SPECTRUM GRAF HASILKALI KARTESIUS

SKRIPSI

Oleh:
IMAM FAHCRUDDIN
NIM: 06510004

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN)
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
MALANG
2010

SPECTRUM GRAF HASIL KALI KARTESIUS

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
IMAM FAHCRUDDIN
NIM: 06510004

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN)
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
MALANG
2010

SPECTRUM GRAF HASIL KALI KARTESIUS

SKRIPSI

Oleh:
IMAM FAHCRUDDIN
NIM: 06510004

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji:
Tanggal: 22 Juli 2010

Pembimbing I,	**Pembimbing II,**
Abdussakir, M.Pd	**Ach. Nashichuddin, M.A**
NIP. 19751006 200312 1001	**NIP. 19730705 200003 1002**

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1001

SPECTRUM GRAF HASILKALI KARTESIUS

SKRIPSI

Oleh:
IMAM FAHCRUDDIN
NIM: 06510004

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal: 22 Juli 2010

Susunan Dewan Penguji:		Tanda Tangan
1. Penguji Utama	: Wahyu Henky Irawan, M.Pd NIP. 19710420 200003 1003	( )
2. Ketua Penguji	: Abdul Aziz, M.Si NIP. 19760318 200604 1002	( )
3. Sekretaris Penguji	: Abdussakir, M. Pd NIP. 19751006 200312 1001	( )
4. Anggota Penguji	: Ach. Nashichuddin, M.A NIP. 19730705 200003 1002	( )

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : IMAM FAHCRUDDIN

NIM : 06510004

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali yang secara tertulis dikutip dalam naskah dan disebutkan dalam daftar pustaka.

Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 19 Juli 2010

Yang membuat pernyataan

Imam Fahcruddin

NIM. 06510004

Ya Allah. Semoga Engkau mencurahkan rahmat, keselamatan dan barokah-Mu kepada Nabi Muhammad shallallaahu `alaihi wa sallam beserta keluarganya, sebagaimana Engkau memberikan rahmat, keselamatan dan barokah-Mu kepada Nabi Ibrahim ‘alaihissalaam beserta keluarganya. Ya Allah, sesungguhnya Engkau adalah Dzat yang Maha Agung dan Terpuji. Segala puji bagi-Mu Ya Allah, Tuhan semesta alam.

14 Sya`ban 1431 H

Persembahan kepada
Ayah, Ibu dan Adikku

M. Syaifuddin An Shori

KATA PENGANTAR

Dengan menyebut asma Allah Yang Maha Pengasih lagi Maha Penyayang.

Segala puji bagi Allah, Tuhan yang telah menitahkan ilmu sebagai sifat tertinggi di antara sifat-sifat yang sempurna. Aku bersaksi, sesungguhnya tiada Tuhan selain Allah Yang Maha Tunggal dan tiada sekutu bagi-Nya, yang mengkhususkan hamba-hamba yang dikehendaki–Nya dengan berbagai kelebihan hikmah. Aku bersaksi, sesungguhnya Muhammad itu hamba dan Rasul-Nya yang diistimewakan dengan segala macam kesempurnaan sebagai hamba. Semoga Allah berkenan melimpahkan rahmat-Nya kepada Nabi Muhammad saw., seorang Rasul yang jiwanya telah dipenuhi dengan kemuliaan-kemuliaan Allah Yang Maha Tinggi dan penglihatannya dipenuhi keagungan Allah yang tertinggi, sehingga beliau menjadi hamba yang penuh bahagia dan pertolongan. Semoga Allah melimpahkan rahmat-Nya pula kepada keluarga dan para sahabatnya serta orang-orang yang berbuat pada lintasan jalannya sehingga merekapun memperoleh kebaikan yang sempurna.

Skripsi ini adalah sebuah karya tulis sederhana yang penulis persiapkan sebagai salah satu bentuk implementasi insan akademis di lingkungan UIN Maulana Malik Ibrahim Malang. Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini tidak akan mendapatkan suatu hasil yang baik tanpa adanya bimbingan, bantuan, saran serta doa dari berbagai pihak. Oleh karena itu penulis menyampaikan ungkapan terima kasih sebesar-besarnya kepada:

1. Ibu dan Ayah yang telah membesarkan penulis.

2. Abdussakir, M.Pd selaku Ketua Jurusan Matematika dan Dosen Pembimbing I, yang senantiasa dengan sabar memberikan bimbingan.
3. Ach. Nashichuddin, M.A selaku Dosen Pembimbing II, terima kasih atas bimbingan yang telah diberikan.
4. Segenap Guru Matematika penulis, yang telah berjasa memberikan ilmunya, membimbing dan telah memberikan motivasi.
5. Segenap mahasiswa Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Akhir kata, semoga Allah Yang Maha Pengasih membalas semua kebaikan mereka. Semoga karya tulis ini bermanfaat, terutama kaum muslim dan dijadikan sebagai tabungan amal sampai hari pembalasan nanti, amin.

Malang, 19 Juli 2010

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

ABSTRAK

Fahcruddin, Imam. 2010. **Spectrum Graf Hasilkali Kartesius.** Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: I. Abdussakir, M.Pd.
II. Ach. Nashichuddin, M.A.

Himpunan nilai eigen dari reperesentasi graf dalam matriks terhubung langsung adalah spectrum dari graf tersebut. Spectrum dari graf *G* dengan *n* titik biasanya dinotasikan dengan *Sp*(*G*). Terdapat beberapa cara untuk membentuk dari dua graf menjadi sebuah graf baru yang mana himpunan titiknya merupakan hasilkali kartesius antara dua graf tersebut. Pada skripsi ini akan dikaji spectrum hasilkali kartesius dari dua graf sederhana. Dengan menggunakan teorema spectrum graf hasilkali kartesius, diperoleh

1. spectrum dari graf tangga $\left(L_n\right)$ adalah

$$Sp\left(L_n\right)=\left[1+2\cos\left(\frac{k\pi}{(n+1)}\right),-1+2\cos\left(\frac{k\pi}{(n+1)}\right)\right]$$

2. spectrum dari graf buku $\left(P_2\times K_{1,n}\right)$ adalah

$$Sp\left(P_2\times K_{1,n}\right)=[-1,-1\pm\sqrt{n},1\pm\sqrt{n},1]$$

3. spectrum dari graf jaring-jaring $\left(P_m\times P_n\right)$ adalah

$$Sp\left(P_m\times P_n\right)=[2\left(\cos\left(\frac{k\,\pi}{(m+1)}\right)+\cos\left(\frac{l\,\pi}{(n+1)}\right)\right)].$$

Kata Kunci: Spectrum, Matriks Terhubung Langsung, Graf Hasilkali Kartesius.

ABSTRACT

Fahcruddin, Imam. 2010. **The Spectrum Cartesian Product of Graph.** Theses. Mathematics Programme Faculty of Science and Technology The State of Islamic University Maulana Malik Ibrahim Malang.
Promotor: I. Abdussakir, M.Pd.
II. Ach. Nashichuddin, M.A.

The set of graph eigenvalues of the adjacency matrix is called the spectrum of the graph. The spectrum of a graph G with n vertices is commonly denoted $Sp(G)$. There are also several ways of forming from two graphs a new graph whose vertex set is the Cartesian product of their vertex sets. In this theses we study spectrum of Cartesian product of two simple graphs. Utilizing the theorem about spectrum of Cartesian product of two simple graph, we prove that

1. the spectrum of the ladder graph (L_n) is
$$Sp(L_n)=\left[1+2\cos\left(\frac{k\pi}{(n+1)}\right),-1+2\cos\left(\frac{k\pi}{(n+1)}\right)\right]$$
2. the spectrum of the book graph $(P_2 \times K_{1,n})$ is
$$Sp(P_2 \times K_{1,n})=[-1,-1\pm\sqrt{n},1\pm\sqrt{n},1]$$
3. the spectrum of the grid graph $(P_m \times P_n)$ is
$$Sp(P_m \times P_n)=[2\left(\cos\left(\frac{k\pi}{(m+1)}\right)+\cos\left(\frac{l\pi}{(n+1)}\right)\right)].$$

Key words: Spectrum, adjacency matrix, Cartesian product of graph

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Iqra`* merupakan perintah Allah yang pertama kali disampaikan Jibril kepada nabi Muhammad SAW, "*Ma aqra`?" demikian pertanyaan nabi setelah berulang-ulang Jibril menyampaikan perintah tersebut. Mungkin mengherankan ketika perintah tersebut ditujukan kepada seseorang yang tidak pernah membaca suatu kitab sebelum turunnya Al-Quran dan tidak pernah menulis kitab dengan tangan kanannya (QS 29: 48). Namun, keheranan ini akan sirna jika kita sadari bahwa perintah *iqra`* yang berarti membaca, menelaah, meneliti, menghimpun dan sebagainya dikaitkan dengan "*bi ismi Rabbika*", suatu tindakan yang didasari keimanan pada Allah SWT, ikhlas hanya mengharapkan ridha Allah yang Maha Pencipta. Kemudian "*Wa rabbuka Al-Akram*" mengandung pengertian bahwa Allah dapat menganugerahkan puncak dari segala yang terpuji bagi hamba-Nya yang membaca (M.Quraish Shihab, 2007:260) . Sungguh motivasi yang luar biasa yang dijanjikan Allah kepada hamba-Nya, yang menjadi niat dan keyakinan untuk selalu meneliti, menelaah dan mengkaji terutama disiplin ilmu yang ditekuni.

Segala fenomena yang sering kita alami sehari-hari, sebenarnya sudah terpola dengan rapi, tersusun dari beberapa aturan-aturan yang saling berkaitan, ada langkah-langkahnya, perhitungannya bahkan formulanya. Ahli matematika, atau ilmuwan secara umum tidak membuat suatu rumus sedikitpun, tetapi mereka menangkap fenomena yang terjadi, kemudian meneliti dan merumuskan dalam bentuk bahasa mereka sendiri sehingga ditemukan rumus-rumus atau teori-teori yang bisa dikategorikan ilmiah. Pencipta dari segala ciptaan hanyalah Allah SWT, sebagaimana firman Allah:

ٱلَّذِي لَهُۥ مُلۡكُ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلۡأَرۡضِ وَلَمۡ يَتَّخِذۡ وَلَدٗا وَلَمۡ يَكُن لَّهُۥ شَرِيكٞ فِي ٱلۡمُلۡكِ
وَخَلَقَ كُلَّ شَيۡءٖ فَقَدَّرَهُۥ تَقۡدِيرٗا ٢

Yang kepunyaan-Nya-lah kerajaan langit dan bumi, dan Dia tidak mempunyai anak, dan tidak ada sekutu bagi-Nya dalam kekuasaan (Nya), dan Dia telah menciptakan segala sesuatu, dan Dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya. (QS. 25:2).

Pengetahuan mengenai ilmu ukur, perhitungan dan bilangan tidak akan lepas dari matematika. Teori graf dan aljabar merupakan cabang dari matematika. Kajian mengenai konsep-konsep aljabar dalam teori graf merupakan suatu hal yang penting untuk dilakukan karena dari hasil penelitiannya nanti, akan diperoleh beberapa pola atau karakteristik graf yang memiliki keteraturan dalam perspektif aljabar. Dari pola-pola yang ditemukan inilah, kemudian dijadikan dasar untuk mengklasifikasikan berbagai macam sifat-sifat dan karakteristik suatu graf dikaji dari sisi aljabarnya.

Konteks klasifikasi atau pengelompokkan ini juga berperan penting dalam strategi ketika berperang. Misalnya pasukan yang mahir dalam memanah, maka masuk dalam kategori pemanah, dan pasukan yang ahli dalam memainkan pedang, masuk dalam kategori pasukan berpedang, diklasifikasikan sesuai dengan kemampuan dan karakteristik dari pasukan tersebut, untuk berperang bersama-sama di jalan Allah, sebagaimana firman-Nya:

يَـٰٓأَيُّهَا ٱلَّذِينَ ءَامَنُواْ خُذُواْ حِذۡرَكُمۡ فَٱنفِرُواْ ثُبَاتٍ أَوِ ٱنفِرُواْ جَمِيعًا ﴿٧١﴾

Hai orang-orang yang beriman, bersiap siagalah kamu, dan majulah (ke medan pertempuran) berkelompok-kelompok, atau majulah bersama-sama! (QS. 4:71).

Kemudian kajian mengenai golongan atau kelompok (*firqah*) pada umat Islam nanti, juga akan terbagi menjadi 73 golongan, dan diklasifikasikan lagi menjadi dua kelompok, ada yang menjelaskan bahwa kelompok pertama adalah penghuni neraka yang terdiri dari 72 golongan dan kelompok kedua adalah penghuni surga yang terdiri dari satu golongan, sebagaimana sabda nabi:

لَيَأْتِيَنَّ عَلَى أُمَّتِيْ مَا أَتَى عَلَى بَنِي إِسْرَائِيْلَ, حَذْوَ النَّعْلِ بِالنَّعْلِ حَتَّى إِنْ كَانَ مِنْهُمْ مَنْ أَتَى أُمَّهُ عَلاَنِيَّةً, لَكَانَ فِى أُمَّتِيْ مَنْ يَصْنَعُ ذَلِكَ,وَ إِنَّ بَنِ إِسْرَائِيْلَ تَفَرَّقَتْ عَلَى ثِنْتَيْنِ وَ سَبْعِيْنَ مِلَّةً,وَ تَفْتَرِقُ أُمَتِيْ عَلَى ثَلاَثٍ وَ سَبْعِيْنَ مِلَّةً,كُلُّهُمْ فِى النَّارِ إِلاَّ مِلَّةً وَاحِدَةً: قَالُوْا: وَ مَنْ هِيَ يَا رَسُولُ اللهِ؟ قَالَ: مَا أَنَا عَلَيْهِ وَ أَصْحَابِيْ. (رواه الترمذي)

"Sungguh akan terjadi pada umatku apa yang pernah terjadi antara Bani Israil, bagaikan sepasang sandal. Jika di antara mereka ada yang menggauli ibunya secara terang-terangan, maka pada umatku pun akan ada orang yang berbuat demikian. Sesungguhnya Bani Israil telah terpecah menjadi tujuh puluh tiga aliran; semuanya akan masuk neraka, kecuali satu." Para sahabat bertanya, "Siapakah golongan itu, wahai Rasulullah?", beliau menjawab, "Yakni mereka yang mengikuti jalan hidupku dan para sahabatku."
(HR. Turmudzi).

Penelitian aljabar dalam teori graf merupakan topik dari matematika yang mengkaji graf melalui sifat-sifat aljabar dari representasi graf dalam matriks. Lebih spesifik lagi, teori spectra graf membahas sifat-sifat graf yang berhubungan dengan polinomial karakteristik, nilai eigen, dan vektor eigen dari representasi graf dalam matriks terhubung langsung atau matriks Laplacian.

Secara historis, teori spectra graf mulai dirintis pada tahun 1950-an dan 1960-an. Salah satu topik dalam teori spectra graf yang banyak diteliti adalah spectrum. Kajian tentang spectrum pada monograf telah diperkenalkan oleh Dragoš M. Cvetković, Michael Doob, dan Horst Sachs dalam karya ilmiahnya yang berjudul *Spectra of Graph* pada tahun 1980, kemudian direvisi dan diterbitkan dalam sebuah buku yang berjudul *Recent Results in the Theory of Graph Spectra* pada tahun 1988. (http://en.wikipedia.org/wiki/Spectral_Graph_Theory).

Pada umumnya, studi tentang spectrum graf didasari pada nilai eigen dari representasi matriks terhubung langsung atau Laplacian pada graf yang memiliki sifat-sifat matematika yang menarik dan memiliki pola tertentu. Studi tentang aplikasinya juga telah dilakukan, yaitu penerapan spectrum matriks Laplace dalam menentukan banyaknya pohon merentang pada suatu graf (Geir Agnarsson, 2007:98), penerapan polinomial karakteristik graf pada indeks topologi Z_G untuk identifikasi struktur molekul pada ikatan kimia (Haruo Hosoya, 2007:239) dan aplikasi spectrum Laplacian graf pada segmentasi gambar.

Salah satu kendala dalam penelitian tentang spectrum graf adalah menentukan nilai eigen dari persamaan karakteristik matriks terhubung langsung pada jenis-jenis graf yang sulit ditemukan bentuk umum matriks segitiga, sehingga tidak diperoleh bentuk umum nilai eigen dari graf tersebut. Kemudian sulitnya memperoleh bentuk umum matriks terhubung langsung dari graf hasilkali kartesius. Oleh karena itu, dalam skripsi ini dibahas penerapan polinomial Chebyshev untuk menentukan nilai eigen dari graf yang sulit ditemukan bentuk umum matriks segitiga, dan penerapan hasilkali Kronecker untuk menentukan bentuk umum matriks terhubung langsung dari graf hasilkali kartesius.

Dari hasil kajian literatur, spectrum graf yang telah teliti meliputi graf komplit (K_n), graf komplit bipartisi $(K_{m,n})$, graf sikel (C_n), graf lintasan (P_n), graf triangular $(L(K_n))$, dan graf Lattice $(L(K_{m,m}), m \geq 2)$. Jenis-jenis graf yang belum ada penelitian sebelumnya adalah graf hasilkali kartesius, yaitu graf tangga $(P_2 \times P_n)$, graf jaring-jaring $(P_m \times P_n)$, dan graf buku $(P_2 \times K_{1,n})$. Oleh sebab itu, dalam penelitian ini, penulis tertarik untuk meneliti spectrum graf hasilkali kartesius dengan judul penelitian "*Spectrum Graf Hasilkali Kartesius*".

1.2 Rumusan Masalah

Masalah yang ingin diselesaikan dalam skripsi ini adalah menentukan bentuk umum spectrum jenis-jenis graf hasilkali kartesius.

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka penelitian yang dibahas dalam skripsi ini bertujuan untuk menentukan bentuk umum spectrum jenis-jenis graf hasilkali kartesius.

1.4 Batasan Masalah

Pada skripsi ini, masalah yang dikaji dibatasi pada graf sederhana dan graf yang diperoleh dari operasi hasilkali kartesius, yaitu graf tangga $(P_2 \times P_n)$, graf jaring-jaring $(P_m \times P_n)$, dan graf buku $(P_2 \times K_{1,n})$.

1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dalam penulisan skripsi ini adalah:

1. Bagi Penulis

   Penelitian ini digunakan sebagai tambahan informasi dan wawasan pengetahuan tentang teori spectrum graf, khususnya spectrum graf hasilkali kartesius.

2. Bagi Lembaga

   Hasil penelitian ini dapat digunakan sebagai tambahan kepustakaan yang dijadikan sarana pengembangan wawasan keilmuan khususnya di jurusan matematika untuk mata kuliah aljabar linier dan teori graf.

3. Bagi Pengembangan Ilmu

   Hasil penelitian ini dapat dijadikan sebagai bahan kajian keilmuan untuk menambah wawasan keilmuan.

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam skripsi ini adalah metode penelitian kepustakaan, yaitu dengan mengumpulkan data dan informasi dari berbagai sumber seperti buku, jurnal, atau prosiding seminar nasional atau internasional. Penelitian ini dilakukan dengan mengkaji teorema-teorema spectra graf dari literatur yang diperoleh, kemudian diterapkan pada jenis graf yang lain yang belum ada penelitian mengenai graf tersebut.

Prosedur perhitungan dan pencarian pola dilakukan dengan menggunakan program komputer, yaitu Matlab 6.5 untuk perhitungan matriks dengan entri numerik, Maple 12 untuk perhitungan matriks dengan entri simbol dan Wolfram Mathematica 7.0 untuk perhitungan hasilkali Kronecker pada matriks terhubung langsung dan spectrum dari graf hasilkali kartesius.

Diberikan dua graf sederhana *G* dan *H,* maka langkah-langkah yang dilakukan dalam menentukan spectrum dari hasilkali kartesius graf *G* dan *H* adalah:

1. menentukan matriks terhubung langsung dari graf *G* dan *H*.
2. menentukan matriks terhubung langsung dari graf hasilkali kartesius *G* dan *H*.
3. mencari bentuk umum matriks terhubung langsung dari graf hasilkali kartesius *G* dan *H*.
4. menghitung spectrum dari graf *G* dan *H*.
5. menghitung spectrum hasilkali kartesius graf *G* dan *H*.
6. mengamati ada tidaknya hubungan spectrum graf *G* dan *H* dengan spectrum hasilkali kartesius graf *G* dan *H*.
7. menentukan bentuk umum spectrum hasilkali kartesius graf *G* dan *H*, jika masing-masing spectrum dari graf tersebut sudah diketahui.
8. Rumus yang diperoleh dari langkah 7, masih dapat dianggap sebagai dugaan (*konjektur*). Konjektur yang dihasilkan kemudian dibuktikan dengan terlebih dahulu merumuskan konjekturnya sebagai suatu teorema yang dilengkapi dengan bukti-bukti.
9. Menerapkan teorema pada langkah 8 ke jenis-jenis graf hasilkali kartesius, kemudian membuktikan teorema yang diperoleh.

1.7 Sistematika Penulisan

Skripsi ini terdiri dari empat bab dengan sistematika penulisan sebagai berikut:

BAB I. PENDAHULUAN

Bab ini mendeskripsikan secara umum mengenai isi skripsi. Pembagian bab ini terdiri dari latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II KAJIAN PUSTAKA

Bagian ini terdiri atas konsep-konsep (teori-teori) yang mendukung bagian pembahasan. Konsep-konsep tersebut antara lain membahas tentang analisis matriks, polinomial Chebyshev, teori graf dan teori spectra graf beserta hasil-hasil penelitian sebelumnya, serta kajian keagamaan.

BAB III PEMBAHASAN

Pada bab ini disajikan hasil yang diperoleh dari penelitian ini, yaitu matriks terhubung langsung graf hasilkali kartesius, teorema spectrum matriks terhubung langsung graf hasilkali kartesius, bukti spectrum graf lintasan (P_n), graf tangga $(P_2 \times P_n)$, graf jaring-jaring $(P_m \times P_n)$, dan graf buku $(P_2 \times K_{1,n})$.

BAB IV PENUTUP

Bab ini memuat kesimpulan dari penulisan skripsi ini dan beberapa gagasan untuk penelitian selanjutnya.

BAB II

KAJIAN TEORI

2.1 Analisis Matriks

2.1.1 Matriks

Definisi 1.

Suatu susunan dari bilangan (atau simbol) yang terdiri dari *m* baris dan *n* kolom adalah matriks $m \times n$. (S.K. Jain dan A.D. Gunawardena, 2004:17).

