

**ANALISIS PERSAMAAN SAINT VENANT 2D UNTUK MODEL
GELOMBANG PERAIRAN DANGKAL DENGAN MASALAH NILAI
AWAL DAN MASALAH NILAI BATAS**

SKRIPSI

Oleh:

DEWI ERLA MAHMUDAH

NIM. 07610038



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2011**

**ANALISIS PERSAMAAN SAINT VENANT 2D UNTUK MODEL
GELOMBANG PERAIRAN DANGKAL DENGAN MASALAH NILAI
AWAL DAN MASALAH NILAI BATAS**

SKRIPSI

Diajukan kepada:

Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang

Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam

Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:

DEWI ERLA MAHMUDAH

NIM. 07610038

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG**

2011

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Dewi Erla Mahmudah

NIM : 07610038

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 4 Februari 2011
Yang membuat pernyataan

Dewi Erla Mahmudah
NIM. 07610038

**ANALISIS PERSAMAAN SAINT VENANT 2D UNTUK MODEL
GELOMBANG PERAIRAN DANGKAL DENGAN MASALAH NILAI
AWAL DAN MASALAH NILAI BATAS**

SKRIPSI

Oleh:

DEWI ERLA MAHMUDAH

NIM. 07610038

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji:

Tanggal: 4 Februari 2011

Pembimbing I,

Pembimbing II,

Ari Kusumastuti, M.Pd
NIP. 19770521 200501 2 004

Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag
NIP. 19720420 200212 1 003

Mengetahui,

Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd

NIP. 19751006 200312 1 001

KATA PENGANTAR

Bismillahirrohmaanirrohiim

Alhamdulillahirobbil'alamiin... Tiada kata yang lebih pantas yang dapat penulis ungkapkan selain puji syukur ke hadirat Allah S.W.T yang telah memberikan rahmat, karunia dan Ridho-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini tepat pada waktunya. Shalawat serta salam semoga senantiasa terlantunkan kepada Nabi Muhammad s.a.w yang telah membimbing kita ke jalan yang lurus dan jalan yang diridhoi-Nya yakni agama Islam.

Berkat rahmat Allah S.W.T dan dengan bantuan, bimbingan juga dorongan dari berbagai pihak, maka penulis mengucapkan banyak terima kasih serta ucapan doa, semoga Allah SWT membalas semua kebaikan dan menyinari jalan yang diridhoi-Nya, khususnya kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku Rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, S.U, D.Sc selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.

4. Ari Kusumastuti, S.Si M.Pd, sebagai pembimbing dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Atas bimbingan, arahan, saran, motivasi dan kesabarannya, sehingga penulis dapat menyelesaikan ini dengan baik, penulis sampaikan *Jazakumullah Ahsanal Jaza'*.
5. Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag selaku pembimbing penulis dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Atas bimbingan, arahan, saran, motivasi dan kesabarannya, sehingga penulis dapat menyelesaikan ini dengan baik, penulis sampaikan *Jazakumullah Ahsanal Jaza'*.
6. Seluruh dosen Fakultas Sains dan Teknologi UIN Maulana Malik Ibrahim Malang, yang telah mendidik, membimbing, mengajarkan dan mencurahkan ilmu-ilmunya kepada penulis.
7. Ibunda Siti Maria Ulfa dan ayahanda M. Thosim tercinta, yang telah mencurahkan cinta dan kasih-sayang teriring do'a, motivasi, dan materi, sehingga penulis selalu optimis dalam menggapai kesuksesan hidup.
8. Kakak tersayang, Siti Rahmawati dan Amma M. yang telah memberikan dukungan, doa dan motivasi bagi penulis.
9. Teman-teman terbaik dan juga sebagai partner kerja, Fitriyanti Rumfot dan Silva Ahmad Adini (atas dukungan dan semangat yang telah diberikan) dan seluruh teman-teman Jurusan Matematika khususnya angkatan 2007 yang berjuang bersama-sama untuk mencapai kesuksesan yang diimpikan. Terimakasih atas segala pengalaman berharga dan kenangan terindah yang telah terukir.

10. Sahabat-sahabat, Anis Rofi Hidayah, Dwi Mar'atun Solihah, Isna F.Z. dan Intan Martha Kumalasari yang selalu ada.

11. Muhammad Zidny Naf'an yang selalu memberi dukungan dan semangat dalam perjalanan hidup dan kepada semua pihak yang telah membantu dalam penyelesaian skripsi ini, yang tidak bisa disebutkan satu per satu.

Semoga karya ilmiah yang berbentuk skripsi ini dapat bermanfaat dan berguna. Akhirul kalam semoga Allah berkenan membalas kebaikan kita semua.

Amin ya Robbal 'Alamiin....

Alhamdulillahirobbil Alamin

Malang, 4 Februari 2011

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	
HALAMAN MOTTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR	i
DAFTAR ISI.....	iv
DAFTAR GAMBAR	vi
DAFTAR SIMBOL.....	vii
DAFTAR LAMPIRAN.....	viii
ABSTRAK	ix
ABSTRACT	x
 BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
.....	
1.2 Rumusan Masalah	7
1.3 Tujuan Penelitian	7
1.4 Batasan Masalah	7
1.5 Manfaat Penelitian	7
1.6 Sistematika Penulisan	8
 BAB II KAJIAN TEORI	
2.1 Persamaan Diferensial Parsial.....	10
2.2 Persamaan Diferensial Parsial Linear dan Tak Linear.....	13

2.3	Orde Persamaan Diferensial Parsial.....	14
2.4	Metode Pemisahan Variabel	15
2.5	Masalah Nilai Batas	16
2.6	Tipe-tipe Persamaan Diferensial Parsial	21
2.7	Metode Pemisahan Variabel Persamaan Diferensial Parsial Nonlinear.....	23
2.8	Metode Pemisahan Variabel Fungsional.....	37
2.9	Persamaan Linear Homogen dengan Koefisien Konstan.....	40
2.10	Konstruksi Persamaan Saint Venant 2D	42
2.11	Kajian Batas dalam Al-Quran	67
 BAB III PEMBAHASAN		
3.1	Solusi Partikular Masalah Nilai Awal Persamaan Saint Venant 2D	74
3.2	Solusi Masalah Nilai Batas Persamaan Saint Venant 2D di x Momentum.....	82
3.3	Solusi Masalah Nilai Batas Persamaan Saint Venant 2D di y Momentum	95
3.4	Integrasi Matematika dan Al-Quran.....	113
 BAB IV PENUTUP		
4.1	Kesimpulan	117
4.2	Saran.....	119

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Skema Umum untuk Mengkonstruksi Solusi Pemisahan secara Umum dengan <i>Splitting Method</i>	32
Gambar 2.2 Penampang Gelombang Perairan Dangkal	42
Gambar 2.3 Ilustrasi Tekanan Atmosfer dan Gaya Gravitasi.....	49
Gambar 2.4 Kondisi Tekanan di Permukaan Perairan.....	51
Gambar 2.5 Kondisi Tekanan di Dasar Perairan	53
Gambar 2.6 Pergerakan Partikel pada Batas Kiri dan Kanan.....	54
Gambar 2.7 Pergerakan Partikel di x Momentum	57
Gambar 2.8 Pergerakan Partikel di y Momentum	62
Gambar 3.1 Grafik Solusi Analitik Saint Venant 2D pada MATLAB	113
Gambar 4.1 Grafik Solusi Analitik Saint Venant 2D pada MATLAB	119

DAFTAR SIMBOL

Simbol-simbol yang digunakan dalam Skripsi ini adalah:

U_1/U_2 : rata-rata kecepatan di x momentum

V_1/V_2 : rata-rata kecepatan di y momentum

u^s/v^s : kecepatan di permukaan perairan

u^b/v^b : kecepatan di dasar perairan

ν : viskositas

g : gaya gravitasi

B : jarak sungai dari kiri ke kanan

$\eta(x, y, t)$: fungsi di permukaan perairan

$-h(x, y, t)$: fungsi di dasar perairan

$$\partial_x w = \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\partial_t w = \frac{\partial w}{\partial t}$$

$$\partial_{xx} w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\partial_{tt} w = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

$$f'_x = \frac{df}{dx}$$

$$f''_{xx} = \frac{d^2 f}{dx^2}$$

$$f'''_{xxx} = \frac{d^3 f}{dx^3}$$

$$f^n_x = \frac{d^n f}{dx^n}$$

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1. Tabel Viskositas Air dan Udara..... 122



ABSTRAK

Mahmudah, Dewi Erla. 2011. Analisis Persamaan Saint Venant 2D untuk Model Gelombang Perairan Dangkal dengan Masalah Nilai Awal dan Masalah Nilai Batas. Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Ari Kusumastuti, M.Pd (II) Dr. Munirul Abidin, M.Ag

Kata Kunci: Persamaan Saint Venant 2D, Masalah Nilai Awal, Masalah Nilai Batas, PDP Nonlinear, fluida air.

Persamaan Saint Venant adalah persamaan diferensial parsial nonlinear yang dapat diimplementasikan pada kasus aliran fluida. Dalam penelitian ini fluida yang dipilih adalah air (*water*). Penelitian perairan yang dimaksud adalah perairan yang diasumsikan sebagai perairan dangkal (*shallow water*) dengan batas-batas dalam dua dimensi. Pemecahan secara analitik dipilih dalam penelitian ini dengan menentukan solusi masalah nilai awal dan solusi masalah nilai batas di boundary $0 \leq x \leq L$ dan $0 \leq y \leq W$. Solusi masalah nilai awal dikerjakan dengan menggunakan *d'Alembert solution*. Sedangkan solusi masalah nilai batas dikerjakan dengan menggunakan *splitting method* dengan tahapan-tahapannya adalah dari persamaan Saint Venant 2D didefinisikan solusi pemisahan persamaan fungsional sehingga menghasilkan persamaan diferensial biasa dan selanjutnya dikerjakan dengan pemisahan variabel untuk mendapatkan solusi $U(x, t)$ dan $V(y, t)$. Selanjutnya hasil penyelesaian masalah nilai awal dan nilai batas dapat diimplementasikan pada data DAS yang dimiliki.

ABSTRACT

Mahmudah, Dewi Erla. 2011. Analysis of Saint Venant Equations for the 2D Shallow Water Wave Models with Initial Value Problem and Boundary Value Problems. Thesis. Mathematics Department, Faculty of Science and Technology, State Islamic University Maulana Malik Ibrahim of Malang. Advisor: (I) Ari Kusumastuti, M.Pd (II) Dr. Munirul Abidin, M.Ag

Key Words: 2D Saint Venant Equation, Initial Value Problem, Boundary Value Problems, Non-linier PDE, Fluid Water.

Saint Venant equations are nonlinear partial differential equations applicable for fluid flow. In this thesis, selected fluid is water. Research of waters in question is assume as shallow water flow in two dimensions. Exact solutions selected in this study by identifying the solution problem of initial value and boundary value in the boundary $0 \leq x \leq L$ dan $0 \leq y \leq W$. Solution of initial value problems is performed using *d'Alembert solution*. While the solution of boundary value problems is performed using *splitting method* with the steps are defined the separable fungtional solutions from Saint Venant equation in order to get ordinary differential equation than it is work in separating variable to get $U(x, t)$ and $V(y, t)$ solutions. The results of the initial and boundary value problem can be implemented in watersheds of property data.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Suatu kajian model matematik adalah model yang menterjemahkan fakta atau fenomena dalam bentuk yang sistematis dan logis dan berisi variabel-variabel yang bersifat sampel. Model ini diuraikan dalam bentuk persamaan diferensial parsial atau sistem persamaan diferensial parsial yang mungkin merupakan gambaran miniatur untuk masalah atau fakta yang sesungguhnya. Hal ini karena tidak mungkin diterjemahkan keadaan secara keseluruhan, tetapi yang mampu dilakukan adalah membuat konstruksi sampel dari masalah. Hal ini karena sangat sesuai dengan firman Allah dalam Q. S. Al-Baqarah ayat 286 sebagai berikut:

لَا يُكَلِّفُ اللَّهُ نَفْسًا إِلَّا وُسْعَهَا ۚ لَهَا مَا كَسَبَتْ وَعَلَيْهَا مَا اكْتَسَبَتْ ۗ رَبَّنَا لَا تُؤَاخِذْنَا إِن نَّسِينَا أَوْ
أَخْطَأْنَا ۚ رَبَّنَا وَلَا تَحْمِلْ عَلَيْنَا إَصْرًا كَمَا حَمَلْتَهُ عَلَى الَّذِينَ مِن قَبْلِنَا ۚ رَبَّنَا وَلَا تُحَمِّلْنَا مَا لَا
طَاقَةَ لَنَا بِهِ ۗ وَاعْفُ عَنَّا وَارْحَمْنَا ۚ أَنْتَ مَوْلَانَا فَانصُرْنَا عَلَى الْقَوْمِ الْكَافِرِينَ



Artinya:

Allah tidak membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya. Ia mendapat pahala (dari kebajikan) yang diusahakannya dan ia mendapat siksa (dari kejahatan) yang dikerjakannya. (mereka berdoa): "Ya Tuhan kami, janganlah Engkau hukum kami jika kami lupa atau kami tersalah. Ya Tuhan kami, janganlah Engkau bebaskan kepada kami beban yang berat sebagaimana Engkau bebaskan kepada orang-orang sebelum kami. Ya Tuhan kami, janganlah Engkau pikulkan kepada kami apa yang tak sanggup kami memikulnya. Beri ma'aflah kami; ampunilah

kami; dan rahmatilah kami. Engkaulah penolong kami, Maka tolonglah kami terhadap kaum yang kafir."

Ayat tersebut menyatakan bahwa Allah S.W.T tidak membebani para hamba-Nya melainkan sesuai dengan batas kemampuan mereka. Allah S.W.T menciptakan manusia berbeda-beda. Satu cerdas dan berpotensi besar, salah satunya kurang cerdas dan berpotensi sedikit, satu kuat, satunya lemah dan kurus. Harus diterima bahwa sebagian dari perbedaan-perbedaan ini adalah kelaziman penciptaan. Agama Islam adalah agama yang tidak membebani manusia dengan beban yang berat dan sukar. Mudah, ringan dan tidak sempit adalah asas pokok dari agama Islam. Melalui ayat ini Allah S.W.T menyampaikan pada manusia bahwa seseorang dibebani hanyalah sesuai dengan batas kesanggupannya.

Perlu diketahui bahwa Al-Quran merupakan kalam Allah S.W.T yang benar tanpa ada cacat di dalamnya. Dalam penyampaian, Allah S.W.T tidak menjelaskan suatu hal secara rinci. Hal tersebut dimaksudkan agar manusia mempelajari dan mencari tahu apa isi kandungan Al-Quran karena Al-Quran menjadi dasar manusia dalam menjalani hidupnya. Dalam mempelajari isi kandungan Al-Quran, terdapat batasan-batasan tentang apa yang perlu manusia ketahui dan yang tidak perlu diketahui manusia. Itu merupakan hak paten Allah karena sesungguhnya Allah Maha Besar dan Maha mengetahui segala sesuatu. Hal ini terdapat dalam firman Allah Q. S. Al-Isra' ayat 85, sebagai berikut:

وَيَسْأَلُونَكَ عَنِ الرُّوحِ قُلِ الرُّوحُ مِنْ أَمْرِ رَبِّي وَمَا أُوتِيتُمْ مِنَ الْعِلْمِ إِلَّا قَلِيلًا ﴿٨٥﴾

Artinya:

Dan mereka bertanya kepadamu tentang roh. Katakanlah: "Roh itu termasuk urusan Tuhan-ku, dan tidaklah kamu diberi pengetahuan melainkan sedikit".

Ayat di atas merupakan contoh firman Allah yang menyatakan bahwa manusia tidak diperbolehkan mengkaji dan mempertanyakan roh secara mendalam karena roh merupakan rahasia Allah dan hanya Allah yang benar-benar mengetahui. Sedangkan manusia cukup diberi sedikit pengetahuan mengenai roh tersebut.

Dari paparan di atas, memberikan motivasi pada manusia bahwa dalam mempelajari sesuatu tentang ayat Allah itu sangat dianjurkan, tetapi tetap harus pada batasan-batasan yang diberikan Allah S.W.T.

Q. S. Al-Baqarah ayat 286 dan Q. S. Al-Isra' ayat 85 ini menjadi inspirasi bagi penulis untuk mengkaji ilmu matematika masalah persamaan diferensial parsial yang menggunakan nilai awal dan nilai batas pada suatu model aliran fluida. Dalam skripsi ini digunakan model persamaan diferensial parsial Saint Venant 2D yang sesuai dalam menterjemahkan masalah aliran fluida berbentuk air (*water*). Persamaan Saint Venant didapatkan dari penurunan persamaan Navier-Stokes. Persamaan ini dikerjakan pada perairan dangkal 2D dan diturunkan dengan asumsi bahwa distribusi tekanan adalah hidrostatik. Selanjutnya objek perairan di partisi dalam bentuk layer dengan asumsi bahwa panjang sungai sebagai sumbu x dan kedalaman sungai sebagai sumbu y . Akhirnya, persamaan-persamaan tersebut akan diintegrasikan di seluruh

bagian dengan menggunakan kondisi batas (*boundary conditions*) untuk mendapatkan persamaan Saint Venant (Aldrighetti, 2007:1).

Masalah aliran fluida umumnya melibatkan prediksi distribusi kuantitas yang berbeda, yaitu tekanan fluida, temperatur, kepadatan dan kecepatan aliran. Dengan tujuan ini, penulis melibatkan enam persamaan dasar, yaitu persamaan kontinuitas berdasarkan hukum kekekalan massa, persamaan momentum bersama tiga arah orthogonal (berasal dari hukum kedua Newton tentang gerak), Persamaan Energi termal berasal dari hukum pertama termodinamika, persamaan keadaan, yang merupakan hubungan empiris antara tekanan fluida, temperatur dan kepadatan (Aldrighetti, 2007:2).

Masalah aliran saluran tidak membutuhkan dua persamaan terakhir dan karenanya dapat diselesaikan dengan persamaan kontinuitas dan persamaan momentum dengan asumsi suhu dan kerapatan adalah konstan. Selain itu, asumsi yang digunakan dalam persamaan Saint Venant mempunyai kecepatan seragam, penampang dan tingkat air diwakili oleh garis horizontal, aliran lengkungan kecil dan percepatan vertikal diabaikan sehingga tekanannya adalah hidrostatik, pengaruh pergeseran dan turbulensi dapat dipertanggungjawabkan melalui hukum perlawanan analog untuk aliran saluran dalam keadaan tenang (Aldrighetti, 2007:3).

Asumsi fluida yang dipilih dalam penelitian ini adalah perairan dangkal (*shallow water*). Yang mana perairan dangkal yang dimaksud adalah perairan yang mempunyai *surface* (batas permukaan) dan *bottom* (batas dasar) (Zauderer, 2006).

Dalam teori fisika, terdapat sifat-sifat fluida yang penting, salah satunya yaitu kekentalan (*viscosity*). Kekentalan merupakan hasil dari gaya-gaya antara molekul yang timbul pada saat lapisan-lapisan fluida berusaha menggeser satu dengan yang lainnya. Koefisien keseimbangan disebut kekentalan dinamik, sedangkan kekentalan kinematis merupakan perbandingan antara koefisien kekentalan dinamik dengan kepadatan. Pada fluida tegangan selalu disebut komposisi yang disebut tekanan (Orianto, 1989:5). Jonas M.K. Dake (1985) dalam bukunya yang berjudul “Hidrolika Teknik” menyebutkan bahwa aliran laminar adalah suatu aliran yang teratur di mana partikel-partikel fluida bergerak sepanjang jalur yang halus pada lapisan-lapisan dimana lapisan yang satu meluncur dengan halus pada lapisan lain yang berdekatan. Sedangkan aliran turbulen, partikel-partikel fluida bergerak dengan arah yang tidak beraturan yang menyebabkan perubahan momentum, massa dan energi dari satu bagian fluida terhadap yang lain.

Suatu aliran fluida dapat juga berupa aliran tetap (*steady flow*) dan aliran tidak tetap (*unsteady flow*) yang mana aliran tetap terjadi apabila kecepatan tidak berubah terhadap waktu, sedangkan apabila kecepatan aliran tersebut berubah terhadap waktu maka akan menjadi aliran tidak tetap. Aliran tetap atau tidak tetap dapat dibedakan sebagai aliran seragam dan tidak seragam, apabila:

1. Suatu debit fluida yang tetap mengalir di sepanjang alur terhadap luas penampang yang tetap disebut aliran tetap dan seragam (*steady uniform flow*) tipe aliran ini yang paling banyak digunakan dalam hidrolika fluida berbentuk air (*water*);

2. Suatu debit yang besarnya sama dan tetap melalui suatu alur terhadap luas penampang yang semakin bertambah besar atau berkurang disebut aliran tetap dan tidak seragam (*steady non uniform flow*);
3. Suatu debit sungai yang bertambah atau berkurang dalam hubungannya dengan waktu dan mengalir pada suatu penampang sungai yang tetap adalah merupakan aliran tidak tetap dan seragam (*unsteady uniform flow*);
4. Suatu debit sungai yang bertambah atau berkurang dalam hubungannya dengan waktu dan mengalir pada suatu penampang yang berubah adalah merupakan aliran tidak tetap dan tidak seragam (*unsteady non uniform flow*).

(Soewarno, 1991)

Penelitian pada model fluida adalah kajian yang sangat menarik karena sangat krusial. Hal ini mengingat masalah-masalah fluida dan pembahasan atas pergerakan fluida yang pada umumnya melibatkan gelombang fluida dapat menjawab berbagai permasalahan yang penting. Sebagai contoh dengan adanya deteksi fluida maka dapat diterjemahkan redaman hujan, dan lain-lain.

Dari paparan di atas, penelitian ini menjadi penting untuk dilakukan karena hasil penyelesaian masalah nilai awal dan nilai batas dapat diimplementasikan pada data yang dimiliki. Dengan demikian penulis menuangkan gagasan dalam skripsi yang berjudul *Analisis Persamaan Saint Venant 2D untuk Model Gelombang Perairan Dangkal dengan Masalah Nilai Awal dan Masalah Nilai Batas*.

1.2 Rumusan Masalah

Berangkat dari uraian di atas, maka dalam skripsi ini difokuskan pada masalah bagaimana analisis persamaan Saint Venant 2D untuk memodelkan penampang gelombang dengan melibatkan masalah nilai awal dan masalah nilai batas di perairan dangkal?

1.3 Tujuan

Tujuan dalam skripsi ini adalah untuk menganalisis persamaan Saint Venant 2D untuk memodelkan penampang gelombang yang melibatkan masalah nilai awal dan masalah nilai batasnya pada perairan dangkal.

1.4 Batasan Masalah

1. Persamaan yang digunakan adalah persamaan Saint Venant 2D (panjang sungai sebagai sumbu x , dan kedalaman sungai sebagai sumbu y).
2. Model dikaji pada asumsi perairan dangkal.
3. Solusi analitik yang dipilih adalah dengan bentuk linear yaitu $w = F(y, t)x + G(y, t)$ untuk x momentum, dan $w = F(x, t)y + G(x, t)$ untuk y momentum persamaan Saint Venant 2D.

1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penulisan skripsi ini adalah:

1. Bagi penulis, sebagai tambahan informasi dan wawasan pengetahuan mengenai persamaan diferensial parsial, khususnya tentang persamaan Saint Venant 2D dengan masalah nilai awal dan masalah nilai batas.

2. Bagi pemerhati matematika, sebagai tambahan pengetahuan bidang matematika, khususnya penyelesaian persamaan Saint Venant 2D dengan masalah nilai awal dan masalah nilai batas.
3. Bagi lembaga UIN Maulana Malik Ibrahim Malang, untuk bahan kepustakaan yang dijadikan sarana pengembangan wawasan keilmuan khususnya di jurusan matematika untuk mata kuliah persamaan diferensial parsial.

1.6 Sistematika Penulisan

Untuk lebih mudah memahami skripsi ini, maka penulis menggunakan sistematika yang terdiri dari 4 bab. Tiap bab terbagi menjadi beberapa sub bab dengan rumusan sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN

BAB I memaparkan latar belakang, rumusan masalah, tujuan, batasan masalah, manfaat penelitian dan sistematika penulisan.

BAB II KAJIAN TEORI

Kajian teori yang berisi konsep, definisi, dan konstruksi persamaan Saint Venant 2D yang digunakan sebagai dasar teori pada pembahasan.

BAB III PEMBAHASAN

Pembahasan berisi tentang bagaimana analisis persamaan Saint Venant 2D untuk model gelombang perairan dangkal dengan masalah nilai awal dan masalah nilai batas.

BAB IV PENUTUP

Bagian ini memaparkan hasil pembahasan dan diambil kesimpulan serta saran untuk penelitian selanjutnya.



BAB II

KAJIAN TEORI

2.1 Persamaan Diferensial Parsial

Persamaan diferensial parsial dapat dikatakan sebagai persamaan yang mengandung satu atau lebih turunan-turunan parsial. Persamaan tersebut merupakan laju perubahan terhadap dua atau lebih variabel bebas, yang dikatakan dengan waktu dan jarak (ruang) (Triatmojo, 2002:199).

Persamaan diferensial parsial (PDP) adalah suatu persamaan yang mengandung dua atau lebih derivatif parsial untuk suatu fungsi dari dua atau lebih variabel bebas. Tingkat derivatif parsial tertinggi merupakan tingkat persamaan diferensial parsial tersebut. Sedangkan pangkat tertinggi dari order tertinggi merupakan derajat dari persamaan diferensial tersebut (Soeharjo, 1996).

Ketika ada sebuah fungsi $w(x, y)$ yang bergantung pada dua variabel bebas x dan y , dan jika diturunkan terhadap x maka y bernilai konstan dan jika diturunkan terhadap y , x bernilai konstan. Adapun notasi pelambangannya secara berturut – urut adalah $\frac{\partial w}{\partial x}$ dan $\frac{\partial w}{\partial y}$, dengan simbol ∂ menunjukkan turunan parsialnya. Notasi itu dapat dipakai untuk pengerjaan turunan orde dua. Turunan terhadap x dari $\frac{\partial w}{\partial x}$ dilambangkan dengan $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ dan turunan terhadap y dari $\frac{\partial w}{\partial x}$ adalah $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ dan seterusnya. Turunan parsial x dapat dituliskan berupa w_x (Levine, 1997:4).

Dalam persamaan diferensial parsial muncul turunan parsial yang menyatakan hukum Fisika tertentu. Misalnya, persamaan difensial parsial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

yang menggambarkan gerak bentuk gelombang, dapat berbentuk gelombang samudera, gelombang suara, gelombang cahaya dan gelombang yang lainnya.

