KAJIAN KOMPOSISI DIGRAF FUZZY

SKRIPSI

Oleh:
NOVIA NUR ROHMA
NIM. 07610020

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2011

KAJIAN KOMPOSISI DIGRAF FUZZY

SKRIPSI

Diajukan Kepada :

Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh :
NOVIA NUR ROHMA
NIM. 07610020

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2011

KAJIAN KOMPOSISI DIGRAF FUZZY

SKRIPSI

oleh:
NOVIA NUR ROHMA
NIM. 07610020

Telah diperiksa dan disetujui untuk diuji :

Dosen Pembimbing I,	**Dosen Pembimbing II,**
Evawati Alisah, M.Pd	**Fachrur Rozi, M.Si**
NIP. 19720604 199903 2 001	**NIP. 19800527 200801 1 012**

Tanggal, 16 Juli 2011

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

KAJIAN KOMPOSISI DIGRAF FUZZY

SKRIPSI

oleh:
NOVIA NUR ROHMA
NIM. 07610020

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal, 22 Juli 2011

Susunan Dewan Penguji			Tanda Tangan
1.	Penguji Utama	: Drs. H. Turmudi, M.Si NIP. 19571005 198203 1 006	( )
2.	Ketua	: Abdussakir, M.Pd NIP. 19751006 200312 1 001	( )
3.	Sekretaris	: Evawati Alisah, M.Pd NIP. 19720604 199903 2 001	( )
4.	Anggota	: Fachrur Rozi, M.Si NIP. 19800527 200801 1 012	( )

Mengetahui dan Mengesahkan
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama	:	Novia Nur Rohma
NIM	:	07610020
Jurusan	:	Matematika
Fakultas	:	Sains dan Teknologi
Judul	:	Kajian Komposisi Digraf Fuzzy

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambil alihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri.

Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 16 Juli 2011

Yang membuat pernyataan,

Novia Nur Rohma

NIM. 07610020

MOTTO

"Jangan katakan tidak bisa sebelum mencoba"

Persembahan

Karya sederhana ini
Peneliti persembahkan untuk orang-orang
Yang peneliti cintai

Ayahanda Fatkur Rohman dan Ibunda Rukayati Ningsih tercinta,
Adek Andre Erlangga Tri Rohmansyah dan nenek Mukni

Terima kasih atas kasih sayang, do'a, dan perhatian serta motivasinya. Jasa-jasa beliau yang tidak akan pernah penulis lupakan demi terselesaikannya penulisan skripsi ini.

Guru, Dosen, Ustadz, Ustadzah, Kyai, dan Umi' yang selalu memberikan tambahan ilmu, bimbingan akhlaq kepada penulis.

Semoga Allah Swt membalas semua kebaikan

yang telah diberikan kepada penulis.

KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Syukur alhamdulillah penulis haturkan ke hadirat Allah SWT yang telah melimpahkan Rahmat dan Hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan studi di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang sekaligus menyelesaikan skripsi yang berjudul "Kajian Komposisi dari Fuzzy Digraf" sebagai salah satu syarat dalam menyelesaikan pendidikan S1 dan memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si).

Selanjutnya penulis haturkan ucapan terima kasih seiring do'a dan harapan *jazakumullah ahsanal jaza'* kepada semua pihak yang telah membantu terselesaikannya skripsi ini. Ucapan terima kasih ini penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku Rektor UIN Maulana Malik Ibrahim Malang, yang telah banyak memberikan pengetahuan dan pengalaman yang berharga.
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU., D.Sc selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

4. Evawati Alisah, M.Pd sebagai dosen wali sekaligus dosen pembimbing Matematika yang telah banyak memberikan tuntunan dan arahan sehingga penulisan skripsi ini dapat terselesaikan.
5. Fachrur Rozi, M.Si selaku dosen pembimbing integrasi matematika dan Islam yang telah banyak memberi arahan kepada penulis.
6. Segenap sivitas akademika Jurusan Matematika, terutama seluruh dosen, terima kasih atas segenap ilmu dan bimbingannya.
7. Kedua orang tua penulis Ayahanda Fatkur Rohman dan Ibunda Rukayati Ningsih yang dengan restunya, doanya, harapan-harapan serta pengorbanannya menjadikan penulis untuk tidak menyerah dan selalu semangat dalam keadaan bagaimanapun, termasuk dalam penyelesaian skripsi ini.
8. Adik Andre Erlangga Tri Rohmansyah dan nenek Mukni yang tak pernah berhenti memberi semangat serta berdo'a kepada penulis untuk segera menyelesaikan skripsi ini.
9. Sahabat-sahabat senasib seperjuangan mahasiswa Matematika 2007 terima kasih atas segala pengalaman berharga dan kenangan indah yang telah terukir.
10. Sahabat-sahabat pondok Sabilurrosyad yang selalu memberikan semangat dan membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
11. Semua pihak yang ikut membantu dalam menyelesaikan skripsi ini baik berupa materiil maupun moril.

Penulis menyadari bahwa dalam penyusunan skripsi ini masih terdapat kekurangan dan penulis berharap semoga skripsi ini bisa memberikan manfaat kepada para pembaca khususnya bagi penulis secara pribadi. *Amin Ya Rabbal Alamin.*

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Malang, 30 Juli 2011

Penulis

DAFTAR ISI

BAB III PEMBAHASAN

BAB IV PENUTUP

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Rohma, Novia Nur. 2011. **Kajian Komposisi Digraf Fuzzy.** Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.

Pembimbing : (1) Evawati Alisah, M.Pd
(2) Fachrur Rozi, M.Si

Kata kunci : digraf, fuzzy, digraf fuzzy, komposisi fuzzy, komposisi digraf fuzzy

Himpunan fuzzy (*fuzzy set*) merupakan pengembangan dari himpunan tegas (*crisp set*). Jika pada himpunan tegas keanggotaannya ditentukan secara tegas apakah termasuk anggota dan bukan anggota, namun pada himpunan fuzzy keanggotaannya berderajat secara kontinu, yang nilainya berada dalam selang tertutup [0, 1]. Konsep ini dikembangkan oleh seorang guru besar dari *University of California, Lotfi Asker Zadeh* yang mampu menyelesaikan berbagai masalah dalam kehidupan saat ini. Penelitian selanjutnya menggabungkan antara himpunan fuzzy dengan bidang lain salah satunya graf. Sehingga terdapat materi graf fuzzy dan diperluas pada fuzzy digraf (graf berarah). Dari latar belakang tersebut peneliti ingin membahas lebih dalam lagi tentang komposisi relasi digraf fuzzy.

Dalam kajian ini, penulis mendeskripsikan tentang graf dan digraf, himpunan fuzzy, relasi fuzzy, digraf fuzzy, dan komposisi fuzzy. Setelah itu penulis mendefinisikan komposisi dari digraf fuzzy dengan mendeskripsikan beberapa contoh beserta gambar dan pembuktian dari teorema-teoremanya.

