

LATIS MODULAR DAN SIFAT-SIFATNYA

SKRIPSI

Oleh:
IFA SEPTARIA
NIM: 05510046



JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2010

LATIS MODULAR DAN SIFAT-SIFATNYA

SKRIPSI

**Diajukan Kepada:
Universitas Islam Negeri(UIN)
Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan
Dalam Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)**

**Oleh:
IFA SEPTARIA
NIM 05510046**



JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM

MALANG

2010

LATIS MODULAR DAN SIFAT-SIFATNYA

SKRIPSI

Oleh:
Ifa Septaria
NIM: 05510046

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Malang, 18 Januari 2010

Dosen Pembimbing I,

Dosen Pembimbing II,

Evawati Alisah, M.Pd
NIP: 19720604 199903 2 001

Dr. Munirul Abidin, M.Ag
NIP. 19720420 2002 12 1 003

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M. Pd
NIP 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : IFA SEPTARIA

NIM : 05510046

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri.

Apabila di kemudian hari terbukti terdapat unsur-unsur jiplakan, maka saya bersedia untuk mempertanggung jawabkan, serta diproses sesuai paraturan yang berlaku.

Malang, 18 Januari 2009

Yang membuat pernyataan

Ifa Septaria
NIM. 05510046

MOTTO

إِنَّ اللَّهَ لَا يُغَيِّرُ مَا بِقَوْمٍ حَتَّى يُغَيِّرُوا مَا بِأَنْفُسِهِمْ

Artinya: "Sesungguhnya Allah tidak merubah keadaan sesuatu kaum sehingga mereka merubah keadaan yang ada pada diri mereka sendiri." (Ar-Ra'd: 11)



PERSEMBAHAN

Dengan iringan doa dan rasa syukur yang teramat besar,

Karya tulis ini penulis persembahkan kepada:

Ayah dan ibu tercinta, yang telah memberikan segalanya.

Saudara-saudara tercinta, yang selalu memberikan dukungan moril dan spirituil.



KATA PENGANTAR



Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Alhamdulillah, puji syukur yang sedalam-dalamnya penulis panjatkan kehadirat Allah SWT. Karena berkat rahmat, kehendak, kekuatan, pertolongan, petunjuk dan bimbingan-Nya penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “ latis modular dan sifat-sifatnya”. Shalawat serta salam semoga tetap tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW, beserta keluarga dan sahabat-sahabatnya, yang telah memberikan jalan terang bagi umat Islam.

Penulisan skripsi ini tidak lepas dari bantuan berbagai pihak yang telah memberikan informasi dan inspirasi, sehingga penulis dapat menyusun dan menyelesaikan skripsi ini. Oleh karena itu, penyusun mengucapkan banyak terimakasih kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo selaku Rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Malang.
2. Prof. Drs Sutiman Bambang Sumitro, SU, D.Sc selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang.
3. Abdussakir, M.Pd selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang.
4. Evawati Alisah, M.Pd selaku Dosen Pembimbing I yang dengan sabar membimbing dan memberi arahan serta masukan yang amat berguna sehingga skripsi ini bisa diselesaikan dengan baik.
5. Dr. Munirul Abidin, M.Ag selaku Dosen Pembimbing II, terima kasih atas bimbingan yang telah diberikan sehingga skripsi ini bisa diselesaikan dengan baik.

6. Segenap dosen UIN Maulana Malik Ibrahim Malang, khususnya dosen jurusan Matematika, yang telah memberikan ilmunya tanpa pamrih demi masa depan penulis.
7. Ayahanda Mudawari dan ibunda Sudarsih tercinta, serta semua saudara penulis, yang selalu memberi dorongan dan bantuan, baik spiritua maupun material, sehingga skripsi ini bisa terselesaikan.
8. Teman-teman matematika angkatan 2005, yang selalu memberikan dorongan, inspirasi dan selalu menemani dalam suka dan duka.
9. Tidak ketinggalan pula semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu yang telah membantu dalam penyelesaian skripsi ini.

Semoga skripsi ini dapat menjadi informasi yang bermanfaat bagi semua pihak.

Wassalamu'alaikum Wr.Wb

Malang, 20 Januari 2010

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PENGAJUAN	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	
HALAMAN MOTTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR	i
DAFTAR ISI	iii
ABSTRAK	v
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	4
1.3 Tujuan Penelitian	4
1.4 Manfaat Penelitian	4
1.5 Metode Penelitian	5
1.6 Sistematika Penulisan	6
BAB II: KAJIAN TEORI	8
1.1 Himpunan	8
1.2 Relasi	12
1.3 Urutan Parsial	18
1.4 Latis	20
1.5 Sublatis	25
1.6 Homomorphisme	25
1.7 Kajian Agama	27

BAB III: PEMBAHASAN	30
10. Latis Modular.....	30
11. Sifat-sifat Latis Modular.....	35
12. Kajian Latis Dalam Islam	46
BAB IV: PENUTUP.....	51
1. Kesimpulan	52
2. Saran.....	53

DAFTAR PUSTAKA



ABSTRAK

Septaria, Ifa. 2009. **Latis Modular Dan Sifat-sifatnya**. Skripsi, Program S-I Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing I: Evawati Alisah, M.Pd.
Pembimbing II: Munirul Abidin, M.Ag

Kata Kunci: Latis, Latis Modular.

Pada struktur aljabar dibahas mengenai dua himpunan tak kosong dengan dua operasi biner yang disebut dengan latis. Selanjutnya dari latis sendiri dapat dikembangkan menjadi beberapa sub pembahasan, seperti latis istimewa atau lebih dikenal latis modular, semi modular, latis distributif dan lain-lain. Akan tetapi dalam perkembangannya belum banyak peneliti yang mengkaji lebih jauh tentang latis khususnya latis modular dan sebelum mengkaji latis yang lebih luas yaitu latis semi modular dan pada akhirnya kelas yang lebih sempit adalah latis distributif maka terlebih dahulu dikaji latis modular. Berdasarkan latar belakang tersebut penelitian dilakukan dengan tujuan untuk mengkaji dan menganalisis tentang latis modular dan sifat-sifatnya.

Penelitian ini dilakukan dengan menggunakan metode kajian kepustakaan atau studi literatur. Data yang di gunakan dalam penelitian ini adalah definisi dan teorema-teorema latis, sublatis atau latis-bagian serta homomorphism. Pembahasan berisi tentang definisi latis modular, contoh latis modular, dan sifat-sifat latis modular.

Berdasarkan pembahasan dapat diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

a. Definisi latis modular:

Misal L latis, jika pada L berlaku:

$$a \geq b \Rightarrow a(b+c) = ab + ac = b + ac$$

$\forall a, b, c \in L$, maka L disebut latis modular

b. Sifat-sifat latis modular meliputi

i. Misal $a, b, c \in L$. Jika $a \geq b$ dan $a \geq c$, maka $a \geq b+c$ dan $a(b+c) = b+c = b+ac$

ii. Misal L latis modular, jika $a = b$, maka $a(b+c) = ab + ac = b + ac = a$

iii. Suatu sublatis dari latis modular adalah modular

iv. Suatu latis non-modular L harus memuat sublatis yang isomorphik dengan latis "pentagonal".

v. Suatu latis adalah latis modular jika dan hanya jika latis itu tidak memuat sublatis yang isomorphik dengan latis "pentagonal".

vi. Suatu latis adalah latis modular jika dan hanya jika untuk unsur-unsur a, b, c ketiga relasi $a \geq b, ac = bc, a+c = b+c$ bersama mengakibatkan $a = b$

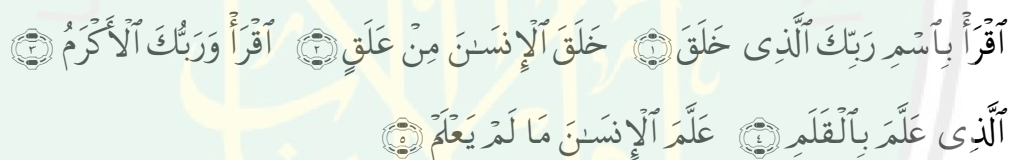
vii. Setiap bayangan homomorphik H dari latis modular L adalah modular.

BAB I

PENDAHULUAN

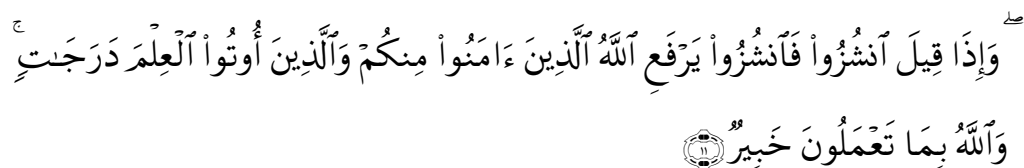
1.8 Latar Belakang

Dalam Al-Qur'an umat Islam dianjurkan untuk bersungguh-sungguh pada pencarian ilmu pengetahuan. Hal ini karena dunia sekarang dan masa depan, adalah dunia yang dikuasai ilmu pengetahuan dan teknologi. Siapapun yang menguasai keduanya, secara lahiriah akan menguasai dunia. Bahkan wahyu pertama Al-Qur'an yang diturunkan kepada Nabi Muhammad SAW adalah perintah menuntut ilmu pengetahuan dan menekankan pentingnya arti belajar dalam kehidupan umat manusia, yaitu surat Al Alaq: 1-5 sebagai berikut:



Artinya: 1. Bacalah dengan (menyebut) nama Tuhanmu yang Menciptakan, 2. Dia Telah menciptakan manusia dari segumpal darah. 3. Bacalah, dan Tuhanmulah yang Maha pemurah, 4. Yang mengajar (manusia) dengan perantaran kalam 5. Dia mengajar kepada manusia apa yang tidak diketahuinya.

Dari ayat tersebut diawali dengan "iqra" yang berarti "bacalah". Istilah ini berarti membaca dengan mendalam, menyelidiki dan memahami alam yang diciptakan oleh Tuhan. Allah SWT juga berfirman dalam surat Al Mujaadilah ayat 11:



Artinya: Niscaya Allah akan meninggikan orang-orang yang beriman di antaramu dan orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat. dan Allah Maha mengetahui apa yang kamu kerjakan” (Q.S. Al-Mujaadalah: 11).

