TOTAL k-DEFISIENSI TITIK DARI POHON MERENTANG SUATU GRAF TERHUBUNG

SKRIPSI

oleh:
PUSPITA DYAN ANGGRAINI
NIM. 07610041

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2011

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

TOTAL k-DEFISIENSI TITIK DARI POHON MERENTANG SUATU GRAF TERHUBUNG

SKRIPSI

Diajukan Kepada:

Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

oleh:
PUSPITA DYAN ANGGRAINI
NIM. 07610041

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2011

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

TOTAL k-DEFISIENSI TITIK DARI POHON MERENTANG SUATU GRAF TERHUBUNG

SKRIPSI

oleh:
PUSPITA DYAN ANGGRAINI
NIM. 07610041

Telah diperiksa dan disetujui untuk diuji :

DosenPembimbing I,	DosenPembimbing II,
Drs H. Turmudi, M.Si	Ach. Nashichuddin, MA
NIP. 19571005 198203 1 006	NIP. 19730705 200003 1 001

Tanggal, 19 Agustus 2011

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

TOTAL k-DEFISIENSI TITIK DARI POHON MERENTANG SUATU GRAF TERHUBUNG

SKRIPSI

oleh:

PUSPITA DYAN ANGGRAINI
NIM. 07610041

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal, 13 September 2011

SusunanDewanPenguji			TandaTangan
1.	PengujiUtama	: Abdussakir, M.Pd NIP. 19751006 200312 1 001	( )
2.	Ketua	: Wahyu Henky Irawan, M.Pd NIP. 19700420 200003 1 001	( )
3.	Sekretaris	: Drs H. Turmudi, M.Si NIP. 19571005 198203 1 006	( )
4.	Anggota	: Ach. Nashichuddin, M.A NIP. 19730705 200003 1 001	( )

Mengetahui dan Mengesahkan
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertandatangandibawahini:

Nama	:	Puspita Dyan Anggraini
NIM	:	07610041
Jurusan	:	Matematika
Fakultas	:	Sains dan Teknologi
Judul	:	Total k-Defisiensi Titik dari Pohon Merentang suatu Graf Terhubung

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri.

Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 18 Agustus 2011
Yang membuat pernyataan,

Puspita Dyan Anggraini
NIM. 07610041

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

MOTTO:

Untuk setiap permasalahan yang ada pasti mempunyai solusi, baik solusi yang ringkas, teratur, maupun solusi yang rumit.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

PERSEMBAHAN

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Karya sederhana ini penulis persembahkan untuk :

Orang-orang yang telah memberikan semangat bagi hidup penulis dengan pengorbanan, kasih sayang, dan ketulusannya.

Kepada kedua orang tua penulis yang paling berjasa dan selalu menjadi motivator dan penyemangat dalam penyeleseaian penulisan skripsi ini serta teman-teman penulis yang tak pernah henti memberi semangat pada penulis untuk menyelesaikan penyusunan skripsi ini...

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Alhamdulillah segala puji dan syukur hanya ditujukan kepada Allah SWT yang telah melimpahkan nikmat terbaik berupa iman dan Islam, juga yang selalu melimpahkan rahmat, taufik, hidayah serta inayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi yang berjudul "Total k-Defisiensi Titik dari Pohon Merentang Suatu Graf Terhubung" sebagai salah satu syarat dalam menyelesaikan pendidikan S1 dan memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si).

Sholawat serta salam semoga tetap tercurahkan kepada kekasih hati baginda Rasulullah Muhammad SAW, yang telah menunjukkan jalan kebenaran dan keselamatan, yakni ajaran Islam yang menjadi rahmat bagi seluruh umat manusia dan sekalian alam.

Selama penulisan skripsi ini penulis telah banyak mendapat bimbingan, masukan, motivasi dan arahan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan ucapan terima kasih dan panghargaan setinggi-tingginya kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo selaku Rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Drs. Sutiman B. Sumitro, SU, DSc selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang .
3. Abdussakir, M.Pd selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas saintek Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

4. Drs. H. Turmudi, M.Si selaku dosen pembimbing matematika yang telah banyak memberikan tuntunan dan arahan sehingga penulisan skripsi ini dapat terselesaikan.
5. Ach. Nashichuddin, M.A selaku dosen pembimbing integrasi Matematika dan Islam yang telah banyak memberi arahan kepada penulis.
6. Wahyu Henky Irawan, M.Pd selaku dosen matematika yang telah banyak memberi arahan kepada penulis.
7. Segenap dosen Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi yang telah banyak membantu dalam penyelesaian skripsi ini.
8. Ayahanda dan ibunda tercinta yang senantiasa memberikan doa dan restunya kepada penulis dalam menuntut ilmu.
9. Teman-teman penulis yang telah banyak berjasa Any Tsalasatul, Reni Tri Damayanti, Nurjianah, Fitrotin Nisa' yang selalu memberi semangat serta arahan dalam penulisan skripsi ini.
10. Teman-teman jurusan matematika yang telah banyak membantu dalam penyelesaian penulisan skripsi ini.
11. Semua pihak yang terlibat baik secara langsung maupun tidak langsung pada proses terselesaikannya penulisan skripsi ini.

Semoga Allah SWT membalas kebaikan semuanya. Amin.

Harapan penulis semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi penulis khususnya dan bagi pembaca pada umumnya. Amin.

Malang,18 Agustus 2011

Penulis

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

DAFTAR ISI

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

DAFTAR GAMBAR

Gambar Halaman

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

ABSTRAK

Anggraini, Puspita Dyan. 2011. **Total k-Defisiensi Titik dari Pohon Merentang Suatu Graf Terhubung.** Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.

Pembimbing : (1) Drs. H. Turmudi, M.Si
(2) Ach. Nashichuddin, M.A.

Kata kunci : graf sikel, graf komplit, graf tangga, graf bintang, graf roda, pohon merentang, total k-defisiensi titik.

Salah satu permasalahan dalam teori graf adalah k-defisiensi titik. Suatu titik V dari suatu pohon merentang T pada graf G disebut k-defisiensi titik jika derajat dari titik tersebut memenuhi persamaan $der_G(V) - der_T(V) = k$, bilangan bulat k di atas disebut defisiensi dari V. Tujuan dari penelitian ini adalah menentukan jumlah k-defisiensi titik dari suatu pohon merentang dari graf terhubung.

Dalam penelitian ini, metode yang digunakan adalah metode penelitian pustaka *(library research)*, dengan menggunakan graf sikel, graf komplit, graf tangga, graf bintang dan graf roda sebagai contoh. Adapun langkah-langkah penelitian sebagai berikut: (1) Menggambar graf yang akan digunakan dan menentukan derajat titik; (2) Mencari pohon merentang (mencari semua kemungkinan pohon merentang); (3) Menentukan derajat titik dari pohon merentang; (4) Menentukan k-defisiensi titik; (5) Menentukan pola rumusan k-defisiensi titik; (6) Membuktikan pola rumusan k-defisiensi titik.

Berdasarkan hasil pembahasan, dapat diperoleh (1) Nilai k-defisiensi titik pada graf sikel adalah 2; (2) rumus k-defisiensi titik pada graf komplit adalah $n^2 - 3n + 2$; (3) Rumus k-defisiensi titik untuk graf tangga adalah $2(n-1)$; (4) Rumus k-defisiensi titik pada graf bintang adalah 0; (5) k-defisiensi titik pada graf roda adalah 2n.

k-defisiensi titik digunakan pada graf dan pohon merentangnya. Sehingga pada penelitian selanjutnya penulis menyarankan untuk melanjutkan penelitian pada graf yang lain atau dengan menggunakan pola yang lain misalnya dengan menggunakan graf tak identik.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

ABSTRACT

Anggraini, Puspita Dyan. 2011. **Total k-Defisiensi Vertex for Spanning Tree Connected Graph** Thesis, Mathematics Department. Faculty Science and Technology, Islamic State University Maulana Malik Ibrahim of Malang..

Advisor : (1) Drs. H. Turmudi, M.Si
(2) Ach. Nashichuddin, M.A.

Keywords : cycle graph, complete graph, ladder graph, star graph, wheel graph, spanning tree, total k-deficient vertex.

One of problem in graph theory is k-deficient vertex. A point of V from a spanning tree T in graph G is k-deficient vertex if degree of vertex to complete equation $der_G(V) - der_T(V) = k$, zahlen number k is deficiency from V. the object of the research is knowing is value from k-deficient vertex from a spanning tree in connected graph.

The method of this method is library research, to example used cycle graph, complete graph, ladder graph, star graph, and wheel graph. The steps of research are: (1) describe of graf and determine vertex of degree; (2) Search spanning tree from graph; (3) Determine vertex of degreefrom spanning tree; (4) Determine k-deficient vertex; (5) Determine conjecture of k-deficient vertex; (6) Proofe conjecture of k-deficient vertex.

According a discussion have (1) Value of k-deficient vertex of cycle graph is 2; (2) Formulate of k-deficient vertex in complete graph is $n^2 - 3n + 2$; (3) Formulate of k-deficient vertex in ladder graph is $2(n-1)$; (4) Formulate of k-deficient vertex in star graph is 0; (5) Formulate of k-deficient vertex in wheel graph is 2n.

k-deficient vertex used in it's graph and spanning tree. So in next researcher suggest to continuing this research in other graph or use other formulate, example use nonidentical graph.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Al-Quran merupakan kalam Allah yang di dalamnya berisi ilmu-ilmu Allah, yang perlu dikaji lebih mendalam. Al-Quran tidak hanya berisi mengenai halal dan haram, surga dan neraka, pahala dan dosa, serta aturan-aturan peribadahan untuk umat-Nya. Tetapi juga berisi berbagai ilmu pengetahuan yang ada di muka bumi ini baik yang telah kita kenal selama ini maupun ilmu-ilmu pengetahuan yang masih belum kita kenal. Karena Allah telah memberikan kita (manusia) rujukan yang sangat lengkap melalui Al-Quran yang berisi banyak hal mengenai kehidupan didunia, dan ilmu pengetahuan adalah sebagian kecil dari itu semua. Al-Quran menggambarkan betapa luasnya Ilmu Allah dalam Surat Al-Kahfi: 109 berikut:

قُل لَّوۡ كَانَ ٱلۡبَحۡرُ مِدَادٗا لِّكَلِمَٰتِ رَبِّي لَنَفِدَ ٱلۡبَحۡرُ قَبۡلَ أَن تَنفَدَ كَلِمَٰتُ رَبِّي وَلَوۡ جِئۡنَا بِمِثۡلِهِۦ

مَدَدٗا ١٠٩

Katakanlah: Sekiranya lautan menjadi tinta untuk (menulis) kalimat-kalimat Tuhanku, sungguh habislah lautan itu sebelum habis (ditulis) kalimat-kalimat Tuhanku, meskipun Kami datangkan tambahan sebanyak itu (pula)".

Kewajiban menuntut ilmu/ mempelajari ilmu pengetahuan dalam Islam telah jelas diperintahkan dalam Al-Quran maupun sunnah. Karena dengan mempelajari ilmu pengetahuan diharapkan seorang muslim akan lebih meyakini

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

kekuasaan Allah sehingga bisa mempertebal keimanan kepada-Nya. Tanpa melupakan hakikat manusia sebagai makhluk sosial yang hidup berdampingan dengan manusia yang lain dari berbagai ras dan suku. Karena Allah telah menciptakan manusia bersuku-suku dan berbangsa-bangsa agar manusia saling mengenal.

Salah satu ilmu pengetahuan yang banyak dikaji dan diterapkan pada berbagai bidang ilmu adalah matematika. Matematika dapat dikatakan "Queen of Science" karena matematika dapat dikatakan menempati posisi yang cukup penting dalam kajian-kajian ilmu yang lain khususnya sains. Matematika banyak membantu mempermudah dalam me nyelesaikan persamaan dalam kajian ilmu-ilmu lain.

Matematika mempunyai banyak cabang, antara lain adalah teori graf. Teori graf merupakan salah satu cabang matematika yang masih menarik untuk dibahas karena teori-teorinya masih aplikatif sampai saat ini dan dapat diterapkan untuk memecahkan masalah dalam kehidupan sehari-hari. Dengan mengkaji dan menganalisis model atau rumusan, teori graf dapat diperlihatkan peranan dan kegunaannya dalam memecahkan berbagai permasalahan. Permasalahan yang dirumuskan dengan teori graf dibuat sederhana, yaitu diambil aspek-aspek yang diperlukan dan dibuang aspek-aspek lainnya (Purwanto, 1998:1).

Graf telah dikembangkan sejak tahun 1960, dimulai oleh Euler yang menggambarkan suatu masalah lintasan yang melalui jembatan dan pulau di tengah kota Koninsberg. Masalah tersebut digambarkan melalui titik dan sisi yang menghubungkan antar titik, yang akhirnya berkembang dan dikenal sebagai Graf.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Graf didefinisikan dalam himpunan titik (vertek) yang tidak kosong dan himpunan garis atau sisi (edge) yang mungkin kosong. Himpunan titik dari suatu graf G dinyatakan dengan V(G) dan himpunan sisi dinyatakan dengan E(G). Selanjutnya graf ini terus dikembangkan melalui riset-riset yang memberikan solusi termudah bagi masalah manusia khususnya tentang jaringan, lintasan, penjadwalan dan sebagainya.Sejalan dengan berkembangnya peradaban kehidupan manusia, graf telah marak dikembangkan melalui riset-riset pada tahun 1960-an. Saat ini graf telah masuk dalam bagian kurikulum matematika yang wajib ditempuh khususnya pada jurusan matematika dan informatika. Banyak sekali kegunaan graf dalam aplikasi pada kehidupan manusia. Pada umumnya, graf digunakan untuk memodelkan suatu masalah yang direpresentasikan oleh titik dan garis, agar menjadi lebih mudah dalam menganalisis dan pengambilan keputusan dari masalah yang bersangkutan. Misalnya, pada penggambaran jaringan komunikasi, komputer, rangkaian listrik, senyawa kimia, algoritma, peta, dan lain-lainnya. Bahkan masalah penjadwalan dari mulai yang mudah sampai yang paling rumit seperti penjadwalan pesawat terbang, terminal, stasiun, perjalanan dan sebagainya, juga menggunakan prinsip graf.

Salah satu cabang dari teori graf adalah tentang pohon, komplemen graf serta k-defisiensi titik. Konsep pohon merupakan konsep yang paling penting karena konsep ini mampu mendukung penerapan graf dalam berbagai bidang ilmu. Kirchoff (1824-1887) mengembangkan teori pohon untuk diterapkan dalam jaringan listrik. Selanjutnya Arthur Cayley (1821-1895) mengembangkan graf

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

jenis ini sewaktu mencacah isomer hidrokarbon jenuh C_nH_{2n+2}. Sekarang pohon digunakan luas dalam linguistik dan ilmu komputer (Heri Sutarno, 2005:104).

Pohon adalah graf terhubung yang tidak memuat sikel (*acyclic*). Sebuah pohon selalu terdiri dari n titik dan $n-1$ sisi. Pohon yang merupakan subgraf dari suatu graf terhubung G, yang memuat seluruh titik dari G disebut pohon merentang (*spanning tree*) (Rasyid, 2006:18).

Komplemen graf adalah graf yang merupakan lawan dari suatu graf tersebut. Sehingga jika suatu graf digabung dengan komplemen grafnya akan menghasilkan sebuah graf lengkap. Suatu titik V dari suatu pohon merentang T pada graf G disebut k-defisiensi titik jika derajat dari titik tersebut memenuhi persamaan $der_G(V) - der_T(V) = k$, bilangan bulat k di atas disebut defisiensi dari V. (Khusnul Novianigsih)

Berdasarkan artikel dari khusnul novianigsih pada sebuah web mengenai k-defisiensi titik penulis tertarik untuk mengkaji lebih lanjut mengenai definisi tersebut, terutama untuk lebih mempermudah mengetahui bagaimana menentukan nilai k-defisiensi titik terutama dari pohon merentang dari graf terhubung yang diberi judul "**Total k-Defisiensi Titik dari Pohon Merentang Suatu Graf Terhubung**"

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, maka rumusan masalah dalam penulisan skripsi ini adalah: bagaimana jumlah atau total k-defisiensi titik dari suatu pohon merentang dari graf terhubung?

1.3 Batasan Masalah

Graf yang digunakan dalam penulisan ini adalah graf sikel, graf tangga, graf komplit, graf bintang dan graf roda sebagai contoh graf terhubung.

1.4 Tujuan Penulisan

Dari rumusan masalah di atas, maka tujuan dari penulisan skripsi ini adalah menentukan jumlah atau total k-defisiensi titik dari suatu pohon merentang dari graf terhubung.

1.5 Manfaat Penulisan

Adapun manfaat dari penulisan ini adalah:

a. Bagi Penulis
   1. Tambahan pengetahuan mengenai graf khususnya k-defisiensi titik
   2. Tambahan wawasan dan pengalaman tentang penelitian matematika murni.

b. Bagi Lembaga
   1. Sebagai tambahan pustaka untuk rujukan bahan perkuliahan khususnya tentang materi k-defisiensi titik pada graf.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

2. Sebagai tambahan pustaka untuk rujukan penelitian tentang materi graf

c. Bagi Pembaca

Sebagai bahan pembelajaran dan pengetahuan mengenai k-defisiensi titik.

1.6 Metode Penulisan

Dalam penelitian ini penulis menggunakan jenis penelitian deskriptif kualitatif dengan metode penelitian kepustakaan (*library research)* atau kajian pustaka, yakni melakukan penelitian untuk memperoleh data-data dan informasi-informasi serta objek yang digunakan dalam pembahasan masalah tersebut.

Adapun langkah-langkah yang akan digunakan oleh peneliti dalam membahas penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menggambar graf yang akan digunakan dan menentukan derajat titik.
2. Mencari pohon merentang (mencari semua kemungkinan pohon merentang).
3. Menentukan derajat titik dari pohon merentang.
4. Menentukan jumlah k-defisiensi titik.
5. Menentukan pola rumus jumlah k-defisiensi titik.
6. Membuktikan pola rumus jumlah k-defisiensi titik.

1.7 Sistematika Penulisan

Agar dalam penulisan penelitian ini sistematis dan mempermudah pembaca memahami tulisan ini, penulis membagi tulisan ini ke dalam empat bab sebagai berikut:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

1. **BAB I PENDAHULUAN**

   Dalam bab ini dijelaskan latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

2. **BAB II KAJIAN PUSTAKA**

   Dalam bab ini dikemukakan hal-hal yang mendasari dalam teori yang dikaji, yaitu memuat teori graf, graf terhubung, derajat titik, graf-graf khusus, operasi pada graf, jenis-jenis graf, pohon, subgraf, pohon merentang, dan k-defisiensi titik, konsep Al-Quran tentang keragaman umat manusia.

3. **BAB III PEMBAHASAN**

   Dalam bab ini dipaparkan tentang "bagaimana jumlah k-defisiensi titik dari pohon merentang suatu graf terhubung?"

4. **BAB IV PENUTUP**

   Dalam bab ini dikemukakan kesimpulan akhir penelitian dan beberapa saran.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Graf

Graf merupakan salah satu bidang matematika yang diperkenalkan pertama kali oleh ahli matematika dari Swiss, Leonardo Euler pada tahun 1763. Ide besarnya muncul sebagai upaya menyelesaikan masalah jembatan Konisberg. Dari permasalahan itu, akhirnya Euler mengembangkan beberapa konsep mengenai teori graf.

Teori graf saat ini menjadi topik yang banyak mendapat perhatian, karena model-model yang ada pada teori graf berguna untuk aplikasi yang luas, seperti masalah dalam jaringan komunikasi, transportasi, ilmu komputer, riset operasi, dan lain sebagainya. Definisi graf itu sendiri adalah:

Definisi

Graf G adalah pasangan himpunan (V,E) dengan V adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut sebagai titik dan E adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di V yang disebut sebagai sisi (Chartrand dan Lesniak, 1986: 4).

Himpunan titik di G dinotasikan dengan V(G) dari himpunan sisi dinotasikan dengan E(G). Sedangkan banyaknya unsur di V disebut *order* dari G dan dilambangkan dengan p(G) dan banyaknya unsur di E disebut *size* dari G dan dilambangkan dengan q(G). Jika graf yang dibicarakan hanya graf G, maka order dan size dari G tersebut cukup ditulis dengan p dan q (Chartrand dan Lesniak,1986: 4).

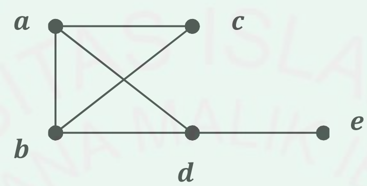
CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Perhatikan graf G yang memuat himpunan titik V(G) dan himpunan sisi E(G) seperti berikut ini.

$V(G) = \{a, b, c, d, e\}$

$E(G) = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, d), (b, c), (d, e)\}$.

Graf G tersebut secara lebih jelas dapat digambar sebagai berikut:



Graf G mempunyai 5 titik sehingga order G adalah p=5. Graf G mempunyai 6 sisi sehingga ukuran graf G adalah $q = 6$.

Graf G dengan himpunan titik dan sisi masing-masing

$V(G) = \{a, b, c, d, e\}$

$E(G) = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, d), (b, c), (d, e)\}$.

dapat juga ditulis dengan

$V(G) = \{a, b, c, d, e\}$

$E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$

dengan

$e_1 = (a, b);\ e_2 = (a, c);\ e_3 = (a, d);\ e_4 = (b, d);\ e_5 = (b, c);\ e_6 = (d, e)$

Sisi $e = (u, v)$ dikatakan menghubungkan titik u dan v. Jika $e = (u, v)$ adalah sisi di graf G, maka u dan v disebut terhubung langsung (adjacent), v dan e serta u dan e disebut terkait langsung (incident), dan titik u dan v disebut ujung dari e. dua sisi berbeda e_1 dan e_2 disebut terhubung langsung, jika terkait langsung pada satu titik yang sama (Abdussakir, 2009:5-6).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

2.2 Graf Terhubung

Misalkan G graf. Misalkan u dan v adalah titik di G (yang tidak harus berbeda). Jalan u-v pada graf G adalah barisan berhingga yang berselang seling

$$W: u = v_{0,}\, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_n, v_n = v$$

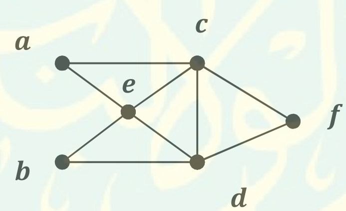
antara titik dan sisi, yang dimulai dari titik dan diakhiri dengan titik, dengan

$$e_1 = v_{i-1}v_i \qquad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

adalah sisi di G. v_0 disebut titik awal, v_n disebut titik akhir, titik $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ disebut titik internal, dan n menyatakan panjang dari W. Jika $v_0 \neq v_n$, maka W disebut jalan terbuka. Jika $v_0 = v_n$, maka W disebut jalan tertutup. Jalan yang tidak mempunyai sisi disebut jalan trivial (Abdussakir; 2009:49)

Jalan W yang semu sisinya berbeda disebut trail. Perhatikan graf G berikut:

G:

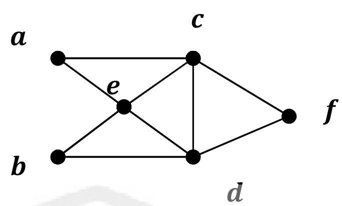


Maka $W_1 = f, c, a, e, b, d, e, c, d, f$ adalah jalan tertutup, dan merupakan trail karena semua sisinya berbeda atau tidak ada sisi yang dilalui lebih dari satu kali. $W_2 = a, c, e, b, d, a, c, d, f$ adalah jalan terbuka, dan bukan trail karena sisi *ac* dilalui lebih dari kali, atau dengan kata lain ada sisi yang sama pada jalan W_2.