Digraf fuzzy merupakan pengembangan dari teori himpunan fuzzy dengan teori digraf yang didefinisikan sebagai berikut: Misal X merupakan suatu himpunan terbatas, $\tilde{A} = (X, \mu_x)$ adalah himpuan fuzzy di X, dan $\tilde{R} = (X \times X, \mu_{\tilde{R}})$ adalah relasi fuzzy di X, maka pasangan terurut $(\tilde{A}, \tilde{R})$ disebut *digraf fuzzy*. Pada relasi fuzzy terdapat operasi komposisi yang didefinisikan dalam empat tipe komposisi. Begitu juga pada komposisi dari digraf fuzzy. Jika terdapat dua digraf fuzzy lalu di komposisikan, maka terdapat empat tipe komposisi. Kemudian akan ditunjukkan bahwa empat tipe komposisi tersebut bersifat asosiatif dan distributif.
Untuk penelitian selanjutnya penulis menyarankan untuk memperluas bahasan tentang fuzzy dengan mengkaji masalah fuzzy yang diperluas dalam multiobyek yang dihubungkan dengan multidigraf.

ABSTRACT

Rohma, Novia Nur. 2011. **Compositions of Fuzzy Digraphs**. Thesis, Mathematics Department Science and Technology Faculty Islamic State University (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.

Supervisor : (1) Evawati Alisah,M.Pd
(2) Fachrur Rozi,M.Si

Keywords : digraphs, fuzzy, fuzzy digraphs, the compositions of fuzzy relations, the compositions of fuzzy digraphs.

A fuzzy set is a development of the crip set. If the crips set its membership is determined explicitly whether including members and nonmembers, but on a fuzzy set membership degree continuously, whose value is in the closed interval [0,1]. This concept was developed by a professor from the University of California, Lotfi Asker Zadeh to be able to solve varios problems in life today. Further study combining fuzzy sets with other areas, one of them is graph. Thus there is a fuzzy graph and expanded material on fuzzy digraphs (*directed graph*). From that background writer wanted to discuss deeper about the compositions of fuzzy digraphs.

In this study, the writer described about graph and digraphs, fuzzy set, fuzzy relation, fuzzy digraphs and the composition of fuzzy relations. Afterwards the writer defined the compositions of fuzzy digraphs by describing some examples along with pictures and proof theorems.

A fuzzy digraphs is the development of fuzzy set theory with the theory of digraphs defined as follows: Suppose X is a finited set, $\tilde{A} = (X, \mu_x)$ is a fuzzy set in X, and $\tilde{R} = X \times X, \mu_R$ is fuzzy relations on X the ordered pair $(\tilde{A}, \tilde{R})$ is called fuzzy digraphs. In the fuzzy relations there is defined stucture operation in four types of compositions. So is on the compositions of fuzzy digraphs. If there are two fuzzy digraphs composed, then there are four types of compositions. Subsequently, it will be shown that four types of compositions are associative and distributive.

For further study writer suggests to expand the discussion of fuzzy by examining an expanded fuzzy problem in multiobject associated with multidigraphs.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Ilmuan dalam pandangan Islam adalah sosok yang secara bersamaan mengembangkan potensi dzikir dan fikir untuk menghasilkan amal sholeh, yang dalam Al-Qur'an disebut *Ulul Albab.* Potensi dzikir berperan menghadapi objek yang suprarasional, dan mampu mempertajam kemampuan intuitif, emosional, dan spiritual. Potensi fikir berperan menghadapi objek yang rasional. Dzikir mewakili aktifitas pada aspek *ghaibiyah* dan fikir mewakili aktifitas pada aspek *syahadah.* Paradigma *Ulul Albab* ini dapat digunakan dalam belajar matematika (Abdussakir. 2007: 23 - 24).

Al-Qur'an telah memberikan kepada manusia kunci ilmu pengetahuan tentang dunia dan akhirat serta menyediakan peralatan untuk mencari dan meneliti segala sesuatu agar dapat mengungkap dan mengetahui keajaiban dari kedua dunia itu. Tidak diragukan lagi bahwa Al-Qur'an, dengan anjuran memperhatikan dan berfikir yang diulanginya beberapa kali menjadikan aktivitas studi dan penelitian dalam berbagai bidang sebagai sebuah keharusan bagi umat Islam. Karena itu Islam memerintahkan manusia untuk beribadah dan berfikir. Sesungguhnya Allah telah mengajarkan semua yang dibutuhkan oleh manusia yang kesemuanya telah terangkum dalam Al-Qur'an dan As-sunnah. Oleh karenanya Allah selalu memerintahkan kita untuk selalu belajar dari apa-apa yang ada di diri dan sekitar kita, sebagaimana yang diterangkan dalam surat Ar-Ruum ayat 8:

أَوَلَمْ يَتَفَكَّرُوا۟ فِىٓ أَنفُسِهِم ۗ مَّا خَلَقَ ٱللَّهُ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضَ وَمَا بَيْنَهُمَآ إِلَّا بِٱلْحَقِّ
وَأَجَلٍ مُّسَمًّى ۗ وَإِنَّ كَثِيرًا مِّنَ ٱلنَّاسِ بِلِقَآئِ رَبِّهِمْ لَكَٰفِرُونَ ﴿٨﴾

Artinya: "*Dan mengapa mereka tidak memikirkan tentang (kejadian) diri mereka? Allah tidak menjadikan langit dan bumi dan apa yang ada diantara keduanya melainkan dengan (tujuan) yang benar dan waktu yang ditentukan. Dan sesungguhnya kebanyakan diantara manusia benar benar ingkar akan pertemuan dengan Tuhannya*".

Matematika sebagai salah satu cabang keilmuan merupakan alat yang menjadi dasar setiap ilmu pengetahuan dan selalu ada dalam setiap ilmu pengetahuan dan setiap aktivitas manusia sehari-hari. Sebagaimana ada anggapan yang menyatakan bahwa "teknologi merupakan raja perkembangan dan kemodernan dunia, sedangkan ilmu matematika adalah permaisurinya". Misalnya dimulai dari perhitungan-perhitungan yang sangat sederhana seperti uang belanja dapur sampai penggunaan komputer dan perhitungan-perhitungan untuk mencapai ruang angkasa dalam teknologi modern. Jadi tidaklah salah jika dikatakan bahwa matematika adalah dasar dari segala ilmu yang dapat diaplikasikan dimana saja.