Dari definisi diatas, yang terdiri dari baris dan kolom adalah susunannya saja, misalkan *A* adalah matriks dengan ukuran *m* baris dan *n* kolom, *m* dan *n* merupakan bilangan bulat positif, maka matriks *A* dapat ditulis:

$$A_{mxn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ atau } A_{mxn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Definisi 2.

Suatu matriks yang terdiri dari *n* baris dan 1 kolom disebut sebagai vektor kolom dengan ukuran *n* atau vektor, sedangkan matriks yang terdiri dari 1 baris dan *n* kolom disebut sebagai vektor baris dengan ukuran *n*. Matriks yang berukuran $1 \times n$ atau $n \times 1$ dinotasikan sebagai R^n . (S.K. Jain dan A.D. Gunawardena, 2004:62).

Contoh 3. Vektor kolom dan vektor baris yang dibentuk oleh matriks A_{mxn} :

$$c_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ c_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots, \ c_1 = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad \begin{matrix} r_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix} \\ r_2 = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \end{pmatrix} \\ \vdots \\ r_3 = \begin{pmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Teorema 4.

Diberikan matriks $A_{r\times m}$, $B_{m\times n}$ dan $C_{m\times n}$, maka dari sifat-sifat aritmatika matriks diperoleh $A(B+C)=AB+AC$ (*Hukum distributif kiri*).

(Anton dan Rorres, 2004:42)

Bukti.

Misalkan entri-entri dari matriks $A_{r\times m}$, $B_{m\times n}$ dan $C_{m\times n}$ adalah:

$$A_{r\times m}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rm} \end{pmatrix}, B_{m\times n}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}, C_{m\times n}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

akan ditunjukkan bahwa $A(B+C)=AB+AC$.

$$A(B+C)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rm} \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}\right)$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rm} \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} b_{11}+c_{11} & b_{12}+c_{12} & \cdots & b_{1n}+c_{1n} \\ b_{21}+c_{21} & b_{22}+c_{22} & \cdots & b_{2n}+c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1}+c_{m1} & b_{m2}+c_{m2} & \cdots & b_{mn}+c_{mn} \end{pmatrix}\right)$$

$$=\begin{pmatrix} \sum_{i,j=1}^{m} a_{1j}(b_{i1}+c_{i1}) & \sum_{i,j=1}^{m} a_{1j}(b_{i2}+c_{i2}) & \cdots & \sum_{i,j=1}^{m} a_{1j}(b_{in}+c_{in}) \\ \sum_{i,j=1}^{m} a_{2j}(b_{i1}+c_{i1}) & \sum_{i,j=1}^{m} a_{2j}(b_{i2}+c_{i2}) & \cdots & \sum_{i,j=1}^{m} a_{2j}(b_{in}+c_{in}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i,j=1}^{m} a_{rj}(b_{i1}+c_{i1}) & \sum_{i,j=1}^{m} a_{rj}(b_{i2}+c_{i2}) & \cdots & \sum_{i,j=1}^{m} a_{rj}(b_{in}+c_{in}) \end{pmatrix}$$

$$
=\begin{pmatrix}
\sum_{i,j=1}^{m}\left(a_{1j}b_{i1}+a_{1j}c_{i1}\right) & \sum_{i,j=1}^{m}\left(a_{1j}b_{i2}+a_{1j}c_{i2}\right) & \cdots & \sum_{i,j=1}^{m}\left(a_{1j}b_{in}+a_{1j}c_{in}\right)\\
\sum_{i,j=1}^{m}\left(a_{2j}b_{i1}+a_{2j}c_{i1}\right) & \sum_{i,j=1}^{m}\left(a_{2j}b_{i2}+a_{2j}c_{i2}\right) & \cdots & \sum_{i,j=1}^{m}\left(a_{2j}b_{in}+a_{2j}c_{in}\right)\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
\sum_{i,j=1}^{m}\left(a_{rj}b_{i1}+a_{rj}c_{i1}\right) & \sum_{i,j=1}^{m}\left(a_{rj}b_{i2}+a_{rj}c_{i2}\right) & \cdots & \sum_{i,j=1}^{m}\left(a_{rj}b_{in}+a_{rj}c_{in}\right)
\end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix}
\sum_{i,j=1}^{m}a_{1j}b_{i1}+\sum_{i,j=1}^{m}a_{1j}c_{i1} & \sum_{i,j=1}^{m}a_{1j}b_{i2}+\sum_{i,j=1}^{m}a_{1j}c_{i2} & \cdots & \sum_{i,j=1}^{m}a_{1j}b_{in}+\sum_{i,j=1}^{m}a_{1j}c_{in}\\
\sum_{i,j=1}^{m}a_{2j}b_{i1}+\sum_{i,j=1}^{m}a_{2j}c_{i1} & \sum_{i,j=1}^{m}a_{2j}b_{i2}+\sum_{i,j=1}^{m}a_{2j}c_{i2} & \cdots & \sum_{i,j=1}^{m}a_{2j}b_{in}+\sum_{i,j=1}^{m}a_{2j}c_{in}\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
\sum_{i,j=1}^{m}a_{rj}b_{i1}+\sum_{i,j=1}^{m}a_{rj}c_{i1} & \sum_{i,j=1}^{m}a_{rj}b_{i2}+\sum_{i,j=1}^{m}a_{rj}c_{i2} & \cdots & \sum_{i,j=1}^{m}a_{rj}b_{in}+\sum_{i,j=1}^{m}a_{rj}c_{in}
\end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix}
\sum_{i,j=1}^{m}a_{1j}b_{i1} & \sum_{i,j=1}^{m}a_{1j}b_{i2} & \cdots & \sum_{i,j=1}^{m}a_{1j}b_{in}\\
\sum_{i,j=1}^{m}a_{2j}b_{i1} & \sum_{i,j=1}^{m}a_{2j}b_{i2} & \cdots & \sum_{i,j=1}^{m}a_{2j}b_{in}\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
\sum_{i,j=1}^{m}a_{rj}b_{i1} & \sum_{i,j=1}^{m}a_{rj}b_{i2} & \cdots & \sum_{i,j=1}^{m}a_{rj}b_{in}
\end{pmatrix}
+\begin{pmatrix}
\sum_{i,j=1}^{m}a_{1j}c_{i1} & \sum_{i,j=1}^{m}a_{1j}c_{i2} & \cdots & \sum_{i,j=1}^{m}a_{1j}c_{in}\\
\sum_{i,j=1}^{m}a_{2j}c_{i1} & \sum_{i,j=1}^{m}a_{2j}c_{i2} & \cdots & \sum_{i,j=1}^{m}a_{2j}c_{in}\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
\sum_{i,j=1}^{m}a_{rj}c_{i1} & \sum_{i,j=1}^{m}a_{rj}c_{i2} & \cdots & \sum_{i,j=1}^{m}a_{rj}c_{in}
\end{pmatrix}
$$

$$
=AB+AC
$$

2.1.2 Determinan

Permutasi merupakan penyusunan unsur-unsur sesuai dengan aturan tertentu tanpa adanya penghilangan atau pengulangan dari unsur tersebut. Misalkan permutasi dari bilangan riil $\left(a_1,a_2,...,a_n\right)$, suatu ***inversi*** *(pembalikan)* dikatakan terjadi dalam suatu permutasi $\left(a_1,a_2,...,a_n\right)$ jika terdapat bilangan yang lebih besar mendahului bilangan yang lebih kecil. Jumlah total inversi yang terjadi dalam permutasi dapat diperoleh sebagai berikut:

1. Tentukan banyaknya bilangan yang lebih kecil dari a_1 dan yang mengikuti a_1 dalam permutasi.
2. Tentukan banyaknya bilangan yang lebih kecil dari a_2 dan yang mengikuti a_2 dalam permutasi.
3. Lanjutkan proses perhitungan ini untuk $a_3, ..., a_{n-1}$. Jumlah dari banyaknya perhitungan diatas adalah jumlah total inversi dari permutasi tersebut.

Contoh 5. Tentukan jumlah total inversi pada permutasi-permutasi berikut:

a. (6, 5, 4, 3, 2, 1)

b. (1, 2, 3, 4, 5, 6)

c. (0, 8, 1, 7, 9, 6, 0, 5, 6, 7, 2)

Penyelesaian.

a. Bilangan pertama dari permutasi tersebut adalah 6, karena 5 adalah bilangan yang lebih kecil dari 6, maka kita hitung 1 inversi, hal ini terjadi juga pada bilangan 4, 3, 2, 1 sehingga dari masing-masing bilangan tersebut kita hitung 1 inversi, jadi total inversi untuk bilangan 6 dalam permutasi tersebut adalah 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5. Kemudian langkah yang sama kita gunakan untuk menghitung total inversi pada bilangan selanjutnya, sehingga diperoleh total inversi untuk 5, 4, 3, 2 berturut-turut adalah 4, 3, 2, 1. Jadi jumlah total inversi pada permutasi tersebut adalah 5 + 4 + 3 + 2 + 1= 15.

b. Tidak ada inversi untuk permutasi ini.

c. Jumlah total inversi adalah 0 + 8 + 1 + 5 + 5 + 3 + 0 + 1 + 1 + 1 = 25.

Definisi 6.

Suatu permutasi dikatakan genap jika jumlah total inversi adalah bilangan genap, dan dikatakan ganjil jika jumlah total inversi adalah bilangan ganjil.

Definisi 7.

Suatu *hasilkali elementer* dari suatu matriks A_{nxn} adalah hasilkali *n* entri dari *A,* yang tidak satu pun berasal dari baris atau kolom yang sama. (Anton dan Rorres, 2004:92).

Hasilkali elementer tersebut adalah hasilkali berbentuk $a_{1j_1}, a_{2j_2}, ..., a_{nj_n}$ dimana $(j_1, j_2, ..., j_n)$ adalah permutasi dari suatu himpunan secara umum. *Hasilkali elementer bertanda dari A* adalah hasilkali elementer $a_{1j_1}, a_{2j_2}, ..., a_{nj_n}$ dikalikan dengan +1 jika $(j_1, j_2, ..., j_n)$ adalah permutasi genap atau -1 jika adalah permutasi ganjil.

Definisi 8.

Misalkan A_{nxn} adalah matriks bujursangkar, *determinan* dari matriks A_{nxn} dinotasikan $\det(A)$ atau $|A_{nxn}|$ adalah jumlah dari semua hasilkali elementer bertanda dari *A,* atau secara simbolis dapat ditulis sebagai

$$\det(A) = \sum \pm a_{1j_1} a_{2j_2} ... a_{nj_n}$$

Dimana Σ adalah penjumlahan suku-suku untuk semua permutasi $(j_1, j_2, ..., j_n)$ dan tanda + dipilih untuk permutasi genap dan – dipilih untuk permutasi ganjil. (Anton dan Rorres, 2004:94).

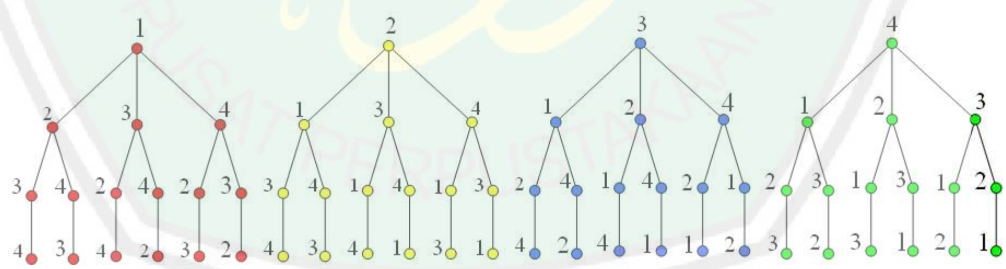
Contoh 9.

Hitunglah determinan dari matriks berikut ini:

$$A_{4\times 4} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Penyelesaian.

Matriks A berukuran 4 baris dan 4 kolom, maka berdasarkan definisi 7, ada 4 entri hasilkali elementer pada matriks A yang masing-masing berasal dari baris yang berbeda. Hasilkali elementernya dapat ditulis dalam bentuk $a_{1\_}\, a_{2\_}\, a_{3\_}\, a_{4\_}$, dimana titik-titik kosong menunjukkan nomor kolom. Karena pada hasilkali elementer mensyaratkan perkalian pada entri matriks yang berasal dari kolom yang berbeda, maka nomor-nomor kolom tersebut merupakan permutasi dari himpunan $\{1,2,3,4\}$. Untuk memudahkan menyusun daftar permutasi secara sistematis, kita gunakan pohon permutasi dari himpunan $\{1,2,3,4\}$.



Gambar 2.1.2.A.1: Pohon Permutasi $\{1,2,3,4\}$

Dari gambar diatas, dapat kita susun tabel berikut ini:

Hasilkali Elementer	**Permutasi**	**Jumlah Total Inversi**	**Kategori Permutasi**	**Hasilkali Elementer Bertanda**
$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$	$(1,2,3,4)$	0	Genap	$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$
$a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}$	$(1,2,4,3)$	1	Ganjil	$-a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}$
$a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$	$(1,3,2,4)$	1	Ganjil	$-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$
$a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$	$(1,3,4,2)$	2	Genap	$a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$
$a_{11}a_{24}a_{32}a_{43}$	$(1,4,2,3)$	2	Genap	$a_{11}a_{24}a_{32}a_{43}$
$a_{11}a_{24}a_{33}a_{42}$	$(1,4,3,2)$	3	Ganjil	$-a_{11}a_{24}a_{33}a_{42}$
$a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$	$(2,1,3,4)$	1	Ganjil	$-a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$
$a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}$	$(2,1,4,3)$	2	Genap	$a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}$
$a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}$	$(2,3,1,4)$	2	Genap	$a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}$
$a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}$	$(2,3,4,1)$	3	Ganjil	$-a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}$
$a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}$	$(2,4,1,3)$	3	Ganjil	$-a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}$
$a_{12}a_{24}a_{33}a_{41}$	$(2,4,3,1)$	4	Genap	$a_{12}a_{24}a_{33}a_{41}$
$a_{13}a_{21}a_{32}a_{44}$	$(3,1,2,4)$	2	Genap	$a_{13}a_{21}a_{32}a_{44}$
$a_{13}a_{21}a_{34}a_{42}$	$(3,1,4,2)$	3	Ganjil	$-a_{13}a_{21}a_{34}a_{42}$
$a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}$	$(3,2,1,4)$	3	Ganjil	$-a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}$
$a_{13}a_{22}a_{34}a_{41}$	$(3,2,4,1)$	4	Genap	$a_{13}a_{22}a_{34}a_{41}$
$a_{13}a_{24}a_{32}a_{41}$	$(3,4,2,1)$	5	Ganjil	$-a_{13}a_{24}a_{32}a_{41}$
$a_{13}a_{24}a_{31}a_{42}$	$(3,4,1,2)$	4	Genap	$a_{13}a_{24}a_{31}a_{42}$
$a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}$	$(4,1,2,3)$	3	Ganjil	$-a_{14}a_{21}a_{32}a_{43}$
$a_{14}a_{21}a_{33}a_{42}$	$(4,1,3,2)$	4	Genap	$a_{14}a_{21}a_{33}a_{42}$
$a_{14}a_{22}a_{31}a_{43}$	$(4,2,1,3)$	4	Genap	$a_{14}a_{22}a_{31}a_{43}$
$a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}$	$(4,2,3,1)$	5	Ganjil	$-a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}$
$a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$	$(4,3,1,2)$	5	Ganjil	$-a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$
$a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$	$(4,3,2,1)$	6	Genap	$a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$

Tabel 2.1.2.B.1: Hasilkali Elementer Bertanda

Sesuai dengan definisi 8, maka determinan dari matriks $A_{4\times4}$ adalah

$$\det(A)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} - a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} + a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} + a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} - a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} \\
&-a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} + a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} + a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} - a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} - a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} + a_{12}a_{24}a_{33}a_{41} \\
&+a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} - a_{13}a_{21}a_{34}a_{42} - a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} + a_{13}a_{22}a_{34}a_{41} - a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} + a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} \\
&-a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} + a_{14}a_{21}a_{33}a_{42} + a_{14}a_{22}a_{31}a_{43} - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41} - a_{14}a_{23}a_{31}a_{42} + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}
\end{aligned}$$

Definisi 10.

Jika A adalah suatu matriks bujursangkar, maka *minor dari entri* a_{mn} dinyatakan sebagai M_{mn} dan didefinisikan sebagai determinan dari submatriks yang tersisa setelah baris ke-m dan kolom ke-n dihilangkan dari A. Bilangan $(-1)^{m+n}M_{mn}$ dinyatakan sebagai C_{mn} dan disebut sebagai *kofaktor dari entri* a_{mn}. (Anton dan Rorres, 2004:115).

Contoh 11.

Kofaktor baris pertama pada matriks $A_{4\times4}$ dalam contoh 9 adalah

$$\det(A)=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} & a_{33} \\ a_{41} & a_{43} & a_{43} \end{vmatrix}$$

2.1.3 Nilai Eigen, Vektor Eigen, dan Diagonalisasi Matriks

Definisi 12.

Jika A adalah sebuah matriks $n \times n$, maka sebuah vektor taknol x pada R^n disebut *vektor eigen* dari A jika Ax adalah sebuah kelipatan skalar dari x; jelasnya, $Ax = \lambda x$ untuk skalar sebarang λ. Skalar λ disebut *nilai eigen* dari A, dan x disebut sebagai vektor eigen dari A yang *terkait* dengan λ. (Anton dan Rorres, 2004:384).

Untuk memperoleh nilai eigen dari sebuah matriks $n \times n$, kita menuliskan kembali $Ax = \lambda x$ sebagai $Ax = I\lambda x$ yang ekuivalen dengan $(I\lambda - A)x = 0$. Agar λ menjadi nilai eigen, harus terdapat satu solusi taknol dari $(I\lambda - A)x = 0$ dan memiliki solusi taknol apabila $\det(I\lambda - A)x = 0$, sehingga diperoleh persamaan karakteristik dari matriks A, skalar-skalar yang memenuhi persamaan ini adalah nilai–nilai eigen dari A.

Definisi 13.

Misalkan D adalah matriks dengan ukuran $n \times n$, matriks $D_{n\times n}$ dikatakan matriks diagonal jika setiap entri yang tidak terletak pada diagonal utama adalah nol. (S.K. Jain dan A.D. Gunawardena, 2004:42).

Definisi 14.

Matriks bujursangkar yang semua entri diatas diagonal utamanya adalah nol disebut matriks segitiga bawah dan matriks bujursangkar yang semua entri dibawah diagonal utamanya adalah nol disebut matriks segitiga atas. Suatu matriks, baik segitiga bawah atau segitiga atas disebut matriks segitiga. (Anton dan Rorres, 2004:76).

Contoh 15. Tentukan nilai eigen dari matriks diagonal berikut ini:

$$A_{nxn} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Penyelesaian.

Untuk mengetahui nilai eigen dari matriks diatas, maka

$$\det(I\lambda - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda - a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda - a_{nn} \end{pmatrix}$$

Satu-satunya hasilkali elementer dari A_{nxn} yang bisa berupa bilangan taknol adalah $(\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})...(\lambda - a_{nn})$, kemudian diperoleh persamaan karakteristik:

$$\det(I\lambda - A) = (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})...(\lambda - a_{nn}) = 0$$

Sehingga nilai-nilai eigennya adalah $\lambda = a_{kk}$ dengan k = 1, 2, …, *n.*

Definisi 16.

Diberikan A_{nxn} dan B_{nxn} sedemikian rupa sehingga $(AB)_{nxn} = (BA)_{nxn} = I_{nxn}$ dimana I_{nxn} adalah matriks identitas, maka A_{nxn} disebut dapat dibalik *(invertible)* dan B_{nxn} disebut invers dari A_{nxn}. Untuk selanjutnya matriks B_{nxn} ditulis A_{nxn}^{-1}. (Anton dan Rorres, 2004:46).

Definisi 17.

Sebuah matriks A_{nxn} dikatakan dapat didiagonalisasi jika terdapat sebuah matriks *invertible* P_{nxn} sedemikian hingga $(P^{-1}AP)_{nxn}$ adalah matriks diagonal. (S.K. Jain dan A.D. Gunawardena, 2004:174).

Langkah-langkah yang dilakukan untuk mendiagonalisasikan sebuah matriks A:

1. Tentukan n vektor eigen dari A, misalkan $p_1, p_2, ..., p_n$.
2. Bentuklah sebuah matriks P dengan $p_1, p_2, ..., p_n$ sebagai vektor-vaktor kolomnya.
3. Matriks $\left(P^{-1}AP\right)$ kemudian akan menjadi diagonal dengan $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ sebagai entri-entri diagonalnya secara berurutan, dimana λ_i adalah nilai eigen yang terkait dengan p_i, untuk i = 1, 2, …, n.

Definisi 18.

Misalkan A_{nxn}, B_{nxn} adalah matriks bujursangkar, matriks A_{nxn} dan B_{nxn} dikatakan serupa *(similar)* jika terdapat matriks non-singular X_{nxn} sedemikian hingga $\left(X^{-1}AX\right)_{n\times n} = B_{n\times n}$. Karena matriks A_{nxn} dan B_{nxn} serupa, maka nilai eigen pada matriks A_{nxn} merupakan elemen matriks diagonal dari matriks B_{nxn}. (Cvetković dan Doob, 1980:20).

Contoh 19.

Tentukan diagonalisasi dari matriks $A_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Penyelesaian.

Langkah 1. Menentukan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks $A_{2\times 2}$.

$$|I\lambda - A_{2\times 2}| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0 \rightarrow \lambda_1 = 1 \vee \lambda_2 = -1$$

untuk $\lambda_1 = 1$, maka solusi nontrivial dari $\left(I\lambda_1 - A_{2\times 2}\right)x = 0$ adalah

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \end{matrix}$$

misalkan $x_2 = s \neq 0$ diperoleh $x_1 = x_2 = s$ kemudian $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ s \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

untuk $\lambda_2 = -1$, maka solusi taknol dari $(I\lambda_2 - A_{2\times 2})x = 0$ adalah

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} -x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 - x_2 = 0 \end{matrix}$$

misalkan $x_2 = s \neq 0$ diperoleh $x_1 = -s$ kemudian $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s \\ s \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Jadi vektor eigen untuk $\lambda_1 = 1$ adalah $p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda_2 = -1$ adalah $p_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Langkah 2. Menentukan matriks P dan P^{-1}.