Jalan terbuka yang semua titiknya berbeda disebut lintasan. Dengan demikian setiap lintasan pasti merupakan trail, tetapi tidak semua trail mempunyai lintasan. Pada graf G berikut:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

G:



Jalan $W_1 = a, c, e, b, d, f$; $W_2 = a, e$, dan $W_3 = a, e, b, c$ adalah lintasan di G karena semua titiknya berbeda. Sedangkan $W_4 = a, c, e, b, d, f, d, e, a$ dan $W_5 = a, e, b, e, c$ bukan lintasan karena ada titik yang sama (Abdussakir; 2009:51-52).

Graf yang terdiri dari lintasan (*path*) disebut graf lintasan (*path*). Graf lintasan dengan n titik dinotasikan dengan P_n. Berikut ini adalah graf lintasan dengan order 1, 2, 3, 4, dan 5.

P_1 : 

P_2 : 

P_3 : 

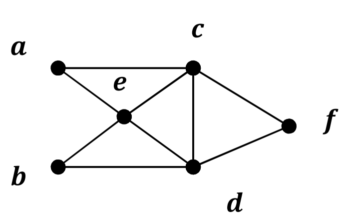
P_4 : 

P_5 : 

(Robin dan John, 1992:37).

Jalan tertutup W tak trivial yang semua sisinya berbeda disebut sirkuit. Dengan kata lain, sirkuit adalah trail tertutup tak trivial. Perhatikan graf G berikut:

G:



CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

jalan $W_1 = a, e, b, d, e, c, a$ adalah jalan tertutup, dan merupakan trail karena semua sisinya berbeda. Jadi W_1 adalah sirkuit. Jalan $W_2 = a, e, b, d, e, d, c, a$ adalah jalan tertutup, dan bukan trail karena sisi *ed* dilalui dari satu kali, atau dengan kata lain ada sisi yang sama pada jalan W_2. Dengan demikian W_2 bukan sirkuit.

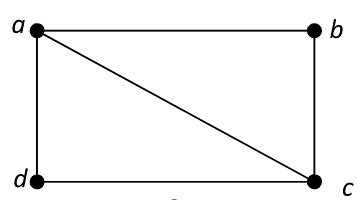
Jalan tertutup tak trivial yang semua titiknya berbeda disebut sikel. Dengan demikian setiap sikel pasti merupakan sirkuit, tetapi tidak semua sirkuitmerupakan sikel. Jika dicarikan hubungan antara sirkuit dan sikel diperoleh bahwa: trail tertutup dan tak trivial pada graf G disebut sirkuit di G.

Misalkan *u* dan *v* titik berbeda pada graf G. Titik *u* dan *v* dikatakan terhubung (connected), jika terdapat lintasan *u-v* di G. Suatu graf G dikatakan terhubung jika untuk setiap titik *u* dan *v* yang berbeda di G terhubung. Dengan kata lain, suatu graf G dikatakan terhubung, jika untuk setiap titik *u* dan *v* di G terdapat lintasan *u-v* di G. Sebaliknya, jika ada dua titik *u* dan *v* di G, tetapi tidak ada lintasan *u-v* di G, maka G dikatakan tak terhubung (disconnected).

2.3 Derajat Titik

Derajat titik v pada graf G, ditulis dengan $der_G v$, adalah banyak sisi yang terkait langsung pada titik v. Titik v dikatakan genap atau ganjil tergantung dari jumlah $der_G v$ genap atau ganjil (Chartrand dan Lesniak,1986:7).

Contoh:



G

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Dari contoh graf yang diberikan pada gambar di atas, dapat dituliskan derajat masing-masing titiknya adalah sebagai berikut :

$der_G\ a = 3$

$der_G\ b = 2$

$der_G\ c = 3$

$der_G\ d = 2$

karena tidak ada titik yang berderajat 1, maka graf G tidak mempunyai titik ujung. Titik ujung adalah titik yang berderajat satu. Hubungan antara jumlah derajat semua titik dalam suatu graf G dengan banyak sisi, yaitu q adalah:

$$\sum_{v \in V(G)} der\ v = 2q$$

Hal ini dinyatakan dalam teorema berikut:

Teorema 1

Jika G graf dengan $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ maka

$$\sum_{i=1}^{p} der_G v_i = 2q$$

Untuk q adalah banyaknya sisi pada graf G.

Bukti

Setiap sisi adalah terkait langsung dengan dua titik. Jika setiap derajat titik dijumlahkan, maka setiap sisi dihitung dua kali (Chartrand dan Lesniak, 1986: 7).

Corollary 1

Pada sebarang graf, banyak titik berderajat ganjil adalah genap.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

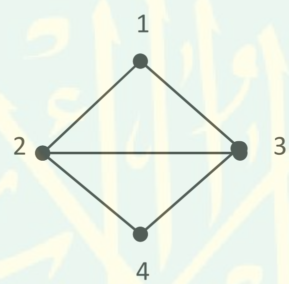
Bukti

Misalkan graf G dengan banyak sisi (size) q. Dan misalkan W himpunan titik yang berderajat ganjil pada G serta U himpunan titik yang berderajat genap di G. Dari teorema di atas maka diperoleh:

$$\sum_{v \in V(G)} der_G v = \sum_{v \in W} der_G v + \sum_{v \in U} der_G v = 2q$$

Dengan demikian karena $\sum_{v \in V(G)} der_G v$ genap, maka $\sum_{v \in W} der_G v$ juga genap. Sehingga $|W|$ adalah genap (Chartrand dan Lesniak, 1986: 7-8).

Contoh:



Gambar 2.1. Graf G(4, 5)

Menurut teorema di atas graf $G(4,5)$ maka dapat dinyatakan bahwa:

$der_G\, 1 + der_G\, 2 + der_G\, 3 + der_G\, 4 \quad = 2 + 3 + 3 + 2 = 10 = 2 \times 5$

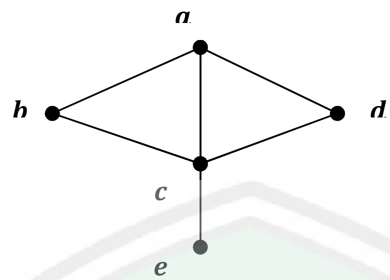
$= 2 \times$ banyak sisi

Barisan bilangan bulat tak negatif $d_1, d_2, d_3, \ldots, d_p$ disebut barisan derajat dari graf G jika titik-titik di G dapat diberi label $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_p$ sedemikian hingga $\text{der}(v_i) = d_i, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, p$.

Sebagai contoh, misalkan graf G seperti gambar berikut:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

G:



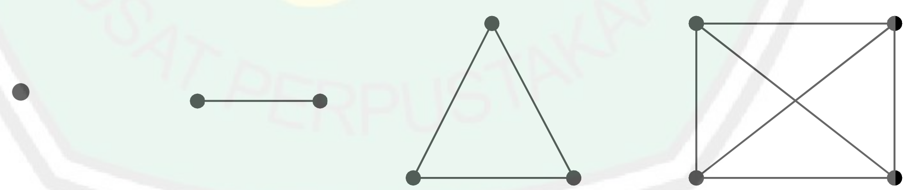
Maka barisan derajat dari graf G adalah $1, 2, 2, 3, 4$ atau $4, 3, 2, 2, 1$ atau $1, 4, 2, 3, 2$.

2.4 Graf-graf Khusus

Berdasarkan titik, sisi, dan derajatnya, terdapat beberapa graf yang mempunyai sifat-sifat khusus.

Graf G dikatakan komplit jika setiap dua titik yang berbeda saling terhubung langsung. Graf komplit dengan order n dinyatakan dengan K_n. Dengan demikian, maka graf K_n merupakan graf beraturan $(n-1)$ dengan banyaknya titik (order) $V(G) = n$ dan ukuran $E(G) = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$.

Berikut ini adalah gambar graf K_1, K_2, K_3 dan K_4.



K_1 K_2 K_3 K_4

Graf G dikatakan bipartisi jika himpunan titik pada G dapat dipartisi menjadi dua himpunan tak kosong V_1 dan V_2 sehingga masing-masing sisi pada graf G tersebut menghubungkan sati titik di V_1 dengan satu titik di V_2. Jika G adalah graf bipartisi beraturan-r, dengan $r \geq 1$, maka $|V_1| = |V_2|$. Graf G

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

dikatakan partisi-n jika himpunan titiknya dapat dipartisi menjadi sebanyak n himpunan tak kosong $V_1, V_2, \ldots, V_n$, sehingga masing-masing sisi pada graf G menghubungkan titik pada V_i dengan titik pada V_j, untuk $i \neq j$. Jika $n = 3$, graf partisi-n disebut tripartisi (Abdussakir, 2009:21-22).

Suatu graf G disebut bipartisi komplit jika G adalah graf bipartisidan masing-masing titik pada suatu partisi terhubung langsung dengan semua titik pada partisi yang lain. Graf bipartisi komplit dengan m titik pada salah satu partisi dan n titik pada partisi yang lain ditulis $K_{m,n}$ (Abdussakir; 2009:22).

2.5 Operasi pada Graf

2.5.1 Penjumlahan

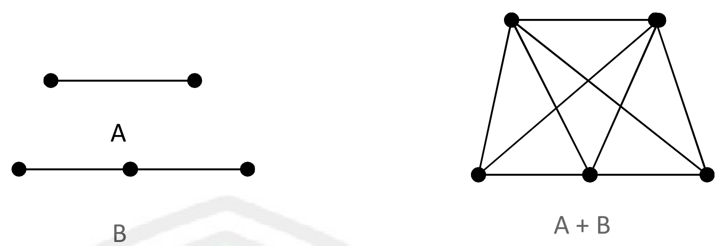
Chartrand mendefinisikan operasi penjumlahan pada graf sebagai berikut:

Definisi

Misalkan G_1 dan G_2 adalah graf, **join (penjumlahan)** dari G_1 dan G_2, dinotasikan $G_1 + G_2$, adalah graph yang terdiri dari $G_1 \cup G_2$, dan semua sisi-sisi e_ie_j, dimana $e_i \in V(G_1)$ dan $e_j \in V(G_2)$, dengan e_i adalah sisi di graf G_1 dan e_j adalah sisi di graf G_2.

Berikut akan ditunjukkan join graf $P_3 + K_2$, dengan P_3 adalah graf lintasan (graf yang berbentuk garis yang terdiri dari n titik) 3 seperti pada gambar 2.9 di bawah (graf B), dan K_2 yaitu graf komplit (graf dengan dua titik yang berbeda saling terhubung langsung) 2 seperti gambar 2.2 di bawah (graf A) (Chartrand dan Oellerman, 1993:29).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG



Gambar 2.2 join graf A dan B

$A+B$ merupakan join dari graf A dan graf B.

2.5.2 Perkalian

Definisi

Pada graf G_1 dan G_2, ***product*** **(hasil kali)** $G_1 \times G_2$ memiliki himpunan titik $V(G_1) \times V(G_2)$, dan dua titik (u_1, u_2) dan (v_1, v_2) akan terhubung langsung pada $G_1 \times G_2$ jika dan hanya jika:

$$u_1 = v_1 \text{ dan } u_2v_2 \in E(G_2)$$

atau

$$u_2 = v_2 \text{ dan } u_1v_1 \in E(G_1)$$

(Chartrand dan Oellerman, 1993:29).

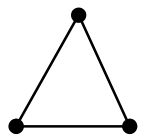
Dari definisi keterhubungan titik menyatakan bahwa $G_1 \times G_2 \cong G_2 \times G_1$.

Contoh:

Jika ditunjukkan graf komplit 3 (K_3) dan graf lintasan 3 (P_3) seperti gambar berikut, maka akan didapatkan hasil kali K_3 dan P_3 adalah sebagai berikut:

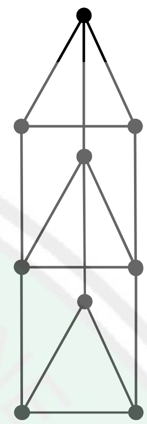
CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

K_3 :



P_3:

K_3 x P_3 :



Gambar 2.3 Graf K_3 x P_3

Graf K_3 x P_3 merupakan hasil kali graf K_3 dan P_3.

2.6 Jenis-Jenis Graf

2.6.1 Graf Tangga (*Ladder Graph*)

Graf tangga dapat didefinisikan sebagai berikut:

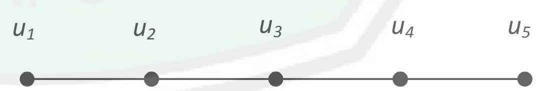
Definisi

Graf tangga adalah graf yang dibangun dari hasil kali kartesius graf lintasan P_2 dan P_n yaitu P_2 x P_n. Graf tangga dinotasikan dengan L_n.

Contoh:

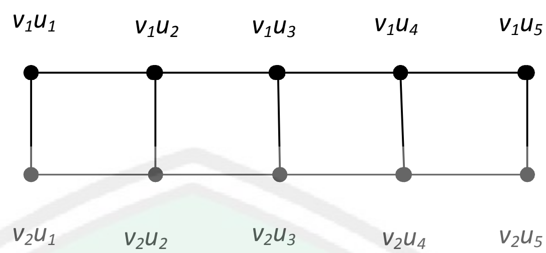
P_2 :

P_5:



CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

P_2 x P_5 :



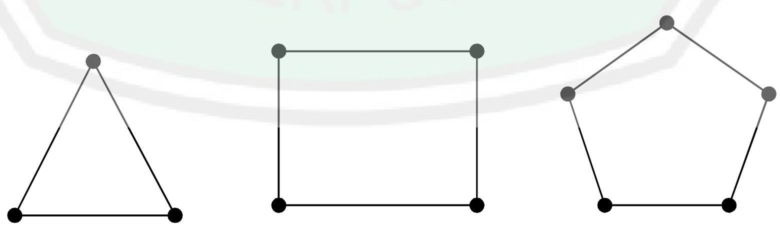
Gambar 2.4. Graf Tangga L_5

Dari gambar tersebut, maka penulis dapat menentukan beberapa ciri graf tangga adalah empat titik berderajat 2 dan titik yang lain selalu berderajat 3.

2.6.2 Graf sikel (*Cycle Graph*)

Graf berbentuk sikel dengan titik sebanyak $n, n \geq 3$, disebut graf sikel dan ditulis C_n. Graf sikel sering juga disebut sebagai graf lingkaran karena gambarnya dapat dibentuk menjadi lingkaran. Perlu dicatat bahwa tidak selamanya graf sikel digambar dalam bentuk lingkaran.

Graf sikel dapat juga digambar dalam bentuk polygon. C_3 dapat disebut segitiga, C_4 segiempat, dan secara umum C_n dapat disebut segi-n. sikel yang banyak titiknya ganjil disebut sikel ganjil dan sikel yang banyak titiknya genap disebut sikel genap (Abdussakir; 2009:55). Perhatikan beberapa gambar berikut:



C_3 C_4 C_5

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

2.6.3 Graf Bintang (*Star Graph*)

Graf bintang dapat didefinisikan sebagai berikut:

Definisi

Graf bintang adalah graf bipartisi komplit yang berbentuk $K_{1,n}$ dan dinotasikan dengan S_n. Jadi, S_n mempunyai order (n-1) dan ukuran n (Abdussakir; 2009:22).

Untuk memperjelas definisi graf bintang di atas dapat digambarkan seperti contoh berikut:

Contoh

$K_{1,3}$ $K_{1,4}$

Gambar di atas menunjukkan graf bintang $K_{1,3}$ dan $K_{1,4}$ maksudnya adalah 1 merupakan titik yang berada ditengah yang dihubungkan oleh sisi dengan titik-titik yang lain (yaitu 3 titik yang lainnya) untuk $K_{1,3}$.

2.6.4 Graf Komplit (*Complete Graph*)

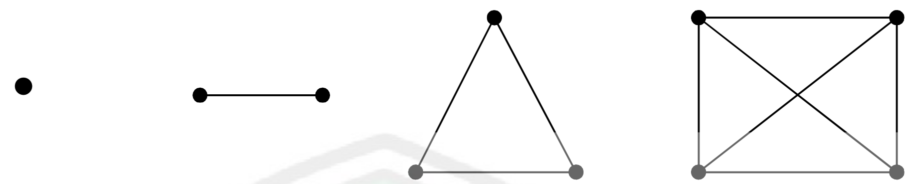
Graf komplit dapat didefinisikan sebagai berikut:

Definisi

Graf komplit adalah graf dengan dua titik yang berbeda saling terhubung langsung. Graf komplit dengan n titik dinyatakan dengan K_n (Chartrand dan lesniak, 1986:9 dan purwanto, 1998:21).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Contoh



K_1 K_2 K_3 K_4

Gambar di atas menunjukkan:

K_1 adalah graf komplit dengan 1 titik, sehingga tidak memiliki sisi,

K_2 adalah graf komplit dengan 2 titik,

K_3 adalah graf komplit dengan 3 titik, dan

K_4 adalah graf komplit dengan 4 titik.

2.6.5 Graf Roda (*Wheel Graph*)

Graf roda dapat didefinisikan sebagai berikut:

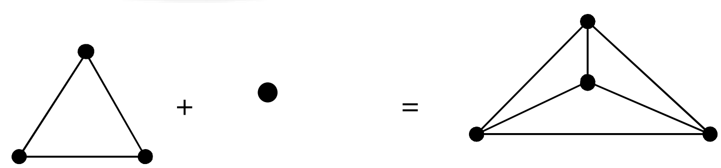
Definisi

Graf roda W_n diperoleh dengan operasi penjumlahan graf sikel C_n dengan graf komplit K_1. Jadi,

$$W_n = \mathrm{C_n} + K_1, n > 2$$

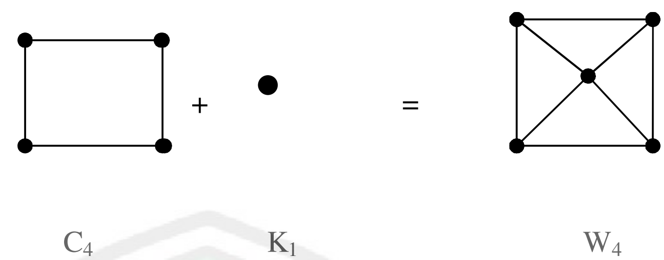
Untuk lebih mudah memahami definisi di atas akan ditunjukkan contoh sebagai berikut:

Contoh:



C_3 K_1 W_3

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG



Gambar 2.5. Graf Roda-3 dan Roda-4

Dari gambar tersebut, maka penulis dapat menentukan beberapa ciri khusus graf roda yaitu setiap titik pada sikelnya selalu berderajat 3 dan banyaknya titik sikelnya menunjukkan derajat titik pusatnya.

2.7 Pohon

Definisi

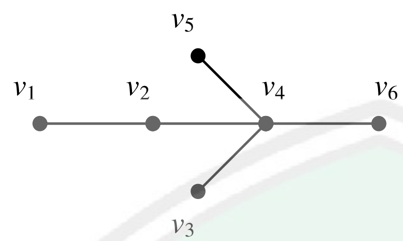
Pohon adalah graf terhubung yang tidak mengandung sikel (*acyclic*). (Chartrand dan Lesniak, 1986: 68)

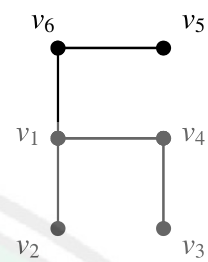
Misalkan G adalah suatu graf dengan n titik. Maka pernyataan berikut ini adalah ekivalen:

1. G terhubung dan tidak memuat sikel;
2. G terhubung dan memiliki n-1 sisi;
3. G memiliki n-1 sisi dan tidak memuat sikel;
4. setiap dua titik di G terhubung dengan tepat satu lintasan (path);
5. G tidak memuat sikel, tetapi penambahan sembarang sisi baru membentuk tepat satu sikel.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Contoh:



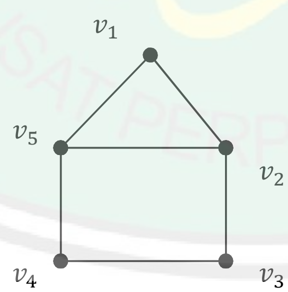


Gambar 2.6 Contoh Pohon

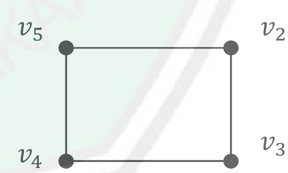
2.8 Subgraf

Misalkan G graf. Graf H dikatakan subgraf dari graf G jika setiap titik di H adalah titik di G dan setiap sisi di H adalah sisi di G. Dengan kata lain, graf H adalah subgraf dari G jika $V(G) \subseteq V(G)$ dan $E(G) \subseteq E(G)$. Jika H adalah subgraf dari G maka dapat ditulis $H \subseteq G$. Jika H adalah subgraf dari G tetapi $H \neq G$, maka H disebut subgraf sejati dari G, dan ditulis dengan $H \subset G$. Pada kasus H adalah subgraf G, maka G disebut supergraf dati H. Pada contoh berikut, G_1 dan G_2 adalah subgraf dari G sedangkan G_3 bukan subgraf dari G. Ada sisi v_2v_4 di G_3 tetapi v_2v_4 bukan sisi di G.

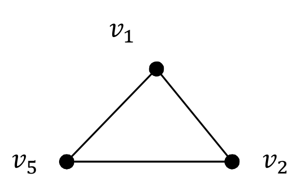
G:



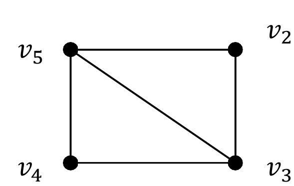
G_1:



G_2:



G_3:



CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

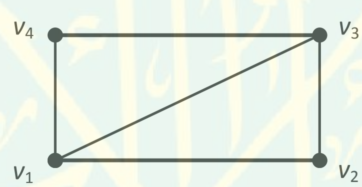
2.9 Pohon Merentang

Suatu pohon dapat dibentuk dari graf terhubung. Pohon-pohon yang dibentuk dari graf tersebut disebut pohon merentang. Secara matematis pohon merentang didefinisikan sebagai berikut:

Definisi

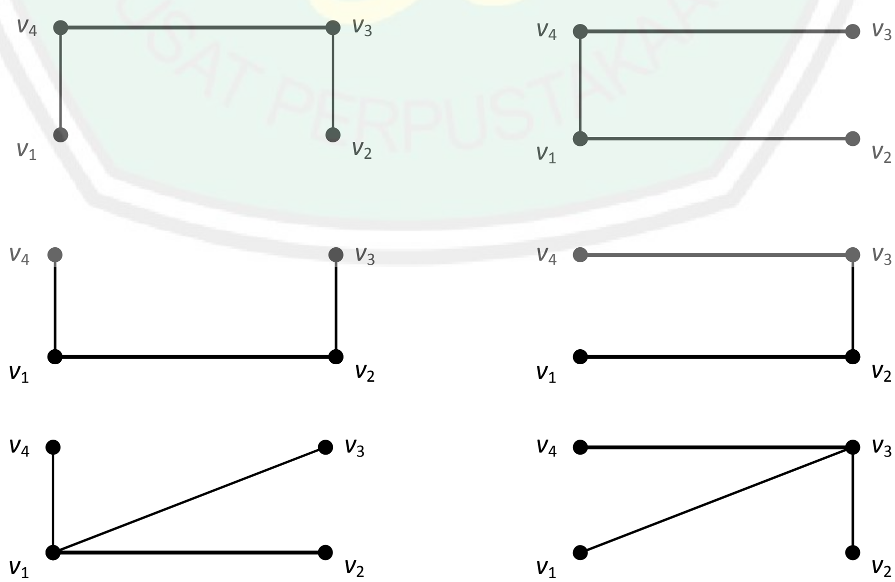
Misal G adalah graf, suatu pohon merentang adalah subgraf dari graf G yang mengandung semua titik dari G dan merupakan suatu pohon (Yuni Dwi Astuti, 2006:2).