Matematika ada dalam kehidupan sehari-hari, misalnya himpunan. Kita mengenal dan mempergunakan konsep himpunan dalam kehidupan sehari-hari, misalnya Himpunan Mahasiswa Jurusan Matematika, Himpunan Wanita Karya, Himpunan Pengusaha Muda Indonesia (HIPMI), Himpunan Kerukunan Tari Indonesia (HKTI), Himpunan Bank Swasta Nasional (Perbanas), dan lain-lain. Konsep himpunan itu tidak hanya dipergunakan secara intuitif dalam kehidupan sehari-hari, tetapi telah pula dikembangkan menjadi konsep formal yang dewasa ini menjadi konsep yang paling mendasar dalam matematika (Susilo. 2006: 36).

Konsep himpunan telah dibahas dalam al-Qur’an, walaupun tidak dijelaskan secara eksplisit. Sebagaimana firman Allah SWT dalam Al-Qur’an surat Al-Faathir ayat 1:

ٱلۡحَمۡدُ لِلَّهِ فَاطِرِ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلۡأَرۡضِ جَاعِلِ ٱلۡمَلَٰٓئِكَةِ رُسُلًا أُوْلِيٓ أَجۡنِحَةٖ مَّثۡنَىٰ
وَثُلَٰثَ وَرُبَٰعَۚ يَزِيدُ فِي ٱلۡخَلۡقِ مَا يَشَآءُۚ إِنَّ ٱللَّهَ عَلَىٰ كُلِّ شَيۡءٖ قَدِيرٞ ١

Artinya: “*Segala puji bagi Allah [pencipta langit dan bumi, yang menjadikan malaikat-malaikat sebagai utusan-utusan (untuk mengurus berbagai macam urusan) yang mempunyai sayap, masing-masing (ada yang) dua, tiga dan empat. Allah menambahkan pada ciptaan-Nya apa yang dikehendaki-Nya. Sesungguhnya Allah Maha Kuasa atas segala sesuatu.” (Q.S. Al-Faathir:1)”.*

Dalam ayat 1 surat Al-Faathir ini dijelaskan sekelompok, segolongan atau sekumpulan makhluk yang disebut malaikat. Dalam kelompok malaikat tersebut terdapat malaikat yang mempunyai dua sayap, tiga sayap, atau empat sayap. Bahkan sangat dimungkinkan terdapat kelompok malaikat yang mempunyai lebih dari empat sayap jika Allah SWT menghendaki. Di dalam ayat tersebut terdapat konsep matematika yang terkandung di dalamnya yaitu kumpulan-objek-objek yang mempunyai ciri-ciri yang sangat jelas. Inilah yang dalam matematika di sebut dengan himpunan (Abdussakir, 2007: 108).

Pada konsep himpunan dikenal himpunan tegas (*crisp*), yaitu himpunan yang terdefinisi secara tegas dalam arti bahwa untuk setiap elemen dalam semestanya selalu dapat ditentukan secara tegas apakah ia merupakan anggota dari himpunan itu atau tidak. Dengan perkataan lain, terdapat batas yang tegas antara unsur-unsur yang merupakan anggota dari suatu himpunan. Tetapi dalam kenyataannya tidak semua himpunan yang kita jumpai dalam kehidupan sehari-hari terdefinisi secara demikian itu, misalnya himpunan orang miskin, himpunan mahasiswa pandai, himpunan orang yang tinggi, dan sebagainya. Pada himpunan orang yang tinggi,misalnya, kita tidak dapat menentukan secara tegas apakah seseorang adalah tinggi atau tidak. Kalau misalnya kita definisikan bahwa "orang tinggi" adalah orang yang tingginya lebih besar atau sama dengan 1.75 meter, maka orang yang tingginya 1.74 meter menurut definisi tersebut termasuk orang yang tidak tinggi. Hal itu menunjukkan bahwa memang batas antara kelompok orang tinggi dan kelompok orang tidak tinggi tidak dapat ditentukan secara tegas (Susilo. 2006: 49 - 50).

Untuk mengatasi permasalahan himpunan dengan batas yang tidak tegas itu, Lofti A. Zadeh, seorang ilmuan Amerika Serikat berkebangsaan Iran dari Universitas California di Barkeley mengaitkan himpunan semacam itu dengan suatu fungsi yang menyatakan derajat kesesuaian unsur-unsur dalam semestanya dengan konsep yang merupakan syarat keanggotaan himpunan tersebut. Fungsi itu disebut *fungsi keanggotaan* dan nilai fungsi itu disebut *derajat keanggotaan* suatu unsur dalam himpunan itu, yang selanjutnya disebut *himpunan fuzzy* (Susilo. 2006: 50).

Dalam kamus Oxford, istilah fuzzy didefinisikan sebagai *blurred* (kabur atau remang-remang), *indistinct* (tidak jelas), *imprecisely defined* (didefinisikan secara tidak presisi), *confused* (membingungkan), *vague* (tidak jelas). Penggunaan istilah "sistem fuzzy" tidak dimaksudkan untuk mengacu pada sebuah sistem yang tidak jelas/kabur/remang-remang definisinya, cara kerjanya, atau deskripsinya. Sebaliknya, yang dimaksud dengan sistem fuzzy adalah sebuah sistem yang di bangun dengan definisi, cara kerjanya, atau deskripsi yang jelas berdasar pada Teori Fuzzy Logic (Naba. 2009: 1).

Maksud dari fuzzy adalah makna dari kata/istilah yang menjadi objek dari teori, sedangkan teorinya sendiri yang dikembangkan untuk memodelkan dan menyelidiki gejala kekaburan itu adalah teori yang tegas dan pasti, sehingga logika fuzzy umumnya diterapkan pada masalah-masalah yang mengandung unsur ketidakpastian (*uncertaintly*).

Pada himpunan fuzzy nilai keanggotaan terletak antara rentang 0 sampai 1. Apabila x memiliki nilai keanggotaan fuzzy $\mu_A[x] = 0$ berarti x tidak menjadi anggota himpunan A, demikian pula apabila x memiliki nilai keanggotaan fuzzy $\mu_A[x] = 1$ berarti x menjadi anggota penuh himpunan [A]. (Kusumadewi dan purnomo. 2004: 6). Seperti halnya pada himpunan tegas, kita dapat mendefinisikan operasi uner, yaitu "komplemen" dan operasi-operasi biner, yaitu "gabungan" dan "irisan" pada himpunan-himpunan kabur (Susilo. 2006:64).

Konsep himpunan fuzzy telah mampu menyelesaikan beberapa masalah yang lebih kompleks saat ini. Akan tetapi masih banyak konsep matematika lainnya yang saat-saat ini juga telah menjadi bahan pembicaraan, salah satunya adalah teori graf karena teori ini mampu menggambarkan model matematika untuk setiap himpunan dari sejumlah obyek diskrit, yaitu dimana beberapa pasangan unsur dari himpunan tersebut terikat menurut suatu aturan tertentu. Obyek diskrit dari himpunan tersebut misalnya dapat berupa orang-orang dengan aturan kenal, atau juga himpunan nama kota dengan aturan jalan yang menghubungkan antara kota satu ke kota yang lain.