Andaikan bahwa f adalah suatu fungsi dua peubah x dan y . Jika y konstan, misalkan $y = y_0$, maka $f(x, y_0)$ menjadi fungsi satu peubah x . Turunannya di $x = x_0$ disebut turunan parsial f terhadap x di (x_0, y_0) . Jadi,

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

Demikian pula, turunan parsial f terhadap y di (x_0, y_0) dinyatakan oleh $f_y(x_0, y_0)$ dan dituliskan sebagai

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

Daripada menghitung $f_x(x_0, y_0)$ dan $f_y(x_0, y_0)$ secara langsung dari definisi di atas, secara khas dicari $f_x(x, y)$ dan $f_y(x, y)$ dengan menggunakan aturan baku untuk turunan kemudian disubstitusikan $x = x_0$ dan $y = y_0$ (Purcell & Varberg, 1987:251). Notasi untuk turunan parsial, jika $z = f(x, y)$ maka,

$$f_x(x, y) = f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = f_1 = D_1 f = D_x f$$

$$f_y(x, y) = f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = f_2 = D_2 f = D_y f$$

$$f_x(x_0, y_0) = \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)}$$

$$f_y(x_0, y_0) = \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)}$$

Dari notasi turunan tersebut di atas, maka dapat diketahui turunan dari turunan parsial dari $z = f(x, y)$ yaitu:

1. Untuk mencari f_x' pandang y sebagai konstanta dan diferensialkan $f(x, y)$ terhadap x
2. Untuk mencari f_y' pandang x sebagai konstanta dan diferensialkan $f(x, y)$ terhadap y

Untuk turunan yang lebih tinggi, jika f adalah fungsi dari dua variabel, maka turunan parsialnya f_x dan f_y juga fungsi dua variabel. Sehingga, dapat ditinjau turunan parsial dari $(f_x)_x', (f_x)_y', (f_y)_x'$ dan $(f_y)_y'$ yang disebut turunan parsial kedua dari f . Jika $z = f(x, y)$, dengan menggunakan notasi tersebut maka,

$$(f_x)_x = f_{xx} = f_{11} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$(f_x)_y = f_{xy} = f_{12} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

$$(f_y)_x = f_{yx} = f_{21} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

$$(f_y)_y = f_{yy} = f_{22} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

Dari notasi f_{xy} (atau $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$) berarti bahwa dideferensialkan terhadap x kemudian terhadap y . Sedangkan dalam menghitung f_{yx} urutannya dibalik (Stewart, 2003).

2.2 Persamaan Diferensial Parsial Linear dan Tak Linear

Persamaan diferensial (PD) diklasifikasikan menjadi PD linear dan tak linear. PD linear orde- n dengan variabel terikat y dan variabel bebas x yaitu suatu persamaan yang bisa dinyatakan sebagai:

$$\sum_{i=0}^n a_i(x) \frac{d^i y}{dx^i} = b(x), a_n(x) \neq 0$$

PD di atas dikatakan linear jika mempunyai ciri-ciri yaitu variabel terikat y dan derivatifnya hanya berderajat satu, tidak ada perkalian antara y dan derivatifnya serta antara derivatif, dan variabel terikat y bukan fungsi transenden (Baiduri, 2002:4). Sedangkan PD nonlinear adalah persamaan diferensial yang bukan persamaan linear (Ross, 1984:5).

Bentuk umum PDP linear tingkat dua dengan dua variabel bebas adalah

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu + G = 0 \quad (2.1)$$

dengan A, B, C, D, E, F , dan G diberikan oleh fungsi x dan y . Dalam kasus tertentu fungsi tersebut merupakan fungsi konstant (Kaplan, 1963). Persamaan (2.1) merupakan PDP linear. Sedangkan, PDP orde kedua dalam dua variabel yang tidak memenuhi persamaan (2.1) adalah PDP tidak linear, perhatikan contoh berikut:

- a. $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (Linear)
- b. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u = \sin x$ (Linear)
- c. $u \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + u = 1$ (Tidak Linear)
- d. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u^2 = 0$ (Tidak Linear)

2.3 Orde Persamaan Diferensial Parsial

Orde suatu persamaan diferensial adalah orde turunan tertinggi yang muncul dalam persamaan tersebut (Stewart, 2003: 5). Persamaan diferensial parsial dengan dua variabel bebas dikatakan berorde satu jika turunan tertinggi dari variabel terikatnya adalah satu. Bentuk umum persamaan diferensial parsial linear dan non linear berorde satu adalah:

$$a(x, t) \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} + b(x, t) \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = c(x, t)v(x, t) + d(x, t) \quad (2.2)$$

dengan a, b, c , dan d adalah fungsi dan di setiap titik (x, t) merupakan vektor $[a(x, t), b(x, t)]$ yang terdefinisi dan tidak nol. Persamaan (2.2) dapat ditulis

$$F(x, t, v(x, t), v_x(x, t), v_t(x, t)) = 0$$

dengan $v_x(x, t) = \frac{\partial v(x, t)}{\partial x}$ dan $v_t(x, t) = \frac{\partial v(x, t)}{\partial t}$ (Zauderer, 2006: 63).

Demikian halnya dengan persamaan diferensial parsial dengan dua variabel bebas dikatakan berorde dua, tiga, empat hingga berorde m jika turunan tertinggi dari

variabel terikatnya adalah dua, tiga, empat atau m . Bentuk umum persamaan diferensial parsial linear dan non linear berorde dua, tiga, empat dan berorde n

$$\begin{aligned}
 \text{a. } & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu + d = 0 \\
 \text{b. } & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ijk} \frac{\partial^3 u}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \\
 & \sum_{i=1}^n c_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + du + e = 0 \\
 \text{c. } & \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \sum_{i_3=1}^n \sum_{i_4=1}^n a_{i_1 i_2 i_3 i_4} \frac{\partial^4 u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \partial x_{i_3} \partial x_{i_4}} + \\
 & \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \sum_{i_3=1}^n b_{i_1 i_2 i_3} \frac{\partial^3 u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \partial x_{i_3}} + \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n c_{i_1 i_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}} + \\
 & \sum_{i_1=1}^n d_{i_1} \frac{\partial u}{\partial x_{i_1}} + eu + f = 0 \\
 \text{d. } & \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \dots \sum_{i_m=1}^n \sum_{i_4=1}^n a_{i_1, i_2, i_3, \dots, i_m} \frac{\partial^m u}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_m}} + \dots = 0
 \end{aligned}$$

(Zauderer, 2006: 137).

2.4 Metode Pemisahan Variabel

Metode pemisahan variabel adalah teknik klasik yang efektif untuk menyelesaikan beberapa tipe dari persamaan diferensial parsial. Misalnya saja solusi $u(x, t)$ untuk persamaan diferensial parsial sebagai kombinasi linear tak hingga fungsi komponen sederhana $u_n(x, t)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ yang juga memenuhi persamaan dan kondisi batasnya (Nagle & Saff, 1993:536).

Untuk menentukan solusi komponen $u_n(x, t)$, pertama kita misalkan $u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t)$. Selanjutnya dilakukan proses substitusi dari bentuk ini ke

persamaan diferensial dan dengan menggunakan kondisi batasnya yang nantinya menghasilkan dua persamaan diferensial biasa untuk fungsi $X_n(x)$ dan $T_n(t)$. Dengan cara ini akan dihasilkan solusi untuk persamaan diferensial parsial (Nagle, 1993:536).

2.5 Masalah Nilai Batas

Masalah nilai batas (MNB) melibatkan suatu persamaan diferensial parsial dan semua penyelesaiannya yang memenuhi syarat yang dinamakan syarat batas (Spiegel, 1983: 276).

Misal persamaan diferensial linear orde dua

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \quad (2.3)$$

dengan koefisien-koefisien $a_2(x), a_1(x), a_0(x)$ dan fungsi $f(x)$ merupakan fungsi-fungsi yang kontinu di dalam selang $a \leq x \leq b$ dengan $a_2(x) \neq 0$ di dalam selang ini. Menentukan penyelesaian $y(x)$ dari persamaan differensial (2.3) pada sebuah titik $x = x_0$ di dalam selang $a \leq x \leq b$ dan memenuhi dua syarat awal yang diberikan

$$y(x_0) = y_0 \text{ dan } y'(x_0) = y_1 \quad (2.4)$$

yang merupakan suatu *masalah nilai awal* (MNA). Dalam banyak MNA variabel bebas x dari persamaan diferensial pada umumnya menyatakan waktu, x_0 menyatakan waktu awal dan y_0 dan y_1 menyatakan syarat awal. Bila variabel x bebas merupakan variabel yang menyatakan tempat (*space variabel*), maka mencari suatu

penyelesaian $y(x)$ dari persamaan diferensial yang memenuhi syarat pada titik akhir dari selang $a \leq x \leq b$

$$y(a) = A \text{ dan } y(b) = B \quad (2.5)$$

dengan A dan B dua buah konstanta, disebut *syarat batas*. Persamaan diferensial (2.3), bersama-sama dengan syarat batas (2.5), merupakan suatu *masalah nilai batas* (MNB). Bentuk dari syarat batas pada titik akhir dapat sangat berbeda-beda (Finzio dan Ladas, 1982: 244).

Ada beberapa bentuk khusus syarat batas yang digunakan dalam aplikasi, yaitu

$$\text{Separated} \quad : \quad a_1 y(a) + a_2 y'(a) = c_1, \quad b_1 y(b) + b_2 y'(b) = c_2,$$

$$\text{Dirichlet} \quad : \quad y(a) = c_1, \quad y(b) = c_2$$

$$\text{Neumann} \quad : \quad y'(a) = c_1, \quad y'(b) = c_2$$

$$\text{Periodic} \quad : \quad y(-T) = y(T), \quad y'(-T) = y'(T) \\ y(0) = y(2T), \quad y'(0) = y'(2T)$$

dengan periodenya adalah $2T$. Bentuk Dirichlet dan Neumann adalah syarat batas yang khusus digunakan pada masalah nilai batas (Nagle & Saff, 1996: 612).

Contoh:

Pandang persamaan

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \quad (2.6)$$

dengan *boundary condition*

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t > 0 \quad (2.7)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L \quad (2.8)$$

Misal

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

$$\text{Maka } \frac{\partial u}{\partial t} = X(x)T'(t) \text{ dan } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x)T(t). \quad (2.9)$$

Substitusi (2.9) ke persamaan (2.6) menghasilkan

$$X(x)T'(t) = \beta X''(x)T(t)$$

dan pemisahan variabelnya menghasilkan

$$\frac{T'(t)}{\beta T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Selanjutnya

$$\frac{T'(t)}{\beta T(t)} = K \text{ dan } \frac{X''(x)}{X(x)} = K$$

atau

$$T'(t) - \beta K T(t) = 0 \text{ dan } X''(x) - K X(x) = 0 \quad (2.10)$$

Karena persamaan (2.9) maka kondisi batas (2.7) menjadi

$$X(0)T(t) = 0 \text{ dan } X(L)T(t) = 0, \quad t > 0$$

$$\text{Karena } T(t) = 0, \quad t > 0 \text{ maka } u(x, t) \equiv 0 \text{ atau } X(0) = X(L) = 0 \quad (10)$$

Dengan mengombinasi *boundary condition* (2.8) dan persamaan (2.10) maka

$$X''(x) - K X(x) = 0, \quad X(0) = X(L) = 0 \quad (2.11)$$

Untuk menyelesaikan persamaan (2.11) maka dibawa ke bentuk persamaan diferensial biasa $r^2 - K = 0$.

Untuk penyelesaiannya maka terdapat tiga kasus,

Kasus 1: Jika $K > 0$, maka akar-akarnya adalah $\pm\sqrt{K}$. Maka solusi umum dari persamaan (2.11) adalah

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{K}x} + C_2 e^{-\sqrt{K}x}$$

Untuk menentukan C_1 dan C_2 maka dikombinasikan dengan *boundary condition* nya sehingga:

$$X(0) = C_1 + C_2 = 0$$

$$C_2 = -C_1$$

$$X(L) = C_1 e^{\sqrt{K}L} + C_2 e^{-\sqrt{K}L} = 0$$

$$C_1 (e^{\sqrt{K}L} - e^{-\sqrt{K}L}) = 0$$

$$C_1 (e^{2\sqrt{K}L} - 1) = 0$$

Karena $K > 0$ maka $(e^{2\sqrt{K}L} - 1) > 0$ sehingga $C_1 = C_2 = 0$, sehingga tidak ada solusi nontrivial untuk $K > 0$.

Kasus 2: Jika $K = 0$, maka akar-akarnya adalah kembar, $r = 0$. Maka solusi umum dari persamaan (2.11) adalah

$$X(x) = C_1 + C_2 x$$

Boundary condition pada persamaan (2.11) menghasilkan $C_1 = 0$ dan $C_1 + C_2L = 0$. Sehingga $C_1 = C_2 = 0$. Karena $K = 0$ maka tidak ada solusi nontrivial untuk persamaan (2.11).

Kasus 3: Jika $K < 0$, maka akar-akarnya adalah $\pm i\sqrt{-K}$. Maka solusi umum dari persamaan (2.11) adalah

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{-K}x + C_2 \sin \sqrt{-K}x$$

Karena *boundary condition* pada persamaan (2.11) maka menghasilkan

$$C_1 = 0$$

$$C_1 \cos \sqrt{-K}x + C_2 \sin \sqrt{-K}x = 0$$

$$C_2 \sin \sqrt{-K}x = 0$$

Maka $C_2 = 0$ atau $\sin \sqrt{-K}x = 0$. $\sin \sqrt{-K}x = 0$ hanya ketika $\sqrt{-K}x = n\pi$ atau $K = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$, dengan $n = 1, 2, 3, \dots$

Maka solusi nontrivial nya adalah

$$X_n(x) = a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

dengan a_n adalah konstan.

Karena kita punya $K = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ maka persamaan (2.10) menjadi

$$T'(t) + \beta \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 T(t) = 0$$

untuk setiap $n = 1, 2, 3, \dots$

Maka solusi umum nya adalah

$$T_n(t) = b_n e^{-\beta \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$$

Maka $u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) b_n e^{-\beta \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} = c_n e^{-\beta \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$

dengan c_n adalah konstan (Nagle & Saff, 1996:536-539).

2.6 Tipe-tipe Persamaan Diferensial Parsial

Pada tipe hiperbolik, ditentukan persamaan diferensial parsial homogen

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + Lu(x, t) = 0, \quad x \in G, \quad t > 0 \quad (2.12)$$

dengan kondisi batas

$$\alpha(x)u(x, t) + \beta(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial n} \Big|_{\partial G} = 0, \quad t > 0$$

$$\alpha_1 u(0, t) - \beta_1 u_x(0, t) = 0, \quad \alpha_2 u(l, t) + \beta_2 u_x(l, t) = 0, \quad t > 0$$

dan kondisi awal

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad x \in G.$$

Dengan memisalkan $u(x, t) = M(x)N(t)$, maka persamaan diferensial parsial di atas

menjadi bentuk $\frac{N''(t)}{N(t)} = -\frac{LM(x)}{\rho(x)M(x)}$. Selanjutnya dihasilkan $LM(x) = \lambda \rho(x)M(x)$ dan

dihasilkan pemisahan variabel dalam persamaan diferensial di atas, yaitu $N''(t) +$

$\lambda N(t) = 0$ (Zauderer, 2006:180-183).

Persamaan Hiperbola jika: $B^2 - 4AC > 0$

Contoh: Persamaan Gelombang

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Pada tipe parabolik, ditentukan persamaan diferensial parsial

$$\rho(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + Lu(x, t) = 0, \quad x \in G, \quad t > 0$$

dengan kondisi batas seperti pada tipe hiperbolik dan kondisi awal adalah

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in G$$

Dengan memisalkan $u(x, t) = M(x)N(t)$, maka persamaan diferensial parsial diatas menjadi bentuk $\frac{N'(t)}{N(t)} = -\frac{LM(x)}{\rho(x)M(x)}$. Selanjutnya dihasilkan $LM(x) = \lambda\rho(x)M(x)$ dan dihasilkan pemisahan variabel dalam persamaan diferensial diatas, yaitu $N'(t) + \lambda N(t) = 0$ (Zauderer, 2006:180-183).

Persamaan Parabola jika: $B^2 - 4AC = 0$

Contoh: Persamaan Perambatan Panas

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Pada tipe eliptik, ditentukan persamaan diferensial parsial

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial y^2} + Lu(x, y) = 0, \quad x \in G, \quad 0 < y < l$$

dengan kondisi batas seperti pada tipe hiperbolik dan kondisi awal adalah

$$u(x, 0) = f(x), \quad u(x, l) = g(x), \quad x \in G$$

Dengan memisalkan $u(x, t) = M(x)N(t)$, maka persamaan diferensial parsial di atas akan menjadi bentuk $-\frac{N''(y)}{N(y)} = -\frac{LM(x)}{\rho(x)M(x)}$. Selanjutnya dihasilkan $LM(x) = \lambda\rho(x)M(x)$ dan dihasilkan pemisahan variabel dalam persamaan diferensial di atas, yaitu $N''(y) - \lambda N(y) = 0$ (Zauderer, 2006:180-183).

Persamaan Eliptik jika: $B^2 - 4AC < 0$

Contoh: Persamaan Poisson

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + g = 0$$

dan persamaan Laplace

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

2.7 Metode Pemisahan Variabel Persamaan Diferensial Parsial Nonlinear

2.7.1 Perkalian dan penjumlahan solusi-solusi terpisah

Pemisahan dari variabel-variabel adalah pendekatan yang biasanya digunakan untuk menyelesaikan persamaan linear dari model matematika fisika yang dihadapi. Untuk persamaan-persamaan yang melibatkan dua variabel bebas x, y dan variabel tidak bebas w , maka pendekatan ini merujuk pada pencarian solusi analitik dalam bentuk perkalian fungsi-fungsi yang bergantung pada argumen yang berbeda yaitu

$$w(x, t) = \varphi(x)\psi(t) \quad (2.13)$$

Integral untuk beberapa kelas khusus dari persamaan diferensial parsial nonlinear orde satu berdasarkan mencari solusi analitik dalam bentuk penjumlahan fungsi-fungsi yang bergantung pada argumen yang berbeda.

$$w(x, t) = \varphi(x) + \psi(t) \quad (2.14)$$

Untuk orde dua dan yang lebih tinggi maka solusi analitiknya boleh menggunakan bentuk (2.13) atau (2.14). Masing-masing solusi disebut penyelesaian-penyelesaian perkalian fungsi-fungsi terpisah dan penjumlahan fungsi-fungsi terpisah (Polyanin & Zaitsev, 2003).

Selanjutnya, terdapat kasus-kasus sederhana dari pemisahan variabel untuk persamaan persamaan diferensial parsial nonlinear. Dalam kasus yang jarang terjadi, pemisahan variabel dalam persamaan nonlinier dilakukan dengan menggunakan teknik yang sama seperti persamaan linear. Secara khusus, solusi analitik adalah menemukan penyelesaian dalam bentuk perkalian atau penjumlahan fungsi-fungsi yang bergantung pada argumen yang berbeda. Solusi analitik tersebut disubstitusikan pada persamaan dan melakukan prosedur manipulasi aljabar dasar, diperoleh persamaan dengan dua variabel terikat yang berbeda (untuk persamaan dengan dua variabel). Kemudian disimpulkan bahwa masing-masing pihak harus sama dengan jumlah konstan yang sama yang disebut pemisahan konstan. Selanjutnya dipertimbangkan contoh-contoh konkret (Polyanin, 2003).

Contoh 1:

Persamaan gelombang dengan nonlinear eksponensial

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{\lambda w} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (2.15)$$

mempunyai solusi pemisahan penjumlahan. Dengan mensubstitusikan (2.14) ke (2.15)

dan dibagi dengan $e^{\lambda \psi}$, diperoleh persamaan:

$$e^{-\lambda \psi} \psi''_{tt} = a (e^{\lambda \varphi} \varphi'_x)'_x$$

Kemudian tiap ruas dipisahkan dan disamadengankan konstanta (C):

$$e^{-\lambda \psi} \psi''_{tt} = C \quad \text{dan} \quad a (e^{\lambda \varphi} \varphi'_x)'_x = C \quad (2.16)$$

Penyelesaian PDB dari bentuk (2.16) menghasilkan sebuah solusi dari persamaan (2.15) dengan bentuk (2.13) (Polyanin & Zaitsev, 2003).

2.7.2 Struktur Solusi Pemisahan secara Umum

a. Bentuk umum dari solusi-solusi

Untuk mempermudah penjelasan, dibatasi pada kasus persamaan matematika fisika dalam dua variabel bebas x, y dan variabel dependen w . Persamaan pemisahan linear dari matematika fisika mempunyai solusi analitik

$$w(x, y) = \varphi_1(x)\psi_1(y) + \varphi_2(x)\psi_2(y) + \cdots + \varphi_n(x)\psi_n(y) \quad (2.17)$$

dengan $w_i = \varphi_i(x)\psi_i(y)$ adalah solusi partikular, fungsi $\varphi_i(x)$ dan $\psi(y)$ dengan i yang berbeda.

Persamaan diferensial parsial nonlinear dengan nonlinear kuadratik

$$f_1(x)g_1(y) \prod_1 [w] + f_2(x)g_2(y) \prod_2 [w] + \cdots + \quad (2.18)$$

$$f_m(x)g_m(y)\prod_m[w] = 0$$

juga mempunyai solusi analitik bentuk (2.17). Pada bentuk (2.18) $\prod_i [w]$ adalah bentuk-bentuk diferensial yang merupakan perkalian-perkalian bilangan bulat non negatif dari fungsi w dan turunan parsialnya yaitu $\partial_x w, \partial_y w, \partial_{xx} w, \partial_{xy} w, \partial_{yy} w, \partial_{xxx} w$ dll. Lihat solusi (2.17) dari persamaan nonlinear (2.18) sebagai solusi pemisahan secara umum. Tidak seperti persamaan linear, pada persamaan nonlinear fungsi $\varphi_i x$ dengan indeks i yang berbeda biasanya berhubungan satu sama lain [dan untuk fungsi $\psi_j(y)$]. Secara umum, fungsi $\varphi_i(x)$ dan $\psi_j(y)$ dalam (2.17) harus diidentifikasi.

Perhatikan bahwa solusi yang paling umum dari solusi pemisahan secara umum adalah solusi dari bentuk khusus

$$w(x, y) = \varphi(x)\psi(y) + \chi(x);$$

variabel bebas di sisi kanan dapat ditukarkan. Dalam kasus khusus $\chi(x) = 0$, ini adalah solusi pemisahan perkalian, dan jika $\chi(x) = 1$, ini adalah solusi pemisahan penjumlahan.

b. Bentuk umum dari persamaan diferensial fungsional

Secara umum, pada substitusi bentuk (2.17) persamaan diferensial (2.18) diperoleh persamaan diferensial fungsional

$$\Phi_1(X)\Psi_1(Y) + \Phi_2(X)\Psi_2(Y) + \dots + \Phi_k(X)\Psi_k(Y) = 0 \quad (2.19)$$

untuk $\varphi_i(x)$ dan $\psi_i(y)$. Fungsional $\Phi_j(X)$ dan $\Psi_j(Y)$ masing-masing bergantung pada x dan y ,

$$\begin{aligned}\Phi_j(X) &= \Phi_j(x, \varphi_1, \varphi'_1, \varphi''_1, \dots, \varphi_n, \varphi'_n, \varphi''_n) \\ \Psi_j(Y) &= \Psi_j(y, \psi_1, \psi'_1, \psi''_1, \dots, \psi_n, \psi'_n, \psi''_n)\end{aligned}\tag{2.20}$$

Sebagai penyederhanaan, rumus ini ditulis untuk kasus dari persamaan orde dua (2.18). Untuk persamaan orde tinggi, sisi kanan persamaan (2.20) akan berisi turunan orde tinggi dari φ_i dan ψ_j .

2.7.3 Solusi Persamaan Diferensial Fungsional dengan Diferensiasi

a. Penjelasan metode

Di bawah ini, dijelaskan suatu prosedur untuk membangun solusi persamaan diferensial fungsional. Hal ini melibatkan tiga tahap berturut-turut

1. Asumsikan bahwa $\Psi_k \neq 0$. Persamaan (2.19) dibagi dengan Ψ_k dan diturunkan terhadap y . Ini menghasilkan persamaan yang serupa tetapi dengan bentuk yang lebih sederhana. $\tilde{\Phi}_1(X)\tilde{\Psi}_1(Y) + \tilde{\Phi}_2(X)\tilde{\Psi}_2(Y) + \dots + \tilde{\Phi}_{k-1}(X)\tilde{\Psi}_{k-1}(Y) = 0$

$$\tilde{\Phi}_j(X) = \Phi_j(X), \quad \tilde{\Psi}_j(Y) = \left[\frac{\Psi_j(Y)}{\Psi_k(Y)} \right]'_y$$

Selanjutnya diteruskan prosedur di atas sampai diperoleh dua bentuk persamaan pemisahan

$$\hat{\Phi}_1(X)\hat{\Psi}_1(Y) + \hat{\Phi}_2(X)\hat{\Psi}_2(Y) = 0\tag{2.21}$$

Terdapat kasus *nondegenerate*: $|\hat{\Phi}_1(X)| + |\hat{\Phi}_2(X)| \neq 0$ dan $|\hat{\Psi}_1(Y)| + |\hat{\Psi}_2(Y)| \neq 0$. Maka persamaan (2.21) ekuivalen dengan persamaan diferensial biasa.

$$\hat{\Phi}_1(X) + C\hat{\Phi}_2(X) = 0, \quad C\hat{\Psi}_1(Y) - \hat{\Psi}_2(Y) = 0$$

dengan C adalah konstan. Persamaan $\hat{\Phi}_2 = 0$ dan $\hat{\Psi}_1 = 0$ sesuai dengan kasus limit $C = \infty$.

Kasus *two degenerate*:

$$\hat{\Phi}_1(X) \equiv 0, \quad \hat{\Phi}_2(X) \equiv 0 \Rightarrow \hat{\Psi}_{1,2}(Y) \text{ are any:}$$

$$\hat{\Psi}_1(Y) \equiv 0, \quad \hat{\Psi}_2(Y) \equiv 0 \Rightarrow \hat{\Phi}_{1,2}(X) \text{ are any.}$$

2. Solusi dua bentuk persamaan (2.21) harus disubstitusikan ke persamaan diferensial fungsional (2.19) untuk menghilangkan konstanta yang berlebihan dari pengintegralan (ini muncul karena persamaan (2.21) yang diperoleh dari (2.19) dengan diferensiasi).
 3. Kasus $\Psi_k \equiv 0$ harus diperlakukan secara terpisah (karena dilakukan pembagian persamaan dengan $\Psi_k \equiv 0$ pada tahap pertama). Demikian juga, harus dipelajari semua kasus-kasus lain di mana fungsional dari persamaan diferensial fungsional lanjut yang telah dibagi itu menghilang.
- b. Contoh konstruksi dalam membangun pemisahan solusi analitik secara umum.**

Contoh 4:

Persamaan parabolik nonlinear orde dua.

$$\frac{\partial w}{\partial t} = aw \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + C \quad (2.22)$$

Dicari pemisahan solusi analitik dari persamaan (2.22) dalam bentuk

$$w = \varphi(t) + \psi(t)\theta(x) \quad (2.23)$$

Substitusikan (2.23) ke (2.22) sehingga menghasilkan

$$\varphi'_t - C + \psi'_t \theta = a\varphi\psi\theta''_{xx} + \psi^2[a\theta\theta''_{xx} + b(\theta'_x)^2] \quad (2.24)$$

Persamaan (2.24) dibagi dengan ψ^2 dan diturunkan terhadap t dan x sehingga diperoleh $\left(\frac{\psi'_t}{\psi^2}\right)'_t \theta'_x = a\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)'_t \theta'''_{xxx}$.

Memisahkan variabel-variabel sehingga kita mendapatkan persamaan diferensial biasa.

$$\theta'''_{xxx} = K\theta'_x \quad (2.25)$$

$$\left(\frac{\psi'_t}{\psi^2}\right)'_t = aK\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)'_t \quad (2.26)$$

dengan K adalah konstan.

Solusi umum dari persamaan (2.25) diberikan

$$\theta = \begin{cases} A_1 x^2 + A_2 x + A_3 & \text{jika } K = 0 \\ A_1 e^{\lambda x} + A_2 e^{-\lambda x} + A_3 & \text{jika } K = \lambda^2 > 0 \\ A_1 \sin(\lambda x) + A_2 \cos(\lambda x) + A_3 & \text{jika } K = -\lambda^2 < 0 \end{cases} \quad (2.27)$$

dengan A_1, A_2, A_3 konstan.