Contoh

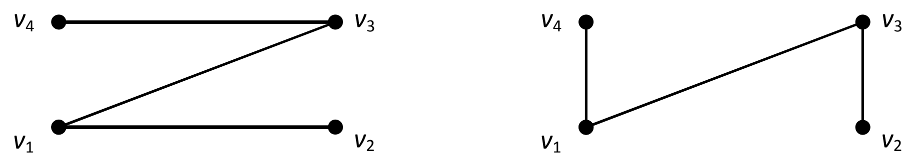


Gambar 2.7 Graf G

Maka pohon merentang dari graf G adalah:



CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG



Gambar 2.8 Pohon Merentang dari Graf G

Untuk setiap graf terhubung, dapat ditemukan pohon merentang dengan cara menghapus sisi-sisi yang membentuk sikel sehingga graf terhubung tidak lagi memuat sikel. Namun cara ini tidak sistematis sehingga mengalami kesulitan jika digunakan untuk graf terhubung yang memiliki banyak titik dan sisi.

2.10 k-Defisiensi Titik

Suatu titik v dari suatu pohon merentang T pada graf G disebut k-defisiensi jika derajat dari titik tersebut memenuhi persamaan $der_G v - der_T v = k$, bilangan bulat k di atas disebut defisiensi dari V. Nilai k-defisiensi titik bias saja bernilai nol jika pohon merentangnya adalah dirinya sendiri. Jika suatu graf tidak memiliki pohon merentang, maka jika dihitung dengan persamaan $der_G v - der_T v = k$ juga akan menghasilkan nilai nol, tetapi itu bukan nilai k-defisiensi titik karena tidak memiliki pohon merentang meskipun sama-sama bernilai nol dengan graf yang pohon merentangnya adalah dirinya sendiri. penjumlahan nilai-nilai k-defisiensi titik suatu graf disebut total k-defisiensi titik/ jumlah k-defisiensi titik.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

2.11 Konsep Al-Quran tentang Keragaman Umat Manusia

Allah berfirman dalam Q.S Al Hujurat:13, sebagai berikut:

يَـٰٓأَيُّهَا ٱلنَّاسُ إِنَّا خَلَقْنَـٰكُم مِّن ذَكَرٍ وَأُنثَىٰ وَجَعَلْنَـٰكُمْ شُعُوبًا وَقَبَآئِلَ لِتَعَارَفُوٓا۟ ۚ إِنَّ أَكْرَمَكُمْ عِندَ

ٱللَّهِ أَتْقَىٰكُمْ ۚ إِنَّ ٱللَّهَ عَلِيمٌ خَبِيرٌ ﴿١٣﴾

Hai manusia, Sesungguhnya Kami menciptakan kamu dari seorang laki-laki dan seorang perempuan dan menjadikan kamu berbangsa-bangsa dan bersuku-suku supaya kamu saling kenal-mengenal. Sesungguhnya orang yang paling mulia diantara kamu disisi Allah ialah orang yang paling taqwa diantara kamu. Sesungguhnya Allah Maha mengetahui lagi Maha Mengenal.

Dalam ayat tersebut Allah menjelaskan bahwa Dia menciptakan manusia dari seorang laki-laki dan perempuan, kemudian dengan kekuasaan dan kehendak-Nya terlahir manusia yang berbeda ras dan warna kulit, dan sudah menjadi sunah-Nya bahwa segala yang diciptakannya tidak sia-sia. Perbedaan itu adalah agar semua manusia satu sama lain melakukan *ta'aruf* (saling mengenal). Karena pada dasarnya manusia tidak bisa hidup tanpa bermasyarakat dan bantuan orang lain. Berikut makna surat Al-Hujurat menurut beberapa *muffassir.*

1. Sayyid Quthb

Hai manusia! Hai orang-orang yang berbeda ras dan warna kulitnya, yang berbeda-beda suku dan kabilahnya, sesungguhnya kalian berasal dari pokok yang satu. Maka janganlah berikhtilaf, janganlah bercerai berai, janganlah bermusuhan, dan janganlah centang perenang.

Hai manusia, Zat yang menyerumu dengan seruan ini adalah Zat Yang Telah menciptakan kamu dari jenis laki-laki dan wanita. Dialah yang

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

memperlihatkan kepadamu tujuan dari menciptakanmu bersuku-suku dan berbangsa-bangsa. Tujuannya bukan untuk saling menjegal dan bermusuhan, tetapi supaya saling harmonis dan saling mengenal. Adapun perbedaan bahasa dan warna kulit, perbedaan watak dan akhlak, serta peerbedaan bakat dan potensi merupakan keragaman yang tidak perlu menimbulkan pertentangan dan perselisihan. Namun, justru untuk menimbulkan kerja sama supaya bangkit dalam memikul segala tugas dan memenuhi segala kebutuhan.

Warna kulit, ras, bahasa, Negara, dan lainnya tidak ada dalam pertimbangan Allah. Disana hanya ada satu timbangan untuk menguji seluruh nilai dan mengetahui keutamaan manusia. Yaitu,"*Sesungguhnya orang yang paling mulia di antara kamu di sisi Allah ialah orang yang paling bertaqwa di antara kamu*." Orang yang palingmulia yang hakiki ialah yang mulia menurut pandangan Allah. Dialah yang menimbangmu, berdasarkan pengetahuan dan berita dengan aneka nilai dan timbangan. "*Sesungguhnya Allah Maha Mengetahui lagi Maha Mengenal*."

Dengan begitu berguguranlah segala perbedaan, gugurlah segala nilai. Lalu, dinaikkan satu timbangan dengan satu penilaian. Timbangan inilah yang digunakan manusia untuk menetapkan hukum. Nilai inilah yang harus dirujuk oleh umat manusia dalam menimbang (Sayyid Quthb, 2008:421).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

2. M. Quraish Shihab

Hai manusia, sesungguhnya Kami menciptakan kamu dari seorang laki-laki dan seorang perempuan yakni Adam dan Hawwa, atau dari sperma (benih laki-laki) dan ovum (indung telur perempuan) *serta menjadikan kamu berbangsa-bangsa dan bersuku-suku supaya kamu saling kenal-mengenal* yang mengantarkan kamu untuk bantu-membantu serta Saling melengkapi, *sesungguhnya yang paling mulia di antara kamu di sisi Allah ialah yang paling bertaqwa di antara kamu. Sesungguhnya Allah Maha Mengetahui lahi Maha Mengenal* sehingga tidak ada sesuatu pun yang tersembunyi bagi-Nya, walau detak detik jantung dan niat seseorang (Quraish Shihab,2002:260)

3. Aidh al-Qarni

Menurut buku Aidh al-Qarni, wahai manusia, Allah S.W.T menciptakan kalian dari satu ayah Adam a.s dan dari seorang ibu yaitu Hawwa. Asal kalian adalah sama, lantas mengapa sebagian kalian membanggakan silsilah keturunannya terhadap sebagian yang lain?

Dengan tersebarnya keturunan Adam dan Hawwa, Allah S.W.T. menjadikan kalian berbangsa-bangsa dan bersuku-suku yang berbeda satu sama lain supaya kalian saling mengenal. Orang yang paling mulia di antara kalian adalah yang paling bertaqwa kepada Allah S.W.T. kelebihan seorang manusia daripada manusia lainnya diukur dari ketaqwaan mereka pada Allah S.W.T. Dia Maha Mengetahui siapa orang paling bertaqwa diantara mereka.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Kesimpulan yang dapat diambil dari pendapat para *muffassir* adalah kita (manusia) janganlah salaing bermusuhan, dan janganlah bercerai-berai, meskipun kita berbeda ras, bangsa, suku, dan warna kulit. Allah SWT menciptakan manusia bersuku-suku, berbangsa-bangsa, berbeda ras dan warna kulit untuk saling mengenal dan tolong menolong. Karena itu janganlah kita (manusia) saling membanggakan silsilah keturunan, karena sesungguhnya kita semua berasal dari satu ayah Adam a.s dan seorang ibu yaitu Hawwa. Sesungguhnya orang yang paling mulia menurut pandangan Allah adalah yang paling bertakwa kepada Allah SWT.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB III

PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas mengenai k-defisiensi titik dari pohon merentang suatu graf terhubung. Antara lain graf sikel, graf komplit, graf tangga, graf roda dan graf bintang. Adapun langkah-langkah menentukan k-defisiensi titik pada pohon merentang pada graf terhubung adalah:

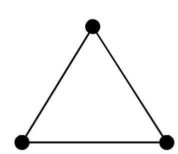
1. Menggambar graf yang akan digunakan dan menentukan derajat titik.
2. Mencari pohon merentang (mencari senua kemungkinan bentuk pohon merentang).
3. Menentukan derajat titik dari pohon merentang.
4. Menentukan k-defisiensi titik.
5. Menentukan pola rumus k-defisiensi titik.
6. Membuktikan pola rumus k-defisiensi titik.

Dalam penulisan skripsi ini penulis menggunakan graf sikel (C_3 sampai dengan C_6), graf tangga (L_2 sampai dengan L_6), graf roda (W_3 sampai dengan W_6), graf komplit (K_3 sampai dengan K_6), dan graf bintang (B_3 sampai dengan B_6) untuk menentukan k-defisiensi dari pohon merentang pada graf terhubung.

3.1. Graf Sikel (C_3 sampai dengan C_6)

3.1.1. Graf Sikel-3 C_3

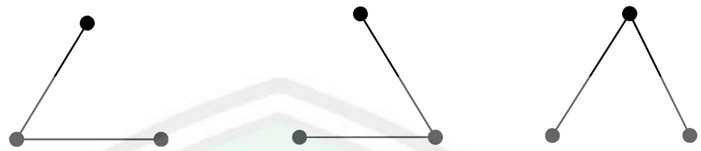
Untuk gambar graf sikel C_3 seperti gambar berikut:



Gambar 3.1 graf sikel C_3

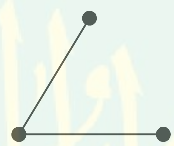
CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Pada gambar di atas graf memuat barisan derajat yaitu $2, 2, 2$. Graf sikel C_3 memiliki tiga pohon merentang yang dapat digambarkan sebagai berikut:

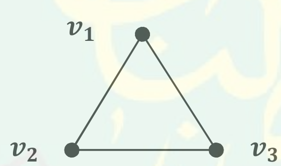


Gambar 3.2 pohon merentang dari graf sikel C_3

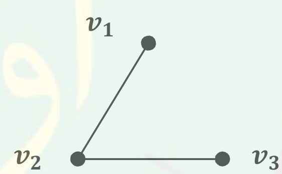
Dari gambar 3.2 di atas diketahui bahwa barisan derajatnya adalah sama yaitu $2, 1, 1$. Karena jenis graf pohon merentang dari graf sikel C_3 adalah sama, maka dapat diwakili oleh gambar berikut:



Sehingga k-defisiensi titik dapat ditentukan dengan rumus $der_G(v_i) - der_T(v_i) = k$.



Graf G (Graf sikel C_3)



Graf T (pohon merentang graf G)

Dari gambar graf G dan graf T di atas maka diperoleh:

Pada titik $\boldsymbol{v_1}$ nilai $k = 2 - 1 = 1$

Pada titik $\boldsymbol{v_2}$ nilai $k = 2 - 2 = 0$

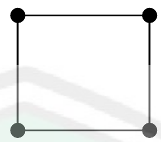
Pada titik $\boldsymbol{v_3}$ nilai $k = 2 - 1 = 1$

Sehingga jumlah k-defisiensi titik untuk graf sikel C_3 adalah $1 + 0 + 1 = 2$.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

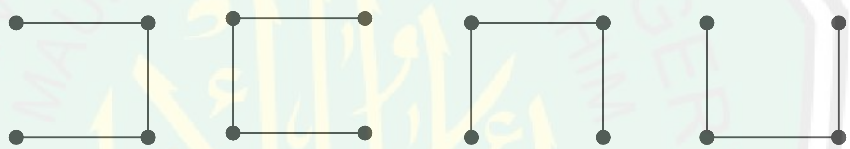
3.1.2. Graf Sikel-4 C_4

Untuk graf sikel C_4 dapat ditunjukkan grafnya pada gambar (3.3) berikut:



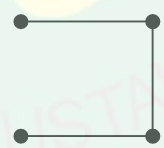
Gambar 3.3 graf sikel C_4

Pada gambar graf sikel C_4 di atas memuat barisan derajat $2, 2, 2, 2$. Graf sikel C_4 memiliki pohon merentang sebanyak 4 yang dapat digambarkan sebagai berikut:

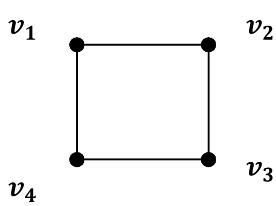


Gambar 3.4 pohon merentang graf sikel C_4

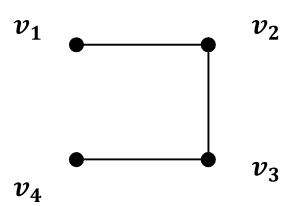
Dari gambar 3.4 di atas diketahui bahwa barisan derajatnya adalah sama yaitu $2, 2, 1, 1$. Karena jenis graf pohon merentang dari graf sikel C_4 adalah sama, maka dapat diwakili oleh gambar berikut:



Sehingga k-defisiensi titik dapat ditentukan dengan rumus $der_G(v_i) - der_T(v_i) = k$.



Graf G (graf sikel C_4)



Graf T (pohon merentang graf G)

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Dari gambar graf G dan graf T di atas maka diperoleh:

Pada titik $\boldsymbol{v_1}$ nilai $k = 2 - 1 = 1$

Pada titik $\boldsymbol{v_2}$ nilai $k = 2 - 2 = 0$

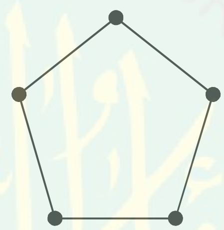
Pada titik $\boldsymbol{v_3}$ nilai $k = 2 - 2 = 0$

Pada titik $\boldsymbol{v_4}$ nilai $k = 2 - 1 = 1$

Sehingga jumlah k-defisiensi titik untuk graf sikel C_4 adalah $1 + 0 + 0 + 1 = 2$.

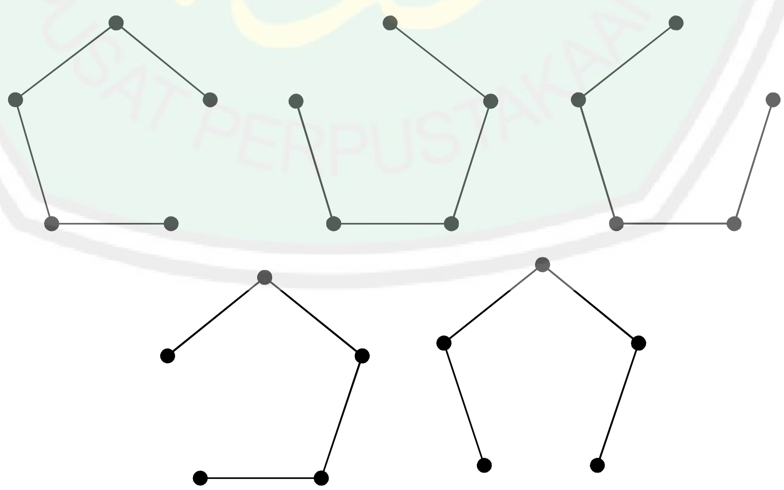
3.1.3. Graf Sikel-5 C_5

Untuk graf sikel C_5 dapat ditunjukkan grafnya pada gambar berikut:



Gambar 3.5 graf sikel C_5

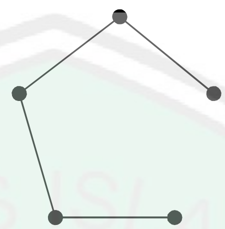
Pada gambar graf sikel C_5 di atas memuat barisan derajat $2, 2, 2, 2, 2$. Graf sikel C_5 memiliki pohon merentang sebanyak 5 yang dapat digambarkan sebagai berikut:



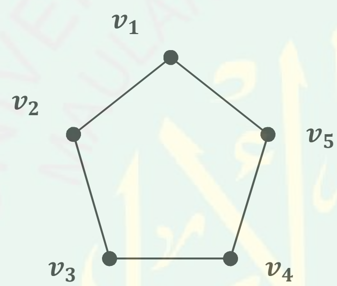
Gambar 3.6 pohon merentang graf sikel C_5

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

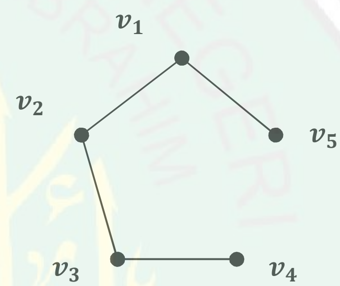
Dari gambar 3.6 di atas diketahui bahwa barisan derajatnya adalah sama yaitu $2, 2, ,2, 1, 1$. Karena jenis graf pohon merentang dari graf sikel C_5 adalah sama, maka dapat diwakili oleh gambar berikut:



Sehingga k-defisiensi titik dapat ditentukan dengan rumus $der_G(v_i) - der_T(v_i) = k$.



Graf G (graf sikel C_5)



Graf T (pohon merentang graf G)

Dari gambar graf G dan graf T di atas maka diperoleh:

Pada titik $\boldsymbol{v_1}$ nilai $k = 2 - 2 = 0$

Pada titik $\boldsymbol{v_2}$ nilai $k = 2 - 2 = 0$

Pada titik $\boldsymbol{v_3}$ nilai $k = 2 - 2 = 0$

Pada titik $\boldsymbol{v_4}$ nilai $k = 2 - 1 = 1$

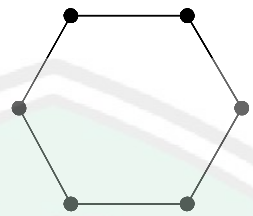
Pada titik $\boldsymbol{v_5}$ nilai $k = 2 - 1 = 1$

Sehingga jumlah k-defisiensi titik untuk graf sikel C_5 adalah $0 + 0 + 0 + 1 + 1 = 2$.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

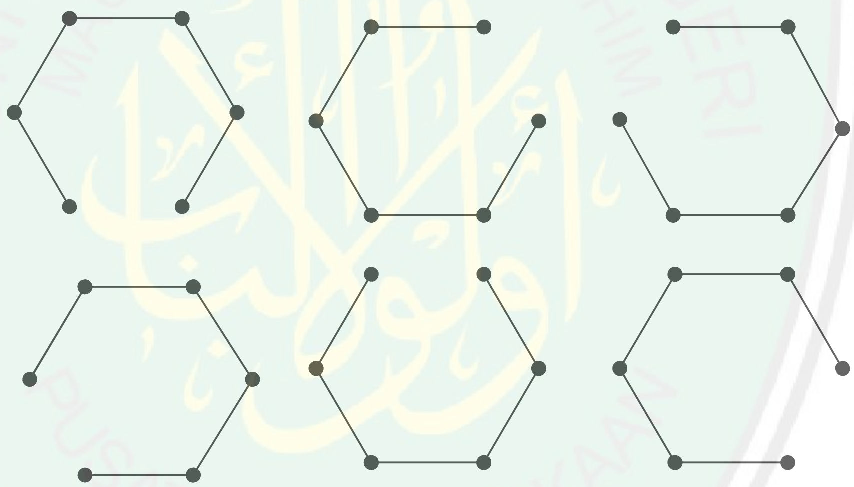
3.1.4. Graf Sikel-6 C_6

Untuk graf sikel C_6 dapat ditunjukkan grafnya seperti gambar 3.7 berikut:



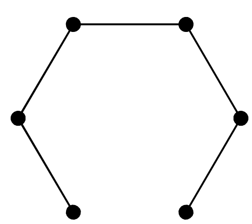
Gambar 3.7 graf sikel C_6

Pada gambar graf sikel C_6 di atas memuat barisan derajat $2, 2, 2, 2, 2, 2$. Graf sikel C_6 memiliki pohon merentang sebanyak 6 yang dapat digambarkan sebagai berikut:



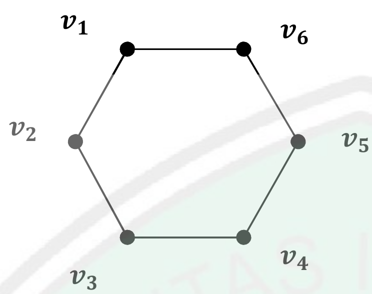
Gambar 3.8 pohon merentang graf sikel C_6

Dari gambar 3.8 di atas diketahui bahwa barisan derajatnya adalah sama yaitu $2, 2, 2, 2, 1, 1$. Karena jenis graf pohon merentang dari graf sikel C_6 adalah sama, maka dapat diwakili oleh gambar berikut:

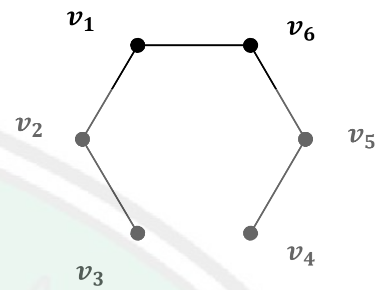


CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Sehingga k-defisiensi titik dapat ditentukan dengan rumus $der_G(v_i) - der_T(v_i) = k$.



Graf G (graf sikel C_6)



Graf T (pohon merentang graf G)

Dari gambar graf G dan graf T di atas maka diperoleh:

Pada titik v_1 nilai $k = 2 - 2 = 0$

Pada titik v_2 nilai $k = 2 - 2 = 0$

Pada titik v_3 nilai $k = 2 - 1 = 1$

Pada titik v_4 nilai $k = 2 - 1 = 1$

Pada titik v_5 nilai $k = 2 - 2 = 0$

Pada titik v_6 nilai $k = 2 - 2 = 0$

Sehingga jumlah k-defisiensi titik untuk graf sikel C_6 adalah $0 + 0 + 1 + 1 + 0 + 0 = 2$.

Berdasarkan jumlah k-defisiensi titik pada graf sikel di atas, maka dapat ditunjukkan rumus umum untuk menentukan k-defisiensi titik dari banyak pohon merentang pada graf sikel adalah sebagai berikut:

Graf sikel	C_3	C_4	C_5	C_6	…	C_n
Jumlah k-defisiensi titik	2	2	2	2	…	2

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Teorema

Graf sikel n (C_n) memiliki jumlah k-defisiensi titik yaitu 2.

Bukti:

Pada graf sikel n semua titik berderajat 2, $der(v_i) = 2$

Pada pohon merentang graf sikel $der(v_i) = der(v_{i+1}) = 1$

$$der(v_i) = 2, \; i \neq 1; i \neq i+1$$

Teorema di atas akan dibuktikan dengan menggunakan rumus k-defisiensi titik yaitu $der_G(v) - \mathrm{der}_\mathrm{T}(v) = k$ sebagai berikut:

$\mathrm{der}(v_1) - \mathrm{der}(v_1) = 2 - 1 = 1$

$\mathrm{der}(v_n) - \mathrm{der}(v_{i+1}) = 2 - 1 = 1$

$\mathrm{der}(v_i) - \mathrm{der}(v_i) = 2 - 2 = 0$

Sehingga terbukti bahwa k-defisiensi titik untuk graf sikel adalah $1 + 1 + 0 = 2$.