Ilmu yang dimaksud ayat di atas bukan saja ilmu agama, tetapi ilmu apapun yang bermanfaat. Sebagai contoh adalah ilmu pengetahuan bidang sains yang sangat berperan dan merupakan alat (*tools*) bagi disiplin ilmu bidang sains lainnya yakni matematika. Aljabar merupakan salah satu cabang dari ilmu matematika. Sedangkan cabang dari ilmu aljabar itu sendiri antara lain aljabar linier dan aljabar abstrak. Struktur aljabar merupakan salah satu materi dalam aljabar abstrak. Selain pemetaan, materi yang dibahas pada struktur aljabar pada dasarnya tentang himpunan dan operasinya. Sehingga dalam mempelajari materi ini selalu identik dengan sebuah himpunan yang tidak kosong yang mempunyai elemen-elemen yang dapat dikombinasikan dengan penjumlahan, perkalian, ataupun keduanya dan juga oleh operasi biner yang lainnya. Hal tersebut berarti pembahasan-pembahasannya melibatkan objek-objek abstrak yang dinyatakan dalam simbol-simbol.

Kajian mengenai himpunan sudah ada dalam Al-Qura'n misalnya, kehidupan manusia yang terdiri dari berbagai macam golongan. Golongan merupakan bagian dari himpunan karena himpunan sendiri merupakan kumpulan objek-objek yang terdefinisi. Dalam Al-Qur'an surat al-fatihah ayat 7 disebutkan:

صِرَاطَ الَّذِينَ أَنْعَمْتَ عَلَيْهِمْ غَيْرِ الْمَغْضُوبِ عَلَيْهِمْ وَلَا الضَّالِّينَ ﴿٧﴾

Artinya: (yaitu) jalan orang-orang yang telah Engkau beri nikmat kepada mereka; bukan (jalan) mereka yang dimurkai dan bukan (pula jalan) mereka yang sesat. (QS:Al-fatihah.ayat 7)

Dalam ayat 7 surat al-fatihah dijelaskan manusia terbagi menjadi tiga kelompok yaitu (1) kelompok yang mendapatkan nikmat dari Allah SWT, (2) kelompok yang dimurkai, dan (3) kelompok yang sesat. (Abdusysyakir, 2006:47).

Struktur aljabar dengan satu operasi biner yang memenuhi sifat-sifat tertentu disebut dengan grup. Sedangkan struktur aljabar dengan dua operasi biner yang memenuhi sifat tertentu disebut ring. Dan dalam perkembangannya dua operasi biner yang memenuhi sifat tertentu disebut juga latiss, akan tetapi berbeda sifat-sifatnya dengan ring. Latis atau Teori latis dapat dipandang dengan beberapa cara yang berbeda, dalam struktur aljabar atau teori himpunan. Selanjutnya dari latis sendiri dapat dikembangkan menjadi beberapa sub pembahasan diantaranya latis istimewa atau lebih dikenal latis modular, semi modular, latis distributif dan lain-lain. Akan tetapi dalam perkembangannya belum banyak peneliti yang mengkaji lebih jauh tentang latis khususnya latis modular dan sebelum mengkaji latis yang lebih luas yaitu latis semi modular dan pada akhirnya kelas yang lebih sempit adalah latis distributif maka terlebih dahulu dikaji latis modular.

Berdasarkan permasalahan di atas, penulis ingin mengetahui lebih jauh dan menganalisis tentang latis modular dan sifat-sifatnya. Merujuk pada jurnal-jurnal ilmiah dan penelitian yang ada belum bisa menjelaskan tentang

kajian modular latis lebih jelas. Oleh karena itu, penulis tertarik untuk membahasnya. Sehingga skripsi ini oleh penulis diberi judul “**KAJIAN LATIS MODULAR DAN SIFAT-SIFATNYA**”.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan diatas, maka rumusan masalahnya adalah bagaimana deskripsi latis modular dan sifat-sifatnya?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah diatas, maka tujuan penelitian ini adalah mendiskripsikan dan menganalisis deskripsi latis modular beserta pembuktian sifatnya.

1.4 Manfaat Penelitian

Dari penulisan skripsi ini penulis berharap agar pembahasan ini bermanfaat bagi berbagi kalangan, antara lain:

a. Manfaat bagi Penulis

Untuk mempelajari dan lebih memperdalam pemahaman serta mengembangkan wawasan disiplin ilmu khususnya mengenai latis modular dan sifat-sifatnya.

b. Manfaat bagi mahasiswa

Sebagai tambahan wawasan dan informasi untuk kajian lebih lanjut mengenai aljabar abstrak, terutama latis modular dan sifat-sifatnya sebagai acuan dalam pengembangan penulisan karya tulis ilmiah

c. Manfaat bagi lembaga

13. Sebagai bahan informasi tentang pembelajaran matakuliah aljabar abstrak.
14. Sebagai tambahan bahan kepustakaan.

1.5 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode penelitian kepustakaan (library research) atau kajian pustaka, yakni melakukan penelitian untuk memperoleh data-data dan informasi-informasi serta objek-objek yang digunakan dalam pembahasan masalah tersebut. Studi kepustakaan merupakan penampilan argumentasi penalaran keilmuan untuk memaparkan hasil olah pikir mengenai suatu permasalahan atau topik kajian kepustakaan yang dibahas dalam penelitian ini.

Adapun langkah-langkah yang akan digunakan oleh peneliti ini adalah sebagai berikut:

3. Mencari literatur utama yang di jadikan acuan dalam pembahasan ini. Literatur yang dimaksud adalah buku tentang teori latis karangan Sukardjono dan rujukan didalamnya.
4. Mengumpulkan berbagai literatur pendukung, baik yang bersumber dari buku, jurnal, artikel, diktat kuliah, internet, dan lainnya yang berhubungan dengan permasalahan yang akan dibahas dalam penelitian ini.
5. Memahami dan mempelajari konsep himpunan, relasi, urutan parsial, latis, sublati, homomorfisma.

6. Menerapkan konsep latis, sublatis atau latis-bagian dan homomorfisma untuk menjelaskan sifat-sifat yang terkait dengan latis modular dengan langkah-langkah sebagai berikut:

- a. Menentukan definisi yang berkaitan dengan latis modular, kemudian memberikan contoh dari definisi tersebut.
- b. Menentukan sifat-sifat yang berkaitan dengan latis modular kemudian membuktikan sifat-sifat tersebut.

1.6 Sistematika Penulisan

Agar dalam membaca hasil penelitian ini pembaca mudah memahami dan tidak menemukan kesulitan, maka dalam penyajiannya ditulis berdasarkan suatu sistematika yang secara garis besar dibagi menjadi empat bab, yaitu:

BAB I PENDAHULUAN

Pendahuluan meliputi: latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Bagian ini terdiri atas konsep-konsep (teori-teori) yang mendukung bagian pembahasan. Konsep-konsep tersebut antara lain membahas tentang pengertian himpunan, relasi, urutan parsial, latis, sublatis, homomorfisma, dan kajian agama.

BAB III PEMBAHASAN

Pembahasan berisi tentang definisi latis modular, contoh latis modular, dan sifat-sifat latis modular.

BAB IV PENUTUP

Pada bab ini akan disajikan tentang kesimpulan dan saran.



BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Himpunan

2.1.1 Himpunan dan operasi himpunan

Himpunan objek-objek yang terdefinsi dengan jelas (*well defined*). Objek-objek yang termasuk dalam suatu disebut unsur-unsur atau anggota himpunan. himpunan biasanya disimbulkan dengan huruf capital, seperti A , B , C , dan D , sedangkan anggota himpunan disimbolkan dengan huruf kecil, seperti a , b , c , dan d .

Jika a adalah unsur pada himpunan A , maka ditulis $a \in A$. Jadi, perlu dipahami bahwa tulisan $a \in A$ mempunyai arti bahwa a anggota himpunan A , a unsur himpunan A , A memuat a , atau a termat di A . Jika a buka unsur pada himpunan A , maka dituis $a \notin A$. Himpunan yang tidak mempunyai anggota disebut himpunan kosong dan dinotasikan dengan $\emptyset$.

Himpunan dapat dinyatakan dalam dua bentuk penulisan, yaitu bentuk tabular (*tabular form*) dan bentuk perincian (*set-builder form*). Bentuk tabular adalah penulisan himpunan dengan mendaftar semua anggotanyadi dalam tanda kurung kurawal $\{ \}$. Sebagai contoh, $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ menyatakan bahwa himpunan A memuat bilangan 2, 4, 6, 8, dan 10. bentuk pencirian adalah penulisan himpunan dengan menyebutkan sifat atau syarat keanggotan anggota himpunan tersebut, misalnya

$$A = \{x | 1 < x < 10\} .$$

Secara lebih umum, himpunan dapat didefinisikan sebagai kumpulan semua x yang memenuhi syarat-syarat yang ditentukan. Notasi

$$A = \{x | P(x)\}$$

Medefinisikan A sebagai himpunan semua x yang memenuhi syarat $P(x)$. Notasi tersebut dibaca “ A adalah himpunan x sedemikian hingga $P(x)$ ”. Sebagai contoh

$$A = \{x | 1 < x < 10\}$$

Dibaca A adalah himpunan x sedemikian hingga $1 < x < 10$. Notasi

$$A = \{x \in B | P(x)\}$$

Juga digunakan untuk menyatakan bahwa A memuat semua unsur x di B yang memenuhi syarat $P(x)$. (Abdussakir,2006:1)

Definisi 1

Misalkan A dan B himpunan. A dikatakan himpunan bagian (subset) dari B , ditulis $A \subseteq B$, jika setiap unsur di A merupakan unsur di B .

Secara simbolik,

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

Tulisan $A \subseteq B$ dapat di maknai bahwa A subset B , A termuat di B , atau B memuat A . jika A subset B dan ada unsur di B yang tidak termuat di A , maka A disebut **subset sejati** dari B , dan ditulis $A \subset B$.(Abdussakir,2006:2)

Definisi 2

Misalkan A dan B himpunan. A dikatakan sama dengan B , ditulis $A = B$, jika A subset B dan B subset A .

Secara simbolik,

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \vee B \subseteq A \text{ (Abdussakir,2006:2)}$$

Definisi 3

Misalkan A dan B himpunan. Gabungan A dan B , ditulis $A \cup B$, adalah himpunan yang memuat semua unsur di A atau B .