Persamaan (2.46) diintegrasikan sehingga menghasilkan

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{B}{t+C_1}, & \varphi(t) \text{ sebarang} & \quad \text{Jika } K = 0 \\ \varphi &= B\psi + \frac{1}{aK} \frac{\psi'_t}{\psi}, & \psi(t) \text{ sebarang} & \quad \text{jika } K \neq 0 \end{aligned} \quad (2.28)$$

dengan B adalah konstan. Pada proses substitusi solusi (2.27) dan (2.28) ke (2.24) dapat menghilangkan konstanta yang berlebihan dan mendefinisikan fungsi φ dan ψ .

Di bawah ini disimpulkan hasil:

1. Solusi untuk $a \neq -b$ dan $a \neq -2b$.

$$w = \frac{c(a+2b)}{2(a+b)}(t + C_1) + C_2(t + C_1)^{-\frac{a}{a+2b}} - \frac{(x+C_3)^2}{2(a+2b)(t+C_1)} \quad (\text{sesuai untuk } K = 0)$$

dengan C_1, C_2, C_3 konstan.

2. Solusi untuk $b = a$:

$$w = \frac{1}{a\lambda^2} \frac{\psi'_t}{\psi} + \psi(A_1 e^{\lambda x} + A_2 e^{-\lambda x}) \quad (\text{sesuai untuk } K = \lambda^2 > 0)$$

dengan fungsi $\psi = \psi(t)$ adalah turunan dari persamaan diferensial biasa *autonomous*.

$$Z''_{tt} = ac\lambda^2 + 4a^2\lambda^4 A_1 A_2 e^{2Z}, \quad \psi = e^Z$$

yang mana solusi itu dapat ditemukan dalam bentuk implicit. Pada kasus khusus,

$$A_1 = 0 \text{ atau } A_2 = 0 \text{ kita mempunyai } \psi = C_1 \exp\left(\frac{1}{2}ac\lambda^2 t^2 + C_2 t\right).$$

3. Solusi $b = -a$:

$$w = -\frac{1}{a\lambda^2} \frac{\psi'_t}{\psi} + \psi[A_1 \sin(\lambda x) + A_2 \cos(\lambda x)] \quad (\text{sesuai untuk } K = -\lambda^2 < 0)$$

dengan fungsi $\psi = \psi(t)$ adalah turunan dari persamaan diferensial biasa *autonomous*.

$$Z''_{tt} = -ac\lambda^2 + a^2\lambda^4(A_1^2 + A_2^2)e^{2Z}, \quad \psi = e^Z$$

yang mana solusi itu dapat ditemukan dalam bentuk implisit.

2.7.4 Solusi Persamaan Diferensial Fungsional dengan *Splitting*.

a. Penjelasan metode

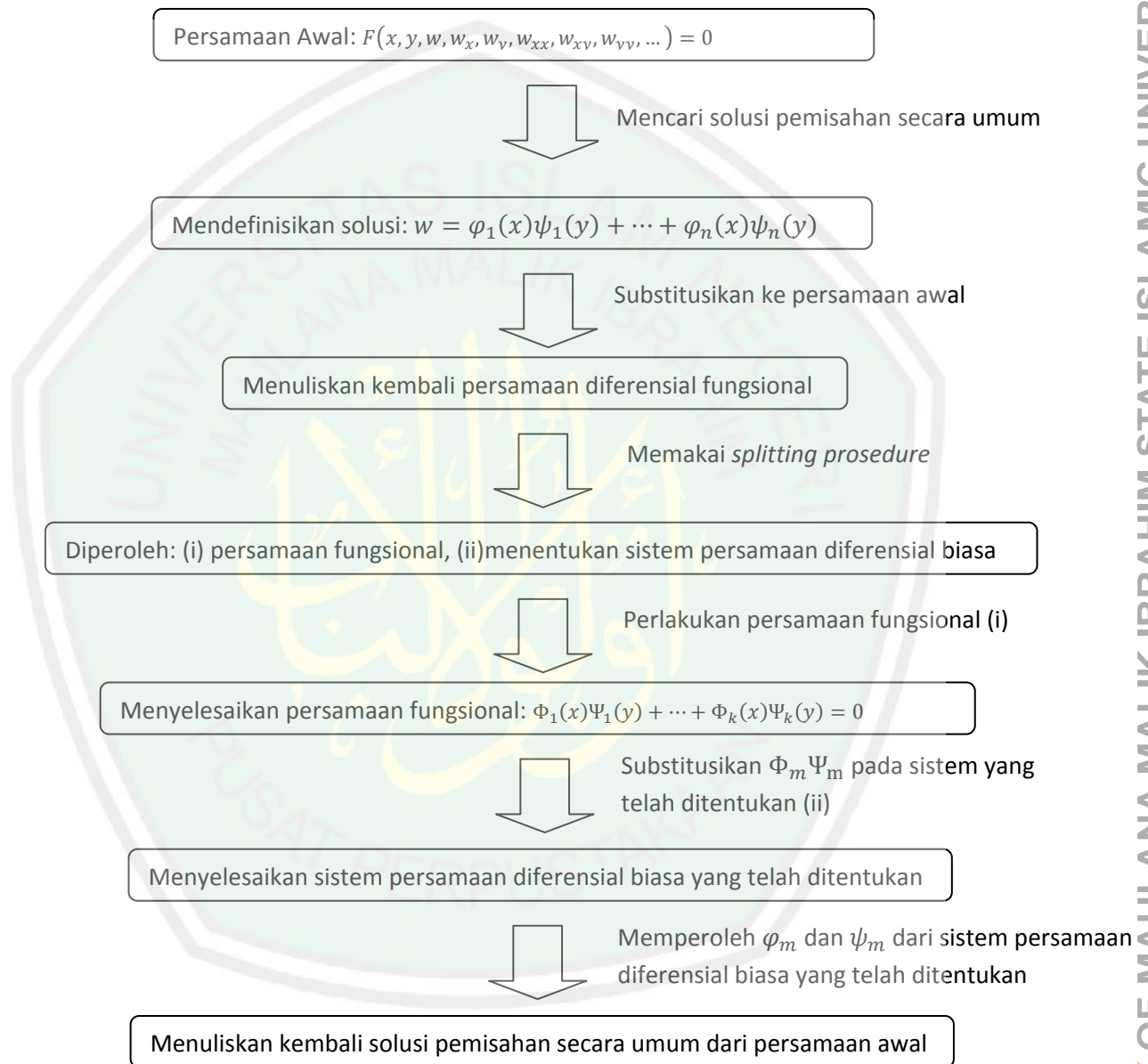
Penyederhanaan persamaan diferensial fungsional (2.19)-(2.20) dengan diferensiasi, menyebabkan adanya konstanta yang berlebihan dari pengintegralan. Konstanta tersebut harus dihilangkan pada saat tahap akhir. Selain itu, persamaan yang dihasilkan mungkin saja memiliki orde yang lebih tinggi daripada persamaan asli. Untuk menghindari kesulitan-kesulitan ini, harus dibawa solusi persamaan diferensial fungsional ke solusi persamaan fungsional bilinear dari suatu bentuk standar dan solusi dari sistem persamaan diferensial biasa. Dengan demikian masalah asli dibagi menjadi dua masalah sederhana. Di bawah ini dijelaskan langkah-langkah dasar metode pemisahan

1. Pada tahap pertama diperlakukan persamaan (2.19) sebagai persamaan fungsional murni yang bergantung pada dua variabel X dan Y , dengan $\Phi_n = \Phi_n(X)$ dan $\Psi_n = \Psi_n(Y)$ tidak diketahui jumlahnya ($n = 1, \dots, k$). Dapat ditunjukkan bahwa persamaan fungsional bilinear (2.19) memiliki solusi yang berbeda untuk $k-1$:

$$\begin{aligned}\Phi_i(X) &= C_{i,1}\Phi_{m+1}(X) + C_{i,2}\Phi_{m+2}(X) + \dots + C_{i,k-m}\Phi_k(X), \\ i &= 1, \dots, m; \\ \Psi_{m+j}(Y) &= -C_{1,j}\Psi_1(Y) - C_{2,j}\Psi_2(Y) - \dots - C_{m,j}\Psi_m(Y), \quad j = \\ &1, \dots, k-m;\end{aligned}\tag{2.29}$$

2. Pada tahap kedua, disubstitusikan $\Phi_i(X)$ dan $\Psi_j(Y)$ dari (2.20) ke semua solusi (2.29) untuk mendapatkan sistem persamaan diferensial biasa (untuk fungsi yang

tidak diketahui $\varphi_p(x)$ dan $\psi_q(y)$). Penyelesaian sistem ini didapatkan solusi pemisahan secara umum dari bentuk (2.17).



Gambar 2.1: Skema umum untuk mengkonstruksi solusi pemisahan secara umum dengan *splitting method*.

b. Solusi dari persamaan fungsional sederhana dan aplikasinya

1. persamaan fungsional

$$\Phi_1 \Psi_1 + \Phi_2 \Psi_2 + \Phi_3 \Psi_3 = 0 \quad (2.30)$$

dengan Φ_i adalah semua fungsi dari argumen yang sama dan Ψ_i adalah semua fungsi dari argumen lainnya, yang mana mempunyai dua solusi

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= A_1 \Phi_3, \quad \Phi_2 = A_2 \Phi_3, \quad \Psi_3 = -A_1 \Psi_1 - A_2 \Psi_2 ; \\ \Psi_1 &= A_1 \Psi_3, \quad \Psi_2 = A_2 \Psi_3, \quad \Phi_3 = -A_1 \Phi_1 - A_2 \Phi_2 ; \end{aligned} \quad (2.31)$$

Sebarang konstanta diubah namanya menjadi $A_1 = C_{1,1}$ dan $A_2 = C_{2,1}$ pada solusi pertama, dan pada solusi kedua $A_1 = -\frac{1}{C_{1,2}}$ dan $A_2 = \frac{C_{1,1}}{C_{1,2}}$. Fungsi dari sisi sebelah kanan persamaan (2.30) diasumsikan sebarang.

2. Persamaan fungsional

$$\Phi_1 \Psi_1 + \Phi_2 \Psi_2 + \Phi_3 \Psi_3 + \Phi_4 \Psi_4 = 0 \quad (2.32)$$

dengan Φ_i semua fungsi dari argumen yang sama dan Ψ_i adalah semua fungsi dari argumen lainnya, mempunyai solusi

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= A_1 \Phi_3 + A_2 \Phi_4, \quad \Phi_2 = A_3 \Phi_3 + A_4 \Phi_4 ; \\ \Psi_3 &= -A_1 \Psi_1 - A_3 \Psi_2, \quad \Psi_4 = -A_2 \Psi_1 - A_4 \Psi_2 ; \end{aligned} \quad (2.33)$$

bergantung pada empat konstanta sebarang $A_1, \dots, A_4$. Lihat solusi (2.29) dengan $k = 4, m = 2, C_{1,1} = A_1, C_{1,2} = A_2, C_{2,1} = A_3$ dan $C_{2,2} = A_4$.

Fungsi dari sisi kanan persamaan (2.31) diasumsikan sebarang.

Persamaan (2.32) juga mempunyai dua solusi yang lain

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= A_1 \Phi_4, \Phi_2 = A_2 \Phi_4, \Phi_3 = A_3 \Phi_4, \Psi_4 = \\ &-A_1 \Psi_1 - A_2 \Psi_2 - A_3 \Psi_3 ; \\ \Psi_1 &= A_1 \Psi_4, \Psi_2 = A_2 \Psi_4, \Psi_3 = A_3 \Psi_4, \Phi_4 = \\ &-A_1 \Phi_1 - A_2 \Phi_2 - A_3 \Phi_3 ;\end{aligned}\tag{2.34}$$

yang melibatkan tiga konstanta sebarang. Pada solusi pertama $A_1 = C_{1,1}, A_2 = C_{2,1}$, dan $A_3 = C_{3,1}$ dan di solusi kedua $A_1 = -\frac{1}{C_{1,3}}, A_2 = C_{1,1}/C_{1,3}$ dan $A_3 = \frac{C_{1,2}}{C_{1,3}}$.

Solusi (2.34) terkadang disebut *degenerated*, untuk menegaskan fakta bahwa solusi (2.34) memuat lebih sedikit konstanta sebarang daripada solusi (2.33).

Contoh 5:

Persamaan nonlinear

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - w \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = v \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\tag{2.35}$$

dicari solusi analitik dari bentuk

$$w = \varphi(t)\theta(x) + \psi(t)\tag{2.36}$$

Substitusi (2.36) ke dalam persamaan (2.35) sehingga menghasilkan

$$\varphi'_t \theta'_x - \varphi \psi \theta''_{xx} + \varphi^2 [(\theta'_x)^2 - \theta \theta''_{xx}] - v \varphi \theta'''_{xxx} = 0$$

Persamaan diferensial fungsional ini dapat dikurangi ke persamaan (2.32) dengan

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \varphi'_t, \Phi_2 = \varphi \psi, \Phi_3 = \varphi^2, \Phi_4 = v \varphi, \\ \Psi_1 &= \theta'_x, \Psi_2 = -\theta''_{xx}, \Psi_3 = (\theta'_x)^2 - \theta \theta''_{xx}, \Psi_4 = -\theta'''_{xxx}\end{aligned}\tag{2.37}$$

Substitusi (2.37) ke persamaan (2.33) diperoleh sistem persamaan

$$\begin{aligned}\varphi'_t &= A_1\varphi^2 + A_2\nu\varphi, \quad \varphi\psi = A_3\varphi^2 + A_4\nu\varphi, \quad (\theta'_x)^2 - \theta\theta''_{xx} = \\ &-A_1\theta'_x + A_3\theta''_{xx}, \\ \theta'''_{xxx} &= A_2\theta'_x - A_4\theta''_{xx}\end{aligned}$$

Ini dapat ditunjukkan bahwa dua persamaan terakhir di (2.37) adalah konsisten jika dan hanya jika fungsi θ dan turunannya bergantung linear.

$$\theta'_x = B_1\theta + B_2 \quad (2.38)$$

enam konstanta B_1, B_2, A_1, A_2, A_3 , dan A_4 harus memenuhi tiga kondisi

$$\begin{aligned}B_1(A_1 + B_2 - A_3B_1) &= 0, \\ B_2(A_1 + B_2 - A_3B_1) &= 0, \\ B_1^2 + A_4B_1 - A_2 &= 0\end{aligned} \quad (2.39)$$

Integralkan (2.38) sehingga menghasilkan

$$\theta = \begin{cases} B_3 \exp(B_1x) - \frac{B_2}{B_1}, & \text{jika } B_1 \neq 0 \\ B_2x + B_3, & \text{jika } B_1 = 0 \end{cases} \quad (2.40)$$

dengan B_3 adalah sebarang konstanta.

Dua persamaan pertama di (2.38) menyebabkan φ dan ψ :

$$\varphi = \begin{cases} \frac{A_2\nu}{C \exp(-A_2\nu t) - A_1}, & \text{jika } A_2 \neq 0 \\ -\frac{1}{A_1t + C}, & \text{jika } A_2 = 0 \end{cases} \quad \psi = A_3\varphi + A_4\nu \quad (2.41)$$

dengan C adalah sebarang konstanta.

Formula (2.40), (2.41) dengan relasi (2.39) mengarahkan untuk menemukan solusi persamaan (2.35) dalam bentuk (2.36):

$$w = \frac{x+C_1}{t+C_2} + C_3, \text{ jika } A_2 = B_1 = 0, B_2 = -A_1$$

$$w = \frac{C_1 e^{-\lambda x} + 1}{\lambda t + C_2} + \nu \lambda, \text{ jika } A_2 = 0, B_1 = -A_4, B_2 = -A_1 - A_3 A_4$$

$$w = C_1 e^{-\lambda(x+\beta vt)} + \nu(\lambda + \beta), \text{ jika } A_1 = A_3 = B_2 = 0, A_2 = B_1^2 + A_4 B_1$$

$$w = \frac{\nu \beta + C_1 e^{-\lambda x}}{1 + C_2 e^{-\nu \lambda \beta t}} + \nu(\lambda - \beta), \text{ jika } A_1 = A_3 B_1 - B_2, A_2 = B_1^2 + A_4 B_1$$

dengan C_1, C_2, C_3, β , dan λ sebarang konstanta.

Analisis dari solusi kedua persamaan (2.34) dari persamaan fungsional (2.32) menyebabkan solusi persamaan diferensial (2.35) lebih dari dua

$$w = \frac{x}{t + C_1} + \psi(t), \quad w = \varphi(t)e^{-\lambda x} - \frac{\varphi'_t(t)}{\lambda \varphi(t)} + \nu \lambda$$

dengan $\varphi(t)$ dan $\psi(t)$ sebarang fungsi, dan C_1 dan λ adalah sebarang konstanta.

2.7.5 Penyederhanaan Skema untuk Mengkonstruksi Solusi Pemisahan secara Umum

a. Penjelasan penyederhanaan skema

Untuk membangun solusi analitik dari persamaan (2.18) dengan nonlinear kuadratik yang tidak bergantung secara eksplisit pada x (semua f_i konstan), ini masuk akal untuk menggunakan pendekatan yang disederhanakan berikut. Seperti sebelumnya, dicari solusi dalam bentuk penjumlahan terbatas (2.17). Disumsikan bahwa sistem koordinat fungsi $\{\varphi_i(x)\}$ diatur oleh persamaan diferensial linear dengan koefisien konstan. Solusi yang paling umum untuk persamaan tersebut adalah bentuk

$$\varphi_i(x) = x^i, \varphi_i(x) = e^{\lambda_i x}, \varphi_i(x) = \sin(\alpha_i x), \varphi_i(x) = \cos(\beta_i x) \quad (2.42)$$

Rangkaian fungsi ini terhingga (dalam berbagai kombinasi) dapat digunakan untuk mencari solusi pemisahan (2.17), dengan λ_i, α_i , dan β_i dianggap sebagai parameter bebas. Sistem fungsi lain $\{\varphi_i(y)\}$ ditentukan dengan menyelesaikan persamaan nonlinear karena mengganti (2.17) ke dalam persamaan yang dipertimbangkan.

b. contoh konstruksi solusi analitik persamaan orde tinggi

contoh 6:

Persamaan lapisan batas laminar di plat yang direduksi menjadi persamaan nonlinear tunggal orde tiga untuk *stream function*:

$$\frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 w}{\partial y^3}$$

Selanjutnya dicari solusi pemisahan secara umum dengan bentuk

$$w(x, y) = x\psi(y) + \theta(y)$$

2.8 Metode Pemisahan Variabel Fungsional

2.8.1 Struktur penyelesaian terpisah fungsional

Misalkan persamaan linear untuk $w = w(x, y)$ yang diperoleh dari persamaan linear matematika fisika untuk $z = z(x, y)$ dengan perubahan nonlinear dalam variabel $w = F(z)$. Kemudian jika persamaan linear untuk z mempunyai

solusi terpisah, persamaan nonlinear yang ditransformasikan untuk w akan mempunyai penyelesaian analitik dari bentuk

$$w(x, y) = F(z), \text{ dimana } z = \sum_{m=1}^n \varphi_m(x) \psi_m(y). \quad (2.43)$$

Perlu dicatat bahwa banyak persamaan diferensial nonlinear yang tidak dapat direduksi menjadi persamaan linear yang memiliki penyelesaian analitik dari bentuk (2.43) juga. Penyelesaian-penyelesaian tersebut disebut penyelesaian terpisah fungsional. Secara umum, fungsi-fungsi $\varphi_m(x)$, $\psi_m(y)$, dan $F(z)$ pada (2.64) tidak diketahui sebelumnya dan harus diidentifikasi.

Persamaan diferensial fungsional yang dihasilkan dari substitusi (2.43) dalam persamaan diferensial parsial asli direduksi ke bentuk persamaan fungsional bilinear standar. Dalam pemisahan variabel fungsional, mencari solusi dalam bentuk $w = F(\varphi(x) + \psi(y))$ dan $w = F(\varphi(x)\psi(y))$ menghasilkan hasil yang setara, karena dua bentuk adalah ekuivalen secara fungsional. Maka dari itu, kita punya $F(\varphi(x)\psi(y)) = F(\varphi(x) + \psi(y))$, dimana $F_1(z) = F(e^z)$, $\varphi_1(x) = \ln \varphi(x)$, dan $\psi_1(y) = \ln \psi(y)$. Dalam mengkonstruksi solusi pemisahan fungsional dengan bentuk $w = F(\varphi(x) + \psi(y))$, diasumsikan bahwa φ dan ψ bukan konstanta. Fungsi $F(z)$ bisa dihitung dengan persamaan diferensial biasa atau dengan *overdetermined system* dari persamaan, keduanya mungkin dipakai.

2.8.2 Penyelesaian Terpisah Fungsional Khusus

Untuk mempermudah analisis, beberapa dari fungsi di (2.43) bisa di singkat sebuah priori dan fungsi yang lain yang akan didefinisikan. Ini disebut sebuah penyelesaian pemisahan fungsional khusus. Lihat kembali pemisahan fungsional khusus dari bentuk (2.43) dalam kasus khusus dengan komposit argumen adalah linear di salah satu variabel bebas (misal: di x). Disubstitusikan (2.43) ke persamaan yang dipelajari dan mengeliminasi x menggunakan ekspresi dari z untuk mendapatkan persamaan diferensial fungsional dengan dua argumen.

Berikut adalah solusi sederhana pemisahan fungsional dari bentuk khusus (x dan y dapat ditukar)

$$w = F(z), \quad z = \psi_1(y)x + \psi_2(y) \quad (z \text{ adalah linier di } x);$$

$$w = F(z), \quad z = \psi_1(y)x^2 + \psi_2(y) \quad (z \text{ adalah kuadratik di } x);$$

$$w = F(z), \quad z = \psi_1(y)e^{\lambda x} + \psi_2(y) \quad (z \text{ memuat eksponensial } x).$$

Solusi pertama disebut solusi *traveling-wave* umum. Dalam rumus terakhir, $e^{\lambda x}$ dapat diganti dengan $\cosh(ax + b)$, $\sinh(ax + b)$, atau $\sin(ax + b)$ untuk mendapatkan 3 modifikasi yang lain.

Setelah mensubstitusikan sembarang pernyataan diatas ke persamaan dasar, harus dihilangkan x dengan bantuan pernyataan z . Ini akan menghasilkan sebuah persamaan diferensial fungsional dengan dua argument, y dan z .

2.9 Persamaan Linier Homogen dengan Koefisien Konstan

Suatu persamaan diferensial linier homogen orde dua dengan koefisien konstan

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (2.44)$$

dengan a, b, c adalah konstanta real dan $a \neq 0$, maka solusi umum dari persamaan (2.44) adalah

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

dengan c_1 dan c_2 konstan.

Selanjutnya jika $y = e^{rx}$ disubstitusikan ke persamaan (2.44) maka diperoleh

$$ar^2 e^{rx} + br e^{rx} + ce^{rx} = 0$$

$$e^{rx}(ar^2 + br + c) = 0.$$

Karena e^{rx} tidak mungkin sama dengan nol, maka persamaan diatas dapat dibagi dengan e^{rx} , sehingga kita peroleh

$$ar^2 + br + c = 0 \quad (2.45)$$

Akibatnya $y = e^{rx}$ adalah solusi untuk persamaan (2.44) jika dan hanya jika r memenuhi persamaan (2.45). Persamaan (2.45) disebut *auxiliary equation* yang dihubungkan dengan persamaan homogen.

Disini *auxiliary equation* adalah kuadratik, dan akar-akarnya adalah sebagai berikut:

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad \text{dan } r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ketika $b^2 - 4ac > 0$, akar r_1 dan r_2 adalah real dan nyata. Jika $b^2 - 4ac = 0$, maka akar-akarnya real dan sama. Ketika $b^2 - 4ac < 0$ maka akar-akarnya adalah bilangan kompleks konjugat.

Jika *auxiliary equation* mempunyai akar-akar real yang berbeda (*distinct real roots*) yaitu akar-akar real r_1 dan r_2 , maka e^{r_1x} dan e^{r_2x} adalah solusi untuk persamaan (2.44). Oleh karena itu, solusi umum dari persamaan (2.44) adalah

$$y(x) = c_1 e^{r_1x} + c_2 e^{r_2x}$$

dengan c_1 dan c_2 konstan.

Jika *auxiliary equation* mempunyai akar kembar (*repeated root*) yaitu r , maka solusi untuk persamaan (2.44) adalah e^{rx} dan xe^{rx} , dan solusi umumnya adalah

$$y(x) = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx}$$

dengan c_1 dan c_2 konstan.

Jika *auxiliary equation* mempunyai akar-akar kompleks (*complex conjugate roots*) yaitu $\alpha \pm i\beta$, maka solusi untuk persamaan (2.45) adalah

$$e^{\alpha x} \cos \beta x \text{ dan } e^{\alpha x} \sin \beta x$$

dan solusi umumnya adalah

$$y(x) = c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$$

dengan c_1 dan c_2 konstan (Nagle, 1993:153-162).

2.10 Konstruksi Persamaan Saint Venant 2D

Pandang persamaan Navier-Stokes

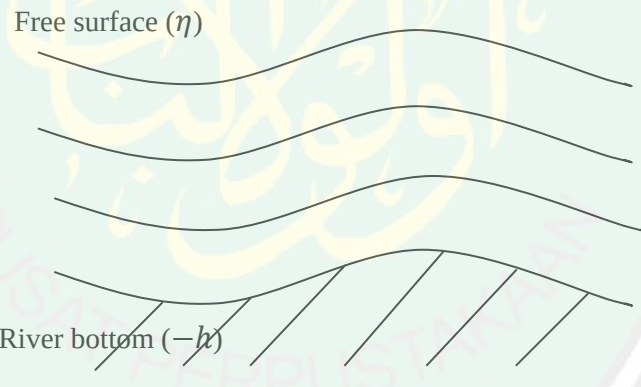
$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \quad (2.46)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] \quad (2.47)$$

dan persamaan kontinuitas

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.48)$$

Selanjutnya akan dikonstruksi kondisi kinematik permukaan perairan dengan fungsi permukaan perairan $z = \eta(x, y, t)$.