3.2 Graf Komplit (K_1 samapi dengan K_6)

3.2.1. Graf Komplit K_1

Untuk graf komplit K_1 dapat ditunjukkan seperti gambar berikut:

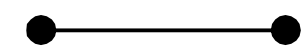
Gambar graf komplit K_1

Pada graf komplit K_1 memiliki pohon merentang yaitu dirinya sendiri sehingga k-defisiensi titiknya adalah nol, karena nilai k-defisiensinya nol maka jumlah k-defisiensinyanya juga nol.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

3.2.1. Graf Komplit K_2

Untuk graf komplit K_2 dapat ditunjukkan seperti gambar berikut:

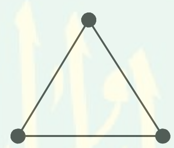


Gambar graf komplit K_2

Pada graf komplit K_2 pohon merentangnya adalah dirinya sendiri, jadi k-defisiensi titiknya adalah nol.

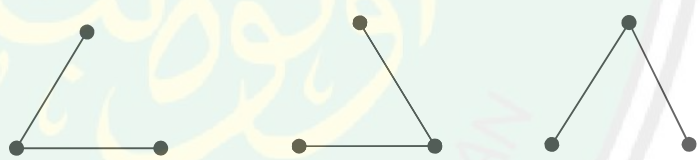
3.2.3. Graf Komplit K_3

Untuk graf komplit K_3 dapat ditunjukkan seperti gambar (3.9) berikut:



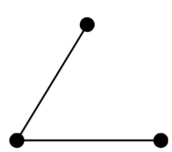
Gambar (3.9) graf komplit K_3

Graf komplit K_3 di atas memuat barisan derajat $2, 2, 2$. Graf komplit K_3 memiliki tiga pohon merentang yang dapat digambarkan sebagai berikut:



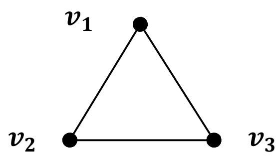
Gambar 3.10 pohon merentang dari graf komplit K_3

Dari gambar 3.10 di atas diketahui bahwa barisan derajatnya adalah sama yaitu $2, 1, 1$. Karena jenis graf pohon merentang dari graf komplit K_3 adalah sama, maka dapat diwakili oleh gambar berikut:

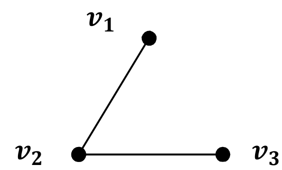


Sehingga k-defisiensi titik dapat ditentukan dengan rumus $der_G(v_i) - der_T(v_i) = k$.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG



Graf G (Graf komplit K_3)



Graf T (pohon merentang graf G)

Dari gambar graf G dan graf T di atas maka diperoleh:

Pada titik $\boldsymbol{v_1}$ nilai $k = 2 - 1 = 1$

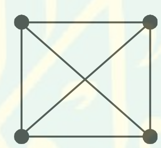
Pada titik $\boldsymbol{v_2}$ nilai $k = 2 - 2 = 0$

Pada titik $\boldsymbol{v_3}$ nilai $k = 2 - 1 = 1$

Sehingga jumlah k-defisiensi titik untuk graf komplit K_3 adalah $1 + 0 + 1 = 2$.

3.2.4. Graf Komplit K_4

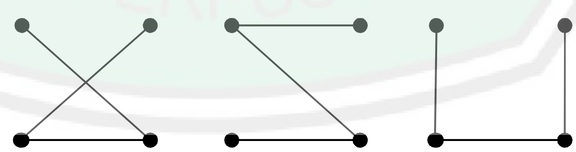
Untuk graf komplit K_4 dapat ditunjukkan pada gambar (3.11) berikut:



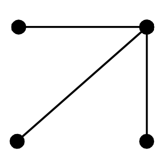
Gambar (3.11) graf komplit K_4

Graf komplit di atas memuat barisan derajat $3, 3, 3, 3$. Graf komplit K_4 memiliki dua barisan derajat yaitu:

a) Barisan derajat $2, 2, 1, 1$ yang dapat diwakili oleh gambar graf berikut:



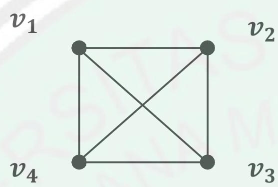
b) Barisan derajat $3, 1, 1, 1$ yang dapat digambarkan sebagai berikut:

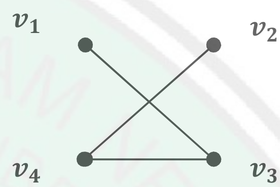


CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Selanjutnya k-defisiensi titik dapat ditunjukkan dengan $der_G(v_i) - der_T(v_i) = k$ akan diwakili oleh satu graf dari masing-masing barisan derajat di atas yaitu sebagai berikut:

a) untuk graf G (graf komplit K_4) dengan pohon merentang T dari barisan derajat 2, 2, 1, 1 dapat ditunjukkan sebagai berikut:





Graf G (graf komplit K_4) Graf T (pohon merentang graf G)

Pada titik v_1 nilai $k = 3 - 1 = 2$

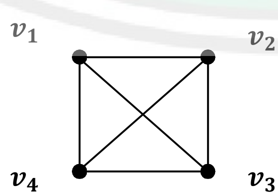
Pada titik v_2 nilai $k = 3 - 1 = 2$

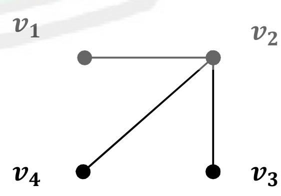
Pada titik v_3 nilai $k = 3 - 2 = 1$

Pada titik v_4 nilai $k = 3 - 2 = 1$

Sehingga jumlah k-defisiensi titik untuk graf komplit K_4 dengan pohon merentang T dari barisan derajat 2,2 ,1, 1 adalah $2 + 2 + 1 + 1 = 6$.

b) Untuk graf G (graf komplit K_4) dengan pohon merentang T dari barisan derajat 3, 1, 1, 1 dapat ditunjukkan sebagai berikut:





Graf G (graf komplit K_4) Graf T (pohon merentang graf G)

Pada titik v_1 nilai $k = 3 - 1 = 2$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Pada titik v_2 nilai $k = 3 - 3 = 0$

Pada titik v_3 nilai $k = 3 - 1 = 2$

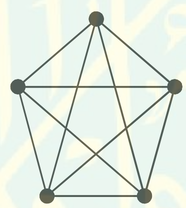
Pada titik v_4 nilai $k = 3 - 1 = 2$

Sehingga jumlah k-defisiensi titik untuk graf komplit K_4 dengan pohon merentang T dari barisan derajat $3, 1, 1, 1$ adalah $2 + 0 + 2 + 2 = 6$.

Dari perhitungan jumlah k-defisiensi titik untuk graf komplit K_4 di atas dapat disimpulkan bahwa jumlah k-defisiensi titik adalah 6.

3.2.5. Graf Komplit K_5

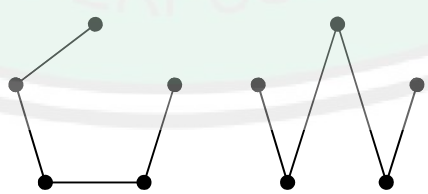
Untuk graf komplit K_5 dapat ditunjukkan pada gambar (3.12) berikut:



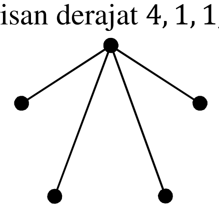
Gambar (3.12) graf komplit K_5

Graf komplit K_5 di atas memuat barisan derajat $4, 4, 4, 4, 4$. Graf komplit K_5 memiliki tiga barisan derajat yaitu:

a) Barisan derajat $2, 2, 2, 1, 1$ yang dapat diwakili oleh gambar berikut:

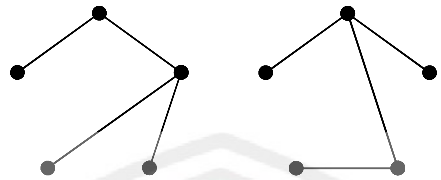


b) Barisan derajat $4, 1, 1, 1, 1$ yang dapat diwakili oleh gambar berikut:



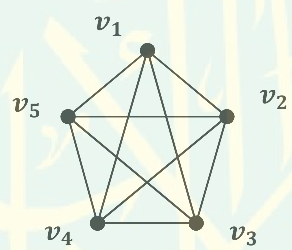
CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

c) Barisan derajat $3, 2, 1, 1, 1$ yang dapat diwakili oleh gambar berikut:

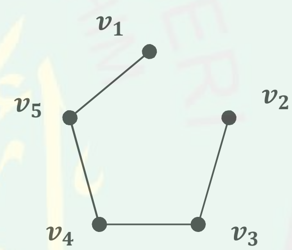


Selanjutnya k-defisiensi titik dapat ditentukan dengan $der_G(v_i) - der_T(v_i) = k$ akan diwakili oleh satu graf dari masing-masing barisan derajat di atas yaitu sebagai berikut:

a) Untuk graf G (graf komplit K_5 dengan pohon merentang T dari barisan derajat $2, 2, 2, 1, 1$ dapat ditunjukkan sebagai berikut:



Graf G (graf komplit K_5)



Graf T (pohon merentang graf G)

Pada titik $\boldsymbol{v_1}$ nilai $k = 4 - 1 = 3$

Pada titik $\boldsymbol{v_2}$ nilai $k = 4 - 2 = 2$

Pada titik $\boldsymbol{v_3}$ nilai $k = 4 - 2 = 2$

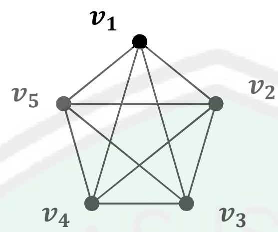
Pada titik $\boldsymbol{v_4}$ nilai $k = 4 - 2 = 2$

Pada titik $\boldsymbol{v_5}$ nilai $k = 4 - 1 = 3$

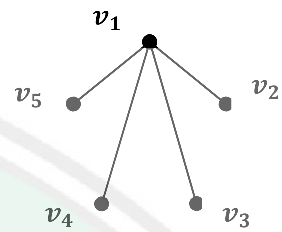
Sehingga jumlah k-defisiensi titik untuk graf komplit K_5 dengan pohon merentang T dari barisan derajat $2, 2, 2, 1, 1$ adalah $3 + 2 + 2 + 2 + 3 = 12$.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

b) Untuk graf G (graf komplit K_5 dengan pohon merentang T dari barisan derajat $4, 1,1,1$ 1 dapat ditunjukkan sebagai berikut:



Graf G (graf komplit K_5)



Graf T (pohon merentang graf G)

Pada titik $\boldsymbol{v_1}$ nilai $k = 4 - 4 = 0$

Pada titik $\boldsymbol{v_2}$ nilai $k = 4 - 1 = 3$

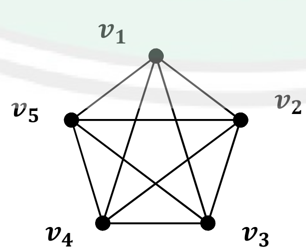
Pada titik $\boldsymbol{v_3}$ nilai $k = 4 - 1 = 3$

Pada titik $\boldsymbol{v_4}$ nilai $k = 4 - 1 = 3$

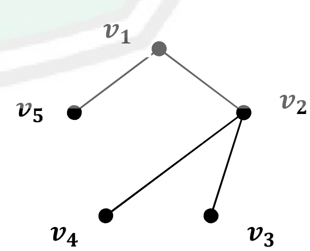
Pada titik $\boldsymbol{v_5}$ nilai $k = 4 - 1 = 3$

Sehingga jumlah k-defisiensi titik untuk graf komplit K_5 dengan pohon merentang T dari barisan derajat $4, 1,1, 1, 1$ adalah $0 + 3 + 3 + 3 + 3 = 12$.

c) Untuk graf G (graf komplit K_5 dengan pohon merentang T dari barisan derajat $3, 2, 1, 1, 1$ dapat ditunjukkan sebagai berikut:



Graf G (graf komplit K_5)



Graf T (pohon merentang graf G)

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Pada titik $\boldsymbol{v_1}$ nilai $k = 4 - 2 = 2$

Pada titik $\boldsymbol{v_2}$ nilai $k = 4 - 3 = 1$

Pada titik $\boldsymbol{v_3}$ nilai $k = 4 - 1 = 3$

Pada titik $\boldsymbol{v_4}$ nilai $k = 4 - 1 = 3$

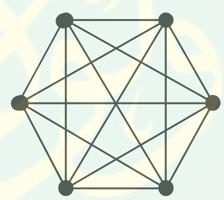
Pada titik $\boldsymbol{v_5}$ nilai $k = 4 - 1 = 3$

Sehingga jumlah k-defisiensi titik untuk graf komplit K_5 dengan pohon merentang T dari barisan derajat 3,2,1,1,1 adalah $2 + 1 + 3 + 3 + 3 = 12$.

Dari perhitungan jumlah k-defisiensi titik untuk graf komplit K_5 di atas dapat disimpulkan bahwa jumlah k-defisiensi titik adalah 12.

3.2.6. Graf Komplit K_6

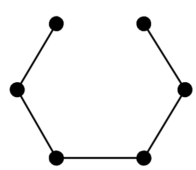
Untuk graf komplit K_6 dapat ditunjukkan pada gambar (3.13) berikut:



Gambar (3.13) graf komplit K_6

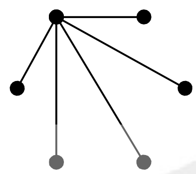
Graf komplit K_6 di atas memuat barisan derajat $5, 5, 5, 5, 5, 5$. Graf komplit K_5 memiliki tiga barisan derajat yaitu:

a) Barisan derajat $2, 2, 2, 2, 1, 1$ yang dapat diwakili oleh gambar berikut:

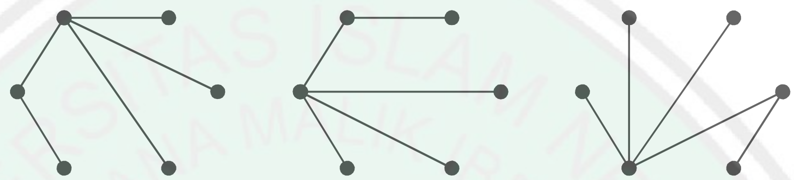


CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

b) Barisan derajat $5, 1, 1, 1, 1, 1$ yang dapat diwakili oleh gambar berikut:

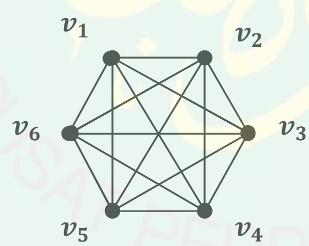


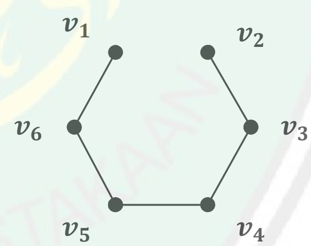
c) Barisan derajat $4, 2, 1, 1, 1, 1$ yang dapat diwakili oleh gambar berikut:



Selanjutnya k-defisiensi titik dapat ditentukan dengan $der_G(v_i) - der_T(v_i) = k$ akan diwakili oleh satu graf dari masing-masing barisan derajat di atas sebagai berikut:

a) Untuk graf G (graf komplit K_6 dengan pohon merentang T dari barisan derajat $2, 2, 2, 2, 1, 1$ dapat ditunjukkan sebagai berikut:





Graf G (graf komplit K_6) Graf T (pohon merentang graf G)

Pada titik $\boldsymbol{v_1}$ nilai $k = 5 - 1 = 4$

Pada titik $\boldsymbol{v_2}$ nilai $k = 5 - 1 = 4$

Pada titik $\boldsymbol{v_3}$ nilai $k = 5 - 2 = 3$

Pada titik $\boldsymbol{v_4}$ nilai $k = 5 - 2 = 3$

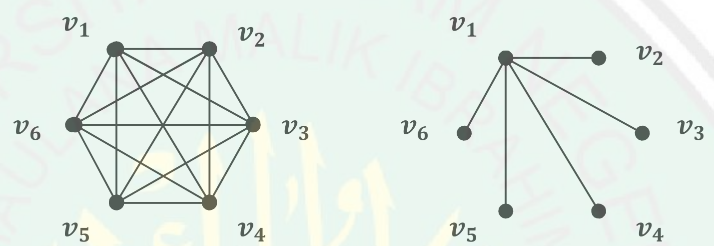
Pada titik $\boldsymbol{v_5}$ nilai $k = 5 - 2 = 3$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Pada titik $\boldsymbol{v_6}$ nilai $k = 5 - 2 = 3$

Sehingga jumlah k-defisiensi titik untuk graf komplit K_6 dengan pohon merentang T dari barisan derajat $2, 2, 2, 2, 1, 1$ adalah $4 + 4 + 3 + 3 + 3 + 3 = 20$.

b) Untuk graf G (graf komplit K_6 dengan pohon merentang T dari barisan derajat $5, 1, 1, 1, 1, 1$ dapat ditunjukkan sebagai berikut:



Graf G (graf komplit K_6) Graf T (pohon merentang graf G)

Pada titik $\boldsymbol{v_1}$ nilai $k = 5 - 5 = 0$

Pada titik $\boldsymbol{v_2}$ nilai $k = 5 - 1 = 4$

Pada titik $\boldsymbol{v_3}$ nilai $k = 5 - 1 = 4$

Pada titik $\boldsymbol{v_4}$ nilai $k = 5 - 1 = 4$

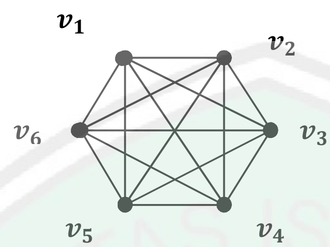
Pada titik $\boldsymbol{v_5}$ nilai $k = 5 - 1 = 4$

Pada titik $\boldsymbol{v_6}$ nilai $k = 5 - 1 = 4$

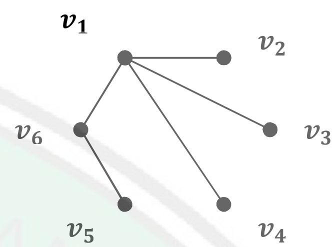
Sehingga jumlah k-defisiensi titik untuk graf komplit K_6 dengan pohon merentang T dari barisan derajat $5, 1, 1, 1, 1{,}1$ adalah $0 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 20$.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

c) Untuk graf G (graf komplit K_6) dengan pohon merentang T dari barisan derajat $4, 2, 1, 1, 1, 1$ dapat ditunjukkan sebagai berikut:



Graf G (graf komplit K_6)



Graf T (pohon merentang graf G)

Pada titik $\boldsymbol{v_1}$ nilai $k = 5 - 4 = 1$

Pada titik $\boldsymbol{v_2}$ nilai $k = 5 - 1 = 4$

Pada titik $\boldsymbol{v_3}$ nilai $k = 5 - 1 = 4$

Pada titik $\boldsymbol{v_4}$ nilai $k = 5 - 1 = 4$

Pada titik $\boldsymbol{v_5}$ nilai $k = 5 - 1 = 4$

Pada titik $\boldsymbol{v_6}$ nilai $k = 5 - 2 = 3$

Sehingga jumlah k-defisiensi titik untuk graf komplit K_6 dengan pohon merentang T dari barisan derajat $4,2, 1, 1, 1, 1$ adalah $1 + 4 + 4 + 4 + 4 + 3 = 20$.

Dari perhitungan jumlah k-defisiensi titik untuk graf komplit K_6 di atas dapat disimpulkan bahwa jumlah k-defisiensi titik adalah 20. Berdasarkan jumlah k-defisiensi titik pada graf komplit di atas, maka dapat disimpulkan rumus umum untuk menentukan k-defisiensi titik dam banyak pohon merentang pada graf komplit adalah sebagai berikut:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Graf komplit	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	…	K_n
k-defisiensi titik	0	0	2	6	12	20	…	$n^2 - 3n + 2$

Keterangan:

K_1 nilai k-defisiensi titiknya nol, karena tidak memiliki pohon merentang.

K_2 nilai k-defisiensi titiknya nol, punya pohon merentang yaitu dirinya sendiri.

Teorema

Graf komplit n (K_n) memiliki jumlah k-defisiensi titik yaitu $n^2 - 3n + 2$

Bukti :

Persamaan k-defisiensi titik adalah $der_G(v_i) - der_T(v_i) = k$, sehingga untuk menentukan jumlah k-defisiensi titik dapat ditentukan dengan persamaan $\sum der_G(v_i) - der_T(v_i) = 2(q - p + 1)$.

Akan ditunjukkan jumlah k-defisiensi titik untuk graf komplit adalah $n^2 - 3n + 2$

Pada $K_n \ \rightarrow q = \binom{n}{2}; p = n$

Maka

$$2(q - p + 1) = 2\left(\binom{n}{2} - n + 1\right)$$

$$= 2\left(\frac{n(n-1)}{2} - n + 1\right)$$

$$= n(n-1) - 2n + 2$$

$$= n^2 - n - 2n + 2$$

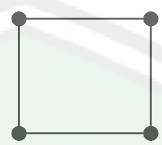
$$= n^2 - 3n + 2 \ \text{ terbukti}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

3.3 Graf Tangga (L_2 sampai dengan L_6)

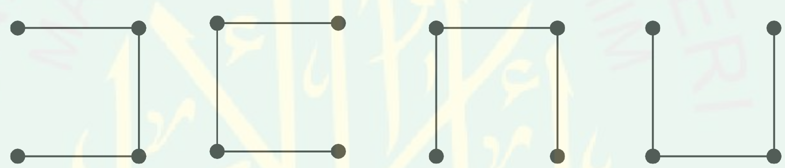
3.3.1. Graf Tangga L_2

Untuk graf tangga L_2 dapat ditunjukkan pada gambar (3.14) berikut:



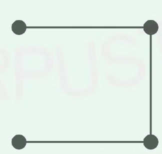
Gambar (3.14) graf tangga L_2

Pada gambar graf tangga L_2 di atas memuat barisan derajat $2, 2, 2, 2$. Graf tangga L_2 memiliki pohon merentang sebanyak 4 yang dapat digambarkan sebagai berikut:



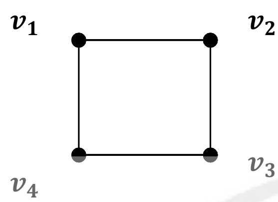
Gambar 3.15 pohon merentang graf tangga L_2

Dari gambar 3.15 di atas diketahui bahwa barisan derajatnya adalah sama yaitu $2, 2, 1, 1$. Karena jenis graf pohon merentang dari graf tangga L_2 adalah sama, maka dapat diwakili oleh gambar berikut:

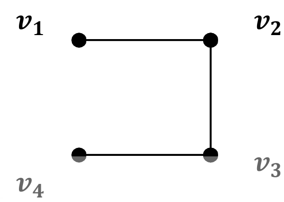


Sehingga k-defisiensi titik dapat ditentukan dengan rumus $der_G(v_i) - der_T(v_i) = k$.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG



Graf G (graf tangga L_2)



Graf T (pohon merentang graf G)

Dari gambar graf G dan graf T di atas maka diperoleh:

Pada titik $\boldsymbol{v_1}$ nilai $k = 2 - 1 = 1$

Pada titik $\boldsymbol{v_2}$ nilai $k = 2 - 2 = 0$

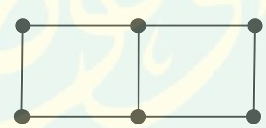
Pada titik $\boldsymbol{v_3}$ nilai $k = 2 - 2 = 0$

Pada titik $\boldsymbol{v_4}$ nilai $k = 2 - 1 = 1$

Sehingga jumlah k-defisiensi titik untuk graf tangga L_2 adalah $1 + 0 + 0 + 1 = 2$.