Saat ini Teori Graf semakin berkembang dan menarik karena keunikan dan banyak sekali penerapannya. Keunikan Teori Graf adalah kesederhanaan pokok bahasan yang dipelajarinya, karena dapat disajikan sebagai titik (*vertex*) dan sisi (*edge*). Graf merupakan suatu himpunan yang tidak kosong dari elemen-elemen yang disebut titik dengan setiap garis yang menghubungkan dua titik. Banyak sekali struktur yang direpresentasikan dengan graf, dan banyak masalah yang dapat terselesaikan dengan bantuan Teori Graf ini (Purwanto, 1998: 1).

Antara elemen-elemen dalam suatu himpunan bisa terdapat suatu hubungan atau relasi tertentu dengan elemen-elemen dalam himpunan lainnya. Misalnya $X = \{1,2,3\}, Y = \{2,3,4\}$, dan hubungan relasi R adalah relasi "lebih besar atau sama dengan" antara elemen-elemen dalam himpunan X dengan elemen-elemen dalam himpunan Y. Maka relasi tersebut dapat disajikan dalam suatu bentuk *graf berarah*. Karena relasi pada dasarnya adalah himpunan, maka operasi-operasi (komplemen, gabungan, irisan, selisih) dan konsep-konsep lainnya (himpunan bagian, kesamaan, dll) pada himpunan juga dapat diterapkan pada relasi, termasuk komposisi. Seperti halnya pada relasi tegas, relasi fuzzy juga dapat di komposisikan.

Pada penelitian sebelumnya yang dilakukan oleh Rusdiana Autar angkatan 2005 telah dikaji tentang *Fuzzy* digraf. Fuzzy digraf merupakan pengembangan dari teori himpunan fuzzy dengan Teori Digraf. Dari kajian tersebut maka penulis ingin mengkaji lebih dalam lagi tentang Fuzzy digraf, sebagaimana yang digambarkan Al-Qur'an pada wahyu paling pertama yang diturunkan yaitu surat Al-Alaq tentang dorongan untuk menuntut ilmu.

ٱقۡرَأۡ بِٱسۡمِ رَبِّكَ ٱلَّذِي خَلَقَ ۝١

Artinya: *" bacalah dengan (menyebut) nama Tuhanmu yang Menciptakan"*.

Kata "iqro'" tidak semata diartikan sebagai "bacalah", tapi juga bisa diartikan sebagai "telitilah", "dalamilah", serta "ketahuilah". Pada ayat tersebut, tidak disebutkan tentang apa yang harus "dibaca" tetapi memberikan koridor "dengan nama Rabb" yang menunjukkan bahwa aktivitas itu harus bernilai ibadah dan secara umum juga bernilai bagi kehidupan. Untuk itu, maka tinjaulah alam, tinjaulah sejarah, sampai tinjaulah diri sendiri. Alat peninjau itupun sudah dipaparkan secara eksplisit oleh Al-Qur'an. Potensi yang dimiliki manusia untuk memahami pengetahuan adalah pendengaran, penglihatan, akal, dan hati. Dorongan untuk menguasai teknologi menjadi semakin kuat dengan pernyataan dalam Al-Qur'an bahwa alam ditundukkan untuk dikuasai manusia.

Sehingga berdasarkan hal-hal tersebut, maka peneliti ingin mengkaji lebih dalam tentang Fuzzy digraf dengan judul "**Kajian Komposisi Digraf Fuzzy**".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah di atas maka yang menjadi permasalahan adalah bagaimana sifat-sifat dari komposisi digraf fuzzy?

1.3 Tujuan

Dari rumusan masalah di atas, maka tujuannya adalah mengetahui sifat-sifat dari digraf fuzzy.

1.4 Manfaat

a. Penulis

i. Sebagai bentuk partisipasi penulis dalam memberikan kontribusi terhadap pengembangan ilmu, khususnya dalam bidang ilmu matematika.

ii. Tambahan wawasan dan pengalaman tentang penelitian matematika murni.

iii. Sebagai bahan referensi dalam menambah pengetahuan tentang konsep komposisi digraf fuzzy.

b. Pembaca (Mahasiswa dan umum)

Penelitian ini diharapkan mampu menjadi sebuah wahana untuk menambah wawasan dan khasanah keilmuan serta menjadi bahan rujukan untuk melaksanakan penelitian lebih lanjut tentang komposisi digraf fuzzy.

1.5 Metode Penelitian

Penelitian ini merupakan penelitian kepustakaan (*library research*), yaitu dengan melakukan penelitian untuk memperoleh data-data dan informasi dengan menggunakan teknik dokumenter baik yang berupa buku, artikel, jurnal, majalah, maupun karya ilmiah lainnya yang berkaitan dengan topik atau permasalahan yang di teliti.

Adapun langkah-langkah yang diambil untuk menganalisis data dalam penelitian ini adalah

1. Merumuskan Masalah dalam bentuk kalimat pertanyaan.

   Sebelum peneliti melakukan penelitian, terlebih dahulu disusun rencana penelitian bermula dari suatu masalah tentang *komposisi fuzzy* pada *digraf*

2. Mengumpulkan literatur melalui buku-buku antara lain:

   Literatur utama: *Gary Chartrand dan Linda Lesniak (Graphs & Digraphs),* dan *George J.Klir and Bo Yuan (Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications)*

   Literatur pendamping: *Abdussakir (teori graf), Sri Kusuma Dewi* dan *Hari Purnomo (Logika Fuzzy), Frans Susilo (Himpunan dan Logika Kabur),* dan sumber-sumber lain yang relevan.

3. Menganalisis Teorema, meliputi

   Langkah-langkah yang diambil untuk menganalisis data dalam penelitian ini adalah:

   a. Mendefinisikan digraf

   b. Mendefinisikan himpunan fuzzy

c. Mendefinisikan relasi fuzzy

d. Mendefinisikan komposisi fuzzy

e. Mendefinisikan fuzzy digraf

f. Mendefinisikan komposisi fuzzy digraf

g. Memberikan contoh beserta gambar digraf

4. Menyimpulkan

1.6. Sistematika Pembahasan

Agar penulisan skripsi ini lebih terarah, mudah ditelaah dan dipahami, maka digunakan sistematika pembahasan yeng terdiri dari empat bab. Masing-masing bab dibagi ke dalam beberapa sub bab dengan rumusan sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN

Pendahuluan meliputi: latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II KAJIAN PUSTAKA

Bagian ini terdiri atas konsep-konsep (teori-teori) yang mendukung bagian pembahasan. Konsep-konsep tersebut antara lain berisi tentang digraf, himpunan fuzzy dan relasi fuzzy.

BAB III PEMBAHASAN

Pembahasan berisi tentang Komposisi Fuzzy digraf, yaitu definisi, teorema, pembuktian, contoh-contoh dan deskripsinya.

BAB IV PENUTUP

Pada bab ini dibahas tentang kesimpulan dan saran.