Dari langkah 1, dapat dibentuk matriks P dengan p_1 dan p_2 sebagai vektor-vektor kolomnya, sehingga $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} adj(P) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Langkah 3. Misalkan $J_{(A)}$ adalah matriks diagonal dari *A*, maka $J_{(A)} = P^{-1}AP$.

$$J_{(A)} = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Jadi matriks $J_{(A)}$ serupa dengan matriks $A_{2\times 2}$.

2.1.4 Hasilkali Kronecker

Definisi 20.

Hasilkali Kronecker atau hasilkali tensor dari matriks $A_{m\times n}$ dengan $B_{p\times q}$ adalah matriks dengan *mp* baris dan *nq* kolom, yang dinotasikan dengan $\left(A\otimes B\right)_{mp\times nq}$ didefinisikan sebagai:

$$\left(A\otimes B\right)_{mp\times nq}=\begin{pmatrix} a_{11}B_{p\times q} & a_{12}B_{p\times q} & \cdots & a_{1n}B_{p\times q} \\ a_{21}B_{p\times q} & a_{22}B_{p\times q} & \cdots & a_{2n}B_{p\times q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B_{p\times q} & a_{m2}B_{p\times q} & \cdots & a_{mn}B_{p\times q} \end{pmatrix}.$$

(Carl D. Meyer, 2000:380).

Yang perlu kira perhatikan dalam hasilkali Kronecker dari matriks $A_{m\times n}$ dengan $B_{p\times q}$ adalah setiap entri pada matriks $A_{m\times n}$ dikalikan dengan matriks $B_{p\times q}$.

Contoh 21.

Tentukan hasilkali Kronecker dari matriks $A_{2\times 2}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dengan $B_{3\times 1}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\left(A\otimes B\right)_{6\times 2}=\begin{pmatrix} 0\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & 1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ 1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & 0\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Teorema 22.

Misalkan $A_{m\times n}$, $B_{p\times q}$, dan $C_{p\times q}$ adalah matriks sebarang, kemudian $E_{m\times m}$ dan $F_{n\times n}$ adalah matriks nonsingular, $G_{m\times m}$ dan $H_{n\times n}$ adalah matriks bujursangkar maka operasi hasilkali Kronecker pada matriks memenuhi beberapa sifat-sifat berikut ini:

a. $A_{m\times n} \otimes (B+C)_{p\times q} = (A\otimes B)_{mp\times nq} + (A\otimes C)_{mp\times nq}$

b. $(G\otimes H)_{mn\times mn}(G'\otimes H')_{mn\times mn} = (GG')_{m\times m} \otimes (HH')_{n\times n}$

c. $(E\otimes F)^{-1}_{mn\times mn} = E^{-1}_{m\times m} \otimes F^{-1}_{n\times n}$

(Carl D. Meyer, 2000:598)

Bukti.

a. $A_{m\times n} \otimes (B+C)_{p\times q} = (A\otimes B)_{mp\times nq} + (A\otimes C)_{mp\times nq}$

$$A_{m\times n} \otimes (B+C)_{p\times q} = \begin{pmatrix} a_{11}(B+C)_{p\times q} & a_{12}(B+C)_{p\times q} & \cdots & a_{1n}(B+C)_{p\times q} \\ a_{21}(B+C)_{p\times q} & a_{22}(B+C)_{p\times q} & \cdots & a_{2n}(B+C)_{p\times q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}(B+C)_{p\times q} & a_{m2}(B+C)_{p\times q} & \cdots & a_{mn}(B+C)_{p\times q} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}B_{p\times q} + a_{11}C_{p\times q} & a_{12}B_{p\times q} + a_{12}C_{p\times q} & \cdots & a_{1n}B_{p\times q} + a_{1n}C_{p\times q} \\ a_{21}B_{p\times q} + a_{21}C_{p\times q} & a_{22}B_{p\times q} + a_{22}C_{p\times q} & \cdots & a_{2n}B_{p\times q} + a_{2n}C_{p\times q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B_{p\times q} + a_{m1}C_{p\times q} & a_{m2}B_{p\times q} + a_{m2}C_{p\times q} & \cdots & a_{mn}B_{p\times q} + a_{mn}C_{p\times q} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}B_{p\times q} & a_{12}B_{p\times q} & \cdots & a_{1n}B_{p\times q} \\ a_{21}B_{p\times q} & a_{22}B_{p\times q} & \cdots & a_{2n}B_{p\times q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B_{p\times q} & a_{m2}B_{p\times q} & \cdots & a_{mn}B_{p\times q} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11}C_{p\times q} & a_{12}C_{p\times q} & \cdots & a_{1n}C_{p\times q} \\ a_{21}C_{p\times q} & a_{22}C_{p\times q} & \cdots & a_{2n}C_{p\times q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}C_{p\times q} & a_{m2}C_{p\times q} & \cdots & a_{mn}C_{p\times q} \end{pmatrix}$$

$$= (A\otimes B)_{mp\times nq} + (A\otimes C)_{mp\times nq}$$

b. $\left(G\otimes H\right)_{mn\times mn}\left(G^{'}\otimes H^{'}\right)_{mn\times mn}=\left(GG^{'}\right)_{m\times m}\otimes\left(HH^{'}\right)_{n\times n}$

$$\left(G\otimes H\right)\left(G^{'}\otimes H^{'}\right)=\begin{pmatrix} g_{11}H_{n\times n} & g_{12}H_{n\times n} & \cdots & g_{1n}H_{n\times n} \\ g_{21}H_{n\times n} & g_{22}H_{n\times n} & \cdots & g_{2n}H_{n\times n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{m1}H_{n\times n} & g_{m2}H_{n\times n} & \cdots & g_{mn}H_{n\times n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} g'_{11}H^{'}_{n\times n} & g'_{12}H^{'}_{n\times n} & \cdots & g'_{1n}H^{'}_{n\times n} \\ g'_{21}H^{'}_{n\times n} & g'_{22}H^{'}_{n\times n} & \cdots & g'_{2n}H^{'}_{n\times n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g'_{m1}H^{'}_{n\times n} & g'_{m2}H^{'}_{n\times n} & \cdots & g'_{mn}H^{'}_{n\times n}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{m} g_{1i}g'_{i1}\left(HH^{'}\right)_{n\times n} & \sum_{i=1}^{m} g_{1i}g'_{i2}\left(HH^{'}\right)_{n\times n} & \cdots & \sum_{i=1}^{m} g_{1i}g'_{in}\left(HH^{'}\right)_{n\times n} \\ \sum_{i=1}^{m} g_{2i}g'_{i1}\left(HH^{'}\right)_{n\times n} & \sum_{i=1}^{m} g_{2i}g'_{i2}\left(HH^{'}\right)_{n\times n} & \cdots & \sum_{i=1}^{m} g_{2i}g'_{in}\left(HH^{'}\right)_{n\times n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{m} g_{mi}g'_{i1}\left(HH^{'}\right)_{n\times n} & \sum_{i=1}^{m} g_{mi}g'_{i2}\left(HH^{'}\right)_{n\times n} & \cdots & \sum_{i=1}^{m} g_{mi}g'_{in}\left(HH^{'}\right)_{n\times n}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \left(\sum_{i=1}^{m} g_{1i}g'_{i1}\right)\left(HH^{'}\right)_{n\times n} & \left(\sum_{i=1}^{m} g_{1i}g'_{i2}\right)\left(HH^{'}\right)_{n\times n} & \cdots & \left(\sum_{i=1}^{m} g_{1i}g'_{in}\right)\left(HH^{'}\right)_{n\times n} \\ \left(\sum_{i=1}^{m} g_{2i}g'_{i1}\right)\left(HH^{'}\right)_{n\times n} & \left(\sum_{i=1}^{m} g_{2i}g'_{i2}\right)\left(HH^{'}\right)_{n\times n} & \cdots & \left(\sum_{i=1}^{m} g_{2i}g'_{in}\right)\left(HH^{'}\right)_{n\times n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\sum_{i=1}^{m} g_{mi}g'_{i1}\right)\left(HH^{'}\right)_{n\times n} & \left(\sum_{i=1}^{m} g_{mi}g'_{i2}\right)\left(HH^{'}\right)_{n\times n} & \cdots & \left(\sum_{i=1}^{m} g_{mi}g'_{in}\right)\left(HH^{'}\right)_{n\times n}\end{pmatrix}$$

$$=\left(GG^{'}\right)_{m\times m}\otimes\left(HH^{'}\right)_{n\times n}$$

c. $\left(E\otimes F\right)^{-1}_{mn\times mn}=E^{-1}_{m\times m}\otimes F^{-1}_{n\times n}$

Berdasarkan definisi 16, akan ditunjukkan $\left(E\otimes F\right)_{mn\times mn}\left(E^{-1}_{m\times m}\otimes F^{-1}_{n\times n}\right)=I_{mn\times mn}$ maka kita dapat membuktikan bahwa matriks $\left(E\otimes F\right)_{mn\times mn}$ dapat dibalik, sehingga $\left(E\otimes F\right)^{-1}_{mn\times mn}=E^{-1}_{m\times m}\otimes F^{-1}_{n\times n}$.

$$\left(E\otimes F\right)_{mn\times mn}\left(E^{-1}_{m\times m}\otimes F^{-1}_{n\times n}\right)=\left(E\otimes F\right)_{mn\times mn}\left(E^{-1}\otimes F^{-1}\right)_{mn\times mn} \quad \ldots \text{T.25.b}$$

$$=\left(EE^{-1}\right)_{m\times m}\otimes\left(FF^{-1}\right)_{n\times n}=I_{m\times m}\otimes I_{n\times n}=I_{mn\times mn}$$

2.2 Polinomial Chebyshev

Definisi 23. (J.C. Mason dan D.C. Handscomb, 2003:1.2.1)

Polinomial *Chebyshev* jenis kesatu adalah deret polinomial $T_n(x)$ sedemikian hingga:

$$T_n(x) = T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$$

untuk n = 0, 1, 2, … dimana $x = \cos(\theta)$, $\theta := [0, \pi]$ dan $x := [-1,1]$.

Contoh 24. Tentukan deret polinomial Chebyshev jenis kesatu untuk n = 0,1,2,3,4.

$$T_0(x) = T_0(\cos(\theta)) = \cos(0\theta) = 1$$

$$T_1(x) = T_1(\cos(\theta)) = \cos(\theta) = x$$

$$T_2(x) = T_2(\cos(\theta)) = \cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1 = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = T_3(\cos(\theta)) = \cos(3\theta) = 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta) = 4x^3 - 3x$$

$$T_4(x) = T_4(\cos(\theta)) = 8\cos^4(\theta) - 8\cos^2(\theta) + 1 = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

$T_n(x) = 1 + x + 2x^2 - 1 + 4x^3 - 3x + 8x^4 - 8x^2 + 1$, untuk n = 0,1,2,3,4.

Teorema 25. (J.C. Mason dan D.C. Handscomb, 2003:1.2.1)

Misalkan $T_n(x)$ adalah polinomial *Chebyshev* jenis kesatu, maka $T_n(x)$ dapat juga dinyatakan dalam bentuk

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), \text{ untuk } n = 2,3,\ldots$$

Bukti.

Untuk $n=0$ diperoleh $T_0(x)=T_0(\cos(\theta))=\cos(0\theta)=1$

Untuk $n=1$ diperoleh $T_1(x)=T_1(\cos(\theta))=\cos(1\theta)=\cos(\theta)=x$

Akan ditunjukkan bahwa untuk $n\geq 2$, maka $T_n(x)=2xT_{n-1}(x)-T_{n-2}(x)$

Berdasarkan sifat penjumlahan fungsi-fungsi trigonometri, diketahui bahwa:

$$\cos A+\cos B=2\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)$$

Misalkan $A=n\theta$ dan $B=(n-2)\theta$, untuk $n=2,3,...$ maka

$$\cos(n\theta)+\cos((n-2)\theta)=2\cos\frac{1}{2}(n\theta+(n-2)\theta)\cos\frac{1}{2}(n\theta-(n-2)\theta)$$
$$\cos(n\theta)+\cos((n-2)\theta)=2\cos\frac{1}{2}(2n\theta-2\theta)\cos\frac{1}{2}(2\theta)$$
$$\cos(n\theta)+\cos((n-2)\theta)=2\cos((n-1)\theta)\cos(\theta).$$

Kemudian diperoleh

$$\cos(n\theta)=2\cos(\theta)\cos((n-1)\theta)-\cos((n-2)\theta).$$

Berdasarkan definisi 23, subsitusi $T_n(x)=\cos(n\theta)$ didapatkan

$$T_n(\cos(\theta))=2\cos(\theta)T_{n-1}(\cos(\theta))-T_{n-2}(\cos(\theta)).$$

Untuk $x=\cos(\theta)$ terbukti bahwa

$T_n(x)=2xT_{n-1}(x)-T_{n-2}(x)$ dengan $n=2,3,...$

Definisi 26.

Polinomial *Chebyshev* jenis kedua adalah deret polinomial $U_n(x)$ sedemikian hingga

$$U_n(x) = U_n(\cos(\theta)) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}$$

untuk $n = 0, 1, 2, \ldots$ dimana $x = \cos(\theta)$, $\theta := [0, \pi]$ dan $x := [-1, 1]$.

(J.C. Mason dan D.C. Handscomb, 2003:1.2.2)

Contoh 27. Tentukan deret polinomial Chebyshev jenis kedua untuk $n = 0,1,2,3$.

$$U_0(x) = U_0(\cos(\theta)) = 1$$

$$U_1(x) = U_1(\cos(\theta)) = 2\cos(\theta) = 2x$$

$$U_2(x) = U_2(\cos(\theta)) = 4\cos^2(\theta) - 1 = 4x^2 - 1$$

$$U_3(x) = U_3(\cos(\theta)) = 8\cos^3(\theta) - 4\cos(\theta) = 8x^3 - 4x$$

$U_n(x) = 1 + 2x + 4x^2 - 1 + 8x^3 - 4x$, untuk $n = 0,1,2,3$.

Teorema 28. (J.C. Mason dan D.C. Handscomb, 2003:1.2.2)

Misalkan $U_n(x)$ adalah polinomial *Chebyshev* jenis kedua, maka $U_n(x)$ dapat juga dinyatakan dalam bentuk:

$$U_0(x) = 1$$

$$U_1(x) = 2x$$

$$U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x), \quad \text{untuk } n = 2,3,\ldots$$

Bukti.

Untuk $n = 0$ diperoleh $U_0\left(\cos(\theta)\right) = \dfrac{\sin\left((0+1)\theta\right)}{\sin\theta} = \dfrac{\sin\theta}{\sin\theta} = 1.$

Untuk $n = 1$ diperoleh

$$U_1\left(\cos(\theta)\right) = \frac{\sin\left((1+1)\theta\right)}{\sin\theta} = \frac{\sin(2\theta)}{\sin\theta} = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta} = 2\cos\theta = 2x$$

Akan ditunjukkan bahwa untuk $n \geq 2$, maka $U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x)$.

Berdasarkan sifat penjumlahan fungsi-fungsi trigonometri, diketahui bahwa

$$\sin A + \sin B = 2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B).$$

Misalkan $A = (n+1)\theta$ dan $B = (n-1)\theta$, untuk $n = 2,3,...$ maka

$$\sin\left((n+1)\theta\right) + \sin\left((n-1)\theta\right) = 2\sin\frac{1}{2}\left((n+1)\theta + (n-1)\theta\right)\cos\frac{1}{2}\left((n+1)\theta - (n-1)\theta\right)$$

$$\sin\left((n+1)\theta\right) + \sin\left((n-1)\theta\right) = 2\sin\frac{1}{2}(2n\theta)\cos\frac{1}{2}(2\theta)$$

$$\sin\left((n+1)\theta\right) + \sin\left((n-1)\theta\right) = 2\sin(n\theta)\cos(\theta)$$

$$\frac{\sin\left((n+1)\theta\right)}{\sin\theta} + \frac{\sin\left((n-1)\theta\right)}{\sin\theta} = \frac{2\sin(n\theta)\cos(\theta)}{\sin\theta}$$

$$\frac{\sin\left((n+1)\theta\right)}{\sin\theta} + \frac{\sin\left(\left((n-2)+1\right)\theta\right)}{\sin\theta} = \frac{2\cos(\theta)\sin\left(\left((n+1)-1\right)\theta\right)}{\sin\theta}.$$

Kemudian diperoleh

$$\frac{\sin\left((n+1)\theta\right)}{\sin\theta} = \frac{2\cos(\theta)\sin\left(\left((n+1)-1\right)\theta\right)}{\sin\theta} - \frac{\sin\left(\left((n-2)+1\right)\theta\right)}{\sin\theta}.$$

Berdasarkan definisi 26, didapatkan

$U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x)$, $x = \cos(\theta)$ dimana $n \geq 2$.

2.3 Teori Graf

2.3.1 Pendahuluan Graf

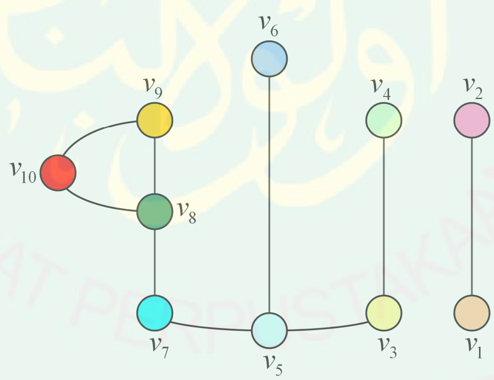
Definisi 29.

Suatu graf G adalah pasangan himpunan (V, E) dimana V adalah himpunan tak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut titik (*vertex*), dan E adalah himpunan dari pasangan tak terurut dari titik-titik berbeda di V yang disebut sisi (*edge*). Himpunan titik di graf G ditulis $V(G)$ dan himpunan sisi di graf G dilambangkan dengan $E(G)$. (Chartrand dan Lesniak, 1986 : 4)

Contoh 30.

Misalkan $G:(V,E)$ dengan $V(G)=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7,v_8,v_9,v_{10}\}$ dan $E(G)=\{(v_1,v_2),(v_3,v_4),(v_3,v_5),(v_5,v_6),(v_5,v_7),(v_7,v_8),(v_8,v_9),(v_9,v_{10}),(v_{10},v_8)\}$.

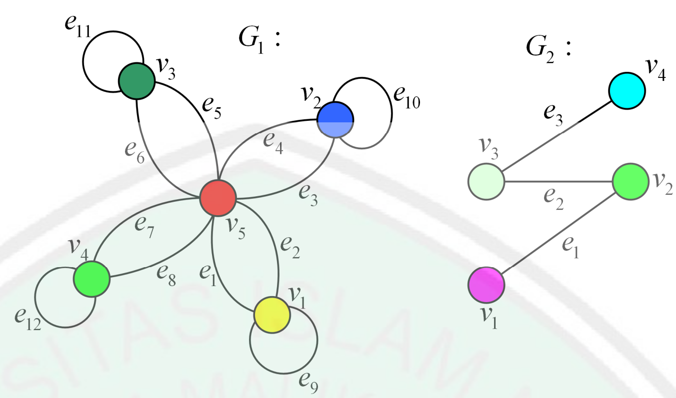
Jadi graf G digambar sebagai berikut:



Gambar 2.3.1.1: Sebuah Graf

Dari keterangan diatas, suatu graf yang tidak mempunyai sisi rangkap (*multiple edges*) dan loop merupakan graf sederhana. Sisi rangkap dari suatu graf adalah jika dua titik yang dihubungkan lebih dari satu sisi. Sedangkan yang disebut dengan loop adalah suatu sisi yang menghubungkan suatu titik dengan dirinya sendiri. Graf yang mempunyai sisi rangkap dan loop disebut multigraf.

Contoh 31.



Gambar 2.3.1.2: Multigraf dan Graf

Pada Gambar 2.3.1.2, G_2 merupakan graf yang memuat himpunan titik $V(G_2)$ dan sisi $E(G_2)$ atau dapat ditulis $V(G_2)=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ dan $E(G_2)=\{e_1,e_2,e_3\}$. Kemudian untuk graf G_1 merupakan multigraf karena mengandung loop, yaitu pada sisi e_9, e_{10}, e_{11} dan e_{12}, selain itu dalam graf G_1 terdapat sisi ganda yaitu sisi $(e_1,e_2),(e_3,e_4),(e_5,e_6)$ dan (e_7,e_8).

Definisi 32.

Sisi e = (u, v) dikatakan menghubungkan titik u dan v. Jika e = (u, v) adalah sisi di graf G, maka u dan v disebut terhubung langsung (*adjacent*), u dan e serta v dan e disebut terkait langsung (*incident*). (Chartrand dan Lesniak, 1986:4).

Untuk selanjutnya, jika sisi e menghubungkan titik u dan v, maka dapat ditulis $u \sim v$, dibaca titik u terhubung langsung dengan v, tanda $\sim$ menyatakan terdapat sisi yang menghubungkan dua titik dalam suatu graf. Dalam graf G_2, sisi $e_1 = (v_1, v_2)$ dikatakan menghubungkan titik (v_1, v_2) ditulis $v_1 \sim v_2$.

Definisi 33.

Derajat suatu titik *v* pada sebuah graf *G*, ditulis dengan $\deg(v)$ adalah banyaknya sisi yang terkait langsung pada *v*. Dengan kata lain, banyaknya sisi yang memuat *v* sebagai titik ujung. (Chartrand dan Lesniak, 1986:7).

Pada Gambar 2.3.1.2, derajat dari setiap titik dalam graf G_2 adalah: $\deg(v_1)=1$, $\deg(v_2)=2$, $\deg(v_3)=2$, dan $\deg(v_4)=1$.

Definisi 34.

Dua graf G dan H dikatakan isomorfis, ditulis $G \cong H$ jika *terdapat* fungsi bijektif $f: V(G) \to V(H)$ dan $k: E(G) \to E(H)$ sedemikian hingga *u* dan *v* terhubung oleh *e* jika dan hanya jika $f(u)$ dan $f(v)$ terhubung oleh $k(e)$ $\forall u, v \in V(G)$ dan $e \in E(G)$. (Bondy dan Murty, 2008:12).