3.3.2. Graf Tangga L_3

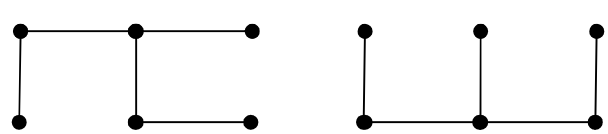
Untuk graf tangga L_3 dapat ditunjukkan pada gambar (3.16) berikut:



Gambar (3.16) graf tangga L_3

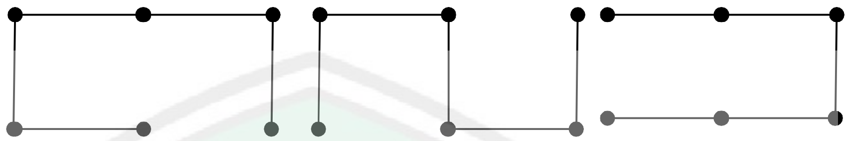
Graf tangga L_3 di atas memuat barisan derajat yaitu $3, 3, 2, 2, 2, 2$. Graf tangga L_3 memiliki beberapa bentuk barisan derajat yaitu:

a) Barisan derajat $3, 2, 2, 1, 1, 1$ dapat di wakili oleh beberapa gambar graf berikut:

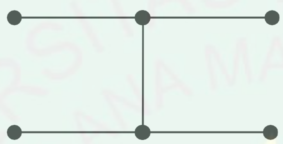


CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

b) Barisan derajat $2, 2, 2, 2, 1, 1$ dapat di wakili oleh beberapa gambar graf berikut:

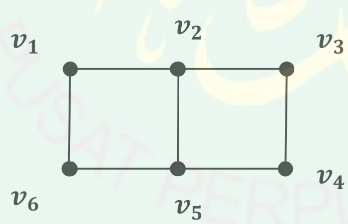


c) Barisan derajat $3, 3, 1, 1, 1, 1$ dapat di wakili oleh beberapa gambar graf berikut:

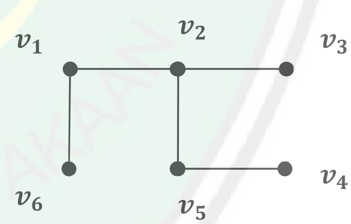


Selanjutnya jumlah k-defisiensi titik dapat ditentukan dengan $der_G(v_i) - der_T(v_i) = k$, untuk $der_G(v_i)$ adalah derajat titik v_i pada graf G (graf tangga L_3) dan $der_T(v_i)$ adalah derajat titik V_i pada graf pohon merentang T yang akan diwakili oleh satu graf dari masing-masing barisan derajat sebagai berikut:

a) Untuk graf G (graf tangga L_3) dengan pohon merentang T dari barisan derajat $3, 2, 2, 1, 1, 1$ dapat ditunjukkan sebagai berikut:



Graf G (graf tangga L_3)



Graf T (pohon merentang graf G)

Pada titik $\boldsymbol{v_1}$ nilai $k = 2 - 2 = 0$

Pada titik $\boldsymbol{v_2}$ nilai $k = 3 - 3 = 0$

Pada titik $\boldsymbol{v_3}$ nilai $k = 2 - 1 = 1$

Pada titik $\boldsymbol{v_4}$ nilai $k = 2 - 1 = 1$

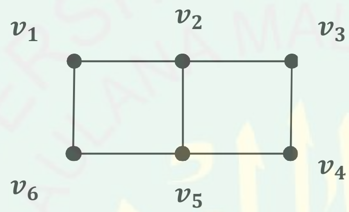
Pada titik $\boldsymbol{v_5}$ nilai $k = 3 - 2 = 1$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

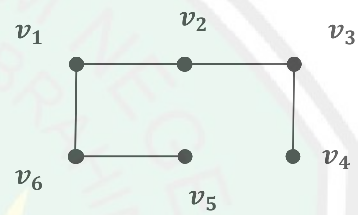
Pada titik $\boldsymbol{v_6}$ nilai $k = 2 - 1 = 1$

Sehingga jumlah k-defisiensi titik untuk graf komplit L_3 dengan pohon merentang T dari barisan derajat $3, 2, 2, 1, 1, 1$ adalah $0 + 0 + 1 + 1 + 1 + 1 = 4$.

b) Untuk graf G (graf tangga L_3) dengan pohon merentang T dari barisan derajat $2, 2, 2, 2, 1, 1$ dapat ditunjukkan sebagai berikut:



Graf G (graf tangga L_3)



Graf T (pohon merentang graf G)

Pada titik $\boldsymbol{v_1}$ nilai $k = 2 - 2 = 0$

Pada titik $\boldsymbol{v_2}$ nilai $k = 3 - 2 = 1$

Pada titik $\boldsymbol{v_3}$ nilai $k = 2 - 2 = 0$

Pada titik $\boldsymbol{v_4}$ nilai $k = 2 - 1 = 1$

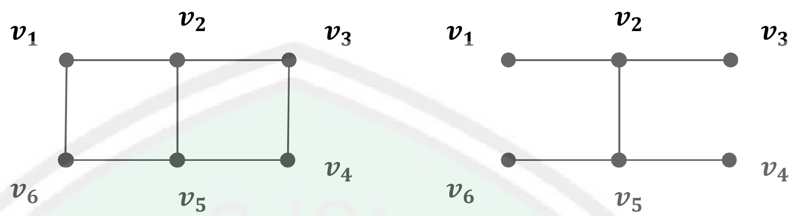
Pada titik $\boldsymbol{v_5}$ nilai $k = 3 - 1 = 2$

Pada titik $\boldsymbol{v_6}$ nilai $k = 2 - 2 = 0$

Sehingga jumlah k-defisiensi titik untuk graf komplit L_3 dengan pohon merentang T dari barisan derajat $2, 2, 2, 2, 1, 1$ adalah $0 + 1 + 0 + 1 + 2 + 0 = 4$.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

c) Untuk graf G (graf tangga L_3) dengan pohon merentang T dari barisan derajat $3, 3, 1, 1, 1, 1$ dapat ditunjukkan sebagai berikut:



Graf G (graf tangga L_3) Graf T (pohon merentang graf G)

Pada titik $\boldsymbol{v_1}$ nilai $k = 2 - 1 = 1$

Pada titik $\boldsymbol{v_2}$ nilai $k = 3 - 3 = 0$

Pada titik $\boldsymbol{v_3}$ nilai $k = 2 - 1 = 1$

Pada titik $\boldsymbol{v_4}$ nilai $k = 2 - 1 = 1$

Pada titik $\boldsymbol{v_5}$ nilai $k = 3 - 3 = 0$

Pada titik $\boldsymbol{v_6}$ nilai $k = 2 - 1 = 1$

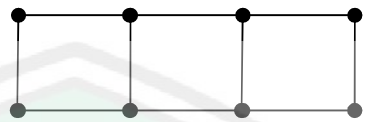
Sehingga jumlah k-defisiensi titik untuk graf komplit L_3 dengan pohon merentang T dari barisan derajat $3, 3, 1, 1, 1, 1$ adalah $1 + 0 + 1 + 1 + 0 + 1 = 4$.

Dari perhitungan jumlah k-defisiensi titik untuk graf tangga L_3 di atas dapat disimpulkan bahwa jumlah k-defisiensi titik adalah 4.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

3.3.3. Graf Tangga L_4

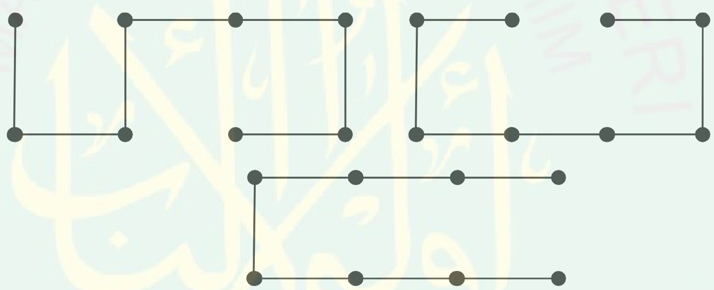
Untuk graf tangga L_4 dapat ditunjukkan pada gambar (3.17) berikut:



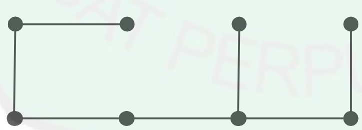
Gambar (3.17) graf tangga L_4

Graf tangga L_4 di atas memuat barisan derajat yaitu $3, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 2$. Graf tangga L_4 memiliki beberapa bentuk barisan derajat yaitu:

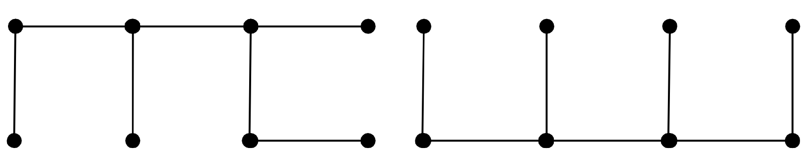
a) Barisan derajat $2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1$ dapat diwakili oleh beberapa gambar graf berikut:



b) Barisan derajat $3, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1$ dapat diwakili oleh beberapa gambar graf berikut:

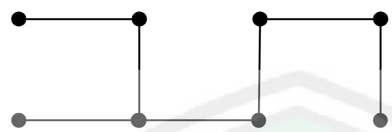


c) Barisan derajat $3, 3, 2, 2, 1, 1, 1, 1$ dapat diwakili oleh beberapa gambar graf berikut:



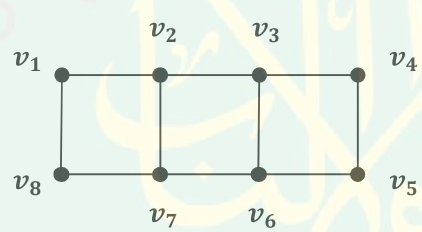
CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

d) Barisan derajat 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1 dapat diwakili oleh beberapa gambar graf berikut:

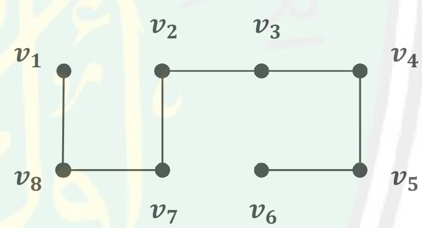


Selanjutnya k-defisiensi titik dapat ditentukan dengan $der_G(v_i) - der_T(v_i) = k$, untuk $der_G(v_i)$ adalah derajat titik v_i pada graf G (graf tangga L_4) dan $der_T(v_i)$ adalah derajat titik v_i pada graf pohon merentang T yang akan diwakili oleh satu graf dari masing-masing barisan derajat sebagai berikut:

a) Untuk graf G (graf tangga L_4) dengan pohon merentang T dari barisan derajat 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1 dapat ditunjukkan sebagai berikut:



Graf G (graf tangga L_4)



Graf T (pohon merentang graf G)

Pada titik $\boldsymbol{v_1}$ nilai $k = 2 - 1 = 1$

Pada titik $\boldsymbol{v_2}$ nilai $k = 3 - 2 = 1$

Pada titik $\boldsymbol{v_3}$ nilai $k = 3 - 2 = 1$

Pada titik $\boldsymbol{v_4}$ nilai $k = 2 - 2 = 0$

Pada titik $\boldsymbol{v_5}$ nilai $k = 2 - 2 = 0$

Pada titik $\boldsymbol{v_6}$ nilai $k = 3 - 1 = 2$

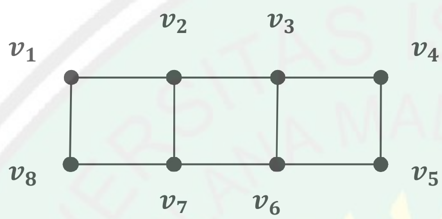
Pada titik $\boldsymbol{v_7}$ nilai $k = 3 - 2 = 1$

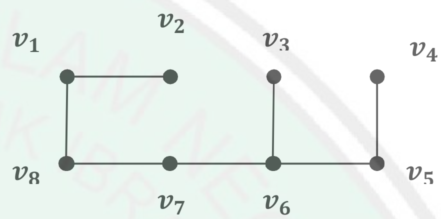
Pada titik $\boldsymbol{v_8}$ nilai $k = 2 - 2 = 0$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Sehingga jumlah k-defisiensi titik untuk graf komplit L_4 dengan pohon merentang T dari barisan derajat $2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1$ adalah $1 + 1 + 1 + 0 + 0 + 2 + 1 + 0 = 6$.

b) Untuk graf G (graf tangga L_4) dengan pohon merentang T dari barisan derajat $3, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1$ dapat ditunjukkan sebagai berikut:





Graf G (graf tangga L_4) Graf T (pohon merentang graf G)

Pada titik v_1 nilai $k = 2 - 2 = 0$

Pada titik v_2 nilai $k = 3 - 1 = 2$

Pada titik v_3 nilai $k = 3 - 1 = 2$

Pada titik v_4 nilai $k = 2 - 1 = 1$

Pada titik v_5 nilai $k = 2 - 2 = 0$

Pada titik v_6 nilai $k = 3 - 3 = 0$

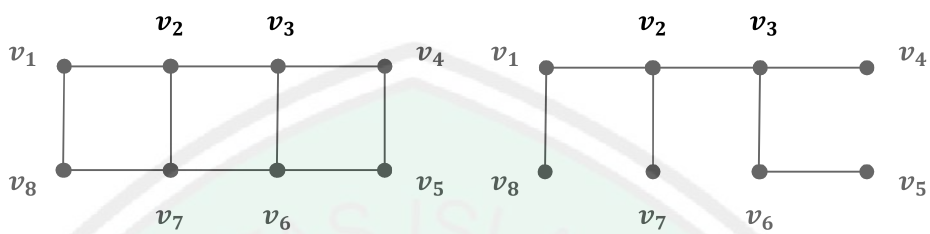
Pada titik v_7 nilai $k = 3 - 2 = 1$

Pada titik v_8 nilai $k = 2 - 2 = 0$

Sehingga jumlah k-defisiensi titik untuk graf komplit L_4 dengan pohon merentang T dari barisan derajat $3, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1$ adalah $0 + 2 + 2 + 1 + 0 + 0 + 1 + 0 = 6$.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

c) Untuk graf G (graf tangga L_4) dengan pohon merentang T dari barisan derajat $3, 3, 2, 2, 1, 1, 1, 1$ dapat ditunjukkan sebagai berikut:



Graf G (graf tangga L_4) Graf T (pohon merentang graf G)

Pada titik v_1 nilai $k = 2 - 2 = 0$

Pada titik v_2 nilai $k = 3 - 3 = 0$

Pada titik v_3 nilai $k = 3 - 3 = 0$

Pada titik v_4 nilai $k = 2 - 1 = 1$

Pada titik v_5 nilai $k = 2 - 1 = 1$

Pada titik v_6 nilai $k = 3 - 2 = 1$

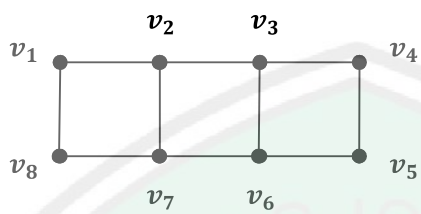
Pada titik v_7 nilai $k = 3 - 1 = 2$

Pada titik v_8 nilai $k = 2 - 1 = 1$

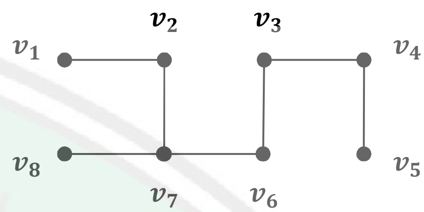
Sehingga jumlah k-defisiensi titik untuk graf komplit L_4 dengan pohon merentang T dari barisan derajat $3, 3, 2, 2, 1, 1, 1, 1$ adalah $0 + 0 + 0 + 1 + 1 + 1 + 2 + 1 = 6$.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

d) Untuk graf G (graf tangga L_4) dengan pohon merentang T dari barisan derajat $2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1$ dapat ditunjukkan sebagai berikut:



Graf G (graf tangga L_4)



Graf T (pohon merentang graf G)

Pada titik $\boldsymbol{v_1}$ nilai $k = 2 - 1 = 1$

Pada titik $\boldsymbol{v_2}$ nilai $k = 3 - 2 = 1$

Pada titik $\boldsymbol{v_3}$ nilai $k = 3 - 2 = 1$

Pada titik $\boldsymbol{v_4}$ nilai $k = 2 - 2 = 0$

Pada titik $\boldsymbol{v_5}$ nilai $k = 2 - 1 = 1$

Pada titik $\boldsymbol{v_6}$ nilai $k = 3 - 2 = 1$

Pada titik $\boldsymbol{v_7}$ nilai $k = 3 - 3 = 0$

Pada titik $\boldsymbol{v_8}$ nilai $k = 2 - 1 = 1$

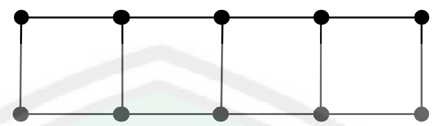
Sehingga jumlah k-defisiensi titik untuk graf komplit L_4 dengan pohon merentang T dari barisan derajat $2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1$ adalah $1 + 1 + 1 + 0 + 1 + 1 + 0 + 1 = 6$.

Dari perhitungan jumlah k-defisiensi titik untuk graf tangga L_4 di atas dapat disimpulkan bahwa jumlah k-defisiensi titik adalah 6.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

3.3.4. Graf Tangga L_5

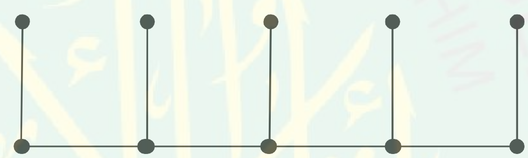
Untuk graf tangga L_5 dapat ditunjukkan pada gambar (3.18) berikut:



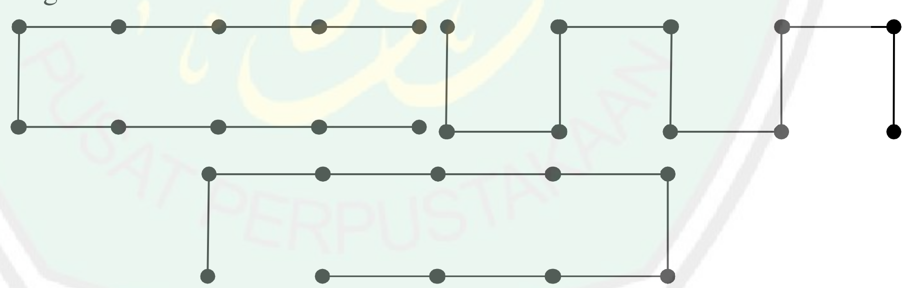
Gambar (3.18) graf tangga L_5

Graf tangga L_5 di atas memuat barisan derajat yaitu $3, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 2$. Graf tangga L_4 memiliki beberapa bentuk barisan derajat yaitu:

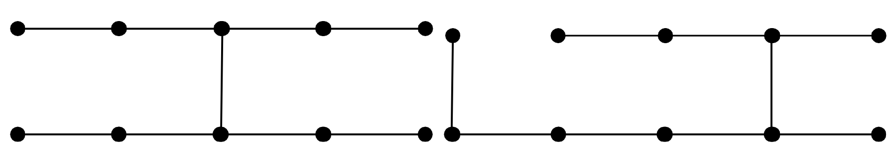
a) Barisan derajat $3, 3, 3, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1$diwakili oleh beberapa gambar graf berikut:



b) Barisan derajat $2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1$diwakili oleh beberapa gambar graf berikut:

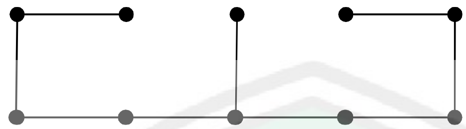


c) Barisan derajat $3, 3, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1$diwakili oleh beberapa gambar graf berikut:



CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

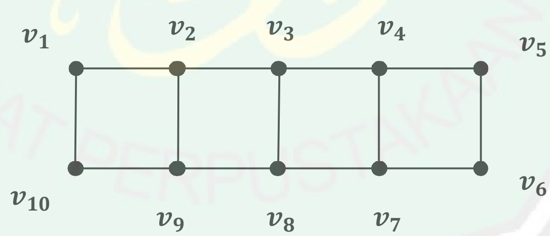
d) Barisan derajat $3, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1$ diwakili oleh beberapa gambar graf berikut:



e) Barisan derajat $2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1$ diwakili oleh beberapa gambar graf berikut:

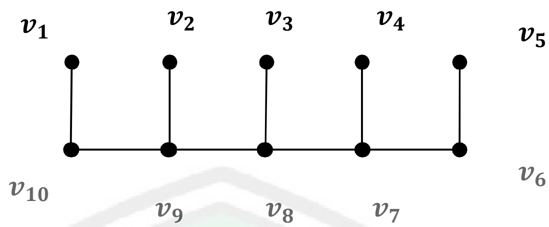
Selanjutnya k-defisiensi titik dapat ditentukan dengan $der_G(v_i) - der_T(v_i) = k$, untuk $der_G(v_i)$ adalah derajat titik v_i pada graf G (graf tangga L_5) dan $der_T(v_i)$ adalah derajat titik v_i pada graf pohon merentang T yang akan diwakili oleh satu graf dari masing-masing barisan derajat sebagai berikut:

a) Untuk graf G (graf tangga L_5) dengan pohon merentang T dari barisan derajat $3, 3, 3, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1$ dapat ditunjukkan sebagai berikut:



Graf G (graf tanngga L_5)

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG



Graf T (pohon merentang graf G)

Pada titik $\boldsymbol{v}$ nilai $k = 2 - 1 = 1$

Pada titik $\boldsymbol{v_2}$ nilai $k = 3 - 1 = 2$

Pada titik $\boldsymbol{v_3}$ nilai $k = 3 - 1 = 2$

Pada titik $\boldsymbol{v_4}$ nilai $k = 3 - 1 = 2$

Pada titik $\boldsymbol{v_5}$ nilai $k = 2 - 1 = 1$

Pada titik $\boldsymbol{v_6}$ nilai $k = 2 - 2 = 0$

Pada titik $\boldsymbol{v_7}$ nilai $k = 3 - 3 = 0$

Pada titik $\boldsymbol{v_8}$ nilai $k = 3 - 3 = 0$

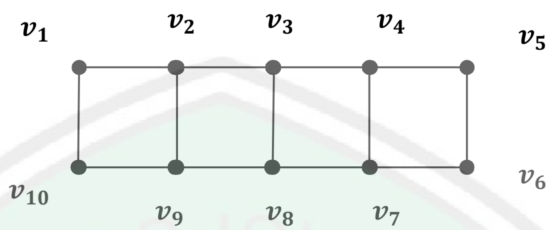
Pada titik $\boldsymbol{v_9}$ nilai $k = 3 - 3 = 0$

Pada titik $\boldsymbol{v_{10}}$ nilai $k = 2 - 2 = 0$

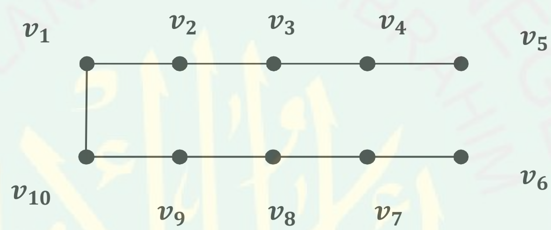
Sehingga jumlah k-defisiensi titik untuk graf komplit L_5 dengan pohon merentang T dari barisan derajat $3, 3, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1$ adalah $1 + 2 + 2 + 2 + 1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 8$.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

b) Untuk graf G (graf tangga L_5) dengan pohon merentang T dari barisan derajat 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1 dapat ditunjukkan sebagai berikut:



Graf G (graf tanngga L_5)



Graf T (pohon merentang graf G)

Pada titik v_1 nilai $k = 2 - 2 = 0$

Pada titik v_2 nilai $k = 3 - 2 = 1$

Pada titik v_3 nilai $k = 3 - 2 = 1$

Pada titik v_4 nilai $k = 3 - 2 = 1$

Pada titik v_5 nilai $k = 2 - 1 = 1$

Pada titik v_6 nilai $k = 2 - 1 = 1$

Pada titik v_7 nilai $k = 3 - 2 = 1$

Pada titik v_8 nilai $k = 3 - 2 = 1$

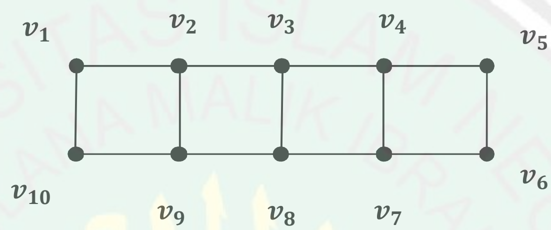
Pada titik v_9 nilai $k = 3 - 2 = 1$

Pada titik v_{10} nilai $k = 2 - 2 = 0$

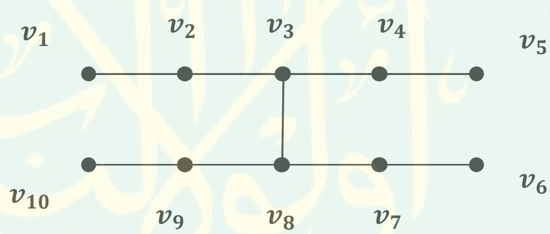
CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Sehingga jumlah k-defisiensi titik untuk graf komplit L_5 dengan pohon merentang T dari barisan derajat $2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1$ adalah $0 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 0 = 8$.

c) Untuk graf G (graf tangga L_5) dengan pohon merentang T dari barisan derajat 3, 3, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1 dapat ditunjukkan sebagai berikut:



Graf G (graf tanngga L_5)



Graf T (pohon merentang graf G)

Pada titik $\boldsymbol{v_1}$ nilai $k = 2 - 1 = 1$

Pada titik $\boldsymbol{v_2}$ nilai $k = 3 - 2 = 1$

Pada titik $\boldsymbol{v_3}$ nilai $k = 3 - 3 = 0$

Pada titik $\boldsymbol{v_4}$ nilai $k = 3 - 2 = 1$

Pada titik $\boldsymbol{v_5}$ nilai $k = 2 - 1 = 1$

Pada titik $\boldsymbol{v_6}$ nilai $k = 2 - 1 = 1$

Pada titik $\boldsymbol{v_7}$ nilai $k = 3 - 2 = 1$

Pada titik $\boldsymbol{v_8}$ nilai $k = 3 - 3 = 0$

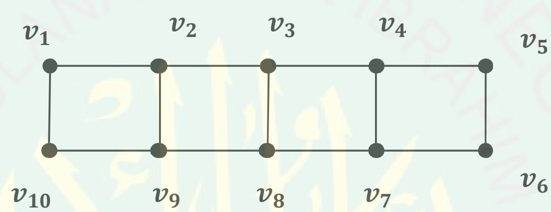
CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Pada titik $\boldsymbol{v_9}$ nilai $k = 3 - 2 = 1$

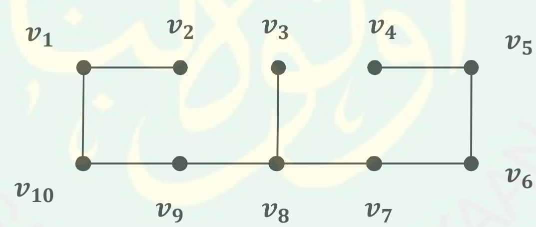
Pada titik $\boldsymbol{v_{10}}$ nilai $k = 2 - 1 = 1$

Sehingga jumlah k-defisiensi titik untuk graf komplit L_5 dengan pohon merentang T dari barisan derajat $3, 3, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1$ adalah $1 + 1 + 0 + 1 + 1 + 1 + 1 + 0 + 1 + 1 = 8$.

d) Untuk graf G (graf tangga L_5) dengan pohon merentang T dari barisan derajat $3, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1$ dapat ditunjukkan sebagai berikut:



Graf G (graf tanngga L_5)



Graf T (pohon merentang graf G)

Pada titik $\boldsymbol{v_1}$ nilai $k = 2 - 2 = 0$

Pada titik $\boldsymbol{v_2}$ nilai $k = 3 - 1 = 2$

Pada titik $\boldsymbol{v_3}$ nilai $k = 3 - 1 = 2$

Pada titik $\boldsymbol{v_4}$ nilai $k = 3 - 1 = 2$

Pada titik $\boldsymbol{v_5}$ nilai $k = 2 - 2 = 0$

Pada titik $\boldsymbol{v_6}$ nilai $k = 2 - 2 = 0$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Pada titik $\boldsymbol{v_7}$ nilai $k = 3 - 2 = 1$

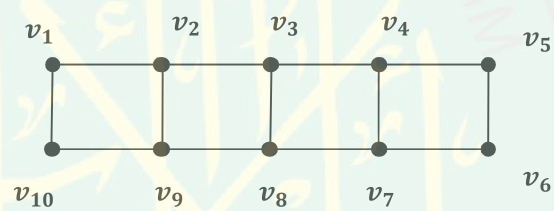
Pada titik $\boldsymbol{v_8}$ nilai $k = 3 - 3 = 0$

Pada titik $\boldsymbol{v_9}$ nilai $k = 3 - 2 = 1$

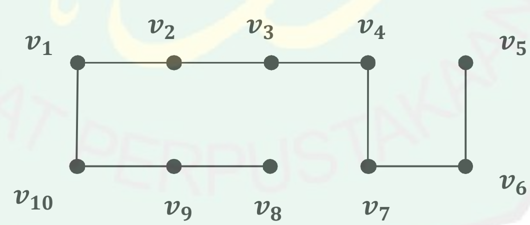
Pada titik $\boldsymbol{v_{10}}$ nilai $k = 2 - 2 = 0$

Sehingga jumlah k-defisiensi titik untuk graf komplit L_5 dengan pohon merentang T dari barisan derajat $3, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1$ adalah $0 + 2 + 2 + 2 + 0 + 0 + 1 + 0 + 1 + 0 = 8$.

e) Untuk graf G (graf tangga L_5) dengan pohon merentang T dari barisan derajat $2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1$ dapat ditunjukkan sebagai berikut:



Graf G (graf tanngga L_5)



Graf T (pohon merentang graf G)

Pada titik $\boldsymbol{v_1}$ nilai $k = 2 - 2 = 0$

Pada titik $\boldsymbol{v_2}$ nilai $k = 3 - 2 = 1$

Pada titik $\boldsymbol{v_3}$ nilai $k = 3 - 2 = 1$

Pada titik $\boldsymbol{v_4}$ nilai $k = 3 - 2 = 1$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Pada titik $\boldsymbol{v_5}$ nilai $k = 2 - 1 = 1$

Pada titik $\boldsymbol{v_6}$ nilai $k = 2 - 2 = 0$

Pada titik $\boldsymbol{v_7}$ nilai $k = 3 - 2 = 1$

Pada titik $\boldsymbol{v_8}$ nilai $k = 3 - 1 = 2$

Pada titik $\boldsymbol{v_9}$ nilai $k = 3 - 2 = 1$

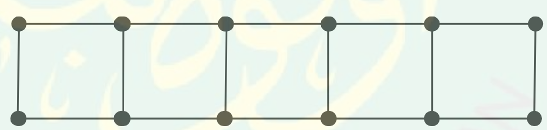
Pada titik $\boldsymbol{v_{10}}$ nilai $k = 2 - 2 = 0$

Sehingga jumlah k-defisiensi titik untuk graf komplit L_5 dengan pohon merentang T dari barisan derajat $2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1$ adalah $0 + 1 + 1 + 1 + 1 + 0 + 1 + 2 + 1 + 0 = 8$.

Dari perhitungan jumlah k-defisiensi titik untuk graf tangga L_4 di atas dapat disimpulkan bahwa jumlah k-defisiensi titik adalah 8.

3.3.5. Graf Tangga L_6

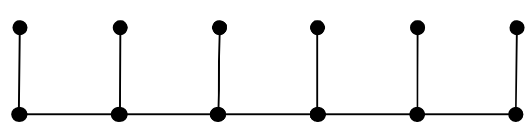
Untuk graf tangga L_6 dapat ditunjukkan pada gambar (3.19) berikut:



Gambar (3.19) graf tangga L_6

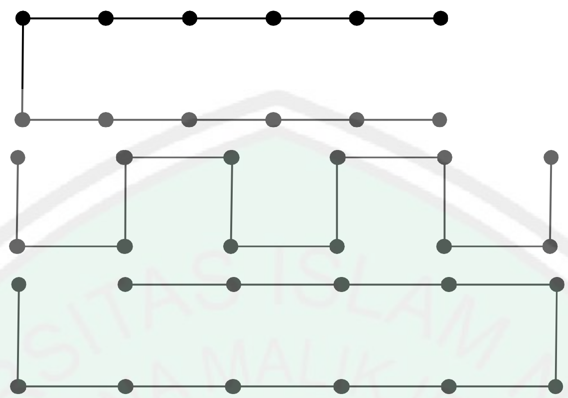
Graf tangga L_6 di atas memuat barisan derajat yaitu $2, 3, 3, 3, 3, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 2$. Graf tangga L_6 memiliki beberapa bentuk barisan derajat yaitu:

a) Barisan derajat $3, 3, 3, 3, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1\ 1$ yang dapat diwakili oleh gambar graf berikut:

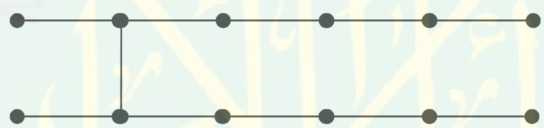


CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

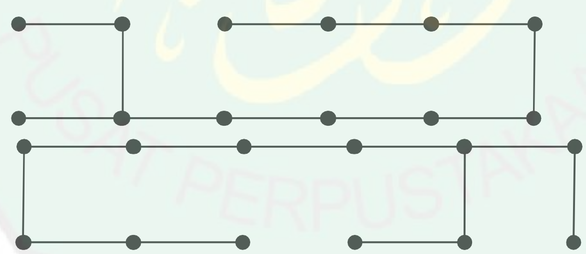
b) Barisan derajat $2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1\ 1$ yang dapat diwakili oleh gambar graf berikut:



c) Barisan derajat $3, 3, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1\ 1$ yang dapat diwakili oleh gambar graf berikut:



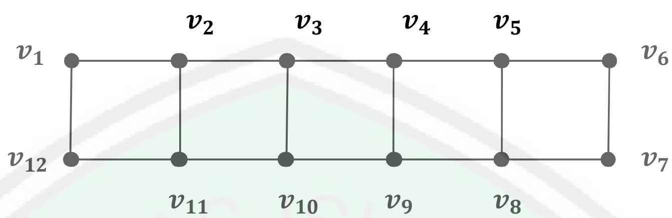
d) Barisan derajat $3, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2\ 1, 1\ 1$ yang dapat diwakili oleh gambar graf berikut:



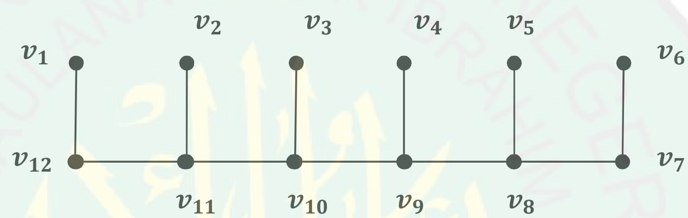
Selanjutnya k-defisiensi titik dapat ditentukan dengan $der_G(v_i) - der_T(v_i) = k$, untuk $der_G(v_i)$ adalah derajat titik v_i pada graf G (graf tangga L_6) dan $der_T(v_i)$ adalah derajat titik V_i pada graf pohon merentang T yang akan diwakili oleh satu graf dari masing-masing barisan derajat sebagai berikut:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE UNIVERSITY OF MALANG

a) Untuk graf G (graf tangga L_6) dengan pohon merentang T dari barisan derajat 3, 3, 3, 3, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1 1 dapat ditunjukkan sebagai berikut:



Graf G (graf tangga L_6)



Graf T (pohon merentang graf G)

Pada titik $\boldsymbol{v_1}$ nilai $k = 2 - 1 = 1$

Pada titik $\boldsymbol{v_2}$ nilai $k = 3 - 1 = 2$

Pada titik $\boldsymbol{v_3}$ nilai $k = 3 - 1 = 2$

Pada titik $\boldsymbol{v_4}$ nilai $k = 3 - 1 = 2$

Pada titik $\boldsymbol{v_5}$ nilai $k = 3 - 1 =2$

Pada titik $\boldsymbol{v_6}$ nilai $k = 2 - 1 = 1$

Pada titik $\boldsymbol{v_7}$ nilai $k = 2 - 2 = 0$

Pada titik $\boldsymbol{v_8}$ nilai $k = 3 - 3 = 0$

Pada titik $\boldsymbol{v_9}$ nilai $k = 3 - 3 = 0$

Pada titik $\boldsymbol{v_{10}}$ nilai $k = 3 - 3 = 0$

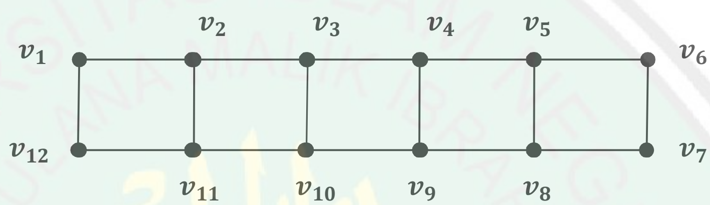
Pada titik $\boldsymbol{v_{11}}$ nilai $k = 3 - 3 = 0$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

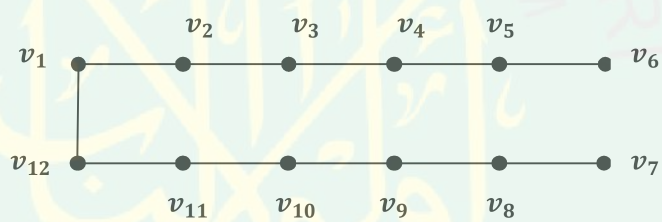
Pada titik $\boldsymbol{v_{12}}$ nilai $k = 2 - 2 = 0$

Sehingga jumlah k-defisiensi titik untuk graf komplit L_6 dengan pohon merentang T dari barisan derajat $3, 3, 3, 3, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1\ 1$ adalah $1 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 10$.

b) Untuk graf G (graf tangga L_6) dengan pohon merentang T dari barisan derajat $2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2\ 1, 1$ dapat ditunjukkan sebagai berikut:



Graf G (graf tangga L_6)



Graf T (pohon merentang graf G)

Pada titik $\boldsymbol{v_1}$ nilai $k = 2 - 2 = 0$

Pada titik $\boldsymbol{v_2}$ nilai $k = 3 - 2 = 1$

Pada titik $\boldsymbol{v_3}$ nilai $k = 3 - 2 = 1$

Pada titik $\boldsymbol{v_4}$ nilai $k = 3 - 2 = 1$

Pada titik $\boldsymbol{v_5}$ nilai $k = 3 - 2 =1$

Pada titik $\boldsymbol{v_6}$ nilai $k = 2 - 1 = 1$

Pada titik $\boldsymbol{v_7}$ nilai $k = 2 - 1 = 1$

Pada titik $\boldsymbol{v_8}$ nilai $k = 3 - 2 = 1$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Pada titik $\boldsymbol{v_9}$ nilai $k = 3 - 2 = 1$

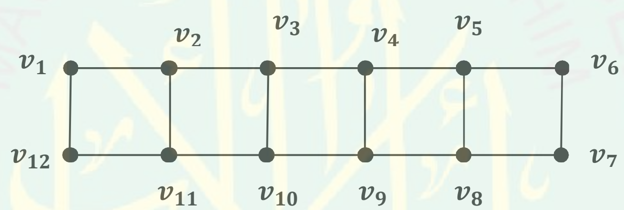
Pada titik $\boldsymbol{v_{10}}$ nilai $k = 3 - 2 = 1$

Pada titik $\boldsymbol{v_{11}}$ nilai $k = 3 - 2 = 1$

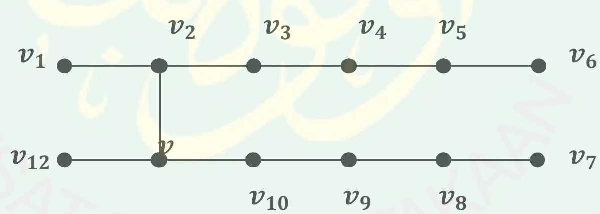
Pada titik $\boldsymbol{v_{12}}$ nilai $k = 2 - 2 = 0$

Sehingga jumlah k-defisiensi titik untuk graf komplit L_6 dengan pohon merentang T dari barisan derajat $2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2\ 1, 1$ adalah $0 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 0 = 10$.

c) Untuk graf G (graf tangga L_6) dengan pohon merentang T dari barisan derajat $3, 3, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1\ 1$ dapat ditunjukkan sebagai berikut:



Graf G (graf tangga L_6)



Graf T (pohon merentang graf G)

Pada titik $\boldsymbol{v_1}$ nilai $k = 2 - 1 = 1$

Pada titik $\boldsymbol{v_2}$ nilai $k = 3 - 3 = 0$

Pada titik $\boldsymbol{v_3}$ nilai $k = 3 - 2 = 1$

Pada titik $\boldsymbol{v_4}$ nilai $k = 3 - 2 = 1$

Pada titik $\boldsymbol{v_5}$ nilai $k = 3 - 2 =1$

Pada titik $\boldsymbol{v_6}$ nilai $k = 2 - 1 = 1$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Pada titik $\boldsymbol{v_7}$ nilai $k = 2 - 1 = 1$

Pada titik $\boldsymbol{v_8}$ nilai $k = 3 - 2 = 1$

Pada titik $\boldsymbol{v_9}$ nilai $k = 3 - 2 = 1$

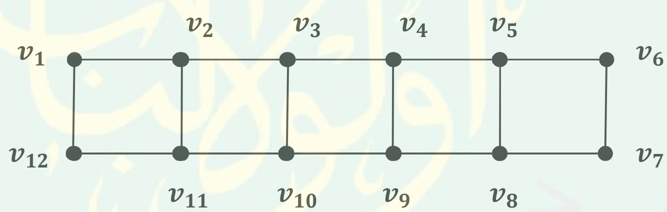
Pada titik $\boldsymbol{v_{10}}$ nilai $k = 3 - 2 = 1$

Pada titik $\boldsymbol{v_{11}}$ nilai $k = 3 - 3 = 0$

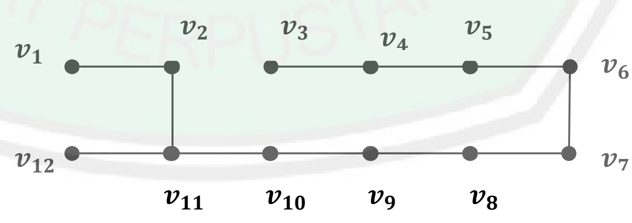
Pada titik $\boldsymbol{v_{12}}$ nilai $k = 2 - 1 = 1$

Sehingga jumlah k-defisiensi titik untuk graf komplit L_6 dengan pohon merentang T dari barisan derajat $3, 3, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1\ 1$ adalah $1 + 0 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 0 + 1 = 10.$

d) Untuk graf G (graf tangga L_6) dengan pohon merentang T dari barisan derajat $3, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1\ 1$ dapat ditunjukkan sebagai berikut:



Graf G (graf tangga L_6)



Graf T (pohon merentang graf G)

Pada titik $\boldsymbol{v_1}$ nilai $k = 2 - 1 = 1$

Pada titik $\boldsymbol{v_2}$ nilai $k = 3 - 2 = 1$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Pada titik $\boldsymbol{v_3}$ nilai $k = 3 - 1 = 2$

Pada titik $\boldsymbol{v_4}$ nilai $k = 3 - 2 = 1$

Pada titik $\boldsymbol{v_5}$ nilai $k = 3 - 2 = 1$

Pada titik $\boldsymbol{v_6}$ nilai $k = 2 - 2 = 0$

Pada titik $\boldsymbol{v_7}$ nilai $k = 2 - 2 = 0$

Pada titik $\boldsymbol{v_8}$ nilai $k = 3 - 2 = 1$

Pada titik $\boldsymbol{v_9}$ nilai $k = 3 - 2 = 1$

Pada titik $\boldsymbol{v_{10}}$ nilai $k = 3 - 2 = 1$

Pada titik $\boldsymbol{v_{11}}$ nilai $k = 3 - 3 = 0$

Pada titik $\boldsymbol{v_{12}}$ nilai $k = 2 - 1 = 1$

Sehingga jumlah k-defisiensi titik untuk graf komplit L_6 dengan pohon merentang T dari barisan derajat $3, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1\ 1$ adalah $1 + 1 + 2 + 1 + 1 + 0 + 0 + 1 + 1 + 1 + 0 + 1 = 10$.

Berdasarkan jumlah k-defisiensi titik pada graf tangga di atas, maka dapat disimpulkan rumus umum untuk menentukan k-defisiensi titik dam banyak pohon merentang pada graf tangga adalah sebagai berikut:

Graf tangga	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6	…	L_n
k-defisiensi titik	2	4	6	8	10	…	2(n-1)

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Teorema

Graf tangga n (L_n) memiliki jumlah k-deisiensi titik yaitu 2(n – 1)

Bukti :

Persamaan k-defisiensi titik adalah $der_G(v_i) - der_T(v_i) = k$, sehingga untuk menentukan jumlah k-defisiensi titik dapat ditentukan dengan persamaan $\sum der_G(v_i) - der_T(v_i) = 2(q - p + 1)$.

Akan ditunjukkan jumlah k-defisiensi titik untuk graf komplit adalah $2(n-1)$.

Pada $L_n \rightarrow q = 3n - 2; p = 2n$

Maka

$$2(q - p + 1) = 2(3n - 2 - 2n + 1)$$
$$= 2(n - 1) \text{ terbukti}$$

3.4 Graf Bintang (S_1 sampai dengan S_6)

3.4.1. Graf Bintang S_1

Untuk graf bintang S_1 dapat digambarkan seperti gambar berikut:

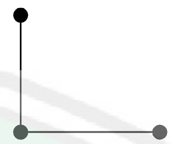
Gambar graf bintang S_1

Graf bintang diatas memuat barisan derajat 1,1 pohon merentang pada graf bintang adalah dirinya sendiri. Karena pohon merentang graf bintang sama dengan graf bintang maka barisan derajat pada pohon merentang graf bintang sama dengan barisan derajat yaitu 1,1. Sehingga k-defisiensi titiknya adalah nol, karena k-defisiensinya nol maka jumlah k-defisiensinya juga nol.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

3.4.2. Graf Bintang S_2

Untuk graf bintang S_2 dapat digambarkan seperti gambar berikut:

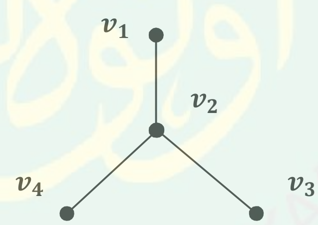


Gambar graf bintang S_2

Graf bintang diatas memuat barisan derajat 2,1,1 pohon merentang pada graf bintang adalah dirinya sendiri. Karena pohon merentang graf bintang sama dengan graf bintang maka barisan derajat pada pohon merentang graf bintang sama dengan barisan derajat yaitu 2, 1, 1. Sehingga k-defisiensi titiknya adalah nol, karena k-defisiensi titiknya nol maka jumlah k-defisiensi titiknya juga nol.