Gambar 2.2: Penampang gelombang perairan dangkal

Erich Zauderer (2006) dalam bukunya yang berjudul “Partial Differential Equations of Applied Mathematics” menyebutkan bahwa:

Distribusi probabilitas $v(x, t)$ memenuhi persamaan diferensial

$$v(x, t + \tau) = pv(x - \delta, t) + qv(x + \delta, t)$$

Persamaan ini menyebutkan bahwa probabilitas partikel di x pada saat $t + \tau$ sama dengan probabilitas partikel di $x - \delta$ pada saat t dikalikan dengan probabilitas p yang berpindah ke kanan ditambah dengan probabilitas partikel di $x + \delta$ pada saat t dikalikan dengan probabilitas q yang berpindah ke kanan, sehingga distribusi probabilitas permukaan perairan $\eta(x, y, t)$ dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\eta(x, y, t + \tau) = p\eta(x - \delta, y) + q\eta(x + \delta, y)$$

Bentuk di atas dapat diuraikan kembali menjadi

$$\begin{aligned} \eta(x, y) + \tau\eta_t(x, y) = & p \left[\eta(x, y) - \delta\eta_x(x, y) + \frac{1}{2}\delta^2\eta_{xx}(x, y) \right] + \\ & q \left[\eta(x, y) + \delta\eta_x(x, y) + \frac{1}{2}\delta^2\eta_{xx}(x, y) \right] \end{aligned}$$

atau

$$\tau\eta_t(x, y) = (p + q - 1)\eta(x, y) + (q - p)\delta\eta_x(x, y) + \frac{1}{2}(p + q)\delta^2\eta_{xx}(x, y)$$

Dengan asumsi bahwa probabilitas $p + q = 1$, maka bentuk terakhir dapat ditulis

$$\tau\eta_t(x, y) = (q - p)\delta\eta_x(x, y) + \frac{1}{2}\delta^2\eta_{xx}(x, y)$$

yakni

$$\eta_t(x, y) = \frac{(q - p)}{\tau}\delta\eta_x(x, y) + \frac{1}{2}\frac{\delta^2}{\tau}\eta_{xx}(x, y)$$

Dengan asumsi $q - p \approx 0$ dan $\lim_{\delta \rightarrow 0, \tau \rightarrow 0} \frac{\delta}{\tau} = \gamma = u$, maka

$$\eta_t(x, y) = u\eta_x(x, y) + E(\delta^2)$$

yakni

$$\eta_t(x, y) = u\eta_x(x, y)$$

Sehingga diperoleh distribusi probabilitas permukaan perairan pada saat partikel berada di $x - \delta, y$ pada saat t dan $x + \delta, y$ pada saat t , yaitu

$$\eta_t(x, y) = u\eta_x(x, y) \quad (2.49)$$

Selanjutnya, distribusi probabilitas permukaan perairan pada saat partikel berada di $x, y - \delta$ pada saat t dan $x, y + \delta$ pada saat t

$$\eta(x, y, t + \tau) = p\eta(x, y - \delta) + q\eta(x, y + \delta)$$

Bentuk di atas dapat diuraikan kembali menjadi

$$\eta(x, y) + \tau\eta_t(x, y) = p \left[\eta(x, y) - \delta\eta_y(x, y) + \frac{1}{2}\delta^2\eta_{yy}(x, y) \right] + q \left[\eta(x, y) + \delta\eta_y(x, y) + \frac{1}{2}\delta^2\eta_{yy}(x, y) \right]$$

atau

$$\tau\eta_t(x, y) = (p + q - 1)\eta(x, y) + (q - p)\delta\eta_y(x, y) + \frac{1}{2}(p + q)\delta^2\eta_{yy}(x, y)$$

Dengan asumsi bahwa probabilitas $p + q = 1$, maka bentuk terakhir dapat ditulis

$$\tau\eta_t(x, y) = (q - p)\delta\eta_y(x, y) + \frac{1}{2}\delta^2\eta_{yy}(x, y)$$

yakni

$$\eta_t(x, y) = \frac{(q - p)}{\tau}\delta\eta_y(x, y) + \frac{1}{2}\frac{\delta^2}{\tau}\eta_{yy}(x, y)$$

Dengan asumsi $q - p \approx 0$ dan $\lim_{\delta \rightarrow 0, \tau \rightarrow 0} \frac{\delta}{\tau} = \gamma = v$, maka

$$\eta_t(x, y) = v\eta_y(x, y) + E(\delta^2)$$

yakni

$$\eta_t(x, y) = v\eta_y(x, y)$$

Sehingga diperoleh distribusi probabilitas permukaan perairan pada saat partikel berada di $x, y - \delta$ pada saat t dan $x, y + \delta$ pada saat t , yaitu

$$\eta_t(x, y) = v\eta_y(x, y) \quad (2.50)$$

Sehingga penjumlahan persamaan (2.49) dan (2.50) adalah

$$2\eta_t(x, y) = u\eta_x(x, y) + v\eta_y(x, y)$$

yakni

$$\eta_t(x, y) = \frac{u}{2}\eta_x(x, y) + \frac{v}{2}\eta_y(x, y)$$

$$dz = \eta_t(x, y) = u^s\eta_x(x, y) + v^s\eta_y(x, y) \quad (2.51)$$

Sehingga diperoleh persamaan (2.51) yang merupakan kondisi kinematik di permukaan.

Setelah kondisi kinematik di permukaan sudah didapatkan, selanjutnya akan dikonstruksi kondisi batas di dasar perairan dengan fungsi $z = -h(x, y)$. Kondisi batas di dasar perairan didapatkan serupa dengan kondisi kinematik di permukaan. Distribusi probabilitas z pada saat berada di $x - \delta, y$ pada saat t dan $x + \delta, y$ pada saat t

$$-h(x, y, t + \tau) = -p[h(x - \delta, y)] - g[h(x + \delta, y)]$$

Bentuk di atas dapat diuraikan kembali menjadi

$$-[h(x, y) + \tau h_t(x, y)] = -p \left[h(x, y) - \delta h_x(x, y) + \frac{1}{2} \delta^2 h_{xx}(x, y) \right] -$$

$$q \left[h(x, y) + \delta h_x(x, y) + \frac{1}{2} \delta^2 h_{xx}(x, y) \right]$$

atau

$$-\tau h_t(x, y) = (-p - q + 1)h(x, y) + (p - q)\delta h_x(x, y) + \frac{1}{2}(-p - q)\delta^2 h_{xx}(x, y)$$

yakni

$$-\tau h_t(x, y) = -(q - p)\delta h_x(x, y) + (-1)\frac{1}{2}\delta^2 h_{xx}(x, y)$$

sehingga

$$h_t(x, y) = \frac{-(q - p)}{-\tau} \delta h_x(x, y) + E(\delta^2)$$

Dengan asumsi $q - p \approx 0$ dan $\lim_{\delta \rightarrow 0, \tau \rightarrow 0} \frac{\delta}{\tau} = u$ (kecepatan di x), maka

$$h_t(x, y) = u h_x(x, y) + E(\delta^2)$$

yakni

$$h_t(x, y) = u^b h_x(x, y)$$

Sehingga diperoleh distribusi probabilitas dasar perairan pada saat partikel berada di

$x - \delta$, pada saat t dan $x + \delta$, pada saat t , yaitu

$$h_t(x, y) = u^b h_x(x, y) \quad (2.52)$$

Distribusi probabilitas dasar perairan pada saat partikel berada di $x, y - \delta$ pada saat t dan $x, y + \delta$ pada saat t

$$-h(x, y, t + \tau) = -p[h(x, y - \delta)] - g[h(x, y + \delta)]$$

Bentuk di atas dapat diuraikan kembali menjadi

$$\begin{aligned} -[h(x, y) + \tau h_t(x, y)] &= -p \left[h(x, y) - \delta h_y(x, y) + \frac{1}{2} \delta^2 h_{yy}(x, y) \right] - \\ &\quad q \left[h(x, y) + \delta h_y(x, y) + \frac{1}{2} \delta^2 h_{yy}(x, y) \right] \end{aligned}$$

atau

$$-\tau h_t(x, y) = (-p - q + 1)h(x, y) + (p - q)\delta h_y(x, y) + \frac{1}{2}(-p - q)\delta^2 h_{yy}(x, y)$$

yakni

$$-\tau h_t(x, y) = -(q - p)\delta h_y(x, y) + (-1)\frac{1}{2}\delta^2 h_{yy}(x, y)$$

sehingga

$$h_t(x, y) = \frac{-(q - p)}{-\tau} \delta h_y(x, y) + E(\delta^2)$$

Dengan asumsi $q - p \approx 0$ dan $\lim_{\delta \rightarrow 0, \tau \rightarrow 0} \frac{\delta}{\tau} = v$ (kecepatan di y), maka

$$h_t(x, y) = v h_y(x, y) + E(\delta^2)$$

yakni

$$h_t(x, y) = v^b h_y(x, y)$$

Sehingga diperoleh distribusi probabilitas dasar perairan pada saat partikel berada di

$x, y - \delta$ pada saat t dan $x, y + \delta$ pada saat t yaitu

$$h_t(x, y) = v^b h_y(x, y) \tag{2.53}$$

Selanjutnya penjumlahan persamaan (2.52) dan (2.53) adalah

$$2h_t(x, y) = u(-h)_x(x, y) + v(-h)_y(x, y)$$

yakni

$$uh_x(x, y) + vh_y(x, y) = 0$$

Sehingga diperoleh kondisi batas di dasar perairan sebagai berikut

$$u^b h_x + v^b h_y = 0 \quad (2.54)$$

Dalam hal ini, $h(x, y)$ adalah kedalaman perairan.

Selanjutnya akan dilakukan pengintegralan fungsi kontinu. Dalam hal ini $z = \eta(x, y, t)$, maka $z = \eta(x(t), y(t))$. Selanjutnya berdasarkan kondisi kinematik di permukaan (2.51) dan kondisi batas di dasar perairan (2.54), maka

$$u^b h_x + v^b h_y = 0$$

yakni

$$\Leftrightarrow u^b (-h)_x + v^b (-h)_y = 0$$

Pinch (1992:37) dalam buku yang berjudul “Optimal Control and The Calculus of Variations” menyebutkan bahwa

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\eta \frac{\partial f}{\partial x} + \dot{\eta} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right) dt$$

dapat diselesaikan dengan mengintegralkan masing-masing ditambahkan dengan kondisi batasnya sehingga

$$\int_{t_0}^{t_1} \dot{\eta} \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} dt = \left[\eta \frac{\partial f}{\partial x} \right]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \eta \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right) dt$$

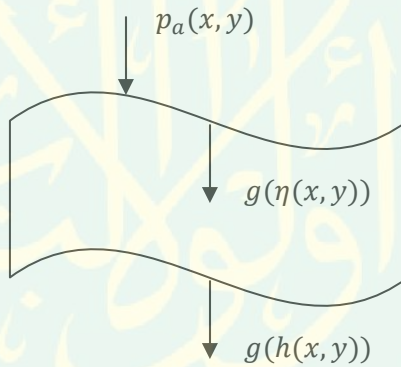
Akibatnya, integral fungsi kontinu

$$\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial u}{\partial x} + \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial v}{\partial y} = \int 0$$

$$\left[\int_{-h}^{\eta} u dz \right]_x - u^s \eta_x + u^b (-h)_x + \left[\int_{-h}^{\eta} v dz \right]_y - v^s \eta_y + v^b (-h)_y = 0$$

$$\begin{aligned}
\left[\int_{-h}^{\eta} u dz \right]_x + \left[\int_{-h}^{\eta} v dz \right]_y - u^s \eta_x - v^s \eta_y + u^b(-h)_x + v^b(-h)_y &= 0 \\
\left[\int_{-h}^{\eta} u dz \right]_x + \left[\int_{-h}^{\eta} v dz \right]_y - u^s \eta_x - v^s \eta_y + 0 &= 0 \\
\left[\int_{-h}^{\eta} u dz \right]_x + \left[\int_{-h}^{\eta} v dz \right]_y - \eta_t &= 0
\end{aligned} \tag{2.55}$$

Selanjutnya ditentukan fungsi tekanan di permukaan maupun di dasar perairan. Tekanan di perairan dipengaruhi oleh tekanan atmosfer (p_a), gaya gravitasi bumi terhadap permukaan (g) dan gaya gravitasi bumi terhadap dasar.



Gambar 2.3: Ilustrasi tekanan atmosfer dan gaya gravitasi

Dalam hal ini $g(h(x, y))$ dapat diabaikan sehingga

$$p(x, y) \approx p_a(x, y) + g(\eta(x, y))$$

Dengan $p_a(x, y)$ adalah suatu konstanta, akibatnya jika dianggap $p_a(x, y) = p(x_0, y_0) \approx 0$ maka $p(x, y) \approx g(\eta(x, y))$

Sehingga distribusi probabilitas p pada saat partikel berada di $x + \delta, y$ pada saat t dan distribusi probabilitas η pada saat partikel berada di $x + \delta, y$ pada saat t dikalikan g adalah sama.

$$p(x + \delta, y) = g[\eta(x + \delta, y)]$$

Bentuk di atas dapat diuraikan menjadi

$$p(x, y) + \delta p_x(x, y) = g[\eta(x, y) + \delta \eta_x(x, y)]$$

atau

$$\delta p_x(x, y) = g(\eta(x, y)) - p(x, y) + g\delta \eta_x(x, y)$$

Karena $\eta(x, y)$ dan $p(x, y)$ dianggap sama, maka

$$p_x(x, y) = g \left[\frac{\delta}{\delta} \eta_x(x, y) \right]$$

sehingga

$$p_x(x, y) = g\eta_x(x, y) \quad (2.56)$$

Begitu juga distribusi probabilitas p pada saat partikel berada di $x, y + \delta$ pada saat t dan distribusi probabilitas η pada saat partikel berada di $x, y + \delta$ pada saat t dikalikan g adalah sama.

$$p(x, y + \delta) = g[\eta(x, y + \delta)]$$

Bentuk di atas dapat diuraikan kembali menjadi

$$p(x, y) + \delta p_y(x, y) = g[\eta(x, y) + \delta \eta_y(x, y)]$$

atau

$$\delta p_y(x, y) = g(\eta(x, y)) - p(x, y) + g\delta \eta_y(x, y)$$

Karena $g(\eta(x, y)) - p(x, y)$ dianggap sama, maka

$$p_y(x, y) = g \left[\frac{\delta}{\delta} \eta_y(x, y) \right]$$

sehingga

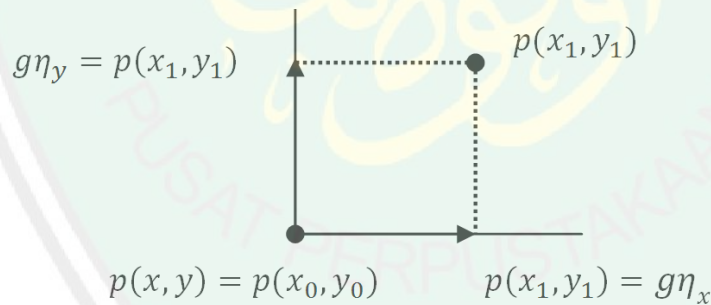
$$p_y(x, y) = g\eta_y(x, y) \quad (2.57)$$

Persamaan (2.56) dan (2.57) Navier-Stokes menjadi:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -g\eta_x + \nu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \quad (2.58)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -g\eta_y + \nu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] \quad (2.59)$$

Selanjutnya konstruksi kondisi tangensial stress di x dan di y (kondisi tekanan permukaan). Jika diasumsikan permukaan air laminar/*flat horizontal*, maka bentuk tekanan di batas searah x dan y (*stress boundary conditions*):



Gambar 2.4: Kondisi tekanan di permukaan perairan

Akibatnya tekanan searah x adalah $u\eta_x = \eta_t - v\eta_y$

Artinya $u_x\eta_x = \eta_t - v_y\eta_y = p_x(x_1, y_1) - p_a(x_0, y_0) = |u_a - u^s|$

Sehingga diperoleh kondisi tangensial stress di x

$$u_x \eta_x = \gamma_T (|u_a - u^s|)$$

Tekanan searah y adalah $v \eta_y = \eta_t - v \eta_x$

$$\text{artinya } v_y \eta_y = \eta_t - u_x \eta_x = p_y(x_1, y_1) - p_a(x_0, y_0) = |v_a - v^s|$$

Sehingga diperoleh kondisi tangensial stress di y :

$$v_y \eta_y = \gamma_T |v_a - v^s|$$

Maka

$$\begin{aligned} \nu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] &= \nu \left[(u_x)_x + (v_y)_y \right] \\ &= \nu (u_x)_x + \nu (v_y)_y \\ &= \gamma_T (|u_a - u^s|) + \gamma_T |v_a - v^s| \end{aligned}$$

Selanjutnya ditentukan kondisi batas untuk tekanan di dasar perairan. Pada daerah dasar perairan, tekanan/*stress* hanya dipengaruhi oleh gaya gravitasi bumi.

$$p(x, y) = g(-h(x, y))$$

atau

$$p(x, y) - g(-h(x, y)) = 0$$

Sehingga *stress* searah x dan y adalah

$$p(x + \delta, y) = g(-h(x + \delta, y))$$

$$p(x, y + \delta) = g(-h(x, y + \delta))$$

Untuk *stress* searah sumbu x :

$$p(x, y) + \delta p_x(x, y) = g(-h(x, y) + \delta(-h_x)(x, y))$$

atau

$$\delta p_x(x, y) = g(-h(x, y)) - p(x, y) + \delta(-h_x)(x, y)$$

Karena $g(-h(x, y)) - p(x, y) = 0$

Maka $p_x(x, y) = -h_x(x, y)$

Untuk *stress* searah sumbu y :

$$p(x, y) + \delta p_y(x, y) = g(-h(x, y) + \delta(-h_y)(x, y))$$

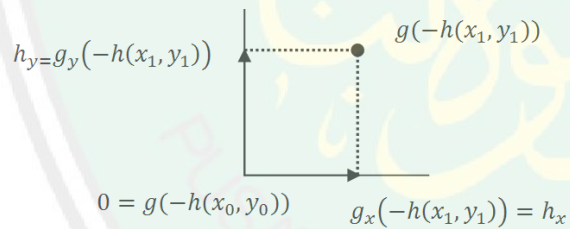
atau

$$\delta p_y(x, y) = g(-h(x, y)) - p(x, y) + \delta(-h_y)(x, y)$$

Karena $g(-h(x, y)) - p(x, y) = 0$

maka $p_y(x, y) = -h_y(x, y)$

Kondisi tekanan di dasar perairan dapat diilustrasikan dalam gambar di bawah ini:



Gambar 2.5: Kondisi tekanan di dasar perairan

yaitu

$$h_t(x, y) = u^b h_x(x, y)$$

$$h_t(x, y) = v^b h_y(x, y)$$

$$u^b h_x + v^b h_y = 0$$

Artinya *stress* searah sumbu x di dasar hanya dipengaruhi kecepatan di dasar

$$u_x = u^b$$

sehingga fungsi *stress* searah x adalah:

$$u_x h_x = \gamma_B(u^b)$$

Selanjutnya

$$v_y = v^b$$

Artinya fungsi *stress* searah y adalah:

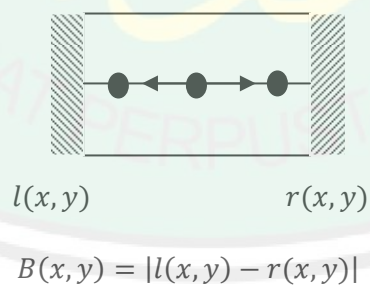
$$v_y h_y = \gamma_B(v^b)$$

Sehingga kondisi batas di dasar perairan

$$u_x h_x = \gamma_B(u^b) \text{ dan } v_y h_y = \gamma_B(v^b)$$

Selanjutnya *the laterally/depth shallow water equation* (konstruksi persamaan di sepanjang x dan sepanjang y perairan dangkal) adalah sebagai berikut.

a) Konstruksi persamaan lateral/searah x



Gambar 2.6: Pergerakan partikel pada batas kiri dan kanan

Konstruksi persamaan diferensial di x di kanan

$$a) \quad u^r = ur(x + \delta, y) + vr(x, y + \delta)$$

yakni

$$u^r = ur_x(x, y) + vr_y(x, y) \dots \dots \dots \text{kondisi kecepatan ke kanan}$$

$$b) \quad u^l = ul(x - \delta, y) + vr(x, y - \delta)$$

yakni

$$u^l = ul_x(x, y) + vl_y(x, y) \dots \dots \dots \text{kondisi kecepatan ke kiri}$$

b) Kondisi batas kekentalan di kiri dan kanan

$$v(u_x l_x - u_y) = \gamma_l u \dots \dots \dots \text{kondisi batas kekentalan di kanan}$$

$$-v(u_x r_x - u_y) = \gamma_r u \dots \dots \dots \text{kondisi batas kekentalan di kiri}$$

c) Integral Persamaan Momentum Navier-Stokes terhadap batas kanan dan kiri

Dengan mengasumsikan bahwa $x_1 = r(x, y)$ dan $x_2 = l(x, y)$, $B(x, y) =$

$$|x_2 - x_1| = |l(x, y) - r(x, y)|, \text{ dan integral percepatan=kecepatan, yaitu } \int \frac{\partial u}{\partial x} dz = u$$

$$\text{dan } \int \frac{\partial u}{\partial x} dz = [\int u dz]_x,$$

Sehingga rata-rata kecepatan sepanjang x adalah:

$$U_1 = \frac{1}{B} \int_{x_1=r}^{x_2=l} u dx$$

$$U_2 = \frac{1}{B} \int_{x_1=r}^{x_2=l} u dy$$

Rata-rata permukaan η :

$$\eta_1 = \frac{1}{B} \int_{x_1}^{x_2} \eta dx$$

$$\eta_2 = \frac{1}{B} \int_{x_1}^{x_2} \eta dy$$

Rata-rata kecepatan searah sumbu y :

$$V_1 = \frac{1}{B} \int_r^l v dx$$

$$V_2 = \frac{1}{B} \int_r^l v dy$$

Selanjutnya adalah integral ruas kiri x momentum Navier-Stokes (2.58) adalah

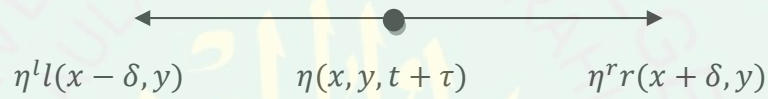
$$\begin{aligned} & \int_{x_1=r}^{x_2=l} \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right] dx \\ &= \left(\int_{x_1=r}^{x_2=l} u dx \right)_t + \left(\int_r^l uu dx \right)_x + \left(\int_r^l vu dx \right)_y + u|_r^l \left(\int_r^l u dx \right)_x + v|_r^l \left(\int_r^l u dx \right)_y \end{aligned}$$

Karena $v|_r^l \left(\int_r^l u dx \right)_y$ diabaikan maka:

$$\begin{aligned} & \int_{x_1=r}^{x_2=l} \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right] dx \\ &= (BU_1)_t + (U_1BU_1)_x + (BV_1U_1)_y + u^r[ur_x(x,y) + vr_y(x,y) - u^r] - \\ & u^l[ul_x(x,y) + vl_y(x,y) - u^l] \\ &= (BU_1)_t + (BU_1U_1)_x + (BV_1U_1)_y + (u^r[ur_x(x,y) - u^r] - u^l[ul_x(x,y) - u^l]) + \\ & u^r[vr_y(x,y)] - u^l[vl_y(x,y)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (BU_1)_t + (BU_1U_1)_x + (BV_1U_1)_y + [u(u^r r_x(x, y) - u^l l_x(x, y))] - u^r u^r + u^l u^l + \\
&\quad [u^r v r_y(x, y)] - [u^l v l_y(x, y)] \\
&= (BU_1)_t + (BU_1U_1)_x + (BV_1U_1)_y + \left[\int_r^l (u - U_1) dx \right]_x + \\
&\quad \left[\int_r^l (u - U_1)(v - V_1) dx \right]_y
\end{aligned} \tag{2.60}$$

Selanjutnya adalah integral gradient tekanan barotropik pada ruas kanan x momentum Navier-Stokes (2.58) adalah



Gambar 2.7: Pergerakan partikel di x momentum

sehingga:

$$\eta((x, y, t + \tau) = \eta^l l(x - \delta, y) + \eta^r r(x + \delta, y)$$

Bentuk diatas dapat diuraikan kembali sebagai berikut:

$$\eta(x, y) + \tau \eta_t(x, y) = \eta[l(x, y) - \delta l_x(x, y)] + \eta[r(x, y) + \delta r_x(x, y)]$$

atau

$$\eta(x, y) + \tau \eta_t(x, y) = \eta[l(x, y) - r(x, y)] - \eta \delta l_x(x, y) + \eta \delta r_x(x, y)$$

yakni

$$\eta(x, y) + \tau \eta_t(x, y) = \eta(x, y) - \eta \delta l_x(x, y) + \eta \delta r_x(x, y)$$

atau

$$\tau \eta_t(x, y) = -\delta \eta l_x(x, y) + \delta \eta r_x(x, y)$$

yakni

$$\eta_t(x, y) = \frac{-\delta}{\tau} \eta l_x(x, y) + \frac{\delta}{\tau} \eta r_x(x, y)$$

atau

$$\eta_t(x, y) = \gamma \eta l_x(x, y) + \gamma \eta r_x(x, y) \quad , \forall \lim_{\tau \rightarrow 0} \delta \frac{\delta}{\tau} = \gamma$$

sehingga:

$$\begin{aligned} \int_r^l \eta_x dx &= \left(\int_r^l \eta dx \right)_x + \eta_t(x, y) \\ \int_r^l \eta_x dx &= \left(\int_r^l \eta dx \right)_x - \eta^l l_x(x, y) + \eta^r r_x(x, y) \\ &= (B\eta_1)_x - (\eta^l - \eta_1)l_x + (\eta^r - \eta_1)r_x \end{aligned} \quad (2.61)$$

Selanjutnya integral kekentalan pada ruas kanan x momentum Navier-Stokes

(2.60) dari kiri ke kanan adalah

$$\int_r^l v \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] dx = \int_r^l [(vu_x)_x + (vu_y)_y] dx$$

Dengan menggunakan asumsi kondisi batas kekentalan di sepanjang sumbu x yaitu:

$$v(u_x l_x - u_y) = \gamma_l u$$

$$v(u_x r_x - u_y) = \gamma_r u$$

Dalam hal ini

$$vu(x, y, t + \tau) = vur(x + \delta, y) + vul(x - \delta, y)$$

Bentuk diatas dapat diuraikan kembali menjadi

$$vu(x, y) + \tau v u_t(x, y) = vur(x, y) + v\delta r_x(x, y) + vul(x, y) - v\delta l_x(x, y)$$

atau

$$vu(x, y) + v\tau u_t(x, y) = vu(r(x, y) - l(x, y)) + vu\delta r_x(x, y) - vu\delta l_x(x, y)$$

yakni

$$vu(x, y) + v\tau u_t(x, y) = vu(x, y) + vu\delta r_x(x, y) - vu\delta l_x(x, y)$$

sehingga

$$v\tau u_t(x, y) = vu\delta r_x(x, y) - vu\delta l_x(x, y)$$

yakni

$$vu_t(x, y) = vu \frac{\delta}{\tau} r_x(x, y) - vu \frac{\delta}{\tau} l_x(x, y)$$

sehingga

$$vu_t(x, y) = vur_x(x, y) - vul_x(x, y)$$

Sehingga integral ruas kiri pada kekentalan Navier-Stokes adalah

$$\begin{aligned} & \int_r^l (vu_x)_x dx + \int_r^l (vu_y)_y dx \\ &= \left(\int_r^l vu_x dx \right)_x + \left(\int_r^l vu_y dx \right)_y + v(u_x l_x - u_y) - v(u_x r_x - u_y) \\ &= \left(\int_r^l vu_x dx \right)_x + \left(\int_r^l vu_y dx \right)_y + v(u_x l_x - u_x r_x) + v(u_y - u_y) \\ &= (V_1 B(U_1)_x)_x + (V_1 B(U_1)_y)_y + v(u_x l_x - u_x r_x) \\ &= (V_1 B(U_1)_x)_x + (V_1 B(U_1)_y)_y + vU_1 \end{aligned} \tag{2.62}$$

Sehingga diperoleh kesimpulan umum integral x momentum Navier-Stokes sebagai berikut:

1. Ruas kiri Navier-Stokes (2.60)

$$(BU_1)_t + (BU_1U_1)_x + (BV_1U_1)_y + \left[\int_r^l (u - U_1) dx \right]_x + \left[\int_r^l (u - U_1)(v - V_1) dx \right]_y$$

dengan $\left[\int_r^l (u - U_1) dx \right]_x + \left[\int_r^l (u - U_1)(v - V_1) dx \right]_y$ diabaikan karena terlalu kecil

2. Integral tekanan (2.61)

$$(B\eta_1)_x - (\eta^l - \eta_1)l_x + (\eta^r - \eta_1)r_x$$

dengan $-(\eta^l - \eta_1)l_x + (\eta^r - \eta_1)r_x$ diabaikan karena terlalu kecil

3. Integral kekentalan (2.62)

$$(\nu_1 B(U_1)_x)_x + (\nu_1 B(U_1)_y)_y + \nu U_1$$

Sehingga persamaan x momentum Saint Venant 2D adalah:

$$(BU_1)_t + (BU_1U_1)_x + (BV_1U_1)_y = -g(B\eta_1)_x + (\nu_1 B(U_1)_x)_x + (\nu_1 B(U_1)_y)_y + \nu U_1 \quad (2.63)$$

Dengan cara yang analog, maka dapat dikonstruksi y momentum Saint Venant dengan integral Navier – Stokes.