BAB II

KAJIAN TEORI

2.1 Digraf

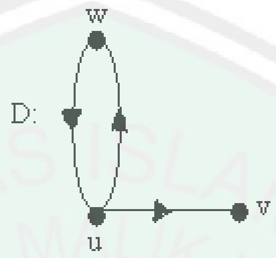
Sebelum membicarakan tentang digraf lebih dahulu akan dibicarakan tentang graf. Graf G adalah pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut sebagai titik dan E adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di V yang disebut sebagai sisi. Himpunan titik di G dinotasikan dengan V (G) dari himpunan sisi dinotasikan dengan E (G). Sedangkan banyaknya unsur di V disebut *order* dari G dan dilambangkan dengan p (G) dan banyaknya unsur di E disebut *size* dari G dan dilambangkan dengan q (G). Jika graf yang dibicarakan hanya graf G, maka order dan size dari G tersebut cukup ditulis dengan G (p, q) (Chartrand dan Lesniak,1986: 4).

Sedangkan graf yang memiliki arah disebut dengan graf berarah atau *digraph* (*directed graph*). Noktah-noktahnya disebut ”titik”, dan “garis-garis berarahnya” atau “panah-panahnya” disebut busur.

Definisi 1.

Directed graf atau *digraf* D adalah himpunan finit tak kosong dari objek-objek di sebut titik (*vertex*), dengan himpunan pasangan terurut dari titik yang berbeda pada D yang disebut sisi berarah (*arc*). Himpunan titik ini disebut himpunan titik D, dinotasikan V(D), dan himpunan sisi berarah D, dinotasikan E(D) (Chartrand dan Lesniak. 1986: 14).

Sebagai contoh, misal $V(D) = \{u, v, w\}$ dan $E(D) = \{(u, w), (w, u), (u, v)\}$, maka D dapat digambarkan sebagai berikut



Gambar 2.1. Digraf

Pada contoh digraf D ini, titik u terhubung langsung ke v. Di lain pihak, titik v tidak tidak terhubung langsung ke u.

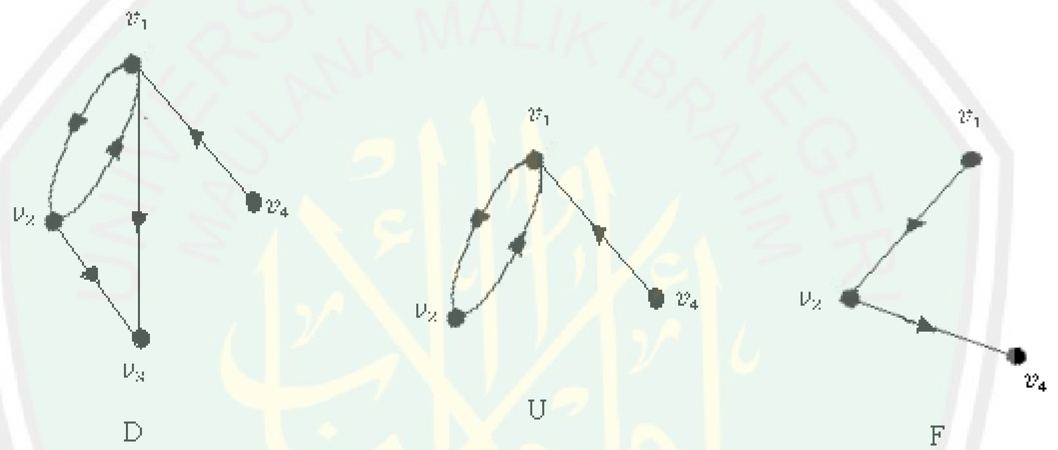
Banyaknya titik yang terhubung langsung ke v disebut derajat masuk (*indegree*) dari v, dan dinotasikan dengan $id(v)$. Banyaknya titik yang terhubung langsung dari v disebut derajat keluar (*outdegree*) dari v, dan dinotasikan dengan $od(v)$. Sedangkan derajat titik v pada digraf D, dinotasikan dengan $deg(v)$, didefinisikan dengan

$$deg\ (v) = od(v) + id(v)$$ (Abdussakir. 2009: 88-89).

Pada gambar 2.1 digraf D memiliki $od(u) = 2$, $id(u) = id(v) = id(w) = od(w) = 1$, dan $od(v) = 0$ sehingga diperoleh $deg(u) = 3$, $deg(v) = 2$, $deg(w) = 1$.

Definisi 2.

Sebuah digraf D_1 adalah subdigraf pada digraf D jika $V(D_1) \subseteq V(D)$ dan $E(D_1) \subseteq E(D)$ (Chartrand dan Lesniak. 1986: 16). Misal $V(D) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $V(U) = \{v_1, v_2, v_3\}$, $V(F) = \{(v_1, v_2), (v_2, v_4)\}$, maka dapat digambarkan sebagai berikut



Gambar 2.2 Subdigraf $U \subseteq D$ dan $F \subseteq D$

2.2 Himpunan Fuzzy

2.2.1 Definisi Himpunan Fuzzy

Secara matematis suatu himpunan fuzzy $\tilde{A}$ dalam semesta wacana X dapat dinyatakan sebagai himpunan pasangan terurut

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) | x \in X\}$$

di mana $\mu_{\tilde{A}}$ adalah fungsi keanggotaan dari himpunan fuzzy $\tilde{A}$ yang merupakan suatu pemetaan dari himpunan semesta X ke selang tertutup [0,1]. Apabila semesta X adalah himpunan yang kontinu, maka himpunan fuzzy $\tilde{A}$ dinyatakan dengan

$$\tilde{A} = \int_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x)/x$$

di mana lambang $\int$ di sini bukan lambang integral seperti yang dikenal dalam kalkulus, tetapi melambangkan keseluruhan unsur-unsur $x \in X$ bersama dengan derajat keanggotaannya dalam himpunan fuzzy $\tilde{A}$. Apabila semesta X adalah himpunan derajat diskrit, maka himpunan fuzzy $\tilde{A}$ dinyatakan dengan

$$\tilde{A} = \sum_{x \in X} \mu_{\tilde{A}}(x)/x$$

di mana lambang $\sum$ di sini bukan melambangkan operasi penjumlahan seperti yang dikenal dalam aritmatika, tetapi melambangkan keseluruhan unsur-unsur $x \in X$ bersama dengan derajat keanggotaannya dalam himpunan fuzzy $\tilde{A}$ (Susilo, 2006: 51- 52).

Pada himpunan fuzzy nilai keanggotaan terletak pada rentang 0 sampai 1. apabila x memiliki nilai keanggotaan fuzzy μ_A (x) = 0 berarti x bukan anggota himpunan A, demikian pula apabila x memiliki nilai keanggotaan fuzzy $\mu A(x) =$ 1 berarti x menjadi anggota penuh pada himpunan A (Kusumadewi dan Purnomo. 2004: 6).