3.4.3. Graf Bintang S_3

Untuk graf bintang S_3 dapat ditunjukkan pada gambar (3.20) berikut:



Gambar (3.20) graf bintang S_3

Graf bintang di atas memuat barisan derajat yaitu $3, 1, 1, 1,$ pohon merentang pada graf bintang adalah dirinya sendiri. Karena pohon merentang graf bintang sama dengan graf bintang maka barisan derajat pada pohon merentang graf bintang sama dengan barisan derajat yaitu $3, 1, 1, 1$. Sehingga dapat dihitung jumlah k-defisiensi titiknya adalah:

Pada titik $\boldsymbol{v_1}$ nilai $k = 1 - 1 = 0$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Pada titik $\boldsymbol{v_2}$ nilai $k = 3 - 3 = 0$

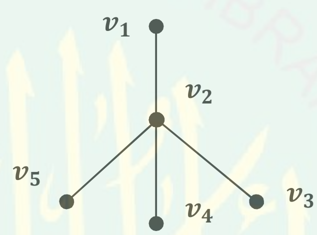
Pada titik $\boldsymbol{v_3}$ nilai $k = 1 - 1 = 0$

Pada titik $\boldsymbol{v_4}$ nilai $k = 1 - 1 = 0$

Sehingga jumlah k-defisiensi titik untuk graf bintang S_3 adalah $0 + 0 + 0 + 0 = 0$.

3.4.4. Graf Bintang S_4

Untuk graf bintang S_4 dapat ditunjukkan pada gambar (3.21) berikut:



Gambar (3.21) graf bintang S_4

Graf bintang di atas memuat barisan derajat yaitu $4, 1, 1, 1, 1$, pohon merentang pada graf bintang adalah dirinya sendiri. Karena pohon merentang graf bintang sama dengan graf bintang maka barisan derajat pada pohon merentang graf bintang sama dengan barisan derajat yaitu $4, 1, 1, 1, 1$. Sehingga dapat dihitung jumlah k-defisiensi titiknya adalah :

Pada titik $\boldsymbol{v_1}$ nilai $k = 1 - 1 = 0$

Pada titik $\boldsymbol{v_2}$ nilai $k = 4 - 4 = 0$

Pada titik $\boldsymbol{v_3}$ nilai $k = 1 - 1 = 0$

Pada titik $\boldsymbol{v_4}$ nilai $k = 1 - 1 = 0$

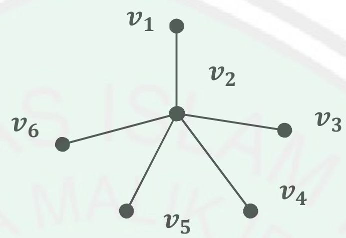
Pada titik $\boldsymbol{v_5}$ nilai $k = 1 - 1 = 0$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Sehingga jumlah k-defisiensi titik untuk graf bintang S_4 adalah $0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$.

3.4.5. Graf Bintang S_5

Untuk graf bintang S_5 dapat ditunjukkan pada gambar (3.22) berikut:



Gambar (3.22) graf bintang S_5

Graf bintang di atas memuat barisan derajat yaitu $5, 1, 1, 1, 1, 1$, pohon merentang pada graf bintang adalah dirinya sendiri. Karena pohon merentang graf bintang sama dengan graf bintang maka barisan derajat pada pohon merentang graf bintang sama dengan barisan derajat yaitu $5, 1, 1, 1, 1, 1$. Sehingga dapat dihitung jumlah k-defisiensi titiknya adalah:

Pada titik $\boldsymbol{v_1}$ nilai $k = 1 - 1 = 0$

Pada titik $\boldsymbol{v_2}$ nilai $k = 5 - 5 = 0$

Pada titik $\boldsymbol{v_3}$ nilai $k = 1 - 1 = 0$

Pada titik $\boldsymbol{v_4}$ nilai $k = 1 - 1 = 0$

Pada titik $\boldsymbol{v_5}$ nilai $k = 1 - 1 = 0$

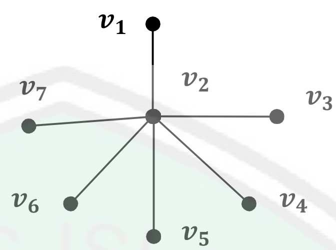
Pada titik $\boldsymbol{v_6}$ nilai $k = 1 - 1 = 0$

Sehingga jumlah k-defisiensi titik untuk graf bintang S_5 adalah $0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

3.4.6. Graf Bintang S_6

Untuk graf bintang S_6 dapat ditunjukkan pada gambar (3.23) berikut:



Gambar (3.23) graf bintang S_6

Graf bintang di atas memuat barisan derajat yaitu $6, 1, 1, 1, 1, 1, 1$, pohon merentang pada graf bintang adalah dirinya sendiri. Karena pohon merentang graf bintang sama dengan graf bintang maka barisan derajat pada pohon merentang graf bintang sama dengan barisan derajat yaitu $6, 1, 1, 1, 1, 1, 1$. Sehingga dapat dihitung jumlah k-defisiensi titiknya adalah :

Pada titik v_1 nilai $k = 1 - 1 = 0$

Pada titik v_2 nilai $k = 6 - 6 = 0$

Pada titik v_3 nilai $k = 1 - 1 = 0$

Pada titik v_4 nilai $k = 1 - 1 = 0$

Pada titik v_5 nilai $k = 1 - 1 = 0$

Pada titik v_6 nilai $k = 1 - 1 = 0$

Pada titik v_7 nilai $k = 1 - 1 = 0$

Sehingga jumlah k-defisiensi titik untuk graf bintang S_6 adalah $0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$. Berdasarkan jumlah k-defisiensi titik pada graf bintang di atas, maka dapat disimpulkan rumus umum untuk menentukan k-defisiensi titik dam banyak pohon merentang pada graf bintang adalah sebagai berikut:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Graf bintang	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	…	S_n
Jumlah k-defisiensi titik	0	0	0	0	0	0	…	0

Teorema

Graf bintang n (S_n) memiliki jumlah k-defisiensi titik untuk semua graf bintang adalah nol.

Bukti :

Pada graf bintang n (S_n)

$\text{der}(V_1) = \text{der}(\text{V}_3) = \text{der}(\text{V}_4) = ... = \text{der}(\text{V}_\text{n}) = 1$

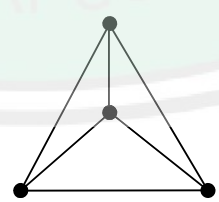
$\text{der}(V_2)$ atau der titik pusatnya = n

Pohon merentang graf bintang = graf bintang bintang n (S_n) sehingga menurut definisi k-defisiensi titik $der_G(v) - der_T(v) = k = 0$, maka teorema terbukti.

3.5 Graf Roda (W_3 sampai dengan W_6)

3.5.1. Graf Roda W_3

Untuk graf roda R_3 dapat ditunjukkan pada gambar (3.24) berikut:

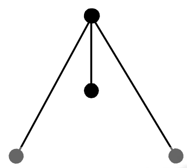


Gambar (3.24) graf roda W_3

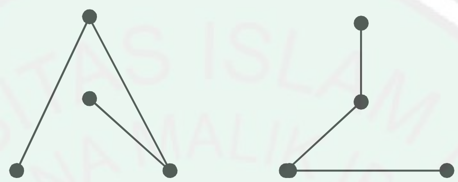
Barisan derajat pada graf roda di atas adalah $3, 3, 3, 3$. Graf roda W_3 memiliki dua barisan derajat yaitu:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

a) Barisan derajat $3, 1, 1, 1$ yang dapat diwakili oleh dua gambar graf berikut:

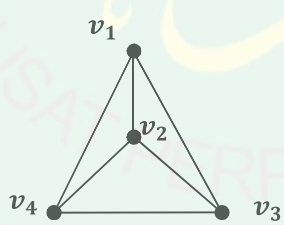


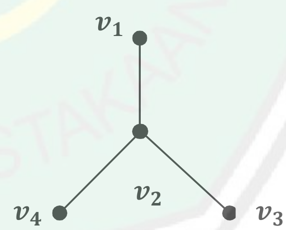
b) Barisan derajat $2, 2, 1, 1$ yang dapat diwakili oleh dua gambar graf berikut:



Selanjutnya k-defisiensi titik dapat ditentukan dengan $der_G(v_i) - der_T(v_i) = k$, untuk $der_G(v_i)$ adalah derajat titik v_i pada graf G (graf roda W_3) dan $der_T(v_i)$ adalah derajat titik v_i pada graf pohon merentang T yang akan diwakili oleh satu graf dari masing-masing barisan derajat sebagai berikut:

a) Untuk graf G (graf roda W_3) dengan pohon merentang T dari barisan derajat $(3, 1, 1, 1)$ dapat ditunjukkan sebagai berikut:





Graf G (graf roda W_3) Graf T (pohon merentang graf G)

Pada titik $\boldsymbol{v_1}$ nilai $k = 3 - 1 = 2$

Pada titik $\boldsymbol{v_2}$ nilai $k = 3 - 3 = 0$

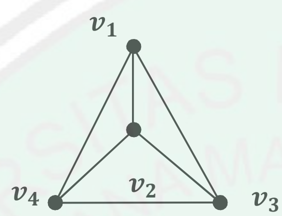
Pada titik $\boldsymbol{v_3}$ nilai $k = 3 - 1 = 2$

Pada titik $\boldsymbol{v_4}$ nilai $k = 3 - 1 = 2$

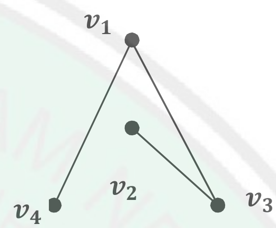
CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Sehingga jumlah k-defisiensi titik untuk graf roda W_3 dengan pohon merentang T dari barisan derajat $3, 1, 1, 1$ adalah $2 + 0 + 2 + 2 = 6$.

b) Untuk graf G (graf roda W_3) dengan pohon merentang T dari barisan derajat $2, 2, 1, 1$ dapat ditunjukkan sebagai berikut:



Graf G (graf roda W_3)



Graf T (pohon merentang graf G)

Pada titik v_1 nilai $k = 3 - 2 = 1$

Pada titik v_2 nilai $k = 3 - 1 = 2$

Pada titik v_3 nilai $k = 3 - 2 = 1$

Pada titik v_4 nilai $k = 3 - 1 = 2$

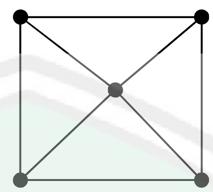
Sehingga jumlah k-defisiensi titik untuk graf roda W_3 dengan pohon merentang T dari barisan derajat $2, 2, 1, 1$ adalah $1 + 2 + 1 + 2 = 6$.

Sehingga di dapatkan jumlah k-defisiensi titik untuk graf roda W_3 adalah 6.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

3.5.2. Graf Roda W_4

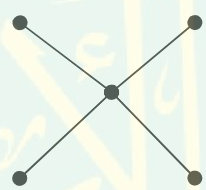
Untuk graf roda W_4 dapat ditunjukkan pada gambar (3.25) berikut:



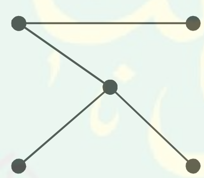
Gambar (3.25) graf roda W_4

Barisan derajat pada graf roda di atas adalah $4, 3, 3, 3$. Graf roda W_4 memiliki dua barisan derajat yaitu:

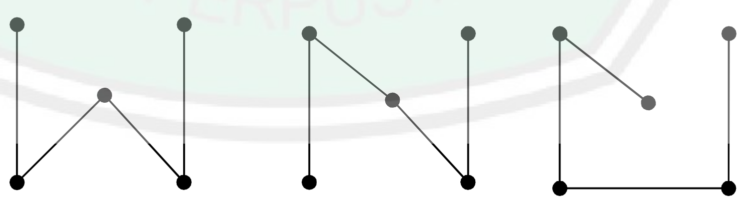
a) Barisan derajat $4, 1, 1, 1, 1$ yang dapat di gambarkan oleh graf berikut:



b) Barisan derajat $3, 2, 1, 1, 1$ yang dapat di gambarkan oleh graf berikut:



c) Barisan derajat $2, 2, 2, 1, 1$ yang dapat di gambarkan oleh graf berikut:

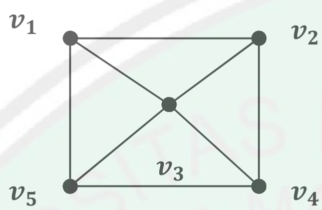


Selanjutnya jumlah k-defisiensi titik dapat ditentukan dengan $der_G(v_i) - der_T(v_i) = k$, untuk $der_G(v_i)$ adalah derajat titik v_i pada graf G (graf roda W_4)

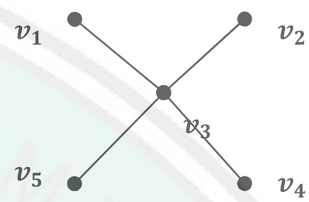
CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

dan $der_T(v_i)$ adalah derajat titik V_i pada graf pohon merentang T yang akan diwakili oleh satu graf dari masing-masing barisan derajat sebagai berikut:

a) Untuk graf G (graf roda W_4) dengan pohon merentang T dari barisan derajat $4, 1, 1, 1, 1$ dapat ditunjukkan sebagai berikut:



Graf G (graf roda W_4)



Graf T (pohon merentang graf G)

Pada titik $\boldsymbol{v_1}$ nilai $k = 3 - 1 = 2$

Pada titik $\boldsymbol{v_2}$ nilai $k = 3 - 1 = 2$

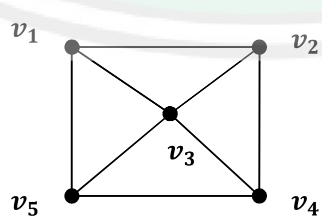
Pada titik $\boldsymbol{v_3}$ nilai $k = 4 - 4 = 0$

Pada titik $\boldsymbol{v_4}$ nilai $k = 3 - 1 = 2$

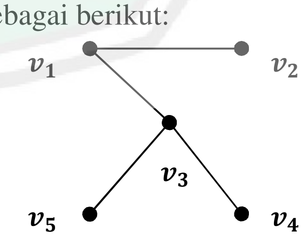
Pada titik $\boldsymbol{v_5}$ nilai $k = 3 - 1 = 2$

Sehingga jumlah k-defisiensi titik untuk graf roda W_4 dengan pohon merentang T dari barisan derajat $4, 1, 1, 1, 1$ adalah $2 + 2 + 0 + 2 + 2 = 8$.

b) Untuk graf G (graf roda W_4) dengan pohon merentang T dari barisan derajat $3, 2, 1, 1, 1$ dapat ditunjukkan sebagai berikut:



Graf G (graf roda W_4)



Graf T (pohon merentang graf G)

Pada titik $\boldsymbol{v_1}$ nilai $k = 3 - 2 = 1$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Pada titik $\boldsymbol{v_2}$ nilai $k = 3 - 1 = 2$

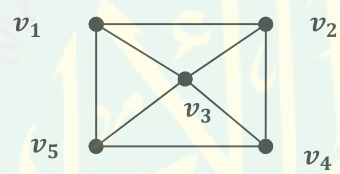
Pada titik $\boldsymbol{v_3}$ nilai $k = 4 - 3 = 1$

Pada titik $\boldsymbol{v_4}$ nilai $k = 3 - 1 = 2$

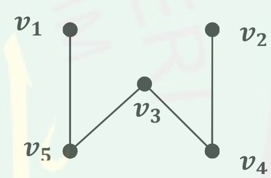
Pada titik $\boldsymbol{v_5}$ nilai $k = 3 - 1 = 2$

Sehingga jumlah k-defisiensi titik untuk graf roda W_4 dengan pohon merentang T dari barisan derajat $3, 2, 1, 1, 1$ adalah $1 + 2 + 1 + 2 + 2 = 8$.

c) Untuk graf G (graf roda W_4) dengan pohon merentang T dari barisan derajat $2, 2, 2, 1, 1$ dapat ditunjukkan sebagai berikut:



Graf G (graf roda W_4)



Graf T (pohon merentang graf G)

Pada titik $\boldsymbol{v_1}$ nilai $k = 3 - 1 = 2$

Pada titik $\boldsymbol{v_2}$ nilai $k = 3 - 1 = 2$

Pada titik $\boldsymbol{v_3}$ nilai $k = 4 - 2 = 2$

Pada titik $\boldsymbol{v_4}$ nilai $k = 3 - 2 = 1$

Pada titik $\boldsymbol{v_5}$ nilai $k = 3 - 2 = 1$

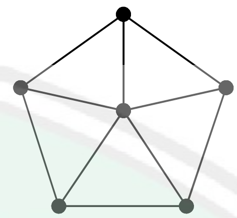
Sehingga jumlah k-defisiensi titik untuk graf roda W_4 dengan pohon merentang T dari barisan derajat $2, 2, 2, 1, 1$ adalah $2 + 2 + 2 + 1 + 1 = 8$.

Sehingga dapat disimpulkan jumlah k-defisiensi titik untuk graf roda W_4 adalah 8.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

3.5.3. Graf Roda W_5

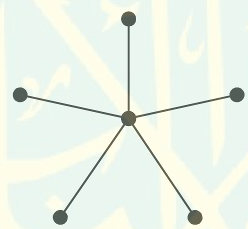
Untuk graf roda W_5 dapat ditunjukkan pada gambar (3.26) berikut:



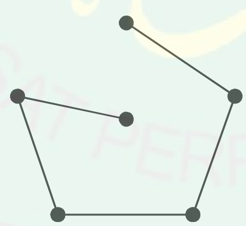
Gambar (3.26) graf roda W_5

Barisan derajat pada graf roda di atas adalah $5, 3, 3, 3, 3$. Graf roda W_5 memiliki dua barisan derajat yaitu:

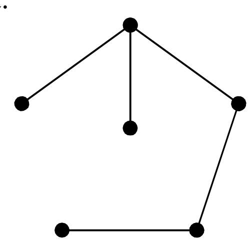
a) Barisan derajat $5, 1, 1, 1, 1, 1$ yang dapat di tunjukkan oleh gambar berikut:



b) Barisan derajat $2, 2, 2, 2, 1, 1$ yang dapat di tunjukkan oleh gambar berikut:

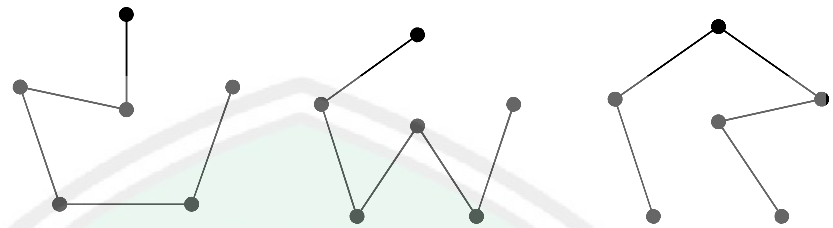


c) Barisan derajat $3, 2, 2, 1, 1, 1$ yang dapat di tunjukkan oleh gambar berikut:



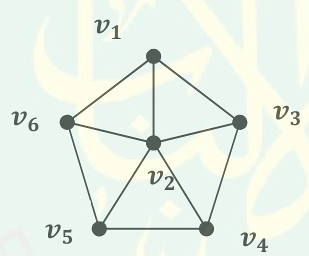
CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

d) Barisan derajat $2, 2, 2, 2, 1, 1$ yang dapat di tunjukkan oleh gambar berikut:

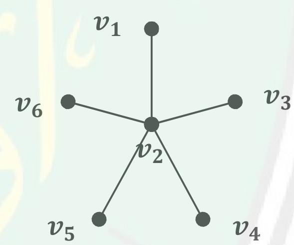


Selanjutnya k-defisiensi titik dapat ditentukan dengan $der_G(v_i) - der_T(v_i) = k$, untuk $der_G(v_i)$ adalah derajat titik v_i pada graf G (graf roda W_5) dan $der_T(v_i)$ adalah derajat titik V_i pada graf pohon merentang T yang akan diwakili oleh satu graf dari masing-masing barisan derajat sebagai berikut:

a) Untuk graf G (graf roda W_5) dengan pohon merentang T dari barisan derajat $5, 1, 1, 1, 1, 1$ dapat ditunjukkan sebagai berikut:



Graf G (graf roda W_5)



Graf T (pohon merentang graf G)

Pada titik $\boldsymbol{v_1}$ nilai $k = 3 - 1 = 2$

Pada titik $\boldsymbol{v_2}$ nilai $k = 5 - 5 = 0$

Pada titik $\boldsymbol{v_3}$ nilai $k = 3 - 1 = 2$

Pada titik $\boldsymbol{v_4}$ nilai $k = 3 - 1 = 2$

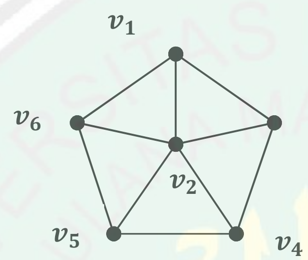
Pada titik $\boldsymbol{v_5}$ nilai $k = 3 - 1 = 2$

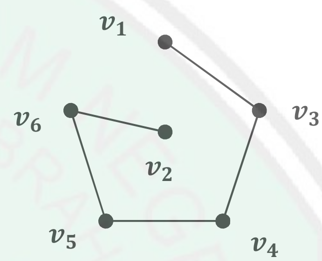
Pada titik $\boldsymbol{v_6}$ nilai $k = 3 - 1 = 2$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Sehingga jumlah k-defisiensi titik untuk graf roda R_5 dengan pohon merentang T dari barisan derajat $5, 1, 1, 1, 1, 1$ adalah $2 + 0 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10$.

b) Untuk graf G (graf roda W_5) dengan pohon merentang T dari barisan derajat $2, 2, 2, 2, 1, 1$ dapat ditunjukkan sebagai berikut:





Graf G (graf roda W_5) Graf T (pohon merentang graf G)

Pada titik v_1 nilai $k = 3 - 1 = 2$

Pada titik v_2 nilai $k = 5 - 1 = 4$

Pada titik v_3 nilai $k = 3 - 2 = 1$

Pada titik v_4 nilai $k = 3 - 2 = 1$

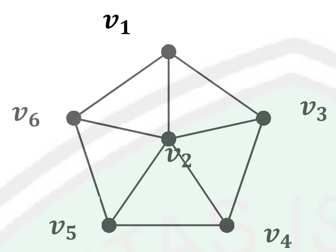
Pada titik v_5 nilai $k = 3 - 2 = 1$

Pada titik v_6 nilai $k = 3 - 2 = 1$

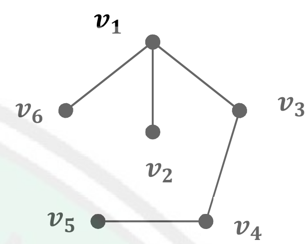
Sehingga jumlah k-defisiensi titik untuk graf roda W_5 dengan pohon merentang T dari barisan derajat $2, 2, 2, 2, 1, 1$ adalah $2 + 4 + 1 + 1 + 1 + 1 = 10$.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

c) Untuk graf G (graf roda W_5) dengan pohon merentang T dari barisan derajat $3, 2, 2, 1, 1, 1$ dapat ditunjukkan sebagai berikut:



Graf G (graf roda W_5)



Graf T (pohon merentang graf G)

Pada titik $\boldsymbol{v_1}$ nilai $k = 3 - 3 = 0$

Pada titik $\boldsymbol{v_2}$ nilai $k = 5 - 1 = 4$

Pada titik $\boldsymbol{v_3}$ nilai $k = 3 - 2 = 1$

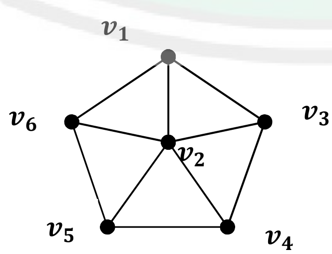
Pada titik $\boldsymbol{v_4}$ nilai $k = 3 - 2 = 1$

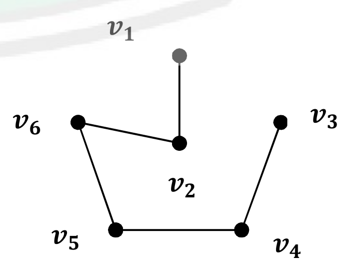
Pada titik $\boldsymbol{v_5}$ nilai $k = 3 - 1 = 2$

Pada titik $\boldsymbol{v_6}$ nilai $k = 3 - 1 = 2$

Sehingga jumlah k-defisiensi titik untuk graf roda W_5 dengan pohon merentang T dari barisan derajat $3, 2, 2, 1, 1, 1$ adalah $0 + 4 + 1 + 1 + 2 + 2 = 10$.

d) Untuk graf G (graf roda W_5) dengan pohon merentang T dari barisan derajat $2, 2, 2, 2, 1, 1$ dapat ditunjukkan sebagai berikut:





Graf G (graf roda W_5) Graf T (pohon merentang graf G)

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Pada titik $\boldsymbol{v_1}$ nilai $k = 3 - 1 = 2$

Pada titik $\boldsymbol{v_2}$ nilai $k = 5 - 2 = 3$

Pada titik $\boldsymbol{v_3}$ nilai $k = 3 - 1 = 2$

Pada titik $\boldsymbol{v_4}$ nilai $k = 3 - 2 = 1$

Pada titik $\boldsymbol{v_5}$ nilai $k = 3 - 2 = 1$

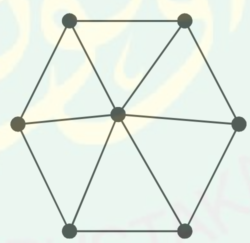
Pada titik $\boldsymbol{v_6}$ nilai $k = 3 - 2 = 1$

Sehingga jumlah k-defisiensi titik untuk graf roda W_5 dengan pohon merentang T dari barisan derajat $2, 2, 2, 2, 1, 1$ adalah $2 + 3 + 2 + 1 + 1 + 1 = 10$.