Maka integral ruas kiri y momentum Navier-Stokes (2.47) adalah

$$\int_{x_1=r}^{x_2=l} \left[\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right] dy$$

$$= \left(\int_{x_1=r}^{x_2=l} v dy \right)_t + \left(\int_r^l u v dy \right)_x + \left(\int_r^l v v dy \right)_y + v|_r^l \left(\int_r^l v dy \right)_x + v|_r^l \left(\int_r^l v dy \right)_y$$

Dengan menggunakan kondisi batas di kiri dan di kanan

$$v(ur_x(x, y) + vr_y(x, y) - u^r) = \gamma_r u$$

$$-v(ul_x(x, y) + vl_y(x, y) - u^l) = \gamma_l u$$

maka

$$\int_{x_1=r}^{x_2=l} \left[\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right] dy$$

$$= (BV_2)_t + (U_2 BV_2)_x + (BV_2 V_2)_y + v^r [ur_x(x, y) + vr_y(x, y) - v^r]$$

$$- v^l [ul_x(x, y) + vl_y(x, y) - v^l]$$

$$= (BV_2)_t + (U_2 BV_2)_x + (BV_2 V_2)_y + (v^r [ur_x(x, y) - v^r] - v^l [ul_x(x, y) - v^l])$$

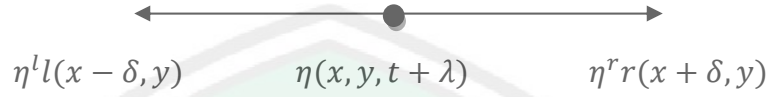
$$+ v^r [vr_y(x, y)] - v^l [vl_y(x, y)]$$

$$= (BV_2)_t + (U_2 BV_2)_x + (BV_2 V_2)_y + [u(v^r r_x(x, y) - v^l l_x(x, y))] - v^r v^r + v^l v^l$$

$$+ [v^r vr_y(x, y)] - [v^l vl_y(x, y)]$$

$$= (BV_2)_t + (U_2 BV_2)_x + (BV_2 V_2)_y \quad (2.64)$$

Selanjutnya integral gradient tekanan barotropik pada ruas kanan y momentum Navier-Stokes (2.59) adalah



Gambar 2.8: Pergerakan partikel di y momentum

sehingga

$$\eta((x, y, t + \tau) = \eta^l l(x - \delta, y) + \eta^r r(x + \delta, y)$$

Bentuk di atas dapat diuraikan kembali menjadi

$$\eta(x, y) + \tau \eta_t(x, y) = \eta[l(x, y) - \delta l_x(x, y)] + \eta[r(x, y) + \delta r_x(x, y)]$$

atau

$$\eta(x, y) + \tau \eta_t(x, y) = \eta[l(x, y) - r(x, y)] - \eta \delta l_x(x, y) + \eta \delta r_x(x, y)$$

sehingga

$$\eta(x, y) + \tau \eta_t(x, y) = \eta(x, y) - \eta \delta l_x(x, y) + \eta \delta r_x(x, y)$$

didapatkan

$$\tau \eta_t(x, y) = -\delta \eta l_x(x, y) + \delta \eta r_x(x, y)$$

yakni

$$\eta_t(x, y) = \frac{-\delta}{\tau} \eta l_x(x, y) + \frac{\delta}{\tau} \eta r_x(x, y)$$

atau

$$\eta_t(x, y) = \gamma \eta l_x(x, y) + \gamma \eta r_x(x, y) \quad , \forall \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\delta}{\tau} = \gamma$$

sehingga

$$\int_r^l \eta_y dy = \left(\int_r^l \eta dy \right)_y + \eta_t(x, y)$$

$$\int_r^l \eta_x dx = \left(\int_r^l \eta dy \right)_y - \eta^l l_x(x, y) + \eta^r r_x(x, y)$$

$$= (B\eta_2)_y - (\eta^l - \eta_1)l_x + (\eta^r - \eta_1)r_x \quad (2.65)$$

Selanjutnya integral persamaan kontinu dengan batas $l(x, \eta)$ dan $r(x, \eta)$ adalah

$$\int_r^l \frac{\partial u}{\partial x} dz + \int_r^l \frac{\partial v}{\partial y} dz = 0$$

$$\left(\int_r^l u dz \right)_x - ul_x + ur_x + \left(\int_r^l v dz \right)_y - v^l + v^r = 0$$

$$\left(\int_r^l u dz \right)_x + \left(\int_r^l v dz \right)_y - ul_x - v^l + ur_x + v^r = 0$$

$$(BU_1)_x + (BV_1)_y - ul_x - v^l + ur_x + v^r = 0$$

$$(BU_1)_x + (BV_1)_y = 0$$

Selanjutnya integral persamaan kontinu sepanjang y adalah

$$\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial u}{\partial x} + \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\left[\int_{-h}^{\eta} u dz \right]_x + \left[\int_{-h}^{\eta} v dz \right]_y - \eta_t = 0$$

$$\int_{r(x, \eta)}^{l(x, \eta)} \left(-\eta_t + \left[\int_{-h}^{\eta} u dz \right]_x + \left[\int_{-h}^{\eta} v dz \right]_y \right) dx = 0$$

$$\left(-\int_r^l \eta dx\right)_t - \eta l_x + \eta r_x + \left[\int_r^l dx \int_{-h}^\eta u dz\right]_x - \left(\int_{-h}^\eta u dz\right)(l_x) + \left(\int_{-h}^\eta u dz\right)(r_x) +$$

$$\left[\int_r^l dx \int_{-h}^\eta u dz\right]_y - \int_{-h}^\eta v^l dz + \int_{-h}^\eta v^r dz = 0$$

$$\left(-\int_r^l H dx\right)_t - H l_x + H r_x + \left[\int_r^l dx \int_{-h}^\eta u dz\right]_x - \left(\int_{-h}^\eta u dz\right)(l_x) +$$

$$\left(\int_{-h}^\eta u dz\right)(r_x) + \left[\int_r^l dx \int_{-h}^\eta u dz\right]_y - \int_{-h}^\eta v^l dz + \int_{-h}^\eta v^r dz = 0$$

$$A_{total} + \left(\int_{-h}^\eta B U_2\right)_x = 0$$

Selanjutnya integral kekentalan pada ruas kanan y momentum Navier-Stokes dari kiri ke kanan adalah

$$\int_r^l v \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] dy = \int_r^l [(v v_x)_x + (v v_y)_y] dy$$

Dengan menggunakan asumsi kondisi batas kekentalan di sepanjang sumbu y

$$v(-v_x \eta_x - v_y \eta_y) = \gamma_T (v_a - v^s)$$

Dalam hal ini

$$v v(x, y, t + \tau) = v v \eta(x + \delta, y) + v v(-h(x - \delta, y))$$

Bentuk di atas dapat diuraikan kembali menjadi

$$\begin{aligned} v v(x, y) + v \tau v_t(x, y) \\ = v v \eta(x, y) + v v \delta \eta_x(x, y) + v u(-h(x, y)) - v v \delta(-h_x(x, y)) \end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned} v v(x, y) + v \tau v_t(x, y) \\ = v v(\eta(x, y) - (-h(x, y))) + v v \delta \eta_x(x, y) - v v \delta(-h_x(x, y)) \end{aligned}$$

sehingga

$$vv(x, y) + \tau v_t(x, y) = vv(x, y) + vv\delta\eta_x(x, y) - vv\delta(-h_x(x, y))$$

atau

$$\tau v_t(x, y) = vv\delta\eta_x(x, y) - vv\delta(-h_x(x, y))$$

sehingga

$$vv_t(x, y) = vv \frac{\delta}{\tau} \eta_x(x, y) - vv \frac{\delta}{\tau} (-h_x(x, y))$$

didapatkan

$$vv_t(x, y) = vv\eta_x(x, y) - vv(-h_x(x, y))$$

Sehingga integral ruas kiri pada kekentalan Navier-Stokes adalah

$$\begin{aligned} & \int_r^l (vv_x)_x dy + \int_r^l (vv_y)_y dy \\ &= \left(\int_r^l vv_x dy \right)_x + \left(\int_r^l vv_y dy \right)_y + v(-v_x\eta_x - v_y\eta_y) \\ &= \left(\int_r^l vv_x dy \right)_x + \left(\int_r^l vv_y dy \right)_y + v(-v_x\eta_x - v_y\eta_y) \\ &= (v_2 B(V_2)_x)_x + (v_2 B(V_2)_y)_y + v(-v_x\eta_x - v_y\eta_y) \\ &= (v_2 B(V_2)_x)_x + (v_2 B(V_2)_y)_y + vV_2 \end{aligned} \tag{2.66}$$

Diperoleh kesimpulan umum integral y momentum Navier-Stokes sebagai berikut:

1. Ruas Kiri Navier-Stokes (2.64)

$$(BV_2)_t + (U_2BV_2)_x + (BV_2V_2)_y + \left[u(v^r r_x(x, y) - v^l l_x(x, y)) \right] - v^r v^r + v^l v^l + [v^r v r_y(x, y)] - [v^l v l_y(x, y)]$$

dengan $[u(v^r r_x(x, y) - v^l l_x(x, y))] - v^r v^r + v^l v^l + [v^r v r_y(x, y)] - [v^l v l_y(x, y)]$ diabaikan karena terlalu kecil

2. Integral Tekanan (2.65)

$$(B\eta_2)_y - (\eta^l - \eta_1)l_x + (\eta^r - \eta_1)r_x$$

dengan $-(\eta^l - \eta_1)l_x + (\eta^r - \eta_1)r_x$ diabaikan karena terlalu kecil

3. Integral Kekentalan (2.66)

$$(v_2 B(V_2)_x)_x + (v_2 B(V_2)_y)_y + vV_2$$

Sehingga persamaan y momentum Saint Venant 2D adalah:

$$\begin{aligned} (BV_2)_t + (U_2BV_2)_x + (BV_2V_2)_y = \\ -g(B\eta_2)_y + (v_2 B(V_2)_x)_x + (v_2 B(V_2)_y)_y + vV_2 \end{aligned} \quad (2.67)$$

2.11 Kajian Batas dalam Al-Quran

Perhatikan Q. S. Al-Baqarah ayat 286

لَا يُكَلِّفُ اللَّهُ نَفْسًا إِلَّا وُسْعَهَا لَهَا مَا كَسَبَتْ وَعَلَيْهَا مَا اكْتَسَبَتْ رَبَّنَا لَا تُؤَاخِذْنَا إِنْ نَسِينَا أَوْ
أَخْطَأْنَا رَبَّنَا وَلَا تَحْمِلْ عَلَيْنَا إَصْرًا كَمَا حَمَلْتَهُ عَلَى الَّذِينَ مِنْ قَبْلِنَا رَبَّنَا وَلَا تُحَمِّلْنَا مَا لَا
طَاقَةَ لَنَا بِهِ ۖ وَاعْفُ عَنَّا وَارْحَمْنَا أَنْتَ مَوْلَانَا فَانصُرْنَا عَلَى الْقَوْمِ الْكَافِرِينَ



Artinya:

Allah tidak membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya. ia mendapat pahala (dari kebajikan) yang diusahakannya dan ia mendapat siksa (dari kejahatan) yang dikerjakannya. (mereka berdoa): "Ya Tuhan kami, janganlah Engkau hukum kami jika kami lupa atau kami tersalah. Ya Tuhan kami, janganlah Engkau bebaskan kepada kami beban yang berat sebagaimana Engkau bebaskan kepada orang-orang sebelum kami. Ya Tuhan kami, janganlah Engkau pikulkan kepada kami apa yang tak sanggup kami memikulnya. beri ma'aflah kami; ampunilah kami; dan rahmatilah kami. Engkaulah penolong kami, maka tolonglah kami terhadap kaum yang kafir."

Ayat tersebut menyatakan bahwa Allah S.W.T tidak membebani para hamba-Nya melainkan sesuai dengan batas kemampuan mereka. Allah S.W.T menciptakan manusia berbeda-beda. Satu cerdas dan berpotensi besar, salah satunya kurang cerdas dan berpotensi sedikit, satu kuat, satunya lemah dan kurus. Harus diterima bahwa sebagian dari perbedaan-perbedaan ini adalah kelaziman penciptaan (IRIB, 2010).

Dengan ayat ini Allah S.W.T menyatakan bahwa seseorang dibebani hanyalah sesuai dengan batas kesanggupannya. Agama Islam adalah agama yang tidak membebani manusia dengan beban yang berat dan sukar. Mudah, ringan dan tidak

sempit adalah asas pokok dari agama Islam (Tafsir DEPAG RI, 2009). Sesuai dengan firman Allah S.W.T dalam Q. S. Al-Hajj ayat 78 sebagai berikut:

...وَمَا جَعَلَ عَلَيْكُمْ فِي الدِّينِ مِنْ حَرَجٍ...

Artinya:

...dan Dia sekali-kali tidak menjadikan untuk kamu dalam agama suatu kesempitan...

Begitu pula firman Allah S.W.T dalam Q. S. An-Nisa' ayat 28:

يُرِيدُ اللَّهُ أَنْ يُخَفِّفَ عَنْكُمْ وَخُلِقَ الْإِنْسَانُ ضَعِيفًا

Artinya:

Allah hendak memberikan keringanan kepadamu, dan manusia dijadikan bersifat lemah.

Yaitu dalam syari'at di antaranya boleh menikahi budak bila telah cukup syarat-syaratnya.

Firman-Nya pula dalam Q. S. Al-Baqarah ayat 185:

...يُرِيدُ اللَّهُ بِكُمُ الْيُسْرَ وَلَا يُرِيدُ بِكُمُ الْعُسْرَ...

Artinya:

...Allah menghendaki kemudahan bagimu, dan tidak menghendaki kesukaran bagimu...

Kemudian Allah S.W.T menerangkan hasil beban yang telah dibebankan dan dilaksanakan oleh manusia, yaitu amal saleh yang dikerjakan mereka, maka balasannya akan diterima dan dirasakan oleh mereka berupa pahala dan surga.

Sebaliknya perbuatan dosa yang dikerjakan oleh manusia, maka hukuman karena mengerjakan perbuatan itu akan dirasakan dan ditanggung pula oleh mereka, yaitu siksa dan azab di neraka (Tafsir DEPAG RI, 2009).

Ayat ini mendorong manusia agar mengerjakan perbuatan yang baik serta menunaikan kewajiban-kewajiban yang telah ditetapkan oleh agama. Ayat ini memberi pengertian bahwa perbuatan baik itu adalah perbuatan yang mudah dikerjakan manusia karena sesuai dengan watak dan tabiatnya, sedang perbuatan yang jahat adalah perbuatan yang sukar dikerjakan manusia karena tidak sesuai dengan watak dan tabiatnya (Tafsir DEPAG RI, 2009).

Manusia dilahirkan dalam keadaan fitrah yang suci dan telah tertanam dalam hatinya jiwa ketauhidan. Sekalipun manusia oleh Allah S.W.T diberi persediaan untuk menjadi baik dan persediaan menjadi buruk, tetapi dengan adanya jiwa tauhid yang telah tertanam dalam hatinya sejak ia masih dalam rahim ibunya, maka tabiat ingin mengerjakan kebajikan itu lebih nyata dalam hati manusia dibanding dengan tabiat ingin mengerjakan kejahatan. Adanya keinginan yang tertanam pada diri seseorang untuk mengerjakan suatu pekerjaan yang baik akan memberikan kemungkinan baginya untuk mendapat jalan yang mudah dalam mengerjakan pekerjaan itu apalagi bila ia berhasil dan dapat menikmati usahanya itu, maka dorongan dan semangat untuk mengerjakan pekerjaan baik yang lain semakin bertambah pada dirinya (Tafsir DEPAG RI, 2009).

Setiap jiwa akan mendapat pahala kebaikan yang dilakukannya dan dosa atas kejahatan yang dilakukannya, Allah S.W.T mengampuni keterbatasan mereka dalam

mengemban kewajiban-kewajiban dan hal-hal haram yang dilanggar, tidak memberikan sanksi atas kesalahan dan kelupaan mereka, Dia sangat memudahkan syari'at-Nya dan tidak membebani mereka hal-hal yang berat dan sulit sebagaimana yang dibebankan kepada orang-orang sebelum mereka serta tidak membebankan mereka sesuatu yang di luar batas kemampuan mereka. Dia telah mengampuni, merahmati dan menolong mereka atas orang-orang kafir (Zidniagus, 2009).

Berkaitan dengan isi penyampaian Allah dalam Al-Quran terdapat pula batasan tentang apa yang boleh manusia ketahui dan tidak boleh diketahui manusia. Hal ini tergambar dalam Q. S. Al-Isra' ayat 85, sebagai berikut:

وَيَسْأَلُونَكَ عَنِ الرُّوحِ قُلِ الرُّوحُ مِنْ أَمْرِ رَبِّي وَمَا أُوتِيتُمْ مِنَ الْعِلْمِ إِلَّا قَلِيلًا

Artinya:

Dan mereka bertanya kepadamu tentang roh. Katakanlah: "Roh itu termasuk urusan Tuhan-ku, dan tidaklah kamu diberi pengetahuan melainkan sedikit".

Ayat ini berisi tentang hukum membahas ruh. Berdasarkan ayat ini, maka mayoritas manusia dapat mengetahui bahwa hukum membahas ruh adalah haram. Allah S.W.T menyatakan bahwa manusia tidak diperbolehkan mengkaji dan mempertanyakan roh secara mendalam karena roh merupakan rahasia Allah S.W.T dan hanya Allah S.W.T yang benar-benar mengetahui. Sedangkan manusia cukup diberi sedikit pengetahuan mengenai roh tersebut. Manusia dengan pengetahuan yang sedikit yang dimilikinya, mempunyai beragam pendapat tentang hukum membahas ruh, sebagai berikut (Kajian IKPMA, 2007):

1. Pendapat Imam Abdul Salam al-Laḳāni dan Mayoritas Muhaqqiqin.

Mayoritas Muhaqqiqin tidak terlalu dalam membahas tentang hakikat ruh dengan jenis dan pasal yang berbeda, itu semua disebabkan karena tidak adanya pengetahuan yang mereka dengar tentang ruh dan juga tidak didapati nash Syari' (Allah S.W.T) yang menjelaskan hal itu. Maka menurut mereka alangkah lebih baiknya kalau kita tidak terlalu jauh dalam membahas ruh, serta hukumnya makruh (Bayjuri, 2004).

2. Imam al-Junaidi seorang sufi berpendapat bahwa ruh itu adalah rahasia Allah S.W.T, dan menurutnya seorang hamba tidak boleh membahas ruh terlalu jauh. Dan perkataannya menunjukkan pengharaman (Muyassar, 1988:15).

3. Menurut Syaikh as-Sahr Wardi bahwa pembahasan tentang ruh sangatlah sulit. Manusia hanya diberi sedikit pengetahuan tentang itu. Maka tidak pantas bagi manusia terlalu jauh dalam membahasnya (Wardi, 2004).

Dari tiga pendapat di atas dapat disimpulkan bahwa dari sudut pemikiran Islam menolak tentang pembahasan ruh dengan alasan tidak ada adab kepada as-Syari', dan haram hukumnya karena ruh adalah termasuk rahasia dan urusan Tuhan. Namun ada pendapat lain yang perlu kita perhatikan, selain bahwa para filsuf Islam sudah pasti membolehkan dalam hal membahas ruh, mulai dari Alkindi filosof Arab pertama dalam risalah pendeknya "Tentang Ruh", Ibnu Sina, Ibnu Tufail, Miskawaih, Ibnu Rusd dan lain-lain dari ulama salaf dan khalaf (Kajian IKPMA, 2007).

Didalam bukunya, DR. Mohammad Sayed Ahmad al-Musayyar (1988) bersama mayoritas ulama berpendapat bahwa didalam firman-Nya surah al-Isra' ayat

85 tidak ada indikasi pengharaman tentang membahas ruh ataupun indikasi pemakruhannya. Menurutnya para ulama yang melarang membahas ruh didasari oleh beberapa hal, diantaranya adalah pemahaman tentang makna ruh yang diartikan sebagai “Rahasia Allah S.W.T”, bahwa ruh termasuk alam mujarrad (murni adanya) yang tidak bisa didapati dan adanya hadits yang menerangkan tentang Asbab an-Nuzul ayat tersebut.

Selanjutnya, dalil-dalil ulama yang membolehkan membahas ruh adalah sebagai berikut:

1. Para ahli tafsir tidak sepakat bahwa ruh yang dimaksud dalam ayat tersebut adalah arwah bani adam. Imam al-Alusi dalam bukunya yang berjudul “Ruh al-Ma’ani” berpendapat bahwa yang dimaksud adalah hakikat ruh manusia. Selain itu, dalam beberapa riwayat sahih Bukhari dan Muslim terdapat pertanyaan tentang ruh, salah satunya adalah hadits yang diriwayatkan dari Ibnu ‘Abbas bahwa ruh yang dimaksud adalah Jibril a.s, serta riwayat dari Ali Bin Abi Thalib bahwa yang dimaksud ruh adalah malaikat yang memiliki 70 ribu wajah (Katsir, 2003).

2. Ibnu Qayyim berkata dalam salah satu kitabnya: bahwa mayoritas ulama salaf bahkan semuanya berpendapat bahwa yang dimaksudkan dengan ruh dalam ayat tersebut adalah bukan arwah Bani Adam, melainkan ruh yang Allah S.W.T beritakan pada kitabnya, “bahwasanya ia akan ada bersama para malaikat di hari kiamat, ruh itu adalah malaikat yang mulia” (Jauziyah, 2003).

3. Imam Ibnu Hajar berkata bahwa pendapat Imam Junaidi dan para pengikutnya telah menyalahi pendapat mayoritas Sufi Muta’akhir karna mereka banyak membahas

tentang ruh, bahkan sebagian dari para sufi menjelaskan hakikat ruh serta mengklaim aib bagi orang yang melarang membahas ruh (Atsqolani, 2004).

4. Para Nabi dan ulama banyak berbicara tentang Allah S.W.T, mulai dari sifat-sifat-Nya, Asma al-Husna-Nya, lalu membahas tentang wujud, wahdaniat, kalam al-Ilahi dan sebagainya, dan kita tidak mendengar seorang pun yang mengharamkan untuk membahasnya ataupun memakruhkannya, padahal sudah jelas bahwa al-Qur'an menjelaskan bahwa Allah S.W.T itu Esa. Maka ruh derajatnya tidak lebih tinggi dari pada semua hal yang berhubungan dengan-Nya (Muyassar, 1988:19-20).



BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Solusi Partikular Masalah Nilai Awal Persamaan Saint Venant 2D

Pada penyelesaian masalah nilai awal persamaan Saint Venant dua dimensi dikerjakan dengan langkah penyelesaian di x momentum persamaan Saint Venant 2D dan y momentum persamaan Saint Venant 2D dengan menggunakan *d'Alembert solution*.

Persamaan x momentum Saint Venant 2D (2.83) dapat dinyatakan kembali dalam bentuk

$$B \frac{\partial U_1}{\partial t} + BU_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} + BV_1 \frac{\partial U_1}{\partial y} = -gB \frac{\partial \eta_1}{\partial x} + \nu_1 B \left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} \right) + \nu U_1 \quad (3.1)$$

Bentuk persamaan Laplace di ruas kanan persamaan Saint Venant dapat dikerjakan dengan pemisahan operator

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) U_1(x, y) \quad (3.2)$$

dimisalkan

$$\left(\frac{\partial U_1}{\partial x} - i \frac{\partial U_1}{\partial y} \right) = w(x, y) \quad (3.3)$$

Substitusi persamaan (3.3) ke persamaan (3.2) sehingga bentuk Laplace dapat dinyatakan kembali menjadi

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} = \frac{\partial w}{\partial x} + i \frac{\partial w}{\partial y}$$

Sehingga persamaan (3.1) menjadi

$$B \frac{\partial U_1}{\partial t} + BU_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} + BV_1 \frac{\partial U_1}{\partial y} + gB \frac{\partial \eta_1}{\partial x} - \nu U_1 = \frac{\partial w}{\partial x} + i \frac{\partial w}{\partial y}$$

Karena disini bekerja pada x momentum, maka $BV_1 \frac{\partial U_1}{\partial y}$ diabaikan sehingga persamaan (3.1) menjadi

$$B \frac{\partial U_1}{\partial t} + BU_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} + gB \frac{\partial \eta_1}{\partial x} - \nu U_1 = \frac{\partial w}{\partial x} + i \frac{\partial w}{\partial y}$$

Sehingga diperoleh sistem persamaan diferensial parsial orde 1

$$\left(\frac{\partial U_1}{\partial x} - i \frac{\partial U_1}{\partial y} \right) = w(x, y) \quad (3.3)$$

$$\left(B \frac{\partial U_1}{\partial t} + BU_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} + gB \frac{\partial \eta_1}{\partial x} - \nu U_1 = \frac{\partial w}{\partial x} + i \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (3.4)$$

Pada kondisi awal (ketika $t = 0$), diasumsikan $U_1(x, 0) = f(x)$ dan $\frac{\partial U_1}{\partial t}(x, 0) = g(x)$, sehingga persamaan (3.4) menjadi

$$Bg(x) + BU_1 f'(x) + gB \frac{\partial \eta_1}{\partial x} - \nu U_1 = \frac{\partial U_1}{\partial t} + U_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} \quad (3.5)$$

Jika pada kondisi awal gelombang adalah turbulen $\sin \tau$, maka

$$x_1 = \sin \tau$$

$$\text{sehingga } U_1(x_1, 0) = U_1(\sin \tau, 0) = f(\sin \tau)$$

Pada persamaan (3.5) dapat disimpulkan kurva-kurva singgung persamaan diferensial parsial, yaitu

$$\frac{dt}{ds} = 1, \frac{dx}{ds} = U_1, \text{ dan } \frac{dU_1}{ds} = Bg(x) + BU_1 f'(x) + gB \frac{\partial \eta_1}{\partial x} - \nu U_1$$

$$\text{sehingga } t = s, x = U_1 s, \text{ dan } U_1 = \int_{s=0}^s (Bg(x) + BU_1 f'(x) + gB \frac{\partial \eta_1}{\partial x} - \nu U_1) ds$$

Akibat dari kesimpulan yang didapat dari persamaan (3.5) bersama kondisi awal

$$x_2 = \sin \tau + U_1 s$$

Dengan menambahkan $U_1 s$ pada kedua ruas persamaan di atas, diperoleh

$$x_2 + U_1 s = \sin \tau + 2U_1 s, \forall t = s$$

sehingga

$$\begin{aligned} U &= \int_{t_1=0}^{t_2=t=s} \left(Bg(x) + BU_1 f'(x) + gB \frac{\partial \eta_1}{\partial x} - vU_1 \right) ds \\ &= \int_{t_1=0}^{t_2=t=s} \left(Bg(x_1) + BU_1 f'(x_1) + gB \frac{\partial \eta_1}{\partial x} - vU_1 \right) ds + f(x_2) \\ &= \int_{t_1=0}^{t_2=t=s} \left(Bg(x_1) + BU_1 f'(x_1) + gB \frac{\partial \eta_1}{\partial x} - vU_1 \right) dt + f(x_2), \forall t = s \\ &= \int_{t_1=0}^{t_2=t=s} \left(Bg(\sin \tau) + BU_1 f'(\sin \tau) + gB \frac{\partial \eta_1}{\partial t} - vU_1 \right) dt + f(x + U_1 t) \\ &\quad , \forall \eta(x(t), y(t)) \\ &= \int_{t_1=0}^{t_2=t=s} \left(Bg(\sin \tau) + BU_1 f'(\sin \tau) + gB \frac{\partial \eta_1}{\partial t} - vU_1 \right) dt + f(\sin \tau + 2U_1 t) \\ &= \int_{t_1=0}^{t_2=t=s} \left(Bg(\sin \tau) + BU_1 f'(\sin \tau) - vU_1 \right) dt + \left(gB \eta_1 \Big|_{t_1=0}^{t_2=t=s} \right) \\ &\quad + f(\sin \tau + 2U_1 t) \end{aligned}$$

diasumsikan

$$\lambda = \sin \tau + 2U_1 t \text{ atau } \lambda = \sin \tau + 2U_1 s$$

$$\text{oleh karena itu: } \frac{d\lambda}{dt} = 2U_1$$

$$\text{sehingga } dt = \frac{d\lambda}{2U_1} \text{ maka } U_1 dt = \frac{1}{2} d\lambda .$$

Hal ini mengakibatkan

$$\begin{aligned}
 U(x, t) &= \int_{\lambda_1=\sin \tau}^{\lambda_2=\sin \tau+2U_1t} Bg(\lambda_1) \frac{d\lambda}{2U_1} + \int_{\lambda_1=\sin \tau}^{\lambda_2=\sin \tau+2U_1t} \frac{1}{2} Bf'(\lambda_1) d\lambda - \\
 &\quad \int_{\lambda_1=\sin \tau}^{\lambda_2=\sin \tau+2U_1t} \nu U_1 \frac{d\lambda}{2U_1} + \left(gB\eta_1 \Big|_{\lambda_1=\sin \tau}^{\lambda_2=\sin \tau+2U_1t} \right) + f(\lambda_2) \\
 &= \frac{B}{2U_1} \int_{\lambda_1=\sin \tau}^{\lambda_2=\sin \tau+2U_1t} g(\lambda_1) d\lambda + \frac{B}{2} \int_{\lambda_1=\sin \tau}^{\lambda_2=\sin \tau+2U_1t} f'(\lambda_1) d\lambda - \\
 &\quad \frac{\nu}{2U_1} \int_{\lambda_1=\sin \tau}^{\lambda_2=\sin \tau+2U_1t} U_1 d\lambda + \left(gB\eta_1 \Big|_{\lambda_1=\sin \tau}^{\lambda_2=\sin \tau+2U_1t} \right) + f(\lambda_2) \\
 &= \frac{B}{2U_1} \left(G(\sin \tau + 2U_1t) - G(\sin \tau) \right) + \frac{B}{2} \left(f(\sin \tau + 2U_1t) - f(\sin \tau) \right) - \\
 &\quad \frac{\nu}{2U_1} \left(U_1(\sin \tau + 2U_1t) - U_1(\sin \tau) \right) + gB \left(\eta_1(\sin \tau + 2U_1t) - \right. \\
 &\quad \left. \eta_1(\sin \tau) \right) + f(\sin \tau + 2U_1t) \\
 &= \left[\frac{B}{2U_1} G(\sin \tau + 2U_1t) + \frac{B}{2} f(\sin \tau + 2U_1t) - \frac{\nu}{2U_1} U_1(\sin \tau + 2U_1t) + \right. \\
 &\quad \left. gB\eta_1(\sin \tau + 2U_1t) + f(\sin \tau + 2U_1t) \right] - \left[\frac{B}{2U_1} G(\sin \tau) + \frac{B}{2} f(\sin \tau) - \right. \\
 &\quad \left. \frac{\nu}{2U_1} U_1(\sin \tau) + gB\eta_1(\sin \tau) \right]
 \end{aligned}$$

Maka diperoleh

$$\begin{aligned}
 U(x, t) &= \left[\frac{B}{2U_1} G(\sin \tau + 2U_1t) + \frac{3}{2} Bf(\sin \tau + 2U_1t) - \right. \\
 &\quad \left. \frac{\nu}{2U_1} U_1(\sin \tau + 2U_1t) + gB\eta_1(\sin \tau + 2U_1t) \right] - \\
 &\quad \left[\frac{B}{2U_1} G(\sin \tau) + \frac{B}{2} f(\sin \tau) - \frac{\nu}{2U_1} U_1(\sin \tau) + gB\eta_1(\sin \tau) \right]
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Adalah nilai awal bentuk bidang pada x momentum Saint Venant 2D.

Selanjutnya dengan prosedur yang analog dapat diselesaikan bidang awal gelombang pada persamaan y momentum persamaan Saint Venant 2D.

Persamaan y momentum Saint Venant 2D (2.87) dapat dinyatakan kembali menjadi

$$B \frac{\partial V_2}{\partial t} + BU_2 \frac{\partial V_2}{\partial x} + BV_2 \frac{\partial V_2}{\partial y} = -gB \frac{\partial \eta_2}{\partial y} + \nu_2 B \left(\frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_2}{\partial y^2} \right) + \nu V_2 \quad (3.7)$$

Dengan menggunakan prosedur pemisahan operator diferensial, maka bentuk persamaan Laplace di ruas kanan dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_2}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) V_2(x, y) \quad (3.8)$$

dimisalkan

$$\left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - i \frac{\partial V_2}{\partial y} \right) = w(x, y) \quad (3.9)$$

Substitusi persamaan (3.9) ke persamaan (3.8) sehingga menjadi

$$\frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_2}{\partial y^2} = \frac{\partial w}{\partial x} + i \frac{\partial w}{\partial y}$$

sehingga persamaan (3.7) menjadi

$$B \frac{\partial V_2}{\partial t} + BU_2 \frac{\partial V_2}{\partial x} + BV_2 \frac{\partial V_2}{\partial y} + gB \frac{\partial \eta_2}{\partial y} - \nu V_2 = \frac{\partial w}{\partial x} + i \frac{\partial w}{\partial y}$$

Karena disini bekerja pada y momentum, maka $BU_2 \frac{\partial V_2}{\partial x}$ diabaikan sehingga persamaan (3.7) menjadi

$$B \frac{\partial V_2}{\partial t} + BV_2 \frac{\partial V_2}{\partial y} + gB \frac{\partial \eta_2}{\partial y} - \nu V_2 = \frac{\partial w}{\partial x} + i \frac{\partial w}{\partial y}$$

Sehingga diperoleh PDP orde 1

$$\left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - i \frac{\partial V_2}{\partial y} \right) = w(x, y) \quad (3.10)$$

$$\left(B \frac{\partial V_2}{\partial t} + BV_2 \frac{\partial V_2}{\partial y} + gB \frac{\partial \eta_2}{\partial y} - \nu V_2 \right) = \frac{\partial w}{\partial x} + i \frac{\partial w}{\partial y} \quad (3.11)$$

Pada kondisi awal di $t = 0$, diasumsikan $V_2(x, 0) = f(x)$ dan $\frac{\partial V_2}{\partial t}(x, 0) = g(x)$,

sehingga persamaan (3.11) menjadi

$$Bg(x) + BV_2 f'(x) + gB \frac{\partial \eta_2}{\partial y} - \nu V_2 = \frac{\partial V_2}{\partial t} + V_2 \frac{\partial V_2}{\partial x} \quad (3.12)$$

Jika pada kondisi awal gelombang adalah turbulen $\sin \tau$, maka

$$x_1 = \sin \tau \text{ dan } t = 0$$

$$\text{sehingga } V_1(x, 0) = V_1(\sin \tau, 0) = f(\sin \tau)$$

Pada persamaan (3.12) dapat disimpulkan

$$\frac{dt}{ds} = 1, \frac{dx}{ds} = V_2, \text{ dan } \frac{dV_2}{ds} = Bg(x) + BV_2 f'(x) + gB \frac{\partial \eta_2}{\partial y} - \nu V_2$$

$$\text{sehingga } t = s, x = V_2 s, \text{ dan } V_2 = \int_{s=0}^s (Bg(x) + BV_2 f'(x) + gB \frac{\partial \eta_2}{\partial y} - \nu V_2) ds$$

Akibat dari kesimpulan yang didapat dari persamaan (3.12) bersama kondisi awal

$$x_2 = \sin \tau + V_2 s$$

Akibatnya dengan menambahkan kedua ruas persamaan dengan $V_2 s$ diperoleh

$$x_2 + V_2 s = \sin \tau + 2V_2 s$$

Untuk setiap $t = s$, maka persamaan di atas dapat dinyatakan sebagai berikut

$$x_2 + V_2 s = \sin \tau + 2V_2 t, \forall t = s$$

sehingga

$$\begin{aligned}
 V &= \int_{t_1=0}^{t_2=t=s} \left(Bg(x) + BV_2 f'(x) + gB \frac{\partial \eta_2}{\partial y} - vV_2 \right) ds \\
 &= \int_{t_1=0}^{t_2=t=s} \left(Bg(x) + BV_2 f'(x) + gB \frac{\partial \eta_2}{\partial y} - vV_2 \right) ds + f(x_2) \\
 &= \int_{t_1=0}^{t_2=t=s} \left(Bg(x_1) + BV_2 f'(x_1) + gB \frac{\partial \eta_2}{\partial y} - vV_2 \right) dt + f(x_2) \quad , \forall t = s \\
 &= \int_{t_1=0}^{t_2=t=s} \left(Bg(\sin \tau) + BV_2 f'(\sin \tau) + gB \frac{\partial \eta_2}{\partial t} - vV_2 \right) dt + f(x + V_2 t) \\
 &\quad , \forall \eta(x(t), y(t)) \\
 &= \int_{t_1=0}^{t_2=t=s} \left(Bg(\sin \tau) + BV_2 f'(\sin \tau) + gB \frac{\partial \eta_2}{\partial t} - vV_2 \right) dt + f(\sin \tau + 2V_2 t) \\
 &= \int_{t_1=0}^{t_2=t=s} \left(Bg(\sin \tau) + BV_2 f'(\sin \tau) - vV_2 \right) dt + \left(gB \eta_2 \Big|_{t_1=0}^{t_2=t=s} \right) \\
 &\quad + f(\sin \tau + 2V_2 t)
 \end{aligned}$$

Diasumsikan

$$\lambda = \sin \tau + 2V_2 t$$

oleh karena itu: $\frac{d\lambda}{dt} = 2V_2$

sehingga $dt = \frac{d\lambda}{2V_2}$ maka $V_2 dt = \frac{1}{2} d\lambda$

Akibatnya:

$$\begin{aligned}
 V(y, t) &= \int_{\lambda_1=\sin \tau}^{\lambda_2=\sin \tau+2V_2t} Bg(\lambda_1) \frac{d\lambda}{2V_2} + \int_{\lambda_1=\sin \tau}^{\lambda_2=\sin \tau+2V_2t} \frac{1}{2} Bf'(\lambda_1) d\lambda - \\
 &\quad \int_{\lambda_1=\sin \tau}^{\lambda_2=\sin \tau+2V_2t} vV_2 \frac{d\lambda}{2V_2} + \left(gB\eta_2 \Big|_{\lambda_1=\sin \tau}^{\lambda_2=\sin \tau+2V_2t} \right) + f(\lambda_2) \\
 &= \frac{B}{2V_2} \int_{\lambda_1=\sin \tau}^{\lambda_2=\sin \tau+2V_2t} g(\lambda_1) d\lambda + \frac{B}{2} \int_{\lambda_1=\sin \tau}^{\lambda_2=\sin \tau+2V_2t} f'(\lambda_1) d\lambda - \\
 &\quad \frac{v}{2V_2} \int_{\lambda_1=\sin \tau}^{\lambda_2=\sin \tau+2V_2t} V_2 d\lambda + \left(gB\eta_2 \Big|_{\lambda_1=\sin \tau}^{\lambda_2=\sin \tau+2V_2t} \right) + f(\lambda_2) \\
 &= \frac{B}{2V_2} (G(\sin \tau + 2V_2t) - G(\sin \tau)) + \frac{B}{2} (f(\sin \tau + 2V_2t) - f(\sin \tau)) - \\
 &\quad \frac{v}{2V_2} (V_2(\sin \tau + 2V_2t) - V_2(\sin \tau)) + gB(\eta_2(\sin \tau + 2V_2t) - \\
 &\quad \eta_2(\sin \tau)) + f(\sin \tau + 2V_2t) \\
 &= \left[\frac{B}{2V_2} G(\sin \tau + 2V_2t) + \frac{B}{2} f(\sin \tau + 2V_2t) - \frac{v}{2V_2} U_1(\sin \tau + 2V_2t) + \right. \\
 &\quad \left. gB\eta_2(\sin \tau + 2V_2t) + f(\sin \tau + 2V_2t) \right] - \left[\frac{B}{2V_2} G(\sin \tau) + \frac{B}{2} f(\sin \tau) - \right. \\
 &\quad \left. \frac{v}{2V_2} V_2(\sin \tau) + gB\eta_2(\sin \tau) \right]
 \end{aligned}$$

Maka diperoleh

$$\begin{aligned}
 V(y, t) &= \left[\frac{B}{2V_2} G(\sin \tau + 2V_2t) + \frac{3}{2} Bf(\sin \tau + 2V_2t) - \frac{v}{2V_2} V_2(\sin \tau + \right. & (3.13) \\
 &\quad \left. 2V_2t) + gB\eta_2(\sin \tau + 2V_2t) \right] - \left[\frac{B}{2V_2} G(\sin \tau) + \frac{B}{2} f(\sin \tau) - \right. \\
 &\quad \left. \frac{v}{2V_2} V_2(\sin \tau) + gB\eta_2(\sin \tau) \right]
 \end{aligned}$$

Adalah solusi awal bidang gelombang di y momentum Saint Venant 2D.

3.2 Solusi Masalah Nilai Batas Persamaan Saint Venant 2D di x Momentum

Solusi Masalah Nilai Batas Persamaan Saint Venant 2D di x momentum dikerjakan sebagai berikut. Pandang persamaan x momentum Saint Venant (3.1), dengan syarat

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} = 0 \quad , \quad \Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

Dimisalkan

$$U_1 = \frac{\partial w}{\partial y} \text{ dan } V_1 = -\frac{\partial w}{\partial x} \quad (3.14)$$

Sehingga berakibat

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} &\approx \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ &= \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 \end{aligned}$$

Substitusi (3.14) ke persamaan (3.1) sehingga menghasilkan

$$\begin{aligned} B \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) + B \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) + B \left(-\frac{\partial w}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) &= -gB \frac{\partial \eta_1}{\partial x} + B\nu_1 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) + \\ \nu_1 \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned}$$

Bentuk persamaan tersebut dapat ditransformasi dalam persamaan diferensial parsial nonlinear orde empat sebagai berikut

$$\begin{aligned} B \frac{\partial}{\partial t} (\Delta w) + B \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} (\Delta w) + B \left(-\frac{\partial w}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial y} (\Delta w) &= -gB \frac{\partial \eta_1}{\partial x} + B\nu_1 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \right. \\ \left. \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\Delta w) + \nu \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned}$$

Dapat dinyatakan kembali sebagai berikut

$$\left[B \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] + \left[B \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] + \left[B \left(-\frac{\partial w}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] = \left[-gB \frac{\partial \eta_1}{\partial x} \right] + [Bv_1 \Delta \Delta w] + \left[\nu \frac{\partial w}{\partial y} \right] \quad (3.15)$$

dengan $-gB \frac{\partial \eta_1}{\partial x}$ adalah konstan.

Dengan menggunakan *splitting method*, maka persamaan (3.15) dapat dipisah suku per suku dengan memisalkan $w = F(y, t)x + G(y, t)$ adalah solusi eksak persamaan diferensial parsial orde empat. Maka dapat dinyatakan

$$\frac{\partial w}{\partial x} = F(y, t), \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y} x + \frac{\partial G}{\partial y}$$

Sehingga dengan pemisahan suku per suku solusi persamaan x momentum Saint Venant orde empat dapat dinyatakan sebagai berikut.

Suku pertama dari persamaan (3.15)

$$\begin{aligned} B \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) &= B \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \right) \\ &= B \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial x} F(y, t) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial y} x + \frac{\partial G}{\partial y} \right) \right) \\ &= B \frac{\partial}{\partial t} \left(0 + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} x + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} \right) \\ &= B \frac{\partial^3 F}{\partial t \partial y^2} x + B \frac{\partial^3 G}{\partial t \partial y^2} \end{aligned}$$

Suku kedua dari persamaan (3.15)

$$\begin{aligned}
 B \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) &= B \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \right) \\
 &= B \left(\frac{\partial F}{\partial y} x + \frac{\partial G}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} F(y, t) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial y} x + \frac{\partial G}{\partial y} \right) \right) \\
 &= B \left(\frac{\partial F}{\partial y} x + \frac{\partial G}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(0 + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} x + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} \right) \\
 &= B \left(\frac{\partial F}{\partial y} x + \frac{\partial G}{\partial y} \right) \left(0 + 1 \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + 0 \right) \\
 &= B \left(\frac{\partial F}{\partial y} x + \frac{\partial G}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \\
 &= B \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} x + B \frac{\partial G}{\partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}
 \end{aligned}$$

Suku ketiga dari persamaan (3.15)

$$\begin{aligned}
 B \left(-\frac{\partial w}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) &= -B \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \right) \\
 &= -BF(y, t) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} F(y, t) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial y} x + \frac{\partial G}{\partial y} \right) \right) \\
 &= -BF(y, t) \frac{\partial}{\partial y} \left(0 + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} x + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} \right) \\
 &= -BF(y, t) \left(0 + \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} x + \frac{\partial^3 G}{\partial y^3} \right) \\
 &= -BF(y, t) \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} x - BF(y, t) \frac{\partial^3 G}{\partial y^3}
 \end{aligned}$$

Suku keempat dari persamaan (3.15)

$$\begin{aligned}
 Bv_1\Delta\Delta w &= Bv_1\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \\
 &= Bv_1\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right) \\
 &= Bv_1\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}F(y, t) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial y}x + \frac{\partial G}{\partial y}\right)\right) \\
 &= Bv_1\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(0 + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}x + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2}\right) \\
 &= Bv_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}x\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}x\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}\right)\right) \\
 &= Bv_1\left(0 + \frac{\partial}{\partial x}.0 + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4}x + \frac{\partial^4 G}{\partial y^4}\right) \\
 &= Bv_1\left(\frac{\partial^4 F}{\partial y^4}x + \frac{\partial^4 G}{\partial y^4}\right) \\
 &= Bv_1\frac{\partial^4 F}{\partial y^4}x + Bv_1\frac{\partial^4 G}{\partial y^4}
 \end{aligned}$$

Suku kelima dari persamaan (3.15)

$$v_1 \frac{\partial w}{\partial y} = v_1 \left(\frac{\partial F}{\partial y}x + \frac{\partial G}{\partial y}\right) = v_1 \frac{\partial F}{\partial y}x + v_1 \frac{\partial G}{\partial y}$$

Sehingga persamaan (3.15) menjadi

$$\begin{aligned}
 B \frac{\partial^3 F}{\partial t \partial y^2}x + B \frac{\partial^3 G}{\partial t \partial y^2} + B \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}x + B \frac{\partial G}{\partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - BF(y, t) \frac{\partial^3 F}{\partial y^3}x - BF(y, t) \frac{\partial^3 G}{\partial y^3} \\
 = Bv_1 \frac{\partial^4 F}{\partial y^4}x + Bv_1 \frac{\partial^4 G}{\partial y^4} + v_1 \frac{\partial F}{\partial y}x + v_1 \frac{\partial G}{\partial y}
 \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh persamaan-persamaan terpisah berikut

$$\begin{cases} B \frac{\partial^3 F}{\partial t \partial y^2} x + B \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} x - BF(y, t) \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} x = Bv_1 \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} x + v_1 \frac{\partial F}{\partial y} x & (3.16) \\ B \frac{\partial^3 G}{\partial t \partial y^2} + B \frac{\partial G}{\partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - BF(y, t) \frac{\partial^3 G}{\partial y^3} = Bv_1 \frac{\partial^4 G}{\partial y^4} + v_1 \frac{\partial G}{\partial y} & (3.17) \end{cases}$$

Persamaan (3.16) dan (3.17) saling terpisah.

Selanjutnya persamaan (3.16) dibagi dengan x dan dilakukan proses pengintegralan terhadap y , sehingga menghasilkan

$$B \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial y} + B \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 - BF \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = Bv_1 \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} + v_1 F + f_1(t)$$

Misal $\frac{\partial F}{\partial y} = U_1$ maka

$$B \frac{\partial U_1}{\partial t} + BU_1^2 - BF \frac{\partial U_1}{\partial y} = Bv_1 \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} + v_1 F + f_1(t) \quad (3.18)$$

Persamaan (3.18) dibagi dengan B , sehingga menghasilkan

$$\frac{\partial U_1}{\partial t} = v_1 \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} - U_1^2 + F \frac{\partial U_1}{\partial y} + \frac{v_1 F}{B} \quad (3.19)$$

Persamaan (3.19) akan bersolusi trivial jika $U_1^2 = 0$, akibatnya didapatkan PD linear orde dua

$$\frac{\partial U_1}{\partial t} = v_1 \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} + F \frac{\partial U_1}{\partial y} + \frac{v_1 F}{B} \quad (3.20)$$

Dengan pemisahan variabel dapat dinyatakan $U_1(y, t) = Y(y)T(t)$, $F = Y(y)T(t)$, sehingga persamaan (3.20) menjadi

$$YT' = v_1 Y''T + FY'T + \frac{v_1}{B} YT \quad (3.21)$$

Selanjutnya persamaan (3.21) dibagi dengan $Y(y)T(t)$, sehingga

$$\frac{T'}{T} = v_1 \frac{Y''}{Y} + F \frac{Y'}{Y} + \frac{v_1}{B}$$

Didapatkan pemisahan variabel, yaitu

$$T'(t) = CT(t) \quad \text{dan} \quad v_1 \frac{Y''}{Y} + F \frac{Y'}{Y} + \frac{v_1}{B} = C$$

$$v_1 \frac{Y''}{Y} + F \frac{Y'}{Y} + \frac{v_1}{B} - C = 0 \quad (3.22)$$

Persamaan (3.22) dikalikan Y sehingga didapatkan PDB

$$v_1 Y''(y) + F Y'(y) + \left(\frac{v_1}{B} - C\right) Y(y) = 0 \quad (3.23)$$

Persamaan karakteristik dari persamaan (3.23) adalah

$$v_1 m^2 + Fm + \left(\frac{v_1}{B} - C\right) = 0$$

dengan akar-akar karakteristiknya

$$m_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-F \pm \sqrt{F^2 - 4v_1 \frac{v_1}{B}}}{2v_1}$$

Jika $4v_1 \left(\frac{v_1}{B}\right) > F^2$, maka pilih $F = y^0(t) = 1$, $v = 1,0037 \approx 1$

Sehingga didapatkan akar-akar karakteristik m adalah

$$m_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{1}}}{2 \cdot 1} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

Sehingga solusi umum pemisahan variable $Y(y)$ adalah

$$Y(y) = C_1 e^{-\frac{1}{2}y} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} y + C_2 e^{-\frac{1}{2}y} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} y \quad (3.24)$$

Bersama dengan *boundary condition* nya yaitu $0 \leq y \leq W$, maka persamaan (3.24)

pada saat $y = 0$ adalah

$$Y(y) = C_1 \cos 0 + C_2 \cdot \sin 0 = 0$$

$$C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 = 0$$

$$C_1 = 0$$

sedangkan persamaan (3.24) pada saat $y = W$ adalah

$$Y(y) = C_1 e^{-\frac{1}{2}W} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} W + C_2 e^{-\frac{1}{2}W} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} W = 0$$

$$C_2 e^{-\frac{1}{2}W} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} W = 0$$

Karena $C_2 e^{-\frac{1}{2}W} \neq 0$, maka $\sin \frac{\sqrt{3}}{2} W = 0$ dengan syarat

$$\frac{\sqrt{3}}{2} W = n\pi, \quad \forall n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

sehingga didapat solusi untuk pemisahan variabel $Y(y)$ adalah

$$Y(y) = a_n \sin \frac{2n\pi}{\sqrt{3}} y \quad (3.25)$$

Uji kesahihan solusi:

Substitusi persamaan (3.25) ke persamaan (3.23), dengan

$$Y'(y) = a_n \frac{2n\pi}{\sqrt{3}} \cos \frac{2n\pi}{\sqrt{3}} y$$

$$Y''(y) = -a_n \frac{2n\pi}{\sqrt{3}} \frac{2n\pi}{\sqrt{3}} \sin \frac{2n\pi}{\sqrt{3}} y$$

Sehingga didapatkan

$$-v_1 a_n \frac{2n\pi}{\sqrt{3}} \frac{2n\pi}{\sqrt{3}} \sin \frac{2n\pi}{\sqrt{3}} y + F a_n \frac{2n\pi}{\sqrt{3}} \cos \frac{2n\pi}{\sqrt{3}} y + \left(\frac{v_1}{B} - C \right) a_n \sin \frac{2n\pi}{\sqrt{3}} y = 0$$

$$, \forall a_n = \frac{1}{B} \int_0^S f(x) \cos \frac{n\pi x}{B} dx \text{ dan } \forall \pi = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi, \dots$$

Maka solusi (3.25) adalah solusi untuk persamaan (3.23).

Selanjutnya untuk solusi pemisahan variabel $T(t)$

$$T'(t) = CT(t)$$

$$T'(t) - CT(t) = 0$$

$$T'(t) - \frac{2n\pi}{\sqrt{3}} T(t) = 0 \quad (3.26)$$

Persamaan karakteristik dari persamaan (3.26) adalah

$$m - \frac{2n\pi}{\sqrt{3}} = 0$$

Sehingga didapatkan akar karakteristik

$$m = \frac{2n\pi}{\sqrt{3}}$$

Sehingga solusi umum dari pemisahan variabel $T(t)$ adalah

$$T(t) = b_n e^{\frac{2n\pi}{\sqrt{3}}t} \quad (3.27)$$

Uji kesahihan solusi:

Substitusi persamaan (3.27) ke persamaan (3.26) dengan

$$T'(t) = b_n \frac{2n\pi}{\sqrt{3}} e^{\frac{2n\pi}{\sqrt{3}}t}$$

Sehingga didapatkan

$$b_n \frac{2n\pi}{\sqrt{3}} e^{\frac{2n\pi}{\sqrt{3}}t} - \frac{2n\pi}{\sqrt{3}} b_n e^{\frac{2n\pi}{\sqrt{3}}t} = 0$$

$$\forall b_n = \frac{1}{B} \int_0^S f(x) \sin \frac{n\pi x}{B} dx \text{ dan } \forall n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Maka solusi (3.27) adalah solusi untuk persamaan (3.26).

Sehingga didapatkan solusi umum masalah nilai awal dan masalah nilai batas yaitu:

$$\begin{aligned} U_1(y, t) &= Y(y)T(t) \\ &= a_n \sin \frac{2n\pi}{\sqrt{3}} y b_n e^{\frac{2n\pi}{\sqrt{3}}t} \end{aligned} \quad (3.28)$$

Selanjutnya dilakukan proses pengintegralan persamaan (3.17) terhadap y , sehingga menghasilkan

$$B \frac{\partial^2 G}{\partial t \partial y} + B \frac{\partial G}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial y} - BF \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = Bv_1 \frac{\partial^3 G}{\partial y^3} + v_1 \frac{\partial G}{\partial y} + f_2(t) \quad (3.29)$$

Misal $\frac{\partial G}{\partial y} = U_1$ maka persamaan (3.29) menjadi

$$B \frac{\partial U_1}{\partial t} + B \frac{\partial F}{\partial y} U_1 - BF \frac{\partial U_1}{\partial y} = B v_1 \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} + v_1 G + f_2(t) \quad (3.30)$$

Persamaan (3.30) di bagi dengan B sehingga menjadi

$$\frac{\partial U_1}{\partial t} = v_1 \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} - \frac{\partial F}{\partial y} U_1 + F \frac{\partial U_1}{\partial y} + \frac{v_1 G}{B} \quad (3.31)$$

Persamaan (3.31) bersolusi trivial jika $U_1 = 0$, sehingga didapatkan PD linear orde dua

$$\frac{\partial U_1}{\partial t} = v_1 \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} + F \frac{\partial U_1}{\partial y} + \frac{v_1 G}{B} \quad (3.32)$$

Selanjutnya digunakan metode pemisahan variabel untuk persamaan (3.32) sebagai berikut

Misal: $U_1(y, t) = Y(y)T(t)$, $G = Y(y)T(t)$, maka

$$Y(y)T'(t) = v_1 Y''(y)T(t) + F Y'(y)T(t) + \frac{v_1}{B} Y(y)T(t) \quad (3.33)$$

Persamaan 3.33 dibagi dengan $Y(y)T(t)$ sehingga menjadi

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = v_1 \frac{Y''(y)}{Y(y)} + F \frac{Y'(y)}{Y(y)} + \frac{v_1}{B}$$

Sehingga didapatkan

$$T'(t) = CT(t) \text{ dan } v_1 \frac{Y''(y)}{Y(y)} + F \frac{Y'(y)}{Y(y)} + \frac{v_1}{B} = C.$$

$$v_1 \frac{Y''(y)}{Y(y)} + F \frac{Y'(y)}{Y(y)} + \frac{v_1}{B} - C = 0 \quad (3.34)$$

Persamaan (3.34) dikali dengan $Y(y)$ sehingga didapatkan PDB

$$v_1 Y''(y) + F Y'(y) + \left(\frac{v_1}{B} - C\right) Y(y) = 0 \quad (3.35)$$

Persamaan karakteristik dari persamaan (3.35) adalah

$$v_1 m^2 + Fm + \frac{v_1}{B} - C = 0$$

dengan akar-akar karakteristik

$$m_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-F \pm \sqrt{F^2 - 4v_1 \frac{v_1}{B}}}{2v_1}$$

Jika $4v_1 \left(\frac{v_1}{B}\right) > F^2$, maka pilih $F = y^0(t) = 1$, $v = 1,0037 \approx 1$

Sehingga didapatkan akar-akar karakteristik m adalah

$$m_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{1}}}{2 \cdot 1} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

Sehingga solusi umum dari pemisahan variabel $Y(y)$ adalah:

$$Y(y) = C_1 e^{-\frac{1}{2}y} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} y + C_2 e^{-\frac{1}{2}y} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} y \quad (3.36)$$

Bersama dengan *boundary condition* nya yaitu $0 \leq y \leq W$, maka persamaan (3.36)

pada saat $y = 0$ adalah

$$Y(y) = C_1 \cos 0 + C_2 \cdot \sin 0 = 0$$

$$C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 = 0$$

$$C_1 = 0$$

Sedangkan persamaan (3.36) pada saat $y = W$ adalah

$$Y(y) = C_1 e^{-\frac{1}{2}W} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} W + C_2 e^{-\frac{1}{2}W} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} W = 0$$

$$C_2 e^{-\frac{1}{2}W} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} W = 0$$

Karena $C_2 e^{-\frac{1}{2}W} \neq 0$, maka $\sin \frac{\sqrt{3}}{2} W = 0$, dengan syarat

$$\frac{\sqrt{3}}{2} W = n\pi, \quad \forall n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

sehingga didapat solusi pemisahan variabel $Y(y)$ adalah

$$Y(y) = a_n \sin \frac{2n\pi}{\sqrt{3}} y \quad (3.37)$$

Uji kesahihan solusi:

Substitusi persamaan (3.37) ke persamaan (3.35), dengan

$$Y'(y) = a_n \frac{2n\pi}{\sqrt{3}} \cos \frac{2n\pi}{\sqrt{3}} y$$

$$Y''(y) = -a_n \frac{2n\pi}{\sqrt{3}} \frac{2n\pi}{\sqrt{3}} \sin \frac{2n\pi}{\sqrt{3}} y$$

Sehingga didapatkan

$$-v_1 a_n \frac{2n\pi}{\sqrt{3}} \frac{2n\pi}{\sqrt{3}} \sin \frac{2n\pi}{\sqrt{3}} y + F a_n \frac{2n\pi}{\sqrt{3}} \cos \frac{2n\pi}{\sqrt{3}} y + \left(\frac{v_1}{B} - C \right) a_n \sin \frac{2n\pi}{\sqrt{3}} y = 0$$

$$, \forall a_n = \frac{1}{B} \int_0^S f(x) \cos \frac{n\pi x}{B} dx \text{ dan } \forall \pi = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi, \dots$$

Maka solusi (3.37) adalah solusi untuk persamaan (3.35).

Selanjutnya untuk solusi pemisahan variabel $T(t)$

$$T'(t) = CT(t)$$

$$T'(t) - CT(t) = 0$$

$$T'(t) - \frac{2n\pi}{\sqrt{3}} T(t) = 0 \quad (3.38)$$

Persamaan karakteristik dari persamaan (3.38) adalah

$$m - \frac{2n\pi}{\sqrt{3}} = 0$$

Sehingga didapatkan akar karakteristik

$$m = \frac{2n\pi}{\sqrt{3}}$$

Sehingga solusi umum untuk pemisahan variabel $T(t)$ adalah

$$T(t) = b_n e^{\frac{2n\pi}{\sqrt{3}}t} \quad (3.39)$$

Uji kesahihan solusi:

Substitusi persamaan (3.39) ke persamaan (3.38) dengan

$$T'(t) = b_n \frac{2n\pi}{\sqrt{3}} e^{\frac{2n\pi}{\sqrt{3}}t}$$

Sehingga didapatkan

$$b_n \frac{2n\pi}{\sqrt{3}} e^{\frac{2n\pi}{\sqrt{3}}t} - \frac{2n\pi}{\sqrt{3}} b_n e^{\frac{2n\pi}{\sqrt{3}}t} = 0$$

$$\forall b_n = \frac{1}{B} \int_0^S f(x) \sin \frac{n\pi x}{B} dx \text{ dan } \forall n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Maka solusi (3.39) adalah solusi untuk persamaan (3.38).

Sehingga didapatkan solusi umum masalah nilai awal dan masalah nilai batas yaitu

$$U_1(y, t) = Y(y)T(t) \quad (3.40)$$

$$= a_n \sin \frac{2n\pi}{\sqrt{3}} y b_n e^{\frac{2n\pi}{\sqrt{3}}t}$$

3.3 Solusi Masalah Nilai Batas Persamaan Saint Venant 2D di y Momentum

Pandang persamaan y momentum Saint Venant 2D (3.7) dengan syarat

$$\frac{\partial U_2}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} = 0, \quad \Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

Dimisalkan

$$U_2 = \frac{\partial w}{\partial y} \text{ dan } V_2 = -\frac{\partial w}{\partial x} \quad (3.41)$$

sehingga berakibat

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_2}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} &\approx \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ &= \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 \end{aligned}$$

Substitusi (3.41) ke persamaan (3.7) sehingga menghasilkan

$$\begin{aligned} B \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial w}{\partial x} \right) + B \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial w}{\partial x} \right) + B \left(-\frac{\partial w}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial w}{\partial x} \right) &= -gB \frac{\partial \eta_2}{\partial x} + Bv_2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \right. \\ \left. \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(-\frac{\partial w}{\partial x} \right) + v_2 \left(-\frac{\partial w}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

Persamaan di atas dapat diubah dalam bentuk persamaan diferensial parsial nonlinear orde empat sebagai berikut.

$$\begin{aligned} -B \frac{\partial}{\partial t} (\Delta w) - B \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} (\Delta w) + B \left(-\frac{\partial w}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial y} (-\Delta w) &= \\ -gB \frac{\partial \eta_2}{\partial x} - Bv_2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\Delta w) + v_2 \left(-\frac{\partial w}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

yakni

$$\begin{aligned} & \left[-B \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] - \left[B \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] + \\ & \left[B \left(-\frac{\partial w}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] = \left[-gB \frac{\partial \eta_2}{\partial x} \right] - [B \nu_2 \Delta \Delta w] + \left[\nu_2 \left(-\frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.42)$$

dengan $-gB \frac{\partial \eta_2}{\partial x}$ adalah konstan.

Dengan menggunakan *splitting method*, maka persamaan di atas dapat dipisah suku per suku dengan memisalkan $w = F(x, t)y + G(y, t)$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = F(x, t), \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} y + \frac{\partial G}{\partial x}$$

sehingga dengan pemisahan solusi suku per suku persamaan y momentum Saint Venant orde empat dapat dinyatakan sebagai berikut.

Suku pertama dari persamaan (3.42)

$$\begin{aligned} -B \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) &= -B \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \right) \\ &= -B \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial x} y + \frac{\partial G}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} F(x, t) \right) \\ &= -B \frac{\partial}{\partial t} \left(0 + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} y + \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \right) \\ &= -B \frac{\partial^3 F}{\partial t \partial x^2} y - B \frac{\partial^3 G}{\partial t \partial x^2} \end{aligned}$$

Suku kedua dari persamaan (3.42)

$$\begin{aligned}
 -B \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) &= -B \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \right) \\
 &= -BF(x, t) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial x} y + \frac{\partial G}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} F(x, t) \right) \\
 &= -BF(x, t) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} y + \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + 0 \right) \\
 &= -BF(x, t) \left(\frac{\partial^3 F}{\partial x^3} y + \frac{\partial^3 G}{\partial x^3} \right) \\
 &= -BF(x, t) \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} y - BF(x, t) \frac{\partial^3 G}{\partial x^3}
 \end{aligned}$$

Suku ketiga dari persamaan (3.42)

$$\begin{aligned}
 B \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) &= B \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \right) \\
 &= B \left(\frac{\partial F}{\partial x} y + \frac{\partial G}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial x} y + \frac{\partial G}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} F(x, t) \right) \\
 &= B \left(\frac{\partial F}{\partial x} y + \frac{\partial G}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} y + \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + 0 \right) \\
 &= B \left(\frac{\partial F}{\partial x} y + \frac{\partial G}{\partial x} \right) \left(1 \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 0 + 0 \right) \\
 &= B \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} y + B \frac{\partial G}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}
 \end{aligned}$$

Suku keempat dari persamaan (3.42)

$$\begin{aligned}
 -Bv_2\Delta\Delta w &= -Bv_2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \\
 &= -Bv_2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right) \\
 &= -Bv_2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x}y + \frac{\partial G}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}F(x, t)\right) \\
 &= -Bv_2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}y + \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + 0\right) \\
 &= -Bv_2\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}y\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}y\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\right)\right) \\
 &= -Bv_2\left(\frac{\partial^4 F}{\partial x^4}y + \frac{\partial^4 G}{\partial x^4} + 0 + \frac{\partial}{\partial y}.0\right) \\
 &= -Bv_2\left(\frac{\partial^4 F}{\partial x^4}y + \frac{\partial^4 G}{\partial x^4}\right) \\
 &= -Bv_2\frac{\partial^4 F}{\partial x^4}y - Bv_2\frac{\partial^4 G}{\partial x^4}
 \end{aligned}$$

Suku kelima dari persamaan (3.42)

$$\begin{aligned}
 v_2\left(-\frac{\partial w}{\partial x}\right) &= -v_2\left(\frac{\partial F}{\partial x}y + \frac{\partial G}{\partial x}\right) \\
 &= -v_2\frac{\partial F}{\partial x}y - v_2\frac{\partial G}{\partial x}
 \end{aligned}$$

Sehingga persamaan (3.42) menjadi

$$\begin{aligned}
 &-B\frac{\partial^3 F}{\partial t\partial x^2}y - B\frac{\partial^3 G}{\partial t\partial x^2} - BF(x, t)\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}y - BF(x, t)\frac{\partial^3 G}{\partial x^3} + B\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}y + B\frac{\partial G}{\partial x}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \\
 &-Bv_2\frac{\partial^4 F}{\partial x^4}y - Bv_2\frac{\partial^4 G}{\partial x^4} - v_2\frac{\partial F}{\partial x}y - v_2\frac{\partial G}{\partial x}
 \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh persamaan-persamaan terpisah berikut

$$\begin{cases} -B \frac{\partial^3 F}{\partial t \partial x^2} y + B \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} y - BF(x, t) \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} y = -Bv_2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} y - v_2 \frac{\partial F}{\partial x} y \end{cases} \quad (3.43)$$

$$\begin{cases} -B \frac{\partial^3 G}{\partial t \partial x^2} - BF(x, t) \frac{\partial^3 G}{\partial x^3} + B \frac{\partial G}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -Bv_2 \frac{\partial^4 G}{\partial x^4} - v_2 \frac{\partial G}{\partial x} \end{cases} \quad (3.44)$$

Persamaan (3.43) dan (3.44) saling terpisah.

Selanjutnya persamaan (3.43) dibagi dengan x dan dilakukan proses pengintegralan terhadap x , sehingga menghasilkan

$$-B \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial x} + B \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 - BF \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -Bv_2 \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} - v_2 F + f_1(t) \quad (3.45)$$

Misal $\frac{\partial F}{\partial x} = V_2$ maka persamaan (3.45) menjadi

$$-B \frac{\partial V_2}{\partial t} + BV_2^2 - BF \frac{\partial V_2}{\partial x} = -Bv_2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2} - v_2 Fy + f_1(t) \quad (3.46)$$

Persamaan (3.46) dibagi dengan B sehingga menjadi

$$\frac{\partial V_2}{\partial t} = v_2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2} + V_2^2 - F \frac{\partial V_2}{\partial x} + \frac{v_2 F}{B} \quad (3.47)$$

Persamaan (3.47) akan mempunyai penyelesaian trivial jika $V_2 = 0$, maka didapatkan

PD orde 2

$$\frac{\partial V_2}{\partial t} = v_2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2} - F \frac{\partial V_2}{\partial x} + \frac{v_2 F}{B} \quad (3.48)$$

Dengan pemisahan variabel dapat dinyatakan: $V_2(x, t) = X(x)T(t)$, $F = X(x)T(t)$,

sehingga persamaan (3.48) menjadi

$$XT' = v_2 X''T - FX'T + \frac{v_2}{B} XT \quad (3.49)$$

Selanjutnya persamaan (3.49) dibagi dengan XT , sehingga

$$\frac{T'}{T} = v_2 \frac{X''}{X} - F \frac{X'}{X} + \frac{v_2}{B}$$

Sehingga didapatkan pemisahan variabel

$$T'(t) = CT(t) \quad \text{dan} \quad v_2 \frac{X''}{X} - F \frac{X'}{X} + \frac{v_2}{B} = C$$

$$v_2 \frac{X''}{X} - F \frac{X'}{X} + \frac{v_2}{B} - C = 0 \quad (3.50)$$

Persamaan (3.50) dikali dengan $X(x)$ sehingga didapatkan PDB

$$v_2 X''(x) - FX'(x) + \left(\frac{v_2}{B} - C\right) X(x) = 0 \quad (3.51)$$

Persamaan karakteristik dari persamaan (3.51) adalah

$$v_2 m^2 - Fm + \frac{v_2}{B} - C = 0$$

dengan akar-akar karakteristik

$$m_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{F \pm \sqrt{(-F)^2 - 4v_2 \frac{v_2}{B}}}{2v_2}$$

Jika $4v_2 \left(\frac{v_2}{B}\right) > F^2$, maka pilih $F = y^0(t) = 1$, $v = 1,0037 \approx 1$

Sehingga didapatkan akar-akar karakteristik m adalah

$$m_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{1}}}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

Sehingga solusi umum pemisahan variabel $X(x)$ adalah

$$X(x) = C_1 e^{\frac{1}{2}y} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} y + C_2 e^{\frac{1}{2}y} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} y \quad (3.52)$$

Bersama dengan *boundary condition* nya yaitu $0 \leq x \leq L$, maka persamaan (3.52)

pada saat $x = 0$

$$X(x) = C_1 \cos 0 + C_2 \cdot \sin 0 = 0$$

$$C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 = 0$$

$$C_1 = 0$$

Sedangkan persamaan (3.52) pada saat $x = L$

$$Y(y) = C_1 e^{\frac{1}{2}L} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}L + C_2 e^{\frac{1}{2}L} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}L = 0$$

$$C_2 e^{\frac{1}{2}L} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}L = 0$$

Karena $C_2 e^{\frac{1}{2}L} \neq 0$, maka $\sin \frac{\sqrt{3}}{2}L = 0$, dengan syarat

$$\frac{\sqrt{3}}{2}L = n\pi, \quad \forall n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

sehingga didapat solusi pemisahan variabel $X(x)$ adalah

$$X(x) = a_n \sin \frac{2n\pi}{\sqrt{3}}x \quad (3.53)$$

Uji kesahihan solusi:

Substitusi persamaan (3.53) ke persamaan (3.51), dengan

$$X'(y) = a_n \frac{2n\pi}{\sqrt{3}} \cos \frac{2n\pi}{\sqrt{3}}x$$

$$X''(y) = -a_n \frac{2n\pi}{\sqrt{3}} \frac{2n\pi}{\sqrt{3}} \sin \frac{2n\pi}{\sqrt{3}}x$$

Sehingga didapatkan

$$-v_1 a_n \frac{2n\pi}{\sqrt{3}} \frac{2n\pi}{\sqrt{3}} \sin \frac{2n\pi}{\sqrt{3}} x + F a_n \frac{2n\pi}{\sqrt{3}} \cos \frac{2n\pi}{\sqrt{3}} x + \left(\frac{v_1}{B} - C \right) a_n \sin \frac{2n\pi}{\sqrt{3}} x = 0$$

$$, \forall a_n = \frac{1}{B} \int_0^S f(x) \cos \frac{n\pi x}{B} dx \text{ dan } \forall \pi = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi, \dots$$

Maka solusi (3.53) adalah solusi untuk persamaan (3.51).

Selanjutnya untuk solusi pemisahan variabel $T(t)$

$$T'(t) = CT(t)$$

$$T'(t) - CT(t) = 0$$

$$T'(t) - \frac{2n\pi}{\sqrt{3}} T(t) = 0 \quad (3.54)$$

Persamaan karakteristik dari persamaan (3.54) adalah

$$m - \frac{2n\pi}{\sqrt{3}} = 0$$

Sehingga didapatkan akar karakteristiknya yaitu

$$m = \frac{2n\pi}{\sqrt{3}}$$

Sehingga solusi umum pemisahan variabel $T(t)$ adalah

$$T(t) = b_n e^{\frac{2n\pi}{\sqrt{3}} t} \quad (3.55)$$

Uji kesahihan solusi:

Substitusi persamaan (3.55) ke persamaan (3.54) dengan

$$T'(t) = b_n \frac{2n\pi}{\sqrt{3}} e^{\frac{2n\pi}{\sqrt{3}} t}$$

Sehingga didapatkan

$$b_n \frac{2n\pi}{\sqrt{3}} e^{\frac{2n\pi}{\sqrt{3}}t} - \frac{2n\pi}{\sqrt{3}} b_n e^{\frac{2n\pi}{\sqrt{3}}t} = 0$$

$$\forall b_n = \frac{1}{B} \int_0^s f(x) \sin \frac{n\pi x}{B} dx \text{ dan } \forall n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Maka solusi (3.55) adalah solusi untuk persamaan (3.54).

Sehingga didapatkan solusi umum masalah nilai awal dan masalah nilai batas yaitu

$$\begin{aligned} V_2(x, t) &= X(x)T(t) \\ &= a_n \sin \frac{2n\pi}{\sqrt{3}} x b_n e^{\frac{2n\pi}{\sqrt{3}}t} \end{aligned} \quad (3.56)$$

Selanjutnya dilakukan proses pengintegralan persamaan (3.44) terhadap x , sehingga menghasilkan

$$-B \frac{\partial^2 G}{\partial t \partial x} + B \frac{\partial G}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial x} - BF \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = -Bv_2 \frac{\partial^3 G}{\partial x^3} - v_2 G + f_2(t) \quad (3.57)$$

Misal $\frac{\partial G}{\partial x} = V_2$ maka persamaan (3.57) menjadi

$$-B \frac{\partial V_2}{\partial t} + B \frac{\partial F}{\partial x} V_2 - BF \frac{\partial V_2}{\partial x} = -Bv_2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2} - v_2 G + f_2(t) \quad (3.58)$$

Persamaan (3.58) dibagi dengan B sehingga menjadi

$$\frac{\partial V_2}{\partial t} = v_2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2} + \frac{\partial F}{\partial x} V_2 - F \frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{v_2 G}{B} \quad (3.59)$$

Persamaan (3.59) bersolusi trivial jika $V_2 = 0$, sehingga didapatkan PD orde dua

$$\frac{\partial V_2}{\partial t} = v_2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2} - F \frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{v_2 G}{B}$$

Selanjutnya digunakan metode pemisahan variabel sebagai berikut

Misal: $V_2(x, t) = X(x)T(t)$, $G = X(x)T(t)$, maka

$$X(x)T'(t) = v_2 X''(x)T(t) - F X'(x)T(t) - \frac{v_2}{B} X(x)T(t) \quad (3.60)$$

Tiap-tiap ruas persamaan (3.60) dibagi dengan $X(x)T(t)$

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = v_2 \frac{X''(x)}{X(x)} - F \frac{X'(x)}{X(x)} - \frac{v_2}{B}$$

Sehingga didapatkan pemisahan variabel

$$T'(t) = CT(t) \quad \text{dan} \quad v_2 \frac{X''(x)}{X(x)} - F \frac{X'(x)}{X(x)} - \frac{v_2}{B} = C. \quad (3.61)$$

$$v_2 \frac{X''(x)}{X(x)} - F \frac{X'(x)}{X(x)} - \frac{v_2}{B} - C = 0$$

Persamaan (3.61) dikali dengan $X(x)$ sehingga didapatkan PDB

$$v_2 X''(x) - F X'(x) - \left(\frac{v_2}{B} + C \right) X(x) = 0 \quad (3.62)$$

Persamaan karakteristik dari persamaan (3.62) adalah

$$v_2 m^2 - Fm - \frac{v_2}{B} - C = 0$$

dengan akar-akar karakteristik

$$m_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{F \pm \sqrt{F^2 - 4v_2 \frac{-v_2}{B}}}{2v_2}$$

Jika $4v_2 \left(\frac{-v_2}{B} \right) > F^2$, maka pilih $F = y^0(t) = 1$, $v = 1,0037 \approx 1$

Sehingga didapatkan akar-akar karakteristik m adalah

$$m_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{-1}{1}}}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$m_1 = 1,6 \text{ dan } m_2 = -0,6$$

Sehingga solusi umum pemisahan variabel $X(x)$ adalah

$$X(x) = C_1 e^{1,6x} + C_2 e^{-0,6x} \quad (3.62)$$

Bersama dengan *boundary condition* nya yaitu $0 \leq x \leq L$, maka persamaan (3.62)

pada saat $x = 0$

$$X(x) = C_1 e^{1,6x} + C_2 e^{-0,6x} = 0$$

$$C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 1 = 0$$

$$C_1 = -C_2$$

Sedangkan persamaan (3.62) pada saat $x = L$

$$X(x) = C_1 e^{1,6L} + C_2 e^{-0,6L} = 0$$

$$-C_2 e^{1,6L} + C_2 e^{-0,6L} = 0$$

$$C_2 (e^{1,6L} + e^{-0,6L}) = 0$$

Karena $e^{1,6L} + e^{-0,6L} \neq 0$, maka $C_2 = 0$, sehingga tidak terdapat solusi untuk $X(x)$

dalam separating fungsi G pada y momentum ini.

Hal ini berakibat $V_2(x, t) = X(x) \cdot T(t) = 0$

Sehingga didapatkan solusi umum masalah nilai batas persamaan Saint Venant 2D adalah

$$W(x, y, t) = U_1(y, t) + V_2(x, t) \quad (3.63)$$

$$= 2 \left(a_n \sin \frac{2n\pi}{\sqrt{3}} y b_n e^{\frac{2n\pi}{\sqrt{3}} t} \right) + a_n \sin \frac{2n\pi}{\sqrt{3}} x b_n e^{\frac{2n\pi}{\sqrt{3}} t}$$

Contoh:

$$B \frac{\partial U_1}{\partial t} + B U_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} + B V_1 \frac{\partial U_1}{\partial y} = -gB \frac{\partial \eta_1}{\partial x} + \nu_1 B \left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} \right) + \nu U_1 \quad (3.64)$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} = 0, \quad \Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

Tentukan solusi umum x momentum persamaan Saint Venant 2D (3.64) dengan,

$$B = 10m, \quad g = 10 \frac{m}{dt}, \quad \nu = 1.0037 \frac{cm^2}{dt} \approx 1 \frac{cm^2}{dt}.$$

Persamaan (3.64) menjadi

$$10 \frac{\partial U_1}{\partial t} + 10 U_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} + 10 V_1 \frac{\partial U_1}{\partial y} \quad (3.65)$$

$$= -100 \frac{\partial \eta_1}{\partial x} + 1 \times 10^{-3} \left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} \right) + 1 \times 10^{-4} U_1$$

dengan $-100 \frac{\partial \eta_1}{\partial x}$ dianggap konstan, yaitu $-100 \frac{\partial \eta_1}{\partial x} \approx 0$.

