RANK MINIMUM DARI GRAF G PADA FIELD Z_2

SKRIPSI

oleh:
RUCHIL ISLAMIYAH
NIM. 07610016

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2011

RANK MINIMUM DARI GRAF G PADA FIELD Z_2

SKRIPSI

Diajukan kepada:

Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

oleh:
RUCHIL ISLAMIYAH
NIM. 07610016

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2011

RANK MINIMUM DARI GRAF G PADA FIELD Z_2

SKRIPSI

oleh:
RUCHIL ISLAMIYAH
NIM. 07610016

Telah Diperiksa dan Disetujui Untuk Diuji
Tanggal, 23 Februari 2011

Pembimbing I	Pembimbing II
Abdussakir, M. Pd.	**Dr. H. Ahmad Barizi, M.A.**
NIP. 19751006 200312 1 001	**NIP. 19731212 199803 1 001**

Mengetahui

Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M. Pd.
NIP. 19751006 200312 1 001

RANK MINIMUM DARI GRAF G PADA FIELD Z_2

SKRIPSI

oleh:
RUCHIL ISLAMIYAH
NIM. 07610016

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal: 24 Maret 2011

Susunan Dewan Penguji			Tanda Tangan
1. Penguji Utama	:	Evawati Alisah, M. Pd NIP. 19720604 199903 2 001	( )
2. Ketua Penguji	:	Wahyu Henky Irawan, M. Pd NIP. 19710420 200003 1 003	( )
3. Sekretaris Penguji	:	Abdussakir, M. Pd NIP. 19751006 200312 1 001	( )
4. Anggota Penguji	:	Dr. H. Ahmad Barizi, M.A NIP. 19731212 199803 1 001	( )

Mengetahui dan Mengesahkan
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M. Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Ruchil Islamiyah

NIM : 07610016

Fakultas/ Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika

Judul Skripsi : Rank Minimum dari Graf G pada Field Z_2

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambil alihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka.

Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 23 Februari 2011
Yang membuat pernyataan,

Ruchil Islamiyah
NIM. 07610016

Motto

وَٱلَّذِينَ جَٰهَدُوا۟ فِينَا لَنَهْدِيَنَّهُمْ سُبُلَنَا

"Orang-orang yang bersungguh-sungguh dalam urusan Kami
(menuntut ilmu) niscaya akan Kami tunjukkan
Kepada mereka jalan-jalan Kami"
(QS. Al- Ankabut:69)

PERSEMBAHAN

Karya ini penulis persembahkan kepada:

Kedua orang tua tercinta

Abah Husen Shodiq dan Umi' Siti Aminah

yang telah mendoakan, mendidik, serta selalu memberikan motivasi

yang berarti dalam hidup penulis, terima kasih atas

kesabaran dan pengorbanan yang

tidak akan tergantikan

oleh apapun.

Adik tersayang Moch. Fatchus Surur atas cinta dan

perhatiannya yang selalu menemani penulis

dalam suka dan duka serta

canda dan tawa.

KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيْمِ

Puji syukur ke hadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat, hidayah dan inayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan studi di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang sekaligus menyelesaikan penulisan skripsi ini dengan baik.

Sholawat serta salam semoga tetap terlimpahkan kepada Nabi Muhammad SAW, yang telah mengajarkan manusia pada iman dan ihsan dengan Ad-Dinul Islam.

Penulis menyadari bahwa penulisan skripsi ini tidak akan selesai dengan baik tanpa adanya bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU, D.Sc selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang sekaligus Dosen Pembimbing I atas bimbingan, bantuan, dan kesabarannya sehingga penulisan skripsi ini dapat diselesaikan.

4. Dr. H. Ahmad Barizi, M.A selaku Dosen Pembimbing Agama yang telah banyak memberikan bimbingan dan bantuan kepada penulis sehingga penulisan skripsi ini dapat diselesaikan.
5. Seluruh Dosen Jurusan Matematika atas pengajaran dan bimbingannya.
6. Keluarga Besar Ma'had Sunan Ampel Al-Aly Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
7. Seluruh keluarga tercinta, Abah Husein Shodiq, Umi' Siti Aminah, dan Adik M. Fatchus Surur, yang senantiasa memberikan motivasi dan kasih sayang serta doanya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
8. Teman-teman senasib seperjuangan mahasiswa Jurusan Matematika angkatan 2007 yang telah memberikan bantuan, motivasi, dan rasa kebersamaan yang terindah yang telah terukir selama masa perkuliahan.
9. Sahabat-sahabat mahasantri mabna Khodijah Al-Kubra khususnya kamar 26 yang telah memberikan semangat dan bantuannya.
10. Semua pihak yang telah berjasa dalam penulisan skripsi ini.

Semoga Allah SWT membalas semua amal kebaikan yang telah mereka berikan kepada kami dan semoga skripsi ini dapat bermanfaat dan menambah khazanah keilmuan, Amin.

Malang, 23 Februari 2011

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

ABSTRAK

Islamiyah, Ruchil. 2011. ***Rank* Minimum dari Graf *G* pada *Field* Z_2**. Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: I. Abdussakir, M.Pd.
II. Dr. H. Ahmad Barizi M.A.

Kata Kunci: *Rank* Minimum, *Field* Z_2, Graf *Path*, Graf Komplit, Graf *Star*, dan Graf Sikel.

Rank minimum dari suatu graf pada *field* Z_2 adalah *rank* terkecil dari matriks simetri dengan unsur-unsur pada *field* Z_2 dari suatu graf dimana elemen ke-*ij* adalah satu jika titik *i* terhubung dengan titik *j* dan nol jika titik *i* tidak terhubung dengan titik *j*, sedangkan jika *i* = *j* maka nilainya diabaikan dengan memuat unsur-unsur pada *field* Z_2 yaitu $\{0, 1\}$. *Rank* minimum dari suatu graf pada *field* Z_2 dinotasikan dengan $mr(S_G^{Z_2})$. Penentuan *rank* minimum dari suatu graf dengan mencari matriks *adjacency*, kemudian dikembangkan menjadi beberapa matriks simetri dengan unsur-unsur pada *field* Z_2 serta dicari *rank* minimum dengan operasi baris tereduksi dengan bantuan program Matlab. Pada skripsi ini akan dikaji *rank* minimum dari matriks simetri dengan unsur-unsur pada pada *field* Z_2 dari graf *path* (P_n), graf komplit (K_n), graf *star* (S_n), dan graf sikel (C_n), kemudian hasil yang diperoleh adalah

a. Teorema: *Rank* minimum dari graf *path* (P_n) pada *field* Z_2 adalah $mr\left(S_{P_n}^{Z_2}\right) = n - 1$ dengan $n \geq 2$ dan $n \in N$.
b. Teorema: *Rank* minimum dari graf komplit (K_n) pada *field* Z_2 adalah $mr\left(S_{K_n}^{Z_2}\right) = 1$ dengan $n \geq 2$ dan $n \in N$.
c. Teorema: *Rank* minimum dari graf *star* (S_n) pada *field* Z_2 adalah $mr\left(S_{S_n}^{Z_2}\right) = 2$ dengan $n \geq 3$ dan $n \in N$.
d. Konjektur: *Rank* minimum dari graf sikel (C_n) pada *field* Z_2 adalah $mr\left(S_{C_n}^{Z_2}\right) = n - 2$ dengan $n \geq 3$, $n \in N$, dan n genap.

ABSTRACT

Islamiyah, Ruchil. 2011. **Minimum Rank of Graph *G* on Field Z_2**. Thesis. Mathematics Department Science and Technology Faculty State Islamic University Maulana Malik Ibrahim of Malang.
Advisor: I. Abdussakir, M.Pd.
II. Dr. H. Ahmad Barizi M.A.

Keywords: Minimum Rank, Field Z_2, Path Graph, Complete Graph, Star Graph, and Cycle Graph.

The minimum rank of a graph on field Z_2 is the smallest rank of the symmetric matrices with the element in the field Z_2 of a graph in which the element *ij* entry is one if edge *i* connected with edge *j* and zero if edge *i* is not connected with the edge *j*, while if *i* = *j* is ignored by loading the elements in the field Z_2 {0, 1}. The minimum rank of a graph on field Z_2 is denoted by $mr(S_G^{Z_2})$. Determination of the minimum rank of a graph by finding adjacency matrices, then it is developed into a symmetric matrices with the elements in the field Z_2 and looked for the minimum rank with reduced row echelon and with the help of Matlab programe. This thesis will be reviewed the minimum rank of symmetric matrices with the elements in the field Z_2 of a path graph (P_n), complete graph (K_n), star graph (S_n), and cycle graph (C_n), then the results obtained are

a. Theorem: The minimum rank of a path graph (P_n) on the field Z_2 is $mr\left(S_{P_n}^{Z_2}\right) = n - 1$ with $n \geq 2$ and $n \in N$.
b. Theorem: The minimum rank of a complete graph (K_n) on the field Z_2 is $mr\left(S_{K_n}^{Z_2}\right) = 1$ with $n \geq 2$ and $n \in N$.
c. Theorem: The minimum rank of a star graph (S_n) on the field Z_2 is $mr\left(S_{S_n}^{Z_2}\right) = 2$ with $n \geq 3$ and $n \in N$.
d. Conjecture: The minimum rank of a cycle graph (C_n) on the field Z_2 is $mr\left(S_{C_n}^{Z_2}\right) = n - 2$ with $n \geq 3$, $n \in N$, and n even.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Dari sekian banyak ayat Al-Quran, dipahami bahwa semua makhluk telah ditetapkan takdirnya oleh Allah. Mereka tidak dapat melampaui batas ketetapan itu, dan Allah SWT menuntun dan menunjukkan mereka arah yang seharusnya mereka tuju (Shihab, 2001:61). Sebagaimana firman Allah SWT dalam Al-Qur'an Surat Al-A'la ayat 1-3 sebagai berikut:

سَبِّحِ ٱسْمَ رَبِّكَ ٱلْأَعْلَى ۝١ ٱلَّذِى خَلَقَ فَسَوَّىٰ ۝٢ وَٱلَّذِى قَدَّرَ فَهَدَىٰ ۝٣

Artinya: "Sucikanlah nama Tuhanmu yang Maha Tinggi, yang Menciptakan dan menyempurnakan (penciptaan-Nya), dan yang menentukan kadar (masing-masing) dan memberi petunjuk".

Peristiwa-peristiwa yang terjadi di alam raya ini, dalam kadar atau ukuran tertentu, pada tempat dan waktu tertentu. Manusia juga mempunyai kemampuan terbatas sesuai dengan ukuran yang diberikan oleh Allah kepadanya. Allah mampu merealisasikan segala sesuatu yang Dia kehendaki dalam kualitas dan kuantitasnya (Junaedi, 2010).

Allah juga berfirman dalam Al-Qur'an Surat Al-Hijr ayat 21 sebagai berikut:

وَإِن مِّن شَىْءٍ إِلَّا عِندَنَا خَزَآئِنُهُۥ وَمَا نُنَزِّلُهُۥٓ إِلَّا بِقَدَرٍ مَّعْلُومٍ ۝٢١

Artinya: "Dan tidak ada sesuatupun melainkan pada sisi Kami-lah khazanahnya, dan Kami tidak menurunkannya melainkan dengan ukuran yang tertentu".

Sesungguhnya segala sesuatu itu sumbernya dari Allah. Dan Allah menurunkan sesuatu itu ada ukurannya, ada perhitungannya, juga ada polanya. Sebagaimana firman Allah dalam Al-Qur'an Surat Jin ayat 28 sebagai berikut:

وَأَحْصَىٰ كُلَّ شَيْءٍ عَدَدًا ﴿٢٨﴾

Artinya: "Dan Dia (Allah) menghitung segala sesuatu satu persatu".

Qadr juga terdapat di dalam matematika, khususnya teori graf. Teori graf adalah cabang ilmu matematika yang sangat penting. Dalam kehidupan sehari-hari, graf digunakan untuk menggambarkan berbagai macam struktur yang ada. Tujuannya adalah sebagai visualisasi obyek-obyek agar lebih mudah dimengerti. Pencarian *qadr* yang sedang marak diteliti adalah menentukan *rank* minimum dari matriks simetri yang menggambarkan suatu graf.

Suatu graf dapat disajikan dalam bentuk matriks *adjacency* atau matriks keterhubungan. Matriks *adjacency* suatu graf G adalah matriks simetri dengan unsur nol dan satu, dan memuat nilai nol pada diagonal utamanya. Bernilai satu jika antara titik satu dengan titik lainnya terhubung langsung, sedangkan bernilai nol jika titik yang satu dengan titik lainnya tidak terhubung langsung (Abdussakir dkk, 2009:73-74).

Dari matriks *adjacency* suatu graf dapat disajikan menjadi matriks simetri dengan unsur-unsur pada *field* Z_2 yang menggambarkan suatu graf. Matriks dengan unsur-unsur pada *field* Z_2 tersebut tetap bernilai satu jika antar titik dalam graf tersebut terhubung langsung, dan bernilai nol jika antar titik dalam graf tersebut tidak terhubung langsung, tetapi unsur diagonal diabaikan dengan memuat unsur-unsur pada *field* Z_2 (Fallat dan Hogben, 2007:1).

Salah satu sub pembahasan aljabar matriks, dikenal adanya *rank* matriks. *Rank* suatu matriks adalah dimensi umum dari ruang baris dan ruang kolom dari suatu matriks. Dari beberapa matriks yang menggambarkan suatu graf memungkinkan memiliki *rank* yang berbeda. *Rank* terkecil dari matriks-matriks tersebut disebut *rank minimum*.

Beberapa penelitian terdahulu tentang minimum *rank* ini, diantaranya adalah penelitian Fallat dan Hogben, dalam penelitiannya Fallat dan Hogben menentukan *rank* minimum dari suatu graf yang disajikan dalam bentuk matriks simetri real yaitu graf *path* (P_n) dan graf komplit (K_n). Dari sini penulis terinspirasi untuk meneliti *rank* minimum dari suatu graf yang disajikan dalam bentuk matriks simetri dengan unsur-unsur pada *field* Z_2.

Field adalah ring komutatif dengan memuat elemen satuan dan semua unsur yang tidak nol di R mempunyai invers terhadap operasi yang kedua. Beberapa contoh *field* yaitu ring dengan unsur bilangan real, ring dengan unsur bilangan kompleks dan ring modulo (Raisinghania dan Aggarwal, 1980:314-316).

Berdasarkan uraian diatas, penulis ingin meneliti *rank minimum* dari suatu graf G yang disajikan dalam bentuk matriks simetri dengan unsur-unsur pada *field* modulo dua (Z_2). Oleh karena itu, penulis membuat skripsi yang berjudul **" *Rank minimum* dari Graf *G* pada *Field* Z_2"**

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, rumusan masalah dalam penelitian ini adalah bagaimana pola umum *rank minimum* dari graf G pada *field* Z_2?

1.3 Batasan Masalah

Agar pembahasan ini tidak meluas maka penulis membatasi penelitian hanya pada *rank minimum* dari graf *path* (P_n), graf komplit (K_n), graf *star* (S_n), dan graf sikel (C_n).

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah menentukan pola umum *rank minimum* dari graf *path* (P_n), graf komplit (K_n), graf *star* (S_n), dan graf sikel (C_n) pada *field* Z_2.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

a. Sebagai bentuk pengembangan ilmu yang telah penulis dapatkan selama perkuliahan.
b. Sebagai tambahan pengetahuan dan pemahaman bagi penulis tentang teori graf dan aljabar matriks.
c. Sebagai tambahan bahan kuliah teori graf dan aljabar matriks.
d. Sebagai bahan informasi untuk kajian lebih lanjut mengenai teori graf dan aljabar matriks.

1.6 Metode Penelitian

a. Jenis Penelitian

Jenis metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah penelitian kepustakaan (*Library Research*), yaitu melakukan penelusuran dan penelaahan terhadap beberapa literatul yang berhubungan dengan topik bahasan.

b. Data dan Sumber Data

Dalam penelitian ini, data yang digunakan adalah pokok bahasan dalam teori graf terutama yang berkaitan dengan graf *path* (P_n), graf komplit (K_n), graf *star* (S_n), dan graf sikel (C_n), pokok bahasan pada aljabar matriks terutama yang berkaitan dengan *rank*, serta pokok bahasan mengenai *field*. Sumber data yang digunakan adalah perpustakaan.

c. Teknik Pengumpulan Data

Teknik pengumpulan data yaitu dengan mengumpulkan data-data yang diperlukan dalam penelitian berupa catatan-catatan, buku-buku, dan jurnal yang relevan dengan permasalahan yang penulis bahas.

d. Teknik Analisis Data

Dalam menganalisis data, penulis melakukan langkah-langkah sebagai berikut:

1) Mempelajari dan memahami konsep *rank* suatu matriks dan teori graf.
2) Menyajikan graf *path* (P_n), graf komplit (K_n), graf *star* (S_n), dan graf sikel (C_n) dalam bentuk matriks *adjacency*.

3) Menyajikan matriks *adjacency* tersebut dalam bentuk matriks simetri dengan unsur-unsur pada *field* Z_2, yaitu dengan mengganti diagonal dari matriks *adjacency* tersebut dengan unsur-unsur pada *field* Z_2 secara acak.
4) Menghitung *rank minimum* dari masing-masing matriks tersebut.
5) Menemukan pola banyaknya *rank minimum* dari graf *path* (P_n), graf komplit (K_n), graf *star* (S_n), dan graf sikel (C_n) pada *field* Z_2.
6) Mencari rumus umum atau teorema dari *rank minimum* graf *path* (P_n), graf komplit (K_n), graf *star* (S_n), dan graf sikel (C_n) pada *field* Z_2.
7) Membuktikan teorema tersebut apakah benar secara umum.
8) Membuat kesimpulan.

1.7 Sistematika Penulisan

Dalam penulisan tugas akhir ini, penulis menggunakan sistematika penulisan yang terdiri dari 4 bab, dan masing-masing bab dibagi dalam sub bahasan dengan sistematika penulisan sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan meliputi beberapa sub bahasan yaitu latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II Kajian Teori yaitu menjelaskan beberapa teori-teori yang berhubungan dengan penelitian, diantaranya adalah graf, matriks, *field*, dan hubungan antara graf, matriks, dan *field*.

Bab III Pembahasan, dalam bab ini penulis mencari pola umum banyaknya *rank* minimum dari graf *path* (P_n), graf komplit (K_n), graf *star* (S_n), dan graf sikel

(C_n) yang disajikan dalam bentuk matriks simetri dengan unsur-unsur pada *field* Z_2 yaitu $\{0,1\}$.

Bab IV Penutup yang berisi kesimpulan yang diperoleh dari pembahasan yang dilengkapi dengan saran-saran yang berkaitan dengan hasil penelitian ini.

BAB II

KAJIAN TEORI

2.1 Kajian Graf dalam Al-Qur'an

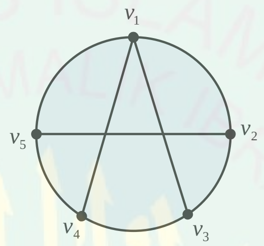
Secara umum beberapa konsep dan disiplin ilmu telah dijelaskan dalam Al-Qur'an, salah satunya adalah matematika. Al-qur'an sebenarnya berbicara tentang matematika, yaitu tentang bilangan, aljabar, geometri, dan pengukuran serta statistika. Teori graf yang merupakan cabang dari matematika juga terdapat dalam Al-qur'an, graf adalah pasangan himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut titik dengan himpunan pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda yang disebut sisi. Dalam Al-Qur'an surat Al-Hujurat ayat 10 dijelaskan bahwa orang yang beriman bersaudara, maka harus memperbaiki hubungan diantara keduanya.

إِنَّمَا ٱلْمُؤْمِنُونَ إِخْوَةٌ فَأَصْلِحُوا۟ بَيْنَ أَخَوَيْكُمْ ۚ وَٱتَّقُوا۟ ٱللَّهَ لَعَلَّكُمْ تُرْحَمُونَ ﴿١٠﴾

Artinya: Orang-orang beriman itu sesungguhnya bersaudara. sebab itu damaikanlah (perbaikilah hubungan) antara kedua saudaramu itu dan takutlah terhadap Allah, supaya kamu mendapat rahmat.

Ayat di atas menunjukkan suatu hubungan atau keterkaitan antara titik yang satu dengan titik yang lain yaitu إخوة (persaudaraan). Seluruh kaum Muslimin merupakan saudara karena agama. Karena itu, damaikanlah antara kedua saudaramu, yaitu dua golongan yang saling bertikai. Dan bertakwalah kepada Allah, dalam seluruh urusan kalian (Ghoffar dan Al-Atsari, 2007:483-484).

Jika dikaitkan dengan kehidupan nyata, maka banyaknya titik yang terhubung dalam suatu graf dapat diasumsikan sebagai banyaknya kejadian tertentu. Yang selanjutnya kejadian-kejadian tersebut mempunyai keterkaitan antara titik satu sama lainnya yang merupakan kejadian sesudahnya. Jika diaplikasikan dalam bentuk graf, maka dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 2.1 Hubungan Manusia Satu dengan Lainnya

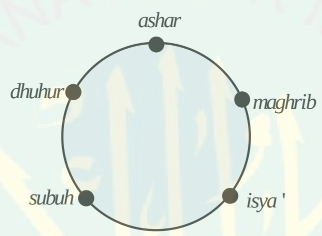
Pada gambar tersebut terdapat lima titik dimana antara titik itu ada yang *adjacent* dan ada yang *non-adjacent*. Namun, titik-titik di atas akan saling terkait satu dengan lainnya. Hal ini menunjukkan bahwa saudara seiman tidak mengenal batas jarak dan waktu. Hubungan seorang mukmin dengan mukmin lainnya dapat digambarkan seperti di atas dengan lima orang dengan inisial $v_1, v_2, v_3, v_4\ dan\ v_5$. Mereka adalah saudara seiman. Jika terjadi perselisihan diantara mereka maka wajib untuk mendamaikan (memperbaiki hubungan) mereka.

Hal lain yang dapat dipresentasikan dalam bentuk graf adalah shalat. Shalat merupakan salah satu ibadah yang ditentukan waktunya, baik waktu mulainya maupun akhirnya. Shalat dalam sehari semalam dilakukan lima kali dengan waktu yang berurutan dan tidak berbenturan. Dalam surat An-Nisa ayat 103 Allah SWT berfirman:

فَإِذَا قَضَيْتُمُ ٱلصَّلَوٰةَ فَٱذْكُرُوا۟ ٱللَّهَ قِيَٰمًا وَقُعُودًا وَعَلَىٰ جُنُوبِكُمْ ۚ فَإِذَا ٱطْمَأْنَنتُمْ فَأَقِيمُوا۟
ٱلصَّلَوٰةَ ۚ إِنَّ ٱلصَّلَوٰةَ كَانَتْ عَلَى ٱلْمُؤْمِنِينَ كِتَٰبًا مَّوْقُوتًا ﴿١٠٣﴾

Artinya: Maka apabila kamu Telah menyelesaikan shalat(mu), ingatlah Allah di waktu berdiri, di waktu duduk dan di waktu berbaring. Kemudian apabila kamu Telah merasa aman, Maka Dirikanlah shalat itu (sebagaimana biasa). Sesungguhnya shalat itu adalah fardhu yang ditentukan waktunya atas orang-orang yang beriman.

Siklus shalat lima waktu dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 2.2 Representasi Graf Terhadap Shalat Lima Waktu

Adapun hubungan waktu shalat dengan teori graf adalah bahwa waktu-waktu shalat tersebut merupakan suatu himpunan yang terdiri dari waktu shalat fardhu sebagai ekspresi dari himpunan titik dalam graf. Sedangkan keterkaitan antara shalat fardhu yang satu dengan lainnya merupakan ekspresi dari sisi yang menghubungkan titik-titik dalam graf.

Al-Qur'an terdiri dari bahasa tulisan yaitu huruf-huruf (verbal) dan juga angka (numerik). Huruf dan angka tersebut sebenarnya merupakan bahasa simbol. Huruf mewakili bahasa bunyi dan angka mewakili bilangan. Seseorang yang sedang membaca, mempelajari, dan memahami Al-Qur'an adalah bagian dari upaya memahami simbol-simbol, yang berupa huruf dan angka (bilangan) (Abdussakir, 2007:157).

Angka-angka dalam Al-Qur'an tersebut digunakan untuk menjelaskan sesuatu yang ukurannya pasti. Allah SWT berfirman dalam Al-Qur'an Surat Al-A'la ayat 1-3 sebagai berikut:

سَبِّحِ ٱسْمَ رَبِّكَ ٱلْأَعْلَى ﴿١﴾ ٱلَّذِى خَلَقَ فَسَوَّىٰ ﴿٢﴾ وَٱلَّذِى قَدَّرَ فَهَدَىٰ ﴿٣﴾

Artinya: "Sucikanlah nama Tuhanmu yang Maha Tinggi, yang Menciptakan dan menyempurnakan (penciptaan-Nya), dan yang menentukan kadar (masing-masing) dan memberi petunjuk".

Kata (قَدَّرَ) *qaddara* berasal dari kata (قدر) *qadara* yang antara lain berarti mengukur, memberi kadar atau ukuran. Setiap makhluk yang diciptakan Allah diberi-Nya kadar, ukuran serta batas-batas tertentu dalam diri, sifat dan kemampuan maksimal (Shihab, 2003:201).

Semua makhluk telah ditetapkan oleh Tuhan kadarnya dalam hal-hal tersebut. Mereka tidak dapat melampui batas ketetapan itu, dan Allah SWT, menuntun sekaligus menunjukkan kepada makhluk-makhluk-Nya itu arah yang seharusnya mereka tuju. Inilah yang dimaksud *fa hada* (Shihab, 2003:201).

Jika Allah SWT telah menentukan ukuran dari segala sesuatu maka setiap permasalahan pastilah mempunyai ukuran pemecahannya. Begitu juga masalah menentukan *rank* minimum dari suatu graf, pastilah mempunyai ukuran (bilangan) yang pasti.

Setelah melakukan penelitian dalam rangka pengembangan ilmu pengetahuan, maka perlu adanya pembuktian secara rasional tentang hasil dari penelitian tersebut. Jika hasil tersebut tidak dapat dibenarkan, maka tidak boleh diikuti. Allah SWT berfirman dalam surat Al-An’am ayat 148:

قُلْ هَلْ عِندَكُم مِّنْ عِلْمٍ فَتُخْرِجُوهُ لَنَآ ۖ إِن تَتَّبِعُونَ إِلَّا ٱلظَّنَّ وَإِنْ أَنتُمْ إِلَّا تَخْرُصُونَ ﴿١٤٨﴾

Artinya: Katakanlah: "Adakah kamu mempunyai sesuatu pengetahuan sehingga dapat kamu mengemukakannya kepada kami?" kamu tidak mengikuti kecuali persangkaan belaka, dan kamu tidak lain hanyalah berdusta.

Ayat (قل هل عندكم من علم) “*Katakanlah: Adakah kamu mempunyai sesuatu pengetahuan.*” Maksudnya, bahwa Allah benar-benar memberikan keridhoaan atas apa yang kalian kerjakan tersebut. (فتخرجوه لنا) “*Sehingga dapat kamu mengemukakannya kepada kami?*” Maksudnya, kalian tunjukkan, jelaskan, dan keluarkan hal itu kepada Kami. (إن تتبعون إلا الظن) “*Kamu tidak mengikuti kecuali persangkaan belaka.*” Yaitu perkiraan (*zhan*) dan khayalan. Dan yang di maksud *zhan* disini adalah keyakinan yang salah. (وإن أنتم إلا تخرصون) “*Dan kamu tidak lain hanyalah berdusta.*” Kalian telah berdusta kepada Allah SWT atas apa yang kalian anggap tersebut (Ghoffar, 2007:320).

Hal penting yang dapat dijadikan refleksi dari semuanya adalah banyak ditemui konsep-konsep matematika didalam Al-Qur’an. Matematika berkaitan dengan pekerjaan menghitung, sehingga ada yang menyebut bahwa matematika adalah ilmu hitung atau *ilmu al*-hisab. Dalam urusan hitung menghitung Allah SWT rajanya. Hal ini membuktikan bahwa Allah SWT adalah pencipta yang Maha Matematis. Dengan itu akan semakin menambah keimanan akan kebesaran-Nya (Abdussakir, 2007:83).

Dalam firman-Nya surat Al-Baqarah ayat 202 disebutkan:

أُوْلَـٰٓئِكَ لَهُمۡ نَصِيبٞ مِّمَّا كَسَبُواْۚ وَٱللَّهُ سَرِيعُ ٱلۡحِسَابِ ٢٠٢

Artinya: Mereka Itulah orang-orang yang mendapat bahagian daripada yang mereka usahakan dan Allah sangat cepat perhitungan-Nya.

Matematika pada dasarnya adalah diciptakan, dan manusia sekedar menemukan. Penciptaan matematika bukanlah tanpa tujuan, sis-sia, atau *bathil*, tetapi dengan tujuan yang benar (*haq*). Tujuan ini tidak hanya mencakup tujuan duniawi saja, tetapi juga mencakup tujuan ukhrawi.

2.2 Graf

2.2.1 Definisi Graf

Definisi 1:

Graf G adalah pasangan (V(G), E(G)) dengan V(G) adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut ***titik***, dan E(G) adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di V(G) yang disebut ***sisi***. Banyaknya unsur diV(G) disebut ***order*** dari G dan dilambangkan dengan p(G), dan banyaknya unsur di E(G) disebut ***ukuran*** dari G dan dilambangkan dengan q(G). Jika graf yang dibicarakan hanya graf G, maka order dan ukuran dari G masing-masing cukup ditulis p dan q. Graf dengan order p dan ukuran q dapat disebut graf-(p, q) (Abdussakir dkk, 2009:4-5).

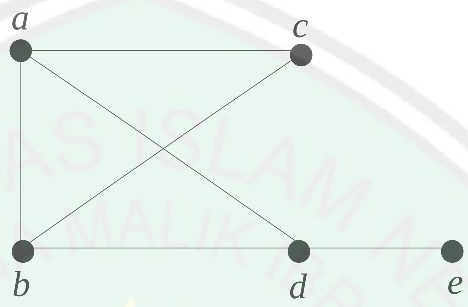
Contoh:

Perhatikan graf G yang memuat himpunan titik V(G) dan himpunan sisi E(G) seperti berikut ini.

$V(G) = \{ a, b, c, d, e\}$

$E\ (G) = \{ (a, b), (a, c), (a, d), (b, d), (b, c), (d, e)\}$

Graf G tersebut secara lebih jelas dapat digambar sebagai berikut.



Gambar 2.3 Contoh Graf 1

Graf G mempunyai 5 titik sehingga order G adalah p = 5. Graf G mempunyai 6 sisi sehingga ukuran graf G adalah q = 6.

Graf G dengan himpunan titik dan sisi masing-masing

$V(G) = \{ a, b, c, d, e\}$

$E\ (G) = \{ (a, b), (a, c), (a, d), (b, d), (b, c), (d, e)\}$

Dapat ditulis dengan

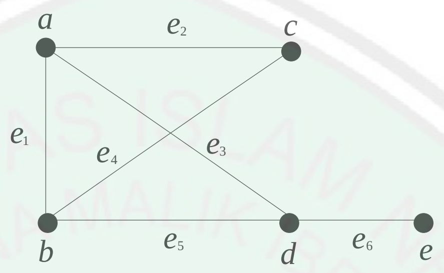
$V(G) = \{a, b, c, d, e\}$

$E\ (G) = \{ e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$

Definisi 2:

Sisi $e = (u, v)$ dikatakan menghubungkan titik u dan v. Jika $e = (u, v)$ adalah sisi di graf G, maka u dan v disebut ***terhubung langsung (adjacent)***, v dan e serta u dan e disebut terkait ***langsung (incident)***, dan titik u dan v disebut ujung dari e. Dua sisi berbeda e_1 dan e_2 disebut ***terhubung langsung (adjacent)***, jika terkait langsung pada satu titik yang sama. Untuk selanjutnya, sisi $e = (u, v)$ akan ditulis $e = uv$ (Abdussakir dkk, 2009:6).

Contoh:



Gambar 2.4 Contoh Graf 2

Berdasarkan gambar graf G tersebut, maka titik a dan b *terhubung langsung*, demikian juga dengan a dan c, a dan d, serta a dan e. Titik a dan e *tidak terhubung langsung*, demikian juga dengan titik *b* dan *e* serta titik *c* dan e.

Sisi e_1 *terkait langsung* dengan titik a dan b. Sisi e_2 *terkait langsung* dengan titik a dan c. Sisi e_1 *tidak terkait langsung* dengan titik c dan d. Perlu diperhatikan bahwa satu sisi hanya dapat terkait langsung dengan dua titik berbeda. Hal ini terjadi karena satu sisi danya menghubungkan dua titik berbeda.

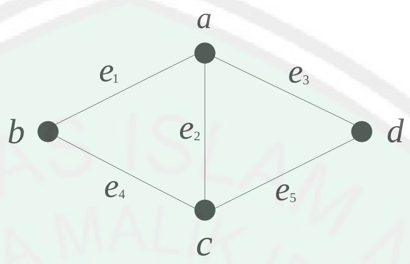
Sisi e_1 dan e_2 *terhubung langsung* karena terkait langsung pada satu titik yang sama, yaitu titik a. Sisi e_1 dan e_6 *tidak terhubung langsung* karena tidak terkait langsung pada titik yang sama.

Definisi 3:

Derajat dari titik v di graf G adalah banyaknya sisi di G yang terkait langsung dengan v. Derajat titik v pada graf G dinotasikan dengan $deg_G(v)$ atau dapat juga dinotasikan dengan $deg(v)$ (Abdussakir dkk, 2009:9).

Contoh:

Perhatikan graf G berikut yang mempunyai himpunan titik $V(G) = \{\ a, b, c, d\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{\ e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$.



Gambar 2.5 Derajat Suatu Titik pada Graf

Berdasarkan gambar diperoleh bahwa

deg(a) = 3

deg(b) = 2

deg(c) = 3

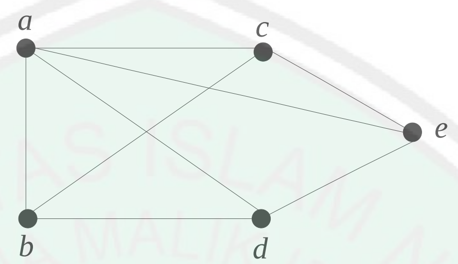
deg(d) = 2

2.2.2 Graf Terhubung

Definisi 4:

Misalkan G graf, u dan v adalah titik di G (yang tidak harus berbeda), *jalan* $u - v$ pada graf G adalah barisan berhingga yang berselang-seling $W: u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_n, = v$ antara titik dan sisi, yang dimulai dari titik dan diakhiri dengan titik, dengan $e_1 = v_{i-1}v_i$, $i = 1,2,3, \dots, n$ adalah sisi di G. v_0 disebut *titik awal*, v_n disebut *titik akhir*, titik $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$ disebut *titik internal*, dan n menyatakan panjang dari W. Jika $v_0 \neq v_n$ maka W disebut *jalan terbuka*, jika $v_0 = v_n$ maka W disebut *jalan* *tertutup*. Jalan yang tidak mempunyai sisi disebut *jalan trivial* (Abdussakir dkk, 2009:49).

Contoh:



Gambar 2.6 Graf untuk Mengilustrasikan Jalan

Pada graf di atas dapat diambil contoh jalan sebagai berikut.

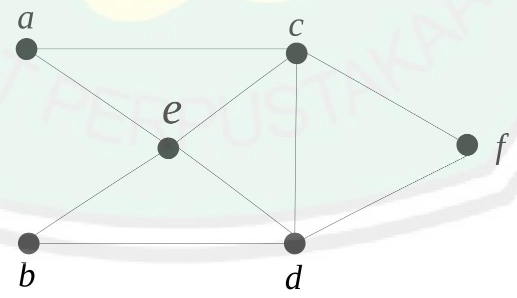
Jalan tertutup: $a, b, c, a, e, d, a, d, b, a$

Jalan terbuka: b, c, b, c, b, c, a, d

Definisi 5:

Jalan yang semua sisinya berbeda disebut *trail* (Abdussakir dkk, 2009:51).

Contoh:



Gambar 2.7 Graf untuk Mengilustrasikan Trail, Lintasan, Sirkuit dan Sikel

Pada graf di atas diberikan contoh trail sebagai berikut.

Trail: $f, c, a, e, b, d, e, c, d, f$

Definisi 6:

Jalan terbuka yang semua titiknya berbeda disebut *lintasan*. Setiap lintasan pasti merupakan trail, tetapi tidak semua trail merupakan lintasan (Abdussakir dkk, 2009:51).

Contoh:

Pada gambar 2.7 diberikan contoh lintasan sebagai berikut.

Lintasan: a, c, e, b, d, f

Definisi 7:

Jalan tertutup tak trivial yang semua sisinya berbeda disebut *sirkuit*. Dengan kata lain, sirkuit adalah trail tertutup tak trivial (Abdussakir dkk, 2009:53).

Contoh:

Pada gambar 2.7 diberikan contoh sirkuit sebagai berikut.

Sirkuit: a, e, b, d, e, c, a

Definisi 8:

Jalan tertutup tak trivial yang semua titiknya berbeda disebut *sikel*. Dengan demikian setiap sikel pasti merupakan sirkuit, tetapi tidak semua sirkuit merupakan sikel (Abdussakir dkk, 2009:54).

Contoh:

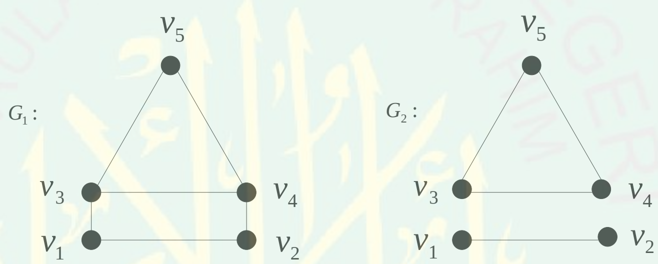
Pada gambar 2.7 diberikan contoh sikel sebagai berikut.

Sikel: a, c, f, d, b, e, a

Definisi 9:

Suatu graf G dikatakan *terhubung* (*connected*), jika untuk setiap titik u dan v yang berbeda di G terdapat lintasan $u - v$ di G. Sebaliknya, jika terdapat titik u dan v yang berbeda di G tidak terdapat lintasan $u - v$ di G, maka graf G dikatakan *tidak terhubung* (*disconnected*) (Abdussakir dkk, 2009:56).

Contoh:



Gambar 2.8 Graf Terhubung dan Graf Tak Terhubung

Definisi 10:

Misalkan G graf terhubung dan u dan v titik d G. Jarak (*distance*) dari u dan v di G, dinotasikan dengan $d(u,v)$, adalah panjang lintasan terpendek $u - v$ di G (Abdussakir dkk, 2009:56).

Definisi 11:

Eksentrisitas (*eccentricity*) titik u di G, dinotasikan dengan $e(u)$, adalah jarak terbesar dari u ke semua titik di G. Jadi,

$e(u) = \text{maks } \{d(u,v) \mid v \in V(G)\}$

(Abdussakir dkk, 2009:56).

Definisi 12:

Diameter dari graf G, dinotasikan dengan diam(G), adalah eksentrisitas terbesar dari semua titik di G. Jadi,

$diam(G) = \text{maks}\ \{e(v) \mid v \in V(G)\}$

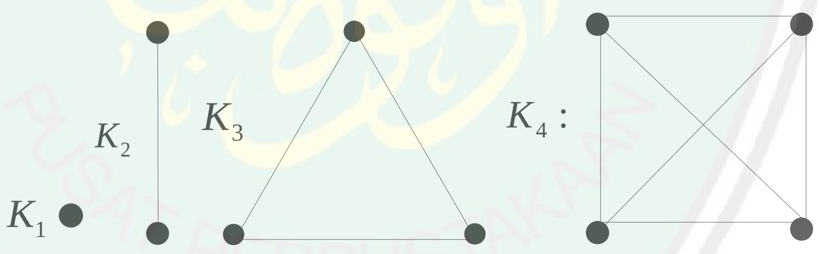
(Abdussakir dkk, 2009:57).

2.2.3 Jenis Graf

Definisi 13:

Jika setiap dua titik yang berbeda pada graf G saling terhubung langsung (*adjacent*), maka G disebut graf komplit. Graf komplit dengan order n dinyatakan dengan K_n (Abdussakir dkk, 2009:21).

Contoh:

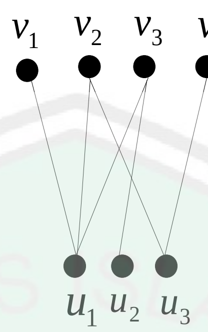


Gambar 2.9 Graf Komplit

Definisi 14:

Jika himpunan titik pada graf G dapat dipartisi menjadi dua himpunan tak kosong V_1 dan V_2 sehingga masing-masing sisi pada graf G tersebut menghubungkan satu titik di V_1 dengan satu titik di V_2, maka G disebut *graf bipartisi* (Abdussakir dkk, 2009:21).

Contoh:

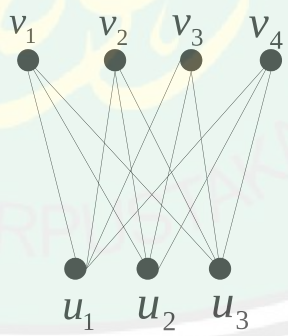


Gambar 2.10 Graf Bipartisi

Definisi 15:

Jika graf G adalah graf bipartisi dan masing-masing titik pada suatu partisi terhubung langsung dengan semua titik pada partisi yang lain, maka G disebut *graf bipartisi komplit* (Abdussakir dkk, 2009:22).

Contoh:

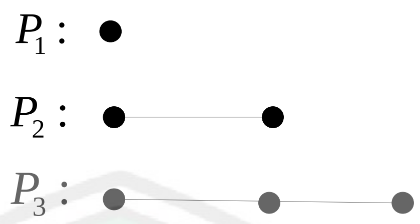


Gambar 2.11 Graf Bipartisi Komplit

Definisi 16:

Graf berbentuk lintasan dengan titik sebanyak n dinamakan *graf lintasan* atau *graf path orde* n dan ditulis P_n (Abdussakir dkk, 2009:53).

Contoh:

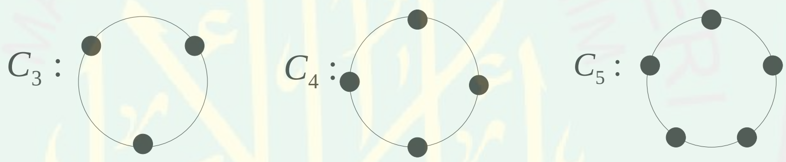


Gambar 2.12 Graf Lintasan

Definisi 17:

Graf berbentuk sikel dengan titik sebanyak n dengan $n \geq 3$ disebut *graf sikel* (Abdussakir dkk, 2009:55).

Contoh:



Gambar 2.13 Graf Sikel

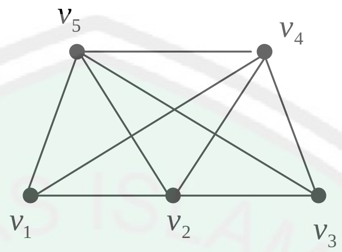
2.2.4 Sub Graf Terdukung

Definisi 18:

Misalkan G graf dengan himpunan titik V(G) dan himpunan sisi E(G). Misalkan U adalah himpunan bagian tak kosong dari V(G). Subgraf di G yang terdukung oleh himpunan U, dinotasikan dengan G[U], adalah graf dengan himpunan titik U dan memuat semua sisi di G yang terkait langsung dengan dua titik di U. Jadi, sisi di graf G[U] adalah semua sisi uv di G dengan syarat $u, v \in U$. Graf H disebut subgraf terdukung titik (atau disebut terdukung) di G, dinotasikan dengan $H \prec G$, jika $H \cong G[U]$, untuk suatu $U \subseteq V(G)$ dan $U \neq \emptyset$ (Abdussakir dkk, 2009:43).

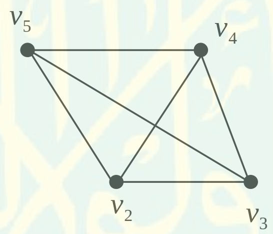
Contoh:

Misalkan graf G sebagai berikut,



Gambar 2.14 Graf G dengan Himpunan Titik V(G) dan Himpunan Sisi E(G)

Diketahui $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, misalkan $U = \{v_2, v_3, v_4, v_5\}$, maka subgraf terdukung G[U] di G terlihat pada gambar berikut,



Gambar 2.15 Subgraf Terdukung G [U] di G

2.3 Matriks

2.3.1 Definisi Matriks

Definisi 19:

Matriks adalah suatu kumpulan *angka-angka* (sering disebut *elemen-elemen*) berbentuk segi empat yang disusun menurut *baris* dan *kolom*, di mana panjangnya dan lebarnya ditentukan oleh banyaknya kolom-kolom dan baris-baris (Supranto, 2003:3).

Apabila suatu matriks A terdiri dari *m* baris dan *n* kolom, maka matriks A dapat ditulis sebagai berikut:

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matriks A adalah (a_{ij}), i = 1, 2, …, m

j = 1, 2, …, n

Dibaca matriks A m kali n, biasanya ditulis $A_{m\times n}$. a_{ij} merupakan elemen matriks A dari baris i dan kolom j, i dan j dinamakan indeks (*subscript*), yaitu petunjuk letak (posisi) bagi setiap elemen.

Pada sebuah matriks berorde $n \times n$ elemen-elemen a_{ii} $(1 \leq i \leq n)$, dinamakan diagonal utama (*main diagonal*).

Suatu matriks harus mempunyai *baris* dan *kolom*. Oleh sebab itu, setiap elemen harus jelas identifikasinya yaitu berasal dari baris dan kolom yang sama. Karena alasan inilah maka diperlukan suatu indeks untuk setiap elemen, yaitu indeks i dan j yang mana masing-masing mengambil nilai dari 1 sampai m (banyaknya baris) dan 1 sampai n (banyaknya kolom). Indeks i dan j ini menunjukkan bahwa elemen a berasal dari baris i dan kolom j. Elemen-elemen suatu matriks, selain berupa angka juga dapat berupa *variabel* atau fungsi-fungsi (Supranto, 2003:4).

Contoh:

Matrik $A_{m\times n}$ dengan $m = 2$ dan $n = 3$.

dan $a_{11} = 2,\quad a_{12} = 3,\quad a_{13} = 4,\quad a_{21} = 5,\quad a_{22} = 2,\quad a_{23} = 6$

$$A_{2\times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Definisi 20:

Jika A adalah sebuah matriks bujur sangkar, dan jika suatu matriks B yang berukuran sama dapat didapatkan sedemikian sehingga AB = BA = I, maka A mempunyai *invers* dan B disebut *invers* dari A (Anton, 2000: 65).

Contoh:

$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ adalah invers dari $B = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

Karena

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Dan

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Definisi 21:

Jika A adalah sebarang matriks $m \times n$, maka *transpose* A, dinyatakan dengan A^T, didefinisikan sebagai matriks $m \times n$ yang didapatkan dengan menukar baris menjadi kolom, atau kolom menjadi baris (Anton, 2000:55).

Contoh:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

2.3.2 Macam-Macam Matriks

Definisi 22: Matriks Persegi

Matriks persegi adalah suatu matriks dimana banyaknya baris sama dengan banyaknya kolom ($m = n$). Apabila $m = n$, maka matriks A disebut matriks persegi orde n (Supranto, 2003:8).

Contoh:

$m = n = 3$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Definisi 23: Matriks Identitas

Matriks identitas adalah matriks dimana elemen-elemennya mempunyai nilai 1 pada diagonal utama dan 0 pada tempat-tempat lain di luar diagonal utama (diagonal dari kiri atas ke kanan bawah) (Supranto, 2003:8-9).

Matriks $A = (a_{ij}), 1 \leq i, j \leq n$ apabila

$a_{ij} = 1$ untuk $i = j$

$a_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$

Maka, matriks A disebut matriks identitas dan biasanya diberi symbol I_n.

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Contoh:

$n = 2$

$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$m = 3$

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Definisi 24: Matriks Diagonal

Matriks diagonal adalah matriks bujur sangkar yang semua elemen non diagonal utamanya 0 (Anton, 2000:94).

Suatu matriks diagonal umum D, $n\times n$, bisa ditulis sebagai:

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{bmatrix}$$

Contoh:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Definisi 25: Matriks Segitiga

Suatu *matriks bujur sangkar* yang semua anggota di bawah diagonal utamanya 0 disebut matriks *segitiga atas*, dan suatu matriks bujur sangkar yang semua anggota di atas diagonal utamanya 0 disebut matriks *segitiga bawah*. Suatu matriks yang termasuk baik segitiga atas maupun segitiga bawah disebut matriks *segitiga* (Anton, 2000:96).

Contoh:

Matriks segitiga atas 4 × 4:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$$

Matriks segitiga bawah 4 × 4:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Definisi 26: Matriks Simetri

Suatu matriks bujur sangkar A disebut *matriks simetri* jika matriks tersebut sama dengan transposenya ($A = A^T$) (Anton, 2000:98).

Contoh:

$$\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

2.3.3 Determinan Matriks

Perlu dijelaskan disini bahwa hanya *square matriks* (matriks kuadrat) sajalah yang mempunyai determinan.

Definisi 27:

Jika A adalah suatu matriks n × n, maka submatriks berukuran (n - 1) × (n - 1) yang diperoleh dari A dengan menghapus baris ke-*i* dan kolom ke-*j* dinamakan *minor elemen* (*i*, *j*) dari matriks A dan dilambangkan dengan M_{ij} atau $M_{ij}(A)$ (Charles, 1992:106).

Contoh:

Jika $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$, maka

$$M_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$$M_{34} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}$$

Definisi 28:

Jika matriks berukuran n × n, determinan matriks A didefinisikan sebagai:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{1j}(-1)^{1+j} det(M_{1j}) \qquad (1)$$

dan

$$det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \qquad (2)$$

Kalau menerapkan definisi 28 ke matriks A yang berukuran 3 × 3, dengan menggunakan persamaan (1) maka diperoleh:

$$det\ A = det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1}\det(M_{11}) + a_{12}(-1)^{1+2}\det(M_{12}) + a_{13}(-1)^{1+3}\det(M_{13})$$

$$= a_{11} det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{12} det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{13} det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

Definisi 29:

Jika setiap *minor* (*i*, *j*) dari matriks A diberi tanda + (plus) dan – (minus) sebagai tanda pada determinan maka disebut dengan *kofaktor* elemen a_{ij} dan biasa diberi simbol K_{ij} . Jadi, *kofaktor* $K_{ij} = (-1)^{i+j} detM_{ij}$ (Supranto, 2003:50).

Jadi, determinan matriks A berukuran n × n sama dengan penjumlahan hasil kali semua elemen dari suatu baris atau kolom matriks A dengan kofaktor masing-masing.

Dengan menggunakan elemen-elemen baris ke-i :

$$\det(A) = a_{i1}K_{i1} + a_{i2}K_{i2} + \cdots + a_{in}K_{in}$$

$$det\ (A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}K_{ik}\ ; i = 1, 2, \dots, n$$

Atau dengan menggunakan elemen-elemen baris ke-j :

$$\det(A) = a_{1j}K_{1j} + a_{2j}K_{2j} + \cdots + a_{nj}K_{nj}$$

$$det\ (A) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}K_{kj}\ ; i = 1, 2, \dots, n$$

2.3.4 Eliminasi Gauss

Definisi 30:

Sebuah matriks dikatakan matriks eselon baris jika memenuhi pernyataan 1, 2 dan 3. Matriks eselon baris tereduksi jika memenuhi pernyataan 4.

1. Jika satu baris tidak seluruhnya terdiri dari nol, maka bilangan tak nol pertama pada baris itu adalah 1. Bilangan 1 ini disebut 1 utama.
2. Jika terdapat baris yang seluruhnya terdiri dari nol, maka baris-baris ini akan dikelompokkan bersama pada bagian bawah dari matriks.
3. Jika terdapat dua baris berurutan yang tidak seluruhnya terdiri dari nol, maka 1 utama pada baris yang lebih rendah terdapat pada kolom yang lebih kanan dari 1 utama pada baris yang lebih tinggi.

4. Setiap kolom yang memiliki 1 utama memiliki nol pada tempat-tempat lainnya.

(Anton dan Rorres, 2004:9).

2.3.5 Ruang Vektor dan Subruang

Definisi 31:

Misalkan V adalah suatu himpunan takkosong dari objek-objek sebarang, di mana dua operasinya didefinisikan, yaitu penjumlahan dan perkalian skalar. Jika aksioma-aksioma berikut dipenuhi objek u, v, w pada V dan semua skalar k dan l, maka disebut ruang vektor dan objek-objek pada V adalah vektor.

1. Jika u dan v adalah objek-objek pada V, maka u + v berada pada V.
2. u + v = v + u
3. u + (v + w) = (u + v) + w
4. Di dalam V terdapat suatu objek 0, yang disebut vektor nol untuk V, sedemikian rupa sehingga 0 + u = u + 0 = u untuk semua u pada V.
5. Untuk setiap u pada V, terdapat suatu objek –u pada V, yang disebut sebagai negatif dari u, sedemikian rupa sehingga u + (-u) = (-u) + u = 0.
6. Jika k adalah skalar sebarang dan u adalah objek sebarang pada V, maka ku terdapat pada V.
7. k(u + v) = ku + kv
8. (k + l)u = ku + lu

9. k(lu) = (kl)(u)

10. lu = u

(Anton dan Rorres, 2004:228).

Definisi 32:

Suatu vektor w disebut kombinasi linier (*linier combination*) dari vektor-vektor $v_1, v_2, \ldots . v_r$ jika dapat dinyatakan dalam bentuk

$$w = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots + k_r v_r$$

Di mana $k_1, k_2 \ldots k_r$ adalah skalar (Anton dan Rorres, 2004:241).

Definisi 33:

Jika $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ adalah himpunan vektor-vektor takkosong, maka persamaan vektor $k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots + k_r v_r = 0$. Jika ini satu-satunya solusi, maka S disebut sebagai himpunan bebas linier (*linearly independent*). Jika terdapat solusi-solusi lain, maka S disebut sebagai himpunan tidak bebas linier (*linearly dependent*) (Anton dan Rorres, 2004:249).

2.3.6 Basis dan Dimensi

Definisi 34:

Jika V adalah suatu ruang vektor sebarang dan $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ adalah suatu himpunan vektor-vektor pada V, maka S disebut basis untuk V jika dua syarat berikut berlaku:

a. S bebas linier

b. S merentang V

(Anton dan Rorres, 2004:260).

Definisi 35:

Dimensi dari ruang vektor V yang berdimensi terhingga, dinotasikan dengan dim(V), didefinisikan sebagai banyaknya vektor-vektor pada suatu basis untuk V (Anton dan Rorres, 2004:269).

2.3.7 Ruang Baris, Ruang Kolom, dan Ruang Null

Definisi 36:

Jika A adalah suatu matriks $m \times n$, maka subruang dari R^n yang direntang oleh vektor-vektor baris dari A disebut ruang baris (*row space*) dari A, dan subruang dari R^m yang direntang oleh vektor-vektor kolom disebut ruang kolom (*column space*) dari A. Ruang solusi dari sistem persamaan yang homogen $Ax = 0$, yang merupakan subruang dari R^n, disebut ruang null (*null space*) dari A (Anton dan Rorres, 2004:278).

2.3.8 *Rank* Matriks

Definisi 37:

Rank suatu matriks adalah dimensi dari ruang baris dan ruang kolom dari suatu matriks. *Rank* dari matriks A dinyatakan sebagai *rank* (A) (Anton dan Rorres, 2004:294).

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

Bentuk eselon baris dari A adalah:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & -11 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Rank baris matrik A = 3.

Bentuk eselon kolom dari matrik A adalah:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -11 & 0 \\ 1 & 1 & -11 & 0 \end{bmatrix}$$

Rank kolom matrik A = 3

Karena *rank* baris matrik A = *rank* kolom matrik A = 3.

Maka *Rank* (A) = 3.

2.4 *Field*

Definisi 38:

Jika R adalah himpunan tak kosong dengan dua operasi biner dinotasikan penjumlahan dan perkalian, maka $(R, +,\cdot)$ dinamakan *Ring* jika memenuhi aksioma sebagai berikut:

i) $(R, +)$ adalah grup abelian.

ii) Operasi perkalian bersifat asosiatif di R.

$(ab)c = a(bc) \quad \forall\, a, b, c \in R$

iii) Operasi perkalian bersifat distributive terhadap operasi penjumlahan di R baik distribusi kiri maupun kanan.

$a(b + c) = ab + ac$ (distribusi kanan)

$(a + b)c = ac + bc$ (distribusi kiri)

$\forall\, a, b, c \in R$

(Raisinghania dan Aggarwal, 1980:313).

Definisi 39:

Suatu Ring $(R, +,\cdot)$ disebut *Ring Komutatif* jika dan hanya jika operasi perkalian bersifat komutatif di R (Raisinghania dan Aggarwal, 1980:314).

Definisi 40:

Suatu Ring $(R, +,\cdot)$ disebut *Ring dengan Elemen Satuan* jika dan hanya jika R mempunyai elemen identitas terhadap operasi perkalian (Raisinghania dan Aggarwal, 1980:314).

Definisi 41:

Suatu Ring $(R,+,\cdot)$ disebut *field* jika dan hanya jika ring tersebut komutatif, memuat elemen satuan dan semua unsur yang tidak nol di R mempunyai invers terhadap operasi perkalian (Raisinghania dan Aggarwal, 1980: 314).

2.5 Hubungan Graf, Matriks, dan *Field*

2.5.1 Matriks *Adjacency*

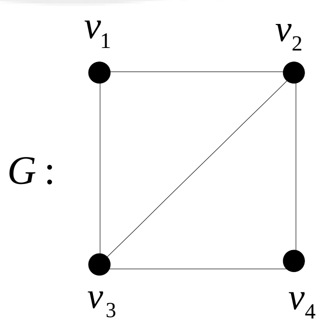
Definisi 42:

Misal G graf dengan order $p(p \geq 1)$ dan ukuran q serta himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$. Matriks keterhubungan (*adjacency*) dari graf G adalah matriks $p \times p$ dengan unsur pada baris ke-i dan kolom ke-j bernilai 1 jika titik v_i terhubung langsung dengan titik v_j, dan bernilai 0 jika titik v_i tidak terhubung langsung dengan titik v_j (Abdussakir dkk, 2009:73-74).

Matriks Adjacency dapat ditulis $A(G) = [a_{ij}], 1 \leq i, j \leq p$, dengan

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & jika\ v_1v_2 \in E(G) \\ 0, & jika\ v_1v_2 \notin E(G) \end{cases}$$

Contoh:



$$A(G): \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Gambar 2.16 Graf G dan Matriks Adjacency dari G

2.5.2 *Rank* Minimum dari Graf G pada Suatu *Field*

Dari matriks *adjacency* dapat dikembangkan menjadi matriks simetri dengan unsur-unsur pada *field* dengan aturan:

i) Unsur nol selain diagonal utama tetap bernilai nol.

ii) Unsur tak nol pada matriks dirubah dengan unsur yang tidak boleh nol pada *field* secara acak.

iii) Unsur diagonal diabaikan nilainya.

Suatu himpunan dari matriks simetri berukuran n x n dengan unsur-unsur pada *field* dinotasikan dengan $S_n(F)$. Misalkan $A \in S_n(F)$, sebuah graf yang digambarkan oleh matriks simetri dengan unsur-unsur pada *field* dinotasikan dengan $\mathcal{G}(A)$, $\mathcal{G}(A)$ adalah sebuah graf dengan himpunan titik {1, 2, …, n} dan sisinya adalah $\{\{i, j\} \mid a_{ij} \neq 0 \text{ dan } i \neq j\}$, dan elemen-elemen diagonal utama A diabaikan. Himpunan matriks dengan unsur-unsur pada *field* dari graf G dinotasikan S_G^F, sehingga $S_G^F = \{A \in S_n(F): \mathcal{G}(A) = G\}$ (Fallat dan Hogben, 2007:19).

Dari beberapa matriks dengan unsur-unsur pada *field* yang menggambarkan suatu graf memungkinkan memiliki *rank* yang berbeda. *Rank* terkecil dari matriks-matriks tersebut disebut *rank minimum.*

Definisi 43:

Rank minimum dari matriks dengan unsur pada *field* F yang menggambarkan suatu graf G didefinisikan sebagai berikut.

$$mr(S_G^F) = \min\{rank(A): A \in S_G^F\}$$

Lemma 1:

Diberikan suatu graf G dan titik $v \in V(G)$,

$mr(G) - 2 \leq mr(G - v) \leq mr(G)$

(Chenette dan Droms, 2006:6).

Bukti:

Akan ditunjukkan: i) $mr(G) - 2 \leq mr(G - v)$

ii) $mr(G - v) \leq mr(G)$

i) $mr(G) - 2 \leq mr(G - v)$

Misal suatu matriks dari graf G berukuran n x n mempunyai $mr(G) = k$. Artinya, k adalah banyaknya baris yang entrinya tidak dapat dinolkan. Mengurangi satu titik pada suatu graf sama halnya dengan mengurangi satu baris dan satu kolom pada suatu matriks, maka ukuran matriks tersebut menjadi (n-1) x (n-1). Sehingga pengurangan titik pada suatu graf dapat menurunkan rank minimum paling banyak 2, sehingga diperoleh

$mr(G - v) \geq k - 2$

Atau

$mr(G - v) \geq mr(G) - 2$

sehingga

$mr(G) - 2 \leq mr(G - v)$

ii) $mr(G-v) \leq mr(G)$

Mengurangi satu titik pada suatu graf sama halnya dengan mengurangi satu baris dan satu kolom pada suatu matriks. Pada bukti i) dijelaskan bahwa pengurangan titik pada suat graf, tidak dapat menaikkan rank pada matriks tersebut, sehingga tidak mungkin

$mr(G-v) > mr(G)$

Sehingga diperoleh

$mr(G-v) \leq mr(G)$

Dari i) dan ii) maka diperoleh

$mr(G) - 2 \leq mr(G-v) \leq mr(G)$

Lemma 2:

Untuk setiap field F dan graf G dengan order n, maka $mr^F(G) \leq |V(G)| - 1$ (Chenette dan Droms, 2006:6).

Bukti:

Misalkan A adalah matriks *adjacency* dari G. Ubah entri diagonal dari A dengan cara sebagai berikut misal

$$a_{ii} = -\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} a_{ki}$$

Untuk setiap entri diagonal $a_{ii}, 1 \leq i \leq n$. Kemudian dengan Operasi Baris Elementer (OBE), minimal baris yang dapat dinolkan adalah 1, sehingga $mr(G) = n-1$. Jadi, maksimal baris yang dapat dinolkan adalah $n-1$, sehingga $mr(G) < n-1$. Sehingga diperoleh $mr(G) \leq n-1$. Maka dapat disimpulkan bahwa $mr^F(G) \leq |V(G)| - 1$ (Chenette dan Droms, 2006:7).

Contoh:

G adalah graf lintasan (P_n) dengan $n = 3$, maka matriks adjacency dari P_3 adalah

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Mengubah entri diagonal dengan cara yang disebutkan pada bukti lemma 2 di atas yaitu sebagai berikut:

$$a_{11} = -(a_{21} + a_{31})$$
$$= -(1 + 0)$$
$$= -1$$
$$a_{22} = -(a_{12} + a_{32})$$
$$= -(1 + 1)$$
$$= -2$$
$$a_{33} = -(a_{13} + a_{23})$$
$$= -(0 + 1)$$
$$= -1$$

sehingga

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$rank(A) = 2$

Jadi memungkinkan memiliki $mr(P_3) \leq 2$.

Teorema 1:

Jika P_n adalah lintasan dengan n titik, maka $mr(P_n) = n - 1$ (Fallat dan Hogben, 2007:4).

Bukti:

Misal

Matriks Adjacency dari graf P_n adalah

$$A(P_n) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Jika kolom pertama dan baris terakhir dihapus, maka matriks tersebut menjadi matriks segitiga bawah dan diagonalnya tidak ada yang nol.

Sehingga diperoleh

$$A'(P_n) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Karena diagonalnya tidak nol, maka $\det(A'(P_n)) \neq 0$

Sehingga rank $A'(P_n) = n - 1$

Berdasarkan Lemma 1 diperoleh $mr(P_n) \geq n - 1$

Berdasarkan Lemma 2 diperoleh $mr(P_n) \leq n - 1$

Sehingga diperoleh $mr(P_n) = n - 1$ (Chenette dan Droms, 2006:7).

Teorema 2:

Untuk graf G dengan order n maka $mr(G) \geq diam(G)$ (Chenette dan Droms, 2006:7).

Bukti:

Pilih titik u dan v sedemikian hingga $d(u,v) = diam\,(G)$. Buatlah lintasan terdukung P_d dimana $d = diam\,(G) + 1$. Berdasarkan teorema 1, $mr(P_d) = d - 1$, sehingga $mr(P_d) = diam\,(G)$. Ingat menurut lemma 1 bahwa penambahan titik pada graf G bukan pada P_d tidak dapat menurunkan rank mínimum dari G, sehingga $mr(G) \geq mr(P_d + v) \geq mr(P_d)$. Karena $mr(P_d) = diam\,(G)$, maka $mr(G) \geq diam(G)$.

BAB III

PEMBAHASAN

Pada Bab III ini akan dibahas mengenai *rank* minimum dari graf *path* (P_n), graf komplit (K_n), graf *star* (S_n), dan graf sikel (C_n) yang disajikan dalam suatu matriks simetri dengan unsur-unsur pada *field* Z_2. Dalam membahas *rank* minimum dari graph *path* (P_n) dan graf komplit (K_n) dibatasi untuk nilai $n \geq 2$. Sedangkan dalam membahas *rank* minimum dari graf *star* (S_n) dibatasi untuk nilai $n \geq 3$, dan graf sikel (C_n) dibatasi untuk nilai $n \geq 3$, dengan n genap.

3.1 *Rank* Minimum dari Graf *Path* (P_n) pada *Field* Z_2

Berikut ini beberapa *rank* minimum dari beberapa graf *path* (P_n) yang disajikan dalam bentuk matriks dengan unsur-unsur pada *field* Z_2.

a. Graf *Path* dengan 2 titik (P_2)

Gambar 3.1 Graf P_2

Matriks adjacency dari graf P_2 adalah:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks adjacency tersebut, kemudian disajikan dalam beberapa matriks simetri dengan unsur-unsur pada *field* Z_2 yang akan dicari *rank* minimumnya, yaitu sebagai berikut:

1) $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, *rank* $(A_1) = 2$

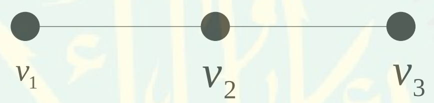
2) $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, *rank* $(A_2) = 1$

3) $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, *rank* $(A_3)= 2$

4) $A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, *rank* $(A_4) = 2$

Rank minimum dari graf P_2 pada *field* Z_2 yang dinotasikan dengan $mr(S_{P_2}^{Z_2})$ adalah 1.

b. Graf *Path* dengan 3 titik (P_3)



Gambar 3.2 Graf P_3

Matriks adjacency dari graf P_3 adalah:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks adjacency tersebut, kemudian disajikan dalam beberapa matriks simetri dengan unsur-unsur pada *field* Z_2 yang akan dicari *rank* minimumnya, yaitu sebagai berikut:

1) $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, *rank* $(A_1) = 2$

2) $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, *rank* $(A_1) = 3$

3) $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, *rank* $(A_3) = 2$

4) $A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, *rank* $(A_4) = 3$

5) $A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, *rank* $(A_5) = 3$

6) $A_6 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, *rank* $(A_6) = 3$

7) $A_7 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, *rank* $(A_7) = 3$

8) $A_8 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, *rank* $(A_8) = 3$

Rank minimum dari graf P_3 pada *field* Z_2 yang dinotasikan dengan $mr(S_{P_3}^{Z_2})$ adalah 2.

c. Graf *Path* dengan 4 titik (P_4)

Gambar 3.3 Graf P_4

Matriks adjacency dari graf P_4 adalah:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks adjacency tersebut, kemudian disajikan dalam beberapa matriks simetri dengan unsur-unsur pada *field* Z_2 yang akan dicari *rank* minimumnya, yaitu sebagai berikut:

1) $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $rank\ (A_1) = 4$

2) $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $rank\ (A_2) = 4$

3) $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $rank\ (A_3) = 4$

4) $A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $rank\ (A_4) = 3$

5) $A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $rank\ (A_5) = 3$

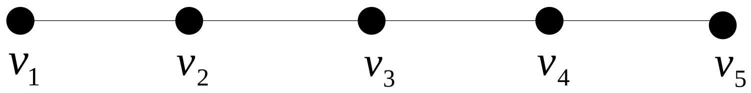
6) $A_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $rank\ (A_6) = 4$

7) $A_7 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $rank\ (A_7) = 3$

8) $A_8 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $rank\ (A_8) = 4$

Rank minimum dari graf P_4 pada *field* Z_2 yang dinotasikan dengan $mr(S_{P_4}^{Z_2})$ adalah 3.

d. Graf *Path* dengan 5 titik (P_5)



Gambar 3.4 Graf P_5

Matriks adjacency dari graf P_5 adalah:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks adjacency tersebut, kemudian disajikan dalam beberapa matriks simetri dengan unsur-unsur pada *field* Z_2 yang akan dicari *rank* minimumnya, yaitu sebagai berikut:

1) $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, *rank* $(A_1) = 4$

2) $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, *rank* $(A_2) = 5$

3) $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, *rank* $(A_3) = 5$

4) $A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, *rank* $(A_4) = 5$

5) $A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, *rank* $(A_5) = 5$

6) $A_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, *rank* $(A_6) = 5$

7) $A_7 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, *rank* $(A_7) = 5$

8) $A_8 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, *rank* $(A_8) = 4$

Rank minimum dari graf P_5 pada *field* Z_2 yang dinotasikan dengan $mr(S_{P_5}^{Z_2})$ adalah 4.

Dari hasil diatas, diperoleh nilai *rank* minimum dari graf P_n yang disajikan dalam matriks simetri dengan unsur-unsur pada *field* Z_2 yang dinotasikan dengan $mr(S_{P_n}^{Z_2})$ yaitu dalam tabel berikut:

Tabel 3.1 *Rank* Minimum dari Graf Path (P_n)

Graf	**Rank Minimum (*mr*)**
P_2	1
P_3	2
P_4	3
P_5	4

$\vdots$	$\vdots$
P_n	$n-1$ dengan $n \geq 2, n \in N$

Berdasarkan tabel yang menunjukkan nilai *rank* minimum dari graf P_n pada *field* Z_2 maka dapat disimpulkan

Teorema 3.1: Jika $S_{P_n}^{Z_2}$ adalah matriks simetri dengan unsur-unsur pada *field* Z_2 yang menggambarkan graf *path*, maka $mr\left(S_{P_n}^{Z_2}\right) = n-1$.

Bukti:

Akan dibuktikan: $mr\left(S_{P_n}^{Z_2}\right) = n-1$

Maka akan ditunjukkan $mr\left(S_{P_n}^{Z_2}\right) \leq n-1$ dan $mr\left(S_{P_n}^{Z_2}\right) \geq n-1$.

i) $mr\left(S_{P_n}^{Z_2}\right) \leq n-1$

Bukti:

a) Untuk *n* ganjil

Ambil

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan melakukan serangkaian operasi baris elementer sebagai berikut:

$b_3 - b_1$

$b_5 - b_3$

$b_7 - b_5$

$\vdots$

Dan seterusnya sampai baris ke n dengan $n = 2m + 1$

$b_{2m+1} - b_{2(m-1)+1}$

Maka akan diperoleh matriks sebagai berikut:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks diatas diperoleh 1 baris nol, dapat disimpulkan bahwa $rank\ (A_1) = n - 1$. Sehingga memungkinkan adanya *rank* yang lebih kecil dari $n - 1$, maka $mr\left(S_{P_n}^{Z_2}\right) \leq n - 1$.

Jadi, terbukti bahwa $mr\left(S_{P_n}^{Z_2}\right) \leq n - 1$.

b) Untuk n genap

Ambil

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Dengan melakukan serangkaian operasi baris elementer sebagai berikut:

- $b_2 - b_1$
- $b_3 - b_2$

  $b_1 - b_2$
- $b_4 - b_3$

  $b_2 - b_3$

  $b_1 - b_3$

  $\vdots$

Dan seterusnya sampai baris ke $n-1$ dan baris ke n

- $b_n - b_{n-1}$

Maka akan diperoleh matriks sebagai berikut:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks diatas diperoleh 1 baris nol, dapat disimpulkan bahwa $rank\ (A_2) = n - 1$. Sehingga memungkinkan adanya *rank* yang lebih kecil dari $n - 1$, maka $mr\left(S_{P_n}^{Z_2}\right) \leq n - 1$.

Jadi, terbukti bahwa $mr\left(S_{P_n}^{Z_2}\right) \leq n - 1$.

Maka untuk setiap *n* terbukti bahwa $mr\left(S_{P_n}^{Z_2}\right) \leq n - 1$

ii) $mr\left(S_{P_n}^{Z_2}\right) \geq n-1$

Bukti:

Menurut teorema yang menyatakan bahwa $mr(G) \geq diam\ (G)$, maka $mr\left(S_{P_n}^{Z_2}\right) \geq diam(P_n)$.

Selanjutnya akan dicari $diam(P_n)$ sebagai berikut:

Perhatikan Graf P_n

Gambar 3.5 Graf *Path* (P_n)

Pada Graf P_n, maka diperoleh bahwa

$$e(v_1) = n-1, e(v_2) = n-2, e(v_3) = n-3, e(v_4) = n-4,$$

$$e(v_{n-1}) = n-2, e(v_n) = n-1$$

Sehingga diperoleh $diam(P_n) = n-1$.

Maka

$$mr\left(S_{P_n}^{Z_2}\right) \geq diam(P_n)$$

$$\geq n-1$$

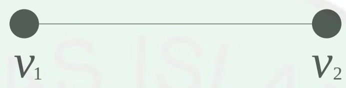
Jadi, terbukti bahwa $mr\left(S_{P_n}^{Z_2}\right) \geq n-1$.

Karena terbukti bahwa $mr\left(S_{P_n}^{Z_2}\right) \leq n-1$ dan $mr\left(S_{P_n}^{Z_2}\right) \geq n-1$, maka $mr\left(S_{P_n}^{Z_2}\right) = n-1$.

3.2 *Rank* Minimum dari Graf Komplit (K_n)

Berikut ini beberapa *rank* minimum dari beberapa graf komplit (K_n) yang disajikan dalam bentuk matriks dengan unsur-unsur pada *field* Z_2.

a. Graf Komplit dengan 2 titik (K_2)



Gambar 3.6 Graf K_2

Matriks adjacency dari graf K_2 adalah:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks adjacency tersebut, kemudian disajikan dalam beberapa matriks simetri dengan unsur-unsur pada *field* Z_2 yang akan dicari *rank* minimumnya, yaitu sebagai berikut:

1) $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, *rank* $(A_1) = 2$

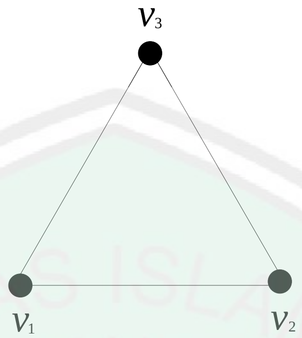
2) $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, *rank* $(A_2) = 1$

3) $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, *rank* $(A_3) = 2$

4) $A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, *rank* $(A_4) = 2$

Rank minimum dari graf K_2 pada *field* Z_2 yang dinotasikan dengan $mr(S_{K_2}^{Z_2})$ adalah 1.

b. Graf Komplit dengan 3 titik (K_3)



Gambar 3.7 Graf K_3

Matriks adjacency dari graf K_3 adalah:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks adjacency tersebut, kemudian disajikan dalam beberapa matriks simetri dengan unsur-unsur pada *field* Z_2 yang akan dicari *rank* minimumnya, yaitu sebagai berikut:

1) $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, *rank* $(A_1) = 3$

2) $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, *rank* $(A_2) = 3$

3) $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, *rank* $(A_3) = 2$

4) $A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, *rank* $(A_4) = 1$

5) $A_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, *rank* $(A_5) = 3$

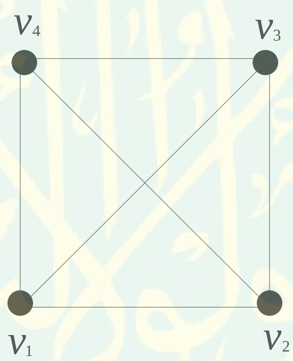
6) $A_6 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, *rank* $(A_6) = 2$

7) $A_7 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, *rank* $(A_7) = 3$

8) $A_8 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, *rank* $(A_8) = 2$

Rank minimum dari graf K_3 pada *field* Z_2 yang dinotasikan dengan $mr(S_{K_3}^{Z_2})$ adalah 1.

c. Graf komplit dengan 4 titik (K_4)



Gambar 3.8 Graf K_4

Matriks adjacency dari graf K_4 adalah:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks adjacency tersebut, kemudian disajikan dalam beberapa matriks simetri dengan unsur-unsur pada *field* Z_2 yang akan dicari *rank* minimumnya, yaitu sebagai berikut:

1) $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, *rank* $(A_1) = 4$

2) $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, *rank* (A_2) = 4

3) $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, *rank* (A_3) = 3

4) $A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, *rank* (A_4) = 2

5) $A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, *rank* (A_5) = 1

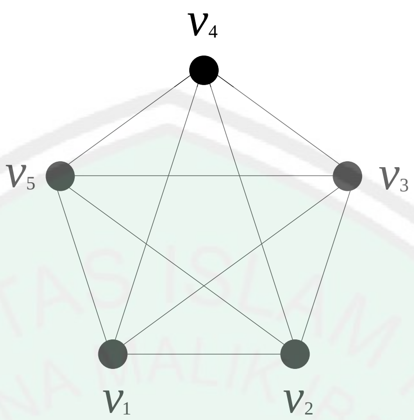
6) $A_6 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, *rank* (A_6) = 3

7) $A_7 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, *rank* (A_7) = 3

8) $A_8 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, *rank* (A_8) = 2

Rank minimum dari graf K_4 pada *field* Z_2 yang dinotasikan dengan $mr(S_{K_4}^{Z_2})$ adalah 1.

d. Graf Komplit dengan 5 titik (K_5)



Gambar 3.9 Graf K_5

Matriks adjacency dari graf K_5 adalah:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks adjacency tersebut, kemudian disajikan dalam beberapa matriks simetri dengan unsur-unsur pada *field* Z_2 yang akan dicari *rank* minimumnya, yaitu sebagai berikut:

1) $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, *rank* $(A_1) = 5$

2) $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, *rank* $(A_2) = 5$

3) $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, *rank* $(A_3) = 4$

4) $A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, *rank* (A_4) = 3

5) $A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, *rank* (A_5) = 2

6) $A_6 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, *rank* (A_6) = 1

7) $A_7 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, *rank* (A_7) = 2

8) $A_8 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, *rank* (A_8) = 4

Rank minimum dari graf K_5 pada *field* Z_2 yang dinotasikan dengan $mr(S_{K_5}^{Z_2})$ adalah 1.

Dari hasil diatas, diperoleh nilai *rank* minimum dari graf K_n yang disajikan dalam matriks simetri dengan unsur-unsur pada *field* Z_2 yang dinotasikan dengan $mr(S_{K_n}^{Z_2})$ yaitu dalam tabel berikut:

Tabel 3.2 *Rank* Minimum dari Graf Komplit (K_n)

Graf	***Rank* Minimum (*mr*)**
K_2	1
K_3	1
K_4	1
K_5	1
$\vdots$	$\vdots$
K_n	1

Berdasarkan tabel yang menunjukkan nilai *rank* minimum dari graf K_n pada *field* Z_2 maka dapat disimpulkan

Teorema 3.2: Jika $S_{K_n}^{Z_2}$ adalah matriks simetri dengan unsur-unsur pada field Z_2 yang menggambarkan graf *path*, maka $mr\left(S_{K_n}^{Z_2}\right) = 1$.

Bukti:

Akan dibuktikan: $mr\left(S_{K_n}^{Z_2}\right) = 1$

Maka akan ditunjukkan $mr\left(S_{K_n}^{Z_2}\right) \leq 1$ dan $mr\left(S_{K_n}^{Z_2}\right) \geq 1$.

i) $mr\left(S_{K_n}^{Z_2}\right) \leq 1$

Ambil

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Dengan melakukan serangkaian operasi baris elementer sebagai berikut:

$b_2 - b_1$

$b_3 - b_1$

$b_4 - b_1$

$\vdots$

Dan seterusnya sampai baris ke n

$b_n - b_1$

Maka akan diperoleh matrik sebagai berikut:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks diatas diperoleh $n-1$ baris nol, dapat disimpulkan bahwa $rank\ (A_1) = 1$. Sehingga memungkinkan adanya *rank* yang lebih kecil dari 1, maka $mr\left(S_{K_n}^{Z_2}\right) \leq 1$.

Jadi, terbukti bahwa $mr\left(S_{K_n}^{Z_2}\right) \leq 1$.

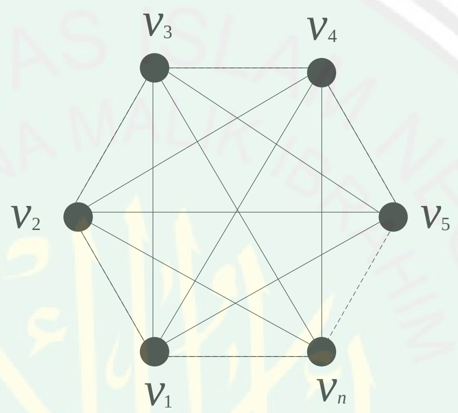
ii) $mr\left(S_{K_n}^{Z_2}\right) \geq 1$

Bukti:

Menurut teorema yang menyatakan bahwa $mr(G) \geq diam\ (G)$, maka $mr\left(S_{K_n}^{Z_2}\right) \geq diam(K_n)$.

Selanjutnya akan dicari $diam(K_n)$ sebagai berikut:

Perhatikan Graf K_n



Gambar 3.10 Graf Komplit (K_n)

Pada Graf K_n, maka diperoleh bahwa

$e(v_1) = 1, e(v_2) = 1, e(v_3) = 1, e(v_4) = 1, e(v_5) = 1, e(v_n) = 1$

Sehingga diperoleh $diam(K_n) = 1$.

Maka

$$mr\left(S_{K_n}^{Z_2}\right) \geq diam(K_n)$$

$$\geq 1$$

Jadi, terbukti bahwa $mr\left(S_{K_n}^{Z_2}\right) \geq 1$.

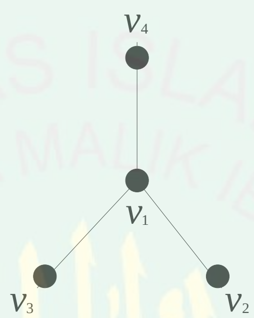
Karena terbukti bahwa $mr\left(S_{K_n}^{Z_2}\right) \leq 1$ dan $mr\left(S_{K_n}^{Z_2}\right) \geq 1$,

Maka $mr\left(S_{K_n}^{Z_2}\right) = 1$.

3.3 *Rank* Minimum dari Graf *Star* (S_n) pada *Field* Z_2

Berikut ini beberapa *rank* minimum dari beberapa graf *star* (S_n) yang disajikan dalam bentuk matriks dengan unsur-unsur pada *field* Z_2.

a. Graf *Star* dengan 4 titik (S_3)



Gambar 3.11 Graf S_3

Matriks adjacency dari graf S_3 adalah:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks adjacency tersebut, kemudian disajikan dalam beberapa matriks simetri dengan unsur-unsur pada *field* Z_2 yang akan dicari *rank* minimumnya, yaitu sebagai berikut:

1) $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, *rank* $(A_1) = 2$

2) $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, *rank* $(A_2) = 2$

3) $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, *rank* $(A_3) = 3$

4) $A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, *rank* (A_4) = 4

5) $A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, *rank* (A_5) = 4

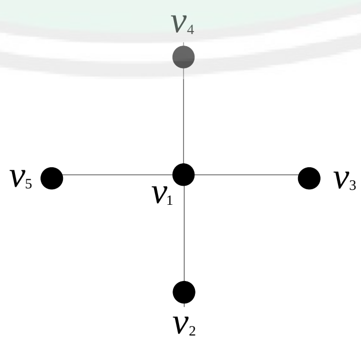
6) $A_6 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, *rank* (A_6) = 3

7) $A_7 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, *rank* (A_7) = 4

8) $A_8 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, *rank* (A_8) = 3

Rank minimum dari graf S_3 pada *field* Z_2 yang dinotasikan dengan $mr(S_{S_3}^{Z_2})$ adalah 2.

b. Graf *Star* dengan 5 titik (S_4)



Gambar 3.12 Graf S_4

Matriks adjacency dari graf S_4 adalah:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks adjacency tersebut, kemudian disajikan dalam beberapa matriks simetri dengan unsur-unsur pada *field* Z_2 yang akan dicari *rank* minimumnya, yaitu sebagai berikut:

1) $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $rank\ (A_1) = 2$

2) $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $rank\ (A_1) = 2$

3) $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $rank\ (A_3) = 3$

4) $A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $rank\ (A_4) = 4$

5) $A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $rank\ (A_5) = 5$

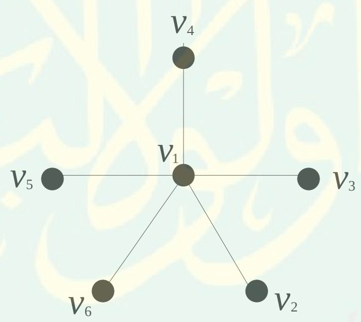
6) $A_6 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $rank\ (A_6) = 5$

7) $A_7 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, *rank* $(A_7) = 3$

8) $A_8 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, *rank* $(A_8) = 3$

Rank minimum dari graf S_4 pada *field* Z_2 yang dinotasikan dengan $mr(S_{S_4}^{Z_2})$ adalah 2.

c. Graf *Star* dengan 6 titik (S_5)



Gambar 3.13 Graf S_5

Matriks adjacency dari graf S_5 adalah:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks adjacency tersebut, kemudian disajikan dalam beberapa matriks simetri dengan unsur-unsur pada *field* Z_2 yang akan dicari *rank* minimumnya, yaitu sebagai berikut:

1) $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, *rank* $(A_1) = 2$

2) $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, *rank* $(A_2) = 2$

3) $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, *rank* $(A_3) = 3$

4) $A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, *rank* $(A_4) = 4$

5) $A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, *rank* $(A_5) = 5$

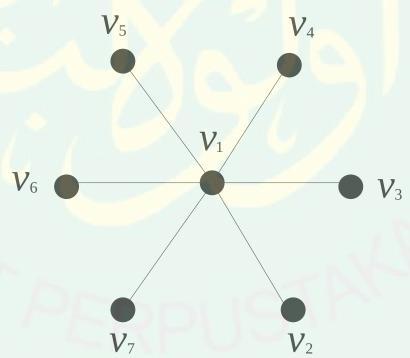
6) $A_6 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, *rank* $(A_6) = 6$

7) $A_7 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, *rank* (A_7) = 6

8) $A_8 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, *rank* (A_8) = 3

Rank minimum dari graf S_5 pada *field* Z_2 yang dinotasikan dengan $mr(S_{S_5}^{Z_2})$ adalah 2.

d. Graf *Path* dengan 7 titik (S_6)



Gambar 3.14 Graf S_6

Matriks adjacency dari graf S_6 adalah:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks adjacency tersebut, kemudian disajikan dalam beberapa matriks simetri dengan unsur-unsur pada *field* Z_2 yang akan dicari *rank* minimumnya, yaitu sebagai berikut:

1) $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $rank\ (A_1) = 2$

2) $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $rank\ (A_2) = 2$

3) $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $rank\ (A_3) = 3$

4) $A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $rank\ (A_4) = 4$

5) $A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $rank\ (A_5) = 5$

6) $A_6 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $rank\ (A_6)$ = 6

7) $A_7 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $rank\ (A_7)$ = 7

8) $A_8 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $rank\ (A_8)$ = 7

Rank minimum dari graf S_6 pada *field* Z_2 yang dinotasikan dengan $mr(S_{S_6}^{Z_2})$ adalah 2.

Dari hasil diatas, diperoleh nilai *rank* minimum dari graf S_n yang disajikan dalam matriks simetri dengan unsur-unsur pada *field* Z_2 yang dinotasikan dengan $mr(S_{S_n}^{Z_2})$ yaitu dalam tabel berikut:

Tabel 3.3 *Rank* Minimum dari Graf *Star* (S_n)

Graf	**Rank Minimum (*mr*)**
S_3	2
S_4	2

S_5	2
S_6	2
$\vdots$	$\vdots$
S_n	2 dengan $n \geq 3, n \in N$

Berdasarkan tabel yang menunjukkan nilai *rank* minimum dari graf S_n pada *field* Z_2 maka dapat disimpulkan

Teorema 3.3: Jika $S_{S_n}^{Z_2}$ adalah matriks simetri dengan unsur-unsur pada *field* Z_2 yang menggambarkan graf *star*, maka $mr\left(S_{S_n}^{Z_2}\right) = 2$.

Bukti:

Akan dibuktikan: $mr\left(S_{S_n}^{Z_2}\right) = 2$

Maka akan ditunjukkan $mr\left(S_{S_n}^{Z_2}\right) \leq 2$ dan $mr\left(S_{S_n}^{Z_2}\right) \geq 2$.

iii) $mr\left(S_{S_n}^{Z_2}\right) \leq 2$

Ambil

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan melakukan serangkaian operasi baris elementer sebagai berikut:

$b_n - b_{n-1}$

$b_{n-1} - b_{n-2}$

$b_{n-2} - b_{n-3}$

$\vdots$

Dan seterusnya sampai baris ke 3

$b_3 - b_2$

Maka akan diperoleh matriks sebagai berikut:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks diatas diperoleh 2 baris tak nol, dapat disimpulkan bahwa $rank\ (A_1) = 2$. Sehingga memungkinkan adanya *rank* yang lebih kecil dari 2, maka $mr(S_{S_n}^{Z_2}) \leq 2$.

Jadi, terbukti bahwa $mr(S_{S_n}^{Z_2}) \leq 2$.

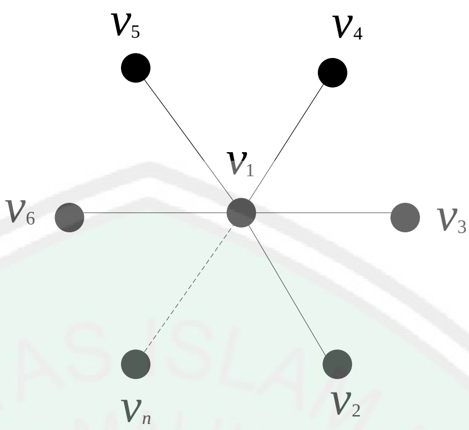
iv) $mr(S_{S_n}^{Z_2}) \geq 2$

Bukti:

Menurut teorema yang menyatakan bahwa $mr(G) \geq diam\ (G)$, maka $mr(S_{S_n}^{Z_2}) \geq diam(S_n)$.

Selanjutnya akan dicari $diam(S_n)$ sebagai berikut:

Perhatikan Graf S_n



Gambar 3.15 Graf *Star* (S_n)

Pada Graf S_n, maka diperoleh bahwa

$$e(v_1) = 2, e(v_2) = 2, e(v_3) = 2, e(v_4) = 2, e(v_5) = 2, e(v_6) = 2, e(v_n) = 2$$

Sehingga diperoleh $diam(S_n) = 2$.

Maka

$$mr\left(S_{S_n}^{Z_2}\right) \geq diam(S_n)$$
$$\geq 2$$

Jadi, terbukti bahwa $mr\left(S_{S_n}^{Z_2}\right) \geq 2$.

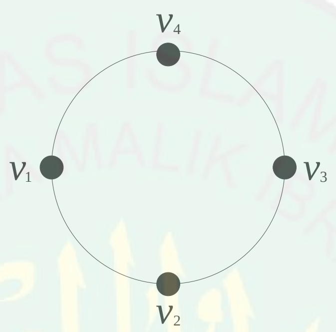
Karena terbukti bahwa $mr\left(S_{S_n}^{Z_2}\right) \leq 2$ dan $mr\left(S_{S_n}^{Z_2}\right) \geq 2$,

Maka $mr\left(S_{S_n}^{Z_2}\right) = 2$.

3.4 *Rank* Minimum dari Graf Sikel (C_n)

Berikut ini beberapa *rank* minimum dari beberapa graf sikel (C_n) yang disajikan dalam bentuk matriks dengan unsur-unsur pada *field* Z_2.

a. Graf sikel dengan 4 titik (C_4)



Gambar 3.16 Graf C_4

Matriks adjacency dari graf C_4 adalah:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks adjacency tersebut, kemudian disajikan dalam beberapa matriks simetri dengan unsur-unsur pada *field* Z_2 yang akan dicari *rank* minimumnya, yaitu sebagai berikut:

1) $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, *rank* $(A_1) = 2$

2) $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, *rank* $(A_2) = 3$

3) $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, *rank* $(A_3) = 3$

4) $A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, *rank* $(A_4) = 4$

5) $A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, *rank* $(A_5) = 3$

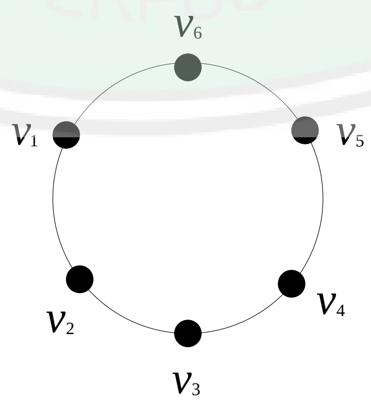
6) $A_6 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, *rank* $(A_6) = 4$

7) $A_7 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, *rank* $(A_7) = 4$

8) $A_8 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, *rank* $(A_8) = 4$

Rank minimum dari graf C_4 pada *field* Z_2 yang dinotasikan dengan $mr(S_{C_4}^{Z_2})$ adalah 2.

b. Graf sikel dengan 6 titik (C_6)



Gambar 3.17 Graf C_6

Matriks adjacency dari graf C_6 adalah:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks adjacency tersebut, kemudian disajikan dalam beberapa matriks simetri dengan unsur-unsur pada *field* Z_2 yang akan dicari *rank* minimumnya, yaitu sebagai berikut:

1) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, *rank* $(A_1) = 6$

2) $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, *rank* $(A_2) = 6$

3) $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, *rank* $(A_3) = 6$

4) $A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, *rank* $(A_4) = 6$

5) $A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, *rank* $(A_5) = 6$

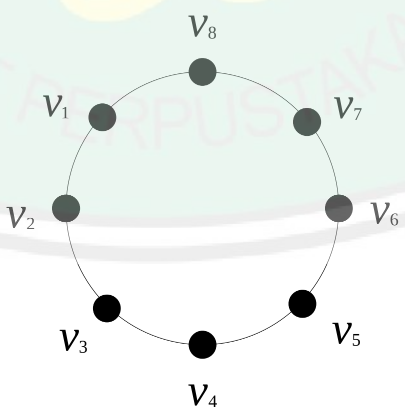
6) $A_6 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, *rank* $(A_6) = 5$

7) $A_7 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, *rank* $(A_7) = 4$

8) $A_8 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, *rank* $(A_8) = 6$

Rank minimum dari graf C_6 pada *field* Z_2 yang dinotasikan dengan $mr(S_{C_6}^{Z_2})$ adalah 4.

c. Graf sikel dengan 8 titik (C_8)



Gambar 3.18 Graf C_8

Matriks adjacency dari graf C_8 adalah:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks adjacency tersebut, kemudian disajikan dalam beberapa matriks simetri dengan unsur-unsur pada *field* Z_2 yang akan dicari *rank* minimumnya, yaitu sebagai berikut:

1) $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, *rank* (A_1) = 6

2) $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, *rank* (A_2) = 7

3) $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, *rank* (A_3) = 8

4) $A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $rank\ (A_4) = 8$

5) $A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $rank\ (A_5) = 8$

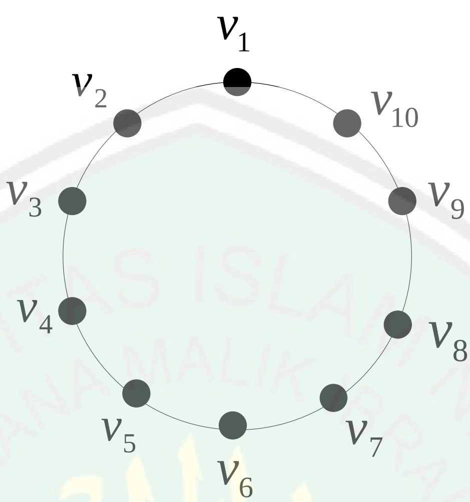
6) $A_6 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $rank\ (A_6) = 8$

7) $A_7 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $rank\ (A_7) = 8$

8) $A_8 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $rank\ (A_8) = 8$

Rank minimum dari graf C_8 pada *field* Z_2 yang dinotasikan dengan $mr(S_{C_8}^{Z_2})$ adalah 6.

d. Graf sikel dengan 10 titik (C_{10})



Gambar 3.19 Graf C_{10}

Matriks adjacency dari graf C_{10} adalah:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks adjacency tersebut, kemudian disajikan dalam beberapa matriks simetri dengan unsur-unsur pada *field* Z_2 yang akan dicari *rank* minimumnya, yaitu sebagai berikut:

1) $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $rank\,(A_1) = 10$

2) $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $rank\,(A_2) = 10$

3) $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $rank\,(A_3) = 10$

4) $A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $rank\,(A_4) = 9$

5) $A_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $rank\ (A_5) = 8$

6) $A_6 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $rank\ (A_6) = 10$

7) $A_7 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $rank\ (A_7) = 10$

8) $D_8 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $rank\ (A_8) = 10$

Rank minimum dari graf C_{10} pada *field* Z_2 yang dinotasikan dengan $mr(S_{C_{10}}^{Z_2})$ adalah 8.

Dari hasil diatas, diperoleh nilai *rank* minimum dari graf C_n yang disajikan dalam matriks simetri dengan unsur-unsur pada *field* Z_2 yang dinotasikan dengan $mr(S_{C_n}^{Z_2})$ yaitu dalam tabel berikut:

Tabel 3.4 *Rank* Minimum dari Graf Sikel (C_n)

Graf	**Rank Minimum (*mr*)**
C_4	2
C_6	4
C_8	6
C_{10}	8
$\vdots$	$\vdots$
C_n	$n-2$ dengan $n \geq 3$, n genap

Berdasarkan tabel yang menunjukkan nilai *rank* minimum dari graf C_n pada *field* Z_2 maka dapat disimpulkan

Konjektur 3.1 : Jika $S_{C_n}^{Z_2}$ adalah matriks simetri dengan unsur-unsur pada field Z_2 yang menggambarkan graf sikel genap $n \geq 3$, maka $mr(S_{C_n}^{Z_2}) = n-2$.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan mengenai *rank* minimum dari matriks simetri dengan unsur-unsur pada *field* Z_2 dari graf *path* (P_n), graf komplit (K_n), graf *star* (S_n), dan graf sikel (C_n), maka dapat diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

a. Teorema: *Rank* minimum dari graf *path* (P_n) pada *field* Z_2 adalah $mr\left(S_{P_n}^{Z_2}\right) = n - 1$ dengan $n \geq 2$ dan $n \in N$.

b. Teorema: *Rank* minimum dari graf komplit (K_n) pada *field* Z_2 adalah $mr\left(S_{K_n}^{Z_2}\right) = 1$ dengan $n \geq 2$ dan $n \in N$.

c. Teorema: *Rank* minimum dari graf *star* (S_n) pada *field* Z_2 adalah $mr\left(S_{S_n}^{Z_2}\right) = 2$ dengan $n \geq 3$ dan $n \in N$.

d. Konjektur: *Rank* minimum dari graf sikel (C_n) pada *field* Z_2 adalah $mr\left(S_{C_n}^{Z_2}\right) = n - 2$ dengan $n \geq 3$, $n \in N$, dan n genap.

4.2 Saran

1. Pada skripsi ini, penulis hanya memfokuskan pada pokok bahasan masalah menentukan *rank* minimum dari graf *path*, graf komplit, graf sikel, dan graf *star* pada *field* Z_2. Oleh karena itu, untuk penelitian selanjutnya, penulis menyarankan kepada pembaca untuk mengkaji masalah *rank* minimum dari

graf lainnya, atau mengkaji masalah *rank* minimum dari suatu graf pada *field* Z_p, $p > 2$ dan p prima.

2. Pada skripsi ini, pokok bahasan mengenai *rank* minimum dari graf sikel pada *field* Z_2 hanya berupa konjektur atau dugaan sementara. Oleh karena itu, untuk penelitian selanjutnya, penulis menyarankan kepada pembaca agar melanjutkan penelitian hingga sampai menghasilkan suatu teorema.

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir, Azizah, Nilna Niswatin, dan Nofandika, Fifi Framelia. 2009. *Teori Graf*. Malang: UIN Malang Press.

Abdussakir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press.

Anton, Howard. 2000. *Dasar-Dasar Aljabar Liniar*. Batam: Interaksara.

Anton, Howard dan Rorres, Chris. 2004. *Aljabar Linear Elementer*. Jakarta: Erlangga.

Chenette, Nathan L dan Droms, Sean V. *Minimum Rank of a Graph over an Arbitrary*. 2006.

Cullen, Charles. 1993. *Aljabar Linear dengan Penerapannya*. Jakarta: Gramedia.

Fallat, Shaun and Hogben, Leslie. 2007. *The Minimum Rank of Symetric Matrices Described by a Graph*. Linier Algebra and Its Aplication 426:558-582.

Ghoffar, M. Abdul. 2007. Tafsir Ibnu Katsir. Jakarta: Pustaka Imam Asy-Syafi'i.

Ghoffar, M. Abdul dan Al-Atsari, Abu Ihsan. 2007. *Tafsir Ibnu Katsir*. Jakarta: Pustaka Imam Asy-Syafi'i.

Junaidi, Agus. 2010. *Qadha, Izin, dan Masyi'ah Allah dalam Perspektif Al-Qur'an*. http://akhirzaman.info. Diakses 03 November 2010.

Raisinghania dan Aggarwal. 1980. *Modern Algebra*. New Delhi: Ram Nagar.

Shihab, M. Quraisy. 2001. *Wawasan Al-Qur'an: Tafsir Maudhu' Atas Pelbagai Persoalan Umat. (Keimanan Qadr)*. Bandung: Mizan.

Shihab, M. Quraisy. 2003. *Tafsir Al-Mishbah*. Jakarta: Lentera Hati.

Supranto, J. 2003. *Pengantar Matrix*. Jakarta: Rineka Cipta.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang (0341) 551343
Fax. (0341) 572533

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Ruchil Islamiyah
NIM : 07610016
Fakultas/ Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul skripsi : Rank Minimum dari Graf G pada Field Z_2
Pembimbing I : Abdussakir, M.Pd
Pembimbing II : Dr. H. Ahmad Barizi, M.A

No	Tanggal	HAL	Tanda Tangan
1	04-11-2010	Konsultasi Masalah	1.
2	03-12-2010	Konsultasi BAB I dan II	2.
3	06-01-2011	Revisi BAB I dan II	3.
4	10-01-2011	ACC BAB I dan II	4.
5	12-01-2011	Konsultasi Kajian Agama	5.
6	14-01-2011	Revisi Kajian Agama	6.
7	14-01-2011	ACC Kajian Agama	7.
8	29-01-2011	Konsultasi BAB III	8.
9	04-02-2011	Revisi BAB III	9.
10	11-02-2011	ACC BAB III	10.
11	22-02-2011	Konsultasi Keseluruhan	11.
12	23-02-2011	ACC Keseluruhan	12.

Malang, 23 Februari 2011

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP.19751006 200312 1 001