Dari definisi isomorfisma graf diatas, dengan mengabaikan label pada sisi yang menghubungkan dua titik pada graf, dapat dipahami bahwa dua graf G dan H dikatakan isomorfis $(G \cong H)$, apabila terdapat minimal satu fungsi bijektif, yaitu $f: V(G) \to V(H)$ yang memenuhi

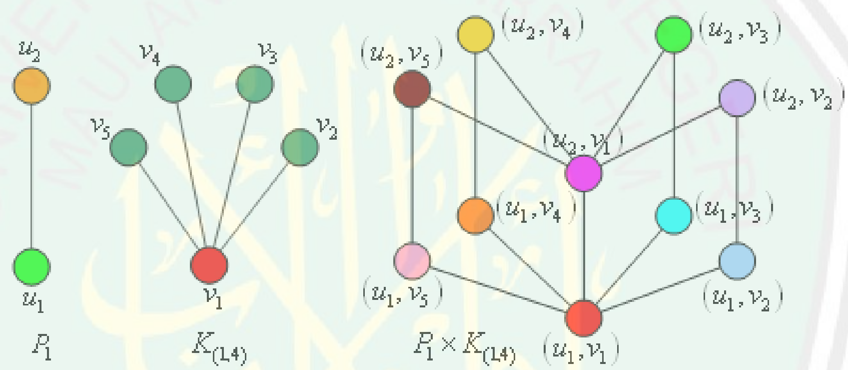
$$u \sim v \leftrightarrow f(u) \sim f(v),\ \forall u, v \in V(G) \text{ dan } f(u), f(v) \in V(H).$$

2.3.2 Operasi Pada Graf

Definisi 35. (Chartrand dan Lesniak, 1986:11).

Hasilkali kartesius dari graf G_1 dan G_2 adalah graf yang dinotasikan $G = G_1 \times G_2$ dan mempunyai himpunan titik $V(G) = V(G_1) \times V(G_2)$, dan dua titik (u_1, u_2) dan (v_1, v_2) dari graf G terhubung langsung jika dan hanya jika $u_1 = v_1$ dan $u_2 \sim v_2 \in E(G_2)$ atau $u_2 = v_2$ dan $u_1 \sim v_1 \in E(G_1)$.

Contoh 36.



Gambar 2.3.2.1: Hasil operasi perkalian kartesius graf P_1 dengan $K_{(1,4)}$

Diketahui bahwa $V(P_1) = \{u_1, u_2\}$ dan $V\left(K_{(1,4)}\right) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$.

$V\left(P_1 \times K_{(1,4)}\right) = (u_1, u_2) \times (v_1, v_2, u_3, v_4, v_5)$

$= \{(u_1, v_1), (u_1, v_2), (u_1, v_3), (u_1, v_4), (u_1, v_5), (u_2, v_1), (u_2, v_2), (u_2, v_3), (u_2, v_4), (u_2, v_5)\}$.

$e_1 = (u_1, v_1) \sim (u_2, v_1)$, $e_5 = (u_1, v_5) \sim (u_2, v_5)$, $e_9 = (u_1, v_1) \sim (u_1, v_5)$,

$e_2 = (u_1, v_2) \sim (u_2, v_2)$, $e_6 = (u_1, v_1) \sim (u_1, v_2)$, $e_{10} = (u_2, v_1) \sim (u_2, v_2)$,

$e_3 = (u_1, v_3) \sim (u_2, v_3)$, $e_7 = (u_1, v_1) \sim (u_1, v_3)$, $e_{11} = (u_2, v_1) \sim (u_2, v_3)$,

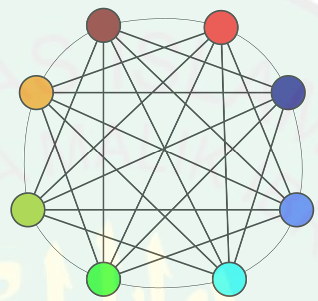
$e_4 = (u_1, v_4) \sim (u_2, v_4)$, $e_8 = (u_1, v_1) \sim (u_1, v_4)$, $e_{12} = (u_2, v_1) \sim (u_2, v_4)$,

$e_{13} = (u_2, v_1) \sim (u_2, v_5)$, $E\left(P_1 \times K_{(1,4)}\right) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}, e_{13}\}$.

2.3.3 Jenis-Jenis Graf

Definisi 37.

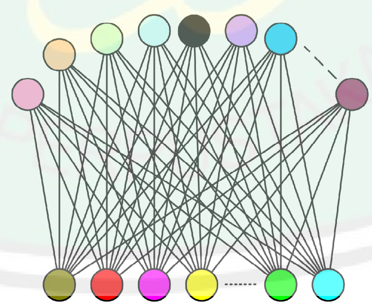
Graf komplit adalah graf dengan setiap dua titik yang berbeda dari graf tersebut saling terhubung. Graf komplit dengan n titik dinotasikan dengan K_n. (Chartrand dan Lesniak, 1986: 9).



Gambar 2.3.3.1: Graf Komplit K_8.

Definisi 38.

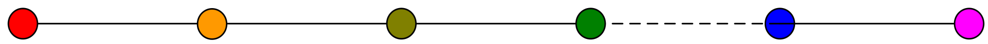
Graf bipartisi komplit adalah graf bipartisi dengan himpunan partisi X dan Y sehingga masing-masing titik di X dihubungkan dengan masing-masing titik di Y oleh tepat satu sisi. Jika $|X| = m$ dan $|Y| = n$, maka graf bipartisi tersebut dinyatakan dengan $K_{(m,n)}$. (Bondy dan Murty, 2008:4)



Gambar 2.3.3.2: Graf Bipartisi $K_{(m,n)}$.

Definisi 39.

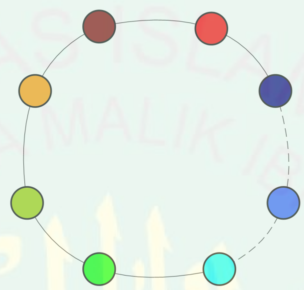
Graf lintasan adalah graf yang terdiri dari satu lintasan. Graf lintasan dengan n titik dinotasikan dengan P_n. (Wilson dan Watkins, 1990:37).



Gambar 2.3.3.3: Graf P_n

Definisi 40.

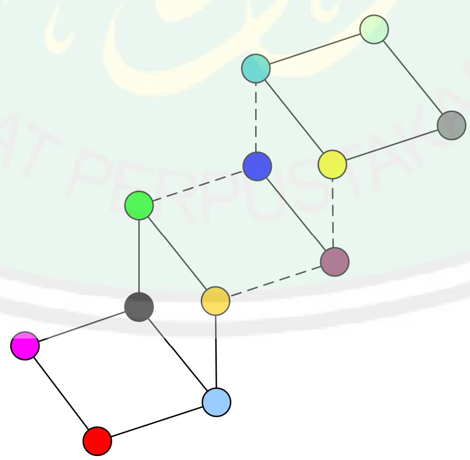
Graf Sikel (C_n) ialah graf terhubung beraturan 2 yang mempunyai n titik ($n \geq 3$) dan n sisi. (Chartrand dan Lesniak, 1986:28)



Gambar 2.3.3.4: Graf C_n

Definisi 41.

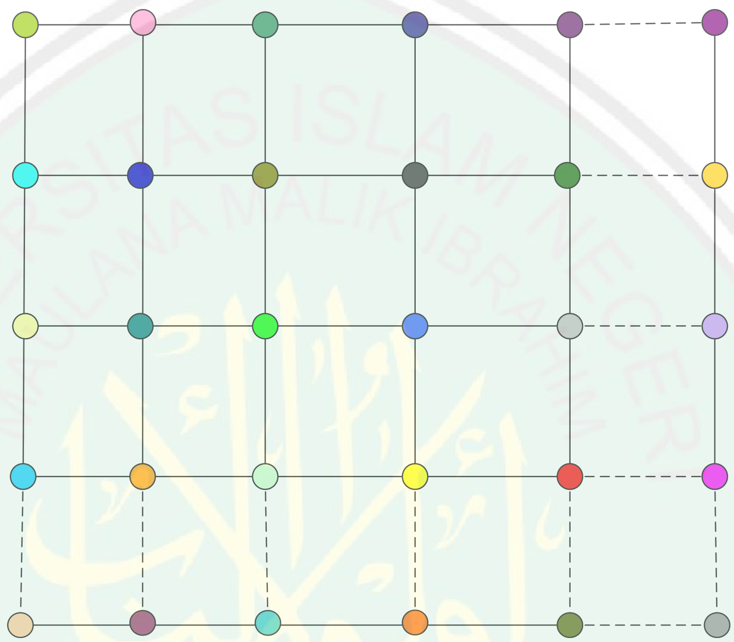
Graf tangga (L_n) adalah graf yang diperoleh dari hasilkali kartesius antara graf lintasan dengan dua titik dan graf lintasan dengan n titik atau dapat ditulis $L_n = P_2 \times P_n$.. (Gallian, 2007:14).



Gambar 2.3.3.5: Graf Tangga (L_n).

Definisi 42.

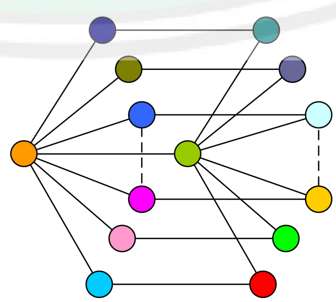
Graf jaring–jaring adalah graf yang diperoleh dari hasilkali kartesius antara graf lintasan dengan m titik dan graf lintasan dengan n titik atau dapat ditulis $(P_m \times P_n)$. (Bondy dan Murty, 2008:30).



Gambar 2.3.3.6: Graf Jaring-Jaring.

Definisi 43.

Graf buku adalah graf yang diperoleh dari hasilkali kartesius antara graf lintasan dengan 2 titik dan graf bipartisi komplit dengan banyaknya himpunan partisi $|X| = 1$ dan $|Y| = n$ atau dapat ditulis $(P_2 \times K_{1,n})$.



Gambar 2.3.3.7: Graf Buku.

2.4 Teori Spectra Graf

2.4.1 Representasi Graf dalam Matriks

Definisi 44.

Diberikan suatu graf G dengan himpunan titik $V(G)=\{v_1,v_2,...,v_n\}$ dan himpunan sisi $E(G)$, $A(G)$ dikatakan sebagai matriks terhubung langsung nxn dari graf G apabila elemennya terdiri dari $a_{ij}=1$ jika v_i dan v_j terhubung langsung, 0 untuk yang lainnya. (Harary, 1969:150).

Dari definisi diatas, dapat disimpulkan bahwa suatu matriks $A(G)=(a_{ij})$ dengan indeks $V(G)\times V(G)$ dikatakan sebagai matriks terhubung langsung dari graf $G=(V,E)$ jika

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & v_i \sim v_j\\ 0, & lainnya.\end{cases}$$

Kajian mengenai matriks dalam teori spectra graf lebih menekankan pada konstruksi entri dari matriks dengan suatu fungsi, jadi misalkan diberikan dua sebarang himpunan terhingga $V(G)=\{x_1,x_2,...,x_m\}$ dan $V(H)=\{y_1,y_2,...,y_n\}$, fungsi $f:V(G)\times V(H)\rightarrow R$ dapat dipandang sebagai matriks A dengan indeks $V(G)\times V(H)$ yang elemenya dinotasikan dengan

$$A_{(m+n)\times(m+n)}=a(x_i,y_j)=a_{x_iy_j}$$

dengan $i=1,2,...,m$ dan $j=1,2,...,n$ $\forall m,n\in N$.

Contoh 45.

Misalkan P_3 adalah graf lintasan yang himpunan titiknya adalah $V(P_3)=\{u_1,u_2,u_3\}$. Matriks terhubung langsung dari graf tersebut adalah:

$$A(P_3)=\begin{array}{c|c} f & \begin{matrix} u_1 & \quad u_2 & \quad u_3 \in (P_3) \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \in (P_3) \end{matrix} & \begin{pmatrix} a(u_1,u_1) & a(u_1,u_2) & a(u_1,u_3) \\ a(u_2,u_1) & a(u_2,u_2) & a(u_2,u_3) \\ a(u_3,u_1) & a(u_3,u_2) & a(u_3,u_3) \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} 0 & u_1 \sim u_2 & 0 \\ u_2 \sim u_1 & 0 & u_2 \sim u_3 \\ 0 & u_3 \sim u_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Diberikan graf G dengan himpunan titik $V(G)=\{v_1,v_2,...,v_n\}$, himpunan sisi $E(G)$, $I(G)$ dinotasikan sebagai matriks identitas $n \times n$, yang mana ukuran dari matriks tersebut adalah banyaknya titik pada graf G. Dari keterangan tersebut menegaskan bahwa entri diagonal utama matriks identitas $I(G)$ pasti bernilai 1, atau dapat ditulis

$$I(G)=i(v_i,v_j)=1,\ \forall i=j,\ \text{dimana } i, j = 1, 2, \dots n.$$

Contoh 46.

Misalkan P_3 adalah graf lintasan yang himpunan titiknya adalah $V(P_3)=\{v_1,v_2,v_3\}$. Maka:

$$I(P_3)=\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} v_1 & \quad v_2 & \quad v_3 \in V(P_3) \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \in V(P_3) \end{matrix} & \begin{pmatrix} v_1=v_1 & 0 & 0 \\ 0 & v_2=v_2 & 0 \\ 0 & 0 & v_3=v_3 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.4.2 Spectrum Graf

Definisi 47.

Misalkan $f_n(\lambda) = \det(I\lambda - A(G))$ adalah polinomial karakteristik dari matriks terhubung langsung graf *G*, maka spectrum dari graf *G* dengan *n* titik yang dinotasikan dengan $Sp(G)$ adalah $Sp(G) = [\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_i]$ dimana λ_i merupakan akar-akar dari $f_n(\lambda) = 0$. (λ_i adalah nilai-nilai eigen dari matriks $A(G)$). (Cvetković dan Doob, 1980:22).

Contoh 48.

Diberikan graf komplit bipartisi $(K_{1,n})$, $\forall n \in N$. Tentukan spectrum dari graf tersebut?

Misalkan $A(K_{1,n})$ adalah matriks terhubung langsung dari graf tersebut, maka

$$A(K_{1,n}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Polinomial karakteristik dari matriks terhubung langsung graf $K_{1,n}$ diperoleh dengan cara $f(\lambda) = \det(I\lambda - A(K_{1,n}))$.

$$\det\left(\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{vmatrix}$$

Secara umum, untuk mempemudah dalam menentukan determinan dari matriks terhubung langsung dari graf komplit bipartisi $(A(K_{1,n}))$, maka kita reduksi matriks $\left(I\lambda - A\left(K_{1,n}\right)\right)$ dengan operasi baris elementer menjadi matriks segitiga atas, sehingga didapatkan:

$$\begin{pmatrix} \lambda & -1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & \frac{(\lambda)(\lambda^2-1)}{\lambda^2} & -\frac{1}{\lambda} & -\frac{1}{\lambda} & -\frac{1}{\lambda} & \cdots & -\frac{1}{\lambda} \\ 0 & 0 & \frac{(\lambda)(\lambda^2-2)}{(\lambda^2-1)} & -\frac{\lambda}{(\lambda^2-1)} & -\frac{\lambda}{(\lambda^2-1)} & \cdots & -\frac{\lambda}{(\lambda^2-1)} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(\lambda)(\lambda^2-3)}{(\lambda^2-2)} & -\frac{\lambda}{(\lambda^2-2)} & \cdots & -\frac{\lambda}{(\lambda^2-2)} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{(\lambda)(\lambda^2-4)}{(\lambda^2-3)} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 & \ddots & -\frac{\lambda}{(\lambda^2-(n-2))} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{(\lambda)(\lambda^2-n)}{(\lambda^2-(n-1))} \end{pmatrix}$$

Kemudian $\det\left(I\lambda - A\left(K_{1,n}\right)\right)$ merupakan perkalian entri diagonal dari matriks segitiga atas $\left(I\lambda - A\left(K_{1,n}\right)\right)$, sehingga diperoleh

$$f\left(\lambda\right) = \det\left(I\lambda - A\left(K_{1,n}\right)\right) = \frac{\lambda^2\lambda^{n-1}\left(\lambda^2 - n\right)}{\lambda^2} = \lambda^{n-1}\left(\lambda^2 - n\right)$$

kemudian persamaan karakteristik diperoleh dengan

$f\left(\lambda\right) = \det\left(I\lambda - A\left(K_{1,n}\right)\right) = 0$

$\lambda^{n-1}\left(\lambda^2 - n\right) = 0$

$\lambda^{n-1} = 0^{n-1}$ sehingga $\lambda = 0$ untuk $n \neq 1$ atau $\lambda^2 - n = 0$

$$\left(\lambda - \sqrt{n}\right)\left(\lambda + \sqrt{n}\right) = 0$$
$$\lambda_1 = \sqrt{n} \vee \lambda_2 = -\sqrt{n}, \forall n \in N.$$

jadi spectrum graf $K_{1,n}$ adalah $Sp\left(K_{1,n}\right) = \left[0^{n-1}, \pm\sqrt{n}\right]$.

2.4.3 Hasil–Hasil Penelitian Sebelumnya

Teorema 49. (Cvetković, 1973:51)

Spectrum matriks terhubung langsung dari graf komplit sederhana dengan *n* titik

$$Sp(K_n) = [(n-1)^1, (-1)^{n-1}].$$

Teorema 50. (Cvetkovic, 1973:51)

Spectrum matriks terhubung langsung dari graf bipartisi komplit $(K_{m,n})$ adalah

$$Sp(K_{m,n}) = [0^{m+n-2}, \pm\sqrt{mn}].$$

Teorema 51. (Cvetkovic dan Gutman, 1975:40)

Spectrum matriks terhubung langsung dari graf lintasan dengan *n* titik adalah

$$Sp(P_n) = \left[2\cos\left(\frac{k\pi}{(n+1)}\right)\right], \text{ dimana } k = 1, 2, \ldots, n.$$

Teorema 52. (Cvetković dan Gutman, 1975:40)

Spectrum matriks terhubung langsung dari graf sikel dengan *n* titik adalah

$$Sp(C_n) = \left[2\cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right)\right], \text{ dimana } j = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Teorema 53. (Cvetković, 1973:51)

Spectrum matriks terhubung langsung graf garis dari graf komplit dengan $n \geq 2$

$$Sp(L(K_n)) = \left[2(n-2)^1, (n-4)^{n-1}, (-2)^{\frac{n(n-3)}{2}}\right].$$

Teorema 54. (Cvetković, 1973:51)

Spectrum matriks terhubung langsung graf garis bipartisi komplit $m \geq 2$

$$Sp(L(K_{m,m})) = \left[2(m-2)^1, (m-2)^{2m-2}, (-2)^{(m-1)2}\right].$$

2.5 Isyarat Matematika dalam Al-Quran

Kebenaran dalam ilmu pengetahuan tidak bersifat kekal seperti Al-Quran, apa yang dianggap salah dimasa silam, dapat diakui kebenarannya diabad modern. Teori–teori ilmiah juga silih berganti, *qawanin al-thabi`ah* (*natural law*) yang dahulu dianggap pasti, dapat diragukan kebenarannya pada masa akan datang (M. Quraish Shihab, 2007:64). Sehingga sikap kehati-hatian ketika *al-fikrah al-Qur`aniyyah* (ide yang dibawa Al-Quran) bersinergi kedalam ilmu pengetahuan perlu kita sadari.

Dalam `Ulum Al-Quran, ada pembahasan mengenai *I`jaz Al-Quran.* Dalam bahasa arab, tidak mampu itu *`ajiza,* membuat tidak mampu adalah *a`jaza.* Sesuatu yang membuat orang tidak mampu disebut *mu`jizat.* Proses "men-tidak-mampukan" disebut *i`jaz*. Dalam i`jaz Al-Quran, para ulama Al-Quran membahas keistimewaan-keistimewaan Al-Quran yang membuat siapapun tidak bisa menyamainya. (An-Najdi, 1996:10)

Salah satu i`jaz dalam Al-Quran yang berhubungan dengan jumlah berupa bilangan adalah *i`jaz `adadi.* Abdurrazaq Nawfal, dalam *Al-I`jaz Al-Adabiy fi Al-Qur`an Al-Karim* yang terdiri dari tiga jilid, mengemukakan beberapa contoh tentang keseimbangan yang sangat serasi antara kata-kata yang ada dalam Al-Quran. Diantaranya:

1. keseimbangan antara jumlah bilangan kata dengan antonimnya, seperti

No	Kata	Antonim	Pengulangan
1.	*Al-hayah* (hidup)	*Al-mawat* (mati)	145 kali
2.	*Al-naf`* (manfaat)	*Al-madharrah* (mudarat)	50 kali
3.	*Al-har* (panas)	*Al-bard* (dingin)	4 kali
4.	*Al-shalihat* (kebajikan)	*Al-sayyi`at* (keburukan)	167 kali
5.	*Al-thumaninah* (kelapangan/ketenangan)	*Al-dhiq* (kesempitan/kesesalan)	13 kali
6.	*Al-rahbah* (cemas/takut)	*Al-raghbah* (harap/ingin)	8 kali
7.	*Al-kufr* (kekufuran)	*Al-iman* (iman, *definite*)	17 kali
8.	*Kufr* (kekufuran)	*Iman* (iman, *indifinite*)	18 kali
9.	*Al-shafy* (musim panas)	*Al-syita`* (musim dingin)	1 kali

Tabel 2.5.1: Tabel Jumlah Bilangan Kata dengan Antonimnya.

2. keseimbangan antara jumlah bilangan kata dengan kata penyebabnya, seperti

No	Kata	Antonim	Pengulangan
1.	*Al-israf* (pemborosan)	*Al-sur`ah* (ketergesaan)	23 kali
2.	*Al-maw`izhah* (nasehat)	*Al-lisan* (lidah)	25 kali
3.	*Al-asra* (tawanan)	*Al-harb* (perang)	6 kali
4.	*Al-salam* (kedamian)	*Al-tayyibat* (kebajikan)	60 kali

Tabel 2.5.2: Tabel Jumlah Bilangan Kata dengan Kata Penyebabnya.

3. keseimbangan antara jumlah bilangan kata dengan jumlah kata yang menunjuk pada akibatnya, seperti

No	Kata	Antonim	Pengulangan
1.	*Al-infaq* (infak)	*Al-ridha* (kerelaan)	73 kali
2.	*Al-bukhl* (kekikiran)	*Al-hasarah* (penyesalan)	12 kali
3.	*Al-kafirun* (orang-orang kafir)	*Al-nar*/*Al-ahraq* (neraka/pembakaran)	154 kali
4.	*Al-zakah* (zakat/penyucian)	*Al-barakat* (kebajikan yang banyak)	32 kali
5.	*Al-fahisyah* (kekejian)	*Al-ghadhb* (murka)	26 kali

Tabel 2.5.3: Tabel Jumlah Bilangan Kata dengan yang menunjuk pada akibatnya.