Sehingga dapat disimpulkan jumlah k-defisiensi titik untuk graf roda W_5 adalah 10.

3.5.4. Graf Roda W_6

Untuk graf roda W_6 dapat ditunjukkan pada gambar (3.27) berikut:

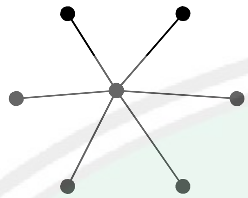


Gambar (3.27) graf roda W_6

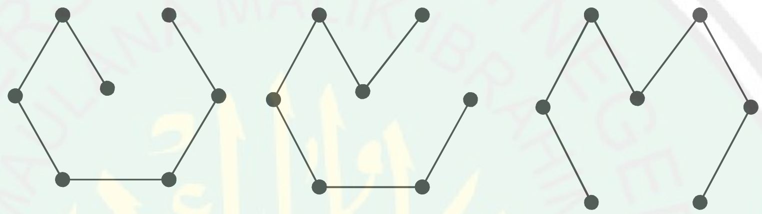
Barisan derajat pada graf roda di atas adalah $6, 3, 3, 3, 3, 3, 3$. Graf roda W_6 memiliki dua barisan derajat yaitu:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

a) Barisan derajat $6, 1, 1, 1, 1, 1, 1$ dapat ditunjukkan dengan gambar graf berikut:

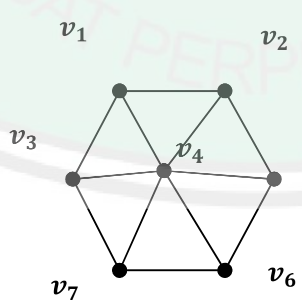


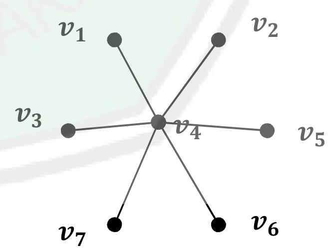
b) Barisan derajat $6, 1, 1, 1, 1, 1, 1$ dapat diwakili oleh beberapa gambar graf berikut:



Selanjutnya k-defisiensi titik dapat ditentukan dengan $der_G(v_i) - der_T(v_i) = k$, untuk $der_G(v_i)$ adalah derajat titik v_i pada graf G (graf roda W_6) dan $der_T(v_i)$ adalah derajat titik v_i pada graf pohon merentang T yang akan diwakili oleh satu graf dari masing-masing barisan derajat sebagai berikut:

a) Untuk graf G (graf roda W_6) dengan pohon merentang T dari barisan derajat $6, 1, 1, 1, 1, 1, 1$ dapat ditunjukkan sebagai berikut:





Graf G (graf roda W_6) Graf T (pohon merentang graf G)

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Pada titik $\boldsymbol{v_1}$ nilai $k = 3 - 1 = 2$

Pada titik $\boldsymbol{v_2}$ nilai $k = 3 - 1 = 2$

Pada titik $\boldsymbol{v_3}$ nilai $k = 3 - 1 = 2$

Pada titik $\boldsymbol{v_4}$ nilai $k = 6 - 6 = 0$

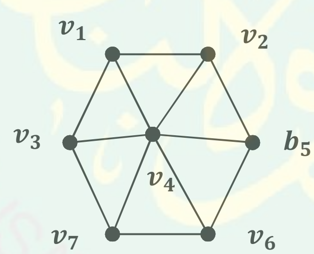
Pada titik $\boldsymbol{v_5}$ nilai $k = 3 - 1 = 2$

Pada titik $\boldsymbol{v_6}$ nilai $k = 3 - 1 = 2$

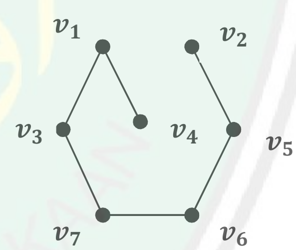
Pada titik $\boldsymbol{v_7}$ nilai $k = 3 - 1 = 2$

Sehingga jumlah k-defisiensi titik untuk graf roda W_6 dengan pohon merentang T dari barisan derajat $6, 1, 1, 1, 1, 1, 1$ adalah $2 + 2 + 2 + 0 + 2 + 2 + 2 = 12$.

b) Untuk graf G (graf roda W_6) dengan pohon merentang T dari barisan derajat $2, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1$ dapat ditunjukkan sebagai berikut:



Graf G (graf roda W_6)



Graf T (pohon merentang graf G)

Pada titik $\boldsymbol{v_1}$ nilai $k = 3 - 2 = 1$

Pada titik $\boldsymbol{v_2}$ nilai $k = 3 - 1 = 2$

Pada titik $\boldsymbol{v_3}$ nilai $k = 3 - 2 = 1$

Pada titik $\boldsymbol{v_4}$ nilai $k = 6 - 1 = 5$

Pada titik $\boldsymbol{v_5}$ nilai $k = 3 - 2 = 1$

Pada titik $\boldsymbol{v_6}$ nilai $k = 3 - 2 = 1$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Pada titik $\boldsymbol{v_7}$ nilai $k = 3 - 2 = 1$

Sehingga jumlah k-defisiensi titik untuk graf roda W_6 dengan pohon merentang T dari barisan derajat $2, 2, 2, 2, 2, 1, 1$ adalah $1 + 2 + 1 + 5 + 1 + 1 + 1 = 12$.

Sehingga dapat disimpulkan jumlah k-defisiensi titik untuk graf roda R_6 adalah 12. Berdasarkan jumlah k-defisiensi titik pada graf roda di atas, maka dapat disimpulkan rumus umum untuk menentukan k-defisiensi titik dam banyak pohon merentang pada graf roda adalah sebagai berikut:

Graf roda	W_3	W_4	W_5	W_6	…	W_n
Jumlah k-defisiensi titik	6	8	10	12	…	2n

Teorema

Graf roda n (R_n) memiliki k-defisiensi titik yaitu 2n.

Bukti

Persamaan k-defisiensi titik adalah $der_G(v_i) - der_T(v_i) = k$, sehingga untuk menentukan jumlah k-defisiensi titik dapat ditentukan dengan persamaan $\sum der_G(v_i) - der_T(v_i) = 2(q - p + 1)$.

Akan ditunjukkan jumlah k-defisiensi titik untuk graf komplit adalah $2n$

Pada $K_n \ \rightarrow q = 2n; p = n + 1$

Maka

$$\begin{aligned} 2(q - p + 1) &= 2(2n - (n + 1) + 1) \\ &= 2(2n - n - 1 + 1) \\ &= 2(n) \text{ terbukti} \end{aligned}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Berdasarkan data di atas yaitu rumus umum untuk setiap graf (sikel, komplit, tangga, bintang, dan roda) maka diperoleh table sebagai berikut:

Jenis Graf	Jumlah k-defisiensi titik
Graf Sikel	$C_n = 2$
Graf Komplit	$K_n = n^2 - 3n + 2$
Graf Tangga	$L_n = 2(n-1)$
Graf Bintang	0
Graf Roda	$R_n = 2n$

3.6 Konsep Keragaman Umat Manusia dalam Al-Quran pada Graf Komplit

Salah satu cabang matematika yang memiliki banyak aplikasi dalam kehidupan sehari hari adalah teori graf. Banyak sekali permasalahan yang bisa direpresentasikan dalam bentuk graf. Setelah direpresentasikan dalam bentuk graf kemudian permasalahan tersebut dianalisis untuk mencari pemecahan dari permasalahan tersebut. Pemecahan atau penyelesaian permasalahan dalam bentuk graf biasanya dibuat dalam bentuk yang sesederhana mungkin dengan mengambil hal-hal yang dianggap perlu saja dan membuang hal-hal yang yang dianggap tidak perlu atau kurang penting.

Graf dikatakan terhubung (*connected*) jika setiap pasangan titik u dan v di graf G, dan sisi (u,v) juga di graf G. Komponen dari graf G adalah bagian maksimal dari graf G dan terhubung. Graf terhubung terdiri dari satu komponen. Suatu komponen dikatakan graf genap/ ganjil jika banyak titiknya genap/ ganjil (Purwanto, 1998: 8-9).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Salah satu contoh graf terhubung adalah graf komplit. Graf komplit adalah salah satu bentuk graf yang bisa digunakan untuk menggambarkan beberapa permasalahan di dunia nyata. Secara matematis, graf komplit didefinisikan sebagai graf dengan dua titik yang berbeda saling terhubung langsung. Graf komplit dengan n titik dinyatakan dengan K_n (Chartrand dan Lesniak, 1986: 9).

Dalam Islam banyak ajaran atau amalan dalam kehidupan sehari-hari yang bisa digambarkan dengan graf komplit. Salah satunya adalah tentang tujuan Allah yang menciptakan manusia bersuku-suku dan berbangsa-bangsa untuk saling menganal. Sebagaimana disebutkan dalam Q.S Al Hujurat:13

Dalam ayat tersebut Allah menjelaskan bahwa Dia menciptakan manusia dari seorang laki-laki dan perempuan, kemudian dengan kekuasaan dan kehendak-Nya terlahir manusia yang berbeda ras dan warna kulit, dan sudah menjadi sunah-Nya bahwa segala yang diciptakannya tidak sia-sia. Perbedaan itu adalah agar semua manusia satu sama lain melakukan *ta'aruf* (saling mengenal). Karena pada dasarnya manusia tidak bisa hidup tanpa bermasyarakat dan bantuan orang lain.

Kata *ta'aarafu* berasal dari kata ''*arafa* yang berarti *mengenal*. Patron kata yang digunakan ayat ini mengandung makna timbale balik, dengan de3mikian ini berarti *saling mengenal*. Menurut Syeikh Abu Bakar Jabir Al-Jazairi dalam bukunya Tafsir Al-Qur'an Al-Aisar (jilit 6) haram hukumnya berbangsa-bangsa dengan nasab dan kewajiban saling mengenal dalam rangka saling tolong menolong.

Semakin kuat pengenalan satu pihak kepada selainnya, semakin terbuka peluang untuk saling member manfaat. Untuk itu surat Al-hujurat ayat 13 ini

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

menekankan perlunya saling mengenal. Perkenalan dibutuhkan untuk saling menarik pelajarab dan pengalaman pihak lain, guna meningkatkan ketakwaan kepada Allah swt yang dampaknya tercermin pada kedamaian dan kesejahteraan hidup duniawi dan kebahagiaan ukhrawi. Manusia tidak dapat menarik pelajaran, tidak dapat saling melengkapi dan menarik manfaat bahkan tidak dapat bekerja sama tanpa saling kenal mengenal. Saling mengenal yang digarisbawahi oleh ayat ini adalah "pancing"nya bukan "ikan"nya. Yang ditekankan adalah caranya bukan manfaatnya, karena seperti kata orang, member "pancing" jauh lebih baik dari pada member "ikan" (Quaraish Shihab, 2002:262)

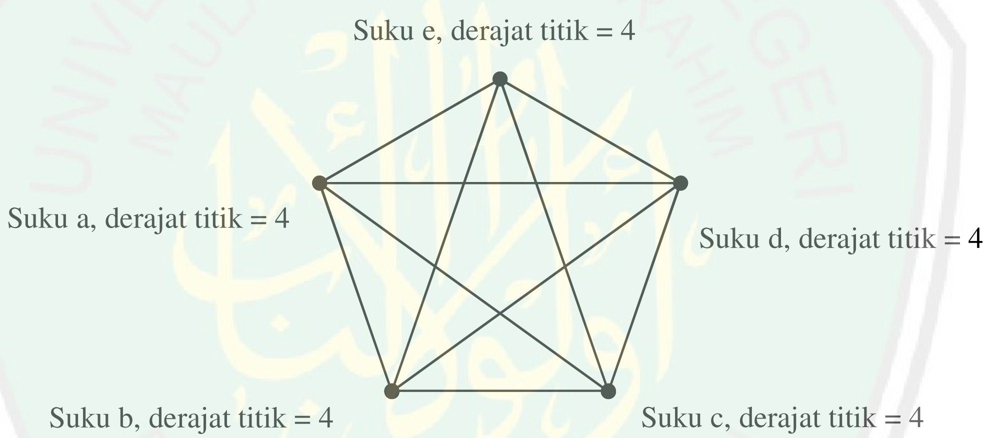
Selain itu juga, warna kulit, ras, bahasa, negara, dan lainnya tidak ada dalam pertimbangan Allah. Di sana hanya ada satu timbangan untuk menguji seluruh nilai dan mengetahui keutamaan manusia yaitu, "*Sesungguhnya orang yang paling mulia diantara kamu disisi Allah ialah orang yang paling taqwa diantara kamu"* (Sayyid Qutb, 2008: 421)

Saling kenal mengenal dapat dilakukan dimana saja dan kapan saja, misalnya saat sedang dijalan, disekolah, dimasjid dan lain-lain. Contoh lain misalkan pada saat sedang melaksanakan ibadah haji, banyak umat muslim dari berbagai bangsa dan suku berkumpul di Mekah untuk melaksanakan ibadah haji. Antara orang yang satu dengan orang yang lain tentunya juga banyak yang tidak saling mengenal, karena itu kita diwajibkan untuk saling kenal mengenal terutama sesama muslim, cara yang paling mudah adalah dengan mengucapkan salam.

Dalam Islam, graf komplit dapat direpresentasikan untuk menggambarkan tujuan Allah menciptakan manusia berbangsa-bangsa dan bersuku-suku

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

sebagaimana disebutkan dalam Al Qur'an Q.S Al Hujurat: 13 tersebut. Misal setiap suku/ bangsa pada ayat tersebut di lambangkan sebagai titik di dalam graf komplit, maka sesuai dengan sifat graf komplit setiap bangsa/ suku itu haruslah saling berhubungan (mengenal) dengan bangsa/suku yang lain. Sedangkan ukuran kemuliaan disisi Allah yang tidak memandang suku, ras dan golongan melainkan berdasarkan ketaqwaannya direpresentasikan dalam graf komplit dengan banyaknya derajat setiap titik yang nilainya sama. Sebagaimana digambarkan pada graf komplit K_5 berikut:



Dalam graf komplit, semua titik pasti terhubung oleh sebuah sisi dengan titik-titik yang lainnya. Jika graf komplit diartikan sebagai persatuan semua titik, maka pada graf komplit menggambarkan bahwa persatuan hanya bisa dibentuk apabila semua titik terhubung dengan semua titik yang lainnya.

Jika dikaji lebih lanjut, jika dalam sebuah graf komplit ada satu sisi saja yang dihapus atau salah satu titik tidak terhubung dengan satu titik yang lainnya, maka persatuan yang digambarkan pada graf komplit akan terpecah atau tidak akan terbentuk graf komplit(bukan sebuah graf komplit), sehingga bisa diartikan

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

bahwa jika ada satu golongan yang tidak mau menjalin hubungan dengan golongan yang lain, persatuan dan kesatuan dalam sebuah negara tidak akan terwujud.

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM PUSAT PERPUSTAKAAN

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan pada bab III, maka dapat diambil kesimpulan yaitu:

1. Pada graf sikel diperoleh pola rumus untuk menentukan jumlah k-defisiensi titik adalah $C_n = 2$.
2. Pada graf komplit diperoleh pola rumus untuk menentukan jumlah k-defisiensi titik adalah $K_n = n^2 - 3n + 2$.
3. Pada graf tangga diperoleh pola rumus untuk menentukan jumlah k-defisiensi titik adalah $L_n = 2(n-1)$.
4. Pada graf bintang jumlah k-defisiensi titiknya adalah nol.
5. Pada graf roda diperoleh pola rumus untuk menentukan jumlah nilai k-defisiensi titik adalah $R_n = 2n$.

4.2 Saran

k-defisiensi titik dapat digunakan untuk sebarang graf. Sehingga untuk penelitian berikutnya penulis menyarankan untuk melanjutkan penelitian pada graf yang lain atau dengan menggunakan pola yang lain misalnya dengan menggunakan graf tak identik..

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir, Niswatin, A. Nilna, Framelia, N. Fifi. 2009. *Teori Graf*. Malang:UIN-MALANG PRESS.

Chartrand, G. dan Lesniak, L. 1986. *Graph and Digraph 2nd Edition*. California: Wadsworth. Inc.

Chartrand, Gary and Oellermann, Ortrud R. 1993. Applied and Algoritmic Graph Theory. Canada: Mc Graw-Hill Inc

Dwi Astuti, Yuni. 2006. *Logika dan Algoritma. Pohon (Tree)*. (Online:http:/www.yuni_dwi.staff.gunadarma.ac.id diakses 12 April 2011).

Kurniawan, Haris. 2009. Spectrum Graf Komplit (Kn) dengan $n \geq 2$ dan $n \in \mathbb{N}$. UIN Maulana Malik Ibrahim Malang: Skripsi, tidak diterbitkan.

Purwanto. 1997. *Matematika Diskrit*. Malang: IKIP MALANG.

Quthb, Sayyid. 2008. *Tafsir Fi Zhilali Qur'an. Jilid 2*. Bandung: Gema Insani Press

------------------------- *Tafsir Fi Zhilali Qur'an. Jilid 10*. Bandung: Gema Insani Press

Rinaldi, Munir. 2005. Matematika Diskrit. Bandung:Informatika Bandung.

Shihab, Quraysh. 2004. *Membumikan Al Qur'an*. Bandung: Mizan.

(http : //file.upi.edu/Direktori/ FPMIPA/JUR ._PEND. _MATEMATIKA /KHUSNUL_NOVIANIGSIH diakses 31 Maret 2011).

Wallis, W. D., Baskoro, Edy T., Miller, and Slamin. Edge-Magic Total Labeling. *Australian Journal of Combinatorics Volume 22* (2000) 1-15.

Wilson, R. J and Watkins,J. J. 1992. *Graf Pengantar satu dan dua*. Surabaya: University Press IKIP Surabaya.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir, Niswatin, A. Nilna, Framelia, N. Fifi. 2009. *Teori Graf*. Malang:UIN-MALANG PRESS.

Chartrand, G. dan Lesniak, L. 1986. *Graph and Digraph 2nd Edition.* California: Wadsworth. Inc.

Chartrand, Gary and Oellermann, Ortrud R. 1993. Applied and Algoritmic Graph Theory. Canada: Mc Graw-Hill Inc

Dwi Astuti, Yuni. 2006. *Logika dan Algoritma*. *Pohon (Tree).* (Online:http:/www.yuni_dwi.staff.gunadarma.ac.id diakses 12 April 2011).

Kurniawan, Haris. 2009. Spectrum Graf Komplit (Kn) dengan $n \geq 2$ dan $n \in N$. UIN Maulana Malik Ibrahim Malang: Skripsi, tidak diterbitkan.

Purwanto. 1997. *Matematika Diskrit*. Malang: IKIP MALANG.

Quthb, Sayyid. 2008. *Tafsir Fi Zhilali Qur'an. Jilid 2.* Bandung: Gema Insani Press

-------------------------- *Tafsir Fi Zhilali Qur'an. Jilid 10.* Bandung: Gema Insani Press

Rinaldi, Munir. 2005. Matematika Diskrit. Bandung:Informatika Bandung.

Shihab, Quraysh. 2004. *Membumikan Al Qur'an*. Bandung: Mizan.

(http : //file.upi.edu/Direktori/ FPMIPA/JUR ._PEND. _MATEMATIKA /KHUSNUL_NOVIANIGSIH diakses 31 Maret 2011).

Wallis, W. D., Baskoro, Edy T., Miller, and Slamin. Edge-Magic Total Labeling. *Australian Journal of Combinatorics Volume 22* (2000) 1-15.

Wilson, R. J and Watkins,J. J. 1992. *Graf Pengantar satu dan dua*. Surabaya: University Press IKIP Surabaya.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN)
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang (0341)551345
Fax. (0341)572533

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama	**: Puspita Dyan Anggaraini**
NIM	**: 07610041**
Fakultas/ Jurusan	**: Sains Dan Teknologi/ Matematika**
Judul Skripsi	**: k-Defisiensi Titik dari Pohon Merentang Suatu Graf Terhubung**
Pembimbing I	**: Drs. H. Turmudi, M.Si**
Pembimbing II	**: Ach. Nashichuddin, M.A**

No	Tanggal	HAL	Tanda Tangan	
1	04 Juli 2011	Konsultasi Masalah	1.	
2	06 Juli 2011	Konsultasi BAB I		2.
3	13 Juli 2011	Revisi BAB I	3.	
4	19 Juli 2011	ACC BAB I dan Konsultasi BAB II		4.
5	27 Juli 2011	Revisi pertama BAB II	5.	
6	09 Agustus 2011	Revisi kedua BAB II		6.
7	11 Agustus 2011	ACC BAB II dan Konsultasi BAB III	7.	
8	12 Agustus 2011	Revisi pertama BAB III		8.
9	15 Agustus 2011	Revisi kedua BAB III	9.	
10	16 Agustus 2011	ACC BAB III dan Konsultasi BAB IV		10.
11	07 Juli 2011	Konsultasi Keagamaan	11.	
12	12 Agustus 2011	Revisi Bab II dan III		12.
13	18 Agustus 2011	ACC Keagamaan	13.	
14	18 Agustus 2011	ACC BAB IV		14.
15	19 Agustus 2011	ACC Keseluruhan	15.	

Malang, 19 Agustus 2011
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG