2 dipetakan tepat satu ke a, 3 dipetakan tepat satu ke c, 4 dipetakan tepat satu ke d. Hal ini dapat ditunjukkan pada gambar 2.1. Gambar seperti pada gambar 2.1 biasa disebut dengan diagram panah.

Definisi 2:

a) Misalkan f adalah fungsi dari A ke B. Fungsi f disebut fungsi 1-1 jika untuk setiap $x, y \in A$ dengan $f(x) = f(y)$, maka $x = y$. Dengan kata lain dapat dinyatakan bahwa fungsi f adalah 1-1 jika untuk setiap $x, y \in A$ dengan $x \neq y$, maka $f(x) \neq f(y)$. Fungsi 1-1 sering juga disebut dengan fungsi injektif (Bartle dan Sherbert, 2000:8).

b) Misalkan A dan B adalah himpunan, dan f adalah fungsi dari A ke B. Fungsi f disebut *fungsi onto* jika $R(f) = B$. Jadi, $f: A \rightarrow B$ disebut fungsi onto jika untuk setiap $y \in B$ maka ada $x \in A$ sehingga $f(x) = y$. Fungsi onto sering disebut juga fungsi surjektif atau fungsi pada (Bartle dan Sherbert, 2000:8).

c) Suatu fungsi yang sekaligus injektif dan surjektif disebut fungsi bijektif (Bartle dan Sherbert, 2000:8).

2.2 Bilangan Prima dan Keterbagian

Jika p adalah suatu bilangan bulat positif lebih dari 1 $(p > 1)$ yang hanya mempunyai pembagi positif 1 dan p, maka p disebut bilangan prima. Jika suatu bilangan bulat $q > 1$ bukan suatu bilangan prima, maka q disebut bilangan komposit (Muhsetyo, 1997: 92).

Contoh: Bilangan-bilangan 2, 3, dan 5 adalah bilangan-bilangan prima, sebab:

- 2 adalah bilangan positif yang hanya mempunyai pembagi positif 1 dan 2
- 3 adalah bilangan positif yang hanya mempunyai pembagi positif 1 dan 3

- 5 adalah bilangan positif yang hanya mempunyai pembagi positif 1 dan 5

Bilangan-bilangan $4, 6,$ dan 15 adalah bilangan-bilangan komposit, sebab:

- 4 adalah bilangan positif yang mempunyai pembagi-pembagi positif 1, 2, dan 4, tidak hanya 1 dan 4
- 6 adalah bilangan positif yang mempunyai pembagi-pembagi positif 1, 2, 3, dan 6, tidak hanya 1 dan 6
- 8 adalah bilangan positif yang mempunyai pembagi-pembagi positif 1, 3, 5, dan 15, tidak hanya 1 dan 15

Suatu bilangan bulat n adalah habis dibagi oleh suatu bilangan bulat $m \neq 0$ jika ada suatu bilangan bulat x sehingga $n = mx$, dinotasikan dengan $m|n$ (dibaca m membagi n, n habis dibagi m, m faktor n, atau n kelipatan dari m) dan $m \nmid n$ (dibaca m tidak membagi n, n tidak habis dibagi m, m bukan faktor n, atau n bukan kelipatan dari m). Jika suatu bilangan bulat dibagi oleh suatu bilangan bulat lain, maka hasil pembagiannya adalah bilangan bulat atau bukan bilangan bulat. Misalnya jika 30 dibagi 5 maka hasil baginya adalah bilangan bulat 6; tetapi jika 30 dibagi 4, maka hasil baginya adalah 7,5 bukan bilangan bulat (Muhsetyo, 1997: 43).

2.3 Grup

2.3.1 Operasi Biner

Dummit dan Foote (1980: 17) menyebutkan definisi dari operasi biner sebagai berikut:

1. Operasi biner " $\circ$ " pada suatu himpunan G adalah suatu fungsi $\circ: G \times G \to G$. Untuk setiap $a, b \in G$ dapat dituliskan $a \circ b$ untuk $\circ\,(a, b)$.
2. Suatu operasi biner " $\circ$ " pada suatu himpunan G adalah assosiatif jika untuk setiap $a, b, c \in G, a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$.
3. Jika " $\circ$ " operasi biner pada suatu himpunan G, elemen-elemen $a, b \in G$ dikatakan komutatif jika $a \circ b = b \circ a$. Dikatakan " $\circ$ " (atau G) komutatif jika untuk setiap $a, b \in G, a \circ b = b \circ a$.

Contoh: Misalkan B = himpunan bilangan bulat. Operasi + (penjumlahan) pada B merupakan operasi biner, sebab operasi + merupakan pemetaan dari $(B \times B) \to B$, yaitu $\forall (a, b) \in B \times B$ maka $(a + b) \in B$. Jumlah dua bilangan bulat adalah suatu bilangan bulat pula. Operasi ÷ (pembagian) pada B bukan merupakan operasi biner pada B sebab terdapat $(a, b) \in B \times B$ sedemikian sehingga $(a \div b) \notin B$, misalnya $(3,4) \in B \times B$ dan $(3:4) \notin B$ (Sukirman, 2005: 35).

2.3.2 Definisi Grup

Misalkan G adalah himpunan yang tidak kosong dan operasi $\circ$ pada G adalah suatu operasi biner, maka menurut Raishinghania dan Aggarwal (1991:13) adalah himpunan G bersama-sama dengan operasi biner $\circ$ atau ditulis $(G,\circ)$ adalah suatu grup, bila memenuhi aksioma berikut, yaitu:

1. operasi $\circ$ bersifat assosiatif

   $\forall a, b, c \in G, (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$

Yaitu setiap himpunan G yang beranggotakan a, b, c, maka berlaku sembarang operasi biner dengan mendahulukan komponen-komponen yang satu dan atau mengemudiankan komponen-komponen berikutnya.

2. G memuat elemen identitas, misal I

$\exists e \in G \ni \forall a \in G$ berlaku $a \circ I = I \circ a = a$

Yaitu himpunan G mempunyai satu elemen identitas yang mengakibatkan setiap anggota dari G yang apabila dioperasikan dengan identitas tersebut akan menghasilkan elemen itu sendiri beserta komutatifnya.

3. setiap unsur G mempunyai invers di dalam G pula.

$\forall a \in G, \exists a^{-1} \in G, a^{-1}$ adalah invers dari a, sedemikian sehingga $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = I$

Yaitu Setiap himpunan G yang beranggotakan a, b, c, maka elemen tersebut akan mempunyai invers yang merupakan elemen G pula.

Jika $(G, \circ)$ suatu grup yang memenuhi sifat komutatif, yaitu $\forall a \circ b \in G$ berlaku $a \circ b = b \circ a$, maka $(G,\circ)$ disebut grup komutatif atau grup *abelian*.

Dari definisi grup di atas dapat disimpulkan bahwa suatu himpunan G yang tidak kosong, dimana himpunan G dengan operasi $\circ$ dikatakan sebagai grup jika memenuhi operasi $\circ$ bersifat tertutup, operasi $\circ$ bersifat assosiatif, G memuat elemen identitas, dan setiap unsur G mempunyai invers di dalam G pula.

Contoh: Misalkan $\mathbb{Z}$ adalah himpunan bilangan bulat, maka $(\mathbb{Z}, +)$ adalah grup karena berlaku:

1. Untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$ maka $(a + b) \in \mathbb{Z}$. Jadi, operasi $+$ adalah operasi biner pada $\mathbb{Z}$, atau dengan kata lain operasi $+$ (penjumlahan) tertutup di $\mathbb{Z}$.

2. Untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}$ maka $a + (b + c) = (a + b) + c$. Jadi, $\mathbb{Z}$ dengan operasi $+$ (penjumlahan) memenuhi sifat assosiatif.
3. Terdapat elemen identitas yaitu $0 \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $a + 0 = 0 + a = a$, untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$.
4. Untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$ terdapat a^{-1} yaitu $(-a) \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga

$$a + (-a) = (-a) + a = 0$$

Elemen $(-a)$ adalah invers dari a.

Karena himpunan $\mathbb{Z}$ dengan operasi + (penjumlahan) memenuhi aksioma-aksioma grup, maka $(\mathbb{Z}, +)$ adalah grup.

2.3.3 Sifat-Sifat Grup

Jika G adalah sebuah grup dengan operasi $\circ$ $(G,\circ)$, maka menurut Dummit dan Foote (1991: 19) berlaku:

(1) Identitas di G adalah tunggal

(2) Untuk setiap $a \in G, a^{-1}$ adalah tunggal

Bukti :

Bukti dari sifat-sifat grup (1) dan (2) menurut Dummit dan Foote (1991: 19) :

(1) Jika f dan g keduanya identitas, $f, g \in G$, maka dengan aksioma dari definisi grup $f \circ g = f$ (ambil $a = f$ dan $I = g$). Dengan aksioma yang sama $f \circ g = g$ (ambil $a = g$ dan $I = f$). Jadi, $f = g$. Jadi, identitas dari G adalah tunggal.

(2) Diasumsikan b dan c keduanya invers dari a, misal I identitas dari G. Dengan $a \circ b = I$ dan $c \circ a = I$, sehingga

$c = c \circ I$ [definisi I]

$= c \circ (a \circ b)$ [$I = a \circ b$]

$= (c \circ a) \circ b$ [sifat assosiatif]

$= I \circ b$ [$I = c \circ a$]

$= b$ [definisi I]

Jadi, $c = b$. Jadi, invers dari a adalah tunggal.

Teorema

Misalkan G suatu grup, maka menurut Sukirman (2005:47) adalah untuk setiap $a, b \in G$ berlaku:

1. $(a^{-1})^{-1} = a$ dan
2. $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$

Bukti

1. Misalkan $(G,\circ)$ adalah sebuah grup dengan operasi $\circ$, maka untuk setiap $a \in G$ terdapat $a^{-1} \in G$, sehingga diperoleh $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = I$ (I adalah elemen identitas).

(i) $a \circ a^{-1} = I$

$(a \circ a^{-1}) \circ (a^{-1})^{-1} = I \circ (a^{-1})^{-1}$

$a \circ (a^{-1} \circ (a^{-1})^{-1}) = (a^{-1})^{-1}$ [menggunakan sifat assosiatif]

$a \circ I = (a^{-1})^{-1}$

$a = (I^{-1})^{-1}$

(ii) $a^{-1} \circ a = I$

$(a^{-1})^{-1} \circ (a^{-1} \circ a) = (a^{-1})^{-1} \circ I$

$((a^{-1})^{-1} \circ a^{-1}) \circ a = (a^{-1})^{-1}$ [menggunakan sifat assosiatif]

$I \circ a = (a^{-1})^{-1}$

$a = (a^{-1})^{-1}$

Dari pembuktian (i) dan (ii), maka terbukti bahwa $(a^{-1})^{-1} = a$.

2. Misalkan $c = (a \circ b)^{-1}$, maka diperoleh $(a \circ b) \circ c = I$. Dengan menggunakan sifat assosiatif diperoleh $a \circ (b \circ c) = I$. Kedua ruas dioperasikan dengan a^{-1} dari kiri untuk memperoleh bentuk:

$a^{-1} \circ (a \circ (b \circ c)) = a^{-1} \circ I$

Jika pada ruas kiri dikenakan sifat assosiatif dan pada ruas kanan dikenakan definisi identitas I, maka diperoleh:

$(a^{-1} \circ a) \circ (b \circ c) = a^{-1}$

$I \circ (b \circ c) = a^{-1}$ [definisi identitas]

$(b \circ c) = a^{-1}$ [definisi identitas]

Kedua ruas dioperasikan dengan b^{-1}, maka diperoleh:

$b^{-1} \circ (b \circ c) = b^{-1} \circ a^{-1}$

$(b^{-1} \circ b) \circ c = b^{-1} \circ a^{-1}$ [menggunakan sifat assosiatif]

$I \circ c = b^{-1} \circ a^{-1}$ [definisi identitas]

$c = b^{-1} \circ a^{-1}$ [definisi identitas]

$(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$ [definisi c]

Jadi terbukti bahwa $(a \circ b)^{-1} = (b^{-1}) \circ (a^{-1})$.

Teorema sifat penghapusan atau kanselasi

Jika G suatu grup, maka untuk setiap $a, b, c \in G$ berlaku:

(i) jika ab = ac, maka b = c (sifat kanselasi kiri)

(ii) jika ac = bc, maka a = b (sifat kanselasi kanan) (Sukirman,2005:47).

Bukti

i) Ambil sembarang $a, b, c \in G$ dan diketahui bahwa $a \circ b = a \circ c$, maka

$a^{-1} \circ (a \circ b) = a^{-1} \circ (a \circ c)$ [G grup dan $a \in G$, maka $a^{-1} \in G$]

$(a^{-1} \circ a) \circ b = (a^{-1} \circ a) \circ c$ [sifat assosiatif]

$I \circ b = I \circ c$ [definisi identitas]

$b = c$

ii) Ambil sembarang $a, b, c \in G$ dan diketahui bahwa $a \circ c = b \circ c$, maka

$(a \circ c) \circ c^{-1} = (b \circ c) \circ c^{-1}$ [G grup dan $c \in G$, maka $c^{-1} \in G$]

$a \circ (c \circ c^{-1}) = b \circ (c \circ c^{-1})$ [sifat assosiatif]

$a \circ I = b \circ I$ [definisi identitas]

$a = b$

2.4 Subgrup

Sub himpunan tak-kosong H dari suatu grup G dikatakan subgrup dari G jika H membentuk grup terhadap operasi yang sama pada grup G (Herstein, 1975: 37).

Bila (G, ∘) suatu grup dan H subset tidak kosong dari G. maka (H, ∘) disebut subgrup dari (G, ∘) bila

(i) $a, b \in H$ untuk tiap $a \circ b \in H$ (tertutup)

(ii) $a^{-1} \in H$ untuk tiap $a \in H$ (keberadaan invers) (Wahyudin,1989:74).

Bukti:

Untuk membuktikan teorema tersebut, perlu dibuktikan kondisi perlu dan kondisi cukup bagi subgrup. Kondisi perlu bagi subgrup adalah jika $(H,\circ) \leq (G,\circ)$ maka $\forall a, b \in H$ berlaku $a \circ b \in H$ dan $a^{-1} \in H$. Sedangkan kondisi cukup bagi subgrup adalah jika $H \subseteq G, H \neq \emptyset$ dan $a \circ b^{-1} \in H$ maka $(H,\circ) \leq (G,\circ)$.

Kondisi perlu:

$(H,\circ) \leq (G,\circ)$ maka $\forall a, b \in H$ berlaku $a \circ b \in H$ dan $a^{-1} \in H$

Diketahui $(H,\circ) \leq (G,\circ)$ maka H adalah sebuah grup, sehingga memenuhi aksioma-aksioma grup yaitu untuk setiap $a, b, c \in H$, maka berlaku sifat assosiatif, H memuat elemen identitas, dan H memuat invers dari setiap elemennya. Akan ditunjukkan bahwa untuk setiap $a, b, c \in H$ berlaku $a \circ b \in H$ dan $a^{-1} \in H$. Karena H adalah grup. Karena H grup maka berlaku sifat ketertutupan yaitu untuk setiap $a, b \in H$ maka $a \circ b \in H$ dan H juga memuat invers dari setiap elemennya yaitu $a^{-1}, b^{-1} \in H$. Karena $a^{-1}, b^{-1} \in H$ maka berlaku $a \circ b^{-1} \in H$ atau $a^{-1} \circ b \in H$ (sifat tertutup terhadap operasi "$\circ$"). Jadi kondisi perlu bagi subgrup telah terpenuhi.

Kondisi cukup:

Diketahui $H \subseteq G, H \neq \emptyset$ dan $a \circ b^{-1} \in H$

Akan ditunjukkan bahwa $(H,\circ) \leq (G,\circ)$.

H adalah sub himpunan dari G yang memenuhi (1) dan (2). Untuk menunjukkan bahwa H subgrup perlu ditunjukkan bahwa $I \in H$ dan bahwa berlaku sifat assosiatif untuk semua elemen dari H. Karena sifat assosiatif berlaku di G, maka hal ini juga terpenuhi untuk sub himpunan dari G yaitu H. Jika $a \in H$, menurut (2), $a^{-1} \in H$ dan dengan (1), $I = a \circ a^{-1} \in H$. Sehingga kondisi cukup bagi subgrup terpenuhi. Karena kondisi perlu dan kondisi cukup bagi subgrup telah terpenuhi, maka teorema terbukti.

2.5 Centralizer

Misalkan $(G,\circ)$ grup dengan operasi " $\circ$ " dan A sub himpunan tak-kosong dari G, *centralizer* A di G didefinisikan $C_G(A) = \{g \in G | g \circ a \circ g^{-1} = a$ untuk semua $a \in A\}$. Karena $g \circ a \circ g^{-1} = a$ jika dan hanya jika $g \circ a = a \circ g$. Dengan kata lain, $C_G(A)$ adalah himpunan elemen dari G yang komutatif dengan setiap elemen dari A (Dummit dan Foote, 1991:48).

Centralizer A di G adalah subgrup dari G. $C_G(A) \neq 0$ karena $I \in C_G(A)$ sesuai dengan definisi dari identitas yang menetapkan bahwa $I \circ a = a \circ I$, untuk setiap $a \in G$ (khususnya untuk setiap $a \in A$). Jadi, I memenuhi definisi untuk keanggotaan di $C_G(A)$.

Kedua, diasumsikan $x, y \in C_G(A)$, yaitu untuk setiap $a \in A, x \circ a \circ x^{-1} = a$ dan $y \circ a \circ y^{-1} = a$. Tetapi, hal ini tidak berarti bahwa $x \circ y = y \circ x$. Karena $y \circ a \circ y^{-1} = a$, kedua ruas terlebih dahulu dioperasikan dengan y^{-1} pada ruas kiri, dan dengan y pada ruas kanan. Kemudian diperoleh $a = y^{-1} \circ a \circ y$, yaitu $y^{-1} \in C_G(A)$ sedemikian sehingga $C_G(A)$ tertutup. Selanjutnya

$(x \circ y) \circ a \circ (x \circ y)^{-1} = (x \circ y) \circ a \circ (y^{-1} \circ x \circ^{-1})$ [sifat-sifat grup]

$= x \circ (y \circ a \circ y^{-1}) \circ x^{-1}$ [sifat assosiatif]

$= x \circ a \circ x^{-1}$ [$y \in C_G(A)$]

$= a$ $[x \in C_G(A)]$

Jadi, $x, y \in C_G(A)$ dan $C_G(A)$ tertutup terhadap suatu operasi tertentu, jadi $C_G(A) \leq G$.

Contoh: Misalkan $(S_3, \circ)$ adalah grup, $S_3 = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \theta\}$, dan A merupakan subgrup dari S_3, $A = \{\gamma, \delta\}$, maka *centralizer* A di S_3 dapat dicari dengan menggunakan tabel cayley, yaitu:

Tabel 2.1: Tabel Cayley dari Grup Simetri-3

$\circ$	α	β	γ	δ	ε	θ
α	β	γ	α	θ	δ	ε
β	γ	α	ε	ε	θ	δ
γ	α	β	γ	δ	ε	θ
δ	ε	θ	δ	γ	α	β
ε	θ	δ	ε	β	γ	α
θ	δ	ε	θ	α	β	γ

Sumber: Analisis penulis (2011:7)

Dari tabel tersebut diperoleh invers tiap-tiap elemennya sebagai berikut:

$\alpha^{-1} = \beta$; $\beta^{-1} = \alpha$; $\gamma^{-1} = \gamma$; $\delta^{-1} = \delta$; $\varepsilon^{-1} = \varepsilon$; $\theta^{-1} = \theta$

Centralizer A di grup simetri-3 $(S_3, \circ)$, yaitu:

$\alpha \in S_3$ maka $\alpha \circ \delta \circ \alpha^{-1} = \varepsilon$

$\beta \in S_3$ maka $\beta \circ \delta \circ \beta^{-1} = \theta$

$\gamma \in S_3$ maka $\gamma \circ \gamma \circ \gamma^{-1} = \gamma$

$\gamma \circ \delta \circ \gamma^{-1} = \delta$

$\delta \in S_3$ maka $\delta \circ \delta \circ \delta^{-1} = \delta$

$\varepsilon \in S_3$ maka $\varepsilon \circ \delta \circ \varepsilon^{-1} = \theta$

$\theta \in S_3$ maka $\theta \circ \delta \circ \theta^{-1} = \varepsilon$

Karena pada $\alpha, \beta, \delta, \varepsilon, \theta \in S_3$ terdapat sedikitnya satu elemen yang tidak memenuhi definisi *centralizer*, maka elemen tersebut bukan merupakan *centralizer* dari grup simetri-3.

Jadi, *centralizer* dari A di grup simetri-3 $(S_3,\circ)$ adalah $\{\gamma\}$, atau dapat dinyatakan dalam bentuk $C_{S_3}(\{\gamma, \delta\}) = \{\gamma\}$.

2.6 Normalizer

Misalkan $(G,\circ)$ grup dan A sub himpunan tak-kosong dari G, *normalizer* A di G didefinisikan $N_G(A) = \{g \in G | g \circ A \circ g^{-1} = A\}$ dengan $g \circ A \circ g^{-1} = \{g \circ a \circ g^{-1} | a \in A\}$ (Dummit dan Foote, 1991: 49).

Dengan kata lain, *normalizer* A di G adalah himpunan elemen di G yang memenuhi $g \circ A \circ g^{-1} \in A$.

Contoh:

Misalkan $(S_3,\circ)$ adalah grup, $S_3 = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \theta\}$, dan A merupakan subgrup dari S_3, $A = \{\gamma, \varepsilon\}$, maka *normalizer* A di S_3 adalah sebagai berikut:

$\alpha \in S_3$ maka $\alpha \circ \{\gamma, \varepsilon\} \circ \alpha^{-1} = \{\gamma, \theta\}$

$\beta \in S_3$ maka $\beta \circ \{\gamma, \varepsilon\} \circ \beta^{-1} = \{\gamma, \delta\}$

$\gamma \in S_3$ maka $\gamma \circ \{\gamma, \varepsilon\} \circ \gamma^{-1} = \{\gamma, \varepsilon\}$

$\delta \in S_3$ maka $\delta \circ \{\gamma, \varepsilon\} \circ \delta^{-1} = \{\gamma, \theta\}$

$\varepsilon \in S_3$ maka $\varepsilon \circ \{\gamma, \varepsilon\} \circ \varepsilon^{-1} = \{\gamma, \varepsilon\}$

$\theta \in S_3$ maka $\theta \circ \{\gamma, \varepsilon\} \circ \theta^{-1} = \{\gamma, f_1\}$

Karena pada $\alpha, \beta, \delta, \varepsilon, \theta \in S_3$ tidak memenuhi definisi *normalizer*, maka elemen tersebut bukan merupakan *normalizer*.

Jadi *normalizer* dari A di grup permutasi-*3* $(S_3,\circ)$ adalah $\{\gamma\}$, atau dapat dinyatakan dalam bentuk $N_{S_3}(\{\gamma,\varepsilon\}) = \{\gamma\}$.

2.7 Center

Misalkan $(G,\circ)$ grup dan A sub himpunan tak-kosong dari G, *center* dari G didefinisikan $Z(G) = \{g \in G | gx = xg, \forall\, x \in G\}$. Dengan kata lain *center* dari G merupakan himpunan elemen-elemen yang komutatif dengan semua elemen dari G (Dummit dan Foote, 1991: 49).

Jika diperhatikan kembali *centralizerA* di grup G yaitu

$$C_G(A) = \{g \in G | g \circ a = a \circ g, \forall a \in A\}$$

Bila A diganti dengan G maka menjadi

$$C_G(A) = \{g \in G | g \circ a = a \circ g, \forall a \in A\}$$

sehingga definisi tersebut akan sama dengan definisi $Z(G)$. Dengan demikian dapat dikatakan bahwa *center* dari G adalah *centralizer* G di G, atau $Z(G) = C_G(G)$.

Contoh: Misalkan $(S_3,\circ)$ adalah grup, $S_3 = \{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\theta\}$, maka *center* dari S_3 adalah:

$r_1 \in S_3$, terdapat elemen yang tidak komutatif yaitu $\alpha \circ \delta \neq \delta \circ \alpha$

$\beta \in S_3$, terdapat elemen yang tidak komutatif yaitu $\beta \circ \delta \neq \delta \circ \beta$

$\gamma \in S_3$ maka $\alpha \circ \gamma = \gamma \circ \alpha$

$$\beta \circ \gamma = \gamma \circ \beta$$

$$\gamma \circ \gamma = \gamma \circ \gamma$$

$$\delta \circ \gamma = \gamma \circ \delta$$

$$\varepsilon \circ \gamma = \gamma \circ \varepsilon$$

$$\theta \circ \gamma = \gamma \circ \theta$$

$\delta \in S_3$, terdapat elemen yang tidak komutatif yaitu $\delta \circ \alpha \neq \circ\, \alpha \circ \delta$

$\varepsilon \in S_3$, terdapat elemen yang tidak komutatif yaitu $\varepsilon \circ \alpha \neq \circ\, \alpha \circ \varepsilon$

$\theta \in S_3$, terdapat elemen yang tidak komutatif yaitu$\theta \circ \alpha \neq \circ\, \alpha \circ \theta$

Karena pada $\alpha, \beta, \delta, \varepsilon, \theta \in S_3$ terdapat sedikitnya satu elemen yang tidak komutatif, maka *Center* dari S_3 adalah $\{\gamma\}$. Atau dapat dinyatakan dalam bentuk $Z_{S_3} = \{\gamma\}$.

2.8 Grup Simetri

Banyaknya elemen dari himpunan berhingga tersebut disebut derajat permutasi. Misalkan $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ adalah himpunan berhingga yang terdiri dari n elemen yang berbeda dan misalkan f adalah fungsi satu-satu dari S ke S, maka sesuai definisi f adalah permutasi berderajat n. Misalkan S adalah himpunan berhingga yang terdiri dari n elemen yang berbeda, maka terdapat sebanyak $n!$ cara menyusun elemen-elemen S. Dengan kata lain, banyaknya permutasi berderajat n yang berbeda yang terdefinisi pada S adalah $n!$. Himpunan yang terdiri dari $n!$ permutasi berderajat n yang berbeda disebut himpunan simetri dari permutasi berderajat n dan dinyatakan dengan S_n (Raisinghania dan Aggarwal, 1980: 115).

Misalkan Ω adalah sebarang himpunan tak kosong dan misal S_Ω adalah himpunan yang memuat semua fungsi-fungsi bijektif dari Ω ke Ω (atau himpunan yang memuat permutasi dari Ω). Himpunan S_Ω dengan operasi komposisi "$\circ$

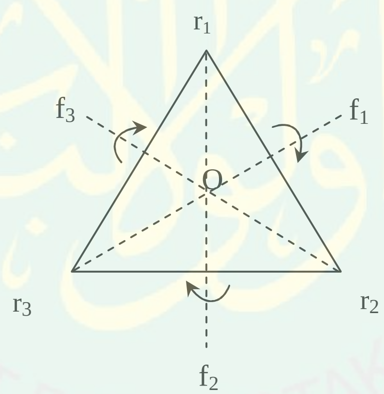
" atau $(S_\Omega,\circ)$ adalah grup. Operasi komposisi "$\circ$" adalah operasi biner pada S_Ω karena jika $\alpha: \Omega \rightarrow \Omega$ dan $\beta: \Omega \rightarrow \Omega$ adalah fungsi-fungsi bijektif maka $\alpha \circ \beta$ juga fungsi bijektif. Operasi "$\circ$" yang merupakan komposisi fungsi adalah bersifat assosiatif. Identitas dari S_Ω adalah permutasi 1 yang didefinisikan oleh $1(a) = a, \forall a \in \Omega$. Untuk setiap $\alpha: \Omega \rightarrow \Omega$ maka terdapat fungsi invers yaitu $\alpha: \Omega \rightarrow \Omega$ yang memenuhi $\alpha \circ \alpha^{-1} = \alpha^{-1} \circ \alpha = 1$. Dengan demikian semua aksioma grup telah dipenuhi oleh S_Ω dengan operasi "$\circ$". Grup $(S_\Omega,\circ)$ disebut sebagai grup simetri pada himpunan Ω (Dummit dan Foote,1991: 28).

Misalkan $S = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ dan f suatu pemetaan 1-1 dari S ke S, maka S merupakan suatu permutasi tingkat n. Misalkan $f(a_1) = b_1, f(a_2) = b_2, \dots, f(a_n) = b_n$ dengan $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\} = \{b_1, b_2, b_3, \dots, b_n\}$, dua himpunan yang sama ini mempunyai urutan elemen yang berbeda. Untuk selanjutnya kita akan menuliskan permutasi dengan notasi matriks dua baris. Peta dari setiap elemennya ditulis tepat di bawahnya seperti berikut ini.

$$f = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix}$$

Permutasi f yang hanya terdiri dari satu sikel disebut permutasi siklik. Sikel yang tidak mempunyai elemen persekutuan dikatakan sikel-sikel yang saling asing. Suatu permutasi yang sikel-sikelnya hanya terdiri atas satu elemen berarti setiap elemennya invarian, maka permutasi itu adalah suatu permutasi identitas. Penulisan permutasi identitas dengan diwakili oleh sebuah sikelnya, yaitu sikel dengan salah satu elemen dari himpunannya, misalnya $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, maka cukup ditulis $f = (1)$. Menurut Sulandra (1994:109), unsur kedua pada setiap permutasi merupakan hasil rotasi (perputaran) pada suatu sudut tertentu, yaitu $\frac{360^0 \mathrm{k}}{n}$, untuk suatu bilangan positif k, atau hasil refleksi (pencerminan) terhadap suatu garis bagi dari bangun geometri tertentu, misalnya bangun geometri segi-n yang beraturan.

Contoh 1: Misalkan $S_3 = (1 \quad 2 \quad 3)$ yang mewakili segitiga beraturan atau segitiga sama sisi. Maka menurut Sukirman (1994;185) segitiga samasisi tersebut dapat dimasukkan dalam bingkainya dalam 6 cara. Dalam hal ini dapat dikatakan bahwa ada 6 transformasi sehingga segitiga samasisi tersebut dikatakan invarian. Keenam transformasi tersebut adalah tiga rotasi dan tiga refleksi yang ditunjukkan dalam gambar berikut:



Gambar 2.2 Gambar Simetri-3

Elemen rotasi dari S_3 tersebut ditentukan dengan cara mencari simetri putar dari segitiga sama sisi tersebut, yaitu:

r_1 = rotasi 120° = α

$$\text{Dengan } \begin{array}{l} \alpha(1) = 2 \\ \alpha(2) = 3 \\ \alpha(3) = 1 \end{array}$$

Jika ditulis dalam bentuk permutasi adalah

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Secara sederhana, permutasi tersebut dituliskan dalam bentuk sikel, yaitu(123).

Sikel (123) tersebut menunjukkan pemetaan, yaitu

$$1 \longrightarrow 2;\ 2 \longrightarrow 3;\ 3 \longrightarrow 1$$

Selanjutnya, dengan cara yang sama akan diperoleh

r_2 = rotasi $240° = \beta$

$$\text{Dengan } \begin{matrix} \beta(1) = 3 \\ \beta(2) = 1 \\ \beta(3) = 2 \end{matrix} \quad = \beta = (132) \text{ atau } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

r_3 = rotasi $360° = \gamma$

$$\text{Dengan } \begin{matrix} \gamma(1) = 1 \\ \gamma(2) = 2 \\ \gamma(3) = 3 \end{matrix} \quad = \gamma = (1)(2)(3) \text{ atau } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Sedangkan untuk elemen refleksi, ditentukan dengan cara mencari simetri lipat dari segitiga samasisi, yaitu:

f_1 = refleksi terhadap sumbu r_1

$$\text{Dengan } \begin{matrix} \varepsilon(1) = 1 \\ \varepsilon(2) = 3 \\ \varepsilon(3) = 2 \end{matrix} \quad = \delta = (1)(23) \text{ atau } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

f_2 = refleksi terhadap sumbu r_2

$$\text{Dengan } \begin{matrix} \pi(1) = 3 \\ \pi(2) = 2 \\ \pi(3) = 1 \end{matrix} \quad = \varepsilon = (2)(13) \text{ atau } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

f_3 = refleksi terhadap sumbu r_3

$$\text{Dengan } \begin{matrix} \delta(1) = 2 \\ \delta(2) = 1 \\ \delta(3) = 3 \end{matrix} \quad = \delta = (12)(3) \text{ atau } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Jadi elemen grup permutasi-3 di atas adalah $P_3 = \{\mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2, \mathrm{r}_3, \mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, \mathrm{f}_3\}$

Apabila f dan g dua permutasi dari elemen-elemen P, maka komposisi (perkalian) permutasi-permutasi tersebut dilakukan seperti komposisi fungsi yaitu

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big), \forall x \in P$$

Mengingat f dan g masing-masing adalah pemetaan bijektif dari P ke P maka $f \circ g$ juga merupakan pemetaan bijektif dari P ke P. Jadi komposisi dua permutasi dari P adalah suatu permutasi dari P.

Contoh: Misalkan α dan β merupakan elemen permutasi P_3, maka komposisi antara α dan β adalah:

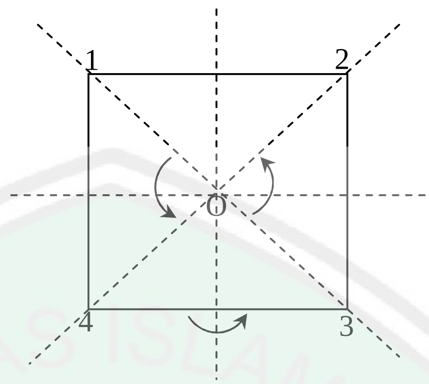
$$\begin{aligned} \beta\big(\alpha(1)\big) &= \beta(2) = 1 \\ \beta\big(\alpha(2)\big) &= \beta(3) = 2 \qquad \beta \circ \alpha = (1)(2)(3) = \delta \\ \beta\big(\alpha(3)\big) &= \beta(1) = 3 \end{aligned}$$

Jika ditulis dalam bentuk permutasi adalah

$$\beta \circ \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ atau}$$

$$\beta \circ \alpha = (1 \quad 2 \quad 3) \circ (1 \quad 2 \quad 3) = (1)(2)(3) = \delta$$

Contoh 2: Misalkan $S_4 = (1 \quad 2 \quad 3 \quad 4)$ yang mewakili segi empat beraturan. Maka segi empat beraturan tersebut dapat dimasukkan dalam bingkainya dalam 24 cara. Dalam hal ini dapat dikatakan bahwa ada 24 transformasi. Transformasi-transformasi tersebut adalah sebagai berikut:



Gambar 2.3 Gambar Simetri-4

Berdasarkan gambar tersebut, dapat disimpulkan bahwa grup simetri-4 dapat menempati bingkainya kembali sebanyak 24, yaitu ditunjukkan dalam table berikut:

Tabel 2.2: Tabel Cayley dari Grup Simetri-4

S_n	S_n	S_n
$A_1 = (1234)$	$A_9 = (1)(2)(34)$	$A_{17} = (2)(134)$
$A_2 = (13)(24)$	$A_{10} = (1)(3)(24)$	$A_{18} = (3)(124)$
$A_3 = (1432)$	$A_{11} = (1)(4)(23)$	$A_{19} = (4)(123)$
$A_4 = (1)(2)(3)(4)$	$A_{12} = (1)(2)(34)$	$A_{20} = (13)(24)$
$A_5 = (12)(34)$	$A_{13} = (2)(3)(14)$	$A_{21} = (12)(43)$
$A_6 = (13)(2)(4)$	$A_{14} = (2)(4)(13)$	$A_{22} = (14)(32)$
$A_7 = (14)(23)$	$A_{15} = (3)(4)(12)$	$A_{23} = (13)(42)$
$A_8 = (1)(3)(24)$	$A_{16} = (1)(234)$	$A_{24} = (13)(42)$

Sumber: Analisis Penulis (2011:7)

Dari tabel di atas, dapat diketahui bahwa jumlah dari elemen grup simetri-4 berjumlah 24 elemen. Selanjutnya, sub himpunan dari grup simetri tersebut yang terdiri dari 4 elemen rotasi dan 4 elemen refleksi yang juga memenuhi syarat-syarat untuk menjadi grup. Jadi dapat dikatakan bahwa grup simetri-4 yang terdiri dari elemen rotasi dan refleksi merupakan suatu grup.

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa subgrup dari grup simetri yang terdiri dari rotasi dan refleksi juga merupakan grup. Misalkan $\alpha, \beta \in S$ dengan S adalah grup simetri yang beranggotakan rotasi dan refleksi. Maka $\alpha \circ \beta$ memenuhi aksioma berikut:

a. Tertutup

Akan ditunjukkan bahwa $\alpha \circ \beta$ adalah 1-1 dan onto .

(i) $\alpha \circ \beta$ adalah fungsi 1-1

$\forall\, u, v \in G$ dengan $(\alpha \circ \beta)(u) = (\alpha \circ \beta)(v)$

Maka $(\alpha \circ \beta)(u) = (\alpha \circ \beta)(v)$

$$\alpha\big(\beta(u)\big) = \alpha\big(\beta(v)\big)$$

Karena α satu-satu maka $\beta\,(u) = \beta\,(v)$

Karena β satu-satu maka $u = v$.

$\ni\ \forall\, u, v\ (P)$ dengan $(\alpha \circ \beta)(u) = (\alpha \circ \beta)(v)$ maka $u = v$.

Jadi, $\alpha \circ \beta$ adalah fungsi 1-1.

(ii) $\alpha \circ \beta$ adalah onto

β onto : $\forall\, u' \in G\ \exists\, u \in G\ \ni\ \beta(u) = u'$

α onto : $\forall\, u'' \in G\ \exists\, u' \in G\ \ni\ \alpha(u') = u''$

$$\ni (u') = u'$$

$$\alpha(\beta(u)') = u'' \rightarrow (\alpha \circ \beta)(u) = u''$$

Karena $\forall\, u'' \in G\ \exists\, u \in G \ni (\alpha \circ \beta')(u) = u''$ untuk $\alpha \circ \beta$ adalah onto.

b. Assosiatif

$$\big((\alpha \circ \beta\ ) \circ \gamma\big)(u) = (\alpha \circ \beta)(\gamma(u))$$

$$\big((\alpha \circ \beta\ ) \circ \gamma\big)(u) = \ \alpha(\beta(\gamma(u)))$$

$$\big((\alpha \circ \beta) \circ \gamma\big)(u) = \ \alpha\big((\beta \circ \gamma)(u)\big)$$

$$\big((\alpha \circ \beta\ ) \circ \gamma\big)(u) = \big(\alpha \circ (\beta \circ \gamma)\big)(u)$$

sehingga, $(\alpha \circ \beta) \circ \gamma = \alpha \circ (\beta \circ \gamma)$

Jadi, operasi $\circ$ bersifat assosiatif.

c. Ada unsur identitas

Misal I adalah identitas

$$(I\ \circ\ \beta)(u) = \ \beta(u)$$

$$I\big(\beta(u)\big) = \ \beta(u)$$

$$I(u') = u'$$

$$(\beta \circ I)(u) = \ \beta(u)$$

$$\beta(I(u)) = \ \beta(u)$$

Karena β 1-1 maka I(u) = u.

d. Ada Invers

Menurut Raisinghania (1980:17) menyatakan dalam sebuah teorema bahwa misalkan $U, V,$ dan W adalah sebarang tiga himpunan tak-kosong dan misalkan α dan β adalah fungsi satu-satu U pada V dan V pada W berturut-turut sehingga α dan β merupakan dua fungsi yang *inversible* maka $(\alpha \circ \beta)$ juga *inversible* dan $(\alpha \circ \beta)^{-1} = \alpha^{-1}\ o\ \beta^{-1}$.

Bukti:

Untuk menunjukkan bahwa $(\alpha \circ \beta)$ *inversible*, maka harus ditunjukkan bahwa $(\alpha \circ \beta)$ adalah fungsi satu-satu dan onto. Misalkan u dan v adalah dua elemen sebarang dari U, maka

$$(\alpha \circ \beta)(u) = (\alpha \circ \beta)(v)$$

$$\alpha(\beta(u)) = \alpha(\beta(v))$$

$\beta(u) = \beta(v)$ [α adalah fungsi satu-satu]

$u = v$ [β adalah fungsi satu-satu]

Jadi, $(\alpha \circ \beta)$ adalah fungsi satu-satu.

Untuk menunjukkan bahwa $(\alpha \circ \beta)$ adalah fungsi onto, misalkan w adalah sebarang elemen dari W, maka α fungsi onto jika terdapat $v \in V$ sedemikian sehingga $\alpha(v) = w$. Begitu juga π adalah onto jika terdapat $u \in U$ sedemikian sehingga $\alpha(u) = v$. Akibatnya,

$$(\alpha \circ \beta)(u) = \alpha(\beta(u))$$

$$= \alpha(v) \qquad [\beta(u) = v]$$

$$= w \qquad [\alpha(v) = w]$$

Sehingga untuk sebarang $w \in W$, terdapat $u \in U$ sedemikian sehingga $(\alpha \circ \beta)(u) = w$. Jadi, $\alpha \circ \beta$ adalah fungsi onto. Karena $\alpha \circ \beta$ adalah fungsi satu-satu dan onto, maka $(\alpha \circ \beta)$ *inversible*. Selanjutnya

(i) $(\alpha \circ \beta)(u) = w \rightarrow (\alpha \circ \beta)^{-1}(w) = u$

$$(\alpha^{-1} \circ \beta^{-1})(w) = \beta^{-1}(\alpha^{-1}(w))$$

$$= \beta^{-1}(v) \qquad [\alpha(v) = w \to v = \alpha^{-1}(w)]$$

$$= u \qquad [\beta(v) = v \to u = \beta^{-1}(w)]$$

(ii) $(\alpha^{-1} \circ \beta^{-1})(w) = u$

Jadi, dari (i) dan (ii) diperoleh $(\alpha \circ \beta)^{-1} = \beta^{-1} \circ \alpha^{-1}$

Karena himpunan tersebut telah memenuhi syarat-syarat untuk menjadi grup maka terbukti bahwa subgrup dari grup simetri-n $(S_n, \circ)$ dengan elemen rotasi dan refleksi adalah suatu grup.

2.9 Kajian *Centralizer, Normalizer, Center,* dan Grup Simetri dalam Pandangan Islam

Secara umum beberapa konsep dari disiplin ilmu telah dijelaskan dalam al-Qur'an, salah satunya adalah matematika. Konsep dari disiplin ilmu matematika yang ada dalam al-Qur'an diantaranya adalah masalah statistik, logika, pemodelan, dan aljabar. Menurut Raishinghania dan Aggarwal (1991:13), penulis dapat menyimpulkan bahwa grup merupakan suatu struktur aljabar yang dinyatakan sebagai $(G, \circ)$ dengan G tidak kosong dan $\circ$ adalah operasi biner pada G yang memenuhi sifat-sifat assosiatif, ada identitas, dan ada invers dalam grup tersebut. Himpunan-himpunan dalam grup mempunyai anggota yang juga merupakan makhluk dari ciptaan-Nya. Sedangkan operasi biner merupakan interaksi antara makhluk-makhluk-Nya, dan sifat-sifat yang harus dipenuhi merupakan aturan-aturan yang telah ditetapkan oleh Allah, artinya sekalipun makhluk-Nya berinteraksi dengan sesama makhluk ia harus tetap berada dalam koridor yang telah ditetapkan oleh Allah.

Kajian mengenai himpunan sudah ada dalam al-Qur'an, misalnya kehidupan manusia yang terdiri dari berbagai macam golongan. Dimana golongan juga merupakan himpunan karena himpunan sendiri merupakan kumpulan objek-objek yang terdefinisi.

Dalam al-Qur'an surat al-fatihah ayat 7 disebutkan

صِرَٰطَ ٱلَّذِينَ أَنۡعَمۡتَ عَلَيۡهِمۡ غَيۡرِ ٱلۡمَغۡضُوبِ عَلَيۡهِمۡ وَلَا ٱلضَّآلِّينَ ۝٧

Artinya: (yaitu) jalan orang-orang yang telah Engkau beri nikmat kepada mereka; bukan (jalan) mereka yang dimurkai dan bukan (pula jalan) mereka yang sesat (Q. S. Al-Fatihah: 7).

Ayat di atas menjelaskan bahwa manusia terbagi menjadi tiga kelompok, yaitu (1) kelompok yang mendapat nikmat dari Allah, (2) kelompok yang dimurkai, dan (3) kelompok yang sesat (Abdussakir,2007:79).

Ayat tersebut menjelaskan tentang permohonan manusia kepada Allah agar dimasukkan ke dalam golongan orang-orang yang diberi nikmat, baik nikmat di dunia maupun nikmat di akhirat. Jalan lurus ialah ajaran tauhid, agama kebenaran, dan keimanan kepada perintah Allah. jalan tersebut merupakan jalan para nabi dan rosul, orang-orang sholeh, dan orang-orang yang mendapat nikmat, rahmad, dan kemurahan-Nya. Melalui ayat ini, Allah juga memperingatkan kepada manusia tentang adanya dua jalan yang menyimpang dari jalan orang-orang yang diberi nikmat, yaitu jalan orang-orang yang mendapatkan murka-Nya dan jalan bagi orang-orang yang sesat. Adapun maksud dengan orang yang diberi nikmat oleh Allah seperti yang telah ditunjukkan dalam al-Quran surat an-Nisa' ayat 64:

وَمَآ أَرۡسَلۡنَا مِن رَّسُولٍ إِلَّا لِيُطَاعَ بِإِذۡنِ ٱللَّهِۚ وَلَوۡ أَنَّهُمۡ إِذ ظَّلَمُوٓاْ أَنفُسَهُمۡ جَآءُوكَ فَٱسۡتَغۡفَرُواْ ٱللَّهَ وَٱسۡتَغۡفَرَ لَهُمُ ٱلرَّسُولُ لَوَجَدُواْ ٱللَّهَ تَوَّابًا رَّحِيمًا ٦٤

Artinya: *Dan Kami tidak mengutus seseorang rasul melainkan untuk ditaati dengan seizin Allah. Sesungguhnya jikalau mereka ketika menganiaya dirinya datang kepadamu, lalu memohon ampun kepada Allah, dan Rasulpun memohonkan ampun untuk mereka, tentulah mereka mendapati Allah Maha Penerima Taubat lagi Maha Penyayang (Q.S. An-Nisa':69)*

.

Ayat di atas menjelaskan bahwa orang-orang yang mendapat nikmat dan rahmat Allah ada empat kelompok: para nabi, orang-orang yang ikhlas, para saksi, dan orang-orang yang beramal shaleh. Sedangkan pemisahan dua kelompok terakhir dalam al-Quran surat al-Fatihah ayat 7 ini dari kelompok lainnya mengisyaratkan bahwa masing-masing kelompok memiliki karakteristik khusus. Dalam hal ini, Imani (2006: 60-61) membagi karakteristik khusus dua kelompok yang terakhir menjadi tiga tafsir :

1. Orang-orang yang tersesat adalah awam yang tidak terbimbing, sedangkan *magdhubi 'alaihim* adalah orang yang tidak terbimbing yang keras kepala atau munafik. Orang-orang yang mendapatkan murka-Nya adalah orang-orang yang disamping kekufuran mereka, mengambil jalan kedegilan dan permusuhan kepada Allah, dan kapan saja mereka dapat, mereka bahkan melukai para pemimpin Ilahiah dan para nabi sebagaimana disebutkan dalam al-Quran surat Ali Imran ayat 112.

2. Sebagian ahli tafsir percaya bahwa *adh-dhallin* (orang-orang yang tersesat) merujuk pada orang-orang Nasrani; sedangkan *magdhubi ‘alaihim* (orang-orang yang mendapatkan murka-Nya) mengacu pada orang-orang yahudi. Kesimpulan ini diambil karena respon-respon khas mereka.
3. Bacaan *adh-dhallin* dimaksudkan kepada orang-orang yang tersesat tapi tidak menekan orang-orang selain mereka untuk tersesat juga, sedangkan *magdhubi ‘alaihim* mengacu pada orang-orang yang tersesat dan membuat orang lain tersesat juga. Mereka mencoba mempengaruhi orang lain agar seperti mereka. Acuan makna ini adalah al-Quran surat Asy-Syura ayat 16.

Kembali pada definisi grup yang merupakan suatu himpunan yang tidak kosong dan operasi $_{o}$ pada G adalah suatu operasi biner yang memenuhi sifat-sifat assosiatif, ada identitas, dan ada invers dalam dalam grup tersebut. Maka operasi biner dalam konsep islam. Misal $\circ$ adalah operasi pada elemen-elemen S, maka ia disebut biner apabila setiap dua elemen $a,b \in S$, maka $(a \circ b) \in S$. Jadi jika anggota dari himpunan S dioperasikan hasilnya juga merupakan anggota S. begitu juga dengan operasi biner dalam dunia nyata. Operasi biner dan sifat-sifat yang harus dipenuhi oleh grup merupakan interaksi-interaksi dengan berbagai macam pola, ia akan tetap berada dalam himpunan tersebut, yaitu himpunan makhluk ciptaan-Nya.

Sistem aljabar merupakan salah satu materi pada bagian aljabar abstrak yang mengandung operasi biner. Himpunan dengan satu atau lebih operasi biner disebut sistem aljabar. Sedangkan sistem aljabar dengan satu operasi biner disebut grup. Kajian himpunan dengan satu operasi biner dalam konsep islam yaitu, bahwa manusia adalah ciptaan Allah secara berpasang-pasangan. Perhatikan firman Allah SWT dalam surat al-Fathir ayat 11 berikut:

وَٱللَّهُ خَلَقَكُم مِّن تُرَابٍ ثُمَّ مِن نُّطۡفَةٍ ثُمَّ جَعَلَكُمۡ أَزۡوَٰجًاۚ وَمَا تَحۡمِلُ مِنۡ أُنثَىٰ وَلَا تَضَعُ إِلَّا بِعِلۡمِهِۦۚ وَمَا يُعَمَّرُ مِن مُّعَمَّرٍ وَلَا يُنقَصُ مِنۡ عُمُرِهِۦٓ إِلَّا فِي كِتَٰبٍۚ إِنَّ ذَٰلِكَ عَلَى ٱللَّهِ يَسِيرٞ ١١

Artinya: *"Dan Allah menciptakan kamu dari tanah Kemudian dari air mani, Kemudian dia menjadikan kamu berpasangan (laki-laki dan perempuan). dan tidak ada seorang perempuanpun mengandung dan tidak (pula) melahirkan melainkan dengan sepengetahuan-Nya. dan sekali-kali tidak dipanjangkan umur seorang yang berumur panjang dan tidak pula dikurangi umurnya, melainkan (sudah ditetapkan) dalam Kitab (Lauh mahfuzh). Sesungguhnya yang demikian itu bagi Allah adalah mudah". (Q. S Al-Fathir: 11).*

Purwanto (2007: 393) menjelaskan bahwa alam di sekitar kita menampakkan diri dalam bentuknya yang simetri. Aneka bunga dan dedaunan di kebun dan di taman-taman bunga, juga serangga-serangga seperti semut, lebah, dan kupu-kupu yang mengerumuninya. Kita akan mendapatkan bahwa bentuk dan pola warna sangat serasi dan simetri. Simetri juga terjadi pada tingkat molekuler dan kristal seperti air dan amoniak.

Segitiga sama kaki yang mempunyai dua simetri, pertama simetri cermin yang membelah segi tiga menjadi dua bagian yang sama besar dan simetri putar (rotasi) 180 derajat. Segitiga sama sisi mempunyai delapan simetri, tiga simetri cermin, satu rotasi 180 derajat seperti segitiga sama kaki dan dua simetri rotasi 120 dan 240 derajat dengan sumbu rotasi melalui titik pusat segitiga. Bidang elips dan bidang lingkaran yang permukaan satu lain dari permukaan lainnya sehingga tidak simetri bolak-balik. Elips hanya mempunyai satu simetri, yakni simetri rotasi 180 derajat terhadap sumbu yang tegak lurus elips dan melalui titik pusat. Sementara itu, lingkaran mempunyai simetri tak terhingga karena lingkaran simetri terhadap rotasi apapun. Kristal dan molekul pada umumnya juga mempunyai format simetri. Molekul air terdiri dari dua atom *hydrogen* dan satu atom *oksigen*. Molekul ini mempunyai simetri rotasi 180 derajat. Molekul amoniak terdiri dari satu atom *nitrogen* dan tiga atom *hydrogen* dan mempunyai simetri 120 dan 240 derajat (Purwanto, 2007: 394).