4. keseimbangan jumlah bilangan kata dengan sinonimnya/makna yang dikandungnya, seperti

No	Kata	Antonim	Pengulangan
1.	*Al-harts* (membajak)	*Al-zira`ah* (bertani)	14 kali
2.	*Al-`ushb* (membanggakan diri)	*Al-dhurur* (angkuh)	27 kali
3.	*Al-dhallun* (orang sesat)	*Al-mawta* (mati jiwanya)	17 kali
4.	*Al-Quran* (kebajikan)	*Al-wahyu* (wahyu)	70 kali
5.	*Al-`aql* (akal)	*Al-nur* (cahaya)	49 kali
6.	*Al-jahr* (nyata)	*Al-`alaniyah* (nyata)	16 kali

Tabel 2.5.4: Tabel Jumlah Bilangan Kata dengan Sinonimnya.

disamping keseimbangan-keseimbangan tersebut, ditemukan juga keseimbangan khusus, diantaranya

1. kata *yawm* (hari) dalam bentuk tunggal sejumlah 365 kali, sebanyak hari-hari dalam setahun. Sedangkan kata hari yang menunjuk kepada bentuk *plural* (*ay-yam*) atau dua (*yawmayni*), jumlah keseluruhannya hanya tiga puluh, sama dengan jumlah hari dalam sebulan. Disi lain, kata yang berarti "bulan" (*syahr*) hanya terdapat dua belas kali, sama dengan jumlah bulan dalam setahun.

2. Al-Quran menjelaskan bahwa langit ada "tujuh". Penjelasan ini diulangi sebanyak tujuh kali pula. (QS. 2:29, QS. 17:44, QS. 23:86, QS. 41:12, QS. 65:12, QS. 71:15).

3. Kata-kata yang menunjuk kepada utusan Tuhan, baik *rasul* (rasul), atau *nabiyy* (nabi), atau *basyir* (pembawa berita gembira), atau *nadzir* (pemberi peringatan) keseluruhannya berjumlah 518 kali. Jumlah ini seimbang

dengan jumlah penyebutan nama-nama nabi, rasul, dan pembawa berita tersebut, yakni 518 kali. (M. Quraish Shihab, 2007:40-43).

Seperti telah diketahui, seringkali Al-Quran "turun" secara spontan, guna menjawab pertanyaan atau mengomentari suatu peristiwa. Kejadian atau pertanyaan dijawab dan dijelaskan secara langsung dalam Al-Quran, dan tentunya spontanitas tidak memberi peluang untuk berpikir dan menyusun jawaban dengan redaksi yang indah apalagi teliti. Namun, setelah Al-Quran selesai diturunkan dan dilakukan analisis serta perhitungan tentang redaksi-redaksinya. Ditemukan hal-hal yang sangat menakjubkan. Ditemukan adanya pasangan kata-kata yang frekuensi penyebutannya sama dalam Al-Quran. Dan ini merupakan suatu hal yang unik, sudah terpola dengan rapi, tersusun secara sistematis sehingga keotentikan Al-Quran terjaga, sebagaimana firman Allah:

إِنَّا نَحْنُ نَزَّلْنَا ٱلذِّكْرَ وَإِنَّا لَهُۥ لَحَـٰفِظُونَ ۝٩

Sesungguhnya Kami-lah yang menurunkan Al Quran, dan Sesungguhnya Kami benar-benar memeliharanya. (QS. 15:9).

2.6 Kajian 73 Golongan pada Umat Islam

Allah *Azza wa Jalla* menyuruh pengikut *dinul* Islam ini agar bersatu di atas kebenaran serta memperingatkan mereka agar tidak berpecah belah dan berselisih seperti yang terjadi pada umat-umat terdahulu. Allah berfirman:

وَلَا تَكُونُوا۟ كَٱلَّذِينَ تَفَرَّقُوا۟ وَٱخْتَلَفُوا۟ مِنۢ بَعْدِ مَا جَآءَهُمُ ٱلْبَيِّنَـٰتُ ۚ وَأُو۟لَـٰٓئِكَ لَهُمْ عَذَابٌ عَظِيمٌ ۝١٠٥

Dan janganlah kamu menyerupai orang-orang yang bercerai-berai dan berselisih sesudah datang keterangan yang jelas kepada mereka. Mereka itulah orang-orang yang mendapat siksa yang berat. (QS. 3:105).

Namun, kebanyakan manusia tetap berselisih dan berpecah belah, kecuali orang-orang yang diberi rahmat oleh Allah. Mereka bertengkar dan terpecah-pecah menjadi berbagai kelompok dan golongan. Mereka menjadikan Al-Quran terpilah-pilah, dan memilah-milah semua kitab yang diturunkan kepada mereka, mengimani sebagian dan mengkafiri sebagian. Setelah datang ilmu dan keterangan yang jelas kepada mereka, tetapi mereka berlaku dengki, saling memukul dan saling sengketa mengenai kebenaran. Sebagaimana firman Allah:

وَلَوْ شَآءَ رَبُّكَ لَجَعَلَ ٱلنَّاسَ أُمَّةً وَٰحِدَةً ۖ وَلَا يَزَالُونَ مُخْتَلِفِينَ ﴿١١٨﴾ إِلَّا مَن رَّحِمَ رَبُّكَ ۚ وَلِذَٰلِكَ خَلَقَهُمْ ۗ وَتَمَّتْ كَلِمَةُ رَبِّكَ لَأَمْلَأَنَّ جَهَنَّمَ مِنَ ٱلْجِنَّةِ وَٱلنَّاسِ أَجْمَعِينَ ﴿١١٩﴾

Jikalau Tuhanmu menghendaki, tentu Dia menjadikan manusia umat yang satu, tetapi mereka senantiasa berselisih pendapat. Kecuali orang-orang yang diberi rahmat oleh Tuhanmu. dan untuk itulah Allah menciptakan mereka. Kalimat Tuhanmu (keputusan-Nya) telah ditetapkan: sesungguhnya aku akan memenuhi neraka Jahannam dengan jin dan manusia (yang durhaka) semuanya. (QS. 11:118-119)

Ada banyak sekali hadist nabi yang menjelaskan akan adanya perpecahan umat Islam sepeninggal beliau. Umat ini, menurut hadist, akan terpecah menjadi tujuh puluh tiga golongan. Semuanya akan masuk neraka, kecuali satu, yang disebut sebagai *al-Firqah an-Najiyah* (golongan yang selamat). Untuk redaksi selengkapnya, dapat kita lihat pada hadist riwayat Turmudzi nomor 2465, yaitu:

حَدَّثَنَا مَحْمُودُ بْنُ غَيْلاَنَ حَدَّثَنَا أَبُوْ دَاوُدَ اْلحَفَرِيُّ عَنْ سُفْيَانَ الثَّوْرِيِّ عَنْ عَبْدِ الرَّحْمَنِ بْنِ زِيَادٍ اْلأَفْرِيْقِيِّ عَنْ عَبْدِ اللهِ بْنِ يَزِيْدَ عَنْ عَبْدِ اللهِ بْنِ عَمْرٍو قَالَ قَالَ رَسُوْلُ اللهِ صَلَّى اللهُ عَلَيْهِ وَ سَلَّمَ لَيَأْتِيَنَّ عَلَى أُمَّتِيْ مَا أَتَى عَلَى بَنِي إِسْرَائِيْلَ حَذْوَ النَّعْلِ بِالنَّعْلِ حَتَّى إِنْ كَانَ مِنْهُمْ مَنْ أَتَى أُمَّهُ عَلاَنِيَّةً لَكَانَ فِى أُمَّتِيْ مَنْ يَصْنَعُ ذَلِكَ وَ إِنَّ بَنِي إِسْرَائِيْلَ تَفَرَّقَتْ عَلَى ثِنْتَيْنِ وَ سَبْعِيْنَ مِلَّةً وَ تَفْتَرِقُ أُمَّتِيْ عَلَى ثَلاَثٍ وَ سَبْعِيْنَ مِلَّةً كُلُّهُمْ فِى النَّارِ إِلاَّ مِلَّةً وَاحِدَةً قَالُوْا وَ مَنْ هِيَ يَا رَسُولُ اللهِ قَالَ مَا أَنَا عَلَيْهِ وَ أَصْحَابِيْ قَالَ أَبُوْ عِيْسَى هَذَا حَدِيْثٌ حَسَنٌ غَرِيْبٌ مُفَسَّرٌ لاَ نَعْرِفُهُ مِثْلَ هَذَا إِلاَّ مِنْ هَذَا اْلوَجْهِ. (رواه الترمذي: 2465)

> *Mahmud bin Ghoilan meriwayatkan kepada kami, dari Abu Daud Al-Hafari, dari Sofian Al-Tsauri, dari Abdurrahman Bin Ziyad Al-Afriqi, dari Abdullah Bin Yazid, dari Abdullah Bin Amr berkata, Rasulullah saw bersabda, "Sungguh akan terjadi pada umatku apa yang pernah terjadi atas Bani Israil, bagaikan sepasang sandal. Jika di antara mereka ada yang menggauli ibunya secara terang-terangan, maka pada umatku pun akan ada orang yang berbuat demikian. Sesungguhnya Bani Israil terpecah menjadi tujuh puluh tiga golongan. Semuanya akan masuk neraka, kecuali satu. Dan umatku pun akan terpecah menjadi tujuh puluh tiga golongan, semuanya masuk neraka kecuali satu." Para sahabat bertanya, "Siapakah golongan itu wahai Rasulullah?", Beliau menjawab, "Yakni mereka yang mengikuti jalan hidupku dan para sahabatku." Abu Isa berkata hadist ini hasan yang asing dikalangan ahli tafsir, tidak ada hadist lain yang seperti ini, kecuali hadist ini. (HR. Turmudzi, 2465).*

Dalam hadist tersebut terdapat kata *millatan* yang berarti aliran, yang lebih menekankan pada kelompok agama atau golongan dari suatu agama. Nah, dalam konteks bahasa, kata *firqah* lebih luas cakupannya dari pada kata *millatan,* sehingga *millatan* dalam hadist tersebut, agar lebih luas maknannya, maka penulis memahami maknanya sama dengan *firqah.* Mengenai kedudukan hadist tersebut, Turmudzi menilainya hasan, sedangkan Al-Iraqi dan Ibnu Taimiyah menukilnya dari Turmudzi serta menjadikan hadist tersebut sebagai *hujjah.*

(Al Mishri, 1992:53).

BAB III

PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dibahas mengenai bagaimana menentukan matriks terhubung langsung dari graf hasilkali kartesius, bukti teorema spectrum graf hasilkali kartesius. Kemudian dari teorema yang diperoleh, diterapkan ke dalam jenis-jenis graf hasilkali kartesius, yaitu graf tangga $(P_2 \times P_n)$, graf jaring-jaring $(P_m \times P_n)$, dan graf buku $(P_2 \times K_{1,n})$.

3.1 Matriks Terhubung Langsung Graf Hasilkali Kartesius

Diberikan graf lintasan dengan dua titik (P_2) dan graf bipartisi komplit dengan empat titik $(K_{1,3})$ yang mana titik-titiknya terdiri dari $V(P_2)=\{u_1,u_2\}$ dan $V\ (K_{1,3})=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$. Matriks terhubung langsung dari graf P_2 dan $K_{1,4}$ dan matriks identititas $I(P_2)$ dan $I(K_{1,3})$ adalah

$$A(P_2)=\begin{array}{c|cc} & u_1 & u_2 \ \in V(P_2) \\ \hline u_1 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$\begin{pmatrix} 0 & u_1 \sim u_2 \\ u_2 \sim u_1 & 0 \end{pmatrix}$}} \\ u_2 & & \\ \in V(P_2) & & \end{array}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad I(P_2)=\begin{array}{c|cc} & u_1 & u_2 \ \in V(P_2) \\ \hline u_1 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$\begin{pmatrix} u_1=u_1 & 0 \\ 0 & u_2=u_2 \end{pmatrix}$}} \\ u_2 & & \\ \in V(P_2) & & \end{array}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A(K_{1,3})=\begin{array}{c|cccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \ \in V(K_{1,3}) \\ \hline v_1 & 0 & v_1 \sim v_2 & v_1 \sim v_3 & v_1 \sim v_4 \\ v_2 & v_2 \sim v_1 & 0 & 0 & 0 \\ v_3 & v_3 \sim v_1 & 0 & 0 & 0 \\ v_4 & v_4 \sim v_1 & 0 & 0 & 0 \\ \in V(K_{1,3}) & & & & \end{array}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$I\left(K_{1,3}\right)=\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \in V\left(K_{1,3}\right) \\ \hline \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} & \begin{pmatrix} v_1=v_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_2=v_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_3=v_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_4=v_4 \end{pmatrix} \\ \in V\left(K_{1,3}\right) & \end{array}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Kemudian dari $A\left(K_{1,3}\right)\otimes I\left(P_2\right)$ diperoleh

$$\begin{pmatrix} 0\begin{pmatrix} u_1=u_1 & 0 \\ 0 & u_2=u_2 \end{pmatrix} & v_1\sim v_2\begin{pmatrix} u_1=u_1 & 0 \\ 0 & u_2=u_2 \end{pmatrix} & v_1\sim v_3\begin{pmatrix} u_1=u_1 & 0 \\ 0 & u_2=u_2 \end{pmatrix} & v_1\sim v_4\begin{pmatrix} u_1=u_1 & 0 \\ 0 & u_2=u_2 \end{pmatrix} \\ v_2\sim v_1\begin{pmatrix} u_1=u_1 & 0 \\ 0 & u_2=u_2 \end{pmatrix} & 0\begin{pmatrix} u_1=u_1 & 0 \\ 0 & u_2=u_2 \end{pmatrix} & 0\begin{pmatrix} u_1=u_1 & 0 \\ 0 & u_2=u_2 \end{pmatrix} & 0\begin{pmatrix} u_1=u_1 & 0 \\ 0 & u_2=u_2 \end{pmatrix} \\ v_3\sim v_1\begin{pmatrix} u_1=u_1 & 0 \\ 0 & u_2=u_2 \end{pmatrix} & 0\begin{pmatrix} u_1=u_1 & 0 \\ 0 & u_2=u_2 \end{pmatrix} & 0\begin{pmatrix} u_1=u_1 & 0 \\ 0 & u_2=u_2 \end{pmatrix} & 0\begin{pmatrix} u_1=u_1 & 0 \\ 0 & u_2=u_2 \end{pmatrix} \\ v_4\sim v_1\begin{pmatrix} u_1=u_1 & 0 \\ 0 & u_2=u_2 \end{pmatrix} & 0\begin{pmatrix} u_1=u_1 & 0 \\ 0 & u_2=u_2 \end{pmatrix} & 0\begin{pmatrix} u_1=u_1 & 0 \\ 0 & u_2=u_2 \end{pmatrix} & 0\begin{pmatrix} u_1=u_1 & 0 \\ 0 & u_2=u_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Sehingga didapatkan

$$A\left(K_{1,3}\right)\otimes I\left(P_2\right)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Yang perlu diperhatikan dari matriks diatas adalah entri yang diberi garis merah selalu bernilai nol untuk sebarang graf sederhana. Dari penjelasan tersebut, diketahui bahwa matriks $A\left(K_{1,3}\right)\otimes I\left(P_2\right)$ akan bernilai 1, ketika terdapat sisi yang menghubungkan titik v_i dengan titik v_j pada graf $K_{1,3}$ dan $u_i=u_j$ pada graf P_2, kemudian bernilai 0 untuk yang lainya. Atau sederhananya dapat ditulis:

$$A\left(K_{1,3}\right)\otimes I\left(P_2\right)=a_{v_iv_j}i_{u_iu_j}=\begin{cases}1, & v_i\sim v_j\wedge u_i=u_j,\ \forall u_i,u_j\in V\left(P_2\right)\wedge\forall v_i,v_j\in V\left(K_{1,3}\right)\\ 0, & lainnya\end{cases}$$

dengan i, j adalah baris dan kolom dari martiks $A\left(K_{1,3}\right)$ dan $I\left(P_2\right)$.

Untuk $I\left(K_{1,3}\right)\otimes A\left(P_2\right)$ didapatkan

$$\begin{pmatrix} v_1=v_1\begin{pmatrix}0 & u_1\sim u_2\\ u_2\sim u_1 & 0\end{pmatrix} & 0\begin{pmatrix}0 & u_1\sim u_2\\ u_2\sim u_1 & 0\end{pmatrix} & 0\begin{pmatrix}0 & u_1\sim u_2\\ u_2\sim u_1 & 0\end{pmatrix} & 0\begin{pmatrix}0 & u_1\sim u_2\\ u_2\sim u_1 & 0\end{pmatrix}\\ 0\begin{pmatrix}0 & u_1\sim u_2\\ u_2\sim u_1 & 0\end{pmatrix} & v_2=v_2\begin{pmatrix}0 & u_1\sim u_2\\ u_2\sim u_1 & 0\end{pmatrix} & 0\begin{pmatrix}0 & u_1\sim u_2\\ u_2\sim u_1 & 0\end{pmatrix} & 0\begin{pmatrix}0 & u_1\sim u_2\\ u_2\sim u_1 & 0\end{pmatrix}\\ 0\begin{pmatrix}0 & u_1\sim u_2\\ u_2\sim u_1 & 0\end{pmatrix} & 0\begin{pmatrix}0 & u_1\sim u_2\\ u_2\sim u_1 & 0\end{pmatrix} & v_3=v_3\begin{pmatrix}0 & u_1\sim u_2\\ u_2\sim u_1 & 0\end{pmatrix} & 0\begin{pmatrix}0 & u_1\sim u_2\\ u_2\sim u_1 & 0\end{pmatrix}\\ 0\begin{pmatrix}0 & u_1\sim u_2\\ u_2\sim u_1 & 0\end{pmatrix} & 0\begin{pmatrix}0 & u_1\sim u_2\\ u_2\sim u_1 & 0\end{pmatrix} & 0\begin{pmatrix}0 & u_1\sim u_2\\ u_2\sim u_1 & 0\end{pmatrix} & v_4=v_4\begin{pmatrix}0 & u_1\sim u_2\\ u_2\sim u_1 & 0\end{pmatrix}\end{pmatrix}$$

Kemudian diperoleh

$$I\left(K_{1,3}\right)\otimes A\left(P_2\right)=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0&1&0\end{pmatrix}.$$

Dari matriks tersebut terlihat bahwa entri matriks yang diberi garis biru selalu bernilai 1 ketika terdapat sisi yang menghubungkan titik u_i dengan titik u_j pada graf P_2 dan $v_i=v_j$, dimana $v_i,v_j\in V\left(K_{1,3}\right)$. Kemudian entri yang lain pasti selalu bernilai nol, atau sederhananya dapat ditulis:

$$I\left(K_{1,3}\right)\otimes A\left(P_2\right)=i_{v_iv_j}a_{u_iu_j}=\begin{cases}1, & v_i=v_j\wedge u_i\sim u_j,\ \forall u_i,u_j\in V\left(P_2\right)\wedge\forall v_i,v_j\in V\left(K_{1,3}\right)\\ 0, & lainnya.\end{cases}$$

Dari keterangan diatas, dapat diketahui bahwa matriks $A(K_{1,3}) \otimes I(P_2)$ dan $I(K_{1,3}) \otimes A(P_2)$ akan bernilai 1 jika memenuhi dua syarat, yaitu:

i. $u_i = u_j$ dan $v_i \sim v_j$,

ii. $u_i \sim u_j$ dan $v_i = v_j$.

Kemudian kita jumlahkan matriks $A(K_{1,3}) \otimes I(P_2)$ dengan matriks $I(K_{1,3}) \otimes A(P_2)$ agar kedua syarat diatas terpenuhi dalam satu bentuk matriks:

$$A(K_{1,3}) \otimes I(P_2) + I(K_{1,3}) \otimes A(P_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Yang perlu kita cermati adalah entri dari matriks $A(K_{1,3}) \otimes I(P_2) + I(K_{1,3}) \otimes A(P_2)$ sama dengan $A(K_{1,3}) \otimes I(P_2)$ dimana entri yang diberi garis merah diganti dengan entri yang diberi garis biru pada matriks $I(K_{1,3}) \otimes A(P_2)$, sehingga entrinya pasti selalu bernilai 1 dan 0. Dan hal ini dijamin oleh definisi matriks terhubung langsung dari graf sederhana $K_{1,3}$ dan P_2 dan juga matriks identitas $I(P_2)$ dan $I(K_{1,3})$ yang entrinya selalu bernilai 1 dan 0. Kemudian operasi hasilkali kronecer yang berfungsi untuk menggabungkan kedua syarat diatas, atau sederhananya dapat ditulis:

$$A\left(K_{1,3}\right)\otimes I\left(P_2\right)+I\left(K_{1,3}\right)\otimes A\left(P_2\right)=a_{v_iv_j}i_{u_iu_j}+i_{v_iv_j}a_{u_iu_j}=\begin{cases}1, & \left(u_i,v_i\right)\sim\left(u_j,v_j\right)\\ 0, & lainnya.\end{cases}$$

Dari pernyataan diatas, diketahui bahwa $A\left(K_{1,3}\right)\otimes I\left(P_2\right)+I\left(K_{1,3}\right)\otimes A\left(P_2\right)$ akan bernilai 1 ketika dua titik $\left(u_i,v_i\right)$ dan $\left(u_j,v_j\right)$ terhubung langsung jika dan hanya jika $u_i=u_j$ dan $v_i\sim v_j$ atau $v_i=v_j$ dan $u_i\sim u_j$, $\forall u_i,u_j\in V\left(P_2\right)$ dan $v_i,v_j\in V\left(K_{1,3}\right)$, dan bernilai nol untuk yang lainya. Dan kedua kondisi tersebut merupakan definisi dari hasilkali kartesius antara graf $K_{1,3}$ dengan P_2.

Jadi $A\left(K_{1,3}\right)\otimes I\left(P_2\right)+I\left(K_{1,3}\right)\otimes A\left(P_2\right)$ adalah matriks terhubung langsung untuk graf $P_2\times S_3$.

Teorema 55.

Diberikan dua graf sederhana G dan H dengan himpunan titik–titik $V\left(G\right)=\{u_1,u_2,...,u_m\}$ dan $V\left(H\right)=\{v_1,v_2,...,v_n\}$. $A\left(G\right)$ dan $A\left(H\right)$ berturut-turut adalah matriks terhubung langsung dari graf G dan H. $I\left(G\right)$ dan $I\left(H\right)$ adalah matriks identitas dengan ukuran $m\times m$ dan $n\times n$, maka matriks terhubung langsung dari hasilkali kartesius graf G dan H adalah

$$A\left(G\times H\right)=A\left(H\right)\otimes I\left(G\right)+I\left(H\right)\otimes A\left(G\right).$$

(Gago, 2008:31)

Bukti.

Diketahui bahwa matriks $A(H)\otimes I(G)$ akan bernilai 1 ketika terdapat sisi yang menghubungkan titik v_i dengan v_j pada graf H dimana *i,j* adalah baris dan kolom dari matriks $A(H)$ dan $u_i = u_j$ pada graf G dimana *i,j* adalah baris dan kolom dari matriks $I(G)$. Kemudian 0 untuk lainnya, atau dapat ditulis:

$$A(H)\otimes I(G) = a_{v_i v_j} i_{u_i u_j} = \begin{cases} 1, & v_i \sim v_j \wedge u_i = u_j,\ \forall u_i, u_j \in V(G) \wedge \forall v_i, v_j \in V(H) \\ 0, & lainnya. \end{cases}$$

Begitupun juga dengan matriks $I(H)\otimes A(G)$ akan bernilai 1 ketika $v_i = v_j$ pada graf H dengan *i,j* adalah baris dan kolom dari matriks $I(H)$, dan terdapat sisi yang menghubungkan titik u_i dengan titik u_j dimana *i,j* adalah baris dan kolom dari matriks $A(G)$. Kemudian 0 untuk lainnya, atau sederhananya dapat ditulis:

$$I(H)\otimes A(G) = i_{v_i v_j} a_{u_i u_j} = \begin{cases} 1, & v_i = v_j \wedge u_i \sim u_j,\ \forall u_i, u_j \in V(G) \wedge \forall v_i, v_j \in V(H) \\ 0, & lainnya \end{cases}$$

Kedua matriks diatas akan bernilai 1 ketika memenuhi dua kondisi, yaitu:

i. $u_i = u_j$ dan $v_i \sim v_j$,

ii. $u_i \sim u_j$ dan $v_i = v_j$.

Kemudian kita jumlahkan kedua matriks tersebut, sehingga entri dari matriks $A(H)\otimes I(G) + I(H)\otimes A(G)$ akan bernilai 1 ketika dua titik (u_i, v_i) dan (u_j, v_j) terhubung langsung jika dan hanya jika $u_i = u_j$ dan $v_i \sim v_j$ atau $v_i = v_j$

dan $u_i \sim u_j$, $\forall u_i, u_j \in V(G)$ dan $v_i, v_j \in V(H)$, dan bernilai nol untuk yang lainya. Atau dapat ditulis:

$$A(H) \otimes I(G) + I(H) \otimes A(G) = a_{v_i v_j} i_{u_i u_j} + i_{v_i v_j} a_{u_i u_j} = \begin{cases} 1, & (u_i, v_i) \sim (u_j, v_j) \\ 0, & lainnya \end{cases}$$

Dan pernyataan diatas merupakan definisi dari hasilkali kartesius antara graf *G* dengan *H*. Jadi $A(H) \otimes I(G) + I(H) \otimes A(G)$ adalah matriks terhubung langsung dari graf $G \times H$.

3.2 Spectrum Matriks Terhubung Langsung pada Graf Hasilkali Kartesius

Kita dapat menggunakan konsep dalam matriks untuk menentukan spectrum matriks terhubung langsung dari graf hasilkali kartesius. Dari penjelasan subbab 3.1 telah diperoleh bentuk umum matriks terhubung langsung dari hasilkali kartesius dua graf sederhana, taruhlah graf *G* dan *H*. Apabila masing-masing matriks terhubung langsung dari graf tersebut, yaitu *G* dan *H* dapat didiagonalisasi, maka spectrum graf hasilkali kartesius *G* dengan *H* merupakan penjumlahan dari setiap spectrum graf *G* dengan graf *H*. Adapun konsep mengenai spectrum graf hasilkali kartesius akan disajikan dalam teorema berikut.

Teorema 56. (Gago, 2008:31)

Diberikan dua graf sederhana *G* dan *H* dengan $Sp(G) = [\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m]$ dan $Sp(H) = [\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n]$, maka spectrum matriks terhubung langsung dari hasilkali kartesius graf *G* dan *H* adalah

$$Sp(G \times H) = [\xi_i + \mu_j, 1 \le i \le m, 1 \le j \le n].$$

Bukti.

Diketahui bahwa $A(G\times H)=A(H)\otimes I_{m\times m}+I_{n\times n}\otimes A(G)$, akan ditunjukkan bahwa $A(H)\otimes I_{m\times m}+I_{n\times n}\otimes A(G)$ serupa dengan $J_{A(H)}\otimes I_{m\times m}+I_{n\times n}\otimes J_{A(G)}$, dimana $J_{A(G)}=P^{-1}A(G)P$ dan $J_{A(H)}=Q^{-1}A(H)Q$ adalah matriks diagonal dari matriks $A(G)$ dan $A(H)$ maka $Sp(G\times H)=\left[\xi_i+\mu_j, 1\le i\le m, 1\le j\le n\right]$.

Misalkan $I_{m\times m}=\left(P^{-1}IP\right)$ dan $I_{n\times n}=\left(Q^{-1}IQ\right)$, sehingga

$$J_{A(H)}\otimes I_{m\times m}+I_{n\times n}\otimes J_{A(G)}=\left(Q^{-1}A(H)Q\right)\otimes\left(P^{-1}IP\right)+\left(Q^{-1}IQ\right)\otimes\left(P^{-1}A(G)P\right)$$

$$=\left(Q^{-1}\otimes P^{-1}\right)\left(A(H)\otimes I\right)(Q\otimes P)+\left(Q^{-1}\otimes P^{-1}\right)\left(I\otimes A(H)\right)(Q\otimes P) \quad \text{… (T.22.b)}$$

$$=\left(Q^{-1}\otimes P^{-1}\right)\left[\left(A(H)\otimes I\right)+\left(I\otimes A(H)\right)\right](Q\otimes P) \quad \text{… (T.4)}$$

$$J_{A(H)}\otimes I_{m\times m}+I_{n\times n}\otimes J_{A(G)}=(Q\otimes P)^{-1}\left[\left(A(H)\otimes I\right)+\left(I\otimes A(H)\right)\right](Q\otimes P) \quad \text{… (T.22.c)}$$

Yang berarti bahwa matriks $J_{A(H)}\otimes I_{m\times m}+I_{n\times n}\otimes J_{A(G)}$, merupakan matriks diagonal yang diperoleh dengan cara mendiagonalisasikan matriks $A(H)\otimes I_{m\times m}+I_{n\times n}\otimes A(G)$.

Karena $J_{A(H)}=\begin{pmatrix}\mu_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \mu_2 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \mu_j\end{pmatrix}$ dan $J_{A(G)}=\begin{pmatrix}\xi_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \xi_2 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \xi_i\end{pmatrix}$, maka diperoleh

$$J_{A(H)}\otimes I_{m\times m}+I_{n\times n}\otimes J_{A(G)}=\begin{pmatrix}\mu_1\left(I_{m\times m}\right) & 0\left(I_{m\times m}\right) & \cdots & 0\left(I_{m\times m}\right)\\ 0\left(I_{m\times m}\right) & \mu_2\left(I_{m\times m}\right) & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\left(I_{m\times m}\right)\\ 0\left(I_{m\times m}\right) & \cdots & 0\left(I_{m\times m}\right) & \mu_j\left(I_{m\times m}\right)\end{pmatrix}_{mn\times mn}+$$

$$\begin{pmatrix} (1)J_{A(G)} & (0)J_{A(G)} & \cdots & (0)J_{A(G)} \\ (0)J_{A(G)} & (1)J_{A(G)} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (0)J_{A(G)} \\ (0)J_{A(G)} & \cdots & (0)J_{A(G)} & (1)J_{A(G)} \end{pmatrix}_{mn\times mn}$$

$$J_{A(H)} \otimes I_{m\times m} + I_{n\times n} \otimes J_{A(G)} = \begin{pmatrix} \mu_1+\xi_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2+\xi_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_j+\xi_i \end{pmatrix}_{mn\times mn}$$

Persamaan karakteristik dari matriks $\left(J_{A(H)} \otimes I_{m\times m} + I_{n\times n} \otimes J_{A(G)}\right)$ adalah

$$\left|I\lambda - \left(J_{A(H)} \otimes I_{m\times m} + I_{n\times n} \otimes J_{A(G)}\right)\right| = 0$$

$$\left(\lambda_1 - (\xi_1+\mu_1)\right)\left(\lambda_2 - (\xi_2+\mu_2)\right)\ldots\left(\lambda_{mn} - (\xi_i+\mu_j)\right) = 0$$

Jadi $Sp(G\times H) = \left[\xi_i + \mu_j, 1\le i\le m, 1\le j\le n\right]$.

3.3 Kajian Spectrum pada Graf Lintasan

Teorema 57.

Misalkan $f_n(\lambda)$ adalah polinomial karakteristik graf P_n. Maka :

$$f_1(\lambda) = \lambda$$

$$f_2(\lambda) = \lambda^2 - 1$$

$$f_n(\lambda) = \lambda f_{n-1}(\lambda) - f_{n-2}(\lambda),\ n\ge 3$$

dimana f_{n-1} dan f_{n-2} adalah kofaktor kolom satu dan dua dari matriks $\left(I\lambda - A(P_n)\right)$.

Bukti.

Misalkan $A(P_n)$ adalah matriks terhubung langsung dari P_n, maka

untuk $n=1$, diperoleh $A(P_1) = 0 \rightarrow f_1(\lambda) = \det\left(I\lambda - A(P_1)\right) = \lambda$

untuk $n=2$, diperoleh $A(P_2)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \rightarrow f_2(\lambda)=\det\left(I\lambda - A(P_2)\right)=\lambda^2-1$

$$n \geq 3 \rightarrow A(P_n)=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 0\\ \vdots & \dots & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}, \quad \left(I\lambda - A(P_n)\right)=\begin{pmatrix}\lambda & -1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ -1 & \lambda & -1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & -1 & \lambda & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & -1 & 0\\ \vdots & \dots & 0 & -1 & \lambda & -1\\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & \lambda\end{pmatrix}.$$

Dari hasil ekspansi kofaktor kolom pada matriks diatas, kita dapatkan:

$$\left|I\lambda - A(P_n)\right| = \lambda\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0 & \dots & 0\\ -1 & \lambda & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \ddots & \lambda & -1 & 0\\ \vdots & \ddots & -1 & \ddots & -1\\ 0 & \dots & 0 & -1 & \lambda\end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix}-1 & -1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & -1 & \lambda & -1 & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1\\ 0 & \dots & 0 & -1 & \lambda\end{vmatrix} + 0$$

$$\left|I\lambda - A(P_n)\right| = \lambda f_{n-1}(\lambda) - f_{n-2}(\lambda),\ n \geq 3.$$

Teorema 58.

Diberikan $f_n(\lambda)$ adalah polinomial karakteristik dari graf lintasan (P_n) dan $U_n(x)$ adalah polinomial Chebyshev jenis kedua, maka

$$f_n(\lambda)=U_n(x),\ \text{untuk}\ x=\frac{\lambda}{2}.$$

Bukti.

Misalkan $A(P_n)$ adalah matriks terhubung langsung dari graf (P_n), R adalah himpunan bilangan riil, $I := [-1,1]$, $f_n : A(P_n) \rightarrow R$, dan $U_n : I \rightarrow R$ untuk $n \in N$

Akan ditunjukkan dengan induksi matematika bahwa $f_n(\lambda)=U_n(x)$.

(i). Untuk n = 1, diperoleh $f_1(\lambda) = \lambda.$ … T.57

$$U_1\left(\frac{\lambda}{2}\right) = 2\left(\frac{\lambda}{2}\right) = \lambda, \text{ untuk } x = \frac{\lambda}{2}. \quad \dots \text{ T.28}$$

Jadi $f_1(\lambda) = U_1(\lambda)$ benar.

(ii). Asumsikan $f_n(\lambda) = U_n(x)$ benar untuk $n = k$, akan ditunjukkan bahwa $f_{k+1}(\lambda) = U_{k+1}(x)$ untuk $n = k+1$ juga benar.

$f_n(\lambda) = \lambda f_{n-1}(\lambda) - f_{n-2}(\lambda)$ … T.57

$f_{k+1}(\lambda) = \lambda f_{(k+1)-1}(\lambda) - f_{(k+1)-2}(\lambda)$ … subsitusi $n = k+1$

$f_{k+1}(\lambda) = \lambda f_k(\lambda) - f_{k-1}(\lambda)$

$f_{k+1}(\lambda) = 2xU_k(x) - U_{k-1}(x)$ … $f_n(\lambda) = U_n(x)$, $n = k$

$f_{k+1}(\lambda) = U_{k+1}(x)$ … T.28

Terbukti bahwa $f_{k+1}(\lambda) = U_{k+1}(x)$ benar untuk $n = k+1$, sehingga dapat disimpulkan bahwa $f_n(\lambda) = U_n(x)$ untuk $x = \frac{\lambda}{2}$.

Pada bab pembahasan ini, juga dikaji bukti teorema 51, yaitu misalkan P_n adalah graf lintasan dengan $n \in N$, maka spectrum matriks terhubung langsung dari graf lintasan (P_n) adalah

$$Sp(P_n) = \left[2\cos\left(\frac{k\pi}{(n+1)}\right)\right], \text{ untuk } k = 1,2,3, \dots, n.$$

Bukti.

Untuk memperoleh nilai eigen dari matriks terhubung langsung graf lintasan, setelah kita reduksi matriks $\left(I\lambda - A\left(P_n\right)\right)$ dengan operasi baris elementer, kita tidak dapat menemukan bentuk umum matriks segitiga dari matriks terhubung langsung graf $\left(P_n\right)$, sehingga untuk memperoleh nilai eigen dari matriks terhubung langsung graf lintasan, kita gunakan teorema 58.

Persamaan karakteristik diperoleh ketika $f_n\left(\lambda\right) = U_n\left(x\right) = 0.$

$$U_n\left(x\right) = U_n\left(\cos\left(\theta\right)\right) = \frac{\sin\left(\left(n+1\right)\theta\right)}{\sin\theta} = 0$$

sehingga $\sin\theta \neq 0$ dan $\sin\left(\left(n+1\right)\theta\right) = 0$

$$\left(n+1\right)\theta = \arcsin\left(0\right)$$

$\left(n+1\right)\theta = k\pi$ dengan $k = 1, 2, \ldots, n$

$\theta = \dfrac{k\pi}{\left(n+1\right)}$, untuk $x = \dfrac{\lambda}{2}$ maka $\cos\theta = \dfrac{\lambda}{2}$, akhirnya

$\lambda = 2\cos\left(\dfrac{k\pi}{\left(n+1\right)}\right)$ dengan $k = 1, 2, \ldots, n.$

Jadi spectrum matriks terhubung langsung dari graf lintasan $\left(P_n\right)$ adalah

$Sp\left(P_n\right) = \left[2\cos\left(\dfrac{k\pi}{\left(n+1\right)}\right)\right]$, untuk k = 1,2,3, …, n.

3.4 Beberapa Hasil Spectrum Jenis-Jenis Graf Hasilkali Kartesius

3.4.1 Spectrum Graf Tangga (L_n)

Diberikan dua graf lintasan P_2 dan P_3 dengan himpunan titik-titik $V(P_2)=\{u_1,u_2\}$ dan $V(P_3)=\{v_1,v_2,v_3\}$, maka langkah-langkah untuk menentukan spectrum hasilkali kartesius dari kedua graf tersebut adalah

Cara 1. Diketahui bahwa

$$A(P_2)=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\ I(P_2)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\ A(P_3)=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\ A(P_3)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Langkah 1. Mendiagonalisasi matriks $A(P_2)$.

$$\left|I\lambda-A(P_2)\right|=\begin{vmatrix}\lambda&-1\\-1&\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-1=0\rightarrow\lambda_1=1\vee\lambda_2=-1$$

untuk $\lambda_1=1$, maka solusi nontrivial dari $(\lambda_1 I-A(P_2))x=0$ adalah

$$\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{matrix}x_1-x_2=0\\-x_1+x_2=0\end{matrix}$$

misalkan $x_2=s$ diperoleh $x_1=x_2=s$ kemudian $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}s\\s\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

untuk $\lambda_2=-1$, maka solusi nontrivial dari $(\lambda_2 I-A(P_2))x=0$ adalah

$$\begin{pmatrix}-1&-1\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{matrix}-x_1-x_2=0\\-x_1-x_2=0\end{matrix}$$

misalkan $x_2=s$ diperoleh $x_1=-s$ kemudian $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-s\\s\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$.

vektor eigen untuk $\lambda_1=1$ adalah $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $\lambda_2=-1$ adalah $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, dan $P=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$.

jadi $J_{A(P_2)}=P^{-1}A(P_2)P\rightarrow\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$.

Langkah 2. Mendiagonalisasi matriks $A(P_3)$.

$$\left|I\lambda - A(P_3)\right| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ -1 & \lambda & -1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda\left(\lambda^2 - 1\right) - \lambda = 0 \rightarrow \lambda_1 = \sqrt{2} \vee \lambda_2 = -\sqrt{2} \vee \lambda_3 = 0$$

untuk $\lambda_1 = \sqrt{2}$, maka solusi nontrivial dari $\left(I\lambda_1 - A(P_3)\right)x = 0$ adalah

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 & 0 \\ -1 & \sqrt{2} & -1 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} \sqrt{2}x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 + \sqrt{2}x_2 - x_3 = 0 \\ -x_2 + \sqrt{2}x_3 = 0 \end{matrix}$$

misalkan $x_1 = s$ diperoleh $x_2 = \sqrt{2}s$ dan $x_3 = s$ kemudian $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

untuk $\lambda_2 = -\sqrt{2}$, maka solusi nontrivial dari $\left(I\lambda_2 - A(P_3)\right)x = 0$ adalah

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & -1 & 0 \\ -1 & -\sqrt{2} & -1 \\ 0 & -1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} -\sqrt{2}x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 - \sqrt{2}x_2 - x_3 = 0 \\ -x_2 - \sqrt{2}x_3 = 0 \end{matrix}$$

misalkan $x_1 = s$ diperoleh $x_2 = -\sqrt{2}s$ dan $x_3 = s$ kemudian $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

untuk $\lambda_3 = 0$, maka solusi nontrivial dari $\left(I\lambda_3 - A(P_3)\right)x = 0$ adalah

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} -x_2 = 0 \\ -x_1 - x_3 = 0 \\ -x_2 = 0 \end{matrix}$$

misalkan $x_3 = s$ diperoleh $x_2 = 0$ dan $x_1 = -s$ kemudian $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Dari vektor-vektor eigen diatas diperoleh matriks $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Jadi $J_{A(P_3)} = Q^{-1}A(P_3)Q$ adalah

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Langkah 3. Menghitung $J_{A(P_3)} \otimes I(P_2) + I(P_3) \otimes J_{A(P_2)}$.

$$J_{A(P_3)} \otimes I(P_2) + I(P_3) \otimes J_{A(P_2)} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}+1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}-1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2}+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2}-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Langkah 4. Menentukan nilai eigen dari $J_{A(P_3)} \otimes I(P_2) + I(P_3) \otimes J_{A(P_2)}$.

$$\left| I\lambda - J_{A(P_3)} \otimes I(P_2) + I(P_3) \otimes J_{A(P_2)} \right| = 0$$

$$\left(\lambda - \left(\sqrt{2}+1\right)\right)\left(\lambda - \left(\sqrt{2}-1\right)\right)\left(\lambda - \left(-\sqrt{2}+1\right)\right)\left(\lambda - \left(-\sqrt{2}-1\right)\right)\left(\lambda - (1)\right)\left(\lambda - (-1)\right) = 0$$

$$Sp(P_2 \times P_3) = \left[\left(-\sqrt{2}-1\right), (-1), \left(-\sqrt{2}+1\right), \left(\sqrt{2}-1\right), 1, \left(\sqrt{2}+1\right)\right].$$

Cara 2.

Misalkan himpunan titik-titik $V(P_2) = \{u_1, u_2\}$ dan $V(P_3) = \{v_1, v_2, v_3\}$. Maka himpunan titik dan sisi dari graf tersebut adalah

$V(P_2 \times P_3) = (u_1, u_2) \times (v_1, v_2, v_3) = \{(u_1, v_1), (u_1, v_2), (u_1, v_3), (u_2, v_1), (u_2, v_2), (u_2, v_3)\}$.

$e_1 = (u_1, v_1) \sim (u_2, v_1)$, $e_5 = (u_1, v_2) \sim (u_1, v_3)$

$e_2 = (u_1, v_2) \sim (u_2, v_2)$, $e_6 = (u_2, v_1) \sim (u_2, v_2)$

$e_3 = (u_1, v_3) \sim (u_2, v_3)$, $e_7 = (u_2, v_2) \sim (u_2, v_3)$.

