ESTIMASI PARAMETER SISTEM PERSAMAAN SIMULTAN DENGAN METODE TWO STAGE LEAST SQUARE

SKRIPSI

oleh :
UMI KHORIROTIN NASICHAH
NIM. 07610017

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG

2011

ESTIMASI PARAMETER SISTEM PERSAMAAN SIMULTAN DENGAN METODE TWO STAGE LEAST SQUARE

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

oleh :
UMI KHORIROTIN NASICHAH
NIM. 07610017

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2011

ESTIMASI PARAMETER SISTEM PERSAMAAN SIMULTAN DENGAN METODE TWO STAGE LEAST SQUARE

SKRIPSI

oleh:

UMI KHORIROTIN NASICHAH
NIM. 07610017

Telah diperiksa dan disetujui untuk diuji :
Tanggal, 12 September 2011

Dosen Pembimbing I,	Dosen Pembimbing II,
Abdul Aziz, M.Si	Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag
NIP. 19760318 200604 1 002	NIP. 19720420 200212 1 003

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

ESTIMASI PARAMETER SISTEM PERSAMAAN SIMULTAN DENGAN METODE TWO STAGE LEAST SQUARE

SKRIPSI

oleh:

UMI KHORIROTIN NASICHAH
NIM. 07610017

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan untuk
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal, 12 September 2011

Susunan Dewan Penguji			Tanda Tangan
1. Penguji Utama	:	Sri Harini, M.Si NIP. 19731014 200112 2 002	( )
2. Ketua Penguji	:	Evawati Alisah, M.Pd NIP. 19720604 199903 2 001	( )
3. Sekretaris Penguji	:	Abdul Aziz, M.Si NIP.19760318 200604 1 002	( )
4. Anggota Penguji	:	Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag NIP. 19720420 200212 1 003	( )

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama	:	Umi Khorirotin Nasichah
NIM	:	07610017
Jurusan	:	Matematika
Fakultas	:	Sains dan Teknologi
Judul	:	Estimasi Parameter Sistem Persamaan Simultan dengan Metode Two Stage Least Square

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri.

Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 14 September 2011

Yang membuat pernyataan,

Umi Khorirotin Nasichah

NIM. 07610017

MOTTO:

بِسۡمِ ٱللهِ ٱلرَّحۡمَـٰنِ ٱلرَّحِيمِ

إِنَّ ٱللَّهَ لَا يُغَيِّرُ مَا بِقَوۡمٍ حَتَّىٰ يُغَيِّرُواْ مَا بِأَنفُسِهِمۡۗ

"Sesungguhnya Allah tidak merobah keadaan sesuatu kaum sehingga mereka merobah keadaan yang ada pada diri mereka sendiri"

(Q.S. Ar-Ra'd: 11)

خير االنّاس أنفعهم للنّاس

"All the best people are those who give advantages to others"

PERSEMBAHAN

بسم الله الرحمن الرحيم

Penulis persembahkan karya kecil terbaik ini kepada:

Ibunda Hj. Mufidah yang tercinta "perempuan inspiratif" dengan perjuangan beliau mengajarkan penulis agar selalu menjadi perempuan yang kuat.

Ayahanda H. Rois Hasbullah yang selalu mendidik lewat perilaku "arif dan bijaksana"

Kedua nenek yang tersayang Hj. Kasiyani dan Hj. Syari'ah yang selalu mengajarkan arti kesabaran dan kesadaran dalam hidup penulis

Kakak-kakak penulis Akhmad Bustanul Arief (sekeluarga), Abdur Rauf Mubarok (sekeluarga),

terima kasih atas kasih sayang, do'a, dan perhatian serta motivasinya

jasa-jasa beliau yang tidak akan pernah penulis lupakan sampai akhir zaman.

Semoga Allah SWT membalas semua kebaikan yang telah diberikan kepada penulis.

Sahabat-sahabati PMII Rayon "Pencerahan" Galileo dan Teater Galileo (TEGAL)

Tempat penulis mengabdi dan belajar akan banyak hal dalam hidup ini.

KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Syukur alhamdulillah penulis haturkan kehadirat Allah SWT yang telah melimpahkan Rahmat dan Hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan studi di jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang sekaligus dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik.

Selanjutnya penulis haturkan terima kasih seiring doa dan harapan *jazakumullah ahsanal jaza'* kepada semua pihak yang telah membantu menyelesaikan skripsi ini. Ucapan terima kasih ini penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, yang telah banyak memberikan pengetahuan dan pengalaman yang berharga.
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU., D.Sc selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Abdul Aziz, M.Si dan Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag selaku dosen pembimbing skripsi, yang telah memberikan pengarahan dan pengalaman yang begitu berharga.
5. Turmudi, M.Si selaku dosen wali dan seluruh dosen jurusan Matematika, terima kasih atas seluruh ilmu dan bimbingannya .

6. Ibunda, Ayahanda, dan nenek tercinta yang senantiasa memberikan doa restunya kepada penulis dalam menuntut ilmu, pemberi inspirasi dalam kehidupan penulis.
7. Saudara-saudara penulis, Ahmad Bustanul Arief, Kristanti, Abdul Rauf Mubarok, Ikha, dan keponakan tersayang Harfi Alam Bunyana. penulis ucapkan banyak terima kasih, karena atas tuntutan dan motivasi, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
8. Sandaran hati penulis "Abi" Winartono, terimakasih atas cinta dan kesabaran yang selalu mengiringi penulis, semoga Allah SWT selalu memberikan ridhoNya pada kita.
9. Sahabat-sahabati PMII rayon "pencerahan" Galileo Ayiek, Izza N, Mufid, dan Majid, seluruh Sahabat-sahabati seperjuangan Teater Galileo (TEGAL). Semoga semangat perjuangan dan pengabdian kita tidak selesai disini.
10. Teman-teman penulis, senasib seperjuangan mahasiswa Matematika 2007, kususnya Juail-Meyonk, Teea, dan Uchil (Glasses girl) serta Isfie joule, Fara, dan Riang Fauzi, terima kasih atas segala pengalaman berharga dan kenangan indah yang telah terukir.
11. Sahabat-sahabati di Ikatan Mahasiswa Bojonegoro (IKAMARO), HMJ MTK 2008, MPM-F Saintek 2009, dan BEM-F Saintek 2010, seluruh warga Catalonia begitu indah pengalaman dan kenangan yang terukir.
12. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini baik berupa materiil maupun moril.

Penulis menyadari bahwa dalam penyusunan skripsi ini masih terdapat banyak kekurangan dan masih memerlukan penyempurnaan, karena itu kritik dan saran yang sifatnya membangun sangat penulis harapkan, dan penulis berharap semoga skripsi ini bisa memberikan manfaat kepada para pembaca khususnya bagi penulis secara pribadi. *Amin Ya Rabbal Alamin.*

Wallahul Muwaffiq ilaa 'aqwamitthoriq

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

ABSTRAK

Khorirotin N, Umi.2011. **Estimasi Parameter Sistem Persamaan Simultan dengan Metode *Two Stage Least Square***. Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Pembimbing: (I) Abdul Aziz, M.Si
(II) Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag.

Analisis regresi adalah suatu analisis yang bertujuan untuk menunjukkan hubungan matematis antara variabel respon dengan variabel penjelas. Model regresi yang paling sering ditemui dalam berbagai kasus estimasi biasanya berupa model persamaan tunggal tunggal, yaitu model dimana hanya terdapat satu variabel tak bebas *Y* dan satu atau lebih variabel bebas *X*. Namun, selain model persamaan tunggal ada juga model persamaan simultan atau sistem persamaan simultan dimana adanya saling ketergantungan antar variabel. Estimasi parameter pada sistem persamaan simultan menggunakan metode kuadrat terkecil dua-tahap (*Two-stage Least Squares* - 2SLS).

Berdasakan hasil penelitian diperoleh bahwa bentuk dari estimasi sistem persamaan simultan dengan metode *Two-stage Least Squares*, adalah:

$$\hat{\beta}_{0ls} = \left(X^T X\right)^{-1} X^T Y$$

Dan didapatkan enam persamaan yang dapat digunakan untuk mencari solusi dari nilai-nilai estimasi dari β_{10}, β_{11}, β_{12}, β_{13}, β_{20}, dan β_{21} dapat ditulis sebagai,

$$\beta_{10} = \beta_1 - \beta_1\beta_{11}\beta_{21} - \beta_{11}\beta_{20}$$
$$\beta_{11} = \frac{\beta_6 - \beta_{21}\beta_3}{\beta_6\beta_{21}}$$
$$\beta_{12} = \beta_2 - \beta_2\beta_{11}\beta_{21}$$
$$\beta_{13} = \beta_3 - \beta_3\beta_{11}\beta_{21}$$
$$\beta_{20} = \beta_4 - \beta_4\beta_{21}\beta_{11} - \beta_{21}\beta_{10}$$
$$\beta_{21} = \frac{\beta_5 - \beta_5\beta_6}{\beta_5\beta_3 + \beta_6\beta_{12}}$$

Penelitian ini dapat dikembangkan dengan metode lain seperti metode estimasi lain *Indirect least square* atau *three stage least square* .

Kata Kunci: Estimasi Parameter, Persamaan Simultan, *Two Stage Least Square*

ABSTRACT

Khorirotin N, Umi.2011. **Parameter Estimated of simultaneous equations systems with Two Stage Least Square Method**. Thesis. Mathematics Department Science and Technology Faculty, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang.

Advisors : (I) Abdul Aziz, M.Si
(II) Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag.

Regression analysis is a kind of analysis whose purpose to indicate mathematical relationship between responded and explanatory variable. The regression model that frequently appears in various estimation cases is usually single equation models, that is a model having only one indefinite variable *Y* and one or more definite variable *X*. But, besides single equation models there are also simultaneous equations models or simultaneous equations systems which there are interdependences among those variables. Estimated parameter in simultaneous equations systems applies for Two-stage Least Squares - 2SLS method.

Based on the result of this research, the researcher acquired a conclusion that the pattern of simultaneous equations systems by applying Two-stage Least Squares method has the solution that is:

$$\hat{\beta}_{0ls} = \left(X^T X\right)^{-1} X^T Y$$

and be found six equations whose can to purpose solution of estimation value from β_{10}, β_{11}, β_{12}, β_{13}, β_{20}, and β_{21} can be write as,

$$\beta_{10} = \beta_1 - \beta_1\beta_{11}\beta_{21} - \beta_{11}\beta_{20}$$

$$\beta_{11} = \frac{\beta_6 - \beta_{21}\beta_3}{\beta_6\beta_{21}}$$

$$\beta_{12} = \beta_2 - \beta_2\beta_{11}\beta_{21}$$

$$\beta_{13} = \beta_3 - \beta_3\beta_{11}\beta_{21}$$

$$\beta_{20} = \beta_4 - \beta_4\beta_{21}\beta_{11} - \beta_{21}\beta_{10}$$

$$\beta_{21} = \frac{\beta_5 - \beta_5\beta_6}{\beta_5\beta_3 + \beta_6\beta_{12}}$$

this research can be expanded with other metod like Indirect least square or three stage least square metod .

Key words: Estimated Parameter, simultaneous equations, Two Stage Least Square.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Alam semesta yang diciptakan oleh Allah ini penuh dengan keindahan dan keajaiban, karena memiliki kekayaan yang berlimpah. Semua yang ada di alam ini sudah tersusun dan terpola dengan rapi, sehingga tidak sulit bagi para Ilmuan terdahulu mempelajari pola dan susunan tersebut sehingga melahirkan rumusan matematis. Alam semesta memuat bentuk-bentuk dan konsep matematika, meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika itu ada. Alam semesta serta segala isinya diciptakan Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mapan, dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang setimbang dan rapi (Abdussyakir,2007). dalam Al-Qur'an surat Al-Qomar ayat 49 berikut, yang berbunyi:

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَٰهُ بِقَدَرٍ ﴿٤٩﴾

Artinya: Sesungguhnya kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran.

Kata "*biqodarin*" yang berarti "dengan ukuran" ini dapat ditafsirkan bahwa Allah SWT menciptakan segala sesuatu di alam itu berdasarkan ukuran. Seandainya Allah menciptakan segala sesuatu tanpa ukuran, maka akan terjadi ketidakseimbangan dalam alam ini. Ukuran yang diciptakan oleh

Allah SWT sangat tepat sehingga alam seperti yang telah kita rasakan ini, benar-benar seimbang (Mulyono, 2006: 211).

Matematika termasuk salah satu ilmu pengetahuan yang banyak dikaji dan diterapkan pada berbagai bidang keilmuan. Matematika bisa dikatakan "*Queen of Sience*" karena matematika menempati posisi yang cukup penting dalam kajian-kajian ilmu yang lain, khususnya ilmu-ilmu sains. Matematika banyak membantu dalam mempermudah dalam menyelesaikan permasalahan dalam kajian ilmu-ilmu lain. Oleh sebab itu, matematika menduduki posisi yang cukup penting dalam ilmu pengetahuan.

Salah satu cabang dari matematika terapan adalah stataistika. Sudiyono (2001: 3) mengatakan bahwa statistik adalah cara-cara atau metode tertentu yang perlu ditempuh dalam rangka mengumpulkan, menyusun atau mengatur, menyajikan, menganalisa dan memberikan interpretasi terhadap sekumpulan bahan keterangan yang berupa angka itu "dapat bicara" atau dapat memberikan pengertian dan makna tertentu. Dalam ilmu statistik banyak sekali model-model yang ditemui. Salah satunya adalah estimasi, estimasi adalah suatu metode untuk mengetahui berapa nilai-nilai suatu populasi dengan menggunakan nilai-nilai sampel. Nilai populasi sering disebut dengan parameter populasi, sedangkan nilai-nilai sampel sering disebut dengan statistik sampel. Dalam metode estimasi, parameter populasi yang ditaksir itu adalah berupa nilai rata-rata yang diberi notasi μ dan nilai simpangan baku dengan notasi σ. Teori estimasi sendiri digolongkan menjadi pendugaan titik (*point estimation*) dan pendugaan selang (*interval estimation*).

