

**ESTIMASI PARAMETER DISTRIBUSI HIPERGEOMETRIK
DENGAN METODE *MAXIMUM LIKELIHOOD***

SKRIPSI

oleh :
DEFIT SETIAWAN
NIM. 07610010



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2011**

**ESTIMASI PARAMETER DISTRIBUSI HIPERGEOMETRIK
DENGAN METODE *MAXIMUM LIKELIHOOD***

SKRIPSI

Diajukan kepada:
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

oleh:
DEFIT SETIAWAN
NIM. 07610010

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2011**

**ESTIMASI PARAMETER DISTRIBUSI HIPERGEOMETRIK
DENGAN METODE *MAXIMUM LIKELIHOOD***

SKRIPSI

oleh:
DEFIT SETIAWAN
NIM. 07610010

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji:
Tanggal: 20 Agustus 2011

Pembimbing I,

Pembimbing II,

Fachrur Rozi, M.Si
NIP. 19800527 200801 1 012

Ach. Nashichuddin, M.A
NIP. 19730705 200003 1 002

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

**ESTIMASI PARAMETER DISTRIBUSI HIPERGEOMETRIK
DENGAN METODE *MAXIMUM LIKELIHOOD***

SKRIPSI

oleh:
DEFIT SETIAWAN
NIM. 07610010

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal: 12 September 2011

Penguji Utama : **Drs. H. Turmudi, M.Si**
NIP. 19571005 198203 1 006

Ketua Penguji: **Usman Pagalay, M.Si**
NIP. 19650414 200312 1 001

Sekretaris Penguji: **Fachrur Rozi, M.Si**
NIP. 19800527 200801 1 012

Anggota Penguji: **Ach. Nashichuddin, M.A**
NIP. 19730705 200003 1 002

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Defit Setiawan

NIM : 07610010

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 20 Agustus 2011

Yang membuat pernyataan

Defit Setiawan
NIM. 07610010

MOTTO

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

إِنَّ اللَّهَ لَا يُغَيِّرُ مَا بِقَوْمٍ حَتَّىٰ يُغَيِّرُوا مَا بِأَنْفُسِهِمْ ۗ

SESUNGGUHNYA ALLAH TIDAK MERUBAH KEADAAN
SESUATU KAUM SEHINGGA MEREKA MERUBAH KEADAAN
YANG ADA PADA DIRI MEREKA SENDIRI
(Q.S. AR-RA'D : 11)

PERSEMBAHAN

Karya kecil terbaik ini dipersembahkan kepada

Kedua orang tua yang paling berjasa dalam hidup dan selalu menjadi motivator dan inspirator agar menjadi orang yang bermanfaat bagi orang lain,
Ummi tersayang (Suhartik) dan Abi tersayang (Sunari Edy Mulyono)

Adik-adik tercinta yang telah memberikan makna dalam hidup dan motivasi untuk menjadi teladan yang baik
M. Abdul Ghofur Al-Farizi (Alm), Nur kamelia Firdaus dan M. Naufal Ali Manshur

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Alhamdulillahillobbil'alamiin. Segala puji syukur hanya untuk Allah. Hanya kalimat itulah yang mampu penulis ucapkan karena atas berkat rahmat, hidayah dan segala nikmat-Nya penulis dapat menyelesaikan studi di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang sekaligus penulisan skripsi ini dengan baik.

Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada junjungan kita Nabi Besar Muhammad SAW yang telah membawa kita dari zaman yang gelap gulita menuju zaman yang terang benderang yakni dengan syiar agama Islam

Selanjutnya penulis haturkan ucapan terima kasih seiring do'a dan harapan *jazakumullah ahsanal jaza'* kepada semua pihak yang telah membantu terselesaikannya skripsi ini. Ucapan terima kasih ini penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Drs. Sutiman B. Sumitro, SU., DSc, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Bapak Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Bapak Fachrur Rozi, M.Si dan Bapak Ach. Nashichuddin, M.A selaku dosen pembimbing skripsi, yang telah memberikan banyak pengarahan dan pengalaman yang berharga.

5. Bapak Drs. H. Turmudi, M.Si dan Bapak Usman Pagalay, M.Si sebagai tim penguji skripsi, terima kasih atas masukan-masukan yang sangat berharga untuk penulisan skripsi ini.
6. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, terutama seluruh dosen, terima kasih atas segenap ilmu dan bimbinganya.
7. Abi tercinta Sunari Edy Mulyono, dan Ummi tercinta Suhartik yang senantiasa memberikan do'a dan restunya kepada penulis dalam menuntut ilmu.
8. Adik-adik tercinta (Alm) M. Abdul Ghofur Al-Farizi, Nur Kamelia Firdaus dan M. Naufal Ali Manshur, terima kasih atas do'a dan motivasinya.
9. Sahabat-sahabat senasib dan seperjuangan mahasiswa Matematika 2007, terima kasih atas segala pengalaman berharga dan kenangan terindah saat menuntut ilmu bersama kalian.
10. Semua pihak yang tidak mungkin penulis sebut satu persatu, terima kasih atas keikhlasan bantuan moril dan sprituil yang sudah diberikan pada penulis.

Dengan segala kerendahan hati dan jiwa, penulis menyadari bahwa dalam penyusunan skripsi ini masih terdapat kekurangan, untuk itu kritik dan saran sangat penulis harapkan demi tercapainya suatu titik yang lebih baik.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, Agustus 2011

Penyusun

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PENGAJUAN	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	
MOTTO	
PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR	viii
DAFTAR ISI	x
DAFTAR GAMBAR	xiii
ABSTRAK	xiv
ABSTRACT	xv
BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Tujuan Penelitian	4
1.4 Batasan Masalah	4
1.5 Manfaat Penelitian	4
1.6 Metode Penelitian	5
1.7 Sistematika Penulisan	6

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Peubah Acak dan Distribusi Peluang.....	7
2.1.1 Peubah Acak	7
2.1.2 Distribusi Peluang	7
2.1.2.1 Distribusi Peluang Diskrit.....	7
2.2 Ekspektasi	9
2.3 <i>Mean</i> dan Variansi	10
2.3.1 <i>Mean</i>	10
2.3.2 Variansi	10
2.4 Estimasi Parameter	12
2.4.1 Estimasi Titik (<i>Point Estimation</i>)	14
2.5 Metode <i>Maximum Likelihood</i>	16
2.5.1 Fungsi <i>Likelihood</i>	16
2.5.2 Estimasi <i>Maximum Likelihood</i>	16
2.5.3 Contoh Soal Estimasi Parameter	17
2.6 Distribusi Hipergeometrik	17
2.7 Fungsi Naik dan Fungsi Turun	20
2.8 Estimasi dalam Al-Qur'an	21

BAB III PEMBAHASAN

3.1 Estimasi Parameter Distribusi Hipergeometrik	
dengan metode <i>Maximum Likelihood</i>	25
3.1.1 Estimasi Parameter M	25
3.1.2 Estimasi Parameter k	30

3.1.3 Estimasi Parameter m 36

3.2 Estimasi Parameter dalam Pandangan Islam 41

BAB IV PENUTUP

4.1 Kesimpulan 44

4.2 Saran 44

DAFTAR PUSTAKA



DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Fungsi Naik	20
Gambar 2.2 Fungsi Turun	20
Gambar 2.3 Fungsi $L(x)$ maximum.....	21



ABSTRAK

Setiawan, Defit. 2011. **Estimasi Parameter Distribusi Hipergeometrik dengan Metode Maksimum Likelihood**. Skripsi. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: (I) Fachrur Rozi, M.Si.
(II) Ach. Nashichuddin, M.A.

Estimasi parameter merupakan suatu cara untuk mengetahui sekitar berapa nilai-nilai populasi berdasarkan nilai-nilai sampel. Estimasi tersebut dilakukan karena kita tidak mungkin meneliti satu persatu anggota populasi. Masalah yang diangkat dalam penelitian ini adalah bagaimana estimasi parameter distribusi hipergeometrik dengan menggunakan metode *maximum likelihood* dan bertujuan untuk mengetahui langkah-langkah estimasi distribusi hipergeometrik dengan metode *maximum likelihood*. Penelitian ini dibatasi dengan hanya mencari tahu estimasi parameter distribusi hipergeometrik dengan metode *maximum likelihood*. Adapun metode penelitiannya adalah menentukan fungsi *likelihood*-nya, menentukan rasionya, menentukan dimana fungsi tersebut naik dan turun, kemudian menentukan estimasi parameternya, sehingga didapatkan \hat{M} , \hat{m} , dan \hat{k} .

Berdasarkan hasil pembahasan dapat disimpulkan bahwa langkah-langkah estimasi distribusi hipergeometrik dengan metode *maximum likelihood* adalah: menentukan fungsi *likelihood* masing-masing parameternya, menentukan rasio fungsi *likelihood*-nya, Menentukan dimana ratio fungsi *likelihood* parameternya naik atau turun, Sehingga didapatkan \hat{M} , \hat{m} , dan \hat{k} yang masing-masing bernilai

$$\hat{M}_{MLE} = \left\lfloor \frac{mk}{x} \right\rfloor,$$

$$\hat{k}_{MLE} = \begin{cases} \frac{x(M+1)}{m} - 1 \text{ or } \frac{x(M+1)}{m} \text{ jika } \frac{x(M+1)}{m} \in \mathbb{Z} \\ \left\lfloor \frac{x(M+1)}{m} \right\rfloor, \text{ jika } \frac{x(M+1)}{m} \notin \mathbb{Z} \end{cases}, \text{ dan}$$

$$\hat{m}_{MLE} = \left\lfloor \frac{x(M+1)}{k} \right\rfloor.$$

Kata kunci : Estimasi Parameter, Distribusi Hipergeometrik, *Maximum Likelihood*

ABSTRACT

Setiawan, Defit. 2011. **Parameter Estimation of Hypergeometric Distribution with Maximum Likelihood Method.** Thesis. Mathematics Programme Faculty of Science and Technology The State of Islamic University Maulana Malik Ibrahim Malang.

Advisors: (I) Fachrur Rozi, M.Si.

(II) Ach. Nashichuddin, M.A.

Parameter estimation is a way to find out about how the characteristic of the population based on sample values. Estimation was done because it is impossible to examine one by one members of the population. Issues raised in this study is how the parameters estimation of hypergeometric distribution using maximum likelihood methods and aims to determine the steps hypergeometric distribution estimated by maximum likelihood method. The study was limited to just find out the estimated parameters of hypergeometric distribution with maximum likelihood method. The method of research is to determine its likelihood function, determine the ratio, determines where the function increase and decrease, then determine the estimated parameters, thus obtained \hat{M} , \hat{m} , and \hat{k} .

Based on the results of the discussion can be concluded that the steps hypergeometric distribution estimated by the method of maximum likelihood are: determining the likelihood function of each parameter, determining the ratio likelihood function, Determining where the likelihood ratio function of the parameter increase or decrease, so obtained \hat{M} , \hat{m} , and \hat{k} , and each worth

$$\hat{M}_{MLE} = \left[\frac{mk}{x} \right],$$

$$\hat{k}_{MLE} = \begin{cases} \frac{x(M+1)}{m} - 1 \text{ or } \frac{x(M+1)}{m} \text{ jika } \frac{x(M+1)}{m} \in \mathbb{Z} \\ \left[\frac{x(M+1)}{m} \right], \text{ jika } \frac{x(M+1)}{m} \notin \mathbb{Z} \end{cases}, \text{ and}$$

$$\hat{m}_{MLE} = \left[\frac{x(M+1)}{k} \right].$$

Key words : Parameter Estimation, Hypergeometric Distribution, Maximum Likelihood

BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Al-Qur'an merupakan mukjizat terbesar bagi umat Islam. Al-Qur'an juga merupakan sumber dari segala macam bentuk ilmu pengetahuan. Al-Qur'an tidak hanya membahas tentang ajaran-ajaran atau syariat-syariat tentang Islam tetapi di dalam Al-Qur'an juga terdapat ayat-ayat yang membahas tentang ilmu pengetahuan. Tidak terkecuali tentang ilmu matematika.

Di dalam Al-Qur'an banyak sekali terdapat ayat-ayat yang membahas mengenai matematika. Salah satunya adalah Surat Al-Baqarah ayat 261 yang berbunyi :

مَثَلُ الَّذِينَ يُنْفِقُونَ أَمْوَالَهُمْ فِي سَبِيلِ اللَّهِ كَمَثَلِ حَبَّةٍ أَنْبَتَتْ سَبْعَ سَنَابِلٍ فِي كُلِّ
 سُنْبُلَةٍ مِائَةٌ حَبَّةٌ وَاللَّهُ يُضْعِفُ لِمَنْ يَشَاءُ وَاللَّهُ وَاسِعٌ عَلِيمٌ ﴿٢٦١﴾

“Perumpamaan (nafkah yang dikeluarkan oleh) orang-orang yang menafkahkan hartanya di jalan Allah adalah serupa dengan sebutir benih yang menumbuhkan tujuh bulir, pada tiap-tiap bulir seratus biji. Allah melipat gandakan (ganjaran) bagi siapa yang Dia kehendaki. dan Allah Maha Luas (karunia-Nya) lagi Maha mengetahui.”

Ayat di atas menjelaskan tentang salah satu cabang ilmu matematika yaitu statistika. Dan dalam konteks ayat tersebut, statistik diterapkan dalam bidang pertanian. Diantaranya mengenai jumlah produksi dan membantu peningkatan penelitian untuk menemukan rumusan statistik yang tepat dalam perhitungan hasil pertanian (Rahman. 2000: 103).

Sebagai salah satu cabang ilmu matematika yang sangat penting, statistika dikaitkan dengan penyajian data atau fakta-fakta tentang perekonomian, kependudukan dan politik suatu negara. Bahkan pada saat ini statistik tidak hanya mencakup penyajian data atau fakta, tetapi juga cara pengumpulan, analisis dan interpretasinya. Bahkan atas dasar hasil analisis yang ditetapkan, kita dapat, dalam batas yang dibenarkan, meramalkan kejadian yang akan datang secara ilmiah (Yitnosumarto. 1990: 5).

Untuk menyelidiki ataupun menganalisis kemudian menyimpulkan karakteristik suatu populasi, kita tidak mungkin meneliti satu persatu anggota populasi. Selain karena jumlah individu dalam populasi yang terlalu besar atau banyak, ada juga sifat dari populasi yang memang tidak memungkinkan untuk diteliti secara langsung. Untuk itu kita gunakan estimasi (*estimation*) terhadap karakteristik populasi dengan menggunakan sampel yang ada.

Ada beberapa hal yang berkaitan dengan estimasi (*estimation*). Pertama, ada dua jenis estimasi yaitu estimasi titik (*point estimation*) dan estimasi selang atau interval (*interval estimation*). Kedua, estimasi mempunyai tiga sifat yaitu tak bias, efisiensi, dan konsistensi. Ketiga, ada beberapa macam metode estimasi diantaranya adalah metode *maximum likelihood* dan metode kuadrat terkecil.

Menurut Suntoyo Yitnosumarto (1990: 216), salah satu metode terbaik untuk memperoleh penduga titik adalah melalui metode kemungkinan *maximum* (*maximum likelihood method*). Metode ini pertama kali

dikembangkan oleh R.A. Fisher. Dan dalam beberapa hal, metode ini lebih baik dibandingkan dengan metode yang lain yaitu metode kuadrat terkecil (*least square methods*).

Dalam referensi-referensi statistik, metode-metode tersebut digunakan untuk mengestimasi parameter populasi. Baik populasi yang berdistribusi diskrit maupun yang berdistribusi kontinu. Distribusi binomial, distribusi multinomial, dan distribusi hipergeometrik merupakan contoh dari distribusi peluang diskrit. Adapun distribusi normal, distribusi log-normal, dan distribusi gamma merupakan contoh distribusi peluang kontinu.

Dalam kehidupan sehari-hari khususnya pada bidang pengendalian mutu dan peralatan elektronik, distribusi hipergeometrik sering digunakan. Pada pengujian peralatan elektronik, pengujian yang dilakukan terhadap barang yang diuji menyebabkan barang yang diuji tersebut menjadi rusak, jadi tidak dapat dikembalikan. Konsep ini sesuai dengan konsep distribusi hipergeometrik dimana pada intinya tidak ada pengembalian dalam percobaannya.

Berdasarkan uraian di atas, penulis ingin melakukan penelitian yang diberi judul **“Estimasi Parameter Distribusi Hipergeometrik dengan Metode *Maximum Likelihood*”**.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang di atas, maka rumusan masalah dari penelitian ini adalah :

Bagaimana estimasi parameter distribusi hipergeometrik dengan metode *maximum likelihood*?

1.3 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah:

Untuk mengetahui estimasi parameter distribusi hipergeometrik dengan metode *maximum likelihood*.

1.4 Batasan Masalah

Dalam penelitian ini, penulis membatasi permasalahan sebagai berikut. Distribusi data yang digunakan dalam penelitian ini adalah distribusi hipergeometrik $X \sim H(x|M, m, k)$ dimana estimasi parameter M, m dan k dicari dengan menggunakan metode *maximum likelihood*.

1.5 Manfaat Penelitian

1. Bagi Peneliti

Manfaat bagi peneliti adalah untuk memperdalam pengetahuan peneliti dalam bidang statistik khususnya tentang estimasi parameter dengan menggunakan metode *maximum likelihood*. Selain itu juga untuk menambah wawasan peneliti tentang distribusi hipergeometrik.

2. Bagi Pembaca

Penelitian ini diharapkan dapat menjadi bahan bacaan atau referensi bagi pembaca dan peneliti lainnya untuk memahami langkah-langkah menentukan estimasi parameter dengan menggunakan metode *maximum*

likelihood. Termasuk bentuk dan sifat-sifat estimasi untuk distribusi hipergeometrik.

1.6 Metode Penelitian

Adapun metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah menggunakan studi literatur (*study library*), yaitu penelitian yang dilakukan di perpustakaan dengan cara mengumpulkan data dan informasi dari buku-buku, jurnal, artikel, dan lain-lain.

Adapun langkah-langkah dalam penelitian ini adalah:

1. Menentukan permasalahan dalam penelitian.
2. Mencari dan menggunakan literatur sebagai acuan dalam pembahasan.
3. Mempelajari dan menelaah konsep teori yang ada pada literatur untuk menyelesaikan permasalahan.
4. Menentukan estimasi parameter distribusi hipergeometrik dengan metode *maximum likelihood*. Untuk mempermudah menganalisa, maka diberikan teknik analisa sebagai berikut:
 - a. Menentukan fungsi *likelihood* parameternya.
 - b. Menentukan ratio fungsi *likelihood* parameternya.
 - c. Menentukan kapan ratio fungsi *likelihood* parameternya naik dan turun.
 - d. Menentukan nilai penduga parameternya.
5. Membuat kesimpulan yang merupakan jawaban dari permasalahan di atas.

1.7 Sistematika Penulisan

Adapun sistematika penulisan ini terdiri dari empat bab, pada masing-masing bab terdapat subbab, dengan susunan sebagai berikut:

- BAB I : Pendahuluan, yang meliputi beberapa sub bahasan yaitu latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.
- BAB II : Kajian pustaka, kajian yang berisi tentang teori-teori yang ada kaitannya dengan hal-hal yang akan dibahas oleh penulis diantaranya adalah peubah acak diskrit, distribusi peluang diskrit, ekspektasi, *mean* dan variansi, estimasi parameter, metode *maximum likelihood*, distribusi hipergeometrik, fungsi naik dan turun, dan beberapa definisi serta pengertian penting baik dalam segi matematika maupun dalam segi keagamaan yang diambil dari berbagai literatur (buku, majalah, internet, dan lain-lain) yang berkaitan dengan penelitian.
- BAB III : Pembahasan, pada bab ini berisi tentang uraian estimasi parameter yaitu: menentukan estimasi parameter dari distribusi hipergeometrik dengan metode *maximum likelihood*. Pada bab ini juga membahas tentang kaitan ayat-ayat Al-Qur'an dengan estimasi parameter.
- BAB IV : Penutup, pada bab ini penulis membuat suatu kesimpulan, dan saran-saran yang berkaitan dengan penelitian ini.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Peubah Acak dan Distribusi Peluang

2.1.1 Peubah Acak

Definisi Peubah Acak (Walpole dan Myers. 1995: 51)

Peubah acak ialah suatu fungsi yang mengaitkan suatu bilangan real pada setiap unsur dalam ruang sampel.

Peubah acak akan dinyatakan dengan huruf besar, misalnya X , sedangkan nilainya dinyatakan dengan huruf kecil padanannya, misalnya x .

Peubah acak ada dua macam yaitu peubah acak diskrit dan peubah acak kontinu. Peubah acak diskrit adalah peubah acak yang tidak mengambil seluruh nilai yang ada dalam sebuah interval atau peubah yang hanya memiliki nilai tertentu. Nilainya merupakan bilangan bulat dan asli, tidak berbentuk pecahan. Peubah acak kontinu adalah peubah acak yang mengambil seluruh nilai yang ada dalam sebuah interval atau peubah acak yang dapat memiliki nilai-nilai pada suatu interval tertentu. Nilainya dapat merupakan bilangan bulat maupun pecahan (Hasan. 2002: 42-44).

2.1.2 Distribusi Peluang

2.1.2.1 Distribusi Peluang Diskrit

Distribusi peluang (*probability distribution*) bagi X merupakan suatu daftar yang memuat nilai peluang bagi semua nilai peubah acak X yang

mungkin terjadi. Distribusi peluang bagi peubah acak diskrit dapat disajikan dalam bentuk tabel, grafik atau rumus yang mengaitkan nilai peluang dengan setiap nilai peubah acaknya.

Definisi Distribusi Peluang Diskrit (Harini dan Turmudi. 2008: 176)

Jika peubah X dapat menerima suatu himpunan diskrit dari nilai-nilai X_1, X_2, \dots, X_n dengan peluang masing-masing p_1, p_2, \dots, p_n , dimana $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$, maka dapat kita katakan bahwa nilai tersebut merupakan suatu distribusi peluang diskrit.

Ada beberapa macam distribusi peluang diskrit diantaranya yaitu distribusi bernoulli, distribusi poisson, distribusi binomial, distribusi hipergeometrik, dan lain-lain.

Definisi Fungsi Peluang Diskrit (Walpole dan Myers. 1995: 54)

Pasangan terurut $(x, f(x))$ merupakan suatu fungsi peluang, fungsi massa peluang, atau distribusi peluang peubah acak diskrit X bila, untuk setiap kemungkinan hasil x

1. $f(x) \geq 0$
2. $\sum f(x) = 1$
3. $P(X = x) = f(x)$

2.2 Ekspektasi

Definisi Ekspektasi (Dudewicz dan Mishra. 1995: 246)

Suatu peubah acak X didefinisikan harapannya $E(X)$ sebagai

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \quad [\text{bila } X \text{ kontinu dengan fungsi padat peluang}$$

$f(x)$] atau $E(X) = \sum x \cdot f(x)$ [bila X diskrit dengan fungsi massa peluang $f(x)$].

Kadang-kadang harapan $E(X)$ disebut juga dengan harapan matematik dari X , nilai harapan dari X , atau *mean* dari X . Pada penggunaannya, kita sering menotasikan $E(X)$ dengan μ atau biasa kita tuliskan $\mu = E(X)$ (Hogg dkk. 2005: 54).

Nilai rata-rata populasi akan kita namakan rata-rata peubah acak X atau rata-rata distribusi peluang X dan ditulis sebagai μ . Juga para statistikawan biasa menyebut rata-rata ini harapan matematik atau nilai harapan peubah acak X dan dinyatakan dengan $E(X)$, dibaca ekspektasi X (Walpole dan Myers. 1995: 93)

Menurut Hasan (2002: 50) nilai harapan atau harapan matematika dari distribusi teoretis sebenarnya adalah nilai rata-rata hitung tertimbang jangka panjang dari distribusi teoretis itu, disimbolkan $E(X)$ atau μ . Misalkan X adalah adalah suatu peubah acak dengan distribusi peluang $f(x)$ atau $P(X = x)$ maka nilai harapannya adalah

$$E(X) = \mu = \sum x \cdot f(x) \text{ atau}$$

$$E(X) = \mu = \sum x \cdot P(x)$$

untuk distribusi peluang diskrit, dan

$$E(X) = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$$

untuk distribusi peluang kontinu.

2.3 Mean dan Variansi

2.3.1 Mean

Definisi Mean (Hogg dkk. 2005: 59)

Misal X adalah sebuah peubah acak yang mempunyai nilai harapan. nilai *mean* μ dari X didefinisikan sebagai $\mu = E(X)$.

Secara umum banyak diantara kita yang menggunakan istilah *mean* sebagai rata-rata populasi yang diberi simbol μ . Oleh karena itu pada bahasan berikutnya kita gunakan simbol μ untuk mewakili nilai rata-rata populasi. Sedangkan simbol \bar{x} kita gunakan untuk mewakili nilai rata-rata sampel.

2.3.2 Variansi

Rata-rata suatu peubah acak X mempunyai peran khusus dalam statistika karena merupakan salah satu ukuran pemusatan distribusi peluang. Akan

tetapi rata-rata itu sendiri tidaklah memberikan keterangan cukup mengenai bentuk distribusinya. Keragaman distribusi perlu dicirikan. Karena pentingnya dalam statistika, maka ukuran keragaman diberi nama variansi peubah acak X atau variansi distribusi peluang X dan dinyatakan dengan $Var(X)$ atau lambang σ^2 .

Definisi Variansi (Walpole dan Myers. 1995: 104)

Misalkan X peubah acak dengan distribusi peluang $f(x)$ dan rata-rata μ .

Variansi X adalah

$$\sigma^2 = E[(X - \mu)^2] = \sum_x (X - \mu)^2 f(x)$$

bila X diskrit, dan

$$\sigma^2 = E[(X - \mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (X - \mu)^2 f(x) dx$$

bila X kontinu. Akar positif variansi σ , disebut simpangan baku X .

Teorema Variansi Peubah Acak X (Walpole dan Myers. 1995: 105)

Variansi peubah acak X adalah

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$$

Bukti:

$$\sigma^2 = \sum_x (x - \mu)^2 f(x)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_x (x^2 - 2\mu x + \mu^2) f(x) \\
&= \left(\sum_x x^2 - \sum_x 2\mu x + \sum_x \mu^2 \right) f(x) \\
&= \sum_x x^2 f(x) - 2\mu \sum_x x \cdot f(x) + \mu^2 \sum_x f(x)
\end{aligned}$$

karena

$$\mu = \sum_x x \cdot f(x)$$

dan

$$\sum_x f(x) = 1$$

untuk distribusi peluang diskrit, maka

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= \sum_x x^2 f(x) - 2\mu \sum_x x \cdot f(x) + \mu^2 \sum_x f(x) \\
&= \sum_x x^2 f(x) - 2\mu\mu + \mu^2 \\
&= \sum_x x^2 f(x) - \mu^2 = E(X^2) - \mu^2
\end{aligned}$$

2.4 Estimasi Parameter

Dalam statistika, salah satu konsep paling dasar adalah penarikan sampel (*sampling*). Sampel diambil dari suatu kelompok yang lebih besar yang disebut dengan populasi. Populasi sering dikatakan sebagai himpunan keseluruhan obyek yang diselidiki, sedangkan sampel merupakan himpunan

bagian populasi. Karakteristik atau konstanta dari suatu populasi disebut **parameter**. Sedangkan suatu harga yang dihitung dari sampel dinamakan **statistik** (Harini dan Turmudi. 2008: 14).

Definisi Parameter (Harini dan Turmudi. 2008: 14)

Parameter adalah hasil pengukuran yang menggambarkan karakteristik dari populasi.

Estimasi (*estimation*) adalah proses yang menggunakan sampel statistik untuk menduga atau menaksir hubungan parameter populasi yang tidak diketahui. Estimasi merupakan suatu pernyataan mengenai parameter populasi yang diketahui berdasarkan informasi dari sampel, dalam hal ini sampel acak, yang diambil dari populasi bersangkutan. Jadi dengan estimasi itu, keadaan parameter populasi dapat diketahui (Hasan. 2002: 111).

Penduga (*estimator*) adalah suatu statistik (harga sampel) yang digunakan untuk menduga suatu parameter. Dengan penduga dapat diketahui seberapa jauh suatu parameter populasi yang tidak diketahui berada di sekitar sampel (statistik sampel). Secara umum, parameter diberi lambang θ (baca: *theta*) dan penduga diberi lambang $\hat{\theta}$ (baca: *theta* topi atau *theta* cap). Untuk lebih jelasnya perhatikan tabel berikut ini

Tabel 2.1 Penduga dan Parameternya

Parameter (θ)	Penduga ($\hat{\theta}$)
μ (rata-rata populasi)	\bar{x} atau $\hat{\mu}$
π (proporsi/persentase)	\hat{p} atau $\hat{\pi}$
σ^2 (variansi)	S^2 atau $\hat{\sigma}^2$
σ (simpangan baku)	S atau $\hat{\sigma}$
ρ (koefisien korelasi)	r atau $\hat{\rho}$
β (koefisien regresi)	B atau $\hat{\beta}$

Karena penduga merupakan fungsi dari nilai-nilai sampel, maka penduga termasuk peubah acak dan memiliki distribusi *sampling* (distribusi pemilihan sampel) (Hasan. 2002: 111).

2.4.1 Estimasi Titik (*Point Estimation*)

Suatu estimasi titik (*point estimation*) ialah estimasi yang terdiri dari satu nilai saja. Misalnya, rata-rata konsumsi susu per bulan tiap keluarga sebanyak 35 kaleng ($\bar{x} = 35$ sebagai penduga dari μ). Selain itu ada juga persentase nasabah yang tidak puas sebesar 25 % ($\hat{p} = 0,25$) sebagai penduga p . Simbol \bar{x} dan \hat{p} disebut penduga atau estimator dari μ dan p yang merupakan parameter (Supranto. 1988: 141).

Penduga titik (*point estimator*) merupakan fungsi dari nilai observasi yang berasal dari sampel dengan n elemen. Kalau penduga diberi simbol $\hat{\theta}$ (theta cap atau theta topi) dan X_1, X_2, \dots, X_n merupakan suatu sampel acak, maka $\hat{\theta} = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

Misalnya

$$\begin{aligned}\hat{\theta} = \bar{x} &= \frac{1}{n} \sum X_i \\ &= \frac{1}{n} (X_1 + X_2 + \dots + X_n)\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}\hat{\theta} = S^2 &= \frac{1}{n-1} \sum (X_i - \bar{x})^2 \\ &= \frac{1}{n-1} \{ (X_1 - \bar{x})^2 + (X_2 - \bar{x})^2 + \dots + (X_n - \bar{x})^2\end{aligned}$$

maka nilai $\hat{\theta}$ akan berbeda-beda dari sampel yang satu dengan sampel yang lainnya. Seperti yang kita ketahui, dari suatu populasi dengan N elemen akan diperoleh sebanyak K sampel. θ merupakan variable yang mempunyai distribusi sendiri (Supranto. 1988: 142).

Menurut Boediono dan Koster (2001: 395-396) bila nilai parameter θ dari populasi hanya diduga dengan memakai satu nilai statistik $\hat{\theta}$ dari sampel yang diambil dari sampel tersebut, maka statistik $\hat{\theta}$ disebut estimasi

titik. Semakin dekat nilai $\hat{\theta}$ (penduga) dengan nilai θ (yang diduga), maka penduga $\hat{\theta}$ akan semakin baik.

2.5 Metode *Maximum Likelihood*

2.5.1 Fungsi *Likelihood*

Definisi Fungsi Likelihood (Walpole dan Myers, 1995: 321)

Bila diketahui pengamatan bebas x_1, x_2, \dots, x_n dari fungsi padat peluang (kasus kontinu) atau fungsi massa peluang (kasus diskrit) $f(x, \theta)$, maka penaksir kemungkinan *maximum*, $\hat{\theta}$ ialah yang *memaximumkan* fungsi kemungkinan

$$L(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, \theta) \cdot f(x_2, \theta) \cdot \dots \cdot f(x_n, \theta).$$

2.5.2 Estimasi *Maximum Likelihood*

Definisi Estimasi Maximum Likelihood (Mood, Graybill and Boes, 1986: 279).

Estimasi *maximum likelihood*, misalkan $L(\theta) = L(\theta|x_1, x_2, \dots, x_n)$ merupakan fungsi *likelihood* dari peubah acak X_1, X_2, \dots, X_n . Jika $\hat{\theta}$ [dimana $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$] merupakan fungsi dari pengamatan x_1, x_2, \dots, x_n adalah nilai $\hat{\theta}$ pada θ yang memaximumkan $L(\theta)$, maka $\hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ adalah *maximum likelihood estimator* dari θ untuk sampel x_1, x_2, \dots, x_n .

2.5.3 Contoh Soal Estimasi Parameter

Suatu sampel acak $X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_n$ berasal dari populasi dengan fungsi eksponen:

$$f(x_i) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, & x > 0 \\ 0 & , \text{ untuk } x \text{ lainnya} \end{cases}$$

Dengan menggunakan metode *maximum likelihood*, cari penduga θ !

Pemecahan:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta) = f(x_1)f(x_2), \dots, f(x_n)$$

$$L(\theta) = \left(\frac{1}{\theta}\right)^n e^{-\frac{1}{\theta}(\sum x_i)}$$

$$\ln L(\theta) = \ln \left[\left(\frac{1}{\theta}\right)^n e^{-\frac{1}{\theta}(\sum x_i)} \right]$$

$$= -n \ln \theta - \frac{1}{\theta} \sum X_i$$

$$\frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} \sum X_i = 0$$

$$\sum X_i = n\theta$$

$$\theta = \frac{1}{n} \sum X_i$$

$$= \bar{X}$$

Jadi, penduga untuk θ dengan menggunakan metode *maximum likelihood*

adalah $\hat{\theta} = \bar{X}$ (Supranto. 1988: 147).

2.6 Distribusi Hipergeometrik

Distribusi hipergeometrik sangat erat kaitannya dengan distribusi binomial. Perbedaan antara distribusi hipergeometrik dengan distribusi

binomial adalah bahwa pada distribusi hipergeometrik, percobaan tidak bersifat independen (bebas). Artinya antara percobaan yang satu dengan yang lainnya saling berkait. Selain itu peluang “SUKSES” berubah (tidak sama) dari percobaan yang satu ke percobaan lainnya (Supranto. 2001: 46).

Notasi-notasi yang biasanya digunakan dalam distribusi hipergeometrik adalah sebagai berikut:

- k : menyatakan jumlah unit / elemen dalam populasi berukuran M yang dikategorikan atau diberi label “SUKSES”
- $M - k$: menyatakan jumlah unit / elemen dalam populasi yang diberi label “GAGAL”
- m : ukuran sampel yang diambil dari populasi secara acak tanpa pengembalian (*without replacement*)
- x : jumlah unit / elemen berlabel “SUKSES” diantara m unit elemen.
- $f(x)$ = peluang x sukses (atau jumlah sukses sebanyak x) dalam m percobaan
- M = jumlah elemen dalam populasi

Untuk mencari peluang x sukses dalam ukuran sampel m , kita harus memperoleh x sukses dari k sukses dalam populasi, dan $m - x$ gagal dari $M - k$ gagal. Sehingga fungsi peluang hipergeometrik dapat dituliskan sebagai berikut:

$$f(x|M, m, k) = P(X = x) = \frac{\binom{k}{x} \binom{M-k}{m-x}}{\binom{M}{m}}, 0 \leq x \leq k$$

(Supranto. 2001: 46).

Rata-rata dan variansi dari distribusi hipergeometrik adalah

$$\mu = \frac{mk}{M} \text{ dan } \sigma^2 = \frac{mk(M-k)(M-m)}{M^2(M-1)}$$

(Aziz. 2007: 43-44)

Contoh. Bila 5 kartu diambil secara acak dari seperangkat kartu *bridge*, berapa peluang diperoleh 3 kartu hati?

Jawab. Dari soal tersebut dapat kita ketahui diantaranya adalah $M = 52$ (jumlah kartu *bridge*), $m = 5$ (sampel yang diambil secara acak dari populasi), $k = 13$ (banyaknya kartu hati dalam kartu *bridge*, mulai dari As sampai King), dan $x = 3$ (jumlah unit berlabel "SUKSES" dari m unit elemen). Sehingga peluang memperoleh 3 kartu hati adalah

$$f(3; 52, 5, 13) = \frac{\binom{13}{3} \binom{52-13}{5-3}}{\binom{52}{5}}$$

$$= 0.0815426170468$$

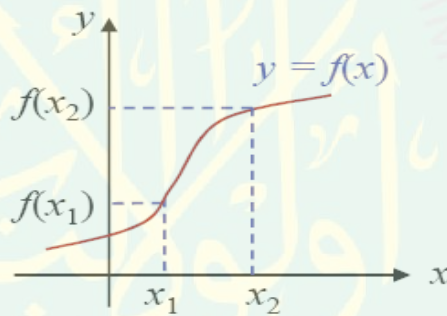
(Walpole. 1982: 165)

2.7 Fungsi Naik dan Fungsi Turun

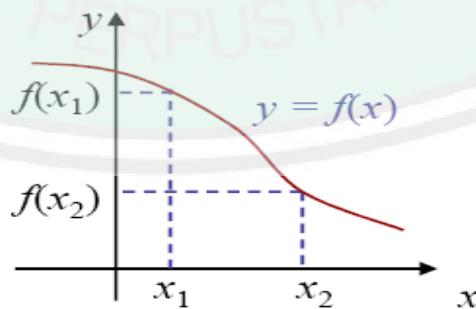
Definisi Fungsi Naik dan Fungsi Turun (Thomas dan Finney, 1986).

Fungsi f disebut naik pada selang I jika $f(x_1) < f(x_2)$ untuk setiap $x_1 < x_2$ di I .

Fungsi f disebut turun pada selang I jika $f(x_1) > f(x_2)$ untuk setiap $x_1 < x_2$ di I .



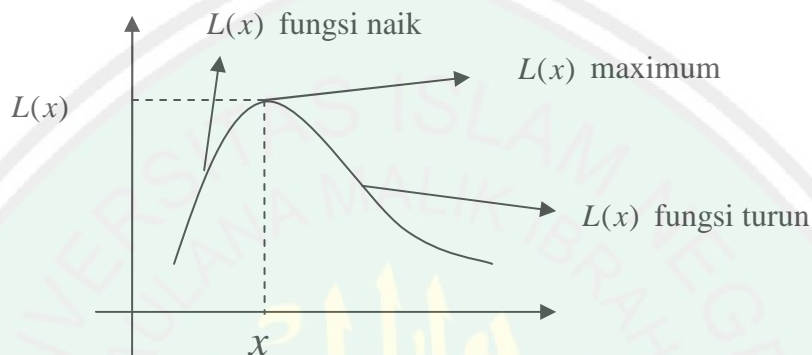
gambar 2.1 fungsi naik



gambar 2.2 fungsi turun

Kaitan fungsi naik dan turun ini dengan metode *maximum likelihood* adalah terletak pada saat kapan suatu fungsi *likelihood* bernilai *maximum*.

Dengan kata lain, suatu titik setelah fungsi *likelihood* tersebut naik dan sebelum fungsi *likelihood* tersebut turun itulah yang disebut dengan fungsi *likelihood* yang bernilai *maximum*.



gambar 2.3 fungsi $L(x)$ maximum

Dari keterangan gambar di atas, fungsi $L(x)$ maximum tersebut yang digunakan untuk mengestimasi parameter yang belum diketahui.

2.8 Estimasi dalam Al-Qur'an

Estimasi (*estimation*) adalah proses yang menggunakan sampel statistik untuk menduga atau menaksir hubungan parameter populasi yang tidak diketahui. Estimasi merupakan suatu pernyataan mengenai parameter populasi yang diketahui berdasarkan informasi dari sampel, dalam hal ini sampel acak, yang diambil dari populasi bersangkutan. Jadi dengan estimasi itu, keadaan parameter populasi dapat diketahui.

Estimasi dalam Al-qur'an disinggung dalam surat Ash-Shaffaat ayat 147, yaitu:

وَأَرْسَلْنَاهُ إِلَىٰ مِائَةِ أَلْفٍ أَوْ يَزِيدُونَ ﴿١٤٧﴾

Artinya: *Dan Kami utus Dia kepada seratus ribu orang atau lebih.*

Al-Mahally dan As-Syuyuthi dalam tafsir Jalalain, (2008: 640), menjelaskan bahwa lafadz "وارسلنه" (*Dan kami utus dia*) sesudah itu, sebagaimana status sebelumnya, kepada kaum Bunainawiy yang tinggal di daerah Mausul "الى مائة الف او" (*kepada seratus ribu orang atau*) bahkan "يزيدون" (*lebih dari itu*) yakni lebih dua puluh atau tiga puluh atau tujuh puluh ribu orang.

Pada Qs. Ash-Shaffaat ayat 147 tersebut dijelaskan bahwa Nabi Yunus diutus kepada umatnya yang jumlahnya 100.000 orang atau lebih. Jika membaca ayat tersebut secara seksama, maka terdapat rasa atau kesan ketidakpastian dalam menentukan jumlah umat Nabi Yunus. Mengapa harus menyatakan 100.000 atau lebih? Mengapa tidak menyatakan dengan jumlah yang sebenarnya? Bukankah Allah SWT mengetahui yang ghaib dan yang nyata? Bukankah Allah SWT Maha Mengetahui Segala Sesuatu, termasuk jumlah umat Nabi Yunus? (Abdussakir. 2007: 153).

Abdussakir (2007: 155-156), juga mengatakan dalam bukunya bahwa estimasi adalah keterampilan untuk menentukan sesuatu tanpa melakukan proses perhitungan secara eksak. Dalam matematika terdapat tiga jenis estimasi yaitu estimasi banyak atau jumlah (*numerositas*), estimasi pengukuran dan estimasi komputasional. Sebagaimana dijelaskan dalam uraian berikut ini:

1. Estimasi banyak atau jumlah

Estimasi banyak adalah menentukan banyaknya objek tanpa menghitung secara eksak. Objek disini maknanya sangat luas. Objek dapat bermakna orang, uang kelereng, titik, dan mobil. Estimasi pada Qs. Ash-Shaffaat ayat 147 adalah estimasi banyak yaitu banyaknya orang.

2. Estimasi pengukuran

Estimasi pengukuran adalah menentukan ukuran sesuatu tanpa menghitung secara eksak. Ukuran disini maknanya sangat luas. Ukuran dapat bermakna ukuran waktu, panjang, luas, usia dan volume. Ketika melihat orang berjalan tanpa menanyakan tanggal lahirnya, pembaca dapat menebak atau menaksir usianya. Atau pembaca menaksir waktu yang diperlukan untuk melakukan perjalanan dari malang ke jakarta menggunakan sepeda motor. Pembaca juga dapat menaksir berat suatu benda hanya melihat suatu bentuknya.

3. Estimasi komputasional

Estimasi komputasional adalah menentukan hasil suatu operasi hitung tanpa menghitungnya secara eksak. Ketika diminta menentukan hasil 97×23 dalam waktu sepuluh detik, seorang mungkin akan melihat puluhannya saja sehingga memperoleh hasil $90 \times 20 = 1800$ inilah estimasi komputasional. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa seseorang mungkin akan menghitung dengan cara membulatkan ke puluhan terdekat. Dari pengertian diatas, maka dapat diketahui kaitan ayat di atas dengan estimasi terletak pada kalimat " مائة ألف أو يزيدون " karena ayat tersebut

dalam menentukan jumlah umat Nabi Yunus tidak dengan perhitungan secara eksak.

Dari kajian diatas Al-Quran sebagai imam dari umat Islam tidak hanya menjelaskan tentang agama saja, tetapi juga menjelaskan tentang matematika dalam hal ini estimasi. Secara garis besar Al-Quran berbicara tentang matematika tidak seperti berbicara tentang agama mana secara gamblang dijelaskan, ketika berbicara tentang matematika kita perlu penafsiran secara mendalam.



BAB III PEMBAHASAN

3.1 Estimasi Parameter Distribusi Hipergeometrik dengan metode *Maximum*

Likelihood.

Sudah kita ketahui bahwa fungsi massa peluang hipergeometrik adalah

$$f(x|M, m, k) = P(X = x) = \frac{\binom{k}{x} \binom{M-k}{m-x}}{\binom{M}{m}}, 0 \leq x \leq k, k \in \mathbb{Z}^+.$$

Karena distribusi hipergeometrik termasuk distribusi peluang diskrit, maka cara mencari estimasinya berbeda dengan distribusi peluang kontinu.

3.1.1 Estimasi Parameter M

Fungsi likelihood dari M adalah

$$L(M) = L(M|x) = \frac{\binom{k}{x} \binom{M-k}{m-x}}{\binom{M}{m}}$$

jika $\max(m - M + k, 0) \leq x \leq \min(k, m)$.

Karena fungsi $L(M)$ tersebut merupakan fungsi diskrit, maka untuk mencari nilai *maximum*nya bukan dengan cara menurunkannya terhadap parameter M tetapi dengan cara menentukan kapan $L(M)$ merupakan fungsi naik atau kapan $L(M)$ merupakan fungsi turun. Untuk mengetahui kapan

$L(M)$ merupakan fungsi naik atau kapan $L(M)$ merupakan fungsi turun, kita cari terlebih dahulu ratio

$$D(M) = \frac{L(M)}{L(M-1)}.$$

Berdasarkan definisi fungsi naik dan turun, jika $D(M) > 1$ atau dengan kata lain $L(M) > L(M-1)$ maka $L(M)$ merupakan fungsi naik, sedangkan jika $D(M) < 1$ atau dengan kata lain $L(M) < L(M-1)$ maka $L(M)$ merupakan fungsi turun. Selanjutnya kita tentukan kapan $D(M) > 1$ atau $D(M) < 1$.

Berdasarkan fungsi likelihood $L(M)$ yaitu

$$L(M) = \frac{\binom{k}{x} \binom{M-k}{m-x}}{\binom{M}{m}},$$

maka

$$L(M-1) = \frac{\binom{k}{x} \binom{M-k-1}{m-x}}{\binom{M-1}{m}},$$

sehingga

$$D(M) = \frac{L(M)}{L(M-1)}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\binom{k}{x} \binom{M-k}{m-x}}{\binom{M}{m}} \\ &= \frac{\binom{k}{x} \binom{M-k-1}{m-x}}{\binom{M-1}{m}} \\ &= \frac{\binom{k}{x} \binom{M-k}{m-x}}{\binom{M}{m}} \cdot \frac{\binom{M-1}{m}}{\binom{k}{x} \binom{M-k-1}{m-x}} \\ &= \frac{\binom{M-k}{m-x}}{\binom{M}{m}} \cdot \frac{\binom{M-1}{m}}{\binom{M-k-1}{m-x}}, \end{aligned}$$

Jika $D(M) > 1$, maka

$$1 < D(M)$$

$$1 < \frac{\binom{M-k}{m-x}}{\binom{M}{m}} \cdot \frac{\binom{M-1}{m}}{\binom{M-k-1}{m-x}}$$

$$1 < \frac{\frac{(M-k)!}{(m-x)!(M-k-m+x)!} \cdot \frac{(M-1)!}{m!(M-m-1)!}}{\frac{M!}{m!(M-m)!} \cdot \frac{(M-k-1)!}{(m-x)!(M-k-m+x-1)!}}$$

$$1 < \frac{(M-k)!}{(m-x)!(M-k-m+x)!} \cdot \frac{(M-1)!}{m!(M-m-1)!} \cdot \frac{m!(M-m)!}{M!} \cdot \frac{(m-x)!(M-k-m+x-1)!}{(M-k-1)!}$$

$$1 < \frac{(M-k)!}{(M-k-m+x)!} \cdot \frac{(M-1)!}{(M-m-1)!} \cdot \frac{(M-m)!}{M!} \cdot \frac{(M-k-m+x-1)!}{(M-k-1)!}$$

$$1 < \frac{(M-k)(M-k-1)!}{(M-k-m+x)(M-k-m+x-1)!} \cdot \frac{(M-1)!}{(M-m-1)!} \cdot \frac{(M-m)(M-m-1)!}{M(M-1)!} \cdot \frac{(M-k-m+x-1)!}{(M-k-1)!}$$

$$1 < \frac{(M-k)}{(M-k-m+x)} \cdot \frac{(M-m)}{M}$$

$$(M-k)(M-m) > (M-k-m+x)M.$$

Dari uraian di atas dapat ditunjukkan bahwa

$$D(M) > 1 \Leftrightarrow (M-k)(M-m) > (M-k-m+x)M$$

Jadi, $D(M) > 1$, ketika

$$(M-k)(M-m) > (M-k-m+x)M$$

$$M^2 - Mm - Mk + mk > M^2 - Mk - Mm + Mx$$

$$M^2 - M^2 - Mm + Mm - Mk + Mk + mk > Mx$$

$$mk > Mx$$

$$M < \frac{mk}{x}$$

dan dengan analogi yang sama, untuk $D(M) < 1$ diperoleh

$$M > \frac{mk}{x}.$$

Karena $M < \frac{mk}{x}$ untuk $D(M) > 1$ dan $M > \frac{mk}{x}$ untuk $D(M) < 1$ dan nilai $\frac{mk}{x}$ bisa berupa bilangan pecahan atau bilangan desimal, maka dapat

kita simpulkan bahwa $\hat{M} = \left[\frac{mk}{x} \right]$, dimana $[\alpha]$ merupakan bilangan bulat terbesar yang kurang dari α . Contoh, jika $\frac{mk}{x} = 6,34$ maka nilai

$\hat{M} = [6,34] = 6$. Sebagai catatan bahwa sifat naik dan turun dari $L(M)$ pasti memiliki dua kandidat untuk menjadi penduga *maximum likelihood* dari M ,

yaitu: $\left[\frac{mk}{x} \right]$ dan $\left[\frac{mk}{x} \right] + 1$.

Untuk membuktikan bahwa penduga *maximum likelihood* dari M adalah benar-benar $\left[\frac{mk}{x} \right]$, kita ingat kembali bahwa $D(M) < 1$ jika $M > \frac{mk}{x}$, maka

$$\left[\frac{mk}{x} \right] + 1 > \frac{mk}{x}. \text{ Jadi, untuk } D\left(\left[\frac{mk}{x} \right] + 1\right) < 1,$$

maka

$$\frac{L\left(\left[\frac{mk}{x} \right] + 1\right)}{L\left(\frac{mk}{x}\right)} < 1.$$

Jadi dapat kita simpulkan bahwa

$$L\left(\left[\frac{mk}{x}\right]+1\right) < L\left(\left[\frac{mk}{x}\right]\right).$$

Dari uraian diatas dapat kita ketahui bahwa $\left[\frac{mk}{x}\right]$ merupakan penduga *maximum likelihood* dari M . Jadi,

$$\hat{M}_{MLE} = \left[\frac{mk}{x}\right].$$

3.1.2 Estimasi Parameter k

Fungsi likelihood dari k adalah

$$L(k) = L(k|x) = \frac{\binom{k}{x} \binom{M-k}{m-x}}{\binom{M}{m}},$$

berdasarkan uraian sebelumnya, kita tentukan kapan $L(k)$ merupakan fungsi naik atau kapan $L(k)$ merupakan fungsi turun. Untuk mengetahui kapan $L(k)$ merupakan fungsi naik atau kapan $L(k)$ merupakan fungsi turun, kita cari terlebih dahulu ratio

$$D(k) = \frac{L(k)}{L(k+1)}.$$

Selanjutnya berdasarkan definisi fungsi naik dan turun, jika $D(k) > 1$ atau dengan kata lain $L(k) > L(k+1)$ maka $L(k)$ merupakan fungsi naik, sedangkan jika $D(k) < 1$ atau dengan kata lain $L(k) < L(k+1)$ maka $L(k)$ merupakan fungsi turun. Selanjutnya kita tentukan kapan $D(k) > 1$ atau $D(k) < 1$.

Berdasarkan fungsi likelihood $L(k)$ yaitu

$$L(k) = \frac{\binom{k}{x} \binom{M-k}{m-x}}{\binom{M}{m}},$$

maka

$$L(k+1) = \frac{\binom{k+1}{x} \binom{M-k-1}{m-x}}{\binom{M}{m}},$$

sehingga

$$D(k) = \frac{L(k)}{L(k+1)}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\binom{k}{x} \binom{M-k}{m-x}}{\binom{M}{m}} \\
&= \frac{\binom{k+1}{x} \binom{M-k-1}{m-x}}{\binom{M}{m}} \\
&= \frac{\binom{k}{x} \binom{M-k}{m-x}}{\binom{M}{m}} \cdot \frac{\binom{M}{m}}{\binom{k+1}{x} \binom{M-k-1}{m-x}} \\
&= \frac{\binom{k}{x} \binom{M-k}{m-x}}{\binom{k+1}{x} \binom{M-k-1}{m-x}},
\end{aligned}$$