2.2.2 Notasi-notasi Himpunan Fuzzy

Himpunan fuzzy memiliki dua atribut, yaitu:

a. Linguistic, yaitu penamaan suatu grup yang mewakili suatu keadaan atau kondisi tertentu dengan menggunakan bahasa alami, seperti: MUDA, PAROBAYA, TUA, PANAS, DINGIN.

b. Numeris, yaitu suatu nilai (angka) yang menunjukkan ukuran dari suatu variabel seperti: 40, 25, 50, dan sebagainya.

Ada beberapa hal yang perlu diketahui dalam memahami sistem fuzzy, yaitu:

a. Variabel fuzzy, merupakan variabel yang hendak di bahas dalam suatu sistem fuzzy. Contohnya: umur, temperatur, permintaan, dsb.

b. Himpunan fuzzy, merupakan suatu grup yang mewakili suatu kondisi atau keadaan tertentu dalam suatu variabel fuzzy. Contoh: variabel umur, terbagi menjadi 3 himpunan fuzzy, yaitu: MUDA, PAROBAYA, dan TUA.

c. Semesta pembicaraan, adalah keseluruhan nilai yang diperbolehkan untuk dioperasikan dalam suatu variabel fuzzy. Semesta pembicaraan merupakan himpunan bilangan real yang senantiasa naik (bertambah) secara monoton dari kiri ke kanan. Nilai semesta pembicaraan dapat berupa bilangan positif maupun negatif. Adakalanya nilai semesta pembicaraan ini tidak dibatasi batas atasnya.

Contoh 2.1:

1) Semesta pembicaraan untuk variabel umur: [0, ∞ +]

(berada pada range 0 sampai dengan tak terhingga)

2) Semesta pembicaraan untuk variabel temperatur: [0,40]

(berada pada range 0˚C sampai dengan 40˚C)

d. Domain himpunan fuzzy, adalah keseluruhan nilai yang diizinkan dalam semesta pembicaaraan dan boleh dioperasikan dalam suatu himpunan fuzzy. Seperti halnya semesta pembicaraan, domain merupakan himpunan bilangan real yang senantiasa naik (bertambah) secara monoton dari kiri ke kanan. Nilai domain dapat berupa bilangan positif maupun negatif.

Contoh 2.2

1) MUDA = [0, 45]

2) PAROBAYA = [35, 55]

3) TUA = [45, ∞ +] (Kusumadewi dan Purnomo, 2004: 6-8).

2.2.3 Fungsi Keanggotaan (*Membership Function*)

Fungsi keanggotaan yaitu suatu fungsi yang menyatakan derajat kesesuaian unsur-unsur dalam semestanya dengan konsep yang merupakan syarat keanggotaan himpunan tersebut. Nilai dari fungsi tersebut disebut derajat keanggotaan, dan himpunannya disebut dengan himpunan fuzzy.

Secara garis besar ada dua metode untuk mendefinisikan keanggotaan himpunan fuzzy. Pertama secara numerik yang dinyatakan sebagai suatu nilai vektor yang besarnya tergantung dari level diskritnya. Kedua secara fungsional, dalam hal ini tingkat keanggotaan sebuah nilai dalam semesta himpunan fuzzy dinyatakan dalam bentuk fungsi keanggotaan kontinyu (Purnomo. 2002: 117).

Derajat keanggotaan dinyatakan dengan suatu bilangan riil dalam selang tertutup [0,1]. Dengan kata lain, fungsi keanggotaan dari suatu himpunan fuzzy $\tilde{A}$ dalam semesta X adalah pemetaan $\mu_{\tilde{A}}$ dari X dengan selang [0,1].

$$\mu_{\tilde{A}}: x \rightarrow [0,1]$$

nilai fungsi $\mu_{\tilde{A}}(x)$ menyatakan derajat keanggotaan unsur $x \in X$ dalam himpunan fuzzy $\tilde{A}$. Nilai fungsi 1 menyatakan keanggotaan penuh himpunan $\tilde{A}$. Nilai fungsi 0 menyatakan sama sekali bukan anggota himpunan $\tilde{A}$ (Susilo. 2006: 50).

2.2.4 Operator Dasar Zadeh untuk Operasi Himpunan Fuzzy

Pada buku fuzzy karya Kusumadewi dan Purnomo (2004: 25 - 27), disebutkan ada tiga operator dasar yang diciptakan oleh Zadeh, yaitu:

1. Operator AND

Operator ini berhubungan dengan operasi interseksi pada himpunan. $\alpha -$ predikat sebagai hasil operasi dengan operasi AND diperoleh dengan mengambil nilai keanggotaan terkecil antar elemen pada himpunan-himpunan yang bersangkutan.

$$\mu_{A\cap B} = \min(\mu_A[x], \mu_B[y])$$

Contoh 2.3:

Misalkan nilai keanggotaan 27 tahun pada himpunan MUDA adalah 0,6 ($\mu_{MUDA}[27] = 0{,}6$); dan nilai keanggotaan Rp 2.000.000 pada himpunan penghasilan TINGGI adalah 0,8 ($\mu_{GAJITINGGI}\ [2 \times 10^6] = 0{,}8$); maka $\alpha -$ predikat untuk usia MUDA dan berpenghasilan TINGGI adalah

$$\mu_{MUDA\cap GAJITINGGI} = \min(\mu_{MUDA}[27], \mu_{GAJITINGGI}\ [2 \times 10^6])$$

$$= \min(0{,}6; 0{,}8)$$

$$= 0{,}6$$

2. Operator OR

Operator ini berhubungan dengan operasi union pada himpunan. $\alpha -$ predikat sebagai hasil operasi dengan operator OR diperoleh dengan mengambil nilai keanggotaan terbesar antara elemen pada himpunan-himpunan yang bersangkutan.

$$\mu_{A\cup B} = \max(\mu_A[x], \mu_B[y])$$

Contoh 2.4:

Pada contoh 2.3, dapat di hitung nilai $\alpha -$ predikat untuk usia MUDA atau berpenghasilan TINGGI adalah

$$\mu_{MUDA \cup GAJITINGGI} = \max(\mu_{MUDA}[27], \mu_{GAJI\,TINGGI}[2 \times 10^6])$$

$$= \min(0{,}6; 0{,}8)$$

$$= 0{,}8$$

3. Operator NOT

Operator ini berhubungan dengan operasi komplemen pada himpunan. $\alpha -$ predikat sebagai hasil operasi dengan operator NOT diperoleh dengan mengurangkan nilai keanggotaan keanggotaan elemen pada himpunan yang bersangkutan dari 1.

$$\mu_{A'} = 1 - \mu_A[x]$$

Contoh 2.4:

Pada contoh 2.3 dapat dihitung nilai $\alpha -$ predikat untuk usia TIDAK MUDA adalah

$$\mu_{MUDA'}[27] = 1 - \mu_{MUDA}[27]$$

= 1- 0,6

= 0,4

2.3 Relasi Fuzzy

Relasi adalah suatu hubungan tertentu antara elemen-elemen dalam suatu himpunan tertentu dengan elemen-elemen dalam suatu himpunan lainnya. Ada beberapa cara untuk menyatakan relasi, yaitu

1. Dengan menggunakan diagram panah
2. Disajikan dalam bentuk suatu graf berarah (digraf)
3. Dengan menggunakan matriks relasi
4. Dinyatakan sebagai himpunan pasangan terurut

Suatu relasi sebanyak n buah adalah himpunan fuzzy dalam $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ dan fungsi keanggotaannya dinyatakan sebagai berikut:

$$\mu X_1 \ldots X_n = \{((X_1, \ldots, X_n)\mu A_1(X_1, \ldots, X_n))|(X_1, \ldots, X_n) \in X_1 \times \ldots \times X_n\}$$

(Purnomo.2002: 124).

Relasi fuzzy (biner) $\tilde{R}$ antara elemen-elemen dalam himpunan X dalam elemen-elemen himpunan Y didefinisikan sebagai himpunan bagian fuzzy dari perkalian kartesius X × Y, yaitu himpunan fuzzy

$$\tilde{R} = \{((x,y), \mu_{\tilde{R}}(x,y))|(x,y) \epsilon\, X \times Y\}$$

Relasi fuzzy $\tilde{R}$ itu juga disebut relasi fuzzy pada himpunan (semesta) $X \times Y$ jika $X = Y$, maka $\tilde{R}$ disebut relasi fuzzy pada himpunan X

Contoh 2.6:

Misalnya X = {31, 78, 205}, Y = {1, 27, 119}, dan $\widetilde{R}$ adalah relasi fuzzy "jauh lebih besar" antara elemen-elemen dalam X dengan elemen-elemen dalam Y. Maka relasi $\widetilde{R}$ tersebut dapat disajikan sebagai

$\widetilde{R}$ = 0.3/(31,1) + 0.1/(31,27) + 0.5/(78,1) + 0.3/(78,27) + 0.9/(205,1) + 0.7/(205,27) + 0.4/(205,119) (Susilo. 2006: 92).

Misalkan $\tilde{A} = (X, \mu_{\tilde{A}}), \tilde{B} = (X, \mu_{\tilde{B}})$ adalah dua himpunan fuzzy X. maka didefinisikan relasi sebagai berikut:

1) *kesamaaan*, $\tilde{A} = \tilde{B}$ jika dan hanya jika $\mu_{\tilde{A}} = \mu_{\tilde{B}}$, untuk $\forall x \in X$
2) *ketidaksamaan*, $\tilde{A} \leq \tilde{B}$ jika dan hanya jika $\mu_{\tilde{A}} \leq \mu_{\tilde{B}}$, untuk $\forall x \in X$.

   Untuk $\forall a, b \in R$, dimana berlaku $a \vee b = \max\{a, b\}$ dan $a \wedge b = \min\{a, b\}$, maka:
3) *Disjungsi*, $\tilde{D} = \tilde{A} \vee \tilde{B}$ jika dan hanya jika $\mu_{\tilde{D}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) \vee \mu_{\tilde{B}}(x)$, untuk $\forall x \in X$.
4) *Konjungsi*, $\tilde{C} = \tilde{A} \wedge \tilde{B}$ jika dan hanya jika $\mu_{\tilde{C}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(x)$, untuk $\forall x \in X$.
5) *Komplemen*, $\tilde{E} = (\tilde{A})^c$ jika dan hanya jika $\mu_{\tilde{E}}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x)$, untuk $\forall x \in X$.
6) *Product aljabar*, $\tilde{F} = \tilde{A} \cdot \tilde{B}$ jika dan hanya jika $\mu_{\tilde{F}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x)$, untuk $\forall x \in X$.

7) *Jumlah aljabar*, $\tilde{G} = \tilde{A} \oplus \tilde{B}$ jika dan hanya jika $\mu_{\tilde{G}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) - \mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x)$, untuk $\forall x \in X$.

Operasi-operasi pada himpunan fuzzy dengan menggunakan tanda $\vee$, $\wedge$, $\cdot$, $\oplus$, semuanya bersifat asosiatif dan distributif.

Misalkan $\tilde{R}_1$ dan $\tilde{R}_2$ adalah dua relasi fuzzy yang didefinisikan pada $X \times Y$ dan $Y \times Z$, maka komposisi max-min dari $\tilde{R}_1$ dan $\tilde{R}_2$ sebagai suatu himpunan fuzzy adalah:

$$\mu_{\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2}(x,z) = max_y \min\left[\mu_{\tilde{R}_1}(x,y), \mu_{\tilde{R}_2}(x,y)\right]$$
$$= \vee_y \left[\mu_{\tilde{R}_1}(x,y) \wedge \mu_{\tilde{R}_2}(x,y)\right]$$

Contoh 2.7

Relasi fuzzy untuk komposisi max-min dinyatakan dengan notasi max = $\vee \Leftrightarrow$ atau, dan notasi min = $\wedge \Leftrightarrow$ dan.

Sehingga bila ada fungsi sebagai berikut:

$$\mu_{\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2}(x,z) = \max(0.4 \wedge 0.9, 0.2 \wedge 0.2, 0.8 \wedge 0.5, 0.9 \wedge 0.7)$$

= max (0.4, 0.2, 0.5, 0.7)

= 0.7

Jadi, untuk *min* diambil nilai yang terkecil, dan *max* diambi nilai yang terbesar (Purnomo. 2002: 125).

2.4 Digraf Fuzzy

Digraf fuzzy merupakan pengembangan dari teori himpunan fuzzy dengan teori digraf yang didefinisikan sebagai berikut:

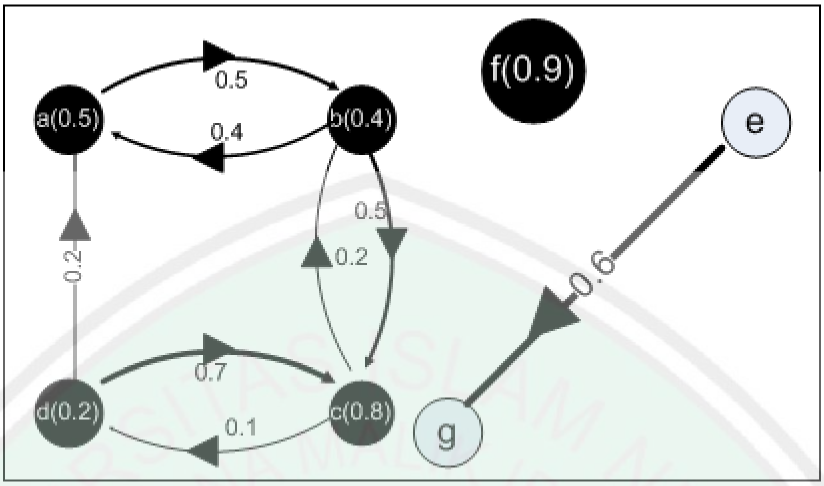
> Misal S merupakan himpunan *finit*, $\tilde{A} = (S, \mu_A)$ adalah himpuan fuzzy di S, dan $\tilde{F} = (S \times S, \mu_{\tilde{F}})$ adalah relasi fuzzy di S, maka pasangan terurut $(\tilde{A}, \tilde{F})$ disebut digraf fuzzy S (Chen, In Chu dan Wu, Sun yen: 446).