Model yang paling sering ditemui dalam berbagai kasus estimasi biasanya berupa model persamaan tunggal (*single equation models*). Namun, selain model persamaan tunggal terdapat juga model persamaan simultan (*simultaneous equations models*) atau sistem persamaan simultan (*simultaneous equations systems*). Model persamaan tunggal yaitu model dimana hanya terdapat satu variabel tak bebas *Y* dan satu atau lebih variabel bebas *X* saja, hubungan sebab akibat yang terjadi dalam model tersebut berlangsung satu arah, yaitu dari *X* ke *Y*. Namun, terkadang dalam beberapa model sering terdapat interdependensi atau saling ketergantungan antar variabel, dimana bukan hanya variabel *X* saja yang bisa mempengaruhi variabel *Y*, tetapi juga variabel *Y* bisa mempengaruhi variabel *X* sehingga dalam model tersebut terjadi hubungan dua arah. Model yang seperti itu disebut dengan model persamaan simultan *simultaneous equations models*) atau sistem persamaan simultan (*simultaneous equations systems*).

Ada dua pendekatan untuk mengestimasi parameter pada sistem persamaan simultan. Pertama, metode persamaan tunggal atau yang dikenal sebagai metode informasi terbatas (*limited information methods*) contohnya kuadrat terkecil tak langsung (*Indirect Least Squares* - ILS), kuadrat terkecil dua-tahap (*Two-stage Least Squares* - 2SLS), dan *Limited Information Maximum Likelihood* - LIML. Kedua, metode sistem (*system methods*) yang dikenal sebagai metode informasi penuh (*full information methods*) contohnyuya kuadrat terkecil tiga-tahap (*Three-stage Least Squares* - 3SLS) dan *Full Information Maximum Likelihood* - FIML.

Dalam penelitian ini metode yang akan digunakan untuk mengestimasi parameter pada sistem persamaan simultan adalah metode kuadrat terkecil dua tahap (*Two-stage Least Squares* - 2SLS), sehingga penelitian ini diberi judul **"Estimasi Parameter pada Sistem Persamaan Simultan dengan Metode Two Stage Least Squares"**

1.2 Rumusan Masalah

Masalah yang dikaji dalam penelitian ini dari latar belakang di atas adalah bagaimana bentuk estimasi parameter pada sistem persamaan simultan dengan metode kuadrat terkecil dua tahap (*Two-stage Least Squares*).

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasar rumusan masalah dan fokus penelitian diatas, maka tujuan penelitian ini adalah menentukan bentuk estimasi parameter pada sistem persamaan simultan dengan metode kuadrat terkecil dua tahap (*Two-stage Least Squares*).

1.4 Batasan Masalah

Untuk menghindari perluasan masalah Penulis perlu memberi batasan masalah dalam penelitian ini yaitu dalam mengestimasi parameter sistem persamaan simultan menggunakan metode *two stage least square* dan parameter yang diteliti adalah β.

1.5 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah:

a. Bagi Penulis

1. Tambahan pengetahuan tentang statistik khususnya estimasi paremeter sistem persamaan simultan dengan metode *two-stage least square*.
2. Tambahan wawasan dan pengalaman tentang penelitian matematika murni.

b. Bagi Lembaga

1. Sebagai tambahan pustaka untuk rujukan bahan perkuliahan khususnya tentang materi statistik.
2. Sebagai tambahan pustaka untuk rujukan penelitian tentang materi statistik.

c. Bagi Pembaca

Sebagai bahan pembelajaran dan pengetahuan mengenai statistik matematika. Kususnya tentang estimasi parameter sistem persamaan simultan dengan metode *two stage least square*.

1.6 Metode Penelitian

Dalam menentukan estimasi parameter, maka pendekatan yang digunakan adalah pendekatan literatur dan kuantitatif. Pendekatan literatur diantaranya adalah analisa teoritis, pemodelannya dan juga estimasi parameternya, sedangkan pendekatan kuatitatif adalah menggambarkan data yang sudah ada, dan tidak terbatas hanya sampai pada pengumpulan dan penyusunannya saja, akan tetapi data yang sudah terkumpul disusun kembali kemudian dijelaskan dan dianalisa.

Langkah-langkah estimasi dalam penelitian ini, yaitu sebagai berikut:

1. Menentukan sistem persamaan simultan.
2. Menentukan variabel sistem persamaan simultan.
3. Menentukan persamaan bentuk tereduksi
4. Metode estimasi persamaan simultan dengan Metode kuadrat terkecil dua tahap (*Two-stage Least Squares)*, langkah-langkahnya:
   a. Meminimumkan fungsi total kuadrat *error*
   b. Melakukan turunan pertama pada fungsi *error* terhadap parameter koefisien regresi
   c. Menyamakan turunan pertama dari fungsi *error* dengan nol
   d. Menentukan persamaan-persamaan dari parameter koefisien regresi.

1.7 Sistematika Penulisan

Untuk memudahkan melihat dan memahami penelitian ini secara keseluruhan, maka penulis menggambarkan sistematika penulisannya menjadi empat bab, yaitu:

BAB I PENDAHULUAN, berisi tentang latar belakang masalah, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian dan sistematika penulisan.

BAB II KAJIAN PUSTAKA, kajian yang menjelaskan tentang teori-teori yang berkaitan dengan Model Persamaan Simultan, metode *Ordinal Least*

Square dan Metode *Least Square* Dua Tahap, dari berbagai literature (buku, skripsi, dan jurnal on line) yang berkaitan dengan penelitian. Pada bab ini juga membahas tentang kajian al-Qur’an tentang estimasi parameter.

BAB III PEMBAHASAN, berisi analisis literatur (teoritis) estimasi parameter, dan juga berisi tentang kajian agama terkait dengan pembahasan.

BAB IV PENUTUP, berisi tentang kesimpulan dan saran-saran yang sesuai dengan hasil penelitian.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Analisis Regresi

Analisis regresi menurut Setiawan & Dwi (2010:61) adalah suatu analisis yang bertujuan untuk menunjukkan hubungan matematis antara variabel respon dengan variabel penjelas. Secara umum, model regresi dengan p buah variabel penjelas adalah sebagai berikut:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots + \beta_p X_p + \varepsilon \qquad (2.1)$$

dimana:

Y : variabel tak bebas

X : variabel bebas

β : Parameter konstanta yang tidak diketahui nilainya dan akan diestimasi

ε : variabel error

p : banyaknya observasi

2.2 Sistem Persamaan Simultan

Model-model regresi di mana ada lebih dari dari satu persamaan dan di mana ada hubungan umpan balik di antara variabel dikenal dengan model regresi persamaan simultan. Dimana ada hubungan bilateral atau umpan balik antara *Y* dan *X*, *X* tidak hanya dapat mempengaruhi *Y* juga bisa mempengaruhi satu *X* atau lebih.

Dalam model seperti itu ada lebih dari satu persamaan, satu untuk variabel *tidak bebas* atau bersifat *endogen* atau *gabungan* atau *bersama*. Dan tidak seperti persamaan model tunggal, dalam model persamaan simultan orang mungkin tidak menaksir parameter dari satu persamaan tunggal tanpa memperhitungkan informasi yang diberikan oleh persamaan lain dalam sistem.

2.2.1 Persoalan Identifikasi

Permasalahan yang sering dihadapi dalam persamaan simultan ini adalah bahwa koefisien dari persamaan bentuk tereduksi tidak selalu dapat mengidentifikasi semua koefisien dari seluruh parameter yang ada dalam persamaan struktural. Hal seperti ini disebut permasalahan identifikasi. Artinya, jika kita dapat mengestimasi parameter dari bentuk struktural (*structure form*) melalui persamaan bentuk tereduksi, jika kita bisa mengatakan bahwa persamaan tersebut teridentifikasi (*identified*), jika tidak, maka kita dapat mengatakannya tidak teridentifikasi (*unidentified*) (setiawan & Dwi. 2010:202).

2.2.2 Aturan Identifikasi

Persamaan-persamaan bentuk tereduksi dapat digunakan untuk menentukan identifikasi suatu persamaan simultan. Cara lain yang dapat digunakan adalah dengan identifikasi kondisi order dan identifikasi kondisi order. Untuk memahaminya dibutuhkan notasi-notasi berikut:

G : banyak variabel tak bebas dalam model

G : banyak variabel tak bebas di dalam sebuah persamaan tertentu

K : Banyak variabel bebas di dalam model

K : Banyak variabel bebas di dalam sebuah persamaan tertentu

2.2.3 Identifikasi Kondisi Order

Identifikasi terhadap kondisi untuk memenuhi syarat perlu, yang disebut kondisi order, dapat dinyatakan dalam dua cara yang sepadan berikut:

a. Di dalam sebuah model yang terdiri dari g persamaan simultan, agar sebuah persamaan teridentifikasi, jumlah variabel yang harus dikeluarkan paling sedikit adalah g – 1 variabel (baik variabel tak bebas maupun *predetermined*) dari model itu. Jika variabel yang dikeluarkan tepat g – 1 variabel, persamaan tersebut pasti teridentifikasi secara tepat (*just identified*), tetapi jika yang dikeluarkan lebih dari g – 1 variabel, maka persamaan tersebut teeridentifikasi secara berlebihan.

b. Di dalam sebuah model yang terdiri dari g persamaan simultan, agar sebuah persamaan teridentifikasi, jumlah variabel *predetermined* yang dikeluarkan dari persamaan itu tidak lebih dari jumlah variabel tak bebas yang dimasukkan di dalam persamaan itu dikurangi satu.

Dengan demikian, berdasarkan notasi sebelumnya, sebuah persamaan dinyatakan teridentifikasi jika persamaan itu memenuhi syarat perlu sebagai berikut:

$$K - k \geq g - 1$$

dengan ketentuan:

a. Jika K – k = g – 1, maka persamaan itu adalah persamaan yang teridentifikasi secara tepat (*exactly identified*).
b. Jika K – k > g – 1, maka persamaan itu adalah persamaan yang teridentifikasi secara berlebihan.

persamaan berikut sebagai sistem persamaan simultan hipotesis.

$$Y_{1i} = \beta_{10} + \beta_{11}Y_{2i} + \beta_{12}X_{1i} + \beta_{13}X_{2i} + \varepsilon_{1i} \qquad (2.2)$$

$$Y_{2i} = \beta_{20} + \beta_{21}Y_{1i} + \varepsilon_{2i} \qquad (2.3)$$

dimana:

Y_{1i}, Y_{2i} : variabel tak bebas yang saling bergantung

X_{1i}, X_{2i} : variabel bebas

β : Parameter konstanta yang tidak diketahui nilainya dan akan diestimasi

$\varepsilon_{1i}, \varepsilon_{2i}$: variabel error

i : indeks observasi

untuk memudahkan perhitungan, koefisien dan variabel dari kedua persamaan akan dipisahkan dalam tabel 2.1.

Tabel 2.1 Koefisien dalam Sistem Persamaan Simultan

Persamaan	Koefisien-koefisien dari variabel				
	1	Y_1	Y_2	X_1	X_2
2.2	$-\beta_{10}$	1	$-\beta_{11}$	$-\beta_{12}$	$-\beta_{13}$
2.3	$-\beta_{20}$	$-\beta_{21}$	1	0	0

Sumber: Analisis Penulis

Setelah koefisien dan variabel dari kedua persamaan dipisahkan seperti tabel 2.1 di atas, kemudian dihitung untuk mengetahui apakah identifikasi kedua persamaan memenuhi syarat identifikasi $K - k \geq g - 1$. Hasil perhitungannya adalah sebagai berikut:

Tabel 2.2 Identifikasi Kondisi Order

Persamaan	Jumlah Variabel		
	Predetermined yang dikeluarkan (K – k)	Variabel Tak bebas yang Diikutkan dikurangi satu (g – 1)	Identifikasi
2.2	2 – 2 = 0	1 – 1 = 0	Tepat
2.3	2 – 0 = 2	1 – 1 = 0	Berlebihan

Sumber: Analisis Penulis

Hasil identifikasi kondisi *order* yang tertera pada tabel 2.2 menunjukkan bahwa persamaan (2.2) teridentifikasi secara tepat dan persamaan (2.3) teridentifikasi secara berlebihan, dan ini berarti kedua persamaan tersebut memenuhi syarat cukup kondisi order $K-k \geq g-1$.

2.3 Estimasi Parameter

2.3.1 Pengertian Estimasi Parameter

Estimasi adalah proses yang menggunakan sampel (statistik) untuk mengestimasi hubungan parameter dengan populasi yang tidak diketahui. Etimasi merupakan suatu pernyataan mengenai parameter populasi yang diketahui berdasarkan dari sampel, dalam hal ini peubah acak yang diambil dari populasi yang bersangkutan. Jadi dengan estimasi ini keadaan parameter populasi dapat diketahui (Hasan, 2002:11). Menurut Yitnosumarto (1990: 211-212): Estimasi adalah anggota peubah acak dari statistik yang (anggota peubah diturunkan). Besaran sebagai hasil penerapan terhadap data dari semua contoh disebut nilai taksir.

2.3.2 Sifat-sifat Penaksir

1. Tak bias (*unbiased*)

   Satu hal yang menjadi tujuan dalam pendugaan harus mendekati nilai sebenarnya dari parameter yang diduga tersebut. Misalnya terdapat terdapat parameter q, jika $\hat{q}$ merupakan penduga tak bias (*unbiased estimator*) dari parameter q. (Yitnosumarto,1220: 212)

2. Efisien

Menurut Yitnosumarto (1220: 213) suatu penduga misalkan $\hat{q}$ dikatakan efisien bagi parameter q apabila penduga tersebut mempunyai varians (sebaran) yang kecil. Apabila terdapat lebih dari satu penduga, penduga dapat dibandingkan efisiensi relatif

$$R\left(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2\right)=\frac{E\left(\hat{\theta}_1-\hat{\theta}\right)^2}{E\left(\hat{\theta}_2-\hat{\theta}\right)^2}$$

$$=\frac{E\left(\hat{\theta}_1 E\left(\hat{\theta}_1\right)\right)^2}{E\left(\hat{\theta}_2-E\left(\hat{\theta}_2\right)\right)^2}$$

$$=\frac{Var\hat{\theta}_1}{Var\hat{\theta}_2}$$

3. Konsisten

Menurut Hasan (2002:113-115) suatu penduga dikatakan konsisten, jika memenuhi syarat-syarat sebagai berikut:

1. Jika ukuran sampel semakin bertambah maka penduga akan mendekati parameternya. Jika besar sampel menjadi tak terhingga maka penduga konsisten harus dapat memberi suatu penduga titik yang sempurna terhadap parameternya. Jadi $\hat{q}$ merupakan penduga konsisten, jika dan hanya jika:

$$E\left(\hat{\theta}-E\left(\theta\right)\right)^2 \text{ jika } n\to\infty$$

2. Jika ukuran sampel bertambah besar maka distribusi sampling penduga akan mengecil menjadi suatu garis tegak lurus di atas parameter yang sama dengan probabilitas sama dengan 1.

2.4 Ordinary Least Square (OLS)

Kuadrat Terkecil Biasa (*ordinary least square*) merupakan salah satu metode bagian dari kuadrat terkecil dan sering hanya disebut kuadrat terkecil saja. Metode ini sering digunakan oleh para ilmuan atau peneliti dalam proses perhitungan suatu persamaan regresi sederhana.

Dalam penggunaan regresi, terdapat beberapa asumsi dasar yang dapat menghasilkan estimator linier tidak bias yang terbaik dari model regresi yang diperoleh dari metode kuadrat terkecil biasa (*ordinary least square*) atau biasa dikenal dengan regresi OLS agar taksiran koefisien regresi itu bersifat BLUE (*Best Linier Unbiased Estimator*).

Misalkan ada persamaan regresi linier

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{2i} + \ldots + \beta_p X_{ip} + \varepsilon_i, i = 1, 2, 3, \ldots, n \qquad (2.4)$$

dimana:

Y_i	:	Variabel tak bebas
X_i	:	Variabel bebas
$\beta_0, \ldots, \beta_P$	:	Parameter konstanta yang tidak diketahui nilainya dan akan diestimasi
ε_i	:	Variabel error
p	:	Banyaknya variabel bebas
n	:	Indeks observasi

dengan pendekatan matriks, dapat disederhanakan dan diperoleh

$$Y = X\beta + \varepsilon \tag{2.5}$$

Variabel ε sangat memegang peranan dalam ekonometrika, tetapi variabel ini tidak dapat diteliti dan tidak pula tersedia informasi tentang bentuk distribusi kemungkinannya, beberapa asumsi lainnya khususnya tentang sifat statistiknya perlu dibuat dalam menerapkan OLS misalkan sampel untuk y diberikan. Maka aturan main yang memungkinkan pemakaian sampel tadi untuk mendapatkan taksiran dari β adalah dengan membuat $\varepsilon = Y - X\beta$ sekecil mungkin, maka perlu memilih parameter β sehingga

$$S = \varepsilon^T \varepsilon = \left(Y - X\beta\right)^T \left(Y - X\beta\right) \tag{2.6}$$

sekecil mungkin (minimal).

Karena persamaan tersebut skalar maka

$$\begin{aligned}
S &= (Y - X\beta)^T \left(Y - X\beta\right) \\
&= \left(Y^T - X^T\beta^T\right)\left(Y - X\beta\right) \\
&= Y^TY - Y^TX\beta - X^T\beta^TY + X^T\beta^TX\beta \\
&= Y^TY - \left(Y^TX\beta\right)^T - X^T\beta^TY + X^T\beta^TX\beta \\
&= Y^TY - 2\left(X^T\beta^TY\right) + X^T\beta^TX\beta
\end{aligned}$$

Untuk meminimumkannya dapat diperoleh dengan melakukan turunan pertama S terhadap β

$$\frac{dS}{d\beta} = 0 - 2X^T Y + X^T X\beta + \left(X^T \beta^T X\right)^T$$

$$= -2X^T Y + X^T X\beta + X\beta X^T$$

$$= -2X^T Y + 2X^T X\beta .$$

Dan kemudian menyamakannya dengan nol diperoleh

$$X^T Y + X^T X\hat{\beta}_{ols}$$

yang dinamakan persamaan normal, sehingga

$$\hat{\beta}_{ols} = \left(X^T X\right)^T X^T Y$$

yang dinamakan sebagai penaksir (*estimator*) parameter β secara OLS.

Untuk kovariannya adalah

$$Cov\left(\hat{\beta}_{ols}\right) = \left(X^T X\right)^{-1} X^T \phi X \left(X^T X\right)^{-1}$$

Sedangkan estimator kuadrat terkecil untuk variannya σ^2, adalah

$$\hat{\sigma}^2_{ols} = \frac{\varepsilon^T \varepsilon}{n-k}$$

$$= \frac{\left(Y - X\hat{\beta}_{ols}\right)^T \left(Y - X\hat{\beta}_{ols}\right)}{n-k}$$

Akan tetapi asumsi dasar metode OLS sering dilanggar dalam melakukan estimasi sebuah model sehingga parameter yang diperoleh menjadi bias, tidak konsisten dan tidak efisien. Kehadiran heteroskedastisitas akan menyebabkan metode OLS menjadi tidak efisien walaupun parameter yang diperoleh tetap tidak bias dan konsisten. Tetapi penyimpangan yang muncul dalam analisis regresi linier bukan hanya terkait dengan pelanggaran asumsi-asumsi dasar metode OLS yang menyangkut variabel-variabel bebas dan variabel disturbansi melainkan juga dapat ditimbulkan oleh kekeliruan dalam menspesifikasikan model yang akan ditaksir dan kesalahan dalam bentuk mengukur variabel. Metode OLS yang mengandung kasus heteroskedastisitas akan menyebabkan berubahnya beberapa sifat-sifat penaksir OLSE sehingga tidak lagi BLUE. Sehingga koefisien regresi linier yang diperoleh menjadi tidak efisien walaupun masih tetap tidak bias (*unbiased*) dan konsisten. Disamping itu varian penaksir OLSE tersebut juga menjadi bias (Firdaus, 2004: 107).

2.5 Least Square Dua Tahap (*Two Stage Least Square*)

Metode ini digunakan untuk mengganti metode OLS yang tidak dapat digunakan untuk mngestimasi suatu persamaan dalam sistem persamaan simultan, terutama karena adanya saling ketergantungan antara variabel *error* dengan variabel penjelas tak bebasnya, atau adanya pelonggaran terhadap asumsi klasik nomor tiga. Untuk menghindari hal itu, kita akan mencari variabel baru sebagai proxy terhadap variabel tak bebas dalam posisinya sebagai variabel penjelas, variabel baru itu disebut variabel instrument, yang diharapkan tidak memiliki korelasi dengan variabel error.

Langkah-langkah penggunaan metode tersebut menurut Setiawan & Dwi (2010:220) adalah sebagai berikut:

1. Jalankan regresi dengan OLS terhadap persamaan-persamaan bentuk tereduksi untuk variabel-variabel tak bebas yang ada di sebelah kanan sebagai variabel penjelas di dalam persamaan struktual dalam sistem persamaan simultan.
2. Ganti variabel-variabel tak bebas dalam bentuk tereduksi, Y dengan $\hat{Y}$ yang muncul pada sisi sebelah kanan persamaan structural, dan kemudian melakukan estimasi dengan menggunakan OLS pada persamaan simultan yang sudah direvisi.

2.6 Estimasi Parameter dalam Al-Qur'an

Statistika adalah ilmu yang mempelajari suatu proses dalam merencanakan, mengumpulkan, menganalisis, menginterpretasi, dan mempresentasikan data. Sebagian besar konsep dasar statistika bertolak pada cara berfikir probabilistik, hasil pengolahan data yang menggunakan metode statistika bukanlah hasil pasti, tetapi merupakan hasil taksiran, adanya ketidakpastian dari variansi yang terjadi dalam fenomena tertentu. Teknik pengambilan kesimpulan tentang suatu parameter meliputi pendugaan (*estimation*) parameter dan pengujian hipotesis.

Pendugaan/estimasi telah disinggung dalam al-Qur’an, yaitu dalam surat Al-Imron ayat 24 yang berbunyi:

ذَٰلِكَ بِأَنَّهُمۡ قَالُواْ لَن تَمَسَّنَا ٱلنَّارُ إِلَّآ أَيَّامٗا مَّعۡدُودَٰتٖۖ وَغَرَّهُمۡ فِي دِينِهِم مَّا كَانُواْ يَفۡتَرُونَ ٢٤

Artinya: Hal itu adalah karena mereka mengaku: "Kami tidak akan disentuh oleh api neraka kecuali beberapa hari yang dapat dihitung". mereka diperdayakan dalam agama mereka oleh apa yang selalu mereka ada-adakan. (al-Imron:24)

dari surat Al-Imron ayat 24 ini menjelaskan tentang orang-orang yahudi yang berpaling pada Allah SWT, terdapat kalimat -”*Ayyamamma’duudat*” - yang berarti “beberapa hari yang dapat dihitung” ini ditafsirkan sebagai perkiraan waktu kapan orang-orang yahudi tersebut mendapatkan balasan dari Allah SWT karena telah berpaling dariNya. Dari kata tersebut terdapat ketidakpastian mengenai kapan itu akan terjadi atau hanya pendugaan saja tanpa perhitungan secara matematis, pendugaan itu disebut estimasi.

Estimasi juga disinggung dalam Al-Qur’an surat Ash-Shaffaat ayat 147 yang berbunyi:

وَأَرۡسَلۡنَٰهُ إِلَىٰ مِاْئَةِ أَلۡفٍ أَوۡ يَزِيدُونَ ١٤٧

Artinya: Dan Kami utus Dia kepada seratus ribu orang atau lebih. (Ash-Shaffaat:147)

Pada Al-Qur'an surat Ash-Shaffat ayat 147 tersebut dijelaskan bahwa Nabi Yunus diutus kepada umatnya yang jumlahnya 100.000 orang atau lebih. Jika membaca ayat tersebut secara seksama, maka terdapat rasa atau kesan ketidakpastian dalam menentukan jumlah yang sebenarnya. Mengapa harus menyatakan 100.000 atau lebih? Mengapa tidak menyatakan dengan jumlah yang sebenarnya? Bukankah Allah SWT mengatahui yang ghaib dan yang nyata? Bukankah Allah SWT mengetahui segala sesuatu, termasuk jumlah Nabi Yunus. (Abdussyakir, 2007:153)

Terdapat perbedaan dalam penafsiran (seratus ribu orang atau lebih), di antaranya:

1. Al-Mahally dan As-suyuti dalam tafsir Jalalain

Menjelaskan bahwa -"*wa Arsalnaahu*"- *(Dan kami utus dia*) sesudah itu, sebagaimana status sebelumnya, kepada kaum Bunainawiy yang tinggal didaerah Mausul- -"*ilaa miati alfin*"- (*kepada seratus ribu orang*) bahkan -"*au yaaziduun*"- (*atau lebih dari itu*) yakni lebihnya dua puluh atau tiga puluh atau tujuh puluh ribu orang.

2. Al-Qarni dalam tafsir muyassar

Menjelaskan bahwa Allah s.w.t mengutus Yunus a.s. lagi-setelah dia dikeluarkan dari perut ikan-kepada kaumnya yang berjumlah lebih dari seratus ribu jiwa.

3. dr. Abdullah dalam tafsir Ibnu Katsir

Menjelaskan firman Allah ta'ala -"*au yaziduun*"- yang artinya "*atau lebih*". Ibnu 'Abbas r.a. mengatakan dalam sebuah riwayat darinya, bahwa jumlah mereka lebih dari itu, dimana mereka berjumlah 130.000 orang. Dan adanya pula, yakni berjumlah sekitar 133-139 ribu orang. Dan masih darinya juga, yaitu berjumlah sekitar 143-149 ribu orang. Wallahu a'lam. Sa'id bin Jubair mengatakan bahwa jumlah mereka lebih dari 70.000 orang. Sedangkan Mak-hul mengatakan bahwa mereka berjumlah 110.000 orang. Demikian diriwayatkan oleh Ibnu Abi Hatim. Dan Ibnu Jarir menceritakan dari dari orang yang mendengar Abul 'Aliyah mengatakan, telah bercerita kepadaku Ubay bin Ka'ab r.a. bahwa ia pernah bertanya kepada Rasulullah s.a.w. mengenai ayat di atas, dia mengatakan: "mereka lebih dari 20 ribu orang." Hal ini juga diriwayatkan oleh at-Tirmidzi, dan dia mengatakan: "hadits ini gharib". Maksud dari riwayat di atas adalah tidak kurang dari itu tapi lebih dari itu.

Para ulama mempunyai penafsiran yang berbeda-beda mengenai jumlah umat nabi Yunus, ada yang jumlahnya kurang dari 100.000 dan lebih dari itu. Dari ketiga penafsiran di atas dapat disimpulkan bahwa terdapat suatu penggunaan istilah pendugaan pada surat Ash Shaffat ayat 147.

Dari penjelasan di atas terbukti bahwa Al-Qur'an telah menjelaskan tentang statistik yang merupakan bagian dari ilmu pengetahuan. Terdapat banyak sekali perbedaan penafsiran mengenai berapa jumlah umat nabi Yunus r.a. yang menjadi bukti bahwa Allah memberikan akal dan fikiran terhadap manusia agar manusia dapat berfikir dan mengkaji Al-Qur'an yang di dalamnya terdapat banyak sekali ilmu pengetahuan, dan menguak rahasia-rahasia yang terkandung dalam Al-Qur'an.

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Estimasi Parameter Sistem Persamaan Simultan Dengan Metode *Two Stage Least Square*

Pada penelitian ini penulis menggunakan persamaan regresi model simultan yang dinyatakan dalam bentuk

$$Y_{1i} = \beta_{10} + \beta_{11} Y_{2i} + \beta_{12} X_{1i} + \beta_{13} X_{2i} + \varepsilon_{1i} \quad (3.1)$$

$$Y_{2i} = \beta_{20} + \beta_{21} Y_{1i} + \varepsilon_{2i} \quad (3.2)$$

dimana:

Y_{1i}, Y_{2i} : variabel tak bebas yang saling bergantung

X_{1i}, X_{2i} : variabel bebas

β : Parameter konstanta yang tidak diketahui nilainya dan akan diestimasi

$\varepsilon_{1i}, \varepsilon_{2i}$: variabel error

i : indeks observasi

Dalam mengestimasi peneliti menggunakan metode *two-stage least square*, dimana metode ini merupakan metode estimasi kuadran terkecil biasa (OLS) dengan dua tahapan estimasi, sebagaimana berikut:

Tahap I:

Mensubtitusikan persamaan (3.2) ke dalam persamaan (3.1)

$$Y_{1i} = \beta_{10} + \beta_{11}Y_{2i} + \beta_{12}X_{1i} + \beta_{13}X_{2i} + \varepsilon_{1i}$$

$$Y_{1i} = \beta_{10} + \beta_{11}\left(\beta_{20} + \beta_{21}Y_{1i} + \varepsilon_{2i}\right) + \beta_{12}X_{1i} + \beta_{13}X_{2i} + \varepsilon_{2i} \tag{3.3}$$

$$= \beta_{10} + \beta_{11}\beta_{20} + \beta_{11}\beta_{21}Y_{1i} + \beta_{11}\varepsilon_{2i} + \beta_{12}X_{1i} + \beta_{13}X_{2i} + \varepsilon_{1i}$$

$$(1 - \beta_{11}\beta_{21})Y_{1i} = \beta_{10} + \beta_{11}\beta_{20} + \beta_{12}X_{1i} + \beta_{13}X_{2i} + \beta_{11}\varepsilon_{21} + \varepsilon_{1i}$$

$$Y_{1i} = \frac{\beta_{10}}{1-\beta_{11}\beta_{21}} + \frac{\beta_{11}\beta_{20}}{1-\beta_{11}\beta_{21}} + \frac{\beta_{12}}{1-\beta_{11}\beta_{21}}X_{1i} + \frac{\beta_{13}}{1-\beta_{11}\beta_{21}}X_{2i} + \frac{\beta_{11}}{1-\beta_{11}\beta_{21}}\varepsilon_{2i} + \frac{1}{1-\beta_{11}\beta_{21}}\varepsilon_{1i}$$

Misalkan, $\beta_1 = \dfrac{\beta_{10}}{1-\beta_{11}\beta_{21}} + \dfrac{\beta_{11}\beta_{20}}{1-\beta_{11}\beta_{21}}$

$$\beta_2 = \frac{\beta_{12}}{1-\beta_{11}\beta_{21}},$$

$$\beta_3 = \frac{\beta_{13}}{1-\beta_{11}\beta_{21}}$$

$$v_i = \left(\frac{\beta_{11}}{1-\beta_{11}\beta_{21}}\varepsilon_{2i} + \frac{1}{1-\beta_{11}\beta_{21}}\varepsilon_{1i}\right)$$

sehingga persamaan (3.1) menjadi

$$Y_{1i} = \beta_1 + \beta_2 X_{1i} + \beta_3 X_{2i} + v_i \tag{3.4}$$

dalam bentuk matriks diperoleh

$$\begin{bmatrix} Y_{11} \\ Y_{12} \\ \vdots \\ Y_{1n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{21} \\ 1 & X_{12} & X_{21} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & X_{1n} & X_{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

yang dapat disederhanakan menjadi

$$Y = X\beta + v \tag{3.5}$$

tujuan dari metode OLS adalah meminimumkan jumlah kuadrat error

$$\begin{aligned} S &= \sum_{I=1}^{n} v_i^2 \\ &= v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2 \\ &= \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \\ &= v^T v \\ &= (Y - X\beta)^T (Y - X\beta) \\ &= \left(Y^T - \beta^T X^T\right)(Y - X\beta) \\ &= Y^T Y - Y^T X\beta - \beta^T X^T Y + \beta^T X^T X\beta \\ &= Y^T Y - \left(Y^T X\beta\right)^T - \beta^T X^T Y + \beta^T X^T X\beta \\ &= Y^T Y - 2\left(\beta^T X^T Y\right) + \beta^T X^T X\beta \end{aligned}$$

Untuk meminimumkan dapat dilakukan dengan melakukan turunan pertama S terhadap β, yaitu:

$$\frac{dS}{d\beta}=\frac{d\left(\left(Y-X\beta\right)^{T}\left(Y-X\beta\right)\right)}{d\beta}$$

$$=\frac{d\left(\left(Y^{T}-\beta^{T}X^{T}\right)\left(Y-X\beta\right)\right)}{d\beta}$$

$$=\frac{d\left(Y^{T}Y-Y^{T}X\beta-\beta^{T}X^{T}Y+\beta^{T}X^{T}X\beta\right)}{d\beta}$$

$$=\frac{d\left(Y^{T}Y-Y^{T}X\beta-Y^{T}X\beta+\beta^{T}X^{T}X\beta\right)}{d\beta}$$

$$=0-Y^{T}X-Y^{T}X+2\beta^{T}X^{T}X$$

$$=-2Y^{T}X+2\beta^{T}X^{T}X \tag{3.6}$$

dan menyamakannya dengan nol diperoleh

$$-2Y^{T}X+2\beta^{T}X^{T}X=0$$
$$2\beta^{T}X^{T}X=2Y^{T}X$$
$$\beta^{T}X^{T}X=Y^{T}X$$
$$X^{T}X\hat{\beta}=X^{T}Y$$

$$X^{T}X\hat{\beta}=X^{T}Y$$
$$\left(X^{T}X\right)^{-1}X^{T}X\hat{\beta}=\left(X^{T}X\right)^{-1}X^{T}Y$$
$$I\hat{\beta}=\left(X^{T}X\right)^{-1}X^{T}Y$$
$$\hat{\beta}=\left(X^{T}X\right)^{-1}X^{T}Y$$

$$\hat{\beta}_{0ls}=\left(X^{T}X\right)^{-1}X^{T}Y \tag{3.7}$$

untuk mencari nilai β_1, β_2, dan β_3, yaitu dengan menotasikan persamaan (3.7) ke dalam bentuk matrik sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{bmatrix}=\left[\begin{bmatrix}1 & X_{11} & X_{21}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & X_{1n} & X_{2n}\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}1 & X_{11} & X_{21}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & X_{1n} & X_{2n}\end{bmatrix}\right]^{-1}\begin{bmatrix}1 & X_{11} & X_{21}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & X_{1n} & X_{2n}\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}Y_{11}\\ \vdots\\ Y_{1n}\end{bmatrix}$$

$$=\left[\begin{bmatrix}1 & \cdots & 1\\ X_{11} & \cdots & X_{1n}\\ X_{21} & \cdots & X_{2n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & X_{11} & X_{21}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & X_{1n} & X_{2n}\end{bmatrix}\right]^{-1}\begin{bmatrix}1 & \cdots & 1\\ X_{11} & \cdots & X_{1n}\\ X_{21} & \cdots & X_{2n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Y_{11}\\ \vdots\\ Y_{1n}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1+\cdots+1 & X_{11}+\cdots+X_{1n} & X_{21}+\cdots+X_{2n}\\ X_{11}+\cdots+X_{1n} & (X_{11})^2+\cdots+(X_{1n})^2 & X_{11}X_{21}+\cdots+X_{1n}X_{2n}\\ X_{21}+\cdots+X_{2n} & X_{11}X_{21}+\cdots+X_{1n}X_{2n} & (X_{21})^2+\cdots+(X_{2n})^2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}Y_{11}+\cdots+Y_{1n}\\ X_{11}Y_{11}+\cdots+X_{1n}Y_{1n}\\ X_{21}Y_{11}+\cdots+X_{2n}Y_{1n}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n & \sum_{i=1}^{n}X_{1i} & \sum_{i=1}^{n}X_{2i}\\ \sum_{i=1}^{n}X_{1i} & \sum_{i=1}^{n}(X_{1i})^2 & \sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i}\\ \sum_{i=1}^{n}X_{2i} & \sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i} & \sum_{i=1}^{n}(X_{2i})^2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{n}Y_{1i}\\ \sum_{i=1}^{n}X_{1i}Y_{1i}\\ \sum_{i=1}^{n}X_{2i}Y_{1i}\end{bmatrix}$$

dan didapatkan nilai β_1, β_2, dan β_3, yaitu:

$$\beta_1=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_{1i})^2\sum_{i=1}^{n}(X_{2i})^2\sum_{i=1}^{n}Y_{1i}-\left(\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i}\right)^2\sum_{i=1}^{n}Y_{1i}-\sum_{i=1}^{n}X_{1i}\sum_{i=1}^{n}(X_{2i})^2\sum_{i=1}^{n}X_{1i}Y_{1i}+\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}X_{1i}Y_{1i}+\sum_{i=1}^{n}X_{1i}\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}X_{2i}Y_{1i}-\sum_{i=1}^{n}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}(X_{1i})^2\sum_{i=1}^{n}X_{2i}Y_{1i}}{n\sum_{i=1}^{n}(X_{1i})^2\sum_{i=1}^{n}(X_{2i})^2-n\left(\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i}\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{n}X_{1i}\right)^2\sum_{i=1}^{n}(X_{2i})^2+2\sum_{i=1}^{n}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}X_{1i}\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i}-\left(\sum_{i=1}^{n}X_{2i}\right)^2\sum_{i=1}^{n}(X_{1i})^2}$$

$$\beta_2=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}Y_{1i}+n\sum_{i=1}^{n}(X_{2i})^2\sum_{i=1}^{n}X_{1i}Y_{1i}-\left(\sum_{i=1}^{n}X_{2i}\right)^2\sum_{i=1}^{n}X_{1i}Y_{1i}-n\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}X_{2i}Y_{1i}+\sum_{i=1}^{n}X_{1i}\sum_{i=1}^{n}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}X_{2i}Y_{1i}-\sum_{i=1}^{n}X_{1i}\sum_{i=1}^{n}(X_{2i})^2\sum_{i=1}^{n}Y_{1i}}{n\sum_{i=1}^{n}(X_{1i})^2\sum_{i=1}^{n}(X_{2i})^2-n\left(\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i}\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{n}X_{1i}\right)^2\sum_{i=1}^{n}(X_{2i})^2+2\sum_{i=1}^{n}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}X_{1i}\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i}-\left(\sum_{i=1}^{n}X_{2i}\right)^2\sum_{i=1}^{n}(X_{1i})^2}$$

$$\beta_3=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_{1i}\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}Y_{1i}-\sum_{i=1}^{n}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}(X_{1i})^2\sum_{i=1}^{n}Y_{1i}-n\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}X_{1i}Y_{1i}+\sum_{i=1}^{n}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}X_{1i}\sum_{i=1}^{n}X_{1i}Y_{1i}+n\sum_{i=1}^{n}(X_{1i})^2\sum_{i=1}^{n}X_{2i}Y_{1i}-\left(\sum_{i=1}^{n}X_{1i}\right)^2\sum_{i=1}^{n}X_{2i}Y_{1i}}{n\sum_{i=1}^{n}(X_{1i})^2\sum_{i=1}^{n}(X_{2i})^2-n\left(\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i}\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{n}X_{1i}\right)^2\sum_{i=1}^{n}(X_{2i})^2+2\sum_{i=1}^{n}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}X_{1i}\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i}-\left(\sum_{i=1}^{n}X_{2i}\right)^2\sum_{i=1}^{n}(X_{1i})^2}$$

Tahap II

Mensubtitusikan persamaan (3.1) ke dalam persamaan (3.2)

$$Y_{2i} = \beta_{20} + \beta_{21} Y_{1i} + \varepsilon_{2i}$$

$$Y_{2i} = \beta_{20} + \beta_{21}\left(\beta_{10} + \beta_{11} Y_{2i} + \beta_{12} X_{1i} + \beta_{13} X_{2i} + \varepsilon_{1i}\right) + \varepsilon_{2i} \qquad (3.8)$$

$$= \beta_{20} + \beta_{21}\beta_{10} + \beta_{21}\beta_{11} Y_{2i} + \beta_{21}\beta_{12} X_{1i} + \beta_{21}\beta_{13} X_{2i} + \beta_{21}\varepsilon_{1i} + \varepsilon_{2i}$$

$$\left(1 - \beta_{21}\beta_{11}\right) Y_{2i} = \beta_{20} + \beta_{21}\beta_{10} + \beta_{21}\beta_{12} X_{1i} + \beta_{21}\beta_{13} X_{2i} + \beta_{21}\varepsilon_{1i} + \varepsilon_{2i}$$

$$Y_{2i} = \frac{\beta_{20}}{1-\beta_{21}\beta_{11}} + \frac{\beta_{21}\beta_{10}}{1-\beta_{21}\beta_{11}} + \frac{\beta_{21}\beta_{12}}{1-\beta_{21}\beta_{11}} X_{1i} + \frac{\beta_{21}\beta_{13}}{1-\beta_{21}\beta_{11}} X_{2i} + \frac{\beta_{21}}{1-\beta_{21}\beta_{11}} \varepsilon_{1i} + \frac{1}{1-\beta_{21}\beta_{11}} \varepsilon_{2i}$$

Misalkan, $\beta_4 = \dfrac{\beta_{20}}{1-\beta_{21}\beta_{11}} + \dfrac{\beta_{21}\beta_{10}}{1-\beta_{21}\beta_{11}}$

$$\beta_5 = \frac{\beta_{21}\beta_{12}}{1-\beta_{21}\beta_{11}},$$

$$\beta_6 = \frac{\beta_{21}\beta_{13}}{1-\beta_{21}\beta_{11}}$$

$$v_i = \frac{\beta_{21}}{1-\beta_{21}\beta_{11}} \varepsilon_{1i} + \frac{1}{1-\beta_{21}\beta_{11}} \varepsilon_{2i}$$

sehingga persamaan (3.2) menjadi

$$Y_{2i} = \beta_4 + \beta_5 X_{1i} + \beta_6 X_{2i} + v_i \qquad (3.9)$$

dalam bentuk matriks diperoleh

$$\begin{bmatrix} Y_{21} \\ Y_{22} \\ \vdots \\ Y_{2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{21} \\ 1 & X_{12} & X_{21} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & X_{1n} & X_{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_4 \\ \beta_5 \\ \beta_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

yang dapat disederhanakan menjadi

$$Y = X\beta + v \tag{3.10}$$

tujuan dari metode OLS adalah meminimumkan kuadrat error

$$
\begin{aligned}
S &= \sum_{I=1}^{n} v_i^2 \\
&= v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2 \\
&= \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \\
&= v^T v \\
&= (Y - X\beta)^T (Y - X\beta) \\
&= \left(Y^T - \beta^T X^T\right)(Y - X\beta) \\
&= Y^T Y - Y^T X\beta - \beta^T X^T Y + \beta^T X^T X\beta \\
&= Y^T Y - \left(Y^T X\beta\right)^T - \beta^T X^T Y + \beta^T X^T X\beta \\
&= Y^T Y - 2\left(\beta^T X^T Y\right) + \beta^T X^T X\beta
\end{aligned}
$$

untuk meminimumkan dapat dilakukan dengan melakukan turunan pertama S terhadap β, yaitu:

$$
\begin{aligned}
\frac{dS}{d\beta} &= \frac{d\left((Y - X\beta)^T (Y - X\beta)\right)}{d\beta} \\
&= \frac{d\left(\left(Y^T - \beta^T X^T\right)(Y - X\beta)\right)}{d\beta} \\
&= \frac{d\left(Y^T Y - Y^T X\beta - \beta^T X^T Y + \beta^T X^T X\beta\right)}{d\beta} \\
&= \frac{d\left(Y^T Y - Y^T X\beta - Y^T X\beta + \beta^T X^T X\beta\right)}{d\beta} \\
&= 0 - Y^T X - Y^T X + 2\beta^T X^T X
\end{aligned}
$$

$$= -2Y^T X + 2\beta^T X^T X \qquad (3.11)$$

dan menyamakannya dengan nol diperoleh

$$-2Y^T X + 2\beta^T X^T X = 0$$
$$2\beta^T X^T X = 2Y^T X$$
$$\beta^T X^T X = Y^T X$$
$$X^T X\,\hat{\beta} = X^T Y$$

$$X^T X\hat{\beta} = X^T Y$$
$$\left(X^T X\right)^{-1} X^T X\hat{\beta} = \left(X^T X\right)^{-1} X^T Y$$
$$I\hat{\beta} = \left(X^T X\right)^{-1} X^T Y$$
$$\hat{\beta} = \left(X^T X\right)^{-1} X^T Y$$

$$\hat{\beta}_{0ls} = \left(X^T X\right)^{-1} X^T Y \qquad (3.11)$$

untuk mencari nilai β_4, β_5, dan β_6, yaitu dengan menotasikan persamaan (3.11) ke dalam bentuk matrik sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix}\beta_4\\ \beta_5\\ \beta_6\end{bmatrix} = \left[\begin{bmatrix}1 & X_{11} & X_{21}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & X_{1n} & X_{2n}\end{bmatrix}^T \begin{bmatrix}1 & X_{11} & X_{21}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & X_{1n} & X_{2n}\end{bmatrix}\right]^{-1} \begin{bmatrix}1 & X_{11} & X_{21}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & X_{1n} & X_{2n}\end{bmatrix}^T \begin{bmatrix}Y_{11}\\ \vdots\\ Y_{1n}\end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{bmatrix}1 & \cdots & 1\\ X_{11} & \cdots & X_{1n}\\ X_{21} & \cdots & X_{2n}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1 & X_{11} & X_{21}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & X_{1n} & X_{2n}\end{bmatrix}\right]^{-1} \begin{bmatrix}1 & \cdots & 1\\ X_{11} & \cdots & X_{1n}\\ X_{21} & \cdots & X_{2n}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}Y_{11}\\ \vdots\\ Y_{1n}\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1+\cdots+1 & X_{11}+\cdots+X_{1n} & X_{21}+\cdots+X_{2n}\\ X_{11}+\cdots+X_{1n} & \left(X_{11}\right)^2+\cdots+\left(X_{1n}\right)^2 & X_{11}X_{21}+\cdots+X_{1n}X_{2n}\\ X_{21}+\cdots+X_{2n} & X_{11}X_{21}+\cdots+X_{1n}X_{2n} & \left(X_{21}\right)^2+\cdots+\left(X_{2n}\right)^2\end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix}Y_{11}+\cdots+Y_{1n}\\ X_{11}Y_{11}+\cdots+X_{1n}Y_{1n}\\ X_{21}Y_{11}+\cdots+X_{2n}Y_{1n}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\beta_4\\ \beta_5\\ \beta_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n}X_{1i} & \sum_{i=1}^{n}X_{2i}\\ \sum_{i=1}^{n}X_{1i} & \sum_{i=1}^{n}(X_{1i})^2 & \sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i}\\ \sum_{i=1}^{n}X_{2i} & \sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i} & \sum_{i=1}^{n}(X_{2i})^2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{n}Y_{1i}\\ \sum_{i=1}^{n}X_{1i}Y_{1i}\\ \sum_{i=1}^{n}X_{2i}Y_{1i}\end{bmatrix}$$

dan didapatkan nilai β_4, β_5, dan β_6, yaitu:

$$\beta_4=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_{1i})^2\sum_{i=1}^{n}(X_{2i})^2\sum_{i=1}^{n}Y_{1i}-\left(\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i}\right)^2\sum_{i=1}^{n}Y_{1i}-\sum_{i=1}^{n}X_{1i}\sum_{i=1}^{n}(X_{2i})^2\sum_{i=1}^{n}X_{1i}Y_{1i}+\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}X_{1i}Y_{1i}+\sum_{i=1}^{n}X_{1i}\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}X_{2i}Y_{1i}-\sum_{i=1}^{n}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}(X_{1i})^2\sum_{i=1}^{n}X_{2i}Y_{1i}}{n\sum_{i=1}^{n}(X_{1i})^2\sum_{i=1}^{n}(X_{2i})^2-n\left(\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i}\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{n}X_{1i}\right)^2\sum_{i=1}^{n}(X_{2i})^2+2\sum_{i=1}^{n}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}X_{1i}\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i}-\left(\sum_{i=1}^{n}X_{2i}\right)^2\sum_{i=1}^{n}(X_{1i})^2}$$

$$\beta_5=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}Y_{1i}+n\sum_{i=1}^{n}(X_{2i})^2\sum_{i=1}^{n}X_{1i}Y_{1i}-\left(\sum_{i=1}^{n}X_{2i}\right)^2\sum_{i=1}^{n}X_{1i}Y_{1i}-n\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}X_{2i}Y_{1i}+\sum_{i=1}^{n}X_{1i}\sum_{i=1}^{n}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}X_{2i}Y_{1i}-\sum_{i=1}^{n}X_{1i}\sum_{i=1}^{n}(X_{2i})^2\sum_{i=1}^{n}Y_{1i}}{n\sum_{i=1}^{n}(X_{1i})^2\sum_{i=1}^{n}(X_{2i})^2-n\left(\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i}\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{n}X_{1i}\right)^2\sum_{i=1}^{n}(X_{2i})^2+2\sum_{i=1}^{n}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}X_{1i}\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i}-\left(\sum_{i=1}^{n}X_{2i}\right)^2\sum_{i=1}^{n}(X_{1i})^2}$$

$$\beta_6=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_{1i}\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}Y_{1i}-\sum_{i=1}^{n}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}(X_{1i})^2\sum_{i=1}^{n}Y_{1i}-n\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}X_{1i}Y_{1i}+\sum_{i=1}^{n}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}X_{1i}\sum_{i=1}^{n}X_{1i}Y_{1i}+n\sum_{i=1}^{n}(X_{1i})^2\sum_{i=1}^{n}X_{2i}Y_{1i}-\left(\sum_{i=1}^{n}X_{1i}\right)^2\sum_{i=1}^{n}X_{2i}Y_{1i}}{n\sum_{i=1}^{n}(X_{1i})^2\sum_{i=1}^{n}(X_{2i})^2-n\left(\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i}\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{n}X_{1i}\right)^2\sum_{i=1}^{n}(X_{2i})^2+2\sum_{i=1}^{n}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}X_{1i}\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i}-\left(\sum_{i=1}^{n}X_{2i}\right)^2\sum_{i=1}^{n}(X_{1i})^2}$$

Dari hasil estimasi sistem persamaan simultan dengan *metode two stage least square* didapatkan enam persamaan yang dapat digunakan untuk mencari solusi dari nilai-nilai estimasi dari β_{10}, β_{11}, β_{12}, β_{13}, β_{20}, dan β_{21} dapat ditulis sebagai,

$$\beta_{10}=\beta_1-\beta_1\beta_{11}\beta_{21}-\beta_{11}\beta_{20} \tag{3.12}$$

$$\beta_{11}=\frac{\beta_6-\beta_{21}\beta_3}{\beta_6\beta_{21}} \tag{3.13}$$

$$\beta_{12}=\beta_2-\beta_2\beta_{11}\beta_{21} \tag{3.14}$$

$$\beta_{13} = \beta_3 - \beta_3\beta_{11}\beta_{21} \tag{3.15}$$

$$\beta_{20} = \beta_4 - \beta_4\beta_{21}\beta_{11} - \beta_{21}\beta_{10} \tag{3.16}$$

$$\beta_{21} = \frac{\beta_5 - \beta_5\beta_6}{\beta_5\beta_3 + \beta_6\beta_{12}} \tag{3.17}$$

3.2 Kajian Estimasi dan Persamaan Simultan dalam Al-Qur'an

Al-Qur'an merupakan kalam Allah yang di dalamnya terdapat ayat-ayat yang memuat petunjuk serta penjelas tentang semua yang terjadi di dunia. Kebenaran Al-Qur'an bersifat mutlak. Di dalam Al-Qur'an ada beberapa ayat yang menyinggung tentang penelitian ini diantaranya:

1. Surat Al-Imron ayat 24

ذَٰلِكَ بِأَنَّهُمْ قَالُوا۟ لَن تَمَسَّنَا ٱلنَّارُ إِلَّآ أَيَّامًا مَّعْدُودَٰتٍ ۖ وَغَرَّهُمْ فِى دِينِهِم مَّا كَانُوا۟

يَفْتَرُونَ ٢٤

Artinya: Hal itu adalah karena mereka mengaku: "Kami tidak akan disentuh oleh api neraka kecuali beberapa hari yang dapat dihitung". mereka diperdayakan dalam agama mereka oleh apa yang selalu mereka ada-adakan. (al-Imron:24)

dari surat Al-Imron ayat 24 ini menjelaskan tentang orang-orang yahudi yang berpaling pada Allah SWT, terdapat kalimat -"*Ayyamamma'duudat*" - yang berarti "beberapa hari yang dapat dihitung" ini ditafsirkan sebagai perkiraan waktu kapan orang-orang yahudi tersebut mendapatkan balasan dari Allah SWT karena telah berpaling dariNya. Dari kata tersebut terdapat ketidakpastian mengenai kapan itu akan terjadi atau hanya pendugaan saja tanpa perhitungan secara matematis, pendugaan itu disebut estimasi.

2. Surat Al-Isro’ ayat 7

إِنْ أَحْسَنتُمْ أَحْسَنتُمْ لِأَنفُسِكُمْ ۖ وَإِنْ أَسَأْتُمْ فَلَهَا ۚ فَإِذَا جَاءَ وَعْدُ ٱلْآخِرَةِ لِيَسُـٔوا۟ وُجُوهَكُمْ

وَلِيَدْخُلُوا۟ ٱلْمَسْجِدَ كَمَا دَخَلُوهُ أَوَّلَ مَرَّةٍ وَلِيُتَبِّرُوا۟ مَا عَلَوْا۟ تَتْبِيرًا ﴿٧﴾

Artinya: “*jika kamu berbuat baik (berarti) kamu berbuat baik bagi dirimu sendiri dan jika kamu berbuat jahat, Maka (kejahatan) itu bagi dirimu sendiri, dan apabila datang saat hukuman bagi (kejahatan) yang kedua, (kami datangkan orang-orang lain) untuk menyuramkan muka-muka kamu dan mereka masuk ke dalam mesjid, sebagaimana musuh-musuhmu memasukinya pada kali pertama dan untuk membinasakan sehabis-habisnya apa saja yang mereka kuasai*”

Persamaan simultan adalah persamaan dimana ada hubungan timbal balik antar variabel *Y* dan *X*. Dari ayat di atas kata “*In ahsantum ahsantum lianfusikum*” yang artinya “*jika kamu berbuat baik (berarti) kamu berbuat baik bagi dirimu sendiri”* Allah SWT memerintahkan kepada hambanya untuk selalu tolong-menolong dalam kebaikan dan takwa, misalnya dengan memberi sedekah kapada orang lain yang membutuhkan, Allah SWT telah berjanji akan melipat gandakan rizki orang yang bersedekah, jika difikir secara logika harta kita akan berkurang tetapi sejatinya akan bertambah, begitu juga dengan berzakat kepada orang miskin itu sama dengan membersihkan harta kita, dari sini jelas bahwa ada hubungan timbal balik yaitu orang yang bersedekah akan mendapatkan balasan kebaikan dari Allah SWT, selain itu juga dapat menjaga keharmonisan dalam hubungan persaudaraan. "*jika kamu berbuat baik (berarti) kamu berbuat baik bagi dirimu sendiri*" itu dimisalkan dengan variabel *Y*, dimana dalam sistem persamaan simultan variabel tersebut saling bergantung antar persamaan satu dengan yang lain, ini berarti manusia harus saling membantu antara satu dengan yang lain dalam hal kebaikan demi mendapatkan ridho Allah SWT.

Sedangkan kata "*wa in asaktum falahaa*" yang artinya "*dan jika kamu berbuat jahat, Maka (kejahatan) itu bagi dirimu sendiri* " misal membantu mencuri barang milik orang lain, satu sisi kita membantu pencuri mendapatkan barang yang diinginkan tapi di sisi yang lain kita merugikan orang lain. Pencuri dan orang yang membantu akan di anggap sebagai orang jahat, karena selain melanggar hukum, mencuri juga dilarang agama. Ini merupakan hubungan timbal balik yang terjadi ketika kita membantu orang lain dalam kejahatan tidak hanya pencuri tapi orang yang membantupun akan mendapatkan sanksi sosial dan juga sanksi Allah SWT . Kata "*wa in asaktum falahaa*" ini dimisalkan variabel *X*, dalam persamaan ini juga terjadi hubungan timbal balik antar variabel *X*.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Kesimpulan yang dapat diperoleh dari penelitian ini adalah, dari hasil estimasi sistem persamaan simultan dengan *metode two stage least square* diperoleh bahwa bentuk dari estimasi sistem persamaan simultan dengan metode *Two-stage Least Squares*, adalah:

$$\hat{\beta}_{0ls} = \left(X^T X\right)^{-1} X^T Y$$

Dan didapatkan enam persamaan yang dapat digunakan untuk mencari solusi dari nilai-nilai estimasi dari β_{10}, $\beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{13}, \beta_{20}$, dan β_{21} dapat ditulis sebagai,

$$\beta_{10} = \beta_1 - \beta_1\beta_{11}\beta_{21} - \beta_{11}\beta_{20}$$

$$\beta_{11} = \frac{\beta_6 - \beta_{21}\beta_3}{\beta_6\beta_{21}}$$

$$\beta_{12} = \beta_2 - \beta_2\beta_{11}\beta_{21}$$

$$\beta_{13} = \beta_3 - \beta_3\beta_{11}\beta_{21}$$

$$\beta_{20} = \beta_4 - \beta_4\beta_{21}\beta_{11} - \beta_{21}\beta_{10}$$

$$\beta_{21} = \frac{\beta_5 - \beta_5\beta_6}{\beta_5\beta_3 + \beta_6\beta_{12}}$$

4.2 Saran

Di dalam penelitian ini peneliti menggunakan model regresi simultan dengan metode estimasinya *two stage least square*. Bagi pembaca yang ingin melakukan penelitian serupa, peneliti menyarankan menggunakan model yang sama tapi dengan menggunakan metode lain dalam mengestimasi seperti *Indirect least square* atau *three stage least square* .

DAFTAR PUSTAKA

Abdullah. DR. 2004. *Tafsir Ibnu Katsir*. Bogor: Pustaka Imam Syafi'i

Abdusysyakir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN PRESS.

Al-Mahally, Imam Jalalud-din dan As-Suyuthi, Imam Jalalud-din. 1990. *Terjemah Tafsir Jalalain Berikut Asbaabun Nuzul*. Bandung: Sinar Baru.

Al-Qarni, 'Aidh. Dr.2008. *Tafsir Muyassar*. Jakarta: Qissthi Press

Firdaus, Muhammad. 2004. *Ekonometrika Suatu Pendekatan Aplikatif*. Jakarta: PT. Bumi Aksara

Gurajati, N, demogar. 2006. *Dasar-dasar Ekonometrika*. Jakarta: Erlangga

Irianto, Agus. 2006. *Statistik Konsep Dasar dan Aplikasinya*. Jakarta: Kencana Prenada Media.

Mulyono, Sri. 2006. *STATISTIKA Untuk Ekonomi dan Bisnis*. Jakarta: Fakultas UI

Setiawan, & Endah, Dwi. 2010. *Ekonometrika*. Yogyakarta: Andi Offset

Sudiyono, Anas. 2001. *Pengantar Statistik Pendidikan*. Jakarta: PT RajaGrafindo

Supangat, Andi. 2008. *Statistika dalam Kajian Deskriptif, Inferensi dan Nonparametrik*. Jakarta: Kencana Prenada Media Group.

Rahman, alfazur. 2000. *AlQur'an sumber ilmu pengetahuan*. Jakarta: Rineka cipta

Wei, W.W.S. 1994. *Time Series Analysis: Univariate and Multivariate Methods.* New York: Addison-Wesley Publishing Company.

Yitnosumarto, suntoyo. 1990. *Dasar-dasar statistika. Jakarta*: C.V Rajawali

LAMPIRAN 1

$$\hat{\beta}_{ols} = \left(X^T X\right)^{-1} X^T Y$$

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \left[\begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{21} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & X_{1n} & X_{2n} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{21} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & X_{1n} & X_{2n} \end{bmatrix} \right]^{-1} \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{21} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & X_{1n} & X_{2n} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Y_{11} \\ \vdots \\ Y_{1n} \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ X_{11} & \cdots & X_{1n} \\ X_{21} & \cdots & X_{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{21} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & X_{1n} & X_{2n} \end{bmatrix} \right]^{-1} \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ X_{11} & \cdots & X_{1n} \\ X_{21} & \cdots & X_{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{11} \\ \vdots \\ Y_{1n} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+\cdots+1 & X_{11}+\cdots+X_{1n} & X_{21}+\cdots+X_{2n} \\ X_{11}+\cdots+X_{1n} & (X_{11})^2+\cdots+(X_{1n})^2 & X_{11}X_{21}+\cdots+X_{1n}X_{2n} \\ X_{21}+\cdots+X_{2n} & X_{11}X_{21}+\cdots+X_{1n}X_{2n} & (X_{21})^2+\cdots+(X_{2n})^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Y_{11}+\cdots+Y_{1n} \\ X_{11}Y_{11}+\cdots+X_{1n}Y_{1n} \\ X_{21}Y_{11}+\cdots+X_{2n}Y_{1n} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} X_{1i} & \sum_{i=1}^{n} X_{2i} \\ \sum_{i=1}^{n} X_{1i} & \sum_{i=1}^{n} (X_{1i})^2 & \sum_{i=1}^{n} X_{1i}X_{2i} \\ \sum_{i=1}^{n} X_{2i} & \sum_{i=1}^{n} X_{1i}X_{2i} & \sum_{i=1}^{n} (X_{2i})^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} Y_{1i} \\ \sum_{i=1}^{n} X_{1i}Y_{1i} \\ \sum_{i=1}^{n} X_{2i}Y_{1i} \end{bmatrix}$$

Sebelum mencari invers matrik di atas sebelumnya mencari determinan dari matriks 3 x 3 di atas sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} X_{1i} & \sum_{i=1}^{n} X_{2i} \\ \sum_{i=1}^{n} X_{1i} & \sum_{i=1}^{n} (X_{1i})^2 & \sum_{i=1}^{n} X_{1i}X_{2i} \\ \sum_{i=1}^{n} X_{2i} & \sum_{i=1}^{n} X_{1i}X_{2i} & \sum_{i=1}^{n} (X_{2i})^2 \end{bmatrix} = n\left[\sum_{i=1}^{n}(X_{1i})^2 \sum_{i=1}^{n}(X_{2i})^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} X_{1i}X_{2i}\right)^2\right] - \sum_{i=1}^{n} X_{1i}\left[\sum_{i=1}^{n} X_{1i}\sum_{i=1}^{n}(X_{2i})^2 - \sum_{i=1}^{n} X_{2i}\sum_{i=1}^{n} X_{1i}X_{2i}\right]$$

$$+\sum_{i=1}^{n} X_{2i}\left[\sum_{i=1}^{n} X_{1i}\sum_{i=1}^{n} X_{1i}X_{2i} - \sum_{i=1}^{n} X_{2i}\sum_{i=1}^{n}(X_{1i})^2\right]$$

$$= n\sum_{i=1}^{n}(X_{1i})^2 \sum_{i=1}^{n}(X_{2i})^2 - n\left(\sum_{i=1}^{n} X_{1i}X_{2i}\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} X_{1i}\right)^2 \sum_{i=1}^{n}(X_{2i})^2 + \sum_{i=1}^{n} X_{1i}\sum_{i=1}^{n} X_{2i}\sum_{i=1}^{n} X_{1i}X_{2i}$$

$$+\sum_{i=1}^{n} X_{2i}\sum_{i=1}^{n} X_{1i}\sum_{i=1}^{n} X_{1i}X_{2i} - \left(\sum_{i=1}^{n} X_{2i}\right)^2 \sum_{i=1}^{n}(X_{1i})^2$$

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} X_{1i} & \sum_{i=1}^{n} X_{2i} \\ \sum_{i=1}^{n} X_{1i} & \sum_{i=1}^{n} (X_{1i})^2 & \sum_{i=1}^{n} X_{1i} X_{2i} \\ \sum_{i=1}^{n} X_{2i} & \sum_{i=1}^{n} X_{1i} X_{2i} & \sum_{i=1}^{n} (X_{2i})^2 \end{bmatrix} = n\sum_{i=1}^{n} (X_{1i})^2 \sum_{i=1}^{n} (X_{2i})^2 - n\left(\sum_{i=1}^{n} X_{1i} X_{2i}\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} X_{1i}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} (X_{2i})^2$$

$$+2\sum_{i=1}^{n} X_{2i} \sum_{i=1}^{n} X_{1i} \sum_{i=1}^{n} X_{1i} X_{2i} - \left(\sum_{i=1}^{n} X_{2i}\right)^2 \sum_{i=1}^{n} (X_{1i})^2$$

Untuk menjadi Adjoin dari Matriks 3 x 3 menggunakan metode kofaktor, misalkan matriks 3 x 3 di atas adalah matriks A

$$A = \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} X_{1i} & \sum_{i=1}^{n} X_{2i} \\ \sum_{i=1}^{n} X_{1i} & \sum_{i=1}^{n} (X_{1i})^2 & \sum_{i=1}^{n} X_{1i} X_{2i} \\ \sum_{i=1}^{n} X_{2i} & \sum_{i=1}^{n} X_{1i} X_{2i} & \sum_{i=1}^{n} (X_{2i})^2 \end{bmatrix}$$

$$M_{11} = \sum_{i=1}^{n} (X_{1i})^2 \sum_{i=1}^{n} (X_{2i})^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} X_{1i} X_{2i}\right)^2$$

$$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = 1.\sum_{i=1}^{n} (X_{1i})^2 \sum_{i=1}^{n} (X_{2i})^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} X_{1i} X_{2i}\right)^2$$

$$M_{12} = \sum_{i=1}^{n} X_{1i} \sum_{i=1}^{n} (X_{2i})^2 - \sum_{i=1}^{n} X_{1i} X_{2i} \sum_{i=1}^{n} X_{2i}$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -\sum_{i=1}^{n} X_{1i} \sum_{i=1}^{n} (X_{2i})^2 + \sum_{i=1}^{n} X_{1i} X_{2i} \sum_{i=1}^{n} X_{2i}$$

$$M_{13} = \sum_{i=1}^{n} X_{1i} \sum_{i=1}^{n} X_{1i} X_{2i} - \sum_{i=1}^{n} X_{2i} \sum_{i=1}^{n} (X_{1i})^2$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = \sum_{i=1}^{n} X_{1i} \sum_{i=1}^{n} X_{1i} X_{2i} - \sum_{i=1}^{n} X_{2i} \sum_{i=1}^{n} (X_{1i})^2$$

$$M_{21} = \sum_{i=1}^{n} X_{1i} \sum_{i=1}^{n} (X_{2i})^2 - \sum_{i=1}^{n} X_{2i} \sum_{i=1}^{n} X_{1i} X_{2i}$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -\sum_{i=1}^{n} X_{1i} \sum_{i=1}^{n} (X_{2i})^2 + \sum_{i=1}^{n} X_{2i} \sum_{i=1}^{n} X_{1i} X_{2i}$$

$$M_{22} = n\sum_{i=1}^{n} (X_{2i})^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} X_{2i} \right)^2$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = n\sum_{i=1}^{n} (X_{2i})^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} X_{2i} \right)^2$$

$$M_{23} = n\sum_{i=1}^{n} X_{1i} X_{2i} - \sum_{i=1}^{n} X_{1i} \sum_{i=1}^{n} X_{2i}$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -n\sum_{i=1}^{n} X_{1i} X_{2i} + \sum_{i=1}^{n} X_{1i} \sum_{i=1}^{n} X_{2i}$$

$$M_{31} = \sum_{i=1}^{n} X_{1i} \sum_{i=1}^{n} X_{1i} X_{2i} - \sum_{i=1}^{n} X_{2i} \sum_{i=1}^{n} (X_{1i})^2$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = \sum_{i=1}^{n} X_{1i} \sum_{i=1}^{n} X_{1i} X_{2i} - \sum_{i=1}^{n} X_{2i} \sum_{i=1}^{n} (X_{1i})^2$$

$$M_{32} = n\sum_{i=1}^{n} X_{1i} X_{2i} - \sum_{i=1}^{n} X_{2i} \sum_{i=1}^{n} X_{1i}$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -n\sum_{i=1}^{n} X_{1i} X_{2i} + \sum_{i=1}^{n} X_{2i} \sum_{i=1}^{n} X_{1i}$$

$$M_{33} = n\sum_{i=1}^{n} (X_{1i})^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} X_{1i} \right)^2$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = n\sum_{i=1}^{n} (X_{1i})^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} X_{1i} \right)^2$$

$$Adj\,A = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n}(X_{1i})^2 \sum_{i=1}^{n}(X_{2i})^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} X_{1i}X_{2i}\right)^2 & -\sum_{i=1}^{n} X_{1i} \sum_{i=1}^{n}(X_{2i})^2 + \sum_{i=1}^{n} X_{1i}X_{2i} \sum_{i=1}^{n} X_{2i} & \sum_{i=1}^{n} X_{1i} \sum_{i=1}^{n} X_{1i}X_{2i} - \sum_{i=1}^{n} X_{2i} \sum_{i=1}^{n}(X_{1i})^2 \\ -\sum_{i=1}^{n} X_{1i} \sum_{i=1}^{n}(X_{2i})^2 + \sum_{i=1}^{n} X_{2i} \sum_{i=1}^{n} X_{1i}X_{2i} & n\sum_{i=1}^{n}(X_{2i})^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} X_{2i}\right)^2 & -n\sum_{i=1}^{n} X_{1i}X_{2i} + \sum_{i=1}^{n} X_{1i} \sum_{i=1}^{n} X_{2i} \\ \sum_{i=1}^{n} X_{1i} \sum_{i=1}^{n} X_{1i}X_{2i} - \sum_{i=1}^{n} X_{2i} \sum_{i=1}^{n}(X_{1i})^2 & -n\sum_{i=1}^{n} X_{1i}X_{2i} + \sum_{i=1}^{n} X_{2i} \sum_{i=1}^{n} X_{1i} & n\sum_{i=1}^{n}(X_{1i})^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} X_{1i}\right)^2 \end{bmatrix}$$

mencari invers dengan metode sarrus adalah dengan mengalikan determinan dengan adjoin matriks A sebagaimana berikut,

$$=\frac{1}{n\sum_{i=1}^{n}(X_{1i})^2\sum_{i=1}^{n}(X_{2i})^2-n\left(\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i}\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{n}X_{1i}\right)^2\sum_{i=1}^{n}(X_{2i})^2+2\sum_{i=1}^{n}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}X_{1i}\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i}-\left(\sum_{i=1}^{n}X_{2i}\right)^2\sum_{i=1}^{n}(X_{1i})^2}$$

$$\cdot\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{n}(X_{1i})^2\sum_{i=1}^{n}(X_{2i})^2-\left(\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i}\right)^2 & -\sum_{i=1}^{n}X_{1i}\sum_{i=1}^{n}(X_{2i})^2+\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}X_{2i} & \sum_{i=1}^{n}X_{1i}\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i}-\sum_{i=1}^{n}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}(X_{1i})^2\\ -\sum_{i=1}^{n}X_{1i}\sum_{i=1}^{n}(X_{2i})^2+\sum_{i=1}^{n}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i} & n\sum_{i=1}^{n}(X_{2i})^2-\left(\sum_{i=1}^{n}X_{2i}\right)^2 & -n\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i}+\sum_{i=1}^{n}X_{1i}\sum_{i=1}^{n}X_{2i}\\ \sum_{i=1}^{n}X_{1i}\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i}-\sum_{i=1}^{n}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}(X_{1i})^2 & -n\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i}+\sum_{i=1}^{n}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}X_{1i} & n\sum_{i=1}^{n}(X_{1i})^2-\left(\sum_{i=1}^{n}X_{1i}\right)^2\end{bmatrix}$$

sebelumnya di kalikan dengan matrik $\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{n}Y_{1i}\\ \sum_{i=1}^{n}X_{1i}Y_{1i}\\ \sum_{i=1}^{n}X_{2i}Y_{1i}\end{bmatrix}$ dan hasilnya,

$$\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{n}(X_{1i})^2\sum_{i=1}^{n}(X_{2i})^2-\left(\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i}\right)^2 & -\sum_{i=1}^{n}X_{1i}\sum_{i=1}^{n}(X_{2i})^2+\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}X_{2i} & \sum_{i=1}^{n}X_{1i}\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i}-\sum_{i=1}^{n}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}(X_{1i})^2\\ -\sum_{i=1}^{n}X_{1i}\sum_{i=1}^{n}(X_{2i})^2+\sum_{i=1}^{n}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i} & n\sum_{i=1}^{n}(X_{2i})^2-\left(\sum_{i=1}^{n}X_{2i}\right)^2 & -n\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i}+\sum_{i=1}^{n}X_{1i}\sum_{i=1}^{n}X_{2i}\\ \sum_{i=1}^{n}X_{1i}\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i}-\sum_{i=1}^{n}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}(X_{1i})^2 & -n\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i}+\sum_{i=1}^{n}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}X_{1i} & n\sum_{i=1}^{n}(X_{1i})^2-\left(\sum_{i=1}^{n}X_{1i}\right)^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{n}Y_{1i}\\ \sum_{i=1}^{n}X_{1i}Y_{1i}\\ \sum_{i=1}^{n}X_{2i}Y_{1i}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{n}(X_{1i})^2\sum_{i=1}^{n}(X_{2i})^2\sum_{i=1}^{n}Y_{1i}-\left(\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i}\right)^2\sum_{i=1}^{n}Y_{1i}-\sum_{i=1}^{n}X_{1i}\sum_{i=1}^{n}(X_{2i})^2\sum_{i=1}^{n}X_{1i}Y_{1i}+\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}X_{1i}Y_{1i}+\sum_{i=1}^{n}X_{1i}\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}X_{2i}Y_{1i}-\sum_{i=1}^{n}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}(X_{1i})^2\sum_{i=1}^{n}X_{2i}Y_{1i}\\ -\sum_{i=1}^{n}X_{1i}\sum_{i=1}^{n}(X_{2i})^2\sum_{i=1}^{n}Y_{1i}+\sum_{i=1}^{n}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}Y_{1i}+n\sum_{i=1}^{n}(X_{2i})^2\sum_{i=1}^{n}X_{1i}Y_{1i}-\left(\sum_{i=1}^{n}X_{2i}\right)^2\sum_{i=1}^{n}X_{1i}Y_{1i}-n\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}X_{2i}Y_{1i}+\sum_{i=1}^{n}X_{1i}\sum_{i=1}^{n}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}X_{2i}Y_{1i}\\ \sum_{i=1}^{n}X_{1i}\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}Y_{1i}-\sum_{i=1}^{n}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}(X_{1i})^2\sum_{i=1}^{n}Y_{1i}-n\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}X_{1i}Y_{1i}+\sum_{i=1}^{n}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}X_{1i}\sum_{i=1}^{n}X_{1i}Y_{1i}+n\sum_{i=1}^{n}(X_{1i})^2\sum_{i=1}^{n}X_{2i}Y_{1i}-\left(\sum_{i=1}^{n}X_{1i}\right)^2\sum_{i=1}^{n}X_{2i}Y_{1i}\end{bmatrix}$$

Kemudian dikalikan dengan determinannya, yaitu

$$\frac{1}{n\sum_{i=1}^{n}(X_{1i})^2\sum_{i=1}^{n}(X_{2i})^2-n\left(\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i}\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{n}X_{1i}\right)^2\sum_{i=1}^{n}(X_{2i})^2+2\sum_{i=1}^{n}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}X_{1i}\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i}-\left(\sum_{i=1}^{n}X_{2i}\right)^2\sum_{i=1}^{n}(X_{1i})^2}$$

dan didapatkan nilai β_1, β_2, dan β_3, yaitu:

$$\beta_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_{1i})^2\sum_{i=1}^{n}(X_{2i})^2\sum_{i=1}^{n}Y_{1i} - \left(\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i}\right)^2\sum_{i=1}^{n}Y_{1i} - \sum_{i=1}^{n}X_{1i}\sum_{i=1}^{n}(X_{2i})^2\sum_{i=1}^{n}X_{1i}Y_{1i} + \sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}X_{1i}Y_{1i} + \sum_{i=1}^{n}X_{1i}\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}X_{2i}Y_{1i} - \sum_{i=1}^{n}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}(X_{1i})^2\sum_{i=1}^{n}X_{2i}Y_{1i}}{n\sum_{i=1}^{n}(X_{1i})^2\sum_{i=1}^{n}(X_{2i})^2 - n\left(\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i}\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}X_{1i}\right)^2\sum_{i=1}^{n}(X_{2i})^2 + 2\sum_{i=1}^{n}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}X_{1i}\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i} - \left(\sum_{i=1}^{n}X_{2i}\right)^2\sum_{i=1}^{n}(X_{1i})^2}$$

$$\beta_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}Y_{1i} + n\sum_{i=1}^{n}(X_{2i})^2\sum_{i=1}^{n}X_{1i}Y_{1i} - \left(\sum_{i=1}^{n}X_{2i}\right)^2\sum_{i=1}^{n}X_{1i}Y_{1i} - n\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}X_{2i}Y_{1i} + \sum_{i=1}^{n}X_{1i}\sum_{i=1}^{n}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}X_{2i}Y_{1i} - \sum_{i=1}^{n}X_{1i}\sum_{i=1}^{n}(X_{2i})^2\sum_{i=1}^{n}Y_{1i}}{n\sum_{i=1}^{n}(X_{1i})^2\sum_{i=1}^{n}(X_{2i})^2 - n\left(\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i}\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}X_{1i}\right)^2\sum_{i=1}^{n}(X_{2i})^2 + 2\sum_{i=1}^{n}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}X_{1i}\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i} - \left(\sum_{i=1}^{n}X_{2i}\right)^2\sum_{i=1}^{n}(X_{1i})^2}$$

$$\beta_3 = \frac{\sum_{i=1}^{n}X_{1i}\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}Y_{1i} - \sum_{i=1}^{n}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}(X_{1i})^2\sum_{i=1}^{n}Y_{1i} - n\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}X_{1i}Y_{1i} + \sum_{i=1}^{n}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}X_{1i}\sum_{i=1}^{n}X_{1i}Y_{1i} + n\sum_{i=1}^{n}(X_{1i})^2\sum_{i=1}^{n}X_{2i}Y_{1i} - \left(\sum_{i=1}^{n}X_{1i}\right)^2\sum_{i=1}^{n}X_{2i}Y_{1i}}{n\sum_{i=1}^{n}(X_{1i})^2\sum_{i=1}^{n}(X_{2i})^2 - n\left(\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i}\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}X_{1i}\right)^2\sum_{i=1}^{n}(X_{2i})^2 + 2\sum_{i=1}^{n}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}X_{1i}\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i} - \left(\sum_{i=1}^{n}X_{2i}\right)^2\sum_{i=1}^{n}(X_{1i})^2}$$

LAMPIRAN 2

$$\hat{\beta}_{ols} = \left(X^T X \right)^{-1} X^T Y$$

$$\begin{bmatrix} \beta_4 \\ \beta_5 \\ \beta_6 \end{bmatrix} = \left[\begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{21} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & X_{1n} & X_{2n} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{21} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & X_{1n} & X_{2n} \end{bmatrix} \right]^{-1} \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{21} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & X_{1n} & X_{2n} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Y_{11} \\ \vdots \\ Y_{1n} \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ X_{11} & \cdots & X_{1n} \\ X_{21} & \cdots & X_{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{21} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & X_{1n} & X_{2n} \end{bmatrix} \right]^{-1} \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ X_{11} & \cdots & X_{1n} \\ X_{21} & \cdots & X_{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{11} \\ \vdots \\ Y_{1n} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+\cdots+1 & X_{11}+\cdots+X_{1n} & X_{21}+\cdots+X_{2n} \\ X_{11}+\cdots+X_{1n} & (X_{11})^2+\cdots+(X_{1n})^2 & X_{11}X_{21}+\cdots+X_{1n}X_{2n} \\ X_{21}+\cdots+X_{2n} & X_{11}X_{21}+\cdots+X_{1n}X_{2n} & (X_{21})^2+\cdots+(X_{2n})^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Y_{11}+\cdots+Y_{1n} \\ X_{11}Y_{11}+\cdots+X_{1n}Y_{1n} \\ X_{21}Y_{11}+\cdots+X_{2n}Y_{1n} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \beta_4 \\ \beta_5 \\ \beta_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} X_{1i} & \sum_{i=1}^{n} X_{2i} \\ \sum_{i=1}^{n} X_{1i} & \sum_{i=1}^{n} (X_{1i})^2 & \sum_{i=1}^{n} X_{1i}X_{2i} \\ \sum_{i=1}^{n} X_{2i} & \sum_{i=1}^{n} X_{1i}X_{2i} & \sum_{i=1}^{n} (X_{2i})^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} Y_{1i} \\ \sum_{i=1}^{n} X_{1i}Y_{1i} \\ \sum_{i=1}^{n} X_{2i}Y_{1i} \end{bmatrix}$$

Sebelum mencari invers matrik di atas sebelumnya mencari determinan dari matriks 3 x 3 di atas sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} X_{1i} & \sum_{i=1}^{n} X_{2i} \\ \sum_{i=1}^{n} X_{1i} & \sum_{i=1}^{n} (X_{1i})^2 & \sum_{i=1}^{n} X_{1i}X_{2i} \\ \sum_{i=1}^{n} X_{2i} & \sum_{i=1}^{n} X_{1i}X_{2i} & \sum_{i=1}^{n} (X_{2i})^2 \end{bmatrix} = n\left[\sum_{i=1}^{n} (X_{1i})^2 \sum_{i=1}^{n} (X_{2i})^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} X_{1i}X_{2i} \right)^2 \right] - \sum_{i=1}^{n} X_{1i} \left[\sum_{i=1}^{n} X_{1i} \sum_{i=1}^{n} (X_{2i})^2 - \sum_{i=1}^{n} X_{2i} \sum_{i=1}^{n} X_{1i}X_{2i} \right]$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} X_{2i} \left[\sum_{i=1}^{n} X_{1i} \sum_{i=1}^{n} X_{1i}X_{2i} - \sum_{i=1}^{n} X_{2i} \sum_{i=1}^{n} (X_{1i})^2 \right]$$

$$= n\sum_{i=1}^{n} (X_{1i})^2 \sum_{i=1}^{n} (X_{2i})^2 - n\left(\sum_{i=1}^{n} X_{1i}X_{2i} \right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} X_{1i} \right)^2 \sum_{i=1}^{n} (X_{2i})^2 + \sum_{i=1}^{n} X_{1i} \sum_{i=1}^{n} X_{2i} \sum_{i=1}^{n} X_{1i}X_{2i}$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} X_{2i} \sum_{i=1}^{n} X_{1i} \sum_{i=1}^{n} X_{1i}X_{2i} - \left(\sum_{i=1}^{n} X_{2i} \right)^2 \sum_{i=1}^{n} (X_{1i})^2$$

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} X_{1i} & \sum_{i=1}^{n} X_{2i} \\ \sum_{i=1}^{n} X_{1i} & \sum_{i=1}^{n} (X_{1i})^2 & \sum_{i=1}^{n} X_{1i} X_{2i} \\ \sum_{i=1}^{n} X_{2i} & \sum_{i=1}^{n} X_{1i} X_{2i} & \sum_{i=1}^{n} (X_{2i})^2 \end{bmatrix} = n \sum_{i=1}^{n} (X_{1i})^2 \sum_{i=1}^{n} (X_{2i})^2 - n \left(\sum_{i=1}^{n} X_{1i} X_{2i} \right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} X_{1i} \right)^2 \sum_{i=1}^{n} (X_{2i})^2$$

$$+2 \sum_{i=1}^{n} X_{2i} \sum_{i=1}^{n} X_{1i} \sum_{i=1}^{n} X_{1i} X_{2i} - \left(\sum_{i=1}^{n} X_{2i} \right)^2 \sum_{i=1}^{n} (X_{1i})^2$$

Untuk menjadi Adjoin dari Matriks 3 x 3 menggunakan metode kofaktor, misalkan matriks 3 x 3 di atas adalah matriks A

$$A = \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} X_{1i} & \sum_{i=1}^{n} X_{2i} \\ \sum_{i=1}^{n} X_{1i} & \sum_{i=1}^{n} (X_{1i})^2 & \sum_{i=1}^{n} X_{1i} X_{2i} \\ \sum_{i=1}^{n} X_{2i} & \sum_{i=1}^{n} X_{1i} X_{2i} & \sum_{i=1}^{n} (X_{2i})^2 \end{bmatrix}$$

$$M_{11} = \sum_{i=1}^{n} (X_{1i})^2 \sum_{i=1}^{n} (X_{2i})^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} X_{1i} X_{2i} \right)^2$$

$$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = 1. \sum_{i=1}^{n} (X_{1i})^2 \sum_{i=1}^{n} (X_{2i})^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} X_{1i} X_{2i} \right)^2$$

$$M_{12} = \sum_{i=1}^{n} X_{1i} \sum_{i=1}^{n} (X_{2i})^2 - \sum_{i=1}^{n} X_{1i} X_{2i} \sum_{i=1}^{n} X_{2i}$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -\sum_{i=1}^{n} X_{1i} \sum_{i=1}^{n} (X_{2i})^2 + \sum_{i=1}^{n} X_{1i} X_{2i} \sum_{i=1}^{n} X_{2i}$$

$$M_{13} = \sum_{i=1}^{n} X_{1i} \sum_{i=1}^{n} X_{1i} X_{2i} - \sum_{i=1}^{n} X_{2i} \sum_{i=1}^{n} (X_{1i})^2$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = \sum_{i=1}^{n} X_{1i} \sum_{i=1}^{n} X_{1i} X_{2i} - \sum_{i=1}^{n} X_{2i} \sum_{i=1}^{n} (X_{1i})^2$$

$$M_{21} = \sum_{i=1}^{n} X_{1i} \sum_{i=1}^{n} (X_{2i})^2 - \sum_{i=1}^{n} X_{2i} \sum_{i=1}^{n} X_{1i} X_{2i}$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -\sum_{i=1}^{n} X_{1i} \sum_{i=1}^{n} (X_{2i})^2 + \sum_{i=1}^{n} X_{2i} \sum_{i=1}^{n} X_{1i} X_{2i}$$

$$M_{22} = n\sum_{i=1}^{n} (X_{2i})^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} X_{2i} \right)^2$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = n\sum_{i=1}^{n} (X_{2i})^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} X_{2i} \right)^2$$

$$M_{23} = n\sum_{i=1}^{n} X_{1i} X_{2i} - \sum_{i=1}^{n} X_{1i} \sum_{i=1}^{n} X_{2i}$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -n\sum_{i=1}^{n} X_{1i} X_{2i} + \sum_{i=1}^{n} X_{1i} \sum_{i=1}^{n} X_{2i}$$

$$M_{31} = \sum_{i=1}^{n} X_{1i} \sum_{i=1}^{n} X_{1i} X_{2i} - \sum_{i=1}^{n} X_{2i} \sum_{i=1}^{n} (X_{1i})^2$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = \sum_{i=1}^{n} X_{1i} \sum_{i=1}^{n} X_{1i} X_{2i} - \sum_{i=1}^{n} X_{2i} \sum_{i=1}^{n} (X_{1i})^2$$

$$M_{32} = n\sum_{i=1}^{n} X_{1i} X_{2i} - \sum_{i=1}^{n} X_{2i} \sum_{i=1}^{n} X_{1i}$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -n\sum_{i=1}^{n} X_{1i} X_{2i} + \sum_{i=1}^{n} X_{2i} \sum_{i=1}^{n} X_{1i}$$

$$M_{33} = n\sum_{i=1}^{n} (X_{1i})^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} X_{1i} \right)^2$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = n\sum_{i=1}^{n} (X_{1i})^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} X_{1i} \right)^2$$

$$Adj\,A = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} (X_{1i})^2 \sum_{i=1}^{n} (X_{2i})^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} X_{1i} X_{2i} \right)^2 & -\sum_{i=1}^{n} X_{1i} \sum_{i=1}^{n} (X_{2i})^2 + \sum_{i=1}^{n} X_{1i} X_{2i} \sum_{i=1}^{n} X_{2i} & \sum_{i=1}^{n} X_{1i} \sum_{i=1}^{n} X_{1i} X_{2i} - \sum_{i=1}^{n} X_{2i} \sum_{i=1}^{n} (X_{1i})^2 \\ -\sum_{i=1}^{n} X_{1i} \sum_{i=1}^{n} (X_{2i})^2 + \sum_{i=1}^{n} X_{2i} \sum_{i=1}^{n} X_{1i} X_{2i} & n\sum_{i=1}^{n} (X_{2i})^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} X_{2i} \right)^2 & -n\sum_{i=1}^{n} X_{1i} X_{2i} + \sum_{i=1}^{n} X_{1i} \sum_{i=1}^{n} X_{2i} \\ \sum_{i=1}^{n} X_{1i} \sum_{i=1}^{n} X_{1i} X_{2i} - \sum_{i=1}^{n} X_{2i} \sum_{i=1}^{n} (X_{1i})^2 & -n\sum_{i=1}^{n} X_{1i} X_{2i} + \sum_{i=1}^{n} X_{2i} \sum_{i=1}^{n} X_{1i} & n\sum_{i=1}^{n} (X_{1i})^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} X_{1i} \right)^2 \end{bmatrix}$$

mencari invers dengan metode sarrus adalah dengan mengalikan determinan dengan adjoin matriks A sebagaimana berikut,

$$= \frac{1}{n\sum_{i=1}^{n}(X_{1i})^2\sum_{i=1}^{n}(X_{2i})^2 - n\left(\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i}\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}X_{1i}\right)^2\sum_{i=1}^{n}(X_{2i})^2 + 2\sum_{i=1}^{n}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}X_{1i}\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i} - \left(\sum_{i=1}^{n}X_{2i}\right)^2\sum_{i=1}^{n}(X_{1i})^2}$$

$$\cdot\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n}(X_{1i})^2\sum_{i=1}^{n}(X_{2i})^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i}\right)^2 & -\sum_{i=1}^{n}X_{1i}\sum_{i=1}^{n}(X_{2i})^2 + \sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}X_{2i} & \sum_{i=1}^{n}X_{1i}\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i} - \sum_{i=1}^{n}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}(X_{1i})^2 \\ -\sum_{i=1}^{n}X_{1i}\sum_{i=1}^{n}(X_{2i})^2 + \sum_{i=1}^{n}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i} & n\sum_{i=1}^{n}(X_{2i})^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}X_{2i}\right)^2 & -n\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i} + \sum_{i=1}^{n}X_{1i}\sum_{i=1}^{n}X_{2i} \\ \sum_{i=1}^{n}X_{1i}\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i} - \sum_{i=1}^{n}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}(X_{1i})^2 & -n\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i} + \sum_{i=1}^{n}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}X_{1i} & n\sum_{i=1}^{n}(X_{1i})^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}X_{1i}\right)^2 \end{bmatrix}$$

sebelumnya di kalikan dengan matrik $\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n}Y_{1i} \\ \sum_{i=1}^{n}X_{1i}Y_{1i} \\ \sum_{i=1}^{n}X_{2i}Y_{1i} \end{bmatrix}$ dan hasilnya,

$$\begin{bmatrix}\beta_4\\ \beta_5\\ \beta_6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n}(X_{1i})^2\sum_{i=1}^{n}(X_{2i})^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i}\right)^2 & -\sum_{i=1}^{n}X_{1i}\sum_{i=1}^{n}(X_{2i})^2 + \sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}X_{2i} & \sum_{i=1}^{n}X_{1i}\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i} - \sum_{i=1}^{n}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}(X_{1i})^2 \\ -\sum_{i=1}^{n}X_{1i}\sum_{i=1}^{n}(X_{2i})^2 + \sum_{i=1}^{n}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i} & n\sum_{i=1}^{n}(X_{2i})^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}X_{2i}\right)^2 & -n\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i} + \sum_{i=1}^{n}X_{1i}\sum_{i=1}^{n}X_{2i} \\ \sum_{i=1}^{n}X_{1i}\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i} - \sum_{i=1}^{n}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}(X_{1i})^2 & -n\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i} + \sum_{i=1}^{n}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}X_{1i} & n\sum_{i=1}^{n}(X_{1i})^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}X_{1i}\right)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n}Y_{1i} \\ \sum_{i=1}^{n}X_{1i}Y_{1i} \\ \sum_{i=1}^{n}X_{2i}Y_{1i} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\beta_4\\ \beta_5\\ \beta_6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n}(X_{1i})^2\sum_{i=1}^{n}(X_{2i})^2\sum_{i=1}^{n}Y_{1i} - \left(\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i}\right)^2\sum_{i=1}^{n}Y_{1i} - \sum_{i=1}^{n}X_{1i}\sum_{i=1}^{n}(X_{2i})^2\sum_{i=1}^{n}X_{1i}Y_{1i} + \sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}X_{1i}Y_{1i} + \sum_{i=1}^{n}X_{1i}\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}X_{2i}Y_{1i} - \sum_{i=1}^{n}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}(X_{1i})^2\sum_{i=1}^{n}X_{2i}Y_{1i} \\ -\sum_{i=1}^{n}X_{1i}\sum_{i=1}^{n}(X_{2i})^2\sum_{i=1}^{n}Y_{1i} + \sum_{i=1}^{n}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}Y_{1i} + n\sum_{i=1}^{n}(X_{2i})^2\sum_{i=1}^{n}X_{1i}Y_{1i} - \left(\sum_{i=1}^{n}X_{2i}\right)^2\sum_{i=1}^{n}X_{1i}Y_{1i} - n\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}X_{2i}Y_{1i} + \sum_{i=1}^{n}X_{1i}\sum_{i=1}^{n}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}X_{2i}Y_{1i} \\ \sum_{i=1}^{n}X_{1i}\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}Y_{1i} - \sum_{i=1}^{n}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}(X_{1i})^2\sum_{i=1}^{n}Y_{1i} - n\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}X_{1i}Y_{1i} + \sum_{i=1}^{n}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}X_{1i}\sum_{i=1}^{n}X_{1i}Y_{1i} + n\sum_{i=1}^{n}(X_{1i})^2\sum_{i=1}^{n}X_{2i}Y_{1i} - \left(\sum_{i=1}^{n}X_{1i}\right)^2\sum_{i=1}^{n}X_{2i}Y_{1i} \end{bmatrix}$$

Kemudian dikalikan dengan determinannya, yaitu

$$\frac{1}{n\sum_{i=1}^{n}(X_{1i})^2\sum_{i=1}^{n}(X_{2i})^2 - n\left(\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i}\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}X_{1i}\right)^2\sum_{i=1}^{n}(X_{2i})^2 + 2\sum_{i=1}^{n}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}X_{1i}\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i} - \left(\sum_{i=1}^{n}X_{2i}\right)^2\sum_{i=1}^{n}(X_{1i})^2}$$

dan didapatkan nilai β_4, β_5, dan β_6, yaitu:

$$\beta_4 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_{1i})^2\sum_{i=1}^{n}(X_{2i})^2\sum_{i=1}^{n}Y_{1i} - \left(\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i}\right)^2\sum_{i=1}^{n}Y_{1i} - \sum_{i=1}^{n}X_{1i}\sum_{i=1}^{n}(X_{2i})^2\sum_{i=1}^{n}X_{1i}Y_{1i} + \sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}X_{1i}Y_{1i} + \sum_{i=1}^{n}X_{1i}\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}X_{2i}Y_{1i} - \sum_{i=1}^{n}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}(X_{1i})^2\sum_{i=1}^{n}X_{2i}Y_{1i}}{n\sum_{i=1}^{n}(X_{1i})^2\sum_{i=1}^{n}(X_{2i})^2 - n\left(\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i}\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}X_{1i}\right)^2\sum_{i=1}^{n}(X_{2i})^2 + 2\sum_{i=1}^{n}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}X_{1i}\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i} - \left(\sum_{i=1}^{n}X_{2i}\right)^2\sum_{i=1}^{n}(X_{1i})^2}$$

$$\beta_5 = \frac{\sum_{i=1}^{n}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}Y_{1i} + n\sum_{i=1}^{n}(X_{2i})^2\sum_{i=1}^{n}X_{1i}Y_{1i} - \left(\sum_{i=1}^{n}X_{2i}\right)^2\sum_{i=1}^{n}X_{1i}Y_{1i} - n\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}X_{2i}Y_{1i} + \sum_{i=1}^{n}X_{1i}\sum_{i=1}^{n}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}X_{2i}Y_{1i} - \sum_{i=1}^{n}X_{1i}\sum_{i=1}^{n}(X_{2i})^2\sum_{i=1}^{n}Y_{1i}}{n\sum_{i=1}^{n}(X_{1i})^2\sum_{i=1}^{n}(X_{2i})^2 - n\left(\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i}\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}X_{1i}\right)^2\sum_{i=1}^{n}(X_{2i})^2 + 2\sum_{i=1}^{n}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}X_{1i}\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i} - \left(\sum_{i=1}^{n}X_{2i}\right)^2\sum_{i=1}^{n}(X_{1i})^2}$$

$$\beta_6 = \frac{\sum_{i=1}^{n}X_{1i}\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}Y_{1i} - \sum_{i=1}^{n}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}(X_{1i})^2\sum_{i=1}^{n}Y_{1i} - n\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}X_{1i}Y_{1i} + \sum_{i=1}^{n}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}X_{1i}\sum_{i=1}^{n}X_{1i}Y_{1i} + n\sum_{i=1}^{n}(X_{1i})^2\sum_{i=1}^{n}X_{2i}Y_{1i} - \left(\sum_{i=1}^{n}X_{1i}\right)^2\sum_{i=1}^{n}X_{2i}Y_{1i}}{n\sum_{i=1}^{n}(X_{1i})^2\sum_{i=1}^{n}(X_{2i})^2 - n\left(\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i}\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}X_{1i}\right)^2\sum_{i=1}^{n}(X_{2i})^2 + 2\sum_{i=1}^{n}X_{2i}\sum_{i=1}^{n}X_{1i}\sum_{i=1}^{n}X_{1i}X_{2i} - \left(\sum_{i=1}^{n}X_{2i}\right)^2\sum_{i=1}^{n}(X_{1i})^2}$$