Secara simbolik,

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}.$$

Kata “atau” bermakna bahwa x termuat di A saja, B saja, atau di A sekaligus B .
(Abdussakir,2006:3)

Definisi 4

Misalkan A dan B himpunan. Irisan A dan B , ditulis $A \cap B$, adalah himpunan yang memuat semua unsur di A dan B .

Secara simbolik,

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}.$$

Kata “dan” bermakna bahwa x termuat di A sekaligus di B . jika $A \cap B = \emptyset$, maka A dan B disebut himpunan **saling lepas**(disjoin). (Abdussakir,2006:3)

Definisi 5

Misalkan A dan B himpunan. Komplemem relatif dari A di B , ditulis $B \setminus A$, adalah himpunan yang memuat semua unsur di B tetapi tidak termuat di A .
(Abdussakir,2006:3)

Secara simbolik,

$$B \setminus A = \{x \in B | x \notin A\}.$$

Jika A adalah subset dari himpunan tertentu B , maka $B \setminus A$ biasanya disebut **komplemen** dari B dan di tulis A^c . Akan diperoleh bahwa

$$(A^c)^c = A \text{ dan } B = A \cup A^c.$$

Berikut ini disajikan beberapa teorema dasar berkenaan dengan operasi pada himpunan.

Teorema 1

Misalkan A , B , dan C adalah himpunan. Maka,

$$15. A \cup B = B \cup A$$

$$16. A \cap B = B \cap A. (\text{Abdussakir}, 2006:3)$$

Teorema 2

(Hukum De Morgen) Misalkan A dan B adalah subset himpunan S . Maka

$$7. (A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$8. (A \cap B)^c = A^c \cup B^c. (\text{Abdussakir}, 2006:4)$$

Definisi 6

Misalkan A dan B himpunan. Perkalian cartesius dari A dan B , ditulis $A \times B$, adalah hmpunan semua pasangan berurutan (a, b) , dengan $a \in A$ dan $b \in B$.

Secara simbolik,

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}. (\text{Abdussakir}, 2006:5)$$

Contoh 1

Jika $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{1, 2, 3\}$, maka

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c), (3, a), (3, b), (3, c)\}$$

Perkalian cartesius dari R dan R di tulis dengan R^2 dan sering digambarkan sebagai bidang cartesius.

2.2 Relasi

2.2.1 Relasi pada Himpunan

Misalkan A dan B adalah himpunan-himpunan. Suatu relasi (biner) R dari A ke B adalah himpunan bagian dari $A \times B$. Jika $(a, b) \in A \times B$ dan a berelasi dengan b , dituliskan aRb . Jika a tidak berelasi dengan b dituliskan $a \not R b$. (Siang, 2002:294)

Contoh 2

Misalkan $A = \{1, 2\}$ dan $B = \{1, 2, 3\}$, didefinisikan relasi R dari A ke B sebagai berikut:

$x \in A$ berelasi dengan $y \in B$ bila dan hanya $x - y$ genap.

2 Apakah $1R3$; $2R3$; $2R2$; ?

3 Tulislah anggota-anggota R .

Penyelesaian:

a. $1R3$ karena $1 - 3 = -2$ adalah bilangan genap

$2R3$ karena $2 - 3 = -1$ bukan bilangan genap

$2R2$ karena $2 - 2 = 0$ adalah bilangan genap

b. $A \times B = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3)\}$

Menurut definisi R , $(x, y) \in R$ bila $x - y$ genap, maka:

$(1,1) \in R$ karena $1 - 1 = 0$ adalah bilangan genap

$(1,2) \notin R$ karena $1 - 2 = -1$ bukan bilangan genap

$(1,3) \in R$ karena $1 - 3 = -2$ adalah bilangan genap

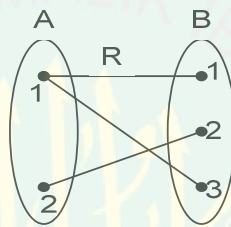
$(2,1) \notin R$ karena $2 - 1 = 1$ bukan bilangan genap

$(2,2) \in R$ karena $2 - 2 = 0$ adalah bilangan genap

$(2,3) \notin R$ karena $2 - 3 = -1$ bukan bilangan genap

Jadi $R = \{(1,1), (1,3), (2,2)\}$

Tampak bahwa $R \subseteq A \times B$



Gambar 1 Relasi Himpunan

2.2.2 Operasi-Operasi pada Relasi

Karena pada hakekatnya suatu relasi merupakan himpunan, maka beberapa relasi juga dapat dioperasikan dengan operasi-operasi himpunan. Operasi himpunan yang sering dipakai pada relasi adalah gabungan (*Union*) dan irisan (*Intersection*).

Teorema 3

Misalkan R dan S adalah 2 relasi dari himpunan A ke himpunan B . Maka

$R \cup S$ adalah himpunan semua pasangan berurutan $(x, y) \in A \times B$ sedemikian hingga $(x, y) \in R$ atau $(x, y) \in S$.

Secara simbolik,

$$R \cup S = \{(x, y) | (x, y) \in R \text{ atau } (x, y) \in S\}.$$

(Siang, 2002:297)

Teorema 4

Misalkan R dan S adalah 2 relasi dari himpunan A ke himpunan B . Maka $R \cap S$ adalah himpunan semua pasangan berurutan $(x, y) \in A \times B$ sedemikian hingga $(x, y) \in R$ dan $(x, y) \in S$.

Secara simbolik,

$$R \cap S = \{(x, y) \in R \text{ dan } (x, y) \in S\}.$$

(Siang, 2002:297)

Contoh 3

Misal $A = \{-1, 0, 1\}$ dan $B = \{0, 1\}$. Relasi R dan S dari himpunan A ke himpunan B adalah sebagai berikut :

$$R = \{(-1, 0), (-1, 1), (0, 1)\}$$

$$S = \{(0, 0), (1, 1), (-1, 1)\}$$

Carilah $R \cup S$ dan $R \cap S$

Penyelesaian:

$$R \cup S = \{(-1, 0), (-1, 1), (0, 1), (0, 0), (1, 1)\}$$

$$R \cap S = \{(-1, 1)\}$$

Contoh 4

Misal A adalah beberapa mahasiswa ilmu komputer.

$$A = \{a, b, c, d\}$$

B adalah himpunan beberapa mata kuliah yang disajikan.

$B = \{ \text{struktur data, matematika, statistik, pancasila, riset operasi, organisasi komputer} \}$, yang disingkat sebagai $B = \{ \text{SD, MT, ST, PS, RO, OK} \}$

Relasi R_1 dari A ke B menyatakan mata kuliah yang diambil mahasiswa

$(x, y) \in R_1 \Leftrightarrow x$ mengambil mata kuliah y

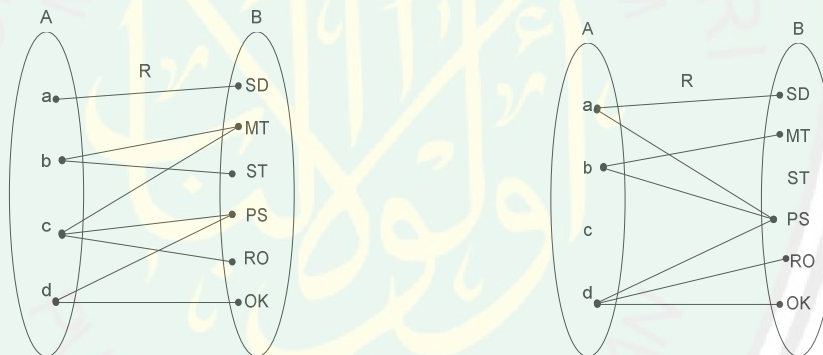
$R_1 = \{ (a, \text{SD}), (b, \text{MT}), (b, \text{ST}), (c, \text{MT}), (c, \text{RO}), (c, \text{OK}), (d, \text{PS}), (d, \text{OK}) \}$

Relasi R_2 dari A ke B menyatakan mata kuliah yang disukai mahasiswa.

$(x, y) \in R_2 \Leftrightarrow x$ menyukai mata kuliah y

$R_2 = \{ (a, \text{SD}), (a, \text{PS}), (b, \text{MT}), (b, \text{RO}), (d, \text{PS}), (d, \text{RO}), (d, \text{OK}) \}$.

Carilah $R_1 \cap R_2$ dan terangkan apa artinya?



Gambar 2 Relasi $R_1 \cap R_2$

$R_1 \cap R_2 = \{ (a, \text{SD}), (b, \text{MT}), (d, \text{PS}), (d, \text{OK}) \}$

$R_1 \cap R_2$ menyatakan himpunan mahasiswa-mahasiswa yang mengambil mata kuliah yang disukainya.

$(x, y) \in R_1 \cap R_2 \Leftrightarrow x$ mengambil dan sekaligus menyukai mata kuliah y

2.2.3 Jenis-Jenis Relasi

Misalkan R adalah suatu relasi pada himpunan A . R disebut relasi yang:

2. Refleksif $\Leftrightarrow (\forall x \in A) xRx$
3. Simetris $\Leftrightarrow (\forall x, y \in A) xRy \Rightarrow yRx$
4. Transitif $\Leftrightarrow (\forall x, y, z \in A) (xRy \text{ dan } yRz) \Rightarrow xRz$
5. Irrefleksif $\Leftrightarrow (\forall x \in A) x \not R x$
6. Asimetris $\Leftrightarrow (\forall x, y \in A) xRy \Rightarrow y \not R x$
7. Antisimetris $\Leftrightarrow (\forall x, y \in A) (xRy \text{ dan } yRx) \Rightarrow x = y$

Contoh 5

Misal $A = \{0,1,2,3\}$

Relasi R, S , dan T didefinisikan pada himpunan A sebagai berikut:

$$R = \{(0,0), (0,1), (0,3), (1,0), (1,1), (2,2), (3,0), (3,3)\}$$

$$S = \{(0,0), (0,2), (0,3), (2,3)\}$$

$$T = \{(0,1), (2,3)\}$$

Manakah diantara relasi-relasi tersebut yang bersifat refleksif, simetris dan transitif?