Jika $D(k) > 1$, maka

$$1 < D(k)$$

$$1 < \frac{\binom{k}{x} \binom{M-k}{m-x}}{\binom{k+1}{x} \binom{M-k-1}{m-x}}$$

$$1 < \frac{\frac{k!}{x!(k-x)!} \cdot \frac{(M-k)!}{(m-x)!(M-k-m+x)!}}{\frac{(k+1)!}{x!(k-x+1)!} \cdot \frac{(M-k-1)!}{(m-x)!(M-k-m+x-1)!}}$$

$$1 < \frac{k!}{x!(k-x)!} \cdot \frac{(M-k)!}{(m-x)!(M-k-m+x)!} \cdot \frac{x!(k-x+1)!}{(k+1)!} \cdot \frac{(m-x)!(M-k-m+x-1)!}{(M-k-1)!}$$

$$1 < \frac{k!}{(k-x)!} \cdot \frac{(M-k)!}{(M-k-m+x)!} \cdot \frac{(k-x+1)!}{(k+1)!}$$

$$\frac{(M-k-m+x-1)!}{(M-k-1)!}$$

$$1 < \frac{k!}{(k-x)!} \cdot \frac{(M-k)(M-k-1)!}{(M-k-m+x)(M-k-m+x-1)!}$$

$$\frac{(k-x+1)(k-x)!}{(k+1)k!} \cdot \frac{(M-k-m+x-1)!}{(M-k-1)!}$$

$$1 < \frac{(M-k)}{(M-k-m+x)} \cdot \frac{(k-x+1)}{(k+1)}$$

$$(M-k-m+x)(k+1) < (M-k)(k-x+1)$$

$$Mk + M - k^2 - k - mk - m + kx + x < Mk - Mx + M - k^2 + kx - k$$

$$-mk - m + x < -Mx$$

$$mk + m - x > Mx$$

$$m(k+1) > Mx + x$$

$$(k+1) > \frac{x(M+1)}{m}$$

$$k > \frac{x(M+1)}{m} - 1$$

$$k > \frac{x(M+1)}{m} - \frac{m}{m}$$

$$k > \frac{x(M+1) - m}{m}$$

Dari uraian di atas, dapat disimpulkan bahwa

$$D(k) > 1 \Leftrightarrow k > \frac{x(M+1) - m}{m}$$

yang mana $L(k)$ turun untuk bilangan-bilangan bulat yang lebih besar dari

$\frac{x(M+1)-m}{m}$ dan naik untuk bilangan-bilangan bulat yang lebih kecil dari

$\frac{x(M+1)-m}{m}$. Dari sini dapat diketahui bahwa $\hat{k}_{ML} = \frac{x(M+1)-m}{m}$ bernilai

benar jika $\frac{x(M+1)-m}{m}$ merupakan bilangan bulat, dan dalam hal ini

$D(k) = 1$, sehingga

$$D(k) = 1$$

$$\frac{L(k)}{L(k+1)} = 1$$

$$L(k) = L(k+1)$$

$$L\left(\frac{x(M+1)-m}{m}\right) = L\left(\frac{x(M+1)-m}{m} + 1\right)$$

dan penduga *maximum likelihood*-nya adalah salah satu dari

$$\frac{x(M+1)-m}{m} \text{ dan } \frac{x(M+1)-m}{m} + 1.$$

Jika $\frac{x(M+1)-m}{m}$ bukan merupakan bilangan bulat, maka nilai k yang

memaximumkan fungsi $L(k)$ adalah

$$\left[\frac{x(M+1)-m}{m} \right] \text{ atau } \left[\frac{x(M+1)-m}{m} \right] + 1.$$

Berdasarkan argumen sebelumnya yaitu

jika $D(k) < 1$

maka

$$\frac{L(k)}{L(k+1)} < 1$$

$$L(k) < L(k+1)$$

$$L\left(\left[\frac{x(M+1)-m}{m}\right]\right) < L\left(\left[\frac{x(M+1)-m}{m}\right]+1\right).$$

Karena

$$L\left(\left[\frac{x(M+1)-m}{m}\right]\right) < L\left(\left[\frac{x(M+1)-m}{m}\right]+1\right)$$

maka

$$\begin{aligned} \hat{k} &= \left[\frac{x(M+1)-m}{m}\right]+1 \\ &= \left[\frac{x(M+1)-m}{m}+1\right] \\ &= \left[\frac{x(M+1)}{m}-\frac{m}{m}+1\right] \\ &= \left[\frac{x(M+1)}{m}\right]. \end{aligned}$$

Jadi,

$$\hat{k}_{MLE} = \begin{cases} \frac{x(M+1)}{m} - 1 \text{ or } \frac{x(M+1)}{m} & \text{jika } \frac{x(M+1)}{m} \in \mathbb{Z} \\ \left[\frac{x(M+1)}{m}\right], & \text{jika } \frac{x(M+1)}{m} \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

3.1.3 Estimasi Parameter m

Sama halnya dengan estimasi parameter sebelumnya, fungsi likelihood dari m adalah

$$L(m) = L(m|x) = \frac{\binom{k}{x} \binom{M-k}{m-x}}{\binom{M}{m}},$$

kemudian kita tentukan kapan $L(m)$ merupakan fungsi naik atau kapan $L(m)$ merupakan fungsi turun. Untuk mengetahui kapan $L(m)$ merupakan fungsi naik atau kapan $L(m)$ merupakan fungsi turun, kita cari terlebih dahulu ratio

$$D(m) = \frac{L(m)}{L(m-1)}.$$

Berdasarkan definisi fungsi naik dan turun, jika $D(m) > 1$ atau dengan kata lain $L(m) > L(m-1)$ maka $L(m)$ merupakan fungsi naik, sedangkan jika $D(m) < 1$ atau dengan kata lain $L(m) < L(m-1)$ maka $L(m)$ merupakan fungsi turun. Selanjutnya kita tentukan kapan $D(m) > 1$ atau $D(m) < 1$.

Berdasarkan fungsi likelihood $L(m)$ yaitu

$$L(m) = \frac{\binom{k}{x} \binom{M-k}{m-x}}{\binom{M}{m}},$$

maka

$$L(m-1) = \frac{\binom{k}{x} \binom{M-k}{m-x-1}}{\binom{M}{m-1}},$$

sehingga

$$D(m) = \frac{L(m)}{L(m-1)}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\binom{k}{x} \binom{M-k}{m-x}}{\binom{M}{m}} \\ &= \frac{\binom{k}{x} \binom{M-k}{m-x-1}}{\binom{M}{m-1}} \end{aligned}$$

$$= \frac{\binom{k}{x} \binom{M-k}{m-x}}{\binom{M}{m}} \cdot \frac{\binom{M}{m-1}}{\binom{k}{x} \binom{M-k}{m-x-1}}$$

$$= \frac{\binom{M-k}{m-x} \cdot \binom{M}{m-1}}{\binom{M}{m} \cdot \binom{M-k}{m-x-1}},$$

Jika $D(m) > 1$, maka

$$1 < D(m)$$

$$1 < \frac{\binom{M-k}{m-x} \cdot \binom{M}{m-1}}{\binom{M}{m} \cdot \binom{M-k}{m-x-1}}$$

$$1 < \frac{\frac{(M-k)!}{(m-x)!(M-k-m+x)!} \cdot \frac{M!}{(m-1)!(M-m+1)!}}{\frac{M!}{m!(M-m)!} \cdot \frac{(M-k)!}{(m-x-1)!(M-k-m+x+1)!}}$$

$$1 < \frac{(M-k)!}{(m-x)!(M-k-m+x)!} \cdot \frac{M!}{(m-1)!(M-m+1)!} \cdot \frac{m!(M-m)!}{M!} \cdot \frac{(m-x-1)!(M-k-m+x+1)!}{(M-k)!}$$

$$1 < \frac{(M-k)!}{(m-x)!(M-k-m+x)!} \cdot \frac{M!}{(m-1)!(M-m+1)!} \cdot \frac{m!(M-m)!}{m!(M-m)!} \cdot \frac{(m-x-1)!(M-k-m+x+1)!}{(m-x-1)!(M-k-m+x+1)!}$$

$$1 < \frac{m!(M-m)!(m-x-1)!(M-k-m+x+1)!}{(m-x)!(M-k-m+x)!(m-1)!(M-m+1)!}$$

$$1 < \frac{m(m-1)!(M-m)!(m-x-1)!(M-k-m+x+1)(M-k-m+x)!}{(m-x)(m-x-1)!(M-k-m+x)!(m-1)!(M-m+1)(M-m)!}$$

$$1 < \frac{m(M-k-m+x+1)}{(m-x)(M-m+1)}$$

$$(m-x)(M-m+1) < m(M-k-m+x+1)$$

Dari uraian di atas dapat ditunjukkan bahwa

$$D(m) > 1 \Leftrightarrow (m-x)(M-m+1) < m(M-k-m+x+1)$$

Jadi,, $D(m) > 1$, ketika

$$(m-x)(M-m+1) < m(M-k-m+x+1)$$

$$Mm - m^2 + m - Mx + mx - x < Mm - mk - m^2 + mx + m$$

$$-Mx - x < -mk$$

$$Mx + x > mk$$

$$x(M+1) > mk$$

$$\frac{x(M+1)}{k} > m$$

$$m < \frac{x(M+1)}{k}$$

dan dengan analogi yang sama, untuk $D(m) < 1$ diperoleh

$$m > \frac{x(M+1)}{k}$$

Karena $m < \frac{x(M+1)}{k}$ untuk $D(m) > 1$ dan $m > \frac{x(M+1)}{k}$ untuk $D(m) < 1$ dan nilai $\frac{x(M+1)}{k}$ bisa berupa bilangan pecahan atau bilangan desimal, maka dapat kita simpulkan bahwa $\hat{m} = \left[\frac{x(M+1)}{k} \right]$, dimana $[\gamma]$ merupakan bilangan bulat terbesar yang kurang dari γ . Contoh jika $\frac{x(M+1)}{k} = 8,67$, maka nilai $\hat{m} = [8,67] = 8$. Sebagai catatan bahwa sifat naik dan turun dari $L(m)$ pasti memiliki dua kandidat untuk menjadi penduga *maximum likelihood* dari m , yaitu: $\left[\frac{x(M+1)}{k} \right]$ dan $\left[\frac{x(M+1)}{k} \right] + 1$.

Untuk membuktikan bahwa penduga *maximum likelihood* dari m adalah benar-benar $\left[\frac{x(M+1)}{k} \right]$, kita ingat kembali bahwa $D(m) < 1$ jika $m > \frac{x(M+1)}{k}$, maka $\left[\frac{x(M+1)}{k} \right] + 1 > \frac{x(M+1)}{k}$.

Jadi, untuk $D\left(\left[\frac{x(M+1)}{k} \right] + 1\right) < 1$, maka

$$\frac{L\left(\left[\frac{x(M+1)}{k} \right] + 1\right)}{L\left(\left[\frac{x(M+1)}{k} \right]\right)} < 1.$$

Jadi dapat kita simpulkan bahwa

$$L\left(\left[\frac{x(M+1)}{k}\right]+1\right) < L\left(\left[\frac{x(M+1)}{k}\right]\right)$$

Dari uraian diatas dapat kita ketahui bahwa $\left[\frac{x(M+1)}{k}\right]$ merupakan penduga *maximum likelihood* dari m . Jadi,

$$\hat{m}_{MLE} = \left[\frac{x(M+1)}{k}\right].$$

3.2 Estimasi parameter dalam pandangan Islam

Estimasi (*estimation*) adalah proses yang menggunakan sampel statistik untuk menduga atau menaksir hubungan parameter populasi yang tidak diketahui. Estimasi merupakan suatu pernyataan mengenai parameter populasi yang diketahui berdasarkan informasi dari sampel, dalam hal ini sampel acak, yang diambil dari populasi bersangkutan. Jadi dengan estimasi itu, keadaan parameter populasi dapat diketahui.

Inti dari estimasi adalah kita menduga suatu parameter populasi menggunakan nilai-nilai yang diperoleh dari sampel agar diperoleh data-data yang benar-benar mewakili sifat-sifat atau karakteristik dari populasi tersebut.. Allah telah mengajarkan teori ini melalui beberapa ayat Al-Qur'an, salah satunya adalah surat As-Shaffat ayat 147 yang berbunyi:

وَأَرْسَلْنَاهُ إِلَىٰ مِائَةِ أَلْفٍ أَوْ يَزِيدُونَ ﴿١٤٧﴾

Artinya: *Dan Kami utus Dia kepada seratus ribu orang atau lebih.*

Melalui ayat ini, Allah SWT mengajarkan kepada kita tentang salah satu metode dalam statistika untuk mengetahui karakteristik atau sifat-sifat dari suatu populasi. Yaitu metode estimasi.

Dalam pandangan Islam, metode estimasi (pendugaan) diperbolehkan asalkan metode tersebut digunakan dalam hal yang memang benar-benar bermanfaat bagi manusia. Sebagai contoh sederhana, jika kita ditanya berapakah jumlah umat nabi Yunus?, maka berdasarkan surat As-Shaffat ayat 147 di atas kita akan menjawab seratus ribu orang atau lebih. Dari sini dapat kita ambil kesimpulan bahwa kita tidak tahu pasti berapakah jumlah umat Nabi Yunus yang sebenarnya. Dan dalam hal ini para 'ulama berbeda pendapat tentang berapa banyak jumlah umat nabi Yunus.

Al-Mahally dan As-Syuyuthi dalam tafsir Jalalain, (2008: 640), menjelaskan bahwa lafadz "وارسلنه" (*Dan kami utus dia*) sesudah itu, sebagaimana status sebelumnya, kepada kaum Bunainawiy yang tinggal di daerah Mausul "الى مائة الف او" (*kepada seratus ribu orang atau*) bahkan "يزيدون" (*lebih dari itu*) yakni lebih dua puluh atau tiga puluh atau tujuh puluh ribu orang.

Dari keterangan tafsir di atas dapat kita simpulkan bahwa Al-Mahally dan As-Syuyuthi menduga bahwa umat nabi Yunus adalah sekitar seratus ribu, atau seratus dua puluh ribu, atau seratus tiga puluh ribu, atau seratus tujuh puluh ribu orang.

Jika umat Nabi Yunus Alaihissalam dapat dinyatakan dalam peubah acak X , maka nilai X tersebut berada dalam skala interval $100.000 < X < 200.000$, artinya umat Nabi Yunus lebih dari 100.000 dan kurang dari 200.000 orang.

Dari penjelasan di atas dapat disimpulkan bahwa jika kita ingin mengetahui karakteristik dari suatu populasi, maka kita bisa melakukan estimasi atau pendugaan terhadap karakteristik populasi tersebut dengan menggunakan sampel yang diambil dari populasi tersebut. Jika dikaitkan dengan pandangan islam tentang estimasi, Allah telah mengajarkannya kepada manusia melalui salah satu ayatnya yaitu surat As-Shaffat ayat 147. Sehingga jelaslah bahwa Allah telah mengajarkan manusia tentang suatu metode pendugaan melalui Al-Qur'an jauh sebelum adanya ilmu pengetahuan dan teknologi khususnya di bidang statistik yang menjelaskan tentang metode estimasi.

BAB IV PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Estimasi parameter distribusi hipergeometrik $X \sim H(x; M, m, k)$ dengan parameter dari distribusi hipergeometrik tersebut yakni M , m , dan k tidak diketahui, sehingga parameter tersebut diestimasi dengan menggunakan metode *Maximum Likelihood*. Karena distribusi hipergeometrik merupakan distribusi peluang diskrit, maka langkah-langkah estimasinya adalah: menentukan fungsi likelihood masing-masing parameternya, menentukan rasio fungsi likelihoodnya, Menentukan dimana ratio fungsi *likelihood* parameternya naik dan turun, menentukan nilai penduga parameternya. Sehingga didapatkan \hat{M} , \hat{m} , dan \hat{k} yang masing-masing bernilai

$$\hat{M}_{MLE} = \left\lceil \frac{mk}{x} \right\rceil,$$

$$\hat{k}_{MLE} = \begin{cases} \frac{x(M+1)}{m} - 1 \text{ or } \frac{x(M+1)}{m} \text{ jika } \frac{x(M+1)}{m} \in \mathbb{Z} \\ \left\lceil \frac{x(M+1)}{m} \right\rceil, & \text{jika } \frac{x(M+1)}{m} \notin \mathbb{Z} \end{cases} \text{ dan}$$

$$\hat{m}_{MLE} = \left\lceil \frac{x(M+1)}{k} \right\rceil.$$

4.2 Saran

Pada penelitian ini, peneliti menggunakan Metode *Maximum Likelihood* dalam mencari estimasi parameter distribusi hipergeometrik. Bagi pembaca

yang ingin melakukan penelitian serupa, peneliti menyarankan agar pembaca menggunakan metode estimasi yang lain kemudian membandingkannya dengan metode *maximum likelihood*.



DAFTAR PUSTAKA

- Abdussakir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN-Malang PRESS.
- Aziz, Abdul. 2007. *Kumpulan Makalah Diskusi Kelas Statistik Matematika*. Malang.
- Boediono dan Koster, Wayan. 2001. *Teori dan Aplikasi Statistika dan Probabilitas*. Jakarta: PT Remaja Rosdakarya.
- Dudewicz dkk. 1995. *Statistika Matematika Modern*. Bandung: ITB.
- Harini, Sri dan Turmudi. 2008. *Metode Statistika*. Malang: UIN-Malang Press.
- Hasan, M Iqbal. 2002. *Pokok-pokok Materi Statistik 2*. Edisi Kedua. Jakarta: PT Bumi Aksara.
- Hogg, Robert V dkk. 2005. *Introduction to Mathematical Statistics*. Sixth Edition. USA: Pearson Prantice Hall.
- Jalaluddin, Al-Mahalli & As-Suyuti. 2008. *Tafsir Jalalain 2*. Bandung: Sinar baru Algensindo.
- Mood, M Alexander dkk.1986. *Introduction to the Theory of Statistics*. Mcgraw-Hill Book Company.
- Rahman, Afzalur. 2000. *Al-Qur'an Sumber Ilmu Pengetahuan*. Jakarta: Rineka Cipta.
- Supranto, J. 1988. *Statistik*. Edisi Kelima. Jakarta: Erlangga.
- Supranto, J. 2001. *Statistik*. Edisi Keenam. Jakarta: Erlangga.
- Walpole, Ronald E dan Myers, Raymond H. 1995. *Ilmu Peluang dan Statistika untuk Insinyur dan Ilmuwan*. Edisi Keempat. Bandung: ITB.
- Walpole, Ronald E. 1982. *Pengantar Statistika*. Edisi Ketiga. Jakarta: PT Gramedia Pustaka Utama.
- Yitnosumarto, Suntoyo. 1990. *Dasar-dasar Statistika*. Jakarta: CV. Rajawali.