$e_4 = (u_1, v_1) \sim (u_1, v_2)$

Sehingga diperoleh

$$A(P_2 \times P_3)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \left|I\lambda - A(P_2 \times P_3)\right| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix}$$

Untuk mempermudah dalam menghitung determinan, kita reduksi matriks $\left(I\lambda - A(P_2 \times P_3)\right)$ menjadi matriks segitiga atas dengan menggunakan operasi baris elementer, sehingga diperoleh

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda^2-1}{\lambda} & -1 & -\frac{1}{\lambda} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda(\lambda^2-2)}{\lambda^2-1} & -\frac{1}{(\lambda^2-1)} & -\frac{\lambda}{(\lambda^2-1)} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda^4-3\lambda^2+1}{\lambda(\lambda^2-2)} & -\frac{\lambda^2-1}{(\lambda^2-2)} & \frac{-1}{\lambda(\lambda^2-2)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(\lambda^4-5\lambda^2+2)\lambda}{\lambda^4-3\lambda^2+1} & -\frac{\lambda^4-2\lambda^2+1}{\lambda^4-3\lambda^2+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda^6-7\lambda^4+7\lambda^2-1}{(\lambda^4-5\lambda^2+2)\lambda} \end{vmatrix}.$$

Kemudian diperoleh persamaan karakteristik dari matriks $A(P_2 \times P_3)$ adalah

$$f(\lambda)=\lambda^6-7\lambda^4+7\lambda^2-1=0$$

Dari cara 1 diketahui bahwa

$\lambda_1=\left(-\sqrt{2}-1\right) \rightarrow f\ (\lambda_1)=\left(-\sqrt{2}-1\right)^6-7\left(-\sqrt{2}-1\right)^4+7\left(-\sqrt{2}-1\right)^2-1=0$

$\lambda_2=(-1) \rightarrow f\ (\lambda_2)=(-1)^6-7(-1)^4+7(-1)^2-1=0$

$\lambda_3=\left(-\sqrt{2}+1\right) \rightarrow f\ (\lambda_3)=\left(-\sqrt{2}+1\right)^6-7\left(-\sqrt{2}+1\right)^4+7\left(-\sqrt{2}+1\right)^2-1=0$

$\lambda_4=\left(\sqrt{2}-1\right) \rightarrow f\ (\lambda_4)=\left(\sqrt{2}-1\right)^6-7\left(\sqrt{2}-1\right)^4+7\left(\sqrt{2}-1\right)^2-1=0$

$\lambda_5=(1) \rightarrow f\ (\lambda_5)=(1)^6-7(1)^4+7(1)^2-1=0$

$\lambda_6=\left(\sqrt{2}+1\right) \rightarrow f\ (\lambda_6)=\left(\sqrt{2}+1\right)^6-7\left(\sqrt{2}+1\right)^4+7\left(\sqrt{2}+1\right)^2-1=0$

Jadi $Sp(P_2 \times P_3)=\left[\left(-\sqrt{2}-1\right),(-1),\left(-\sqrt{2}+1\right),\left(\sqrt{2}-1\right),1,\left(\sqrt{2}+1\right)\right].$

Dengan menggunakan metode yang sama, untuk spectrum graf $P_2 \times P_n$ yang lain, disajikan dalam tabel dibawah ini:

n	**Spectrum Graf**		
	$Sp(P_2)$	$Sp(P_n)$	$Sp(P_2 \times P_n)$
1	$[-1,1]$	$[0]$	$[-1,1]$
2	$[-1,1]$	$[-1,1]$	$[-2,2,0,0]$
3	$[-1,1]$	$[-\sqrt{2},\sqrt{2},0]$	$[\left(-1-\sqrt{2}\right),\left(1+\sqrt{2}\right),-1,1,$ $\left(1-\sqrt{2}\right),\left(-1+\sqrt{2}\right)]$
4	$[-1,1]$	$[\frac{1}{2}\left(-1-\sqrt{5}\right),\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right),$ $\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right),\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{5}\right)]$	$[\frac{1}{2}\left(-3-\sqrt{5}\right),\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{5}\right),\frac{1}{2}\left(-1-\sqrt{5}\right),\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right),$ $\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right),\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{5}\right),\frac{1}{2}\left(-3+\sqrt{5}\right),\frac{1}{2}\left(3-\sqrt{5}\right)]$
5	$[-1,1]$	$[-\sqrt{3},\sqrt{3},-1,1,0]$	$[-1-\sqrt{3},1+\sqrt{3},-2,2,-1,1,1-\sqrt{3},-1+\sqrt{3},0,0]$
k	$[-1,1]$	$[\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_n]$	$[\gamma_1+1,\gamma_1-1,\gamma_2+1,\gamma_2-1,\ldots,\gamma_{n-1}+1,$ $\gamma_{n-1}-1,\gamma_n+1,\gamma_n-1]$

Tabel 3.4.1.1: Beberapa Spectrum Graf Tangga

Teorema 59.

Misal $L_n = \left(P_2 \times P_n\right)$ adalah graf tangga dengan $n \in N$, maka spectrum matriks terhubung langsung dari graf tangga $\left(L_n\right)$ adalah

$$Sp\left(L_n\right) = \left[1 + 2\cos\left(\frac{k\pi}{(n+1)}\right), -1 + 2\cos\left(\frac{k\pi}{(n+1)}\right)\right], \text{ untuk } k = 1,2,3,\ \ldots,\ n.$$

Bukti.

Diketahui bahwa $Sp\left(P_2\right) = [1,-1]$, $Sp\left(P_n\right) = \left[2\cos\left(\frac{k\pi}{(n+1)}\right)\right]$, $J_{A(P_2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Misalkan matriks diagonal yang diperoleh dari matriks terhubung langsung graf lintasan $\left(P_n\right)$ adalah $J_{A(P_n)} = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \gamma_n \end{pmatrix}$, maka

$$J_{A(P_n)} \otimes I(P_2) = \begin{pmatrix} \gamma_1\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} & 0\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} & \cdots & 0\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \\ 0\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} & \gamma_2\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \\ 0\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} & \cdots & 0 & \gamma_n\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_2 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \gamma_2 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & \gamma_n & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \gamma_n \end{pmatrix}$$

$$I_{A(P_n)} \otimes J(P_2) = \begin{pmatrix} 1\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} & 0\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} & \cdots & 0\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \\ 0\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} & 1\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \\ 0\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} & \cdots & 0 & 1\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & -1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

sehingga diperoleh

$$J_{A(P_n)} \otimes I(P_2) + I_{A(P_n)} \otimes J(P_2) = \begin{pmatrix} \gamma_1+1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_1-1 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_2+1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \gamma_2-1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & \gamma_n+1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \gamma_n-1 \end{pmatrix}$$

Persamaan karakteristik dari matriks $\left(J_{A(P_n)} \otimes I_{2\times 2} + I_{n\times n} \otimes J_{A(P_2)}\right)$ adalah

$$\left| I\lambda - \left(J_{A(P_n)} \otimes I_{2\times 2} + I_{n\times n} \otimes J_{A(P_2)}\right)\right| = 0$$

$$(\lambda_1 - (\gamma_1+1))(\lambda_2 - (\gamma_1-1))\ldots(\lambda_{2n-1} - (\gamma_i+1))(\lambda_{2n} - (\gamma_i-1)) = 0$$

$$Sp(L_n) = [\gamma_i+1, \gamma_i-1, 1 \le i \le n].$$

Jadi $Sp(L_n) = \left[2\cos\left(\frac{k\pi}{(n+1)}\right)+1, 2\cos\left(\frac{k\pi}{(n+1)}\right)-1\right]$, untuk k = 1,2,3, …, n.

3.4.2 Spectrum Graf Buku $\left(P_2 \times K_{1,n}\right)$

Dengan menggunakan metode yang sama pada subbab 3.4.1, beberapa spectrum graf buku akan disajikan dalam tabel berikut ini:

N	**Spectrum Graf**		
	$Sp\left(P_2\right)$	$Sp\left(K_{1,n}\right)$	$Sp\left(P_2 \times K_{1,n}\right)$
1	$[-1,1]$	$[-1,1]$	$[-2,2,0,0]$
2	$[-1,1]$	$[-\sqrt{2},\sqrt{2},0]$	$[-1-\sqrt{2},1+\sqrt{2},-1,1,1-\sqrt{2},-1+\sqrt{2}]$
3	$[-1,1]$	$[-\sqrt{3},\sqrt{3},0,0]$	$[-1-\sqrt{3},1+\sqrt{3},-1,-1,1,1,1-\sqrt{3},-1+\sqrt{3}]$
4	$[-1,1]$	$[-2,2,0,0,0]$	$[-3,3,-1,-1,-1,-1,1,1,1,1]$
5	$[-1,1]$	$[-\sqrt{5},\sqrt{5},0,0,0]$	$[-1-\sqrt{5},1+\sqrt{5},1-\sqrt{5},-1+\sqrt{5},-1,-1,-1,-1,1,1,1,1]$
N	$[-1,1]$	$[0,\pm\sqrt{n}]$	$[-1,-1\pm\sqrt{n},1\pm\sqrt{n},1]$

Tabel 3.4.2.1: Beberapa Spectrum Graf Buku.

Teorema 60.

Spectrum matriks terhubung langsung dari graf buku $\left(P_2 \times K_{1,n}\right)$, dengan $n \in N$ adalah

$$Sp\left(P_2 \times K_{1,n}\right) = [-1,-1\pm\sqrt{n},1\pm\sqrt{n},1].$$

Bukti.

Cara 1.

Dari contoh 48 dan teorema 51 diketahui bahwa $Sp\left(K_{1,n}\right) = \left[0^{1+n-2}, \pm\sqrt{n}\right]$, dan $Sp\left(P_2\right) = [-1,1]$, maka berdasarkan teorema 56 diperoleh

$$\lambda_1 = -1+0 = -1, \quad \lambda_3 = -1-\sqrt{n}, \quad \lambda_5 = 1+\sqrt{n},$$

$$\lambda_2 = -1+\sqrt{n}, \quad \lambda_4 = 1+0 = 1, \quad \lambda_6 = 1-\sqrt{n}.$$

Jadi $Sp\left(P_2 \times K_{1,n}\right) = [-1,-1\pm\sqrt{n},1\pm\sqrt{n},1]$.

Cara 2.

Diketahui $Sp\left(P_2\right) = [-1,1]$ dan $Sp\left(K_{1,n}\right) = \left[0^{1+n-2}, \pm\sqrt{n}\right]$, misalkan

$$J_{A(P_2)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ dan } J\left(K_{1,n}\right) = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{n} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(n+1)\times(n+1)} \quad \text{maka}$$

$$J_{A(P_2)} \otimes I\left(K_{1,n}\right) = \begin{pmatrix} -1\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} & 0\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ 0\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} & 1\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & \vdots & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_{A(P_2)} \otimes J\left(K_{1,n}\right) = \begin{pmatrix} 1\begin{pmatrix} \pm\sqrt{n} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} & 0\begin{pmatrix} \pm\sqrt{n} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ 0\begin{pmatrix} \pm\sqrt{n} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} & 1\begin{pmatrix} \pm\sqrt{n} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{n} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \pm\sqrt{n} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sehingga $J_{A(P_2)} \otimes I\left(K_{1,n}\right) + I_{A(P_2)} \otimes J\left(K_{1,n}\right)$ adalah

$$\begin{pmatrix} -1\pm\sqrt{n} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & \vdots & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\pm\sqrt{n} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{(2n+2)\times(2n+2)}$$

Persamaan karakteristik dari matriks $J_{A(P_2)} \otimes I\left(K_{1,n}\right) + I_{A(P_2)} \otimes J\left(K_{1,n}\right)$ adalah

$$\left| I\lambda - \left(J_{A(P_n)} \otimes I_{2\times 2} + I_{n\times n} \otimes J_{A(P_2)}\right) \right| = 0$$

$$\left(\lambda - \left(-1\pm\sqrt{n}\right)\right)\left(\lambda-(-1)\right)\ldots\left(\lambda-(-1)\right)\left(\lambda-\left(1\pm\sqrt{n}\right)\right)\left(\lambda-1\right)\ldots\left(\lambda-1\right) = 0$$

$$Sp\left(P_2 \times K_{1,n}\right) = [-1, -1\pm\sqrt{n}, 1\pm\sqrt{n}, 1].$$

3.4.3 Spectrum Graf Jaring-Jaring $\left(P_m \times P_n\right)$

Teorema 61.

Spectrum matriks terhubung langsung dari graf jaring-jaring $\left(P_m \times P_n\right)$ dengan $m, n \in N$ adalah

$$Sp\left(P_m \times P_n\right) = [2\left(\cos\left(\frac{k\pi}{(m+1)}\right) + \cos\left(\frac{l\pi}{(n+1)}\right)\right)],$$

untuk k = 1,2,3, …, n dan l = 1,2,3, …, m.

Bukti.

Dari teorema 51 diketahui bahwa $Sp(P_m) = \left[2\cos\left(\frac{l\pi}{(m+1)}\right)\right]$ untuk l = 1,2,3, …, m dan $Sp(P_n) = \left[2\cos\left(\frac{k\pi}{(n+1)}\right)\right]$ untuk k = 1,2,3, …, n maka berdasarkan teorema 56 diperoleh

$$Sp\left(P_m \times P_n\right) = [2\cos\left(\frac{k\,\pi}{(n+1)}\right) + 2\cos\left(\frac{l\,\pi}{(m+1)}\right)],$$

untuk k = 1,2,3, …, n dan l = 1,2,3, …, m.

3.5 Klasifikasi dan Perhitungan Redaksi *Firqah* dalam Al-Quran

Pada skripsi ini, objek penelitiannya adalah graf yang dikaji dalam perspektif aljabar. Misalnya berbagai macam matriks yang berbeda dari sisi aljabarnya, karena entri-entri dari matriks tersebut berbeda, tetapi dikatakan sama atau isomorfis pada grafnya, sehingga terdapat klasifikasi dari berbagai macam matriks yang berbeda dalam aljabarnya namun memiliki kesamaan dalam teori grafnya. Begitupun sebaliknya, ada beberapa graf yang berbeda, baik dari banyaknya sisi maupun titik, namun memiliki kesamaan spectrum pada kedua graf tersebut (*isospectral* atau *cospectral*).

Graf-graf yang telah diteliti dari sisi konsep aljabarnya akhirnya mempunyai bentuk umum spectrum graf, sehingga dari bentuk umum itulah dengan mudah dapat kita tentukan spectrum graf tersebut dengan banyaknya titik yang nilainya sebarang. Klasifikasi graf yang dikaji dalam perspektif aljabar sangat bermanfaat untuk perkembangan keilmuan matematika, terutama teori graf dan aljabar.

Dalam konteks Islam, klasifikasi dan perhitungan frekuensi pengulangan redaksi dari beberapa kata dalam Al-Quran, anehnya mempunyai kesamaan dan keserasian dalam nilai pengulangannya. Kajian mengenai *i`jaz `adadi* telah dijelaskan pada bab-bab sebelumnya. Sekarang, adakah keserasian dalam penggunaan kata *firqah* beserta turunannya dalam Al-Quran, yang mana *firqah* atau kelompok merupakan salah satu aspek yang dilakukan dalam penelitian ini.

Klasifikasi tentang ayat-ayat Al-Quran yang memuat kata *firqah* dan turunanya akan disajikan dalam tabel dibawah ini :

No	Redaksi	Keterangan
1.	وَٱخۡتَلَفُواْ **تَفَرَّقُواْ** كَٱلَّذِينَ تَكُونُواْ وَلَا…	(QS. Ali Imran: 105)
2.	وَمَا **تَفَرَّقُوٓاْ** إِلَّا مِنۢ بَعۡدِ مَا جَآءَهُمُ ٱلۡعِلۡمُ …	(QS. Al-Syura:14)
3.	…وَلَا تَتَّبِعُواْ ٱلسُّبُلَ **فَتَفَرَّقَ** بِكُمۡ عَن سَبِيلِهِ …	(QS. Al-Anam:153)
4.	وَٱعۡتَصِمُواْ بِحَبۡلِ ٱللَّهِ جَمِيعًا وَلَا **تَفَرَّقُواْ** …	(QS. Ali-Imran:103)
5.	… أَنۡ أَقِيمُواْ ٱلدِّينَ وَلَا **تَتَفَرَّقُواْ** فِيهِ …	(QS. Al-Syura:13)
6.	وَإِن **يَتَفَرَّقَا** يُغۡنِ ٱللَّهُ كُلًّا مِّن سَعَتِهِۦ …	(QS. An-Nisa:130)
7.	وَإِذۡ **فَرَقۡنَا** بِكُمُ ٱلۡبَحۡرَ فَأَنجَيۡنَٰكُمۡ …	(QS. Al-Baqarah:50)
8.	وَقُرۡءَانًا **فَرَقۡنَٰهُ** لِتَقۡرَأَهُۥ….	(QS. Al-Isra:106)
9.	…وَلَٰكِنَّهُمۡ قَوۡمٌ **يَفۡرَقُونَ**	(QS. Al-Taubah:56)
10.	…فَٱ**فۡرُقۡ** بَيۡنَنَا وَبَيۡنَ ٱلۡقَوۡمِ ٱلۡفَٰسِقِينَ	(QS. Al-Maidah:25)
11.	…إِنِّي خَشِيتُ أَن تَقُولَ **فَرَّقۡتَ** …	(QS. Thaha:94)
12.	فِيهَا **يُفۡرَقُ** كُلُّ أَمۡرٍ حَكِيمٍ	(QS. Al-Dukhan:4)
13.	إِنَّ ٱلَّذِينَ **فَرَّقُواْ** دِينَهُمۡ وَكَانُواْ …	(QS. Al-An\`am:159)
14.	مِنَ ٱلَّذِينَ **فَرَّقُواْ** دِينَهُمۡ وَكَانُواْ شِيَعًا …	(QS. Al-Rum:32)
15.	…لَا **نُفَرِّقُ** بَيۡنَ أَحَدٍ مِّنۡهُمۡ وَنَحۡنُ لَهُۥ …	(QS. Al-Baqarah:136)
16.	…لَا **نُفَرِّقُ** بَيۡنَ أَحَدٍ مِّن رُّسُلِهِۦۚ …	(QS. Al-Baqarah:285)
17.	…لَا **نُفَرِّقُ** بَيۡنَ أَحَدٍ مِّنۡهُمۡ وَنَحۡنُ لَهُۥ مُسۡلِمُونَ	(QS. Ali Imran:84)
18.	…وَيُرِيدُونَ أَن **يُفَرِّقُواْ** بَيۡنَ ٱللَّهِ وَرُسُلِهِۦ …	(QS. Al-Nisa\`:150)
19.	…وَلَمۡ **يُفَرِّقُواْ** بَيۡنَ أَحَدٍ مِّنۡهُمۡ أُوْلَٰٓئِكَ …	(QS. Al-Nisa\`:152)
20.	…فَيَتَعَلَّمُونَ مِنۡهُمَا مَا **يُفَرِّقُونَ** بِهِۦ …	(QS. Al-Baqarah:102)

21.	...**فَارِقُوهُنَّ** بِمَعْرُوفٍ وَأَشْهِدُوا۟ ذَوَىْ ...	(QS. Al-Thalaq:2)
22.	وَمَا **تَفَرَّقَ** ٱلَّذِينَ أُوتُوا۟ ٱلْكِتَٰبَ ...	(QS. Al-Bayyinah:4)
23.	وَيَوْمَ تَقُومُ ٱلسَّاعَةُ يَوْمَئِذٍ **يَتَفَرَّقُونَ**	(QS. Al-Rum:14)
24.	فَٱلْ**فَٰرِقَٰتِ** فَرْقًا	(QS. Al-Mursalat:4)
25.	...فَٱنفَلَقَ فَكَانَ كُلُّ **فِرْقٍ** كَٱلطَّوْدِ ٱلْعَظِيمِ	(QS. Al-Syu`ara:63)
26.	...فَلَوْلَا نَفَرَ مِن كُلِّ **فِرْقَةٍ** مِّنْهُمْ طَآئِفَةٌ ...	(QS. Al-Taubah:122)
27.	قَالَ هَٰذَا **فِرَاقُ** بَيْنِى وَبَيْنِكَ...	(QS. Al-Kahfi:78)
28.	وَظَنَّ أَنَّهُ **ٱلْفِرَاقُ**	(QS. Al-Qiamah:28)
29.	فَٱلْفَٰرِقَٰتِ **فَرْقًا**	(QS. Al-Mursalat:4)
30.	...أَفَتَطْمَعُونَ أَن يُؤْمِنُوا۟ لَكُمْ وَقَدْ كَانَ **فَرِيقٌ** مِّنْهُمْ ...	(QS.Al-Baqarah:75)
31.	أَوَكُلَّمَا عَٰهَدُوا۟ عَهْدًا نَّبَذَهُۥ **فَرِيقٌ** مِّنْهُم ...	(QS.Al-Baqarah:100)
32.	...رَسُولٌ مِّنْ عِندِ ٱللَّهِ مُصَدِّقٌ لِّمَا مَعَهُمْ نَبَذَ **فَرِيقٌ**...	(QS.Al-Baqarah:101)
33.	...ثُمَّ يَتَوَلَّىٰ **فَرِيقٌ** مِّنْهُمْ وَهُم مُّعْرِضُونَ	(QS.Al-Imran:23)
34.	...إِذَا **فَرِيقٌ** مِّنْهُمْ يَخْشَوْنَ ٱلنَّاسَ ...	(QS. Al-Nisa`:77)
35.	...يَزِيغُ قُلُوبُ **فَرِيقٍ** مِّنْهُمْ ثُمَّ تَابَ عَلَيْهِمْ ...	(QS. Al-Taubah:117)
36.	ثُمَّ إِذَا كَشَفَ ٱلضُّرَّ عَنكُمْ إِذَا **فَرِيقٌ** مِّنكُم...	(QS. Al-Nahl:54)
37.	...إِنَّهُۥ كَانَ **فَرِيقٌ** مِّنْ عِبَادِى يَقُولُونَ...	(QS. Al-Mukminun:109)
38.	...وَأَطَعْنَا ثُمَّ يَتَوَلَّىٰ **فَرِيقٌ** مِّنْهُم مِّنۢ بَعْدِ ذَٰلِكَ ...	(QS. Al-Nur:47)
39.	...لِيَحْكُمَ بَيْنَهُمْ إِذَا **فَرِيقٌ** مِّنْهُم مُّعْرِضُونَ	(QS. Al-Nur:48)
40.	...إِذَا **فَرِيقٌ** مِّنْهُم بِرَبِّهِمْ يُشْرِكُونَ	(QS. Al-Rum:33)