Penyelesaian:

Relasi S :

- a. Tidak refleksif $(1,1) \notin S$
- b. Tidak simetris karena $(0,2) \in S$ tapi $(2,0) \notin S$
- c. Transitif karena $(0,0) \in S$ dan $(0,2) \in S \Rightarrow (0,2) \in S$

$$(0,0) \in S \text{ dan } (0,3) \in S \Rightarrow (0,3) \in S$$

$$(0,2) \in S \text{ dan } (0,3) \in S \Rightarrow (0,3) \in S$$

Relasi T :

- 2 Tidak reflektif karena $(0,0) \notin T$
- 3 Tidak simentris karena $(0,1) \in T$ tapi $(1,0) \notin T$
- 4 Transitif karena hipotesis selalu salah, yaitu tidak ada anggota T yang berbentuk (x,y) dan (y,z) . Karena hipotesis salah, maka keseluruhan implikasi menjadi benar.

Jadi T transitif

2.2.4 Relasi Ekuivalen

Definisi 8

Diberikan himpunan S dengan unsur-unsur a,b,c , didefinisikan relasi ekuivalen E atas himpunan S sebagai sebarang relasi ekuivalen atas S yang memenuhi:

- (i) Refleksif: jika aEa untuk setiap $a \in S$
- (ii) Simetrik: jika aEb , maka bEa
- (iii) Transitif: jika aEb dan bEc , maka aEc . (Sukardjono, 2002:12)

Contoh 6

Misalkan S himpunan bilangan asli, dengan aEb jika dan hanya jika $a+b$ genap. Syarat (i) dan (ii) jelas terpenuhi; sedangkan (iii), jika $a+b$ genap dan $b+c$ genap, maka $a+(b+b)+c$ dan $a+c$ adalah genap. Dalam ekuivalen ini himpuna bilangan ganjil adalah ekuivalen, dan demikian pula himpunan semua bilangan genap.

2.3 Urutan Parsial

Definisi 9

Misalkan S adalah himpunan dengan unsur-unsur a, b, c , dengan relasi kesamaan $x = y$ telah didefinisikan. Maka relasi terurut parsial O atas S adalah sebarang relasi diadik atas S yang memenuhi sifat-sifat:

- i. Refleksif: untuk setiap a di dalam S , aOa ;
- ii. Anti-simetris: jika aOb dan bOa , maka $a = b$;
- iii. Transitif: jika aOb dan bOc , maka aOc . (Sukardjono, 2002:27)

Contoh 7

Misalkan relasi " $|$ " adalah relasi "keterbagian" pada himpunan bilangan bulat positif A .

($a|b$ berarti a adalah faktor dari b atau b adalah kelipatan dari a).

$$(\forall a, b \in A) aRb \Leftrightarrow a|b$$

Buktikan bahwa " $|$ " adalah relasi urutan parsial?

Penyelesaian:

Akan dibuktikan bahwa " $|$ " adalah relasi yang refleksif, antisimetris, dan transitif.

- d. Refleksif

Ambil sembarang $a \in A$. Jelas bahwa $a = 1 \cdot a$ atau $a|a$. Jadi " $|$ " refleksif.

- e. Antisimetris

Ambil sembarang $a, b \in A$ yang memenuhi $a|b$ atau $b|a$.

$a|b$ berarti $b = k_1 a$ untuk suatu bilangan bulat positif k_1

$b|a$ berarti $a = k_2 b$ untuk suatu bilangan bulat positif k_2

Maka $b = k_1(k_2 b)$

$$= (k_1 k_2) b$$

Jika kedua ruas dibagi dengan b maka diperoleh $k_1 k_2 = 1$.

k_1 dan k_2 adalah bilangan-bilangan bulat positif, maka agar relasi

$k_1 k_2 = 1$ dipenuhi, satu-satunya kemungkinan adalah $k_1 = k_2 = 1$.

Diperoleh $b = k_1 a = 1a = a$.

Dari $a|b$ dan $b|a$ diperoleh $a = b$, maka " $|$ " adalah antisimetris.

f. Transitif

Ambil sebarang $a, b, c \in A$ yang memenuhi $a|b$ dan $b|c$.

$a|b$ berarti $b = k_1 a$ untuk suatu bilangan bulat positif k_1

$b|c$ berarti $c = k_2 b$ untuk suatu bilangan bulat positif k_2

Maka $c = k_1(k_2 a)$

$$= (k_1 k_2) a.$$

Ambil $k = k_2 k_1$. Karena k_1 dan k_2 adalah bilangan bulat positif maka

k juga bilangan bulat positif. Jadi $c = ka$ untuk suatu bilangan bulat

positif k . Ini berarti $a|c$.

Terbukti bahwa relasi " $|$ " bersifat transitif.

Karena " $|$ " adalah relasi yang refleksif, antisimetris dan transitif maka " $|$ "

adalah relasi urutan parsial

2.4 Latis

Definisi 10

Suatu latis L adalah suatu aljabar dengan dua operasi biner (dilambangkan dengan perkalian $(.)$ dan penjumlahan $(+)$) yang memenuhi postulat-postulat berikut:

untuk a, b, c di L ,

- i. Tertutup : $ab \in L$
- ii. Tertutup: $a + b \in L$
- iii. Komutatif: $ab = ba$
- iv. Komutatif: $a + b = b + a$
- v. Asosiatif: $(ab)c = a(bc)$
- vi. Asosiatif: $(a + b) + c = a + (b + c)$
- vii. Absropsi: $a(a + b) = a$
- viii Absropsi : $a + ab = a$ (Sukardjono, 2002:9).

Teorema 5

Jika $ab = a$, maka $a + b = b$ (Sukardjono, 2002:40).

Bukti:

$a + b = ab + b$	Keterangan. a
$= b + ab$	postulat iV
$= b + ba$	postulat iii
$= b$	postulat Viii

Jadi Jika $ab = a$, maka $a + b = b$

Teorema 6

$aa = a$ (Sukardjono, 2002:9).

Bukti:

$$aa = a(a + b) \quad \text{postulat Viii}$$

$$= a + (ab) \quad \text{postulat Vii}$$

$$= a$$

Teorema 7

$a + a = a$ (Sukardjono, 2002:9).

Bukti:

$$a + a = a + (aa) \quad \text{teorema 1}$$

$$= a \quad \text{postulat Viii}$$

Teorema 8

Jika $a + b = b$, maka $ab = a$ (Sukardjono, 2002:40).

Bukti:

$$ab = a(a + b) \quad \text{keterangan } b$$

$$= a \quad \text{postulat Vii}$$

Jika $ab = a$, maka $a + b = b$

Definisi 11

Definisikan suatu relasi R di antara dua unsure dalam suatu latris dengan

(i) aRb jika dan hanya jika $ab = a$

Dipandang dari teorema 5 dan 8 ha lini ekuivalen dengan

(ii) aRb jika dan hanya jika $a + b = b$ (Sukardjono, 2002:40).

Teorema 9

aRa (Sukardjono, 2002:40).

Bukti:

Cukup dibuktikan $aa = a$

Teorema 10

Jika aRb dan bRa , maka $a = b$ (Sukardjono, 2002:9).

Bukti:

$$\begin{aligned} a &= ab && \text{definisi 10(i)} \\ &= ba && \text{postulat iii} \\ &= b && \text{definisi 10(i)} \end{aligned}$$

Teorema 11

Jika aRb dan bRc , maka aRc (Sukardjono, 2002:40).

Bukti:

$$\begin{aligned} ac &= (ab)c && \text{keterangan. pertama dan definisi. 2(i)} \\ &= a(bc) && \text{postulat iV} \\ &= ab && \text{keterangan Kedua dan definisi 10(i)} \\ &= a && \text{keterangan Pertama dan definisi 10(i).} \end{aligned}$$

Relasi R dengan demikian menurut definisi, yang refleksif (teorema. 9), anti-simetrik (teorema 10) dan transitif (teorema 11), sehigga merupakan relasi terurut parsial: dapat ditulis $a \leq b$ untuk aRb .

Teorema 12

Suatu latris adalah poset, dengan sifat

$a \leq b$ dimaksud $ab = a$ dan $a + b = b$ (Sukardjono, 2002:41).

Teorema 13

$ab \leq a$ (Sukardjono, 2002:42).

Bukti:

$$ab + a = a + ab$$

menurut iv

$$= a$$

menurut viii

Maka $ab \leq a$

menurut definisi. 10(ii)

Teorema 14

$a \leq ab$ (Sukardjono, 2002:42).

Bukti:

$$a(a + b) = a$$

menurut vii

Jadi $a \leq a + b$

menurut definisi 10(i)

Teorema 15

$ba \leq b$ (Sukardjono, 2002:42).

Bukti:

$$ba \leq b$$

menurut Teorema 14

Tetapi $ba = ba$

menurut iii

Jadi $ab \leq b$

Akibatnya ialah bahwa ab adalah suatu batas bawah dari pasangan a, b

Teorema 16

$b \leq a + b$ (Sukardjono, 2002:42)

Bukti:

$$b \leq a + b$$

menurut Teorema 15

Tetapi $b + a = a + b$

menurut iv

Akibatnya ialah bahwa $a + b$ adalah batas atas dari pasangan a, b

Teorema 17

Jika $c \leq a$ dan $c \leq b$, maka $c \leq ab$ (Sukardjono, 2002:42).

Bukti

$$\begin{aligned}
 c &= ca && \text{menurut ketentuan pertama dan definisi. 10(i)} \\
 &= (cb)a && \text{menurut ketentuan kedua dan definisi 10(ii)} \\
 &= c(ba) && \text{menurut v} \\
 &= c(ab) && \text{menurut iii}
 \end{aligned}$$

Dengan demikian $c \leq ab$ menurut definisi 10(i)

Jadi ab adalah batas bawah terbesar dari pasangan a, b

Teorema 18

Jika $a \leq d$ dan $b \leq d$, maka $a + b \leq d$ (Sukardjono, 2002:42).

Bukti

$$\begin{aligned}
 (a + b) + d &= a + (b + d) && \text{menurut vi} \\
 &= a + d && \text{menurut ketentuan kedua dan definisi 10(ii)} \\
 &= d && \text{menurut ketentuan pertama}
 \end{aligned}$$

Dengan demikian $a + b \leq d$ menurut definisi 10(i)

Jadi $a + b$ adalah batas atas terkecil dari pasangan a, b

Teorema 19

Suatu latas adalah poset, dengan $a \leq b$ berarti $ab = a$ dan $a + b = b$, memiliki batas atas terkecil yang berada dalam himpunan itu

Bukti:

Teorema 8 mencakup bagian pertama. Jika dipandang bagian kedua, menurut def 2C-1-i,ii setiap pasangan unsur a, b memiliki hasil jumlah ab yang tunggal dan berada di dalam himpunannya, dan menurut teorema 9-15 inilah batas yang diperlukan.

2.5 Sublatis atau Latis-Bagian

Definisi 10

Himpunan bagian tak kosong S dari unsur-unsur suatu latis L yang memuat irisan dan gabungan sebarang dua unsur dari L disebut sublatis dari L .

Jelaslah bahwa L adalah sublatis dari dirinya sendiri; jika S adalah himpunan bagian sejati dari L , S disebut sublatis sejati dari L . (Sukardjono, 2002:92)

2.6 Homomorphisme

Definisi 11

Misalkan L, M adalah latis dan θ adalah pemetaan dari L ke M . Jika untuk semua $a, b \in L$ di M berlaku:

$$\theta(ab) = \theta(a)\theta(b)$$

θ dikatakan mempertahankan irisan dan disebut suatu homomorfisma-irisan. Jika untuk semua $a, b \in L$ di M berlaku:

$$\theta(a + b) = \theta(a) + \theta(b)$$

θ dikatakan mempertahankan gabungan dan disebut suatu homomorfisma-gabungan. Jika θ mempertahankan irisan maupun gabungan θ disebut suatu homomorfisma dari L ke M . Himpunan bagian H dari M yang muncul

sebagai konsekuen dalam pemetaan θ disebut bayangan isomorphik dari L .
 Jika M sama dengan L , homomorphisma itu disebut endomorphisma.
 (Sukardjono, 2002:102)

Teorema 20

Bayangan homomorphik H dari L terhadap θ adalah sublatris dari M

Bukti:

Misalkan $a', b' \in H$, dengan a anteseden di L dari a' , b dari b' , sehingga
 $\theta(a) = a', \theta(b) = b'$. Maka

$$a'b' = \theta(a)\theta(b) = \theta(ab)$$

Dan

$$a'+b' = \theta(a) + \theta(b) = \theta(a+b).$$

Konsekuen-konsekuen dari ab dan $a+b$ dan harus berada di H ; maka H
 memuat irisan dan gabungan setiap pasangan unsur dari suatu sublatris.
 (Sukardjono, 2002:104)

Definisi 12

Misalkan θ adalah suatu homomorphisma dari L onto M sedemikian rupa
 sehingga untuk setiap pasangan $a, b \in L$

$$\theta(a) = \theta(b) \in M \Rightarrow a = b \in L$$

Yaitu, suatu homomorphisma dimana setiap anggota M tepat hanya
 mempunyai satu anteseden di L ; maka θ disebut suatu isomorphisma. Jika
 M sama dengan L , θ disebut automorphisma. (Sukardjono, 2002:104)

2.7 Kajian Agama

Secara umum beberapa konsep dari disiplin ilmu telah dijelaskan dalam Al Qur'an, salah satunya adalah matematika. Konsep dari disiplin ilmu matematika serta berbagai cabangnya yang ada dalam Al Qur'an di antaranya adalah konsep himpunan meskipun tidak eksplisit, sebagaimana dalam firman Allah SWT dalam Al-Qur'an surat Al-Faathir ayat 1.

لَحْمَدُ لِلّٰهِ فَاطِرِ السَّمٰوٰتِ وَالْاَرْضِ جَاعِلِ الْمَلٰٓئِكَةِ رُسُلًا اُولٰٓئِكَ اُجْنِحَتْ
مِثْنٰی وَثَلٰثَ وَرُبْعَ يَزِيْدُ فِى الْخَلْقِ مَا يَشَآءُ اِنَّ اللّٰهَ عَلٰى كُلِّ شَيْءٍ
فَدِيْرٌ ﴿١﴾

Artinya: Segala puji bagi Allah pencipta langit dan bumi, yang menjadikan malaikat-malaikat sebagai utusan-utusan (untuk mengurus berbagai macam urusan) yang mempunyai sayap, masing-masing (ada yang) dua, tiga dan empat. Allah menambahkan pada ciptaan-Nya apa yang dikehendaki-Nya. Sesungguhnya Allah Maha Kuasa atas segala sesuatu.

Ayat 1 surat Al-Fathir diatas menjelaskan sekelompok, segolongan atau sekumpulan makhluk yang disebut malaikat. Dalam kelompok malaikat tersebut terdapat kelompok malaikat yang mempunyai dua sayap, tiga sayap atau empat sayap. Bahkan sangat dimungkinkan terdapat kelompok malaikat yang mempunyai lebih dari empat sayap jika Allah SWT menghendaki (Abdusysyagir, 2007:108-109). Konsep Himpunan juga terdapat dalam QS. An-Nuur ayat 45:

وَاللّٰهُ خَلَقَ كُلَّ دَابَّةٍ مِّنْ مَّآءٍ فَمِنْهُمْ مَّنْ يَمْشٰى عَلٰى بَطْنِهٖۤ وَمِنْهُمْ مَّنْ
يَمْشٰى عَلٰى رِجْلَيْنِ وَمِنْهُمْ مَّنْ يَمْشٰى عَلٰى اَرْبَعٍ يَخْلُقُ اللّٰهُ مَا يَشَآءُ اِنَّ
اللّٰهَ عَلٰى كُلِّ شَيْءٍ قَدِيْرٌ ﴿٤٥﴾

Artinya: Dan Allah Telah menciptakan semua jenis hewan dari air, Maka sebagian dari hewan itu ada yang berjalan di atas perutnya dan sebagian berjalan dengan dua kaki sedang sebagian (yang lain) berjalan dengan empat kaki. Allah menciptakan apa yang dikehendaki-Nya, Sesungguhnya Allah Maha Kuasa atas segala sesuatu.

Dalam ayat 45 ini dijelaskan sekelompok, segolongan atau sekumpulan makhluk yang disebut hewan. Dalam kelompok hewan tersebut ada sekelompok yang berjala tanpa kaki, dengan dua kaki, empat atau bahkan lebih sesuai dengan yang dikehendaki Allah.

Berdasarkan dua ayat tersebut, yaitu QS Al-Fathir ayat 1 dan QS An-Nuur ayat 45 terdapat konsep matematika yang terkandung didalamnya yaitu kumpulan obyek-obyek yang mempunyai ciri-ciri yang sangat jelas. Inilah yang dalam matematika dinamakan himpunan.

Ketika umat Islam membaca Al-Qur'an maka dalam surat Al-Baqarah akan dijumpai tergolong pada tiga golongan, yaitu (1) golongan orang yang bertakwa (muttaqin), (2) golongan orang kafir (kafirin) dan (3) golongan orang munafik (munafiqin). Pada surat Al-Waqi'ah, pada hari kiamat manusia dibagi menjadi 3 kelompok. Jika surat tersebut kita kaitkan dengan konsep himpunan yang sederhana, dapat dikatakan bahwa golongan munafiqin merupakan irisan antara golongan muslimin dengan kafirin. Golongan munafiqin ini yang sering dikatakan kelompok abu-abu. (Abdusysyakir. 2007: 110)

إِنَّ فِي خَلْقِ السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضِ وَآخْتِلَافِ اللَّيْلِ وَالنَّهَارِ
لَآيَاتٍ لِّأُولِي الْأَلْبَابِ ﴿١٩٠﴾

الَّذِينَ يَذْكُرُونَ اللَّهَ قِيَمًا وَقُعُودًا وَعَلَىٰ جُنُوبِهِمْ وَيَتَفَكَّرُونَ فِي خَلْقِ
السَّمَوَاتِ وَالْأَرْضِ رَبَّنَا مَا خَلَقْتَ هَذَا بَطْلًا سُبْحَنَكَ فَقِنَا عَذَابَ
النَّارِ ﴿١٩١﴾

Artinya: Sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi, dan silih bergantinya malam dan siang terdapat tanda-tanda bagi orang-orang yang berakal, (yaitu) orang-orang yang mengingat Allah sambil berdiri atau duduk atau dalam keadan berbaring dan mereka memikirkan tentang penciptaan langit dan bumi (seraya berkata): "Ya Tuhan kami, tiadalah Engkau menciptakan ini dengan sia-sia, Maha Suci Engkau, maka peliharalah kami dari siksa neraka

Dalam surat Ali-Imran tersebut dijelaskan tentang konsep *Ulul Albab*. Seseorang yang sudah dalam tingkatan *ulul albab* akan selalu memikirkan semua yang diciptakan oleh Allah swt. Dalam keadaan bagaimanapun dan dimanapun. Ketika seseorang mempelajari tentang matematika, kemampuan intelektual semata tidak cukup, tetapi perlu didukung secara bersamaan dengan kemampuan emosional dan spiritual.

Seorang yang memahami matematika dengan konsep *Ulul Albab* akan selalu memikirkan setiap perbuatan yang mereka lakukan dengan teliti. Layaknya ilmu matematika yang disebut ilmu pasti, maka dia akan melakukan sesuatu dengan penuh kejujuran dan ketaatan.

BAB III

PEMBAHASAN

Dalam bab ini dibahas tentang latis modular beserta sifat-sifatnya.

3.1 Latis Modular

Definisi 3.1

Misal L latis, jika pada L berlaku:

$$a \geq b \Rightarrow a(b+c) = ab + ac = b + ac$$

$\forall a, b, c \in L$, maka L disebut latis modular (Sukardjono, 2002:118)

Contoh 1:

Misalkan latis L adalah poset, dengan unsur-unsur dari latis L adalah faktor-faktor positif dari bilang asli 18, yaitu

$$1, 2, 3, 6, 9, 18$$

Himpunan ini memuat faktor persekutuan terbesar (FPB) dan kelipatan persekutuan terkecil (KPK) dari setiap anggota dari himpunan itu, dengan demikian jika didefinisikan FPB dan a, b diartikan $(a, b) = ab$, dan KPK dan a, b diartikan $[a, b] = a + b$, buktikan bahwa faktor-faktor positif bilangan asli 18 adalah latis modular?

Jawab:

1. Perhatikan tabel cayley untuk (a, b) dan $[a, b]$ berikut:

	1	2	3	6	9	18
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	2	1	2

3	1	1	3	3	3	3
6	1	2	3	6	3	6
9	1	1	3	3	9	9
18	1	2	3	3	9	18

	1	2	3	6	9	18
1	1	2	3	16	9	18
2	2	2	6	6	18	18
3	3	6	3	6	9	18
6	6	6	6	6	18	18
9	9	18	9	18	18	18
18	18	18	18	18	18	18

Berdasarkan tabel cayley di atas terlihat bahwa latris L terbukti tertutup, komutatif dan assosiaif

2. Absorpsi : $a(a + b) = a$ dan $a + (ab) = a$

$$\text{Maka } [a, (a, b)] = [a, \frac{d}{a}] = a$$

$$\text{Dan } (a, [a, b]) = (a, am) = a(1, m) = a, 1 = a$$

Jadi atis L terbukti absorpsi.

3. Latis modular

$$\text{Jika } (a, b) = ab \text{ dan } [a, b] = a + b$$

$$\text{Maka untuk } [b, (a, c)]$$

a	1				
b \ c	2	3	6	9	18
2	0	3,1	6,1	9,1	18,1
3	2,1	0	6,1	9,1	18,1
6	2,1	3,1	0	9,1	18,1
9	2,1	3,1	6,1	0	18,1
18	2,1	3,1	6,1	9,1	0

a	2				
b \ c	1	3	6	9	18
2	0	3,1	6,1	9,1	18,1
3	1,1	0	6,1	9,1	18,1
6	1,1	3,2	0	9,2	18,2
9	1,1	3,1	6,1	0	18,1
18	1,2	3,2	6,2	9,2	0

a	3				
b \ c	1	2	6	9	18
1	0	2,1	6,1	9,1	18,1
2	1,1	0	6,1	9,2	18,1
6	1,3	2,3	0	9,3	18,3
9	1,3	2,3	6,3	0	18,3
18	1,3	2,3	6,3	9,3	0

a	6				
b \ c	1	2	3	9	18
1	0	2,1	3,1	9,1	18,1
2	1,2	0	3,2	9,2	18,2
3	1,3	2,3	0	9,3	18,3
9	1,3	2,3	3,3	0	18,2
18	1,6	2,6	3,6	9,6	0

a	9				
b \ c	1	2	3	6	18
1	0	2,1	3,1	6,1	18,1
2	1,1	0	3,1	6,1	18,1
3	1,1	2,1	0	6,3	18,3
6	1,3	2,3	3,3	0	18,3
18	1,9	2,9	3,9	6,9	0

a	18				
b \ c	1	2	3	6	9
1	0	2,1	3,1	6,1	9,1
2	1,2	0	3,2	6,2	9,2
3	1,3	2,3	0	6,3	9,3
6	1,6	2,6	3,6	0	9,6

$$9 \mid 1,9 \quad 2,9 \quad 3,9 \quad 6,9 \quad 0$$

Secara umum akan dibuktikan $a \geq b \Rightarrow a(b+c) = ab+ac = b+ac$

Maka $b \mid a \Rightarrow (a, [b, c]) = [(a, b), (a, c)] = [a, (a, c)]$

Jadi faktor-faktor positif bilangan asli 18 terbukti latis modular

Contoh 2:

Subgrup normal dari suatu grup merupakan suatu latis modular?

Jawab:

A subgrup normal B, maka ditulis $A \trianglelefteq B$, karena semesta pembicaraan Latis modular maka $A \leq B$ adalah $A \trianglelefteq B$, kemudian didefinisikan

$$A \cdot B = AB = \{ab \mid a \in A\} = \{ab \mid a \in A, b \in B\} \text{ dan } A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

Bukti:

$$4 \text{ Refliktif: } \forall A \in L, A \trianglelefteq A;$$

$$5 \text{ Anti-simentrik: } A \trianglelefteq B \text{ dan } B \trianglelefteq A \text{ karena } A \subseteq B \text{ dan } B \subseteq A, \text{ maka } A = B$$

$$6 \text{ Transitif: } A \trianglelefteq B \text{ dan } B \trianglelefteq C, \text{ maka } A \trianglelefteq C$$

Jadi latis L adalah poset

$$\text{Maka } A \trianglelefteq B \Rightarrow A \cdot (B \cup C) = B \cup AC$$

$$\text{Karena } A \cdot B = AB = B$$

$$\text{Sehingga } A \cdot (B \cup C) = AB \cup AC$$

$$= B \cup AC$$

$$= B + AC$$

Jadi subgrup normal merupakan latis modular.

3.2 Sifat-Sifat Latis Modular

Teorema 1

Misal $a, b, c \in L$. Jika $a \geq b$ dan $a \geq c$, maka

$$5 \quad a \geq b + c$$

$$6 \quad a(b + c) = b + c = b + ac$$

Bukti:

$$17. \text{ Misalkan } a \leq b \Leftrightarrow a = ab$$

$$b \leq a \Leftrightarrow b = ab$$

$$c \leq a \Leftrightarrow c = ca$$

$$a \leq c \Leftrightarrow a = ca$$

$$\begin{aligned} \text{Maka } a \geq b &\Rightarrow a(b + c) = ab + ac \\ &= b + c \end{aligned}$$

$$\text{Sehingga } a \geq b \Rightarrow a(b + c) = b + c$$

$$ac = c$$

$$c \leq a$$

$$(b + c) \leq a$$

$$a \geq (b + c)$$

Terbukti $a \geq (b + c)$

$$18. \quad a \geq b \Rightarrow a(b + c) = ab + ac = b + ac$$

$$\text{Maka } a \geq b \Rightarrow ab = b$$

$$a \geq c \Rightarrow ac = c$$

Sehingga $a \geq b \Rightarrow a(b+c) = b+c = b+ac$.

Contoh 3:

Ambil bilangan-bilangan 1,2,3,6,9,18 dari faktor 18 yang diurutkan menurut keterbagian. Misal $a=2, b=2, c=3$ dilihat bahwa a dan b sama, dan c bukan kelipatan keduanya.

$$\begin{aligned}
 \text{Maka } ab &= (2,2) = 2 \\
 ac &= (2,3) = 1 \\
 b+c &= [2,3] = 6 \\
 a(b+c) &= (2[2,3]) \\
 &= (2,6) \\
 &= 2 \\
 ab+ac &= [(2,2), (2,3)] \\
 &= [2,1] \\
 &= 2 \\
 b+ac &= [2, (2,3)] \\
 &= [2,1] \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

Sehingga $a(b+c) = ab+ac$ dan $a(b+a) = b+ac$

Jadi $a(b+c) = ab+ac = b+ac$

Teorema 2

Misal L latris modular, jika $a = b$, maka $a(b+c) = ab+ac = b+ac = a$

Bukti:

$$a(b+c) = a(a+c)$$

ketentuan b

$$\begin{aligned}
 &= (aa) + c && \text{menurut iv} \\
 &= a + c && \text{teorema 1} \\
 &= b + c && \text{keterangan b} \\
 &= b + (ac) && \text{teorema 4} \\
 &= a + ac && \text{keterangan. b} \\
 &= a && \text{menurut vii}
 \end{aligned}$$

Teorema 3

Suatu sublatis dari latis modular adalah modular (Sukardjono, 2002:119).

Bukti:

Misalkan S adalah sublatis dari latis modular L , dan a, b, c di S dengan $a \geq b$.

Karena S sublatis modular L dan , maka $a(b + c) = ab + ac = b + ac$, karena akibatnya S adalah modular.

Teorema 4

Suatu latis non-modular harus memuat sublatis yang isomorphic latis “pentagonal” (Sukardjono, 2002:119).

Bukti:

Karena L non-modular, L harus memuat unsur p, q, r dengan $p \geq q$ sedemikian rupa sehingga $p(q + r) = q + pr$. Dalam sebarang latis berlaku $p \geq q \Rightarrow p(q + r) \geq q + pr$; di sini menurut tanda sama tidak berlaku, maka diperoleh

$$p(q + r) > q + pr \dots\dots\dots(1)$$

Perhatikan rantai ini

$$pr \leq q + pr < p(q+r) \leq q+r.$$

Andaikan $p(q+r) = q+r$, maka $q \leq pr, q+r \leq pr+r = r \leq q+r$. Akibatnya

$r = q+r$ dan $p(q+r) = pr = q+r$ kontradiksi dengan (1). Akibat

selanjutnya ialah $p(q+r) < q+r$.

Andaikan $p(q+r) = q+r$, maka $p \geq pr, q+r \leq pr+r = r \leq q+r$.

Akibatnya $r = q+r$ dan $q+pr = pr = q+r = p(q+r)$ kontradiksi dengan

(1). Akibatnya ialah $p(q+r) < q+r$.

Sekarang perhatikan rantai ini

$$pr \leq r \leq q+r.$$

Baru saja terlihat bahwa $r = q+r$ tidak kompatibel dengan (1) dan demikian

pula halnya $r = pr$. dengan demikian dalam L mempunyai dua rantai yang

berterminal sama

$$pr < q + pr < p(q+r) < q+r \dots\dots\dots(2)$$

$$pr < r < q+r \dots\dots\dots(3)$$

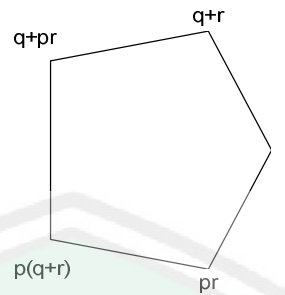
Unsur r tak mungkin terletak di rantai (2), sebab jika $p(q+r) \leq r$, maka

$p(q+r) = pp(q+r) \leq pr$ kontradiksi dengan (2), sedangkan jika

$p(q+r) > r$, maka $p \geq p(q+r) > r$ sehingga $pr = r$ kontradiksi dengan (3).

Dengan demikian rantai (2) dan (3) menurut lima unsur yang berlainan dalam

L yang tersusun seperti gambar 3



Gambar 3

Himpunan bagian dari L terdiri atas lima unsur dengan sendirinya adalah latis yang isomorphik dengan latis "pentagonal", tetapi masih harus membuktikan bahwa bagian ini merupakan sublati dari L . Misalkan

$$[p(q+r)]r = p(q+r)r = pr$$

Sedangkan

$$p(q+r)+r \geq (q+pr)+r = q+pr+r = q+r$$

Dan

$$p(q+r)+r \leq (q+r)+r = q+r+r = q+r$$

Menghasilkan

$$p(q+r)+r = q+r$$

Contoh 4:

Latis non-modular untuk memberikan gambaran pada teorema 4, ambil bilangan-bilangan 1,2,3,6,10,12,24,60,120 yang dipilih dari enam belas faktor dari bilangan 120 yang diurutkan menurut keterbagian seperti dalam Gambar 4 disini $p = 24, q = 3, r = 10$ dilihat bahwa p adalah kelipatan sejati dari q , dan r bukan faktor keduanya. $q \geq p \Rightarrow p(q+r) = pq + pr = q + pr$

Maka $pq = [24,3] = 3$

$$pr = [24,10] = 2$$

$$q + r = (24,10) = 60$$

$$p(q + r) = (24,[3,10])$$

$$= (24,60)$$

$$= 12$$

$$pq + pr = [(24,3), (24,10)]$$

$$= [3,2]$$

$$= 6$$

$$q + pr = [3, (24,10)]$$

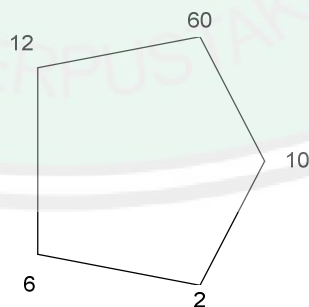
$$= [3,2]$$

$$= 6$$

Sehingga $p(q + r) \neq pq + pr$ dan $p(q + r) \neq q + pr$

Jadi terbukti non-modular

Maka dalam latris non-modular terdapat lima unsur “pentagonal” yang berlainan. Seperti dalam gambar 4.



Gambar 4

Rantai (2) dan (3) adalah:

2 membagi 6, dan 6 membagi 12, 12 mebagi 60

Dan

2 membagi 10, dan 10 membagi 60.

Teorema 5

Suatu latris adalah latris modular jika dan hanya jika latris itu tidak memuat sublatris yang isomorphik dengan latris “pentagonal”. (Sukardjono, 2002:123)

Bukti:

Karena L modular, L harus memuat-muat unsur-unsur p, q, r dengan $p \geq q$ sedemikian rupa sehingga $p(q+r) = q+pr$. Menurut teorema Ketidaksamaan modular dalam sebarang latris berlaku $p \geq q \Rightarrow p(q+r) \geq q+pr$. Maka perhatikan

$$p(q+r) \geq q+pr \dots\dots\dots(1)$$

Perhatikan rantai ini

$$pr \leq q+r \geq p(q+r) \leq q+r$$

Karena $p(q+r) = q+r$, maka $q \leq pr, q+r \leq pr+r = r \leq q+r$. Akibatnya $r = q+r$ dan $p(q+r) = pr = q+r$ komparabel dengan (1). Akibat selanjutnya ialah

$$p(q+r) \leq q+pr.$$

Karena $p(q+r) = q+r$, maka $p \geq q+r, pr \geq (q+r)r = r \geq pr$, akibatnya $r = pr$ dan $q+pr = q+r = p(q+r)$ komparabel dengan (1). Akibatnya ialah

$$pr(q+r) \leq q+r$$

Sekarang perhatikan rantai ini

$$pr \leq r \leq q + r.$$

Baru saja dilihat bahwa $r = q + r$ komparabel dengan (1) dan demikian pula halnya $r = pr$. Dengan demikian dalam L mempunyai dua rantai yang berterminal sama

$$pr \leq q + r \geq p(q + r) \leq q + r \dots\dots\dots(2)$$

$$pr \leq r \leq q + r \dots\dots\dots(3)$$

Karena r terletak di rantai (2), maka $p(q + r) \leq r$, sehingga $p(q + r) = pp(q + r) \leq pr$ komparabel dengan (2), sedangkan jika $p(q + r) > r$, maka $p \geq p(q + r) > r$ sehingga $pr = r$ komparabel dengan (3).

Contoh 5:

Dari contoh 4 dapat diperhatikan bahwa perangkat "pentagonal" juga terjadi pada faktor lengkap enam belas faktor dari 120, dan juga ada latis "pentagonal" dengan cara sendiri, akan tetapi kelima bilangan tidak merupakan sublatis dari latis enam belas faktor, karena dalam latis yang lebih besar gabungan atau KPK dari 6 dan 10 adalah 30 (bukan 60) dan 30 bukan termasuk perangkat "pentagonal". Jadi latis dengan enam belas unsur faktor 120 adalah modular.

Teorema 6

Suatu latas adalah latas modular jika dan hanya jika untuk unsur-unsur a, b, c ketiga relasi

$$a \geq b, ac = bc, a + c = b + c.$$

Bersama-sama mengakibatkan

$$a = b \quad (\text{Sukardjono, 2002:124})$$

Bukti:

Bukti ke arah kanan ($\Rightarrow$). Anggaplah latas itu modular dan ketiga relasi berlaku.

Maka

$$\begin{aligned} a &= a(a+c) && \text{menurut vii} \\ &= a(b+c) && \text{ketentuan } a+c=b+c \\ &= b+ac && \text{definisi . 3.1} \\ &= a(a+c) && \text{ketentuan } ac=bc \\ &= b && \text{menurut viii} \end{aligned}$$

Bukti ke arah kiri ($\Leftarrow$). Anggaplah implikasi bersamanya benar. Hal ini menjaga terjadinya sublatas pentagonal

$$ac = bc < b < a < a+c = b+c,$$

$$ac < c < a+c$$

Maka menurut teorema 5 latas itu adalah modular.

Teorema 7

Setiap bayangan homomorphik H dari latis modular L adalah modular.

(Sukardjono, 2002:124)

Bukti:

Misalkan sebarang $x, y, z \in H$. Catatan pada contoh 2 mengisyaratkan bahwa kita hanya perlu membuktikan

Jika $x > y$ di H , maka $x(y + z) = y + xz$.

Nyatakan homomorfisma itu dengan θ , misalkan a, c di L adalah berturut-turut anteseden dari x, z . Jadi $\theta(a) = x, \theta(c) = z$. Jika $x > y$ di H , maka terdapatlah b di L sedemikian sehingga $\theta(b) = y$ dan $a > b$.

Karena L adalah modular, menurut postulat V kita peroleh $a(b + c) = b + ac$.

Akibatnya

$$\begin{aligned} x(y + z) &= \theta(a)[\theta(b) + \theta(c)], \\ &= \theta(a)\theta(b + c) \\ &= \theta[a(b + c)] \\ &= \theta(b + ac) \\ &= \theta(b) + \theta(ac) \\ &= \theta(b) + \theta(a)\theta(c) \\ &= y + xz \end{aligned}$$

Maka H adalah modular.

Teorema 8

Hasilkali langsung $L \times M$ dari latris L dan M adalah modular. jika hanya jika L dan M adalah modular. (Sukardjono, 2002:125)

Bukti:

Pertama-tama aggaplah L, M adalah modular. Jika a_1, a_2, a_3 di L , b_1, b_2, b_3 di M , dan jika $L \times M : (a_1, b_1) \geq (a_2, b_2)$, maka di L : $a_1 \geq a_2$ dan di M : $b_1 \geq b_2$ dengan akibat

$$a_1(a_2, a_3) = a_2 + a_1a_3$$

dan

$$b_1(b_2, b_3) = b_2 + b_1b_3$$

Maka

$$\begin{aligned} (a_1, b_1)[(a_2, b_2) + (a_3, b_3)] &= (a_1, b_1)(a_2, a_3) + (b_2, b_3) \\ &= [a_1(a_2, a_3) + b_1(b_2, b_3)] \\ &= a_2 + a_1a_3, b_2 + b_1b_3 \\ &= (a_2, b_2) + (a_1, a_3, b_1b_3) \\ &= (a_2, b_2) + (a_1, b_1)(b_2, b_3) \end{aligned}$$

Dengan demikian $L \times M$ adalah modular.

Yang kedua karena $L \times M$ adalah modular. Maka akan dibuktikan bahwa L modular.

Ambil unsur tetap b di M , dan misalkan X adalah himpunan bagian unsur-unsur dari $L \times M$ berbentuk (x, b) dengan sebarang x di L . Jika $(a_1, b), (a_2, b)$ adalah unsur di X maka demikian pulalah (a_1a_2, b) dan

(a_1+a_2, b) dengan demikian X adalah sublatis dari $L \times M$. Menurut teorema 1, X adalah modular. Korespondensi $(x, b) \sim x$ antara unsur-unsur dari X dan L jelas satu-satu; jika di $X: (a_1, b) \leq (a_2, b)$, maka $a_1 \leq a_2$ di L dan sebaliknya; dengan demikian L dan X adalah latis-latis yang isomorphik. Dengan demikian pula menurut teorema 5, L adalah modular..

6.2 3.3 Kajian Latis Dalam Islam

Dalam struktur aljabar terdapat suatu latis, dimana definisi dari latis sendiri adalah suatu struktur aljabar dengan satu himpunan tak kosong dengan dua operasi biner $+$ dan $\bullet$ yang memenuhi sifat tertutup, asosiatif, komutatif dan absorpsi.

Sifat tertutup dalam matematika adalah suatu himpunan bila dioperasikan maka hasilnya tetap dalam himpunan tersebut. Dalam islam tertutup dapat dicontohkan dalam perintah untuk menjaga suatu rahasia atau menutupi suatu rahasia. Perhatikan firman Allah SWT dalam surat Al-Qashash ayat 10:

وَأَصْبَحَ فُؤَادُ أُمِّ مُوسَىٰ فَارِغًا ۚ إِن كَادَتْ لَتُبْدِي بِهِ لَوْلَا أَن رَّبَطْنَاهَا
عَلَىٰ قَلْبِهَا لِتَكُونَ مِنَ الْمُؤْمِنِينَ ﴿١٠﴾

Artinya: Dan menjadi kosonglah hati ibu Musa. Sesungguhnya hampir saja ia menyatakan rahasia tentang Musa, seandainya tidak kami teguhkan hati-nya, supaya ia termasuk orang-orang yang percaya (kepada janji Allah).

Pada ayat diatas terdapat kalimat **لَتُبْدِي** yang artinya “menyatakan rahasia”. Rahasia yang dimaksud disini adalah sesuatu yang harus ditutupi.

Perintah untuk menjaga rahasia di contohkan pada cerita Ibu Musa berusaha menutupi rahasainya demi menyelamatkan Musa. Dalam Islam seorang

muslim yang mempunyai rahasia atau pun diamanahi suatu rahasia diwajibkan untuk menutup atau menjaga rahasia tersebut. Karena menyangkut kehormatan muslim yang lain atau dirinya. Orang yang menjaga rahasia telah dijanjikan oleh Allah suatu balasan yang sempurna.

Dalam surat yang lain juga diceritakan bagaimana suatu rahasia itu harus ditutupi dan dijaga, di dalam QS. At Tahrim : 3 Allah berfirman:

وَإِذْ أَسَرَّ النَّبِيُّ إِلَىٰ بَعْضِ أَزْوَاجِهِ حَدِيثًا فَلَمَّا نَبَّأَتْ بِهِ وَأَظْهَرَهُ
 اللَّهُ عَلَيْهِ عَرَفَ بَعْضُهُ وَأَعْرَضَ عَنْ بَعْضٍ فَلَمَّا نَبَّأَهَا بِهِ قَالَتْ
 مَنْ أَتْبَاكَ هَذَا قَالَ نَبَّأَنِيَ الْعَلِيمُ الْخَبِيرُ ﴿٣﴾

Artinya: "Dan ingatlah ketika nabi membicarakan secara rahasia kepada salah seorang isterinya (Hafsah) suatu peristiwa. Maka tatkala (Hafsah) menceritakan peristiwa itu (kepada Aisyah) dan Allah memberitahukan hal itu (pembicaraan Hafsah dan Aisyah) kepada Muhammad lalu Muhammad memberitahukan sebagian (yang diberitakan Allah kepadanya) dan menyembunyikan sebagian yang lain (kepada Hafsah). Maka tatkala (Muhammad) memberitahukan pembicaraan (antara Hafsah dan Aisyah) lalu (Hafsah) bertanya: "Siapakah yang Telah memberitahukan hal Ini kepadamu?" nabi menjawab: "Telah diberitakan kepadaku oleh Allah yang Maha mengetahui lagi Maha Mengenal."

Sifat latis tidak hanya tertutup, akan tetapi juga komutatif. Komutatif adalah suatu timbah balik. Dalam Islam komutatif dapat di contohkan dalam perintah untuk saling tolong menolong. Perhatikan firman Allah dalam surat Al-Ma'idah ayat 2:

تَعَاوَنُوا عَلَى الْإِثْمِ وَالْعُدْوَانِ وَاتَّقُوا اللَّهَ إِنَّ اللَّهَ شَدِيدُ الْعِقَابِ ﴿٢﴾

Artinya: dan tolong-menolonglah kamu dalam (mengerjakan) kebajikan dan takwa, dan jangan tolong-menolong dalam berbuat dosa dan pelanggaran. dan bertakwalah kamu kepada Allah, Sesungguhnya Allah amat berat siksa-Nya

Dari ayat di atas terdapat kalimat تَعَاوَنُوا yang artinya "tolong-menolong".

Ayat di atas menjelaskan perintah untuk saling tolong-menolong dalam hal kebajikan dan ketakwaan, yakni segala upaya yang dapat menghindarkan bencana duniawi dan atau ukhrawi. Selain itu ayat di atas juga menegaskan larangan tolong-menolong dalam hal dosa dan pelanggaran, karena sesungguhnya siksaan Allah amatlah pedih. Sebagai makhluk sosial manusia berkewajiban bermasyarakat dan saling tolong-menolong antara satu dengan yang lainnya.

Dari keterangan diatas dapat di contohkan dengan ketika kita mengucapkan salam. Ketika seorang mengucapkan salam pasti orang yang diajak bicara akan menjawab salam tersebut dan sebaliknya terjadi pada kita ketika kita ada orang yang mengucapkan salam pasti kita akan menjawab salam tersebut.

Sifat latis tidak hanya tertutup dan komutatif, akan tetapi juga asosiatif. Asosiatif adalah suatu kerjasama. Dalam Islam asosiatif dapat dicontohkan dalam perintah untuk saling bekerjasama. Dalam surat Al-Baqarah ayat 282 disebutkan,

يَا أَيُّهَا الَّذِينَ آمَنُوا إِذَا تَدَايَنْتُمْ بِدَيْنٍ إِلَىٰ أَجَلٍ مُّسَمًّى فَاكْتُبُوهُ

Artinya: Hai orang-orang yang beriman, apabila kamu bermu'amalah tidak secara tunai untuk waktu yang ditentukan, hendaklah kamu menuliskannya.

Pada ayat diatas terdapat kalimat تَدَايَنْتُمْ yang mempunyai arti "Bermuamalah ialah seperti menjual beli, hutang piutang, atau sewa menyewa

dan sebagainya” mengisyaratkan suatu asosiatif. Muamalah juga bisa dikaitkan dengan rahasia. Dalam menjaga rahasia orang yang bersangkutan bermuamalah atau bekerja sama untuk saling menjaga rahasia tersebut agar terjaga. Dengan bermuamalah akan tercipta kerukunan antar sesama dalam mengerjakan sesuatu yang baik. Sebagai makhluk sosial, manusia menerima dan memberikan andilnya kepada orang lain, saling bermuamalah untuk memenuhi hajat hidup dan mencapai kemajuan dalam hidupnya. Muamalah disini dapat di contohkan dalam jual beli. Sebagai penjual harus jujur ketika orang menjual barang dagangannya. Sehingga antara penjual dan pembeli akan terjadi keharmonisan interaksi satu sama lain.

Sifat terakhir dari latis adalah absorpsi. Absorpsi dalam matematika adalah suatu penyerapan. Dalam islam absorpsi dapat di contohkan dalam perintah untuk saling memaafkan. Perhatikan firman Allah dalam surat Asy-Syuura ayat 40:

وَجَزَاءُ سَيِّئَةٍ سَيِّئَةٌ مِّثْلُهَا فَمَنْ عَفَا وَأَصْلَحَ فَأَجْرُهُ عَلَى اللَّهِ إِنَّهُ لَا يُحِبُّ الظَّالِمِينَ ﴿٤٠﴾

Artinya: Dan balasan suatu kejahatan adalah kejahatan yang serupa, maka barang siapa memaafkan dan berbuat baik maka pahalanya atas (tanggungan) Allah. Sesungguhnya Dia tidak menyukai orang-orang yang zalim.

Dari ayat diatas istilah absorpsi sudah ada dalam Al-Qur'an. Dari definisinya absorpsi merupakan suatu penyerapan. Dalam Islam, absorpsi adalah memaafkan atau menghapus atau mangampuni kesalahan orang lain. Seperti dalam ayat diatas terdapat kalimat عَفَا yang artinya “memaafkan”. Islam mengajak manusia untuk saling memaafkan dan memberi drajat tinggi bagi

pemaaf. Contoh memaafkan orang yg berbuat salah kepada kita ketika orang tersebut menyadari kesalahannya dan berjanji tidak akan mengulangi lagi kesalahan tersebut, sehingga kerukunan hubungan sesama akan terbina dalam kehidupan bermasyarakat.

Dari keterangan di atas dapat disimpulkan bahwa himpunan-himpunan dalam latis mempunyai elemen atau anggota. Anggota di dalam himpunan itu di ibaratkan dalam kehidupan merupakan makhluk yang menjadi salah satu anggota dari ciptaan-Nya. Sedangkan operasi biner merupakan operasi antar anggota himpunan dengan dua interaksi. Hal ini di ibaratkan seperti interaksi antara makhluk-makhluk Allah, dan sifat-sifat yang harus dipenuhi merupakan aturan-aturan yang telah ditetapkan oleh Allah, artinya sekalipun makhluk-Nya berinteraksi dengan sesama makhluk ia harus tetap berada dalam koridor yang telah ditetapkan Allah

BAB IV

PENUTUP

4.1 KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan mengenai latris modular dan sifat-sifatnya, penulis dapat menyimpulkan bahwa:

c. Definisi latris modular:

Misal L latris, jika pada L berlaku:

$$a \geq b \Rightarrow a(b + c) = ab + ac = b + ac$$

$\forall a, b, c \in L$, maka L disebut latris modular

d. Sifat-sifat latris modular meliputi

viii. Misal $a, b, c \in L$. Jika $a \geq b$ dan $a \geq c$, maka $a \geq b + c$ dan

$$a(b + c) = b + c = b + ac$$

ix. Misal L latris modular, jika $a = b$, maka

$$a(b + c) = ab + ac = b + ac = a$$

x. Suatu sublatis dari latris modular adalah modular

xi. Suatu latris non-modular L harus memuat sublatis yang isomorphik dengan latris "pentagonal".

xii. Suatu latris adalah latris modular jika dan hanya jika latris itu tidak memuat sublatis yang isomorphik dengan latris "pentagonal".

xiii. Suatu latris adalah latris modular jika dan hanya jika untuk unsur-unsur a, b, c ketiga relasi $a \geq b, ac = bc, a + c = b + c$ bersama mengakibatkan $a = b$

xiv. Setiap bayangan homomorfik H dari latis modular L adalah modular.

xv. Hasil kali langsung $L \times M$ dari latis L dan M adalah modular jika dan hanya jika L dan M adalah modular

4.2 SARAN

Dalam skripsi ini hanya menjelaskan tentang latis modular dan sifat-sifatnya. Setelah penulis menjelaskan tentang latis modular dan sifat-sifatnya, maka disarankan kepada peneliti yang lain untuk mengadakan penelitian latis yang lebih luas atau latis yang lebih sempit.

DAFTAR PUSTAKA

Abdusysykir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Press

Dennelon, Thomas. 1969. *Lattice Theory*. Pergamon Press.

Shihab, M. Quraish. 2002. *Tafsir Al-Misbah Pesan, Kesan & Keserasian Al Qur'an*. Ciputat: Lentera Hati

Al Qurthubi, Syaikh Imam. 2009. *Tafsiral Qurthubi*. Jakarta: Pustaka Azzam

Siang, Jong Jek. 2002. *Matematika Diskrit dan Aplikasinya pada Ilmu Komputer*. Yogyakarta: Andi Offset

Sukardjono. 2002. *Toeri Latis*. Yogyakarta: Andi Yogyakarta