Dimisalkan

$$U_1 = \frac{\partial w}{\partial y} \text{ dan } V_1 = -\frac{\partial w}{\partial x} \quad (3.66)$$

Substitusi (3.66) ke persamaan (3.65) sehingga menghasilkan

$$10 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) + 10 \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) + 10 \left(-\frac{\partial w}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) =$$

$$1 \times 10^{-3} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) + 1 \times 10^{-4} \frac{\partial w}{\partial y}$$

Bentuk persamaan tersebut dapat ditransformasi dalam persamaan diferensial parsial nonlinear orde empat sebagai berikut

$$10 \frac{\partial}{\partial t} (\Delta w) + 10 \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} (\Delta w) + 10 \left(-\frac{\partial w}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial y} (\Delta w) =$$

$$1 \times 10^{-3} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\Delta w) + 1 \times 10^{-4} \frac{\partial w}{\partial y}$$

Dapat dinyatakan kembali sebagai berikut

$$\left[10 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] + \left[10 \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] + \left[10 \left(-\frac{\partial w}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] = [1 \times 10^3 \Delta \Delta w] + \left[1 \times 10^4 \frac{\partial w}{\partial y} \right] \quad (3.67)$$

Dengan menggunakan *splitting method*, maka persamaan (3.67) dapat dipisah suku per suku dengan memisalkan $w = F(y, t)x + G(y, t)$ adalah solusi eksak persamaan diferensial parsial orde empat. Maka dapat dinyatakan

$$\frac{\partial w}{\partial x} = F(y, t), \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y} x + \frac{\partial G}{\partial y}$$

Sehingga dengan pemisahan suku per suku solusi persamaan x momentum Saint

Venant orde empat dapat dinyatakan sebagai berikut

Suku pertama dari persamaan (3.67)

$$\begin{aligned}
 10 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) &= 10 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \right) \\
 &= 10 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial x} F(y, t) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial y} x + \frac{\partial G}{\partial y} \right) \right) \\
 &= 10 \frac{\partial}{\partial t} \left(0 + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} x + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} \right) \\
 &= 10 \frac{\partial^3 F}{\partial t \partial y^2} x + 10 \frac{\partial^3 G}{\partial t \partial y^2}
 \end{aligned}$$

Suku kedua dari persamaan (3.67)

$$\begin{aligned}
 10 \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) &= 10 \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \right) \\
 &= 10 \left(\frac{\partial F}{\partial y} x + \frac{\partial G}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} F(y, t) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial y} x + \frac{\partial G}{\partial y} \right) \right) \\
 &= 10 \left(\frac{\partial F}{\partial y} x + \frac{\partial G}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(0 + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} x + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} \right) \\
 &= 10 \left(\frac{\partial F}{\partial y} x + \frac{\partial G}{\partial y} \right) \left(0 + 1 \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + 0 \right) \\
 &= 10 \left(\frac{\partial F}{\partial y} x + \frac{\partial G}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \\
 &= 10 \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} x + 10 \frac{\partial G}{\partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}
 \end{aligned}$$

Suku ketiga dari persamaan (3.67)

$$\begin{aligned}
 10 \left(-\frac{\partial w}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) &= -10 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \right) \\
 &= -10F(y, t) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} F(y, t) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial y} x + \frac{\partial G}{\partial y} \right) \right) \\
 &= -10F(y, t) \frac{\partial}{\partial y} \left(0 + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} x + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} \right) \\
 &= -10F(y, t) \left(0 + \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} x + \frac{\partial^3 G}{\partial y^3} \right) \\
 &= -10F(y, t) \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} x - 10F(y, t) \frac{\partial^3 G}{\partial y^3}
 \end{aligned}$$

Suku keempat dari persamaan (3.67)

$$\begin{aligned}
 1 \times 10^{-3} \Delta \Delta w &= 1 \times 10^{-3} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\
 &= 1 \times 10^{-3} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \right) \\
 &= 1 \times 10^{-3} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} F(y, t) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial y} x + \frac{\partial G}{\partial y} \right) \right) \\
 &= 1 \times 10^{-3} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(0 + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} x + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} \right) \\
 &= 1 \times 10^{-3} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} x \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} x \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} \right) \right) \\
 &= 1 \times 10^{-3} \left(0 + \frac{\partial}{\partial x} \cdot 0 + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} x + \frac{\partial^4 G}{\partial y^4} \right) \\
 &= 1 \times 10^{-3} \left(\frac{\partial^4 F}{\partial y^4} x + \frac{\partial^4 G}{\partial y^4} \right) \\
 &= 1 \times 10^{-3} \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} x + 1 \times 10^{-3} \frac{\partial^4 G}{\partial y^4}
 \end{aligned}$$

Suku kelima dari persamaan (3.67)

$$1 \times 10^{-4} \frac{\partial w}{\partial y} = 1 \times 10^{-4} \left(\frac{\partial F}{\partial y} x + \frac{\partial G}{\partial y} \right) = 1 \times 10^{-4} \frac{\partial F}{\partial y} x + 1 \times 10^{-4} \frac{\partial G}{\partial y}$$

Sehingga persamaan (3.67) menjadi

$$10 \frac{\partial^3 F}{\partial t \partial y^2} x + 10 \frac{\partial^3 G}{\partial t \partial y^2} + 10 \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} x + 10 \frac{\partial G}{\partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - 10F(y, t) \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} x - 10F(y, t) \frac{\partial^3 G}{\partial y^3} =$$

$$1 \times 10^{-3} \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} x + 1 \times 10^{-3} \frac{\partial^4 G}{\partial y^4} + 1 \times 10^{-4} \frac{\partial F}{\partial y} x + 1 \times 10^{-4} \frac{\partial G}{\partial y}$$

Sehingga diperoleh persamaan-persamaan terpisah berikut

$$\left\{ \begin{aligned} 10 \frac{\partial^3 F}{\partial t \partial y^2} x + 10 \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} x - 10F(y, t) \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} x &= 1 \times 10^{-3} \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} x + 1 \times 10^{-4} \frac{\partial F}{\partial y} x \end{aligned} \right. \quad (3.68)$$

$$\left\{ \begin{aligned} 10 \frac{\partial^3 G}{\partial t \partial y^2} + 10 \frac{\partial G}{\partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - 10F(y, t) \frac{\partial^3 G}{\partial y^3} &= 1 \times 10^{-3} \frac{\partial^4 G}{\partial y^4} + 1 \times 10^{-4} \frac{\partial G}{\partial y} \end{aligned} \right. \quad (3.69)$$

Selanjutnya persamaan (3.68) dibagi dengan x dan dilakukan proses pengintegralan terhadap y , sehingga menghasilkan

$$10 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial F}{\partial y} + 10 \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 - 10F \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial y} \quad (3.70)$$

$$= 1 \times 10^{-3} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial F}{\partial y} + 1 \times 10^{-4} F + f_1(t)$$

Misal $\frac{\partial F}{\partial y} = U_1$ maka persamaan (3.70) menjadi

$$10 \frac{\partial U_1}{\partial t} + 10U_1^2 - 10F \frac{\partial U_1}{\partial y} = 1 \times 10^{-3} \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} + 1 \times 10^{-4} F + f_1(t) \quad (3.71)$$

Persamaan (3.71) dibagi dengan 10, sehingga

$$\frac{\partial U_1}{\partial t} = 1 \times 10^{-4} \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} - U_1^2 + F \frac{\partial U_1}{\partial y} + 1 \times 10^{-5} F \quad (3.72)$$

Persamaan (3.72) akan bersolusi trivial jika $U_1^2 = 0$, akibatnya didapatkan PD linear orde dua

$$\frac{\partial U_1}{\partial t} = 1 \times 10^{-4} \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} + F \frac{\partial U_1}{\partial y} + 1 \times 10^{-5} F \quad (3.73)$$

Dengan pemisahan variabel dapat dinyatakan $U_1(y, t) = Y(y)T(t)$, $F = Y(y)T(t)$, maka persamaan (3.73) menjadi

$$YT' = 1 \times 10^{-4} Y''T + FY'T + 1 \times 10^{-5} YT \quad (3.74)$$

Selanjutnya persamaan (3.74) dibagi dengan $Y(y)T(t)$, sehingga

$$\frac{T'}{T} = 1 \times 10^{-4} \frac{Y''}{Y} + F \frac{Y'}{Y} + 1 \times 10^{-5}$$

Didapatkan pemisahan variabel, yaitu

$$T'(t) = CT(t) \text{ dan } 1 \times 10^{-4} \frac{Y''}{Y} + F \frac{Y'}{Y} + 1 \times 10^{-5} = C$$

$$1 \times 10^{-4} \frac{Y''}{Y} + F \frac{Y'}{Y} + 1 \times 10^{-5} - C = 0 \quad (3.75)$$

Persamaan (3.75) dikalikan Y sehingga didapatkan PDB

$$1 \times 10^{-4} Y''(y) + F Y'(y) + (1 \times 10^{-5} - C) Y(y) = 0 \quad (3.76)$$

Persamaan karakteristik dari persamaan (3.76) adalah

$$1 \times 10^{-4} m^2 + Fm + (1 \times 10^{-5} - C) = 0$$

dengan akar-akar karakteristik

$$m_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-F \pm \sqrt{F^2 - 4 \times 10^{-9}}}{2 \times 10^{-4}}$$

pilih $F = y^0(t) = 1$.

Sehingga didapatkan akar-akar karakteristik m adalah

$$m_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 10^{-9}}}{2 \times 10^{-4}} = -\frac{1}{2 \times 10^{-4}} \pm \frac{\sqrt{1}}{2 \times 10^{-4}}$$

Sehingga solusi pemisahan variabel $Y(y)$ adalah

$$Y(y) = C_1 e^{-\frac{1}{2 \times 10^{-4}} + \frac{\sqrt{1}}{2 \times 10^{-4}} y} + C_2 e^{-\frac{1}{2 \times 10^{-4}} - \frac{\sqrt{1}}{2 \times 10^{-4}} y}$$

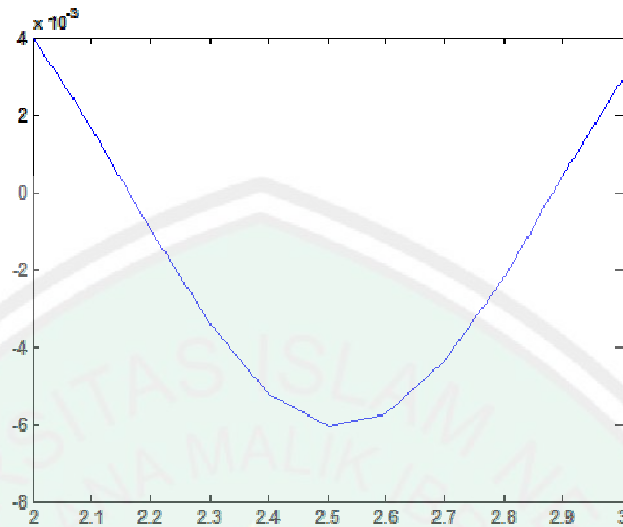
Karena $-\frac{1}{2 \times 10^{-4}} - \frac{\sqrt{1}}{2 \times 10^{-4}} > 0$, maka $C_1 = 0, C_2 = 0$, sehingga tidak terdapat solusi untuk kasus ini.

Untuk persamaan (3.69) dilakukan proses yang sama dengan persamaan (3.68) sehingga tidak terdapat solusi umum dalam kasus ini.

Untuk mengetahui hasil gambar solusi analitik persamaan Saint Venant, diinputkan *source code* pada MATLAB sebagai berikut:

```
r=2:1:5;Cn=0.00001;n=1;t=2;
```

```
y=Cn*sin(2*n*pi*r/3^(1/3))*exp(2*n*pi*t/3^(1/3));
```



Gambar 3.1: Grafik solusi analitik persamaan Saint Venant 2D pada MATLAB

Selanjutnya hasil pendekatannya baik secara konsep maupun grafik dapat dilihat pada skripsi Silva Ahmad Adini yang berjudul “Solusi Numerik Persamaan Navier-Stokes 2D dan Persamaan Saint Venant 2D” tahun 2011.

3.4 Integrasi Matematika dan Al-Quran

Dalam ilmu matematika, masalah nilai awal merupakan suatu masalah dalam menentukan persamaan diferensial $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ yang memenuhi syarat awal yang diberikan yaitu $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$, $y(x_0)^{(n-1)} = y_0^{n-1}$ pada saat $t = 0$. $y_0, y'_0, \dots, y_0^{n-1}$ merupakan nilai-nilai awal pada persamaan diferensial parsial. Sedangkan Masalah nilai batas merupakan suatu masalah dalam menentukan penyelesaian persamaan diferensial atau sistem persamaan yang peubah-peubah bebasnya memenuhi persyaratan tertentu di titik batasnya yang melibatkan batas-batas sistem. Dalam hal ini batas-batas daerah dinyatakan dalam suatu interval

$0 \leq x \leq L$ dan $0 \leq y \leq W$. Masalah nilai batas pada ilmu matematika dapat merepresentasikan dan memberi gambaran tentang Q. S. Al-Baqarah ayat 286 sebagai berikut:

لَا يُكَلِّفُ اللَّهُ نَفْسًا إِلَّا وُسْعَهَا لَهَا مَا كَسَبَتْ وَعَلَيْهَا مَا اكْتَسَبَتْ رَبَّنَا لَا تُؤَاخِذْنَا إِنْ نَسِينَا أَوْ
أَخْطَأْنَا رَبَّنَا وَلَا تَحْمِلْ عَلَيْنَا إَصْرًا كَمَا حَمَلْتَهُ عَلَى الَّذِينَ مِنْ قَبْلِنَا رَبَّنَا وَلَا تُحَمِّلْنَا مَا لَا
طَاقَةَ لَنَا بِهِ ۖ وَاعْفُ عَنَّا وَارْحَمْنَا أَنْتَ مَوْلَانَا فَانصُرْنَا عَلَى الْقَوْمِ الْكَافِرِينَ



Artinya:

Allah tidak membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya. ia mendapat pahala (dari kebajikan) yang diusahakannya dan ia mendapat siksa (dari kejahatan) yang dikerjakannya. (mereka berdoa): "Ya Tuhan kami, janganlah Engkau hukum kami jika kami lupa atau kami tersalah. Ya Tuhan kami, janganlah Engkau bebankan kepada kami beban yang berat sebagaimana Engkau bebankan kepada orang-orang sebelum kami. Ya Tuhan kami, janganlah Engkau pikulkan kepada kami apa yang tak sanggup kami memikulnya. beri ma'afilah kami; ampunilah kami; dan rahmatilah kami. Engkaulah penolong kami, Maka tolonglah kami terhadap kaum yang kafir."

Batas yang dimaksud dalam ayat ini adalah batas kemampuan manusia dalam menerima ujian dari Allah S.W.T, dan Allah S.W.T tidak akan memberikan ujian yang melebihi batas kemampuan manusia. Ketika manusia diberi ujian pada daerah $0 \leq x \leq L$ dan $0 \leq y \leq W$, maka manusia tersebut pasti mampu menjalani ujian Allah S.W.T dengan melakukan usaha yang sungguh-sungguh. Tapi ketika manusia diberi ujian pada daerah $x < 0$, dan $x > L$, maka manusia tidak akan mampu untuk manjalaninya, kecuali jika memang Allah S.W.T yang menghendakinya. Begitu pula yang terjadi pada daerah $y < 0$, dan $y > W$, manusia tidak akan mampu melewati

ujian pada daerah ini. Namun, yang perlu diingat dan selalu diyakini adalah bahwa Allah S.W.T tidak akan memberi ujian pada hambanya melebihi batas kemampuan manusia, dalam hal ini adalah $0 \leq x \leq L$ dan $0 \leq y \leq W$.

Berkaitan dengan isi penyampaian Allah S.W.T dalam Al-Quran terdapat pula batasan tentang apa yang boleh manusia ketahui dan tidak boleh diketahui manusia. Hal ini tergambar dalam Q. S. Al-Isra' ayat 85, sebagai berikut:

وَيَسْأَلُونَكَ عَنِ الرُّوحِ قُلِ الرُّوحُ مِنْ أَمْرِ رَبِّي وَمَا أُوتِيتُمْ مِنَ الْعِلْمِ إِلَّا قَلِيلًا

Artinya:

Dan mereka bertanya kepadamu tentang roh. Katakanlah: "Roh itu Termasuk urusan Tuhan-ku, dan tidaklah kamu diberi pengetahuan melainkan sedikit".

Ayat ini berisi tentang hukum membahas ruh. Berdasarkan ayat ini, maka mayoritas manusia dapat mengetahui bahwa hukum membahas ruh adalah haram. Allah S.W.T menyatakan bahwa manusia tidak diperbolehkan mengkaji dan mempertanyakan roh secara mendalam karena roh merupakan rahasia Allah S.W.T dan hanya Allah S.W.T yang benar-benar mengetahui. Sedangkan manusia cukup diberi sedikit pengetahuan mengenai roh tersebut. Hal ini menunjukkan bahwa Allah S.W.T telah memberikan batas tentang apa yang perlu diketahui manusia tentang rahasia-Nya.

Contoh yang sederhana dapat dilihat pada pembahasan masalah nilai awal dan masalah nilai batas yang telah dikaji di atas. Dalam mencari hasil solusi, dibutuhkan beberapa kali proses yang tidak mudah dan membutuhkan waktu lama untuk

memecahkan masalah nilai awal dan masalah nilai batas ini. Hal ini menunjukkan keterbatasan manusia dalam segala hal, khususnya menghitung, dan ini telah membuktikan bahwa Allah S.W.T adalah Maha Segala-galanya, seperti tercantum dalam Q. S Al-Baqarah ayat 202 sebagai berikut,

أُولَٰئِكَ لَهُمْ نَصِيبٌ مِّمَّا كَسَبُوا ۗ وَاللَّهُ سَرِيعُ الْحِسَابِ ﴿٢٠٢﴾

Artinya:

Mereka itulah orang-orang yang mendapat bahagian daripada yang mereka usahakan; dan Allah sangat cepat perhitungan-Nya.

sehingga dari kedua ayat diatas dapat diambil pelajaran bahwa Allah S.W.T tidak akan memberi ujian yang melebihi batas kemampuan hamba-Nya karena sesungguhnya manusia mempunyai kemampuan terbatas sesuai dengan ukuran yang diberikan oleh Allah S.W.T kepadanya, dan tidak ada manusia yang dapat melebihi kemampuan Allah S.W.T dalam segala hal.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Dari paparan pembahasan di atas dapat dikonstruksi langkah-langkah *d'Alembert solution* untuk memperoleh model gelombang di sumbu x dan y sebagai berikut:

$$U(x, t) = \left[\frac{B}{2U_1} G(\sin \tau + 2U_1 t) + \frac{3}{2} B f(\sin \tau + 2U_1 t) - \frac{v}{2U_1} U_1(\sin \tau + 2U_1 t) + gB\eta_1(\sin \tau + 2U_1 t) \right] - \left[\frac{B}{2U_1} G(\sin \tau) + \frac{B}{2} f(\sin \tau) - \frac{v}{2U_1} U_1(\sin \tau) + gB\eta_1(\sin \tau) \right]$$

dan

$$V(y, t) = \left[\frac{B}{2V_2} G(\sin \tau + 2V_2 t) + \frac{3}{2} B f(\sin \tau + 2V_2 t) - \frac{v}{2V_2} V_2(\sin \tau + 2V_2 t) + gB\eta_2(\sin \tau + 2V_2 t) \right] - \left[\frac{B}{2V_2} G(\sin \tau) + \frac{B}{2} f(\sin \tau) - \frac{v}{2V_2} V_2(\sin \tau) + gB\eta_2(\sin \tau) \right]$$

Selanjutnya, dengan *splitting method* dapat diselesaikan model gelombang pada persamaan Saint Venant 2D menggunakan nilai batas dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Diberikan persamaan umum: $(x, y, w, w_x, w_y, w_{xx}, w_{xy}, w_{yy}, \dots) = 0$. Hal ini digunakan untuk mencari solusi pemisahan secara umum.

2. Didefinisikan struktur solusi sebagai berikut $w = \varphi_1(x)\psi_1(y) + \dots + \varphi_n(x)\psi_n(y)$ yang selanjutnya akan disubstitusikan ke dalam persamaan umum.
3. Menulis kembali persamaan umum Saint Venant 2D yang selanjutnya dikerjakan dengan menggunakan *splitting procedure*.
4. Menghasilkan persamaan fungsional dan sistem persamaan diferensial biasa.
5. Menghasilkan persamaan fungsional

$$w = \Phi_1(x)\Psi_1(y) + \dots + \Phi_k(x)\Psi_k(y) = 0$$
6. Substitusikan Φ_m dan Ψ_m yang diperoleh ke dalam sistem persamaan diferensial biasa.
7. Menyelesaikan sistem persamaan diferensial biasa sehingga diperoleh φ_m dan ψ_m .
8. Menulis kembali solusi pemisahan umum dari persamaan umum.

Hasil dari *splitting method* pada persamaan Saint Venant 2D adalah sebagai berikut

$$W(x, y, t) = U_1(y, t) + V_2(x, t)$$

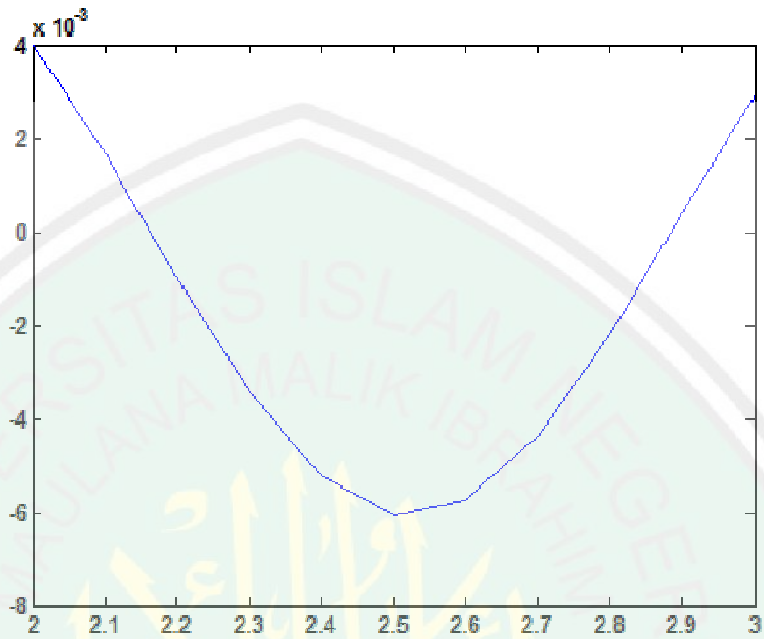
$$= 2 \left(a_n \sin \frac{2n\pi}{\sqrt{3}} y b_n e^{\frac{2n\pi}{\sqrt{3}} t} \right) + a_n \sin \frac{2n\pi}{\sqrt{3}} x b_n e^{\frac{2n\pi}{\sqrt{3}} t}$$

Untuk mengetahui hasil gambar solusi analitik persamaan Saint Venant 2D, diinputkan *source code* pada MATLAB sebagai berikut:

```
r=2:1:5;Cn=0.00001;n=1;t=2;
```

```
y=Cn*sin(2*n*pi*r/3^(1/3))*exp(2*n*pi*t/3^(1/3));
```

plot(r,y)



Gambar 4.1: Grafik solusi analitik persamaan Saint Venant 2D pada MATLAB

4.2 Saran

Penelitian ini dapat dilanjutkan pada justifikasi pengaruh besaran untuk pemodelan yang terkait.

DAFTAR PUSTAKA

- Aldrighetti, Elisa. 2007. *Computational Hydraulic Techniques for the Saint Venant Equations in Arbitrarily Shaped Geometry*. Ph.D. Thesis. Department of Mathematics of the University of Trento.
- Anonimous. 2011. <http://kemzot.blogspot.com>. Di akses pada taggal 4 Februari 2011 pukul 01.10.
- Anonimous. 2011. <http://www.rumahislam.com/tafsir-al-quran/tafsir-depag-ri.html>. Di akses pada taggal 4 Februari 2011 pukul 01.10.
- Anton, H. 1987. *Elementary Linear Algebra*. Terjemahan Pantur Silaban ITB. 1997. Jakarta: Erlangga.
- Atsqalani, Ibnu Hajar. 2004. *Fath al-Bari' bi Syarh Shahih al-Bukhari*. Kairo: Dar al-Hadits.
- Bayjuri, Ibrahim. 2004. *Terjemah Tuhfah al-Murid fi Syarh Jauharah at-Tauhid*. Beirut: Dar al-Kotob al-Ilmiyah.
- Bird, R. Byron dkk. 1960. *Transport Phenomena*. USA: Wiley International Edition
- Dake, Jonas M.K. 1985. *Hidrolika Teknik (Edisi Kedua)*. Jakarta: Erlangga.
- Finizio, N dan Ladaz, G. 1982. *Ordinary Differential Equations, with Modern Applications*. Terjemahan Widiarti Santoso ITB. 1988. Erlangga: Jakarta.
- Jauziyah, Ibnu al-Qayyim. 2003. *ar-Ruh*. Kairo: Dar al-Hadits.
- Kaplan, W. 1963. *Advance Calculus: First Edition*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc .
- Katsir, al-Ibnu. 2003. *Tafsir al-Qur'an al- 'Adziem*. Kairo: Dar al-Hadits.
- Musayyar, Moh. Sayyed Ahmad. 1988. *Terjemah ar-Ruh fi Dirasat al-Mutakallimin wa al-Falasifah*. Kairo: Dar el Ma'arif.

- Nagle, K. R dan Saff, E.B. 1996. *Fundamentals of differential equations and boundary value problems*. University of South Florida.
- Orianto, M & Pratikto. 1989. *Mekanika Fluida*. Yogyakarta: BPFE-Yogyakarta.
- Pinch, Enid R. 1992. *Optimal Control and the Calculus of Variations*. New York: Oxford University Press.
- Polyanin , A. D. dan Zaitsev ,V. F. 2003. *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations*, Chapman & Hall/CRC Press.
- Soewarno. 1991. *Hidrologi: Pengukuran dan Pengolahan Data Aliran Sungai (Hidrometri)*. Bandung: Penerbit Nova.
- Spiegel, M R. 1983. *Advanced Mathematics for Engineer and Scientists*. Terjemahan oleh Koko Martono. 1994. Jakarta: Erlangga.
- Stewart, J. 2002. *Kalkulus jilid 1*. Terjemahan oleh I Nyoman Susila, Hendra Gunawan. 2002. Jakarta: Erlangga.
- Stewart, J. 2003. *Kalkulus jilid 2*. Terjemahan oleh I Nyoman Susila, Hendra Gunawan. 2003. Jakarta: Erlangga.
- Wardi, As-Sahr. Tanpa tahun. *'Awarif al-Ma'arif*. Beirut: Dar Ihya el-Kotob el-Arabiyah.
- Zauderer, Erich. 2006. *Partial Differential Equations of Applied Mathematics (Third Edition)*. New Jersey: A John Wiley & Sons.
- Zidniagus. 2011. [http:// zidniagus.wordpress.com](http://zidniagus.wordpress.com). diakses pada tanggal 4 Februari 2011 pukul 02.89

Lampiran 1

Tabel viskositas air dan udara pada tekanan 1 Atm dalam buku karangan R. Byron Bird yang berjudul “*Transport Phenomena*” halaman 8, menyebutkan bahwa:

Suhu $T(^{\circ}\text{C})$	Air (cairan)		Udara	
	Viskositas $\mu(\text{cp})$	Viskositas Kinematik $\nu \times 10^2(\text{cm}^2 \text{sec}^{-1})$	Viskositas $\mu(\text{cp})$	Viskositas Kinematik $\nu \times 10^2(\text{cm}^2 \text{sec}^{-1})$
0	1.787	1.787	0.01716	13.27
20	1.0019	1.0037	0.01813	15.05
40	0.6530	0.6581	0.01908	16.92
60	0.4665	0.4744	0.01999	18.86
80	0.3548	0.3651	0.02087	20.88
100	0.2821	0.2944	0.02173	22.98

Maka dalam kasus ini, viskositas yang dipakai adalah $\nu = 1.0037 \approx 1$



KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK
IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang (0341) 551345
Fax. (0341)572533

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Dewi Erla Mahmudah
Nim : 07610038
Fakultas/ jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul skripsi : ANALISIS PERSAMAAN SAINT VENANT 2D UNTUK
MODEL GELOMBANG PERAIRAN DANGKAL DENGAN
MASALAH NILAI AWAL DAN MASALAH NILAI BATAS
Pembimbing I : Ari Kusumastuti, M.Pd
Pembimbing II : Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag

No	Tanggal	HAL	Tanda Tangan	
1	30 Oktober 2010	Konsultasi BAB III	1.	
2	9 November 2010	Konsultasi BAB I dan II		2.
3	17 November 2010	Revisi BAB I dan II	3	
4	19 November 2010	Konsultasi BAB III		4.
5	19 November 2010	ACC seminar proposal	5.	
6	15 Januari 2011	Konsultasi BAB III		6.
7	6 Januari 2011	Konsultasi Kajian Agama	7.	
8	15 Januari 2011	Konsultasi BAB I dan II		8.
9	14 Januari 2011	Revisi Kajian Agama	9.	
10	14 Januari 2011	Konsultasi Keseluruhan		10.
11	25 Januari 2011	ACC Keseluruhan	11.	

Malang, 4 Februari 2011
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001