41.	...وَيَسۡتَـٔۡذِنُ **فَرِيقٞ** مِّنۡهُمُ ٱلنَّبِيَّ ...	(QS. Al-Ahzab:13)
42.	...**فَرِيقٞ** فِي ٱلۡجَنَّةِ وَفَرِيقٞ فِي ٱلسَّعِيرِ	(QS. Al-Syuura:7)
43.	...فَرِيقٞ فِي ٱلۡجَنَّةِ **وَفَرِيقٞ** فِي ٱلسَّعِيرِ	(QS. Al-Syuura:7)
44.	...هَٰٓؤُلَآءِ تَقۡتُلُونَ أَنفُسَكُمۡ وَتُخۡرِجُونَ **فَرِيقٗا**...	(QS. Al-Baqarah:85)
45.	...أَنفُسُكُمُ ٱسۡتَكۡبَرۡتُمۡ **فَفَرِيقٗا** كَذَّبۡتُمۡ وَفَرِيقٗا تَقۡتُلُونَ	(QS. Al-Baqarah:87)
46.	...أَنفُسُكُمُ ٱسۡتَكۡبَرۡتُمۡ فَفَرِيقٗا كَذَّبۡتُمۡ **وَفَرِيقٗا** تَقۡتُلُونَ	(QS. Al-Baqarah:87)
47.	...وَإِنَّ **فَرِيقٗا** مِّنۡهُمۡ لَيَكۡتُمُونَ ٱلۡحَقَّ وَهُمۡ يَعۡلَمُونَ	(QS. Al-Baqarah:146)
48.	... **فَرِيقٗا** مِّنۡ أَمۡوَٰلِ ٱلنَّاسِ بِٱلۡإِثۡمِ وَأَنتُمۡ تَعۡلَمُونَ	(QS. Al-Baqarah:188)
49.	وَإِنَّ مِنۡهُمۡ **لَفَرِيقٗا** يَلۡوُۥنَ أَلۡسِنَتَهُم بِٱلۡكِتَٰبِ...	(QS. Al-Imran:78)
50.	يَٰٓأَيُّهَا ٱلَّذِينَ ءَامَنُوٓاْ إِن تُطِيعُواْ **فَرِيقٗا**...	(QS. Al-Imran:100)
51.	...لَا تَهۡوَىٰٓ أَنفُسُهُمۡ **فَرِيقٗا** كَذَّبُواْ وَفَرِيقٗا يَقۡتُلُونَ	(QS. Maidah:70)
52.	...أَنفُسُهُمۡ **فَرِيقٗا** كَذَّبُواْ وَفَرِيقٗا يَقۡتُلُونَ	(QS. Al-Maidah:70)
53.	...**فَرِيقًا** هَدَىٰ وَفَرِيقًا حَقَّ عَلَيۡهِمُ ٱلضَّلَٰلَةُ	(QS. Al-A`raf:30)
54.	...فَرِيقًا هَدَىٰ **وَفَرِيقًا** حَقَّ عَلَيۡهِمُ ٱلضَّلَٰلَةُ	(QS. Al-A`raf:30)
55.	كَمَآ أَخۡرَجَكَ رَبُّكَ مِنۢ بَيۡتِكَ بِٱلۡحَقِّ وَإِنَّ **فَرِيقٗا**...	(QS. Al-Anfal:5)
56.	...قُلُوبِهِمُ ٱلرُّعۡبَ **فَرِيقٗا** تَقۡتُلُونَ وَتَأۡسِرُونَ فَرِيقٗا	(QS. Al-Ahzab:26)
57.	...قُلُوبِهِمُ ٱلرُّعۡبَ **فَرِيقٗا** تَقۡتُلُونَ وَتَأۡسِرُونَ فَرِيقٗا	(QS. Al-Ahzab:26)
58.	...فَٱتَّبَعُوهُ إِلَّا **فَرِيقٗا** مِّنَ ٱلۡمُؤۡمِنِينَ	(QS. Saba`:20)
59.	...أَنِ ٱعۡبُدُواْ ٱللَّهَ فَإِذَا هُمۡ **فَرِيقَانِ** يَخۡتَصِمُونَ	(QS. Al-Naml:45)
60.	...فَأَيُّ **ٱلۡفَرِيقَيۡنِ** أَحَقُّ بِٱلۡأَمۡنِۖ إِن كُنتُمۡ تَعۡلَمُونَ	(QS. Al-An`am:81)

61.	مَثَلُ **ٱلْفَرِيقَيْنِ** كَٱلْأَعْمَىٰ وَٱلْأَصَمِّ...	(QS. Hud:24)
62.	...ءَامَنُوٓاْ أَيُّ **ٱلْفَرِيقَيْنِ** خَيْرٌ مَّقَامًا وَأَحْسَنُ نَدِيًّا	(QS. Maryam:73)
63.	وَإِذْ ءَاتَيْنَا مُوسَى ٱلْكِتَٰبَ وَ**ٱلْفُرْقَانَ** لَعَلَّكُمْ تَهْتَدُونَ	(QS. Al-Baqarah:53)
64.	...هُدًى لِّلنَّاسِ وَبَيِّنَٰتٍ مِّنَ ٱلْهُدَىٰ وَ**ٱلْفُرْقَانِ**...	(QS. Al-Baqarah:185)
65.	مِن قَبْلُ هُدًى لِّلنَّاسِ وَأَنزَلَ **ٱلْفُرْقَانَ**...	(QS. Ali-Imran:4)
66.	...عَبْدِنَا يَوْمَ **ٱلْفُرْقَانِ** يَوْمَ ٱلْتَقَى ٱلْجَمْعَانِ...	(QS. Al-Anfal:41)
67.	وَلَقَدْ ءَاتَيْنَا مُوسَىٰ وَهَٰرُونَ **ٱلْفُرْقَانَ** وَضِيَآءً	(QS. Al-Anbiya:48)
68.	تَبَارَكَ ٱلَّذِى نَزَّلَ **ٱلْفُرْقَانَ** عَلَىٰ عَبْدِهِۦ...	(QS. Al-Furqan:1)
69.	... إِن تَتَّقُواْ ٱللَّهَ يَجْعَل لَّكُمْ **فُرْقَانًا** وَيُكَفِّرْ...	(QS. Al-Anfal:29)
70.	... ضِرَارًا وَكُفْرًا وَ**تَفْرِيقًۢا** بَيْنَ ٱلْمُؤْمِنِينَ...	(QS. Al-Taubah:107)
71.	... ٱلسِّجْنِ ءَأَرْبَابٌ **مُّتَفَرِّقُونَ** خَيْرٌ أَمِ ٱللَّهُ...	(QS. Yusuf:39)
72.	...مِنۢ بَابٍ وَٰحِدٍ وَٱدْخُلُواْ مِنْ أَبْوَٰبٍ **مُّتَفَرِّقَةٍ**...	(QS. Yusuf:67)

Tabel 3.5.1: Tabel pengulangan kata *firqah* dan turunannya dalam Al-Quran. (An-Najdi, 1996:108-113).

Dari tabel 3.5.1 diatas, dapat diketahui bahwa pengulangan kata *firqah* dan turunannya dalam Al-Quran sebanyak 72 kali, dan nilai tersebut sama dengan jumlah *firqah* yang masuk neraka yang ada pada hadist nabi. Jadi sesuai dengan banyaknya *firqah* yang menyimpang dari agama yang benar, yang diajarkan oleh Rasulullah saw.

Tidak ada redaksi hadist yang menyatakan bahwa angka 72 golongan tersebut diambil dari banyaknya pengulangan kata *firqah* dan turunannya dalam Al-Quran. Dan hal tersebut pasti tidak terjadi dengan sendirinya, keserasian yang tampak tak lain merupakan kekuasaan Allah swt yang Maha Matematis. Bahkan, segala keteraturan dan keserasian yang ada dalam alam semesta ini sudah direncanakan, diperhitungkan dan diatur oleh-Nya, dan bukan merupakan suatu kebetulan.

Nah, begitu mengeharankan keseimbangan atau keteraturan itu terjadi, dan mengenai penafsiran akan keteraturan tersebut terserah kepada yang memahami, yang jelas sudah ditunjukkan bahwa adanya penyebutan satu kata dalam Al-Quran memberikan petunjuk (isyarat) tentang makna tertentu. Namun yang perlu diperhatikan bahwa apa yang dilakukan dalam penelitian ini adalah upaya untuk membuktikan Al-Quran sebagai mukjizat abadi dan bukan merupakan sebuah penafsiran dari Al-Quran (walaupun nantinya terdapat hubungan antara makna dengan bilangan tersebut).

Adapun jalan (*manhaj*) kelompok yang selamat adalah:

1. Golongan yang setia mengikuti *manhaj* Rasulullah saw dalam hidupnya, serta *manhaj* para sahabat-sahabatnya.
2. Golongan yang kembali merujuk kepada *Kalamullah* dan Rasul tatkala terjadi perselisihan dan pertentangan diantara mereka.
3. Golongan yang tidak mendahulukan perkataan seseorang atas *Kalamullah* dan Rasul.
4. Golongan yang selalu menjaga kemurnian tauhid.

5. Golongan yang senang menghidupkan sunnah-sunnah Rasulullah, baik dalam ibadah, perilaku dan dalam segenap hidupnya.
6. Golongan yang tidak berpegang kecuali kepada *Kalamullah* dan kalam Rasul yang *maksum,* yang berbicara tidak mengikuti hawa nafsunya.
7. Golongan para ahli hadist.
8. Golongan yang menghormati para imam *mujtahidin*, tidak fanatik terhadap salah seorang diantara mereka.
9. Golongan yang menyeru kepada yang *ma`ruf* dan mencegah dari yang *munkar*.
10. Golongan yang mengajak seluruh umat Islam agar berpegang teguh kepada sunnah Rasul dan para sahabatnya. (Zainu, 1998:5-9).

Dari keterangan diatas dapat diketahui, bahwa golongan yang selamat itu mempunyai beberapa indikator. Mengenai nama jenis aliran atau golongan yang selamat tidak menutup kemungkinan lebih dari satu, karena *al-Firqah an-Najiyah* ini merupakan himpunan dari berbagai macam golongan yang tetap memegang teguh pada sunnah nabi dan para sahabat. *Wallahu `alam*.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan mengenai spectrum dari graf hasilkali kartesius, maka dapat diperoleh kesimpulan bahwa:

1. Diberikan dua graf sederhana G dan H dengan himpunan titik–titik $V(G)=\{u_1,u_2,...,u_m\}$ dan $V(H)=\{v_1,v_2,...,v_n\}$. $A(G)$ dan $A(H)$ berturut-turut adalah matriks terhubung langsung dari graf G dan H. $I(G)$ dan $I(H)$ adalah matriks identitas dengan ukuran $m\times m$ dan $n\times n$, maka matriks terhubung langsung dari hasilkali kartesius graf G dan H adalah $A(G\times H)=A(H)\otimes I(G)+I(H)\otimes A(G)$.

2. Diberikan dua graf sederhana G dan H dengan $Sp(G)=[\xi_1,\xi_2,...,\xi_m]$ dan $Sp(H)=[\mu_1,\mu_2,...,\mu_n]$, maka bentuk umum spectrum dari hasilkali kartesius graf G dan H adalah

$$Sp(G\times H)=\left[\xi_i+\mu_j, 1\le i\le m, 1\le j\le n\right].$$

3. Misal $L_n=(P_2\times P_n)$ adalah graf tangga dengan $n\in N$, maka bentuk umum spectrum graf tangga (L_n) adalah

$$Sp(L_n)=\left[1+2\cos\left(\frac{k\pi}{(n+1)}\right),-1+2\cos\left(\frac{k\pi}{(n+1)}\right)\right], \text{ untuk } k=1,2,3,\ \dots,\ n.$$

4. Bentuk umum spectrum graf jaring-jaring $(P_m \times P_n)$ dengan $m, n \in N$ adalah

$$Sp(P_m \times P_n) = [2\left(\cos\left(\frac{k\pi}{(m+1)}\right) + \cos\left(\frac{l\pi}{(n+1)}\right)\right)],$$

untuk k = 1,2,3, …, n dan l = 1,2,3, …, m.

5. Bentuk umum spectrum graf buku $(P_2 \times K_{1,n})$, dengan $n \in N$ adalah

$$Sp(P_2 \times K_{1,n}) = [-1, -1 \pm \sqrt{n}, 1 \pm \sqrt{n}, 1].$$

4.2 Saran

Ada banyak sekali merepresentasikan graf dalam matriks yang diterapkan dalam bidang kimia selain matriks terhubung langsung, seperti matriks Laplacian, matriks *edge-adjacency*, matriks *reciprocal distance*, matriks *resistance distance*, matriks *deteour*, matriks *wiener*, matriks *combinatorial*, matriks *Szeged*, matriks *Hosoya*, matriks lintasan, dan matriks *Cluj*. Dalam penelitian selanjutnya, diharapkan dari setiap representasi graf dalam matriks tersebut dapat ditemukan bentuk umum spectrum graf dari matriks tersebut, spectrum dari hasil operasinya dan terapan dalam topik-topik bidang kimia.

DAFTAR PUSTAKA

An-Najdi, Zahra`, Abu. (1996). *Min al-I'jâz al-Balaghiy wa al-`Adadiy li al-Qur'â al-Karîm.* Bandung: Pustaka Hidayah.

Al-Mishri, Abdul Hadi, Muhammad. (1992). *Manhaj dan Aqidah Ahlussunnah Wal Jama`ah, Menurut Pemahaman Ulama Salaf.* Jakarta: Gema Insani Press.

Anton, Howard. & Rorres, Chris. (2004). *Aljabar Linier Elementer Versi Aplikasi Jilid 1*. Jakarta: Erlangga.

Bondy, J.A. & Murty, U.S.R. (1976). *Graph Theory with Applications*. London: The Macmillan Press Ltd.

Bondy, J.A. & Murty, U.S.R. (2008). *Graph Theory.* New York: Springer.

Biggs, Norman. (1974). *Algebraic Graph Theory.* London: Cambridge University Press.

Chebyshev, P. L. (1854) Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes, *Mémoires des Savants étrangers présentés à l'Académie de Saint-Pétersbourg.* Vol. 7, No. 539-586. Retrieved November, 30, 2009 from http:// *en.wikipedia.org/wiki/Chebyshev_polynomials*

Chartrand, G. & Lesniak, L. (1986). *Graph and Digraph 2nd Edition*. California: Wadsworth, Inc.

Cvetković, D. (2005). *Signless Laplacians and Line Graphs, Bulletin T.CXXXI de l'Acad´emie serbe des sciences et des arts–2005 Classe des Sciences mathématiques et naturelles Sciences mathématiques,* No 30.

Cvetković D. M., Gutman, I. (1974). *On Spectral Structure of Graphs Having The Maximal Eigenvalue Not Greater Than Two.* Publications De L`Institut Mathematique. Nouvelle serie, tome 18 (32). Page 39-45.

Cvetković D. M., Doob, Michael, Sachs, Horst. (1980). *Spectra of Graphs Theory and Application.* New York: Academic Press.

Da Fonseca, C.M. (2003) *The Path Polynomial of a Complete Graph.* Electronic Journal of Linear Algebra, Vol. 10. Page 155-162.

D. S. Dummit, R. M. Foote. (1991). *Abstract Algebra.* United States of America: Prentice-Hall, Inc.

Hosoya, Haruo. (1981). *Graphical and Combinatorial Aspects of Some Orthogonal Polynomials.* Natural Science Report, Ochanomizu University. Vol. 32, No. 2. Page 127-138.

Ivanciuc. O., Ivanciuc T., Diudea. M. V. (1997). *Molecular Graph Matrices and Derived Structural Descriptors, SAR and QSAR in Environmental Research*. Vol. 7. Page 63-87.

Jain, S.K. & Gunawardena, A.D. (2004). *Linier Algebra an Interactive Approach.* Unit States of America: Thomson Brooks/Cole.

Mason, J.C. & Handscomb, D.C. (2003). *Chebyshev Polynomials.* United States of America: A CRC Press Company.

Mathwes, H. John., Fink, D. Kurtis. (1999). *Numerical Methods Using MATLAB Third Edition.* Prentice Hall: Upper Saddle River, NJ 07458.

Meyer, D, Carl. (2000). *Matrix Analysis and Applied Linier Algebra.* Siam Organization.

Obata, Nobuaki. & Hora, Akhito. (2007). *Quantum Probability and Spectral Analysis of Graphs.* Berlin Heidelberg: Springer.

Quraish, Shihab, M. (2007). *Membumikan Al-Quran, Fungsi dan Peran Wahyu dalam Kehidupan Masyarakat.* Bandung: Mizan.

Raisinghania, M. D., Anggarwal, R. S. (1980). *Modern Algebra*. Ram Nagar, New Delhi: S. Chand & Company Ltd.

Silvia, Gago. (2008). *Eigenvalue Distribution in Power Law Graphs.* Aplimat - Journal of Applied Mathematics. Volume 1, Number 1. Page 29–35.

Wilson, Robin, J & Walkins, John J. (1990). *Graphs An Introductory Approach: A first Course in Discrete Mathematic*. New York: John Wiley & Sons, Inc.

Zainu, Jamil, Bin, Muhammad. (1998). *Jalan Golongan yang Selamat.* Jakarta: Darul Haq.

CURICULUM VITAE

Nama : Imam Fahcruddin
NIM : 06510004
Tempat, tanggal lahir : Bojonegoro, 20 November 1988
Alamat : Jln. Puspa Indah, Ledok Kulon, Bojonegoro, Jawa Timur
Tlp/HP/email : 085257675884/ fahrudinuin@gmail.com

Riwayat pendidikan :

1. Madrasah Ibtidaiyah Islamiyah Bojonegoro, 2000
2. SLTPN 5 Bojonegoro, 2003
3. Madrasah Aliyah Negeri 1 Bojonegoro, 2006
4. S1: Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri (UIN) Mulana Malik Ibrahim Malang, 2010.

Bidang Keahlian :

1. Matematika Murni

Pengalaman Mata Kuliah yang pernah diampu sampai dengan tahun 2010:

Universitas/Fakultas/Jurusan/ Program Studi	Strata	Mata Kuliah Yang Diampu
UIN Maliki Malang, Fak. Sains dan Teknologi, Jurusan Matematika	S1	1. Praktikum Statistik dengan SPSS dan Minitab 2. Praktikum Pemograman Komputer dengan Microsoft Visual Basic 6.0 3. Praktikum Pemodelan Matematika dengan Maple dan MATLAB 4. Kalkulus 1 5. Aljabar Linier 1

Pengalaman Organisasi Selama S1:

Tahun	Jabatan di UIN Maliki Malang
2006 – 2007	Div. Pengembangan Wacana PMII Rayon Pencerahan Galileo Malang
2007 – 2008	Div. Kematematikaan Himpunan Mahasiswa Jurusan Matematika UIN Malang
2007 – 2008	Pengurus Ikatan Mahasiswa Bojonegoro UIN Malang
2008 – 2009	Mentri Advokasi SENAT MAHASISWA UIN MALIKI Malang
2009 – 2010	Div. Keagamaan Komisariat PMII Sunan Ampel Malang
2009 – 2010	Pengurus MPM BEM-U di UIN Maulana Malik Ibrahim Malang

Pengalaman Profesi Selama S1:

Masa Profesi	Profesi	Tempat Instansi
Juli – Agustus 2009	Unit Billing & Collection Div. Reg. V Jawa Timur	HUMAN RESOURCE AREA V PT. TELKOM, Tbk Jawa Timur
Semester Ganjil 2008/2009	1. Asisten Praktikum Program Komputer 2. Asisten Praktikum Statistik Elementer	Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi UIN MALIKI Malang
Semester Genap 2009/2010	1. Asisten Praktikum Pemodelan Matematika 2. Asisten Dosen Matakuliah Aljabar Linier 1	Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi UIN MALIKI Malang

Publikasi Karya Tulis selama S1:

Tahun	Judul	Publikasi
2009	Spectrum pada Graf Star dan Graf Bipartisi Komplit	Prosiding Seminar Nasional Matematika, Universitas Negeri Yogyakarta. 5 Desember 2009
2010	Applied Chebyshev Polynomial for Determine Spectrum and Signless Laplacian Eigen Values ot Path and Cycle Graph	Prosiding Seminar Nasional Matematika, Universitas Muhammadiyah Malang. 30 Januari 2010
2010	Spectra Graf Hasilkali Kartesius	Skripsi Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi UIN MALIKI Malang

Kegiatan Seminar, Workshop, dan Lokakarya yang pernah diikuti selama S1:

Pelaksanaan	Jenis Kegiatan	Keterangan
09-11-2008	Kompetisi Matematika VIII Tingkat SMA atau yang sederajat Se-Jawa Timur, HMJ Matematika UIN MALIKI Malang	Ketua Pelaksana
04-12-2008	Seminar Nasional "*Pendidikan Berbasis Pesantren*", Fakultas Tarbiyah UIN Malang	Peserta
31-05-2009	Pelatihan SPSS dan Minitab PMII Rayon Pencerahan Galileo Periode 2008/2009	Pemateri
05-12-2009	Seminar Nasional Matematika, Universitas Negeri Yogyakarta	Pemakalah
20-11-2009	Pendidikan Keluarga Berwawasan Gender (PKPBG) & Pembuatan Minyak Kelapa Murni *Virgin Coconut Oil (VCO)*, Desa Ganjaran, Kec. Gondanglegi Malang, Kerjasama PSG UIN Malang dengan DEPDIKNAS	Fasilitator
23-12-2009	Seminar Nasional Pendidikan dan Pelatihan Advokasi, SENAT Mahasiswa UIN Maulana Malik Ibrahim Malang	Ketua Pelaksana
25-11-2009	Pemberdayaan Partisipatoris Keaksaraan Fungsional Berbasis Pertetanggaan Kec. Karang Ploso & Kec. Singosari Malang, Kerjasama PSG UIN Malang dengan DEPDIKNAS	Fasilitator
30-01-2010	Seminar Nasional Matematika, Universitas Muhammadiyah Malang	Pemakalah
16-04-2010	Workshop "*Kiat Efektif Meraih Sukses Kuliah*", Azzam Islamic Research, UIN MALIKI Malang	Pemateri
23-04-2010	Sosialisasi Ke-Bank Sentralan serta Penandatanganan Beasiswa Bank Indonesia di Kantor Bank Indonesia Cabang Malang	Peserta
29-04-2010	Pembacaan dan Diskusi Surat-Surat Kartini, Deklarasi Forum Komunikasi PSW/PSG Malang Raya	Panitia

KEMENTRIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN)
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang (0341)551345
Fax. (0341)572533

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : **Imam Fahcruddin**
NIM : **06510004**
Fakultas/ Jurusan : **Sains dan Teknologi/Matematika**
Judul Skripsi : **Spectra Graf Hasilkali Kartesius**
Pembimbing I : **Abdussakir, M.Pd**
Pembimbing II : **Ach. Nashichuddin, M.A**

No	Tanggal	HAL	Tanda Tangan	
1.	5 Desember 2009	Konsultasi Masalah	1.	
2.	7 Mei 2010	Konsultasi BAB III		2.
3.	21 Mei 2010	Konsultasi Kajian Keagamaan BAB II	3.	
4.	19 Mei 2010	Konsultasi BAB I, II		4.
5.	28 Mei 2010	Konsultasi Kajian Keagamaan BAB III	5.	
6.	10 Juni 2010	Konsultasi BAB I, II, dan III		6.
7.	24 Juni 2010	Konsultasi Keseluruhan	7.	
8.	24 Juni 2010	Revisi Keseluruhan		8.

Malang, 19 Juli 2010
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1001