Tubuh manusia juga dijadikan dalam keadaan setimbang antara bagian demi bagian sehingga memungkinkan manusia bergerak lincah. Tubuh manusia bagian kiri dan bagian kanan tampak setimbang atau tepatnya simetri. Dua mata manusia ada di kanan dan di kiri pada jarak yang sama dari garis yang membelah manusia menjadi dua bagian yang sama persis. Semua anggota tubuh yang berjumlah dua seperti telinga, lubang hidung, tangan, dan kaki berada dalam posisi simetri kanan-kiri (Purwanto, 2007: 393). Kesetimbangan atau kesimetrian ini juga telah ditegaskan dalam al-Qur’an surat al-Infithar ayat 7:

ٱلَّذِى خَلَقَكَ فَسَوَّىٰكَ فَعَدَلَكَ ﴿٧﴾

Artinya : *Yang telah menciptakan kamu lalu menyempurnakan kejadianmu dan menjadikan (susunan tubuh)mu seimbang (Q.S. Al-Infithar:7).*

Ayat ini menjelaskan bahwa alam semesta beserta isinya diciptakan oleh Allah secara sempuran dan seimbang. Hal ini berkaiatan dengan definisi grup simetri bahwa suatu segi-n beraturan akan mempunyai n rotasi dan n refleksi yang keduanya adalah setimbang.

Dalam agama Islam terdapat beberapa rukun yang wajib dilaksanakan bagi umat muslim, salah satunya ialah ibadah haji. Serangkaian ibadah haji merupakan salah satu representasi dari suatu himpunan dimana elemen-elemennya adalah segala sesuatu dalam ibadah tersebut seperti haji dan umrah, pada himpunan tersebut dikenakan suatu operasi yaitu “dilanjutkan”. Inti dari pembahasan mengenai *centralizer* dan *center* adalah kekomutatifan antara elemen-elemen tertentu. Jika dalam serangkaian ibadah haji, seseorang diperbolehkan melaksanakan ibadah haji dilanjutkan dengan umrah atau melaksanakan ibadah umrah dilanjutkan ibadah haji. Hal tersebut menunjukkan sifat komutatif. *Center* dalam matematika merupakan himpunan seluruh elemen yang komutatif dengan semua elemen suatu grup. *Center* dalam Islam dapat diwakilkan oleh menghadap kiblat yaitu ka’bah. Sehingga *center* dari suatu ibadah adalah ka’bah yang merupakan pusat peribadatan, kiblat dalam shalat dan pusat ibadah thawaf. *Centralizer* dapat diartikan dengan pemusatan, Dalam hal ini, pemusatan seluruh ibadah umat Islam menuju suatu titik pusat yaitu *center* (ka’bah). Sedangkan *normalizer* dalam hal ini adalah serangkaian ibadah adalah normal ketika dilaksanakan sesuai dengan ketentuannya. Allah berfirman dalam al-Quran surat al-Maidah ayat 97:

۞ جَعَلَ ٱللَّهُ ٱلۡكَعۡبَةَ ٱلۡبَيۡتَ ٱلۡحَرَامَ قِيَـٰمًا لِّلنَّاسِ وَٱلشَّهۡرَ ٱلۡحَرَامَ وَٱلۡهَدۡىَ وَٱلۡقَلَـٰٓئِدَۚ ذَٰلِكَ لِتَعۡلَمُوٓاْ أَنَّ ٱللَّهَ يَعۡلَمُ مَا فِى ٱلسَّمَـٰوَٰتِ وَمَا فِى ٱلۡأَرۡضِ وَأَنَّ ٱللَّهَ بِكُلِّ شَىۡءٍ عَلِيمٌ

Artinya: “*Allah telah menjadikan Ka'bah, rumah suci itu sebagai pusat (peribadatan dan urusan dunia) bagi manusia, dan (demikian pula) bulan Haram, had-ya, qalaid, (Allah menjadikan yang) demikian itu agar kamu tahu, bahwa sesungguhnya Allah mengetahui apa yang ada di langit dan apa yang ada di bumi dan bahwa sesungguhnya Allah Maha Mengetahui segala sesuatu.*”

Ayat di atas menjelaskan tentang keberadaan ka'bah yang menjadi pusat peribadatan bagi umat muslim di seluruh dunia. Ka'bah dan sekitarnya menjadi tempat yang aman bagi manusia untuk mengerjakan urusan-urusannya yang berhubungan dengan duniawi dan ukhrawi, dan pusat bagi amalan ibadah haji.

BAB III

PEMBAHASAN

Dalam pembahasan ini, grup simetri-*n* $(S_n,\circ)$ yang digunakan hanya terdiri dari rotasi dan refleksi dan dikelompokkan menjadi 2 bagian, yaitu grup simetri-*n* $(S_n,\circ)$, dengan n bilangan prima dan n bilangan komposit. Hal ini karena dimungkinkan adanya perbedaan pola dalam menentukan *centralizer*, *normalizer*, dan *center* yang dihasilkan oleh grup simetri-*n* dengan n bilangan prima dan n bilangan komposit. Selanjutnya dalam pembahasan ini, penulisan grup simetri-*n* $(S_n,\circ) =$ grup simetri-*n* yang terdiri dari elemen rotasi dan refleksi.

3.1 Grup simetri-*n* $(S_n,\circ)$, n Bilangan Prima

3.1.1 Grup simetri-3 $(S_3,\circ)$

Elemen dari grup simetri-3 terdiri dari 6 elemen, yaitu 3 elemen rotasi yang disimbolkan dengan r dan 3 elemen refleksi yang dinotasikan dengan f, yaitu:

Tabel 3.1 : Tabel Elemen Grup Simetri-3

Rotasi (r)	Refleksi (f)
$r_1 = (123)$	$f_1 = (1)(23)$
$r_2 = (132)$	$f_2 = (2)(13)$
$r_3 = (1)(2)(3)$	$f_3 = (3)(12)$

Sumber: Analisis Penulis (2011:7)

Dari tabel diatas dapat diketahui bahwa elemen dari subgrup simetri-3 yang terdiri dari elemen rotasi dan refleksi adalah $S_3 = \{r_1, r_2, r_3, f_1, f_2, f_3\}$ dengan elemen identitas adalah r_3. Sedangkan sub himpunan yang memenuhi aksioma-aksioma grup, yaitu subgrup dari grup simetri-3 adalah:

1. $(\{r_3\},\circ)$

2. $(\{r_1, r_2, r_3\}, \circ)$
3. $(\{r_3, f_1\}, \circ)$
4. $(\{r_3, f_2\}, \circ)$
5. $(\{r_3, f_3\}, \circ)$
6. $(\{r_1, r_2, r_3, f_1, f_2, f_3\}, \circ)$

Berdasarkan subgrup-subgrup tersebut, dapat disimpulkan bahwa subgrup simetri-3 yang terdiri dari elemen rotasi dan refleksi memiliki 6 subgrup dengan rincian sebagai berikut:

1. Satu subgrup yang terdiri dari 1 elemen yaitu elemen identitas, yaitu $(\{r_3\}, \circ)$.
2. Tiga subgrup yang terdiri dari 2 elemen yaitu elemen identitas dan elemen f, yaitu $(\{r_3, f_1\}, \circ)$, $(\{r_3, f_2\}, \circ)$, dan $(\{r_3, f_3\}, \circ)$.
3. Satu subgrup yang terdiri dari 3 elemen yaitu semua elemen r pada grup simetri-3, yaitu $(\{r_1, r_2, r_3\}, \circ)$.
4. Satu subgrup yang terdiri dari 6 elemen yaitu semua elemen s_3, yaitu $(\{r_1, r_2, r_3, f_1, f_2, f_3\}, \circ)$

Misalkan A_3 adalah subgrup dari grup simetri-3. *Centralizer* A_3 di grup simetri-3 dapat didefinisikan sebagai himpunan dari elemen-elemen grup simetri-3 yang memenuhi $g \circ a \circ g^{-1} = a, \forall a \in A, g \in s_3$. *Centralizer* subgrup di grup simetri-3 adalah sebagai berikut:

Tabel 3.2 : Hasil Centralizer Subgrup pada Grup Simetri-3

$s_3 = \{r_1, r_2, r_3, f_1, f_2, f_3\}$	
A_3	$C_{s_3}(A)$
$\{r_3\}$	$\{r_1, r_2, r_3, f_1, f_2, f_3\}$
$\{r_1, r_2, r_3\}$	$\{r_1, r_2, r_3\}$
$\{r_3, f_1\}$	$\{r_3, f_1\}$
$\{r_3, f_2\}$	$\{r_3, f_2\}$
$\{r_3, f_3\}$	$\{r_3, f_3\}$
$\{r_1, r_2, r_3, f_1, f_2, f_3\}$	$\{r_3\}$

Sumber: Analisis Penulis (2011:7)

Berdasarkan tabel tersebut dapat disimpulkan bahwa :

1. *Centralizer* identitas di grup simetri-3 adalah semua elemen s_3, yaitu $C_{S_3}(\{r_3\}) = \{r_1, r_2, r_3, f_1, f_2, f_3\}$.
2. *Centralizer* subgrup sejati dari grup simetri-3 adalah subgrup itu sendiri, yaitu: $C_{S_3}(\{r_3, f_1\}) = \{r_3, f_1\}$

   $C_{S_3}(\{r_3, f_2\}) = \{r_3, f_2\}$

   $C_{S_3}(\{r_3, f_3\}) = \{r_3, f_3\}$

   $C_{S_3}(\{r_1, r_2, r_3\}) = \{r_1, r_2, r_3\}$.
3. *Centralizer* semua elemen grup simetri-3 di grup simetri-3 adalah elemen identitas, yaitu $C_{S_3}(\{r_1, r_2, r_3, f_1, f_2, f_3\}) = \{r_3\}$.

Misalkan A_3 adalah subgrup dari grup simetri-3. *Normalizer* A_3 di S_3 didefinisikan sebagai himpunan dari elemen-elemen grup simetri-3 yang memenuhi $g \circ a \circ g^{-1} \in A, \forall a \in A, g \in S_3$. *Normalizer* subgrup di grup simetri-3 adalah sebagai berikut:

Tabel 3. 3: Hasil *Normalizer* Subgrup di Grup Simetri-3

$S_3 = \{r_1, r_2, r_3, f_1, f_2, f_3\}$	
A_3	$N_{S_3}(A)$
$\{r_3\}$	$\{r_1, r_2, r_3, f_1, f_2, f_3\}$
$\{r_1, r_2, r_3\}$	$\{r_1, r_2, r_3, f_1, f_2, f_3\}$
$\{r_3, f_1\}$	$\{r_3, f_1\}$
$\{r_3, f_2\}$	$\{r_3, f_2\}$
$\{r_3, f_3\}$	$\{r_3, f_3\}$
$\{r_1, r_2, r_3, f_1, f_2, f_3\}$	$\{r_1, r_2, r_3, f_1, f_2, f_3\}$

Sumber: Analisis Penulis (2011:7)

Berdasarkan tabel tersebut dapat disimpulkan bahwa :

1. *Normalizer* subgrup yang terdiri dari 2 elemen, yaitu elemen identitas dan elemen f di grup simetri-3 adalah subgrup itu sendiri yaitu

   $N_{S_3}(\{r_3, f_1\}) = \{r_3, f_1\}$,

   $N_{S_3}(\{r_3, f_2\}) = \{r_3, f_2\}$,

   $N_{S_3}(\{r_3, f_3\}) = \{r_3, f_3\}$.

2. *Normalizer* subgrup selain terdiri dari 2 elemen di grup S_3 adalah semua elemen S_3, yaitu:

   $N_{S_3}(\{r_3\}) = \{r_1, r_2, r_3, f_1, f_2, f_3\}$,

   $N_{S_3}(\{r_1, r_2, r_3\}) = \{r_1, r_2, r_3, f_1, f_2, f_3\}$,

   $N_{S_3}(\{r_1, r_2, r_3, f_1, f_2, f_3\}) = \{r_1, r_2, r_3, f_1, f_2, f_3\}$.

Center dari grup simetri-3 merupakan himpunan elemen-elemen S_3 yang komutatif dengan setiap elemen S_3. Dari definisi tersebut dapat disimpulkan bahwa *center* dari grup simetri-3 merupakan *centralizer* S_3 di S_3. Jadi, *center* dari grup simetri-3 adalah elemen identitas, yaitu $Z(\{r_1, r_2, r_3, f_1, f_2, f_3\}) = \{r_3\}$.

3.1.2 Grup Simetri-5 $(S_5,\circ)$

Elemen dari grup simetri-5 terdiri dari 125 elemen. Selanjutnya, dari 125 elemen tersebut hanya diambil elemen yang terdiri dari elemen rotasi dan elemen refleksi. Sehingga elemen dari grup simetri-5 berjumlah 10 elemen, dengan 5 elemen rotasi dan 5 elemen refleksi yang ditunjukkan dalam tabel berikut:

Tabel 3.4: Tabel Elemen Grup Simetri-5

Rotasi (r)	Refleksi (f)
$r_1 = (12345)$	$f_1 = (1)(25)(34)$
$r_2 = (13524)$	$f_2 = (2)(13)(45)$
$r_3 = (14253)$	$f_3 = (3)(24)(15)$
$r_4 = (15432)$	$f_4 = (4)(35)(12)$
$r_5 = (1)(2)(3)(4)(5)$	$f_5 = (5)(14)(23)$

Sumber: Analisis Penulis (2011:7)

Dari tabel diatas dapat diketahui bahwa elemen dari subgrup simetri-5 yang terdiri dari elemen rotasi dan refleksi adalah $S_5 = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$ dengan elemen identitas adalah r_5. Sedangkan sub himpunan yang memenuhi aksioma-aksioma grup, yaitu subgrup dari grup simetri-5 adalah:

1. $(\{r_5\},\circ)$
2. $(\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5\},\circ)$
3. $(\{r_5, f_1\},\circ)$
4. $(\{r_5, f_2\},\circ)$
5. $(\{r_5, f_3\},\circ)$
6. $(\{r_5, f_4\},\circ)$
7. $(\{r_5, f_5\},\circ)$
8. $(\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\},\circ)$

Berdasarkan subgrup-subgrup tersebut, dapat disimpulkan bahwa subgrup simetri-5 yang terdiri dari elemen rotasi dan refleksi memiliki 8 subgrup dengan rincian sebagai berikut:

1. Satu subgrup yang terdiri dari 1 elemen yaitu elemen identitas, yaitu $(\{r_5\},\circ)$.
2. Satu subgrup yang terdiri dari 5 elemen yaitu semua elemen r pada grup simetri-5, yaitu $(\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5\},\circ)$.
3. Lima subgrup yang terdiri dari 2 elemen yaitu elemen identitas dan elemen f, yaitu $(\{r_5, f_1\},\circ)$, $(\{r_5, f_2\},\circ)$, $(\{r_5, f_3\},\circ)$, $(\{r_5, f_4\},\circ)$, dan $(\{r_5, f_5\},\circ)$.
4. Satu subgrup yang terdiri dari 10 elemen yaitu semua elemen P_5, yaitu $(\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\},\circ)$.

Misalkan A_5 adalah subgrup dari grup *simetri*-5. *Centralizer* A_5 di S_5 dapat didefinisikan sebagai himpunan dari elemen-elemen grup simetri-5 yang memenuhi $g \circ a \circ g^{-1} = a, \forall a \in A, g \in S_5$. *Centralizer* subgrup di grup simetri-5 adalah sebagai berikut:

Tabel 3.5: Hasil *Centralizer* Subgrup di Grup Simetri-5

$S_5 = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$	
A_5	$C_{S_5}(A)$
$\{r_5\}$	$\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$
$\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5\}$	$\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5\}$
$\{r_5, f_1\}$	$\{r_5, f_1\}$
$\{r_5, f_2\}$	$\{r_5, f_2\}$
$\{r_5, f_3\}$	$\{r_5, f_3\}$
$\{r_5, f_4\}$	$\{r_5, f_4\}$
$\{r_5, f_5\}$	$\{r_5, f_5\}$
$\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$	$\{r_5\}$

Sumber: Analisis Penulis (2011:7)

Berdasarkan tabel tersebut dapat disimpulkan bahwa :

1. *Centralizer* identitas di grup simetri-5 adalah semua elemen S_5, yaitu $C_{S_5}(\{\mathrm{r}_5\}) = \{\mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2, \mathrm{r}_3, \mathrm{r}_4, \mathrm{r}_5, \mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, \mathrm{f}_3, \mathrm{f}_4, \mathrm{f}_5\}$.
2. *Centralizer* subgrup sejati dari grup simetri-5 adalah subgrup itu sendiri, yaitu:

   $C_{S_5}(\{\mathrm{r}_5, \mathrm{f}_1\}) = \{\mathrm{r}_5, \mathrm{f}_1\}$,

   $C_{S_5}(\{\mathrm{r}_5, \mathrm{f}_2\}) = \{\mathrm{r}_5, \mathrm{f}_2\}$,

   $C_{S_5}(\{\mathrm{r}_5, \mathrm{f}_3\}) = \{\mathrm{r}_5, \mathrm{f}_3\}$,

   $C_{S_5}(\{\mathrm{r}_5, \mathrm{f}_4\}) = \{\mathrm{r}_5, \mathrm{f}_4\}$,

   $C_{S_5}(\{\mathrm{r}_5, \mathrm{f}_5\}) = \{\mathrm{r}_5, \mathrm{f}_5\}$,

   $C_{S_5}(\{\mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2, \mathrm{r}_3, \mathrm{r}_4, \mathrm{r}_5\}) = \{\mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2, \mathrm{r}_3, \mathrm{r}_4, \mathrm{r}_5\}$.
3. *Centralizer* semua elemen grup simetri-5 di grup simetri-5 adalah elemen identitas, yaitu $C_{S_5}(\{\mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2, \mathrm{r}_3, \mathrm{r}_4, \mathrm{r}_5, \mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, \mathrm{f}_3, \mathrm{f}_4, \mathrm{f}_5\}) = \{\mathrm{r}_5\}$.

Misalkan A_5 adalah subgrup dari grup simetri-5. *Normalizer* A_5 di grup simetri-5 dapat didefinisikan sebagai himpunan dari elemen-elemen grup simetri-5 yang memenuhi $g \circ a \circ g^{-1} \in A_5, \forall a \in A_5, g \in S_5$. *Normalizer* subgrup di grup simetri-5 adalah sebagai berikut:

Tabel 3.6: Hasil *Normalizer* Subgrup di Grup Simetri-5

$S_5 = \{\mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2, \mathrm{r}_3, \mathrm{r}_4, \mathrm{r}_5, \mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, \mathrm{f}_3, \mathrm{f}_4, \mathrm{f}_5\}$	
A_5	$N_{S_5}(A)$
$\{\mathrm{r}_5\}$	$\{\mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2, \mathrm{r}_3, \mathrm{r}_4, \mathrm{r}_5, \mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, \mathrm{f}_3, \mathrm{f}_4, \mathrm{f}_5\}$
$\{\mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2, \mathrm{r}_3, \mathrm{r}_4, \mathrm{r}_5\}$	$\{\mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2, \mathrm{r}_3, \mathrm{r}_4, \mathrm{r}_5, \mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, \mathrm{f}_3, \mathrm{f}_4, \mathrm{f}_5\}$
$\{\mathrm{r}_5, \mathrm{f}_1\}$	$\{\mathrm{r}_5, \mathrm{f}_1\}$
$\{\mathrm{r}_5, \mathrm{f}_2\}$	$\{\mathrm{r}_5, \mathrm{f}_2\}$
$\{\mathrm{r}_5, \mathrm{f}_3\}$	$\{\mathrm{r}_5, \mathrm{f}_3\}$
$\{\mathrm{r}_5, \mathrm{f}_4\}$	$\{\mathrm{r}_5, \mathrm{f}_4\}$
$\{\mathrm{r}_5, \mathrm{f}_5\}$	$\{\mathrm{r}_5, \mathrm{f}_5\}$
$\{\mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2, \mathrm{r}_3, \mathrm{r}_4, \mathrm{r}_5, \mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, \mathrm{f}_3, \mathrm{f}_4, \mathrm{f}_5\}$	$\{\mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2, \mathrm{r}_3, \mathrm{r}_4, \mathrm{r}_5, \mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, \mathrm{f}_3, \mathrm{f}_4, \mathrm{f}_5\}$

Sumber: Analisis Penulis (2011:7)

Berdasarkan tabel tersebut dapat disimpulkan bahwa :

1. *Normalizer* subgrup yang terdiri dari 2 elemen, yaitu elemen f dan elemen identitas di grup simetri-5 adalah subgrup itu sendiri, yaitu:

$$N_{S_5}(\{r_5, f_1\}) = \{r_5, f_1\}$$

$$N_{S_5}(\{r_5, f_2\}) = \{r_5, f_2\}$$

$$N_{S_5}(\{r_5, f_3\}) = \{r_5, f_3\}$$

$$N_{S_5}(\{r_5, f_4\}) = \{r_5, f_4\}$$

$$N_{S_5}(\{r_5, f_5\}) = \{r_5, f_5\}$$

2. *Normalizer* subgrup selain terdiri dari 2 elemen di grup simetri-5 adalah semua elemen S_5, yaitu

$$N_{S_5}(\{r_5\}) = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$$

$$N_{S_5}(\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5\}) = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$$

$$N_{S_5}(\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}) = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$$

Center dari grup simetri-5 merupakan himpunan elemen-elemen grup simetri-5 yang komutatif dengan setiap elemen grup simetri-5. Dari definisi tersebut dapat disimpulkan bahwa *center* dari grup simetri-5 merupakan *centralizer* S_5 di S_5.Jadi, *center* dari grup simetri-5 adalah elemen identitas, yaitu:

$$Z(\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}) = \{r_5\}.$$

3.1.3 Grup Simetri-7 (S_7,∘)

Elemen dari grup simetri-7 terdiri dari 5.040 elemen. Selanjutnya, dari 5.040 elemen tersebut hanya diambil elemen yang terdiri dari elemen rotasi dan elemen refleksi. Sehingga elemen dari grup simetri-7 berjumlah 14 elemen, dengan 7 elemen rotasi dan 7 elemen refleksi yang ditunjukkan dalam tabel berikut:

Tabel 3.7: Tabel Elemen Grup Simetri-7

Rotasi (r)	Refleksi (f)
$r_1 = (1234567)$	$f_1 = (1)(27)(36)(45)$
$r_2 = (1357246)$	$f_2 = (2)(13)(47)(56)$
$r_3 = (1473625)$	$f_3 = (3)(24)(15)(67)$
$r_4 = (1526374)$	$f_4 = (4)(17)(26)(35)$
$r_5 = (1642753)$	$f_5 = (5)(12)(37)(46)$
$r_6 = (1765432)$	$f_6 = (6)(14)(23)(57)$
$r_7 = (1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)$	$f_7 = (7)(16)(25)(34)$

Sumber: Analisis Penulis (2011:7)

Dari tabel di atas dapat diketahui bahwa elemen dari subgrup simetri-7 yang terdiri dari elemen rotasi dan refleksi adalah $S_7 = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7\}$ dengan elemen identitas adalah r_7. Sedangkan sub himpunan yang memenuhi aksioma-aksioma grup, yaitu subgrup dari grup simetri-7 adalah:

1. $(\{r_7\},\circ)$
2. $(\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7\},\circ)$
3. $(\{r_7, f_1\},\circ)$
4. $(\{r_7, f_2\},\circ)$
5. $(\{r_7, f_3\},\circ)$
6. $(\{r_7, f_4\},\circ)$
7. $(\{r_7, f_5\},\circ)$
8. $(\{r_7, f_6\},\circ)$
9. $(\{r_7, f_7\},\circ)$
10. $(\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7\},\circ)$

Berdasarkan subgrup-subgrup tersebut, dapat disimpulkan bahwa pada subgrup simetri-7 yang terdiri dari elemen rotasi dan refleksi memiliki 10 subgrup dengan rincian sebagai berikut:

1. Satu subgrup yang terdiri dari 1 elemen yaitu elemen identitas, yaitu $(\{r_7\},\circ)$.
2. Satu subgrup yang terdiri dari 7 elemen yaitu semua elemen r pada grup simetri-7, yaitu $(\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7\},\circ)$.
3. Tujuh subgrup yang terdiri dari 2 elemen yaitu elemen identitas dan elemen f, yaitu $(\{r_7, f_1\},\circ), (\{r_7, f_2\},\circ), (\{r_7, f_3\},\circ), (\{r_7, f_4\},\circ)$, $(\{r_7, f_5\},\circ)$, $\{r_7, f_6\}$, dan $\{r_7, f_7\}$
4. Satu subgrup yang terdiri dari 14 elemen yaitu semua elemen S_7, yaitu $(\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7\},\circ)$.

Misalkan A_7 adalah subgrup dari grup *simetri*-7. *Centralizer* A_7 di grup simetri-7 dapat didefinisikan sebagai himpunan dari elemen-elemen grup simetri-7 yang memenuhi $g \circ a \circ g^{-1} = a, \forall a \in A, g \in S_7$. *Centralizer* subgrup di grup simetri-7 adalah sebagai berikut:

Tabel 3.8: Hasil *Centralizer* Subgrup di Grup Simetri-7

$P_7 = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7\}$	
A_7	$C_{S_7}(A)$
$\{\mathrm{r}_7\}$	$\{\mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2, \mathrm{r}_3, \mathrm{r}_4, \mathrm{r}_5, \mathrm{r}_6, \mathrm{r}_7, \mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, \mathrm{f}_3, \mathrm{f}_4, \mathrm{f}_5, \mathrm{f}_6, \mathrm{f}_7\}$
$\{\mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2, \mathrm{r}_3, \mathrm{r}_4, \mathrm{r}_5, \mathrm{r}_6, \mathrm{r}_7\}$	$\{\mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2, \mathrm{r}_3, \mathrm{r}_4, \mathrm{r}_5, \mathrm{r}_6, \mathrm{r}_7\}$
$\{\mathrm{r}_7, \mathrm{f}_1\}$	$\{\mathrm{r}_7, \mathrm{f}_1\}$
$\{\mathrm{r}_7, \mathrm{f}_2\}$	$\{\mathrm{r}_7, \mathrm{f}_2\}$
$\{\mathrm{r}_7, \mathrm{f}_3\}$	$\{\mathrm{r}_7, \mathrm{f}_3\}$
$\{\mathrm{r}_7, \mathrm{f}_4\}$	$\{\mathrm{r}_7, \mathrm{f}_4\}$
$\{\mathrm{r}_7, \mathrm{f}_5\}$	$\{\mathrm{r}_7, \mathrm{f}_5\}$
$\{\mathrm{r}_7, \mathrm{f}_6\}$	$\{\mathrm{r}_7, \mathrm{f}_6\}$
$\{\mathrm{r}_7, \mathrm{f}_7\}$	$\{\mathrm{r}_7, \mathrm{f}_7\}$
$\{\mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2, \mathrm{r}_3, \mathrm{r}_4, \mathrm{r}_5, \mathrm{r}_6, \mathrm{r}_7, \mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, \mathrm{f}_3, \mathrm{f}_4, \mathrm{f}_5, \mathrm{f}_6, \mathrm{f}_7\}$	$\{\mathrm{r}_7\}$

Sumber: Analisis Penulis (2011:7)

Berdasarkan tabel tersebut dapat disimpulkan bahwa :

1. *Centralizer* identitas di grup simetri-7 $(S_7, \circ)$ adalah semua elemen S_7, yaitu :

   $C_{S_7}(\{\mathrm{r}_7\}) = \{\mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2, \mathrm{r}_3, \mathrm{r}_4, \mathrm{r}_5, \mathrm{r}_6, \mathrm{r}_7, \mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, \mathrm{f}_3, \mathrm{f}_4, \mathrm{f}_5, \mathrm{f}_6, \mathrm{f}_7\}$.

2. *Centralizer* subgrup sejati dari grup simetri-7 adalah subgrup itu sendiri, yaitu:

$$C_{S_7}(\{\mathrm{r}_7, \mathrm{f}_1\}) = \{\mathrm{r}_7, \mathrm{f}_1\}$$

$$C_{S_7}(\{\mathrm{r}_7, \mathrm{f}_2\}) = \{\mathrm{r}_7, \mathrm{f}_2\}$$

$$C_{S_7}(\{\mathrm{r}_7, \mathrm{f}_3\}) = \{\mathrm{r}_7, \mathrm{f}_3\}$$

$$C_{S_7}(\{\mathrm{r}_7, \mathrm{f}_4\}) = \{\mathrm{r}_7, \mathrm{f}_4\}$$

$$C_{S_7}(\{\mathrm{r}_7, \mathrm{f}_5\}) = \{\mathrm{r}_7, \mathrm{f}_5\}$$

$$C_{S_7}(\{\mathrm{r}_7, \mathrm{f}_6\}, \circ) = \{\mathrm{r}_7, \mathrm{f}_6\}$$

$$C_{S_7}(\{\mathrm{r}_7, \mathrm{f}_7\}, \circ) = \{\mathrm{r}_7, \mathrm{f}_7\}$$

$$C_{S_7}(\{\mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2, \mathrm{r}_3, \mathrm{r}_4, \mathrm{r}_5, \mathrm{r}_6, \mathrm{r}_7\}) = \{\mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2, \mathrm{r}_3, \mathrm{r}_4, \mathrm{r}_5, \mathrm{r}_6, \mathrm{r}_7\}.$$

3. *Centralizer* semua elemen simetri-7 di grup simetri-7 adalah elemen identitas, yaitu $C_{S_7}(\{\mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2, \mathrm{r}_3, \mathrm{r}_4, \mathrm{r}_5, \mathrm{r}_6, \mathrm{r}_7, \mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, \mathrm{f}_3, \mathrm{f}_4, \mathrm{f}_5, \mathrm{f}_6, \mathrm{f}_7\}) = \{\mathrm{r}_7\}$.

Misalkan A_7 adalah subgrup dari grup simetri-7. *Normalizer* A_7 di grup simetri-7 dapat didefinisikan sebagai himpunan dari elemen-elemen grup simetri-7 yang memenuhi $g \circ a \circ g^{-1} \in A_7, \forall a \in A_7, g \in S_7$. *Normalizer* subgrup di grup simetri-7 adalah sebagai berikut:

Tabel 3.9: Hasil *Normalizer* Subgrup di Grup Simetri-7

$S_7 = \{\mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2, \mathrm{r}_3, \mathrm{r}_4, \mathrm{r}_5, \mathrm{r}_6, \mathrm{r}_7, \mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, \mathrm{f}_3, \mathrm{f}_4, \mathrm{f}_5, \mathrm{f}_6, \mathrm{f}_7\}$	
A_7	$N_{S_7}(A)$
$\{\mathrm{r}_7\}$	$\{\mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2, \mathrm{r}_3, \mathrm{r}_4, \mathrm{r}_5, \mathrm{r}_6, \mathrm{r}_7, \mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, \mathrm{f}_3, \mathrm{f}_4, \mathrm{f}_5, \mathrm{f}_6, \mathrm{f}_7\}$
$\{\mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2, \mathrm{r}_3, \mathrm{r}_4, \mathrm{r}_5, \mathrm{r}_6, \mathrm{r}_7\}$	$\{\mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2, \mathrm{r}_3, \mathrm{r}_4, \mathrm{r}_5, \mathrm{r}_6, \mathrm{r}_7, \mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, \mathrm{f}_3, \mathrm{f}_4, \mathrm{f}_5, \mathrm{f}_6, \mathrm{f}_7\}$
$\{\mathrm{r}_7, \mathrm{f}_1\}$	$\{\mathrm{r}_7, \mathrm{f}_1\}$
$\{\mathrm{r}_7, \mathrm{f}_2\}$	$\{\mathrm{r}_7, \mathrm{f}_2\}$
$\{\mathrm{r}_7, \mathrm{f}_3\}$	$\{\mathrm{r}_7, \mathrm{f}_3\}$
$\{\mathrm{r}_7, \mathrm{f}_4\}$	$\{\mathrm{r}_7, \mathrm{f}_4\}$
$\{\mathrm{r}_7, \mathrm{f}_5\}$	$\{\mathrm{r}_7, \mathrm{f}_5\}$
$\{\mathrm{r}_7, \mathrm{f}_6\}$	$\{\mathrm{r}_7, \mathrm{f}_6\}$
$\{\mathrm{r}_7, \mathrm{f}_7\}$	$\{\mathrm{r}_7, \mathrm{f}_7\}$
$\{\mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2, \mathrm{r}_3, \mathrm{r}_4, \mathrm{r}_5, \mathrm{r}_6, \mathrm{r}_7, \mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, \mathrm{f}_3, \mathrm{f}_4, \mathrm{f}_5, \mathrm{f}_6, \mathrm{f}_7\}$	$\{\mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2, \mathrm{r}_3, \mathrm{r}_4, \mathrm{r}_5, \mathrm{r}_6, \mathrm{r}_7, \mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, \mathrm{f}_3, \mathrm{f}_4, \mathrm{f}_5, \mathrm{f}_6, \mathrm{f}_7\}$

Sumber: Analisis Penulis (2011:7)

Berdasarkan tabel tersebut dapat disimpulkan bahwa :

1. *Normalizer* subgrup yang terdiri dari 2 elemen, yaitu elemen identitas dan elemen yang memuat f di grup simetri-7 adalah subgrup itu sendiri, yaitu:

$$N_{S_7}(\{\mathrm{r}_7, \mathrm{f}_1\}) = \{\mathrm{r}_7, \mathrm{f}_1\}$$

$$N_{S_7}(\{\mathrm{r}_7, \mathrm{f}_2\}) = \{\mathrm{r}_7, \mathrm{f}_2\}$$

$$N_{S_7}(\{\mathrm{r}_7, \mathrm{f}_3\}) = \{\mathrm{r}_7, \mathrm{f}_3\}$$

$$N_{S_7}(\{\mathrm{r}_7, \mathrm{f}_4\}) = \{\mathrm{r}_7, \mathrm{f}_4\}$$

$$N_{S_7}(\{\mathrm{r}_7, \mathrm{f}_5\}) = \{\mathrm{r}_7, \mathrm{f}_5\}$$

$$N_{S_7}(\{\mathrm{r}_7, \mathrm{f}_6\}) = \{\mathrm{r}_7, \mathrm{f}_6\}$$

$$N_{S_7}(\{\mathrm{r}_7, \mathrm{f}_7\}) = \{\mathrm{r}_7, \mathrm{f}_7\}$$

2. *Normalizer* subgrup selain terdiri dari 2 elemen di grup simetri-7 adalah semua elemen grup simetri-7, yaitu:

   $N_{S_7}(\{\mathrm{r}_7\}) = \{\mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2, \mathrm{r}_3, \mathrm{r}_4, \mathrm{r}_5, \mathrm{r}_6, \mathrm{r}_7, \mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, \mathrm{f}_3, \mathrm{f}_4, \mathrm{f}_5, \mathrm{f}_6, \mathrm{f}_7\}$

   $N_{S_7}(\{\mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2, \mathrm{r}_3, \mathrm{r}_4, \mathrm{r}_5, \mathrm{r}_6, \mathrm{r}_7\}) = \{\mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2, \mathrm{r}_3, \mathrm{r}_4, \mathrm{r}_5, \mathrm{r}_6, \mathrm{r}_7, \mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, \mathrm{f}_3, \mathrm{f}_4, \mathrm{f}_5, \mathrm{f}_6, \mathrm{f}_7\}$

   $N_{S_7}(\{\mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2, \mathrm{r}_3, \mathrm{r}_4, \mathrm{r}_5, \mathrm{r}_6, \mathrm{r}_7, \mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, \mathrm{f}_3, \mathrm{f}_4, \mathrm{f}_5, \mathrm{f}_6, \mathrm{f}_7\})$

   $= \{\mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2, \mathrm{r}_3, \mathrm{r}_4, \mathrm{r}_5, \mathrm{r}_6, \mathrm{r}_7, \mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, \mathrm{f}_3, \mathrm{f}_4, \mathrm{f}_5, \mathrm{f}_6, \mathrm{f}_7\}.$

Center dari grup simetri-7 merupakan himpunan elemen-elemen grup simetri-7 yang komutatif dengan setiap elemen simetri-7. Dari definisi tersebut dapat disimpulkan bahwa *center* dari grup simetri-7 merupakan *centralizer* S_7 di S_7. Jadi, *center* dari grup simetri-7 adalah elemen identitas, yaitu :

$$Z(\{\mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2, \mathrm{r}_3, \mathrm{r}_4, \mathrm{r}_5, \mathrm{r}_6, \mathrm{r}_7, \mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, \mathrm{f}_3, \mathrm{f}_4, \mathrm{f}_5, \mathrm{f}_6, \mathrm{f}_7\}) = \{\mathrm{r}_7\}.$$

3.1.4 Pola Umum Grup Simetri-n $(P_n, \circ)$, n Bilangan Prima

Secara umum, jumlah elemen dari grup simetri-n $(S_n, \circ)$ dengan n bilangan prima adalah $n!$. Selanjutnya, dari $n!$ elemen tersebut hanya diambil elemen yang terdiri dari elemen rotasi dan elemen refleksi yang juga memenuhi aksioma-aksioma grup dan disebut subgrup dari grup simetri-n. Elemen dari subgrup tersebut adalah:

$$S_n = \{r_1, r_2, \dots, r_n, f_1, f_2, \dots, f_n\}$$

Dengan elemen identitas adalah r_n. Sedangkan subgrup dari grup simetri-n $(S_n, \circ)$ adalah:

$$(\{r_n\}, \circ)$$

$$(\{r_n, f_1\}, \circ)$$

$$(\{r_n, f_2\}, \circ)$$

$$\vdots$$

$$(\{r_n, f_n\}, \circ)$$

$$(\{r_1, r_2, \dots, r_n\}, \circ)$$

$$(\{r_1, r_2, \dots, r_n, f_1, f_2, \dots, f_n\}, \circ)$$

Berdasarkan subgrup-subgrup tersebut, dapat disimpulkan bahwa subgrup simetri-n yang terdiri dari elemen rotasi dan refleksi memiliki:

1. Sebanyak 1 subgrup yang terdiri dari 1 elemen yaitu elemen identitas, yaitu $(\{r_n\}, \circ)$.
2. Sebanyak n subgrup yang terdiri dari 2 elemen yaitu elemen identitas dan elemen yang memuat f, yaitu $(\{r_n, f_1\}, \circ)$, $(\{r_n, f_2\}, \circ)$, ..., $(\{r_n, f_n\}, \circ)$.
3. Sebanyak 1 subgrup yang terdiri dari n elemen yaitu semua elemen r, yaitu $(\{r_1, r_2, \dots, r_n\}, \circ)$.
4. Sebanyak 1 subgrup yang terdiri dari $2n$ elemen, dengan n rotasi dan n refleksi, yaitu semua elemen S_n, yaitu $(\{r_1, r_2, \dots, r_n, f_1, f_2, \dots, f_n\}, \circ)$.

Misalkan A_n adalah subgrup dari grup simetri-n. *Centralizer* A_n di grup simetri-n dapat didefinisikan sebagai himpunan dari elemen-elemen grup simetri-n yang memenuhi $g \circ a \circ g^{-1} = a, \forall a \in A, g \in S_n$. *Centralizer* subgrup di grup simetri-n adalah sebagai berikut:

Tabel 3.10: Hasil *Centralizer* Subgrup di Grup Simetri-n

$S_n = \{r_1, r_2, \dots, r_n, f_1, f_2, \dots, f_n\}$	
A_n	$C_{S_n}(A)$
$\{\mathrm{r_n}\}$	$\{r_1, r_2, \dots, r_n, f_1, f_2, \dots, f_n\}$
$\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$	$\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$
$\{\mathrm{r_n}, \mathrm{f_1}\}$	$\{\mathrm{r_n}, \mathrm{f_1}\}$
$\{\mathrm{r_n}, \mathrm{f_2}\}$	$\{\mathrm{r_n}, \mathrm{f_2}\}$
$\vdots$	$\vdots$
$\{\mathrm{r_n}, \mathrm{f_n}\}$	$\{\mathrm{r_n}, \mathrm{f_n}\}$
$\{r_1, r_2, \dots, r_n, f_1, f_2, \dots, f_n\}$	$\{\mathrm{r_n}\}$

Sumber: Analisis Penulis (2011:7)

Berdasarkan tabel tersebut dapat disimpulkan bahwa :

1. *Centralizer* identitas di grup simetri-n $(S_n,\circ)$ adalah semua elemen S_n, yaitu

   $C_{S_n}(\{\mathrm{r_n}\}) = \{r_1, r_2, \dots, r_n, f_1, f_2, \dots, f_n\}$.

2. *Centralizer* subgrup sejati dari grup simetri-n adalah subgrup itu sendiri, yaitu:

   $C_{S_n}(\{\mathrm{r_n}, \mathrm{f_1}\}) = \{\mathrm{r_n}, \mathrm{f_1}\}$

   $C_{S_n}(\{\mathrm{r_n}, \mathrm{f_2}\}) = \{\mathrm{r_n}, \mathrm{f_2}\}$

   $C_{S_n}(\{\mathrm{r_n}, \mathrm{f_n}\}) = \{\mathrm{r_n}, \mathrm{f_n}\}$

   $C_{S_n}(\{r_1, r_2, \dots, r_n\}) = \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$.

3. *Centralizer* semua elemen simetri-n di grup simetri-n adalah elemen identitas, yaitu

   $C_{S_n}(\{r_1, r_2, \dots, r_n, f_1, f_2, \dots, f_n\}) = \{\mathrm{r_n}\}$.

Misalkan A_n adalah subgrup dari grup simetri-n. *Normalizer* A_n di grup simetri-n dapat didefinisikan sebagai himpunan dari elemen-elemen grup simetri-n yang memenuhi $g \circ a \circ g^{-1} \in A_n, \forall a \in A_n, g \in S_n$. *Normalizer* subgrup di grup simetri-n adalah sebagai berikut:

Tabel 3.11: Hasil *Normalizer* Subgrup di Grup Simetri-n

$S_7 = \{r_1, r_2, \ldots, r_n, f_1, f_2, \ldots, f_n\}$	
A_n	$N_{S_n}(A)$
$\{\mathrm{r_n}\}$	$\{r_1, r_2, \ldots, r_n, f_1, f_2, \ldots, f_n\}$
$\{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$	$\{r_1, r_2, \ldots, r_n, f_1, f_2, \ldots, f_n\}$
$\{\mathrm{r_n}, \mathrm{f_1}\}$	$\{\mathrm{r_7}, \mathrm{f_1}\}$
$\{\mathrm{r_n}, \mathrm{f_2}\}$	$\{\mathrm{r_7}, \mathrm{f_2}\}$
$\vdots$	$\vdots$
$\{\mathrm{r_{7n}}, \mathrm{f_n}\}$	$\{\mathrm{r_7}, \mathrm{f_n}\}$
$\{r_1, r_2, \ldots, r_n, f_1, f_2, \ldots, f_n\}$	$\{r_1, r_2, \ldots, r_n, f_1, f_2, \ldots, f_n\}$

Sumber: Analisis Penulis (2011:7)

Berdasarkan tabel tersebut dapat disimpulkan bahwa :

1. *Normalizer* subgrup yang terdiri dari 2 elemen, yaitu elemen identitas dan elemen yang memuat f di grup simetri-n adalah subgrup itu sendiri, yaitu:

$$N_{S_n}(\{\mathrm{r_n}, \mathrm{f_1}\}) = \{\mathrm{r_n}, \mathrm{f_1}\}$$

$$N_{S_n}(\{\mathrm{r_n}, \mathrm{f_2}\}) = \{\mathrm{r_n}, \mathrm{f_2}\}$$

$$\vdots$$

$$N_{S_n}(\{\mathrm{r_n}, \mathrm{f_n}\}) = \{\mathrm{r_n}, \mathrm{f_n}\}$$

2. *Normalizer* subgrup selain terdiri dari 2 elemen di grup simetri-n adalah semua elemen grup simetri-n, yaitu:

$$N_{S_n}(\{\mathrm{r_n}\}) = \{r_1, r_2, \ldots, r_n, f_1, f_2, \ldots, f_n\}$$

$$N_{S_n}(\{r_1, r_2, \ldots, r_n\}) = \{r_1, r_2, \ldots, r_n, f_1, f_2, \ldots, f_n\}$$

$$N_{S_n}(\{r_1, r_2, \ldots, r_n, f_1, f_2, \ldots, f_n\}) = \{r_1, r_2, \ldots, r_n, f_1, f_2, \ldots, f_n\}.$$

Center dari grup simetri-n merupakan himpunan elemen-elemen grup simetri-n yang komutatif dengan setiap elemen simetri-n. Dari definisi tersebut dapat disimpulkan bahwa *center* dari grup simetri-n merupakan *centralizer* S_n di

S_n. Jadi, *center* dari grup simetri-n adalah elemen identitas, yaitu $Z(\{r_1, r_2, \ldots, r_n, f_1, f_2, \ldots, f_n\}) = \{\mathrm{r_n}\}$.

3.2 Grup Simetri-n $(S_n, \circ)$, n Bilangan komposit

3.2.1 Grup Simetri-4 $(S_4, \circ)$

Elemen dari grup simetri-4 terdiri dari 24 elemen. Selanjutnya, dari 24 elemen tersebut hanya diambil elemen yang terdiri dari elemen rotasi dan elemen refleksi. Sehingga elemen dari grup simetri-4 berjumlah 8 elemen, dengan 4 elemen rotasi dan 4 elemen refleksi yang ditunjukkan dalam tabel berikut:

Tabel 3.12: Tabel Anggota Grup Simetri-4

Rotasi (r)	Refleksi (f)
$r_1 = (1234)$ $r_2 = (13)(24)$ $r_3 = (1432)$ $r_4 = (1)(2)(3)(4)$	$f_1 = (12)(34)$ $f_2 = (13)(2)(4)$ $f_3 = (14)(23)$ $f_4 = (1)(3)(24)$

Sumber: Analisis Penulis (2011:7)

Dari tabel tersebut dapat disimpulkan bahwa elemen dari subgrup simetri-3 yang terdiri dari elemen rotasi dan refleksi adalah $S_4 = \{r_1, r_2, r_3, r_4, f_1, f_2, f_3, f_4\}$ dengan elemen identitas adalah r_4. Sedangkan sub himpunan yang memenuhi aksioma-aksioma grup, yaitu subgrup dari grup simetri-4 adalah:

1. $(\{r_4\}, \circ)$
2. $(\{r_2, r_4\}, \circ)$
3. $(\{r_2, r_4, f_1, f_3\}, \circ)$
4. $(\{r_2, r_4, f_2, f_4\}, \circ)$
5. $(\{r_1, r_2, r_3, r_4\}, \circ)$
6. $(\{r_4, f_1\}, \circ)$

7. $(\{r_4, f_2\}, \circ)$
8. $(\{r_4, f_3\}, \circ)$
9. $(\{r_4, f_4\}, \circ)$
10. $(\{r_1, r_2, r_3, r_4, f_1, f_2, f_3, f_4\}, \circ)$

Berdasarkan subgrup-subgrup tersebut, dapat disimpulkan bahwa subgrup simetri-4 yang terdiri dari elemen rotasi dan refleksi memiliki 10 elemen dengan rincian sebagai berikut:

1. Satu subgrup yang terdiri dari 1 elemen yaitu elemen identitas, yaitu $(\{r_4\}, \circ)$.
2. Satu subgrup yang terdiri dari 2 elemen yaitu elemen $r_{\frac{4}{k}}, k = 1,2$, yaitu $(\{r_2, r_4\}, \circ)$.
3. Dua subgrup yang terdiri dari 4 elemen yaitu elemen $r_{\frac{4}{k}}, k = 1,2$ dan 2 elemen f, yaitu $(\{r_2, r_4, f_1, f_2\}, \circ)$ dan $(\{r_2, r_4, f_3, f_4\}, \circ)$
4. Satu subgrup yang terdiri dari 4 elemen yaitu semua elemen r pada grup simetri-4, yaitu $(\{r_1, r_2, r_3, r_4\}, \circ)$.
5. Empat subgrup yang terdiri dari 2 elemen yaitu elemen identitas dan elemen f, yaitu $(\{r_4, f_1\}, \circ)$, $(\{r_4, f_2\}, \circ)$, $(\{r_4, f_3\}, \circ)$ dan $(\{r_4, f_4\}, \circ)$.
6. Satu subgrup yang terdiri dari 8 elemen yaitu semua elemen S_4, yaitu $(\{r_1, r_2, r_3, r_4, f_1, f_2, f_3, f_4\}, \circ)$.

Misalkan A_4 adalah subgrup dari grup simetri-4. *Centralizer* A_4 di grup simetri-4 dapat didefinisikan sebagai himpunan dari elemen-elemen grup simetri-4 yang memenuhi $g \circ a \circ g^{-1} = a, \forall a \in A, g \in S_4$. *Centralizer* subgrup di grup simetri-4 adalah sebagai berikut:

Tabel 3.13: Hasil *Centralizer* Subgrup di Grup Simetri-4

$S_4 = \{r_1, r_2, r_3, r_4, f_1, f_2, f_3, f_4\}$	
A_4	$C_{S_4}(A)$
$\{r_4\}$	$\{r_1, r_2, r_3, r_4, f_1, f_2, f_3, f_4\}$
$\{r_2, r_4\}$	$\{r_1, r_2, r_3, r_4, f_1, f_2, f_3, f_4\}$
$\{r_1, r_2, r_3, r_4\}$	$\{r_1, r_2, r_3, r_4\}$
$\{r_2, r_4, f_1, f_3\}$	$\{r_2, r_4, f_1, f_3\}$
$\{r_2, r_4, f_2, f_4\}$	$\{r_2, r_4, f_2, f_4\}$
$\{r_4, f_1\}$	$\{r_2, r_4, f_1, f_3\}$
$\{r_4, f_2\}$	$\{r_2, r_4, f_2, f_4\}$
$\{r_4, f_3\}$	$\{r_2, r_4, f_1, f_3\}$
$\{r_4, f_4\}$	$\{r_2, r_4, f_2, f_4\}$
$\{r_1, r_2, r_3, r_4, f_1, f_2, f_3, f_4\}$	$\{r_2, r_4\}$

Sumber: Analisis Penulis (2011:7)

Berdasarkan tabel tersebut dapat disimpulkan bahwa :

1. *Centralizer* identitas dan subgrup yang terdiri dari 2 elemen yaitu elemen identitas dan elemen $r_{\frac{4}{k}}, k = 1,2$ adalah semua elemen S_4, yaitu

$$C_{S_4}(\{r_4\}) = \{r_1, r_2, r_3, r_4, f_1, f_2, f_3, f_4\}$$

$$C_{S_4}(\{r_2, r_4\}) = \{r_1, r_2, r_3, r_4, f_1, f_2, f_3, f_4\}.$$

2. *Centralizer* subgrup yang terdiri dari semua elemen r di grup simetri-4 adalah subgrup itu sendiri, yaitu :

$$C_{S_4}(\{r_1, r_2, r_3, r_4\}) = \{r_1, r_2, r_3, r_4\}$$

3. *Centralizer* subgrup yang terdiri dari 2 elemen yaitu elemen identitas dan elemen f dan subgrup yang terdiri dari 4 elemen yaitu elemen $r_{\frac{4}{k}}, k = 1,2$, dan 2 elemen f di grup simetri-4 adalah terdiri dari 4 elemen yaitu elemen $r_{\frac{4}{k}}, k = 1,2$ dan 2 elemen f, yaitu:

$$C_{S_4}(\{r_4, f_1\}) = \{r_2, r_4, f_1, f_3\}$$

$$C_{S_4}(\{r_4, f_2\}) = \{r_2, r_4, f_2, f_4\}$$

$$C_{S_4}(\{\mathrm{r}_4, \mathrm{f}_3\}) = \{\mathrm{r}_2, \mathrm{r}_4, \mathrm{f}_1, \mathrm{f}_3\}$$

$$C_{S_4}(\{\mathrm{r}_4, \mathrm{f}_4\}) = \{\mathrm{r}_2, \mathrm{r}_4, \mathrm{f}_2, \mathrm{f}_4\}$$

$$C_{S_4}(\{\mathrm{r}_2, \mathrm{r}_4, \mathrm{f}_1, \mathrm{f}_3\}) = \{\mathrm{r}_2, \mathrm{r}_4, \mathrm{f}_1, \mathrm{f}_3\}$$

$$C_{S_4}(\{\mathrm{r}_2, \mathrm{r}_4, \mathrm{f}_2, \mathrm{f}_4\}) = \{\mathrm{r}_2, \mathrm{r}_4, \mathrm{f}_2, \mathrm{f}_4\}$$

4. *Centralizer* semua elemen grup simetri-4 di grup simetri-4 adalah terdiri dari 2 elemen yaitu elemen $r_{\frac{4}{k}}, k = 1{,}2$, yaitu

$$C_{S_4}(\{\mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2, \mathrm{r}_3, \mathrm{r}_4, \mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, \mathrm{f}_3, \mathrm{f}_4\}) = \{\mathrm{r}_2, \mathrm{r}_4\}.$$

Misalkan A_4 adalah subgrup dari grup simetri-4. *Normalizer* A_4 di grup simetri-4 dapat didefinisikan sebagai himpunan dari elemen-elemen grup simetri-4 yang memenuhi $g \circ a \circ g^{-1} \in A_4, \forall a \in A_4, g \in S_4$. *Normalizer* subgrup di grup simetri-4 adalah sebagai berikut:

Tabel 3.14: Hasil *Normalizer* Subgrup di Grup Simetri-4

$S_4 = \{\mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2, \mathrm{r}_3, \mathrm{r}_4, \mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, \mathrm{f}_3, \mathrm{f}_4\}$	
A_4	$N_{S_4}(A)$
$\{\mathrm{r}_4\}$	$\{\mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2, \mathrm{r}_3, \mathrm{r}_4, \mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, \mathrm{f}_3, \mathrm{f}_4\}$
$\{\mathrm{r}_2, \mathrm{r}_4\}$	$\{\mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2, \mathrm{r}_3, \mathrm{r}_4, \mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, \mathrm{f}_3, \mathrm{f}_4\}$
$\{\mathrm{r}_2, \mathrm{r}_4, \mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2\}$	$\{\mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2, \mathrm{r}_3, \mathrm{r}_4, \mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, \mathrm{f}_3, \mathrm{f}_4\}$
$\{\mathrm{r}_2, \mathrm{r}_4, \mathrm{f}_3, \mathrm{f}_4\}$	$\{\mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2, \mathrm{r}_3, \mathrm{r}_4, \mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, \mathrm{f}_3, \mathrm{f}_4\}$
$\{\mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2, \mathrm{r}_3, \mathrm{r}_4\}$	$\{\mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2, \mathrm{r}_3, \mathrm{r}_4, \mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, \mathrm{f}_3, \mathrm{f}_4\}$
$\{\mathrm{r}_4, \mathrm{f}_1\}$	$\{\mathrm{r}_2, \mathrm{r}_4, \mathrm{f}_1, \mathrm{f}_3\}$
$\{\mathrm{r}_4, \mathrm{f}_2\}$	$\{\mathrm{r}_2, \mathrm{r}_4, \mathrm{f}_2, \mathrm{f}_4\}$
$\{\mathrm{r}_4, \mathrm{f}_3\}$	$\{\mathrm{r}_2, \mathrm{r}_4, \mathrm{f}_1, \mathrm{f}_3\}$
$\{\mathrm{r}_4, \mathrm{f}_4\}$	$\{\mathrm{r}_2, \mathrm{r}_4, \mathrm{f}_2, \mathrm{f}_4\}$
$\{\mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2, \mathrm{r}_3, \mathrm{r}_4, \mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, \mathrm{f}_3, \mathrm{f}_4\}$	$\{\mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2, \mathrm{r}_3, \mathrm{r}_4, \mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, \mathrm{f}_3, \mathrm{f}_4\}$

Sumber: Analisis Penulis (2011:7)

Berdasarkan tabel tersebut dapat disimpulkan bahwa:

1. *Normalizer* subgrup yang terdiri dari 2 elemen, yaitu elemen identitas dan elemen f di grup simetri-4 adalah terdiri dari 4 elemen yaitu elemen identitas, elemen $r_{\frac{4}{k}}, k = 1,2$ dan 2 elemen f, yaitu:

$$N_{S_4}(\{\mathrm{r}_4, \mathrm{f}_1\}) = \{\mathrm{r}_2, \mathrm{r}_4, \mathrm{f}_1, \mathrm{f}_3\}$$

$$N_{S_4}(\{\mathrm{r}_4, \mathrm{f}_2\}) = \{\mathrm{r}_2, \mathrm{r}_4, \mathrm{f}_2, \mathrm{f}_4\}$$

$$N_{S_4}(\{\mathrm{r}_4, \mathrm{f}_3\}) = \{\mathrm{r}_2, \mathrm{r}_4, \mathrm{f}_1, \mathrm{f}_3\}$$

$$N_{S_4}(\{\mathrm{r}_4, \mathrm{f}_4\}) = \{\mathrm{r}_2, \mathrm{r}_4, \mathrm{f}_2, \mathrm{f}_4\}.$$

2. *Normalizer* subgrup selain terdiri dari 2 elemen yaitu elemen identitas dan elemen f di grup simetri-4 adalah semua elemen simetri-4, yaitu:

$$N_{S_4}(\{\mathrm{r}_4\}) = \{\mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2, \mathrm{r}_3, \mathrm{r}_4, \mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, \mathrm{f}_3, \mathrm{f}_4\}$$

$$N_{S_4}(\{\mathrm{r}_2, \mathrm{r}_4\}) = \{\mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2, \mathrm{r}_3, \mathrm{r}_4, \mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, \mathrm{f}_3, \mathrm{f}_4\}$$

$$N_{S_4}(\{\mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2, \mathrm{r}_3, \mathrm{r}_4\}) = \{\mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2, \mathrm{r}_3, \mathrm{r}_4, \mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, \mathrm{f}_3, \mathrm{f}_4\}$$

$$N_{S_4}(\{\mathrm{r}_2, \mathrm{r}_4, \mathrm{f}_1, \mathrm{f}_3\}) = \{\mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2, \mathrm{r}_3, \mathrm{r}_4, \mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, \mathrm{f}_3, \mathrm{f}_4\}$$

$$N_{S_4}(\{\mathrm{r}_2, \mathrm{r}_4, \mathrm{f}_2, \mathrm{f}_4\}) = \{\mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2, \mathrm{r}_3, \mathrm{r}_4, \mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, \mathrm{f}_3, \mathrm{f}_4\}$$

$$N_{S_4}(\{\mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2, \mathrm{r}_3, \mathrm{r}_4, \mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, \mathrm{f}_3, \mathrm{f}_4\}) = \{\mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2, \mathrm{r}_3, \mathrm{r}_4, \mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, \mathrm{f}_3, \mathrm{f}_4\}.$$

Center dari grup simetri-4 merupakan himpunan elemen-elemen grup simetri-4 yang komutatif dengan setiap elemen grup simetri-4. Dari definisi tersebut dapat disimpulkan bahwa *center* dari grup simetri-4 merupakan *centralizer* S_4 di S_4. Jadi, *center* dari grup simetri-4 adalah elemen $r_{\frac{4}{k}}, k = 1,2$, yaitu :

$$Z(\{\mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2, \mathrm{r}_3, \mathrm{r}_4, \mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, \mathrm{f}_3, \mathrm{f}_4\}) = \{\mathrm{r}_2, \mathrm{r}_4\}.$$

3.2.2 Grup Simetri-6 $(S_6, \circ)$

Elemen dari grup simetri-6 terdiri dari 720 elemen. Selanjutnya, dari 720 elemen tersebut hanya diambil elemen yang terdiri dari elemen rotasi dan elemen refleksi. Sehingga elemen dari grup simetri-6 berjumlah 12 elemen, dengan 6 elemen rotasi dan 6 elemen refleksi yang ditunjukkan dalam tabel berikut:

Tabel 3.15: Tabel Elemen Grup Simetri-6

Rotasi:	Refleksi:
$r_1 = (123456)$	$f_1 = (12)(36)(45)$
$r_2 = (135)(246)$	$f_2 = (13)(2)(5)(46)$
$r_3 = (14)(25)(36)$	$f_3 = (14)(23)(56)$
$r_4 = (153)(264)$	$f_4 = (15)(24)(3)(6)$
$r_5 = (165432)$	$f_5 = (16)(25)(34)$
$r_6 = (1)(2)(3)(4)(5)(6)$	$f_6 = (1)(4)(26)(35)$

Sumber: Analisis Penulis (2011:7)

Dari tabel tersebut dapat disimpulkan bahwa elemen dari subgrup simetri-3 yang terdiri dari elemen rotasi dan refleksi adalah $S_6 = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$ dengan elemen identitas adalah r_6. Sedangkan sub himpunan yang memenuhi aksioma-aksioma grup, yaitu subgrup dari grup simetri-6 adalah:

1. $(\{r_6\}, \circ)$
2. $(\{r_3, r_6\}, \circ)$
3. $(\{r_3, r_6, f_1, f_4\}, \circ)$
4. $(\{r_3, r_6, f_2, f_5\}, \circ)$
5. $(\{r_3, r_6, f_3, f_6\}, \circ)$
6. $(\{r_2, r_4, r_6\}, \circ)$
7. $(\{r_2, r_4, r_6, f_1, f_2, f_3\}, \circ)$
8. $(\{r_2, r_4, r_6, f_4, f_5, f_6\}, \circ)$

9. $(\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6\}, \circ)$

10. $(\{r_6, f_1\}, \circ)$

11. $(\{r_6, f_2\}, \circ)$

12. $(\{r_6, f_3\}, \circ)$

13. $(\{r_6, f_4\}, \circ)$

14. $(\{r_6, f_5\}, \circ)$

15. $(\{r_6, f_6\}, \circ)$

16. $(\{r_6, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}, \circ)$

Berdasarkan subgrup-subgrup tersebut, dapat disimpulkan bahwa subgrup simetri-6 yang terdiri dari elemen rotasi dan refleksi memiliki 16 subgrup dengan rincian sebagai berikut:

1. Satu subgrup yang terdiri dari 1 elemen yaitu elemen identitas, yaitu $(\{r_6\}, \circ)$.
2. Enam subgrup yang terdiri dari 2 elemen yaitu elemen identitas dan elemen f yaitu $(\{r_6, f_1\}, \circ)$, $(\{r_6, f_2\}, \circ)$, $(\{r_6, f_3\}, \circ)$, $(\{r_6, f_4\}, \circ)$, $(\{r_6, f_5\}, \circ)$, dan $(\{r_6, f_6\}, \circ)$.
3. Satu subgrup yang terdiri dari 6 elemen yaitu semua elemen r pada grup simetri-6, yaitu $(\{r_2, r_4, r_6, r_4, r_5, r_6\}, \circ)$.
4. Satu subgrup yang terdiri dari 12 elemen yaitu semua elemen S_6, yaitu $(\{r_6, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}, \circ)$.
5. Satu subgrup yang terdiri dari 2 elemen yaitu elemen identitas dan elemen $r_{\frac{6}{k}}, k = 1,2$, yaitu $(\{r_3, r_6\}, \circ)$.

6. Tiga subgrup yang terdiri dari 4 elemen yaitu elemen identitas, elemen $r_{\frac{6}{k}}, k = 1,2,$ dan 2 elemen f, yaitu $(\{r_3, r_6, f_1, f_4\},\circ)$, $(\{r_3, r_6, f_2, f_5\},\circ)$ dan $(\{r_3, r_6, f_3, f_6\},\circ)$.
7. Satu subgrup yang terdiri dari 3 elemen yaitu elemen yang memuat $r_{\frac{6k}{3}} = r_{2k}, k = 1,2,3$, yaitu $(\{r_2, r_4, r_6\},\circ)$.
8. Dua subgrup yang terdiri dari 6 elemen, yaitu elemen $r_{\frac{6k}{3}} = r_{2k}, k = 1,2,3$ dan 3 elemen f, yaitu $(\{r_2, r_4, r_6, f_1, f_2, f_3\},\circ)$ dan $(\{r_2, r_4, r_6, f_4, f_5, f_6\},\circ)$.

Misalkan A_6 adalah subgrup dari grup simetri-6. *Centralizer* A_6 di grup simetri-6 dapat didefinisikan sebagai himpunan dari elemen-elemen grup simetri-6 yang memenuhi $g \circ a \circ g^{-1} = a, \forall a \in A, g \in S_6$. *Centralizer* subgrup di grup simetri-6 adalah sebagai berikut:

Tabel 3.16: Hasil *Centralizer* Subgrup di Grup Simetri-6

$S_6 = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$	
A_6	$C_{S_6}(A)$
$\{r_6\}$	$\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$
$\{r_3, r_6\}$	$\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$
$\{r_2, r_4, r_6\}$	$\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6\}$
$\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6\}$	$\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6\}$
$\{r_3, r_6, f_1, f_4\}$	$\{r_3, r_6, f_1, f_4\}$
$\{r_3, r_6, f_2, f_5\}$	$\{r_3, r_6, f_2, f_5\}$
$\{r_3, r_6, f_3, f_6\}$	$\{r_3, r_6, f_3, f_6\}$
$\{r_2, r_4, r_6, f_1, f_2, f_3\}$	$\{r_3, r_6\}$
$\{r_2, r_4, r_6, f_4, f_5, f_6\}$	$\{r_3, r_6\}$
$\{r_6, f_1\}$	$\{r_3, r_6, f_1, f_4\}$
$\{r_6, f_2\}$	$\{r_3, r_6, f_2, f_5\}$
$\{r_6, f_3\}$	$\{r_3, r_6, f_3, f_6\}$
$\{r_6, f_4\}$	$\{r_3, r_6, f_1, f_4\}$
$\{r_6, f_5\}$	$\{r_3, r_6, f_2, f_5\}$
$\{r_6, f_6\}$	$\{r_3, r_6, f_3, f_6\}$
$\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$	$\{r_3, r_6\}$

Sumber: Analisis Penulis (2011:7)

Berdasarkan tabel tersebut dapat disimpulkan bahwa :

1. *Centralizer* identitas dan subgrup yang terdiri dari 2 elemen yaitu elemen $r_{\frac{6}{k}}, k = 1{,}2$ di grup simetri-6 adalah semua elemen S_6, yaitu

   $C_{S_6}(\{r_6\}) = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$ dan

   $C_{S_6}(\{r_3, r_6\}) = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$.

2. *Centralizer* subgrup yang terdiri dari elemen r, selain subgrup yang terdiri dari elemen $r_{\frac{6}{k}}, k = 1{,}2$, adalah terdiri dari semua elemen r, yaitu

   $C_{S_6}(\{r_2, r_4, r_6\}) = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6\}$ dan

   $C_{S_6}(\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6\}) = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6\}$.

3. *Centralizer* subgrup yang terdiri dari 2 elemen yaitu elemen identitas dan elemen f, dan subgrup yang terdiri dari 4 elemen yaitu elemen $r_{\frac{6}{k}}, k = 1{,}2$

dan 2 elemen f di grup simetri-6 adalah terdiri dari 4 elemen yaitu elemen identitas, elemen $r_{\frac{6}{k}}, k = 1,2$, dan 2 elemen f, yaitu:

$C_{S_6}(\{\mathrm{r}_6, \mathrm{f}_1\}) = \{\mathrm{r}_3, \mathrm{r}_6, \mathrm{f}_1, \mathrm{f}_4\}$

$C_{S_6}(\{\mathrm{r}_6, \mathrm{f}_2\}) = \{\mathrm{r}_3, \mathrm{r}_6, \mathrm{f}_2, \mathrm{f}_5\}$

$C_{S_6}(\{\mathrm{r}_6, \mathrm{f}_3\}) = \{\mathrm{r}_3, \mathrm{r}_6, \mathrm{f}_3, \mathrm{f}_6\}$

$C_{S_6}(\{\mathrm{r}_6, \mathrm{f}_4\}) = \{\mathrm{r}_3, \mathrm{r}_6, \mathrm{f}_1, \mathrm{f}_4\}$

$C_{S_6}(\{\mathrm{r}_6, \mathrm{f}_5\}) = \{\mathrm{r}_3, \mathrm{r}_6, \mathrm{f}_2, \mathrm{f}_5\}$

$C_{S_6}(\{\mathrm{r}_6, \mathrm{f}_6\}) = \{\mathrm{r}_3, \mathrm{r}_6, \mathrm{f}_3, \mathrm{f}_6\}$

$C_{S_6}(\{\mathrm{r}_3, \mathrm{r}_6, \mathrm{f}_1, \mathrm{f}_4\}) = \{\mathrm{r}_3, \mathrm{r}_6, \mathrm{f}_1, \mathrm{f}_4\}$

$C_{S_6}(\{\mathrm{r}_3, \mathrm{r}_6, \mathrm{f}_2, \mathrm{f}_5\}) = \{\mathrm{r}_3, \mathrm{r}_6, \mathrm{f}_2, \mathrm{f}_5\}$

$C_{S_6}(\{\mathrm{r}_3, \mathrm{r}_6, \mathrm{f}_3, \mathrm{f}_6\}) = \{\mathrm{r}_3, \mathrm{r}_6, \mathrm{f}_3, \mathrm{f}_6\}$.

4. *Centralizer* semua elemen simetri-6 dan subgrup yang terdiri dari elemen identitas, elemen yang memuat $r_{\frac{6k}{3}} = r_{2k}, k = 1,2,3,$ dan elemen f di grup simetri-6 adalah terdiri dari 2 elemen yaitu elemen $r_{\frac{6}{k}}, k = 1,2,$ yaitu:

$C_{P_6}(\{\mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2, \mathrm{r}_3, \mathrm{r}_4, \mathrm{r}_5, \mathrm{r}_6, \mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, \mathrm{f}_3, \mathrm{f}_4, \mathrm{f}_5, \mathrm{f}_6\}) = \{\mathrm{r}_3, \mathrm{r}_6\}$

$C_{P_6}(\{\mathrm{r}_2, \mathrm{r}_4, \mathrm{r}_6, \mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, \mathrm{f}_3\}) = \{\mathrm{r}_3, \mathrm{r}_6\}$

$C_{P_6}(\{\mathrm{r}_2, \mathrm{r}_4, \mathrm{r}_6, \mathrm{f}_4, \mathrm{f}_5, \mathrm{f}_6\}) = \{\mathrm{r}_3, \mathrm{r}_6\}$.

Misalkan A_6 adalah subgrup dari grup simetri-6. *Normalizer* A_6 di grup simetri-6 dapat didefinisikan sebagai himpunan dari elemen-elemen grup simetri-6 yang memenuhi $g \circ a \circ g^{-1} \in A_6, \forall a \in A_6, g \in S_6$. *Normalizer* subgrup di grup simetri-6 adalah sebagai berikut:

Tabel 3.17: Hasil *Normalizer* Subgrup di Grup Simetri-6

$S_6 = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$	
A_6	$N_{S_6}(A)$
$\{r_6\}$	$\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$
$\{r_3, r_6\}$	$\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$
$\{r_2, r_4, r_6\}$	$\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$
$\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6\}$	$\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$
$\{r_3, r_6, f_1, f_4\}$	$\{r_3, r_6, f_1, f_4\}$
$\{r_3, r_6, f_2, f_5\}$	$\{r_3, r_6, f_2, f_5\}$
$\{r_3, r_6, f_3, f_6\}$	$\{r_3, r_6, f_3, f_6\}$
$\{r_2, r_4, r_6, r_1, r_2, r_3\}$	$\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$
$\{r_2, r_4, r_6, r_4, r_5, r_6\}$	$\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$
$\{r_6, f_1\}$	$\{r_3, r_6, f_1, f_4\}$
$\{r_6, f_2\}$	$\{r_3, r_6, f_2, f_5\}$
$\{r_6, f_3\}$	$\{r_3, r_6, f_3, f_6\}$
$\{r_6, f_4\}$	$\{r_3, r_6, f_1, f_4\}$
$\{r_6, f_5\}$	$\{r_3, r_6, f_2, f_5\}$
$\{r_6, f_6\}$	$\{r_3, r_6, f_3, f_6\}$
$\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$	$\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$

Sumber: Analisis Penulis (2011:7)

Berdasarkan tabel tersebut dapat disimpulkan bahwa:

1. *Normalizer* subgrup yang terdiri dari 2 elemen, yaitu elemen identitas dan elemen f, dan subgrup yang terdiri dari 4 elemen yaitu elemen $r_{\frac{6}{k}}, k = 1,2$ dan 2 elemen f di grup simetri-6 adalah subgrup yang terdiri dari 4 elemen yaitu elemen $r_{\frac{6}{k}}, k = 1,2$ dan 2 elemen f, yaitu:

   $N_{S_6}(\{r_6, f_1\}) = \{r_3, r_6, f_1, f_4\}$

   $N_{S_6}(\{r_6, f_2\}) = \{r_3, r_6, f_2, f_5\}$

   $N_{S_6}(\{r_6, f_3\}) = \{r_3, r_6, f_3, f_6\}$

   $N_{S_6}(\{r_6, f_4\}) = \{r_3, r_6, f_1, f_4\}$

   $N_{S_6}(\{r_6, f_5\}) = \{r_3, r_6, f_2, f_5\}$

   $N_{S_6}(\{r_6, f_6\}) = \{r_3, r_6, f_3, f_6\}$

$N_{S_6}(\{\mathrm{r}_3, \mathrm{r}_6, \mathrm{f}_1, \mathrm{f}_4\}) = \{\mathrm{r}_3, \mathrm{r}_6, \mathrm{f}_1, \mathrm{f}_4\}$

$N_{S_6}(\{\mathrm{r}_3, \mathrm{r}_6, \mathrm{f}_2, \mathrm{f}_5\}) = \{\mathrm{r}_3, \mathrm{r}_6, \mathrm{f}_2, \mathrm{f}_5\}$

$N_{S_6}(\{\mathrm{r}_3, \mathrm{r}_6, \mathrm{f}_3, \mathrm{f}_6\}) = \{\mathrm{r}_3, \mathrm{r}_6, \mathrm{f}_3, \mathrm{f}_6\}$.

2. *Normalizer* subgrup selain terdiri dari 2 tipe subgrup tersebut di grup simetri-6 adalah semua elemen grup simetri-6, yaitu:

   $N_{S_6}(\{r_6\}) = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$

   $N_{S_6}(\{\mathrm{r}_3, \mathrm{r}_6\}) = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$

   $N_{S_6}(\{\mathrm{r}_2, \mathrm{r}_4, \mathrm{r}_6\}) = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$

   $N_{S_6}(\{\mathrm{r}_2, \mathrm{r}_4, \mathrm{r}_6, \mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2, \mathrm{r}_3\}) = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$

   $N_{S_6}(\{\mathrm{r}_2, \mathrm{r}_4, \mathrm{r}_6, \mathrm{r}_4, \mathrm{r}_5, \mathrm{r}_6\}) = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$

   $N_{S_6}(\{\mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2, \mathrm{r}_3, \mathrm{r}_4, \mathrm{r}_5, \mathrm{r}_6\}) = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$

   $N_{S_6}(\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}) = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$

Center dari grup simetri-6 merupakan himpunan elemen-elemen grup simetri-6 yang komutatif dengan setiap elemen grup simetri-6. Dari definisi tersebut dapat disimpulkan bahwa *center* dari grup simetri-6 merupakan *centralizer* S_6 di S_6. Jadi, *center* dari grup simetri-6 adalah elemen identitas dan elemen $r_{\frac{6}{k}}, k = 1,2$, yaitu:

$$Z(\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}) = \{\mathrm{r}_3, \mathrm{r}_6\}.$$

3.2.3 Grup Simetri-8 $(S_8,\circ)$

Elemen dari grup simetri-8 terdiri dari 40.320 elemen. Selanjutnya, dari 40.320 elemen tersebut hanya diambil elemen yang terdiri dari elemen rotasi dan elemen refleksi. Sehingga elemen dari grup simetri-8 berjumlah 16 elemen, dengan 8 elemen rotasi dan 8 elemen refleksi yang ditunjukkan dalam tabel berikut:

Tabel 3.18: Tabel Anggota Grup Simetri-8

Rotasi (r)	Refleksi (f)
$r_1 = (12345678)$	$f_1 = (12)(38)(47)(56)$
$r_2 = (1357)(2468)$	$f_2 = (13)(48)(57)(2)(6)$
$r_3 = (14725836)$	$f_3 = (14)(23)(58)(67)$
$r_4 = (15)(26)(37)(48)$	$f_4 = (15)(24)(68)(3)(7)$
$r_5 = (16385274)$	$f_5 = (16)(25)(34)(78)(46)$
$r_6 = (1753)(2864)$	$f_6 = (17)(26)(35)(4)(8)$
$r_7 = (18765432)$	$f_7 = (18)(27)(36)(45)$
$r_8 = (1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)$	$f_8 = (1)(5)(28)(37)(46)$

Sumber: Analisis Penulis (2011:7)

Dari tabel tersebut dapat disimpulkan bahwa elemen dari subgrup simetri-3 yang terdiri dari elemen rotasi dan refleksi adalah $S_8 = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8\}$ dengan elemen identitas adalah r_8. Sedangkan sub himpunan yang memenuhi aksioma-aksioma grup, yaitu subgrup dari grup simetri-8 adalah:

1. $(\{r_8\},\circ)$
2. $(\{r_4, r_8\},\circ)$
3. $(\{r_2, r_4, r_6, r_8\},\circ)$
4. $(\{r_2, r_4, r_6, r_8, f_1, f_2, f_3, f_4\},\circ)$
5. $(\{r_2, r_4, r_6, r_8, f_5, f_6, f_7, f_8\},\circ)$
6. $(\{r_4, r_8, f_1, f_5\},\circ)$

7. $(\{r_4, r_8, f_2, f_6\}, \circ)$
8. $(\{r_4, r_8, f_3, f_7\}, \circ)$
9. $(\{r_4, r_8, f_4, f_8\}, \circ)$
10. $(\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8\}, \circ)$
11. $(\{r_8, f_1\}, \circ)$
12. $(\{r_8, f_2\}, \circ)$
13. $(\{r_8, f_3\}, \circ)$
14. $(\{r_8, f_4\}, \circ)$
15. $(\{r_8, f_5\}, \circ)$
16. $(\{r_8, f_6\}, \circ)$
17. $(\{r_8, f_7\}, \circ)$
18. $(\{r_8, f_8\}, \circ)$
19. $(\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8\}, \circ)$

Berdasarkan subgrup-subgrup tersebut, dapat disimpulkan bahwa subgrup simetri-8 yang terdiri dari elemen rotasi dan refleksi memiliki 19 subgrup dengan rincian sebagai berikut:

1. Satu subgrup yang terdiri dari 1 elemen yaitu elemen identitas, yaitu $(\{r_8\}, \circ)$.
2. Satu subgrup yang terdiri dari 2 elemen yaitu elemen $r_{\frac{8}{k}}, k = 1,2$ yaitu $(\{r_4, r_8\}, \circ)$.
3. Empat subgrup yang terdiri dari 4 elemen yaitu elemen $r_{\frac{8}{k}}, k = 1,2$, dan 2 elemen f, yaitu: $(\{r_4, r_8, f_1, f_5\}, \circ)$, $(\{r_4, r_8, f_2, f_6\}, \circ)$, $(\{r_4, r_8, f_3, f_7\}, \circ)$, dan $(\{r_4, r_8, f_4, f_8\}, \circ)$.

4. Satu subgrup yang terdiri dari 4 elemen yaitu elemen elemen yang memuat $r_{\frac{8k}{4}} = r_{2k}, k = 1,2,3,4$, yaitu $(\{r_2, r_4, r_6, r_8\},\circ)$.
5. Dua subgrup yang terdiri dari 8 elemen yaitu elemen $r_{\frac{8k}{4}} = r_{2k}, k = 1,2,3,4$ dan 4 elemen f, yaitu :
   $(\{r_2, r_4, r_6, r_8, f_1, f_2, f_3, f_4\},\circ)$ dan $(\{r_2, r_4, r_6, r_8, f_5, f_6, f_7, f_8\},\circ)$.
6. Satu subgrup yang terdiri dari 8 elemen yaitu semua elemen r termasuk elemen identitas, yaitu $(\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8\},\circ)$.
7. Delapan subgrup yang terdiri dari 2 elemen yaitu elemen identitas dan elemen f, yaitu $(\{r_8, f_1\},\circ)$, $(\{r_8, f_2\},\circ)$, $(\{r_8, f_3\},\circ)$, $(\{r_8, f_4\},\circ)$, $(\{r_8, f_5\},\circ)$, $(\{r_8, f_6\},\circ)$, $(\{r_8, f_7\},\circ)$, dan $(\{r_8, f_8\},\circ)$.
8. Satu subgrup yang terdiri dari 16 elemen yaitu semua elemen S_8, yaitu $\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8\}$.

Misalkan A_8 adalah subgrup dari grup simetri-8. *Centralizer* A_8 di grup simetri-8 dapat didefinisikan sebagai himpunan dari elemen-elemen grup simetri-8 yang memenuhi $g \circ a \circ g^{-1} = a, \forall a \in A, g \in S_8$. *Centralizer* subgrup di grup simetri-8 adalah sebagai berikut:

Tabel 3.19: Hasil *Centralizer* Subgrup di Grup Simetri-8

$S_8 = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8\}$	
A_8	$C_{S_8}(A)$
$\{\mathrm{r}_8\}$	$\{\mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2, \mathrm{r}_3, \mathrm{r}_4, \mathrm{r}_5, \mathrm{r}_6, \mathrm{r}_7, \mathrm{r}_8, \mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, \mathrm{f}_3, \mathrm{f}_4, \mathrm{f}_5, \mathrm{f}_6, \mathrm{f}_7, \mathrm{f}_8\}$
$\{\mathrm{r}_4, \mathrm{r}_8\}$	$\{\mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2, \mathrm{r}_3, \mathrm{r}_4, \mathrm{r}_5, \mathrm{r}_6, \mathrm{r}_7, \mathrm{r}_8, \mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, \mathrm{f}_3, \mathrm{f}_4, \mathrm{f}_5, \mathrm{f}_6, \mathrm{f}_7, \mathrm{f}_8\}$
$\{\mathrm{r}_4, \mathrm{r}_8, \mathrm{f}_1, \mathrm{f}_5\}$	$\{\mathrm{r}_4, \mathrm{r}_8, \mathrm{f}_1, \mathrm{f}_5\}$
$\{\mathrm{r}_4, \mathrm{r}_8, \mathrm{f}_2, \mathrm{f}_6\}$	$\{\mathrm{r}_4, \mathrm{r}_8, \mathrm{f}_2, \mathrm{f}_6\}$
$\{\mathrm{r}_4, \mathrm{r}_8, \mathrm{f}_3, \mathrm{f}_7\}$	$\{\mathrm{r}_4, \mathrm{r}_8, \mathrm{f}_3, \mathrm{f}_7\}$
$\{\mathrm{r}_4, \mathrm{r}_8, \mathrm{f}_4, \mathrm{f}_8\}$	$\{\mathrm{r}_4, \mathrm{r}_8, \mathrm{f}_4, \mathrm{f}_8\}$
$\{\mathrm{r}_2, \mathrm{r}_4, \mathrm{r}_6, \mathrm{r}_8\}$	$\{\mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2, \mathrm{r}_3, \mathrm{r}_4, \mathrm{r}_5, \mathrm{r}_6, \mathrm{r}_7, \mathrm{r}_8\}$
$\{\mathrm{r}_2, \mathrm{r}_4, \mathrm{r}_6, \mathrm{r}_8, \mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, \mathrm{f}_3, \mathrm{f}_4\}$	$\{\mathrm{r}_4, \mathrm{r}_8\}$
$\{\mathrm{r}_2, \mathrm{r}_4, \mathrm{r}_6, \mathrm{r}_8, \mathrm{f}_5, \mathrm{f}_6, \mathrm{f}_7, \mathrm{f}_8\}$	$\{\mathrm{r}_4, \mathrm{r}_8\}$
$\{\mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2, \mathrm{r}_3, \mathrm{r}_4, \mathrm{r}_5, \mathrm{r}_6, \mathrm{r}_7, \mathrm{r}_8\}$	$\{\mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2, \mathrm{r}_3, \mathrm{r}_4, \mathrm{r}_5, \mathrm{r}_6, \mathrm{r}_7, \mathrm{r}_8\}$
$\{\mathrm{r}_8, \mathrm{f}_1\}$	$\{\mathrm{r}_4, \mathrm{r}_8, \mathrm{f}_1, \mathrm{f}_5\}$
$\{\mathrm{r}_8, \mathrm{f}_2\}$	$\{\mathrm{r}_4, \mathrm{r}_8, \mathrm{f}_2, \mathrm{f}_6\}$
$\{\mathrm{r}_8, \mathrm{f}_3\}$	$\{\mathrm{r}_4, \mathrm{r}_8, \mathrm{f}_3, \mathrm{f}_7\}$
$\{\mathrm{r}_8, \mathrm{f}_4\}$	$\{\mathrm{r}_4, \mathrm{r}_8, \mathrm{f}_4, \mathrm{f}_8\}$
$\{\mathrm{r}_8, \mathrm{f}_5\}$	$\{\mathrm{r}_4, \mathrm{r}_8, \mathrm{f}_1, \mathrm{f}_5\}$
$\{\mathrm{r}_8, \mathrm{f}_6\}$	$\{\mathrm{r}_4, \mathrm{r}_8, \mathrm{f}_2, \mathrm{f}_6\}$
$\{\mathrm{r}_8, \mathrm{f}_7\}$	$\{\mathrm{r}_4, \mathrm{r}_8, \mathrm{f}_3, \mathrm{f}_7\}$
$\{\mathrm{r}_8, \mathrm{f}_8\}$	$\{\mathrm{r}_4, \mathrm{r}_8, \mathrm{f}_4, \mathrm{f}_8\}$
$\{\mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2, \mathrm{r}_3, \mathrm{r}_4, \mathrm{r}_5, \mathrm{r}_6, \mathrm{r}_7, \mathrm{r}_8, \mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, \mathrm{f}_3, \mathrm{f}_4, \mathrm{f}_5, \mathrm{f}_6, \mathrm{f}_7, \mathrm{f}_8\}$	$\{\mathrm{r}_4, \mathrm{r}_8\}$

Sumber: Analisis Penulis (2011:7)

Berdasarkan tabel tersebut dapat disimpulkan bahwa :

1. *Centralizer* identitas dan subgrup yang terdiri dari 2 elemen yaitu elemen $r_{\frac{8}{k}}, k = 1,2$ di grup simetri-8 adalah semua elemen S_8, yaitu:

$$C_{S_8}(\{r_8\}) = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8\}$$

$$C_{S_8}(\{\mathrm{r}_4, \mathrm{r}_8\}) = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8\}.$$

2. *Centralizer* subgrup yang hanya terdiri dari elemen r, selain subgrup yang terdiri dari elemen identitas dan elemen $r_{\frac{8}{k}}, k = 1,2$ adalah terdiri dari semua elemen r pada grup simetri-8, yaitu

$$C_{S_8}(\{\mathrm{r}_2, \mathrm{r}_4, \mathrm{r}_6, \mathrm{r}_8\}) = \{\mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2, \mathrm{r}_3, \mathrm{r}_4, \mathrm{r}_5, \mathrm{r}_6, \mathrm{r}_7, \mathrm{r}_8\}$$

$$C_{S_8}(\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8\}) = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8\}.$$

3. *Centralizer* subgrup yang terdiri dari 2 elemen yaitu elemen identitas dan elemen f dan subgrup yang terdiri dari 4 elemen yaitu elemen $r_{\frac{8}{k}}, k = 1,2$, dan 2 elemen f di grup simetri-8 adalah terdiri dari 4 elemen yaitu elemen $r_{\frac{8}{k}}, k = 1,2$ dan 2 elemen f, yaitu:

$$C_{S_8}(\{r_8, f_1\}) = \{r_4, r_8, f_1, f_5\}$$

$$C_{S_8}(\{r_8, f_2\}) = \{r_4, r_8, f_2, f_6\}$$

$$C_{S_8}(\{r_8, f_3\}) = \{r_4, r_8, f_3, f_7\}$$

$$C_{S_8}(\{r_8, f_4\}) = \{r_4, r_8, f_4, f_8\}$$

$$C_{S_8}(\{r_8, f_5\}) = \{r_4, r_8, f_1, f_5\}$$

$$C_{S_8}(\{r_8, f_6\}) = \{r_4, r_8, f_2, f_6\}$$

$$C_{S_8}(\{r_8, f_7\}) = \{r_4, r_8, f_3, f_7\}$$

$$C_{S_8}(\{r_8, f_8\}) = \{r_4, r_8, f_4, f_8\}$$

$$C_{S_8}(\{r_4, r_8, f_1, f_5\}) = \{r_4, r_8, f_1, f_5\}$$

$$C_{S_8}(\{r_4, r_8, f_2, f_6\}) = \{r_4, r_8, f_2, f_6\}$$

$$C_{S_8}(\{r_4, r_8, f_3, f_7\}) = \{r_4, r_8, f_3, f_7\}$$

$$C_{S_8}(\{r_4, r_8, f_4, f_8\}) = \{r_4, r_8, f_4, f_8\}$$

4. *Centralizer* semua elemen grup simetri-8 dan subgrup yang terdiri dari elemen $r_{\frac{8k}{4}} = r_{2k}, k = 1,2,3,4$ dan 4 elemen elemen f di grup simetri-8 adalah terdiri dari 2 elemen yaitu elemen $r_{\frac{8}{k}}, k = 1,2$, yaitu:

$$C_{S_8}(\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8\}) = \{r_4, r_8\}$$

$$C_{S_8}(\{r_2, r_4, r_6, r_8, f_1, f_2, f_3, f_4\}) = \{r_4, r_8\}$$

$$C_{S_8}(\{r_2, r_4, r_6, r_8, f_5, f_6, f_7, f_8\}) = \{r_4, r_8\}.$$

Misalkan A_8 adalah subgrup dari grup simetri-8. *Normalizer* A_8 di grup simetri-8 dapat didefinisikan sebagai himpunan dari elemen-elemen grup simetri-8 yang memenuhi $g \circ a \circ g^{-1} \in A_8, \forall a \in A_8, g \in S_8$. *Normalizer* subgrup di grup simetri-8 adalah sebagai berikut:

Tabel 3.20: Hasil *Normalizer* Subgrup di Grup Simetri-8

$S_8 = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8\}$	
A_8	$N_{S_8}(A)$
$\{r_8\}$	$\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8\}$
$\{r_4, r_8\}$	$\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8\}$
$\{r_4, r_8, f_1, f_5\}$	$\{r_4, r_8, f_1, f_5\}$
$\{r_4, r_8, f_2, f_6\}$	$\{r_4, r_8, f_2, f_6\}$
$\{r_4, r_8, f_3, f_7\}$	$\{r_4, r_8, f_3, f_7\}$
$\{r_4, r_8, f_4, f_8\}$	$\{r_4, r_8, f_4, f_8\}$
$\{r_2, r_4, r_6, r_8\}$	$\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8\}$
$\{r_2, r_4, r_6, r_8, f_1, f_2, f_3, f_4\}$	$\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8\}$
$\{r_2, r_4, r_6, r_8, f_5, f_6, f_7, f_8\}$	$\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8\}$
$\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8\}$	$\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8\}$
$\{r_8, f_1\}$	$\{r_4, r_8, f_1, f_5\}$
$\{r_8, f_2\}$	$\{r_4, r_8, f_2, f_6\}$
$\{r_8, f_3\}$	$\{r_4, r_8, f_3, f_7\}$
$\{r_8, f_4\}$	$\{r_4, r_8, f_4, f_8\}$
$\{r_8, f_5\}$	$\{r_4, r_8, f_1, f_5\}$
$\{r_8, f_6\}$	$\{r_4, r_8, f_2, f_6\}$
$\{r_8, f_7\}$	$\{r_4, r_8, f_3, f_7\}$
$\{r_8, f_8\}$	$\{r_4, r_8, f_4, f_8\}$
$\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8\}$	$\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8\}$

Sumber: Analisis Penulis (2011:7)

Berdasarkan tabel tersebut dapat disimpulkan bahwa:

1. *Normalizer* subgrup yang terdiri dari 2 elemen, yaitu elemen identitas dan elemen f dan subgrup yang terdiri dari 4 elemen yaitu elemen $r_{\frac{8}{k}}, k = 1,2$ dan 2 elemen f di grup simetri-8 adalah subgrup yang terdiri dari 4 elemen yaitu elemen elemen $r_{\frac{8}{k}}, k = 1,2$ dan 2 elemen f, yaitu:

   $N_{S_8}(\{\mathrm{r}_8, \mathrm{f}_1\}) = \{\mathrm{r}_4, \mathrm{r}_8, \mathrm{f}_1, \mathrm{f}_5\}$

   $N_{S_8}(\{\mathrm{r}_8, \mathrm{f}_2\}) = \{\mathrm{r}_4, \mathrm{r}_8, \mathrm{f}_2, \mathrm{f}_6\}$

   $N_{S_8}(\{\mathrm{r}_8, \mathrm{f}_3\}) = \{\mathrm{r}_4, \mathrm{r}_8, \mathrm{f}_3, \mathrm{f}_7\}$

   $N_{S_8}(\{\mathrm{r}_8, \mathrm{f}_4\}) = \{\mathrm{r}_4, \mathrm{r}_8, \mathrm{f}_4, \mathrm{f}_8\}$

   $N_{S_8}(\{\mathrm{r}_8, \mathrm{f}_5\}) = \{\mathrm{r}_4, \mathrm{r}_8, \mathrm{f}_1, \mathrm{f}_5\}$

   $N_{S_8}(\{\mathrm{r}_8, \mathrm{f}_6\}) = \{\mathrm{r}_4, \mathrm{r}_8, \mathrm{f}_2, \mathrm{f}_6\}$

   $N_{S_8}(\{\mathrm{r}_8, \mathrm{f}_7\}) = \{\mathrm{r}_4, \mathrm{r}_8, \mathrm{f}_3, \mathrm{f}_7\}$

   $N_{S_8}(\{\mathrm{r}_8, \mathrm{f}_8\}) = \{\mathrm{r}_4, \mathrm{r}_8, \mathrm{f}_4, \mathrm{f}_8\}$

   $N_{S_8}(\{\mathrm{r}_4, \mathrm{r}_8, \mathrm{f}_1, \mathrm{f}_5\}) = \{\mathrm{r}_4, \mathrm{r}_8, \mathrm{f}_1, \mathrm{f}_5\}$

   $N_{S_8}(\{\mathrm{r}_4, \mathrm{r}_8, \mathrm{f}_2, \mathrm{f}_6\}) = \{\mathrm{r}_4, \mathrm{r}_8, \mathrm{f}_2, \mathrm{f}_6\}$

   $N_{S_8}(\{\mathrm{r}_4, \mathrm{r}_8, \mathrm{f}_3, \mathrm{f}_7\}) = \{\mathrm{r}_4, \mathrm{r}_8, \mathrm{f}_3, \mathrm{f}_7\}$

   $N_{S_8}(\{\mathrm{r}_4, \mathrm{r}_8, \mathrm{f}_4, \mathrm{f}_8\}) = \{\mathrm{r}_4, \mathrm{r}_8, \mathrm{f}_4, \mathrm{f}_8\}$

2. *Normalizer* subgrup selain terdiri dari 2 tipe subgrup tersebut di grup simetri-8 adalah semua elemen grup simetri-8, yaitu:

   $N_{S_8}(\{r_8\}) = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8\}$

   $N_{S_8}(\{r_4, r_8\}) = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8\}$

$N_{S_8}(\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8\}) =$

$$\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8\}$$

$N_{S_8}(\{\mathrm{r}_2, \mathrm{r}_4, \mathrm{r}_6, \mathrm{r}_8\}) = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8\}$

$N_{S_8}(\{\mathrm{r}_4, \mathrm{r}_8, \mathrm{f}_5, \mathrm{f}_7, \mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, \mathrm{f}_3, \mathrm{f}_4\}) =$

$$\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8\}$$

$N_{S_8}(\{\mathrm{r}_4, \mathrm{r}_8, \mathrm{f}_5, \mathrm{f}_7, \mathrm{f}_5, \mathrm{f}_6, \mathrm{f}_7, \mathrm{f}_8\}) =$

$$\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8\}$$

$N_{S_8}(\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8\}) =$

$$\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8\}.$$

Center dari grup simetri-8 merupakan himpunan elemen-elemen grup simetri-8 yang komutatif dengan setiap elemen grup simetri-8. Dari definisi tersebut dapat disimpulkan bahwa *center* dari grup simetri-8 merupakan *centralizer* S_8 di S_8. Jadi, *center* dari grup simetri-8 adalah elemen identitas dan elemen $r_{\frac{8}{k}}, k = 1,2$, yaitu :

$$Z(\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8\}) = \{r_4, r_8\}.$$

3.2.4 Grup Simetri-9 (S_9,∘)

Elemen dari grup simetri-9 terdiri dari 362.880 elemen. Selanjutnya, dari 362.880 elemen tersebut hanya diambil elemen yang terdiri dari elemen rotasi dan elemen refleksi. Sehingga elemen dari grup simetri-9 berjumlah 18 elemen, dengan 9 elemen rotasi dan 9 elemen refleksi yang ditunjukkan dalam tabel berikut:

Tabel 3.21: Tabel Elemen Grup Simetri-9

Rotasi (r)	Refleksi (f)
$r_1 = (123456789)$	$f_1 = (1)(29)(38)(47)(56)$
$r_2 = (13572468)$	$f_2 = (2)(13)(49)(58)(67)$
$r_3 = (147)(258)(369)$	$f_3 = (3)(24)(15)(69)(78)$
$r_4 = (159483726)$	$f_4 = (4)(36)(26)(17)(89)$
$r_5 = (162738495$	$f_5 = (5)(46)(37)(28)(19)$
$r_6 = (174)(285)(396)$	$f_6 = (6)(57)(48)(39)(12)$
$r_7 = (186429753)$	$f_7 = (7)(68)(59)(14)(23)$
$r_8 = (198765432)$	$f_8 = (8)(79)(16)(25)(34)$
$r_9 = (1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)$	$f_9 = (9)(18)(27)(36)(45)$

Sumber: Analisis Penulis (2011:7)

Dari tabel tersebut dapat disimpulkan bahwa elemen dari subgrup simetri-3 yang terdiri dari elemen rotasi dan refleksi adalah $S_9 = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, r_9, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8, f_9\}$ dengan elemen identitas adalah r_9. Sedangkan sub himpunan yang memenuhi aksioma-aksioma grup, yaitu subgrup dari grup simetri-9 adalah:

1. $(\{r_9\},\circ)$
2. $(\{r_3, r_6, r_9\},\circ)$
3. $(\{r_3, r_6, r_9, f_1, f_4, f_7\},\circ)$
4. $(\{r_3, r_6, r_9, f_2, f_5, f_8\},\circ)$
5. $(\{r_3, r_6, r_9, f_3, f_6, f_9\},\circ)$
6. $(\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, r_9\},\circ)$
7. $(\{r_9, f_1\},\circ)$
8. $(\{r_9, f_2\},\circ)$
9. $(\{r_9, f_3\},\circ)$
10. $(\{r_9, f_4\},\circ)$
11. $(\{r_9, f_5\},\circ)$
12. $(\{r_9, f_6\},\circ)$

13. $(\{r_9, f_7\},\circ)$

14. $(\{r_9, f_8\},\circ)$

15. $(\{r_9, f_9\},\circ)$

16. $(\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, r_9, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8, f_9\},\circ)$

Berdasarkan subgrup-subgrup tersebut, dapat disimpulkan bahwa subgrup simetri-9 yang terdiri dari elemen rotasi dan refleksi memiliki 16 subgrup dengan rincian sebagai berikut:

1. Satu subgrup yang terdiri dari 1 elemen yaitu elemen identitas, yaitu $(\{r_9\},\circ)$.
2. Satu subgrup yang terdiri dari 3 elemen yaitu elemen yang memuat $r_{\frac{9k}{3}} = r_{3k}, k = 1,2,3$, yaitu $(\{r_3, r_6, r_9\},\circ)$.
3. Tiga subgrup yang terdiri dari 6 elemen yaitu elemen $r_{\frac{9k}{3}} = r_{3k}, k = 1,2,3$ dan 3 elemen f, yaitu: $(\{r_3, r_6, r_9, f_1, f_4, f_7\},\circ)$, $(\{r_3, r_6, r_9, f_2, f_5, f_8\},\circ)$, dan $(\{r_3, r_6, r_9, f_3, f_6, f_9\},\circ)$.
4. Satu subgrup yang terdiri dari 9 elemen yaitu semua elemen r pada grup simetri-9, yaitu $(\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, r_9\},\circ)$.
5. Sembilan subgrup yang terdiri dari 2 elemen yaitu elemen identitas dan elemen f, yaitu $(\{r_9, f_1\},\circ)$, $(\{r_9, f_2\},\circ)$, $(\{r_9, f_3\},\circ)$, $(\{r_9, f_4\},\circ)$, $(\{r_9, f_5\},\circ)$, $(\{r_9, f_6\},\circ)$, $(\{r_9, f_7\},\circ)$, $(\{r_9, f_8\},\circ)$, dan $(\{r_9, f_9\},\circ)$.
6. Satu subgrup yang terdiri dari 18 elemen yaitu semua elemen S_9, yaitu $\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, r_9, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8, f_9\}$.

Misalkan A_9 adalah subgrup dari grup simetri-9. *Centralizer* A_9 di grup simetri-9 dapat didefinisikan sebagai himpunan dari elemen-elemen grup simetri-

9 yang memenuhi $g \circ a \circ g^{-1} = a, \forall a \in A, g \in S_9$. *Centralizer* subgrup di grup simetri-9 adalah sebagai berikut:

Tabel 3.22: Hasil *Centralizer* Subgrup di Grup Simetri-9

$S_9 = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, r_9, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8, f_9\}$	
A_9	$C_{S_9}(A)$
$\{r_9\}$	$\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, r_9, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8, f_9\}$
$\{r_3, r_6, r_9\}$	$\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, r_9\}$
$\{r_3, r_6, r_9, f_1, f_4, f_7\}$	$\{r_9\}$
$\{r_3, r_6, r_9, f_2, f_5, f_8\}$	$\{r_9\}$
$\{r_3, r_6, r_9, f_3, f_6, f_9\}$	$\{r_9\}$
$\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, r_9\}$	$\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, r_9\}$
$\{r_9, f_1\}$	$\{r_9, f_1\}$
$\{r_9, f_2\}$	$\{r_9, f_2\}$
$\{r_9, f_3\}$	$\{r_9, f_3\}$
$\{r_9, f_4\}$	$\{r_9, f_4\}$
$\{r_9, f_5\}$	$\{r_9, f_5\}$
$\{r_9, f_6\}$	$\{r_9, f_6\}$
$\{r_9, f_7\}$	$\{r_9, f_7\}$
$\{r_9, f_8\}$	$\{r_9, f_8\}$
$\{r_9, f_9\}$	$\{r_9, f_9\}$
$\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, r_9, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8, f_9\}$	$\{r_9\}$

Sumber: Analisis Penulis (2011:7)

Berdasarkan tabel tersebut dapat disimpulkan bahwa :

1. *Centralizer* identitas di grup simetri-9 adalah semua elemen S_9, yaitu $C_{S_9}(\{r_9\}) = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, r_9, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8, f_9\}$.
2. *Centralizer* subgrup yang hanya terdiri dari elemen r adalah terdiri dari semua elemen yang memuat r, yaitu

$$C_{S_9}(\{r_3, r_6, r_9\}) = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, r_9\}$$

$$C_{S_9}(\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, r_9\}) = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, r_9\}.$$

3. *Centralizer* subgrup yang terdiri dari 2 elemen yaitu elemen identitas dan elemen f di grup simetri-9 adalah subgrup itu sendiri, yaitu:

$$C_{S_9}(\{r_9, f_1\}) = \{r_9, f_1\}$$

$$C_{S_9}(\{r_9, f_2\}) = \{r_9, f_2\}$$

$$C_{S_9}(\{r_9, f_3\}) = \{r_9, f_3\}$$

$$C_{S_9}(\{r_9, f_3\}) = \{r_9, f_3\}$$

$$C_{S_9}(\{r_9, f_5\}) = \{r_9, f_5\}$$

$$C_{S_9}(\{r_9, f_6\}) = \{r_9, f_6\}$$

$$C_{S_9}(\{r_9, f_7\}) = \{r_9, f_7\}$$

$$C_{S_9}(\{r_9, f_8\}) = \{r_9, f_8\}$$

$$C_{S_9}(\{r_9, f_9\}) = \{r_9, f_9\}.$$

4. *Centralizer* semua elemen grup simetri-9 dan subgrup yang terdiri dari elemen yang memuat $r_{\frac{9k}{3}} = r_{3k}, k = 1,2,3$ dan elemen f di grup simetri-9 adalah elemen identitas, yaitu:

$$C_{S_9}(\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, r_9, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8, f_9\}) = \{r_9\}$$

$$C_{S_9}(\{r_3, r_6, r_9, f_1, f_4, f_7\}) = \{r_9\}$$

$$C_{S_9}(\{r_3, r_6, r_9, f_2, f_5, f_8\}) = \{r_9\}$$

$$C_{S_9}(\{r_3, r_6, r_9, f_3, f_6, f_9\}) = \{r_9\}.$$

Misalkan A_9 adalah subgrup dari grup simetri-9 *Normalizer* A_9 di grup simetri-9 dapat didefinisikan sebagai himpunan dari elemen-elemen grup simetri-9 yang memenuhi $g \circ a \circ g^{-1} \in A_9, \forall a \in A_9, g \in S_9$. *Normalizer* subgrup di grup simetri-9 adalah sebagai berikut:

Tabel 3.23: Hasil *Normalizer* Subgrup di Grup Simetri-9

$S_9 = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, r_9, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8, f_9\}$	
A	$N_{S_9}(A)$
$\{r_9\}$	$\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, r_9, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8, f_9\}$
$\{r_3, r_6, r_9\}$	$\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, r_9, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8, f_9\}$
$\{r_3, r_6, r_9, f_1, f_4, f_7\}$	$\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, r_9, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8, f_9\}$
$\{r_3, r_6, r_9, f_2, f_5, f_8\}$	$\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, r_9, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8, f_9\}$
$\{r_3, r_6, r_9, f_3, f_6, f_9\}$	$\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, r_9, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8, f_9\}$
$\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, r_9\}$	$\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, r_9, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8, f_9\}$
$\{r_9, f_1\}$	$\{r_9, f_1\}$
$\{r_9, f_2\}$	$\{r_9, f_2\}$
$\{r_9, f_3\}$	$\{r_9, f_3\}$
$\{r_9, f_4\}$	$\{r_9, f_4\}$
$\{r_9, f_5\}$	$\{r_9, f_5\}$
$\{r_9, f_6\}$	$\{r_9, f_6\}$
$\{r_9, f_7\}$	$\{r_9, f_7\}$
$\{r_9, f_8\}$	$\{r_9, f_8\}$
$\{r_9, f_9\}$	$\{r_9, f_9\}$
$\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, r_9, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8, f_9\}$	$\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, r_9, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8, f_9\}$

Sumber: Analisis penulis (2011:7)

Berdasarkan tabel tersebut dapat disimpulkan bahwa

1. *Normalizer* subgrup yang terdiri dari 2 elemen, yaitu elemen identitas dan elemen f di grup simetri-9 adalah subgrup itu sendiri, yaitu:

   $N_{S_9}(\{r_9, f_1\}) = \{r_9, f_1\}$

   $N_{S_9}(\{r_9, f_2\}) = \{r_9, f_2\}$

   $N_{S_9}(\{r_9, f_3\}) = \{r_9, f_3\}$

   $N_{S_9}(\{r_9, f_4\}) = \{r_9, f_3\}$

   $N_{S_9}(\{r_9, f_5\}) = \{r_9, f_5\}$

$N_{S_9}(\{r_9, f_6\}) = \{r_9, f_6\}$

$N_{S_9}(\{r_9, f_7\}) = \{r_9, f_7\}$

$N_{S_9}(\{r_9, f_8\}) = \{r_9, f_8\}$

$N_{S_9}(\{r_9, f_9\}) = \{r_9, f_9\}$.

2. *Normalizer* subgrup selain terdiri dari 2 tipe subgrup tersebut di grup simetri-9 adalah semua elemen grup simetri-9, yaitu:

$N_{S_9}(\{r_9\}) = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, r_9, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8, f_9\}$

$N_{S_9}(\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, r_9\})$

$= \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, r_9, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8, f_9\}$

$N_{S_9}(\{r_3, r_6, r_9\}) = \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, r_9, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8, f_9\}$

$N_{S_9}(\{r_3, r_6, r_9, f_1, f_4, f_7\})$

$= \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, r_9, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8, f_9\}$

$N_{S_9}(\{r_3, r_6, r_9, f_2, f_5, f_8\})$

$= \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, r_9, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8, f_9\}$

$N_{S_9}(\{r_3, r_6, r_9, f_3, f_6, f_9\})$

$= \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, r_9, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8, f_9\}$

$N_{S_9}(\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, r_9, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8, f_9\})$

$= \{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, r_9, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8, f_9\}$.

Center dari grup simetri-9 merupakan himpunan elemen grup simetri-9 yang komutatif dengan setiap elemen grup simetri-9. Dari definisi tersebut dapat disimpulkan bahwa *center* dari grup simetri-9 merupakan *centralizer* S_9 di S_9. Jadi, *center* dari grup simetri-9 adalah elemen identitas yaitu :

$$Z(\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_7, r_8, r_9, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8, f_9\}) = \{r_9\}.$$

3.2.5 Pola Umum Grup Simetri-n $(S_n,\circ)$, n Bilangan Komposit

Secara umum, jumlah elemen dari grup simetri-n $(S_n,\circ)$ dengan n bilangan komposit adalah $n!$. Akan tetapi, apabila diambil elemen yang hanya terdiri dari rotasi dan refleksi jumlah elemennya adalah $2n$, dengan n elemen yang menunjukkan rotasi dan n elemen yang menunjukkan refleksi, yaitu :

$$S_n = \{r_1, r_2, \dots, r_n, f_1, f_2, \dots, f_n\}$$

Dengan elemen identitas adalah r_n. Sedangkan subgrup dari grup simetri-n $(S_n,\circ)$ adalah:

$$\left(\left\{r_{\frac{nk}{i}}\right\},\circ\right)$$

$$\left(\left\{r_{\frac{nk}{i}}, f_1, f_{\frac{nk}{i}+1}\right\},\circ\right)$$

$$\left(\left\{r_{\frac{nk}{i}}, f_2, f_{\frac{nk}{i}+2}\right\},\circ\right)$$

$$\left(\left\{r_{\frac{nk}{i}}, f_3, f_{\frac{nk}{i}+3}\right\},\circ\right)$$

$$\vdots$$

$$\left(\left\{r_{\frac{nk}{i}}, f_n, f_{\frac{nk}{i}}\right\},\circ\right)$$

Dimana i merupakan pembagi-pembagi positif dari n $i = 1,2,3, \dots, n$ dan k merupakan konstanta positif $k = 1,2,3, \dots, i$. Berdasarkan subgrup-subgrup tersebut dapat disimpulkan bahwa pada subgrup simetri-n, misalkan $i = 1,2,3$ ..., adalah pembagi-pembagi positif dari n, $a(n)$ adalah banyaknya pembagi positif dari n, dan $b(n)$ adalah jumlah pembagi positif dari n yaitu $b(n) = p_1 + p_2 + p_3 + \cdots$, maka terdapat:

1. Sebanyak $a(n)$ subgrup yang terdiri elemen $r_{\frac{nk}{i}}$, $k = 1,2,3, \dots, i$. yaitu $\left(\left\{r_{\frac{nk}{i}}\right\}, \circ\right)$.
2. Sebanyak $b(n)$ subgrup yang terdiri dari elemen $r_{\frac{nk}{i}}, k = 1,2,3, \dots, i$, dan elemen yang memuat f, yaitu:
$$\left(\left\{r_{\frac{nk}{i}}, r_n, f_1, f_{\frac{nk}{i}+1}\right\}, \circ\right), \left(\left\{r_{\frac{nk}{i}}, r_n, f_2, f_{\frac{nk}{i}+2}\right\}, \circ\right), \dots, \left(\left\{r_{\frac{nk}{i}}, r_n, f_n, f_{\frac{nk}{i}}\right\}, \circ\right)$$

- Jika $i = 1$, maka $k = 1$. Sehingga subgrup-subgrupnya yang memuat elemen r adalah elemen identitas, karena:
$$\left(\left\{r_{\frac{nk}{ti}}\right\}, \circ\right) = \left(\left\{r_{\frac{n.1}{1}}\right\}, \circ\right) = (\{r_n\}, \circ)$$
Sedangkan subgrup yang memuat elemen r dan f adalah
$$(\{r_n, f_1\}, \circ)$$
$$(\{r_n, f_2\}, \circ)$$
$$(\{r_n, f_3\}, \circ)$$
$$\vdots$$
$$(\{r_n, f_n\}, \circ)$$

- Jika $i = 2$, maka $k = 1,2$. Sehingga subgrup yang hanya memuat elemen r adalah terdiri dari elemen $r_{\frac{nk}{i}}$, yaitu $\left(\left\{r_{\frac{n.1}{2}}, r_{\frac{n.2}{2}}\right\},\circ\right) = (\{r_{\frac{n}{2}}, r_n\},\circ)$.

  Sedangkan subgrup yang memuat elemen r dan f adalah subgrup yang memuat elemen $r_{\frac{nk}{i}}$ dan elemen f, yaitu:

$$\left(\left\{r_{\frac{n}{2}}, r_n, f_1, f_{\frac{n}{2}+1}\right\},\circ\right)$$

$$\left(\left\{r_{\frac{n}{2}}, r_n, f_2, f_{\frac{n}{2}+2}\right\},\circ\right)$$

$$\vdots$$

$$\left(\left\{r_{\frac{n}{2}}, r_n, f_n, f_{\frac{n}{2}}\right\},\circ\right)$$

- Jika $i = 3$, maka $k = 1,2,3$. Sehingga subgrup yang hanya memuat elemen r adalah terdiri dari elemen $r_{\frac{nk}{i}}$, yaitu $\left(\left\{r_{\frac{n.1}{3}}, r_{\frac{n.2}{3}}, r_{\frac{n.3}{3}}\right\},\circ\right) = (\{r_{\frac{n}{3}}, r_{\frac{2n}{3}}, r_n\},\circ)$.

  Sedangkan subgrup yang memuat elemen r dan f adalah subgrup yang memuat elemen $r_{\frac{nk}{i}}$ dan elemen f, yaitu:

$$\left(\left\{r_{\frac{n}{3}}, r_{\frac{2n}{3}}, r_n, f_1, f_{\frac{n}{3}+1}, f_{\frac{2n}{3}+1}\right\},\circ\right)$$

$$\left(\left\{r_{\frac{n}{3}}, r_{\frac{2n}{3}}, r_n, f_2, f_{\frac{n}{3}+2}, f_{\frac{2n}{3}+2}\right\},\circ\right)$$

$$\vdots$$

$$\left(\left\{r_{\frac{n}{3}}, r_{\frac{2n}{3}}, r_n, f_n, f_{\frac{n}{3}}, f_{\frac{2n}{3}}\right\},\circ\right)$$

- Jika $i = n$, maka $k = 1,2,3, \dots, n$. Sehingga subgrup yang hanya memuat elemen r adalah terdiri dari elemen $r_{\frac{nk}{i}}$, yaitu $\left(\left\{r_{\frac{n.1}{n}}, r_{\frac{n.2}{n}}, \dots, r_{\frac{n.n}{n}}\right\}, \circ\right) = (\{r_1, r_2, \dots, r_n\}, \circ)$.

  Sedangkan subgrup yang memuat elemen r dan f adalah subgrup yang memuat elemen $r_{\frac{nk}{i}}$ dan elemen f, yaitu:

$$\left(\left\{r_{\frac{n.1}{n}}, r_{\frac{n.2}{n}}, \dots, f_{\frac{n.1}{n}}, f_{\frac{n.2}{n}}, \dots, f_{\frac{n.n}{n}}\right\}, \circ\right) = (\{r_1, r_2, \dots, r_n, f_1, f_2, \dots, f_n\}, \circ)$$

Misalkan A_n adalah subgrup dari grup simetri-n. *Centralizer* A_n di grup simetri-n dapat didefinisikan sebagai himpunan dari elemen-elemen grup simetri-n yang memenuhi $g \circ a \circ g^{-1} = a, \forall a \in A_n, g \in S_n$. *Centralizer* subgrup di grup simetri-n adalah sebagai berikut:

Tabel 3.24: Hasil *Centralizer* Subgrup di Grup Simetri-n

$S_n = \{r_1, r_2, r_3, \dots, r_n, f_1, f_2, f_3, \dots, f_n\}$	
A_n	$C_{S_n}(A)$
$\{r_n\}$	$\{r_1, r_2, r_3, \dots, r_n, f_1, f_2, f_3, \dots, f_n\}$
$\{r_n, f_1\}$	$\left\{r_{\frac{n}{2}}, r_n, f_1, f_{\frac{n}{2}+1}\right\}$
$\{r_n, f_2\}$	$\left\{r_{\frac{n}{2}}, r_n, f_2, f_{\frac{n}{2}+2}\right\}$
$\{r_n, f_3\}$	$\left\{r_{\frac{n}{2}}, r_n, f_3, f_{\frac{n}{2}+3}\right\}$
$\vdots$	$\vdots$
$\{r_n, f_n\}$	$\left\{r_{\frac{n}{2}}, r_n, f_n, f_{\frac{n}{2}}\right\}$
$\{r_n, r_{\frac{n}{2}}\}$	$\{r_1, r_2, r_3, \dots, r_n, f_1, f_2, f_3, \dots, f_n\}$
$\{r_n, r_{\frac{n}{2}}, f_1, f_{\frac{n}{2}+1}\}$	$\{r_n, r_{\frac{n}{2}}, f_1, f_{\frac{n}{2}+1}\}$
$\{r_n, r_{\frac{n}{2}}, f_2, f_{\frac{n}{2}+2}\}$	$\{r_n, r_{\frac{n}{2}}, f_2, f_{\frac{n}{2}+2}\}$
$\{r_n, r_{\frac{n}{2}}, f_3, f_{\frac{n}{2}+3}\}$	$\{r_n, r_{\frac{n}{2}}, f_3, f_{\frac{n}{2}+3}\}$
$\vdots$	$\vdots$
$\{r_n, r_{\frac{n}{2}}, f_n, f_{\frac{n}{2}}\}$	$\{r_n, r_{\frac{n}{2}}, f_n, f_{\frac{n}{2}}\}$
$\left\{r_n, r_{\frac{nk}{i}}\right\}$	$\{r_1, r_2, r_3, \dots, r_n\}$
$\{r_n, r_{\frac{nk}{i}}, f_1, f_{\frac{nk}{i}+1}\}$	$\left\{r_{\frac{n}{2}}, r_n\right\}$
$\{r_n, r_{\frac{nk}{i}}, f_2, f_{\frac{nk}{i}+2}\}$	$\left\{r_{\frac{n}{2}}, r_n\right\}$
$\{r_n, r_{\frac{nk}{i}}, f_3, f_{\frac{nk}{i}+3}\}$	$\left\{r_{\frac{n}{2}}, r_n\right\}$
$\vdots$	$\vdots$
$\{r_n, r_{\frac{nk}{i}}, f_n, f_{\frac{nk}{i}}\}$	$\left\{r_{\frac{n}{2}}, r_n\right\}$
$\{r_1, r_2, r_3, \dots, r_n\}$	$\{r_1, r_2, r_3, \dots, r_n\}$
$\{r_1, r_2, r_3, \dots, r_n, f_1, f_2, f_3, \dots, f_n\}$	$\left\{r_{\frac{n}{2}}, r_n\right\}$

Sumber: Analisis Penulis (2011:7)

Berdasarkan tabel tersebut dapat disimpulkan bahwa :

1. *Centralizer* identitas dan subgrup yang terdiri dari 2 elemen yaitu elemen identitas dan elemen $r_{\frac{n}{2}}$ di grup simetri-n adalah semua elemen S_n.

$$C_{S_n}(\{r_n\}) = \{r_1, r_2, r_3, \dots, r_n, f_1, f_2, f_3, \dots, f_n\}$$

$$C_{S_n}\left(\{\mathrm{r}_{\frac{\mathrm{n}}{2}}, \mathrm{r_n}\}\right) = \{\mathrm{r_1}, \mathrm{r_2}, \mathrm{r_3}, \dots, \mathrm{r_n}, \mathrm{f_1}, \mathrm{f_2}, \mathrm{f_3}, \dots, \mathrm{f_n}\}.$$

Hal tersebut karena elemen identitas dan elemen $r_{\frac{n}{2}}$ komutatif dengan semua elemen subgrup simetri yang terdiri dari elemen rotasi dan refleksi.

2. *Centralizer* subgrup yang terdiri dari elemen r, selain subgrup yang terdiri dari elemen identitas dan elemen $r_{\frac{n}{2}}$ adalah terdiri dari semua elemen r.

$$C_{S_n}\left(\left\{\left\{\mathrm{r_n}, \mathrm{r}_{\frac{\mathrm{nk}}{\mathrm{i}}}\right\}\right\}\right) = \{\mathrm{r_1}, \mathrm{r_2}, \mathrm{r_3}, \dots, \mathrm{r_n}\}$$

$$C_{S_n}(\{\mathrm{r_1}, \mathrm{r_2}, \mathrm{r_3}, \dots, \mathrm{r_n}\}) = \{\mathrm{r_1}, \mathrm{r_2}, \mathrm{r_3}, \dots, \mathrm{r_n}\}$$

Hal tersebut karena elemen r komutatif dengan semua elemen r di subgrup simetri yang terdiri dari elemen rotasi dan refleksi.

3. *Centralizer* subgrup yang terdiri dari 2 elemen yaitu elemen identitas dan f dan subgrup yang terdiri dari 4 elemen yaitu elemen identitas, elemen $r_{\frac{n}{2}}$ dan 2 elemen f di grup simetri-n adalah terdiri dari 4 elemen yaitu elemen identitas, elemen $r_{\frac{n}{2}}$, dan 2 elemen f.

$$C_{S_n}(\{\mathrm{r_n}, \mathrm{f_1}\}) = \{\mathrm{r_n}, \mathrm{r}_{\frac{\mathrm{n}}{2}}, \mathrm{f_1}, \mathrm{f}_{\frac{\mathrm{n}}{2}+1}\}$$

$$C_{S_n}(\{\mathrm{r_n}, \mathrm{f_2}\}) = \{\mathrm{r_n}, \mathrm{r}_{\frac{\mathrm{n}}{2}}, \mathrm{f_2}, \mathrm{f}_{\frac{\mathrm{n}}{2}+2}\}$$

$$C_{S_n}(\{\mathrm{r_n}, \mathrm{f_3}\}) = \{\mathrm{r_n}, \mathrm{r}_{\frac{\mathrm{n}}{2}}, \mathrm{f_3}, \mathrm{f}_{\frac{\mathrm{n}}{2}+3}\}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$C_{S_n}(\{\mathrm{r_n}, \mathrm{f_n}\}) = \{\mathrm{r_n}, \mathrm{r}_{\frac{\mathrm{n}}{2}}, \mathrm{f_n}, \mathrm{f}_{\frac{\mathrm{n}}{2}}\}$$

4. *Centralizer* semua elemen simetri-n dan subgrup yang terdiri dari elemen identitas, elemen yang memuat $r_{\frac{nk}{i}}, k = 1,2,3, \dots, i$, dan elemen f di grup

simetri-n adalah terdiri dari 2 elemen yaitu elemen identitas dan elemen $r_{n/2}$, yaitu:

$$C_{S_n}(\mathrm{r_1, r_2, r_3, \dots, r_n, f_1, f_2, f_3, \dots, f_n}) = \{r_{\frac{n}{2}}, \mathrm{r_n}\}$$

$$C_{S_n}\left(\left\{\mathrm{r}_{\frac{\mathrm{nk}}{\mathrm{i}}}, r_n, \mathrm{f_1}, \mathrm{f}_{\frac{\mathrm{nk}}{\mathrm{i}}+1}\right\}\right) = \{r_{\frac{n}{2}}, \mathrm{r_n}\}$$

$$C_{S_n}\left(\left\{\mathrm{r}_{\frac{\mathrm{nk}}{\mathrm{i}}}, r_n, \mathrm{f_2}, \mathrm{f}_{\frac{\mathrm{nk}}{\mathrm{i}}+2}\right\}\right) = \{r_{\frac{n}{2}}, \mathrm{r_n}\}$$

$$C_{S_n}\left(\left\{\mathrm{r}_{\frac{\mathrm{nk}}{\mathrm{i}}}, r_n, \mathrm{f_3}, \mathrm{f}_{\frac{\mathrm{nk}}{\mathrm{i}}+3}\right\}\right) = \{r_{\frac{n}{2}}, \mathrm{r_n}\}$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$C_{S_n}\left(\left\{\mathrm{r}_{\frac{\mathrm{nk}}{\mathrm{i}}}, r_n, \mathrm{f_n}, \mathrm{f}_{\frac{\mathrm{nk}}{\mathrm{i}}}\right\}\right) = \{r_{\frac{n}{2}}, \mathrm{r_n}\}$$

Misalkan A_n adalah subgrup dari grup simetri-n. *Normalizer* A_n di grup simetri-n dapat didefinisikan sebagai himpunan dari elemen-elemen grup simetri-n yang memenuhi $g \circ a \circ g^{-1} \in A_n, \forall a \in A_n, g \in S_n$. *Normalizer* subgrup di grup simetri-n adalah sebagai berikut:

Tabel 3.25: Hasil *Normalizer* Subgrup di Grup Simetri-n

$S_n = \{r_1, r_2, r_3, \dots, r_n, f_1, f_2, f_3, \dots, f_n\}$	
A_n	$N_{S_n}(A)$
$\{r_n\}$	$\{r_1, r_2, r_3, \dots, r_n, f_1, f_2, f_3, \dots, f_n\}$
$\{r_n, f_1\}$	$\left\{r_{\frac{n}{2}}, r_n, f_1, f_{\frac{n}{2}+1}\right\}$
$\{r_n, f_2\}$	$\left\{r_{\frac{n}{2}}, r_n, f_2, f_{\frac{n}{2}+2}\right\}$
$\{r_n, f_3\}$	$\left\{r_{\frac{n}{2}}, r_n, f_3, f_{\frac{n}{2}+3}\right\}$
$\vdots$	$\vdots$
$\{r_n, f_n\}$	$\left\{r_{\frac{n}{2}}, r_n, f_n, f_{\frac{n}{2}}\right\}$
$\{r_n, r_{\frac{n}{2}}\}$	$\{r_1, r_2, r_3, \dots, r_n, f_1, f_2, f_3, \dots, f_n\}$
$\{r_n, r_{\frac{n}{2}}, f_1, f_{\frac{n}{2}+1}\}$	$\{r_n, r_{\frac{n}{2}}, f_1, f_{\frac{n}{2}+1}\}$
$\{r_n, r_{\frac{n}{2}}, f_2, f_{\frac{n}{2}+2}\}$	$\{r_n, r_{\frac{n}{2}}, f_2, f_{\frac{n}{2}+2}\}$
$\{r_n, r_{\frac{n}{2}}, f_3, f_{\frac{n}{2}+3}\}$	$\{r_n, r_{\frac{n}{2}}, f_3, f_{\frac{n}{2}+3}\}$
$\vdots$	$\vdots$
$\{r_n, r_{\frac{n}{2}}, f_n, f_{\frac{n}{2}}\}$	$\{r_n, r_{\frac{n}{2}}, f_n, f_{\frac{n}{2}}\}$
$\left\{r_n, r_{\frac{nk}{i}}\right\}$	$\{r_1, r_2, r_3, \dots, r_n, f_1, f_2, f_3, \dots, f_n\}$
$\{r_n, r_{\frac{nk}{i}}, f_1, f_{\frac{nk}{i}+1}\}$	$\{r_1, r_2, r_3, \dots, r_n, f_1, f_2, f_3, \dots, f_n\}$
$\{r_n, r_{\frac{nk}{i}}, f_2, f_{\frac{nk}{i}+2}\}$	$\{r_1, r_2, r_3, \dots, r_n, f_1, f_2, f_3, \dots, f_n\}$
$\{r_n, r_{\frac{nk}{i}}, f_3, f_{\frac{nk}{i}+3}\}$	$\{r_1, r_2, r_3, \dots, r_n, f_1, f_2, f_3, \dots, f_n\}$
$\vdots$	$\vdots$
$\{r_n, r_{\frac{nk}{i}}, f_n, f_{\frac{nk}{i}}\}$	$\{r_1, r_2, r_3, \dots, r_n, f_1, f_2, f_3, \dots, f_n\}$
$\{r_1, r_2, r_3, \dots, r_n\}$	$\{r_1, r_2, r_3, \dots, r_n, f_1, f_2, f_3, \dots, f_n\}$
$\{r_1, r_2, r_3, \dots, r_n, f_1, f_2, f_3, \dots, f_n\}$	$\{r_1, r_2, r_3, \dots, r_n, f_1, f_2, f_3, \dots, f_n\}$

Sumber: Analisis Penulis (2011:7)

Berdasarkan tabel tersebut dapat disimpulkan bahwa:

1. *Normalizer* subgrup yang terdiri dari 2 elemen, yaitu elemen identitas dan elemen f dan subgrup yang terdiri dari 4 elemen yaitu elemen identitas, elemen $r_{\frac{n}{2}}$ dan 2 elemen f di grup simetri-n adalah subgrup yang terdiri dari 4 elemen yaitu elemen $r_{\frac{n}{2}}$ dan 2 elemen f.

$$N_{S_n}(\{\mathrm{r_n}, \mathrm{f_1}\}) = \left\{\mathrm{r_n}, \mathrm{r}_{\frac{n}{2}}, \mathrm{f_1}, \mathrm{f}_{\frac{n}{2}+1}\right\}$$

$$N_{S_n}(\{\mathrm{r_n}, \mathrm{f_2}\}) = \left\{\mathrm{r_n}, \mathrm{r}_{\frac{n}{2}}, \mathrm{f_2}, \mathrm{f}_{\frac{n}{2}+2}\right\}$$

$$N_{S_n}(\{\mathrm{r_n}, \mathrm{f_3}\}) = \left\{\mathrm{r_n}, \mathrm{r}_{\frac{n}{2}}, \mathrm{f_3}, \mathrm{f}_{\frac{n}{2}+3}\right\}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$N_{S_n}(\{\mathrm{r_n}, \mathrm{f_n}\}) = \left\{\mathrm{r_n}, \mathrm{r}_{\frac{n}{2}}, \mathrm{f_n}, \mathrm{f}_{\frac{n}{2}}\right\}$$

2. *Normalizer* subgrup selain terdiri dari 2 tipe subgrup tersebut di grup simetri-n adalah semua elemen grup simetri-n.

$$N_{S_n}(\{r_n\}) = \{\mathrm{r_1}, \mathrm{r_2}, \mathrm{r_3}, \dots, \mathrm{r_n}, \mathrm{f_1}, \mathrm{f_2}, \mathrm{f_3}, \dots, \mathrm{f_n}\}$$

$$N_{S_n}(\{\mathrm{r_1}, \mathrm{r_2}, \mathrm{r_3}, \dots, \mathrm{r_n}\}) = \{\mathrm{r_1}, \mathrm{r_2}, \mathrm{r_3}, \dots, \mathrm{r_n}, \mathrm{f_1}, \mathrm{f_2}, \mathrm{f_3}, \dots, \mathrm{f_n}\}$$

$$N_{S_n}\left(\{\mathrm{r_n}, \mathrm{r}_{\frac{nk}{i}}, \mathrm{f_1}, \mathrm{f}_{\frac{nk}{i}+1}\}\right) = \{\mathrm{r_1}, \mathrm{r_2}, \mathrm{r_3}, \dots, \mathrm{r_n}, \mathrm{f_1}, \mathrm{f_2}, \mathrm{f_3}, \dots, \mathrm{f_n}\}$$

$$N_{S_n}\left(\left\{\mathrm{r_n}, \mathrm{r}_{\frac{nk}{i}}, \mathrm{f_2}, \mathrm{f}_{\frac{nk}{i}+2}\right\}\right) = \{\mathrm{r_1}, \mathrm{r_2}, \mathrm{r_3}, \dots, \mathrm{r_n}, \mathrm{f_1}, \mathrm{f_2}, \mathrm{f_3}, \dots, \mathrm{f_n}\}$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$N_{S_n}\left(\left\{\mathrm{r_n}, \mathrm{r}_{\frac{nk}{i}}, \mathrm{f_n}, \mathrm{f}_{\frac{nk}{i}}\right\}\right) = \{\mathrm{r_1}, \mathrm{r_2}, \mathrm{r_3}, \dots, \mathrm{r_n}, \mathrm{f_1}, \mathrm{f_2}, \mathrm{f_3}, \dots, \mathrm{f_n}\}$$

$$N_{S_n}(\{\mathrm{r_1}, \mathrm{r_2}, \mathrm{r_3}, \dots, \mathrm{r_n}, \mathrm{f_1}, \mathrm{f_2}, \mathrm{f_3}, \dots, \mathrm{f_n}\}) = \{\mathrm{r_1}, \mathrm{r_2}, \mathrm{r_3}, \dots, \mathrm{r_n}, \mathrm{f_1}, \mathrm{f_2}, \mathrm{f_3}, \dots, \mathrm{f_n}\}$$

Center dari grup simetri-n merupakan himpunan elemen-elemen grup simetri-n yang komutatif dengan setiap elemen grup simetri-n. Dari definisi tersebut dapat disimpulkan bahwa *center* dari grup simetri-n merupakan *centralizer* S_n di S_n. Jadi, *center* dari grup simetri-n adalah elemen identitas dan elemen $r_{n/2}$. yaitu $Z(\{P_n\}) = \{\mathrm{r_{n/2}}, \mathrm{r_n}\}$.

3.3 Pola Umum Grup Simetri-n $(S_n,\circ)$

Berdasarkan pola umum dari grup simetri-n $(S_n,\circ)$, n bilangan prima dan n bilangan komposit di atas, dapat dibuat teorema tentang banyaknya subgrup, tipe *centralizer*, *normalizer*, dan *center* subgrup dari grup simetri-n, yaitu:

Teorema 1

Banyaknya subgrup dari grup simetri- n, $n \geq 3$, n bilangan prima adalah sebanyak $n+3$ subgrup.

Bukti:

Subgrup-subgrup dari grup simetri-n $(S_n,\circ), n \geq 3$, n bilangan prima adalah:

1. Sebanyak n subgrup yang terdiri dari 2 elemen yaitu $\{r_n, f_i\}$, $1 \leq i \leq n$.
2. Sebanyak 1 subgrup yang terdiri dari 1 elemen yaitu elemen identitas $\{r_n\}$.
3. Sebanyak 1 subgrup yang terdiri dari n elemen yaitu semua elemen r.
4. Sebanyak 1 subgrup yang terdiri dari $2n$ elemen yaitu semua elemen S_n.

Sehingga banyaknya subgrup dari grup simetri-n $(S_n,\circ), n \geq 3, n$ bilangan prima adalah $n+1+1+1 = n+3$ subgrup.

Teorema 2

Jika $i|n$, i pembagi-pembagi positif dari n . maka banyaknya subgrup dari grup simetri-n $(S_n,\circ), n \geq 3$, n bilangan komposit adalah $a(n) + b(n)$ subgrup. Dengan $a(n)$ merupakan banyaknya pembagi-pembagi positif dari n, dan $b(n)$ adalah jumlah pembagi-pembagi positif dari n.

Bukti:

Misalkan $i = 1,2,3, \dots n$ merupakan pembagi-pembagi positif dari n dan k adalah konstanta positif, $k = 1,2,3, \dots i$, maka banyaknya subgrup dari grup simetri-n $(S_n,\circ), n \geq 3$, n bilangan komposit adalah:

1. Sebanyak $a(n)$ subgrup yang terdiri dari elemen $r_{\frac{nk}{i}}, k = 1,2,3, \dots, i$ yaitu $\left(\left\{r_{\frac{nk}{i}}\right\},\circ\right)$.
2. Sebanyak $b(n)$ subgrup yang terdiri dari elemen $r_{\frac{nk}{i}}, k = 1,2,3, \dots, i$, dan elemen yang memuat elemen f, yaitu:

$$\mathrm{r_n, r_{\frac{nk}{i}}, f_1, f_{\frac{nk}{i}+1}}$$

$$\mathrm{r_n, r_{\frac{nk}{i}}, f_2, f_{\frac{nk}{i}+2}}$$

$$\mathrm{r_n, r_{\frac{nk}{i}}, f_3, f_{\frac{nk}{i}+3}}$$

$$\vdots$$

$$\mathrm{r_n, r_{\frac{nk}{i}}, f_n, f_{\frac{nk}{i}}}$$

Jadi, total banyaknya subgrup dari grup simetri-n $(S_n,\circ), n \geq 3, n$ bilangan komposit adalah $a(n) + b(n)$ subgrup.

Teorema 3

Jika A subgrup dari grup simetri-n $(S_n,\circ), n \geq 3$, maka *centralizer* dari grup simetri-n $(S_n,\circ)$, n bilangan prima adalah:

$$C_{S_n}(A) = \begin{cases} S_n & , A = \{r_n\} \\ \{r_n\} & , A = S_n \\ A & , A \neq \{r_n\}; A \neq S_n \end{cases}$$

Bukti :

Centralizer subgrup di grup simetri-n $(S_n,\circ), n \geq 3, n$ bilangan prima adalah:

(i) *Centralizer* identitas di grup simetri-n adalah semua elemen S_n.

$$C_{S_n}(\{r_n\}) = \{\mathrm{r_1, r_2, r_3, \dots, r_n, f_1, f_2, f_3, \dots, f_n}\}$$

(ii) *Centralizer* semua elemen grup simetri-n di grup simetri-n adalah elemen identitas.

$$C_{S_n}(\{\mathrm{r_1, r_2, r_3, \dots, r_n, f_1, f_2, f_3, \dots, f_n}\}) = \{r_n\}.$$

(iii) Subgrup sejati merupakan subgrup yang bukan merupakan subgrup identitas dan subgrup semua elemen dari grup simetri-n, yaitu terdiri dari 2 elemen, elemen identitas dan elemen yang memuat f, serta subgrup yang memuat semua elemen r. *centralizer* subgrup sejati dari grup simetri-n adalah subgrup itu sendiri.

$$C_{S_n}(\{r_n, f_1\}) = \{r_n, f_1\}$$

$$C_{S_n}(\{r_n, f_2\}) = \{r_n, f_2\}$$

$$C_{S_n}(\{r_n, f_3\}) = \{r_n, f_3\}$$

$$\vdots$$

$$C_{S_n}(\{r_n, f_n\}) = \{r_n, f_n\}$$

$$C_{S_n}(\{\mathrm{r_1, r_2, r_3, \dots, r_n}\}) = \{\mathrm{r_1, r_2, r_3, \dots, r_n}\}$$

Hal ini dikarena elemen r komutatif dengan semua elemen r, Sedangkan elemen f_i dengan $1 \leq i \leq n$ hanya komutatif dengan elemen identitas dan elemen f_i itu sendiri.

Teorema 4

Jika A subgrup dari grup simetri-n $(S_n,\circ), n \geq 3,$ maka *centralizer* subgrup di grup simetri-n $(S_n,\circ)$, n bilangan komposit adalah:

(i) $C_{S_n}(\{\mathrm{r_n}\}) = C_{S_n}\left(\left\{\mathrm{r}_{\frac{\mathrm{n}}{2}}, \mathrm{r_n}\right\}\right) = \{\mathrm{r_1}, \mathrm{r_2}, \mathrm{r_3}, \dots, \mathrm{r_n}, \mathrm{f_1}, \mathrm{f_2}, \mathrm{f_3}, \dots, \mathrm{f_n}\};$

(ii) $C_{S_n}(\{\mathrm{r_1}, \mathrm{r_2}, \mathrm{r_3}, \dots, \mathrm{r_n}\}) = C_{S_n}\left(\left\{r_{\frac{nk}{i}}\right\}\right) = \{\mathrm{r_1}, \mathrm{r_2}, \mathrm{r_3}, \dots, \mathrm{r_n}\};\ k = 1,2,\dots,i$

(iii) $C_{S_n}(\{\mathrm{r_n}, \mathrm{f_i}\}) = C_{S_n}(A) = A\ ;\ A = \left\{r_{\frac{n}{2}}, r_n, f_i, f_j\right\}; 1 \leq i \leq n; j = i + \frac{n}{2}\ ;$

Sedangkan untuk A selain tipe-tipe subgrup tersebut, $C_{S_n}(A) = \{r_{\frac{n}{2}}, r_n\}$.

Bukti:

Centralizer subgrup di grup simetri-n $(S_n,\circ), n \geq 3, n$ bilangan komposit adalah:

(i) *Centralizer* identitas dan subgrup yang terdiri dari 2 elemen yaitu elemen identitas dan elemen $r_{\frac{n}{2}}$ di grup simetri-n adalah semua elemen S_n. Hal ini dikarenakan elemen identitas dan elemen $\mathrm{r}_{\frac{\mathrm{n}}{2}}$ komutatif dengan semua elemen grup simetri-n.

$$C_{S_n}(\{\mathrm{r_n}\}) = \{\mathrm{r_1}, \mathrm{r_2}, \mathrm{r_3}, \dots, \mathrm{r_n}, \mathrm{f_1}, \mathrm{f_2}, \mathrm{f_3}, \dots, \mathrm{f_n}\}$$

$$C_{S_n}\left(\{\mathrm{r}_{\frac{\mathrm{n}}{2}}, \mathrm{r_n}\}\right) = \{\mathrm{r_1}, \mathrm{r_2}, \mathrm{r_3}, \dots, \mathrm{r_n}, \mathrm{f_1}, \mathrm{f_2}, \mathrm{f_3}, \dots, \mathrm{f_n}\}.$$

Hal tersebut karena elemen identitas dan elemen $\mathrm{r}_{\frac{\mathrm{n}}{2}}$ komutatif dengan semua elemen grup simetri-n

(ii) *Centralizer* subgrup yang terdiri dari elemen r, selain subgrup yang terdiri dari elemen identitas dan elemen $r_{\frac{n}{2}}$ adalah terdiri dari semua elemen r. Hal ini dikarenakan elemen r komutatif dengan semua elemen r.

$$C_{S_n}\left(\left\{\left\{r_{\frac{nk}{i}}\right\}\right\}\right) = \{r_1, r_2, r_3, \dots, r_n\}$$

$$C_{S_n}(\{r_1, r_2, r_3, \dots, r_n\}) = \{r_1, r_2, r_3, \dots, r_n\}$$

Hal tersebut karena elemen r komutatif dengan semua elemen grup simetri-n

(iii) *Centralizer* subgrup yang terdiri dari 2 elemen yaitu elemen identitas dan f dan subgrup yang terdiri dari 4 elemen yaitu elemen identitas, elemen $r_{\frac{n}{2}}$ dan 2 elemen f di grup simetri-n adalah terdiri dari 4 elemen yaitu elemen identitas, elemen $r_{\frac{n}{2}}$, dan 2 elemen f. Hal ini dikarenakan elemen identitas dan elemen $r_{\frac{n}{2}}$ komutatif dengan semua elemen P_n, sedangkan elemen, sedangkan elemen f_i komutatif dengan elemen $\{f_i, f_j\}; 1 \leq i \leq n; j = i + \frac{n}{2}$.

$$C_{S_n}(\{r_n, f_1\}) = \{r_n, r_{\frac{n}{2}}, f_1, f_{\frac{n}{2}+1}\}$$

$$C_{S_n}(\{r_n, f_2\}) = \{r_n, r_{\frac{n}{2}}, f_2, f_{\frac{n}{2}+2}\}$$

$$C_{S_n}(\{r_n, f_3\}) = \{r_n, r_{\frac{n}{2}}, f_3, f_{\frac{n}{2}+3}\}$$

$$\vdots \qquad \qquad \vdots$$

$$C_{S_n}(\{r_n, f_n\}) = \{r_n, r_{\frac{n}{2}}, f_n, f_{\frac{n}{2}}\}$$

(iv) *Centralizer* semua elemen simetri-n dan subgrup yang terdiri dari elemen identitas, elemen yang memuat $r_{\frac{nk}{i}}, k = 1,2,\dots,i,$ dan elemen f di grup simetri-n adalah terdiri dari 2 elemen yaitu elemen identitas dan elemen $r_{\frac{n}{2}}$

$$C_{S_n}(\mathrm{r}_1, \mathrm{r}_2, \mathrm{r}_3, \dots, \mathrm{r}_\mathrm{n}, \mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, \mathrm{f}_3, \dots, \mathrm{f}_\mathrm{n}) = \{r_{\frac{n}{2}}, \mathrm{r}_\mathrm{n}\}$$

$$C_{S_n}\left(\left\{\mathrm{r}_{\frac{\mathrm{nk}}{\mathrm{i}}}, r_n, \mathrm{f}_1, \mathrm{f}_{\frac{\mathrm{nk}}{\mathrm{i}}+1}\right\}\right) = \{r_{\frac{n}{2}}, \mathrm{r}_\mathrm{n}\}$$

$$C_{S_n}\left(\left\{\mathrm{r}_{\frac{\mathrm{nk}}{\mathrm{i}}}, r_n, \mathrm{f}_2, \mathrm{f}_{\frac{\mathrm{nk}}{\mathrm{i}}+2}\right\}\right) = \{r_{\frac{n}{2}}, \mathrm{r}_\mathrm{n}\}$$

$$C_{S_n}\left(\left\{\mathrm{r}_{\frac{\mathrm{nk}}{\mathrm{i}}}, r_n, \mathrm{f}_3, \mathrm{f}_{\frac{\mathrm{nk}}{\mathrm{i}}+3}\right\}\right) = \{r_{\frac{n}{2}}, \mathrm{r}_\mathrm{n}\}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$C_{S_n}\left(\left\{\mathrm{r}_{\frac{\mathrm{nk}}{\mathrm{i}}}, r_n, \mathrm{f}_\mathrm{n}, \mathrm{f}_{\frac{\mathrm{nk}}{\mathrm{i}}}\right\}\right) = \{r_{\frac{n}{2}}, \mathrm{r}_\mathrm{n}\}$$

Teorema 5

Jika A subgrup dari grup simetri-n $(S_n,\circ), n \geq 3,$ maka *normalizer* subgrup di grup simetri-n $(S_n,\circ)$, n bilangan prima adalah:

$$N_{S_n}(A) = \begin{cases} A & ; A = \{r_n, f_i\}; 1 \leq i \leq n \\ P_n & ; \mathrm{A} \neq \{r_n, f_i\} \end{cases}$$

Bukti:

Normalizer subgrup di grup simetri-n $(S_n,\circ), n \geq 3, n$ bilangan prima adalah:

(i) *Normalizer* subgrup yang terdiri dari 2 elemen, yaitu elemen identitas dan elemen yang memuat f di grup simetri-n adalah subgrup itu sendiri, yaitu:

$$N_{S_7}(\{\mathrm{r}_\mathrm{n}, \mathrm{f}_1\}) = \{\mathrm{r}_\mathrm{n}, \mathrm{f}_1\}$$

$$N_{S_7}(\{\mathrm{r}_\mathrm{n}, \mathrm{f}_2\}) = \{\mathrm{r}_\mathrm{n}, \mathrm{f}_2\}$$

$$\vdots$$

$$N_{S_7}(\{\mathrm{r}_\mathrm{n}, \mathrm{f}_\mathrm{n}\}) = \{\mathrm{r}_\mathrm{n}, \mathrm{f}_\mathrm{n}\}$$

1. *Normalizer* subgrup selain terdiri dari 2 elemen di grup simetri-n adalah semua elemen grup simetri-n, yaitu:

$N_{S_n}(\{\mathrm{r_n}\}) = \{r_1, r_2, \dots, r_n, f_1, f_2, \dots, f_n\}$

$N_{S_n}(\{r_1, r_2, \dots, r_n\}) = \{r_1, r_2, \dots, r_n, f_1, f_2, \dots, f_n\}$

$N_{S_n}(\{r_1, r_2, \dots, r_n, f_1, f_2, \dots, f_n\}) = \{r_1, r_2, \dots, r_n, f_1, f_2, \dots, f_n\}$.

Teorema 6

Jika A subgrup dari grup simetri-n $(S_n,\circ), n \geq 3,$ maka *normalizer* subgrup di grup simetri-n $(S_n,\circ)$, n bilangan komposit adalah:

$$N_{S_n}(A) = \begin{cases} \left\{\mathrm{r_n}, \mathrm{r}_{\frac{n}{2}}, \mathrm{f_i}, \mathrm{f_j}\right\} & ; A = \{\mathrm{r_n}, \mathrm{f_i}\}; A = \left\{\mathrm{r_n}, \mathrm{r}_{\frac{n}{2}}, \mathrm{f_i}, \mathrm{f_j}\right\}; 1 \leq i \leq n;\ j = i + \frac{n}{2} \\ S_n & ; A \neq \{\mathrm{r_n}, \mathrm{f_i}\}, A \neq \left\{\mathrm{r_n}, \mathrm{r}_{\frac{n}{2}}, \mathrm{f_i}, \mathrm{f_j}\right\} \end{cases}$$

Bukti:

(i) *normalizer* subgrup yang terdiri dari 2 elemen, yaitu elemen identitas dan elemen f dan subgrup yang terdiri dari 4 elemen yaitu elemen identitas, elemen $r_{\frac{n}{2}}$ dan 2 elemen f di grup simetri-n adalah terdiri dari 4 elemen yaitu elemen $r_{\frac{n}{2}}$ dan 2 elemen f.

$$N_{S_n}(\{\mathrm{r_n}, \mathrm{f_1}\}) = \left\{\mathrm{r_n}, \mathrm{r}_{\frac{n}{2}}, \mathrm{f_1}, \mathrm{f}_{\frac{n}{2}+1}\right\}$$

$$N_{S_n}(\{\mathrm{r_n}, \mathrm{f_2}\}) = \left\{\mathrm{r_n}, \mathrm{r}_{\frac{n}{2}}, \mathrm{f_2}, \mathrm{f}_{\frac{n}{2}+2}\right\}$$

$$N_{S_n}(\{\mathrm{r_n}, \mathrm{f_3}\}) = \left\{\mathrm{r_n}, \mathrm{r}_{\frac{n}{2}}, \mathrm{f_3}, \mathrm{f}_{\frac{n}{2}+3}\right\}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$N_{S_n}(\{\mathrm{r_n}, \mathrm{f_n}\}) = \left\{\mathrm{r_n}, \mathrm{r}_{\frac{n}{2}}, \mathrm{f_n}, \mathrm{f}_{\frac{n}{2}}\right\}$$

normalizer subgrup selain terdiri dari 2 tipe subgrup tersebut di grup simetri-n adalah semua elemen grup simetri-n.

$$N_{S_n}(\{r_n\}) = \{\mathrm{r_1, r_2, r_3, \dots, r_n, f_1, f_2, f_3, \dots, f_n}\}$$

$$N_{S_n}(\{\mathrm{r_1, r_2, r_3, \dots, r_n}\}) = \{\mathrm{r_1, r_2, r_3, \dots, r_n, f_1, f_2, f_3, \dots, f_n}\}$$

$$N_{S_n}\left(\{\mathrm{r_n, r_{\frac{nk}{i}}, f_1, f_{\frac{nk}{i}+1}}\}\right) = \{\mathrm{r_1, r_2, r_3, \dots, r_n, f_1, f_2, f_3, \dots, f_n}\}$$

$$N_{S_n}\left(\left\{\mathrm{r_n, r_{\frac{nk}{i}}, f_2, f_{\frac{nk}{i}+2}}\right\}\right) = \{\mathrm{r_1, r_2, r_3, \dots, r_n, f_1, f_2, f_3, \dots, f_n}\}$$

$$N_{S_n}\left(\left\{\mathrm{r_n, r_{\frac{nk}{i}}, f_3, f_{\frac{nk}{i}+3}}\right\}\right) = \{\mathrm{r_1, r_2, r_3, \dots, r_n, f_1, f_2, f_3, \dots, f_n}\}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$N_{S_n}\left(\left\{\mathrm{r_n, r_{\frac{nk}{i}}, f_n, f_{\frac{nk}{i}}}\right\}\right) = \{\mathrm{r_1, r_2, r_3, \dots, r_n, f_1, f_2, f_3, \dots, f_n}\}$$

$$N_{S_n}(\{\mathrm{r_1, r_2, r_3, \dots, r_n, f_1, f_2, f_3, \dots, f_n}\}) = \{\mathrm{r_1, r_2, r_3, \dots, r_n, f_1, f_2, f_3, \dots, f_n}\}$$

Teorema 7

Center dari grup simetri-n, $n \geq 3$, adalah:

$$Z(S_n) = \begin{cases} \{r_n\} & ; n \text{ bilangan prima} \\ \left\{r_{\frac{n}{2}}, r_n\right\} & ; n \text{ bilangan komposit} \end{cases}$$

Bukti:

Center dari grup simetri-n merupakan *centralizer* S_n di S_n. Karena *centralizer* semua elemen pada grup simetri-n, n bilangan prima adalah elemen identitas, yaitu $Z(S_n) = \{r_n\}$, maka *center* dari grup simetri-n, n bilangan prima adalah r_n. Sedangkan *centralizer* semua elemen dari grup simetri-n, n bilangan komposit adalah elemen identitas dan elemen $r_{\frac{n}{2}}$, maka *center* dari grup simetri n, n bilangan komposit adalah $Z(S_n) = \{r_{\frac{n}{2}}, r_n\}$.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada bab sebelumnya, maka dapat disimpulkan bahwa:

1. Pola banyaknya subgrup dari grup simetri-n, $n \geq 3$, adalah:

$$(S_n) = \begin{matrix} n+3 & ; n \text{ bilangan prima} \\ a\ \ n\ \ + b\ \ n & ; n \text{ bilangan komposit} \end{matrix}$$

   $a\ \ n$ adalah banyaknya pembagi positif dari n,

   $b\ \ n$ adalah jumlah pembagi positif dari n.

2. Jika A merupakan subgrup dari grup simetri-n $S_n, \circ$, $n \geq 3$, maka pola centralizer dari subgrup tersebut adalah:

   a. Untuk n bilangan prima:

$$C_{S_n}\ \ A\ \ = \begin{matrix} S_n & ; A = \ \ r_n \\ r_n & ; A = S_n \\ A & ; A \neq \ \ r_n\ \ ; A \neq S_n \end{matrix}$$

   b. Untuk n bilangan komposit:

$$C_{S_n}\ \ \mathrm{r_n}\ \ = C_{S_n}\ \ \mathrm{r}_{\frac{\mathrm{n}}{2}}, \mathrm{r_n}\ \ = \ \ \mathrm{r_1}, \mathrm{r_2}, \mathrm{r_3}, \dots, \mathrm{r_n}, \mathrm{f_1}, \mathrm{f_2}, \mathrm{f_3}, \dots, \mathrm{f_n}\ \ ;$$

$$C_{S_n}\ \ \mathrm{r_1}, \mathrm{r_2}, \mathrm{r_3}, \dots, \mathrm{r_n}\ \ = C_{P_n}\ \ \mathrm{r_n}, r_{\frac{nk}{i}}\ \ = \ \ \mathrm{r_1}, \mathrm{r_2}, \mathrm{r_3}, \dots, \mathrm{r_n}\ \ ;$$

$$k = 1,2,3, \dots, i$$

$$C_{S_n}\ \{\mathrm{r_n}, \mathrm{f_i}\}\ = C_{S_n}\ \ A\ \ = A\ ;\ A = \ \ r_{\frac{n}{2}}, r_n, f_i, f_j\ \ ; 1 \leq i \leq n; j = i + \frac{n}{2};$$

Sedangkan untuk A selain tipe-tipe subgrup tersebut, $C_{S_n}(A) = \{r_{\frac{n}{2}}, r_n\}$.

3. Jika A merupakan subgrup dari grup simetri-n $(S_n, \circ)$, $n \geq 3$, maka pola *normalizer* dari subgrup tersebut adalah:

   a. Untuk n bilangan prima:

$$N_{S_n}(A) = \begin{cases} A & ; A = \langle r_n, f_i \rangle ; 1 \leq i \leq n \\ P_n & ; A \neq \langle r_n, f_i \rangle \end{cases}$$

   b. Untuk n bilangan komposit, maka:

$$N_{S_n}(A) =$$

$$\begin{cases} \langle \mathrm{r_n}, \mathrm{r}_{\frac{n}{2}}, \mathrm{f_i}, \mathrm{f_j} \rangle & ; A = \langle \mathrm{r_n}, \mathrm{f_i} \rangle ; A = \langle \mathrm{r_n}, \mathrm{r}_{\frac{n}{2}}, \mathrm{f_i}, \mathrm{f_j} \rangle ; 1 \leq i \leq n;\ j = i + \frac{n}{2} \\ S_n & ; A \neq \langle \mathrm{r_n}, \mathrm{f_i} \rangle, A \neq \langle \mathrm{r_n}, \mathrm{r}_{\frac{n}{2}}, \mathrm{f_i}, \mathrm{f_j} \rangle \end{cases}$$

4. Pola center dari grup simetri-n $(S_n, \circ)$, $n \geq 3$ adalah:

$$Z(S_n) = \begin{cases} \langle r_n \rangle & ; n \text{ bilangan prima} \\ \langle r_{\frac{n}{2}}, r_n \rangle & ; n \text{ bilangan komposit} \end{cases}$$

4.2 Saran

Dari penelitian ini, masih perlu adanya pengembangan keilmuan. Bagi peneliti selanjutnya, diharapkan lebih memperluas penelitian, diantaranya:

1. Menggunakan objek penelitian pada grup-grup yang lain, misalnya grup modulo, grup simetri, dan grup-grup yang lain.
2. Menggunakan program komputer untuk mmpercepat proses dan akurasi hasil.

3. Menggunakan program komputer untuk menghasilkan gambar yang lebih proporsional.
4. Menggabungkan dengan teori graph untuk mendeskripsikan gambar yang dihasilkan.

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir. 2007. *Ketika Kiai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press

Arifin, Achmad. 2000. *Aljabar*. Bandung : ITB Bandung

Balakrishnan, V. K. 1991. *Introductory Discrete Mathematics*. New Jersey: Prentice-Hall, Inc.

Bartle, Robert G. and Sherbert, Donald R. 2000. *Introduction to Real Analysis (third edition)*. USA: John Wiley and Sons.

Dummit, David S. dan Foote, Richard M. 1991. *Abstract Algebra*. New Jersey: Prentice-Hall, Inc

Herstein, I. N. 1975. *Topiccs in Algebra*. New york: John Wiley & Sons.

Imani, Allamah Kamal Faqih. 2006. *Tafsir Nurul Quran Jilid 1*. Jakarta: Al-Huda

Muhsetyo, Gatot. 1997. *Teori Bilangan*. Jakarta: PGSM

Purwanto, Agus. 2008. *Ayat-ayat Semesta*. Bandung: Mizan

Raisinghania, M. D dan Aggarwal, R. S. 1980. *Modern Algebra*. New Delhi: Ram Nagar

Sukirman. 2005. *Pengantar Aljabar Abstrak*. Malang: UM Press

Sulandra, I Made. 1996. *Struktur Aljabar I (Edisi Revisi)*. Malang: IKIP Malang