Misal $\widetilde{D} = (\tilde{A}, \tilde{F})$ adalah digraf fuzzy di S. jika $\mu_A > 0$, untuk x di S maka x disebut titik di $\widetilde{D}$. Jika $\mu_A = 0$, untuk x di S maka x disebut titik kosong di $\widetilde{D}$. Jika $\mu_{\tilde{F}} > 0$ maka pasangan terurut (x, y) disebut arc di $\widetilde{D}$. Jika $\mu_{\tilde{F}} = 0$ maka pasangan terurut (x, y) disebut arc kosong di $\widetilde{D}$ (Chen, In Chu dan Wu, Sun yen: 446).

Contoh 2.5

Misal $S = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ dan $\widetilde{A} = \{(a, 0.5), (b, 0.4), (c, 0.8), (d, 0.2), (e, 0), (f, 0.9), (g, 0)\}$ adalah himpunan fuzzy di S. Misal $\tilde{F}$ adalah relasi fuzzy yang didefinisikan seperti di bawah ini:

$\big((a, b), 0.5\big), \big((b, a), 0.4\big), \big((d, a), 0.2\big), \big((b, c), 0.2\big), \big((c, b), 0.5\big), \big((c, d), 0.1\big), \big((d, c), 0.7\big), \big((c, g), 0.6\big), \big((x, y), 0\big)$ untuk pasangan (x, y) yang lain. Maka $(\widetilde{A}, \tilde{F})$ adalah digraf fuzzy di S yang di gambarkan sebagai berikut:



Gambar 2.3 Contoh Digraf Fuzzy

2.6 Komposisi Relasi Fuzzy

Misalkan S adalah himpunan dan $\tilde{F}, \tilde{G}$ adalah dua relasi pada S dan μ_F, μ_G adalah fungsi keanggotaan dari $\tilde{F}$ dan $\tilde{G}$ berturut-turut. Kita definisikan empat tipe komposisi $\tilde{F}$ dan $\tilde{G}$ sebagai berikut:

(1) Komposisi tipe I

$$\tilde{F} \circ \tilde{G} = \{((x,z), \mu_{\tilde{F}\circ\tilde{G}}(x,z)) | x, z \in S\},$$

dimana $\mu_{\tilde{F}\circ\tilde{G}}(x,z) = \sup_{y \in S}\{\mu_{\tilde{F}}(x,y) \wedge \mu_{\tilde{G}}(y,z)\}$, untuk semua x, z ∈ S

(2) Komposisi tipe II

$$\tilde{F} \odot \tilde{G} = \left\{\left((x,z), \mu_{\tilde{F}\odot\tilde{G}}(x,z)\right) \middle| x, z \in S\right\}$$

dimana $\mu_{\tilde{F}\odot\tilde{G}}(x,z) = \inf_{y \in S}\{\mu_{\tilde{F}}(x,y) \vee \mu_{\tilde{G}}(y,z)\}$, untuk semua x, z ∈ S

(3) Komposisi tipe III

$$\tilde{F} * \tilde{G} = \{((x,z), \mu_{\tilde{F}*\tilde{G}}(x,z)) | x, z \in S\},$$

dimana $\mu_{\tilde{F}*\tilde{G}}(x,z) = \inf_{y \in S}\{\mu_{\tilde{F}}(x,y) \wedge \mu_{\tilde{G}}(y,z)\}$, untuk semua x, z ∈ S

(4) Komposisi tipe IV

$$\tilde{F} \circledast \tilde{G} = \{((x,z), \mu_{\tilde{F}\circledast\tilde{G}}(x,z)) | x, z \in S\},$$

dimana $\mu_{\tilde{F}\circ\tilde{G}}(x,z) = \sup_{y \in S}\{\mu_{\tilde{F}}(x,y) \vee \mu_{\tilde{G}}(y,z)\}$, untuk semua x, z ∈ S

(Kao, Yah-Ming dan Wu, Sun Yen: 605 - 606).

Untuk memperjelas definisi di atas maka diberikan contoh 2.8, dari contoh tersebut akan dikerjakan dengan menggunakan empat tipe komposisi di atas, sehingga dapat diketahui perbedaan hasil dari masing-masing tipe.

Contoh 2.8

Misalkan $X = \{31, 78, 205\}, Y = \{1, 27, 119\}$ dan $Z = \{10, 225, 94\}$, dan relasi fuzzy $\tilde{R}_1$ adalah relasi "jauh lebih besar" antara elemen-elemen dalam X dengan elemen-elemen dalam Y yang disajikan dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\tilde{R}_1 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.1 & 0 \\ 0.5 & 0.3 & 0 \\ 0.9 & 0.7 & 0.4 \end{bmatrix}$$

Misalkan $\tilde{R}_2$ adalah relasi fuzzy "jauh lebih kecil" antara elemen-elemen dalam Y dengan elemen-elemen dalam Z yang disajikan dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\tilde{R}_2 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.9 & 0.5 \\ 0 & 0.8 & 0.3 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

Jawab:

(1) Dengan menggunakan komposisi tipe I,

$$\mu_{\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2}(31,10) = \sup_{y \in S}\{\mu_{\tilde{R}_1}(x,y) \wedge \mu_{\tilde{R}_2}(y,z)\}$$

$$= \sup_{y \in S} \min\{\mu_{\tilde{R}_1}(31,y), \mu_{\tilde{R}_2}(y,10)\}$$

$$= \max\left\{\begin{matrix} min\{\mu_{\tilde{R}_1}(31,1), \mu_{\tilde{R}_2}(1,10)\}, min\{\mu_{\tilde{R}_1}(31,27), \mu_{\tilde{R}_2}(27,10)\}, \\ min\{\mu_{\tilde{R}_1}(31,119), \mu_{\tilde{R}_2}(119,10)\} \end{matrix}\right\}$$

$$= \max\{min\{0.3,0.1\}, min\{0.1,0\}, min\{0,0\}\}$$

$$= \max\{0.1,0,0\}$$

$$= 0.1$$

$$\mu_{\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2}(31,225) = \sup_{y \in S}\{\mu_{\tilde{R}_1}(x,y) \wedge \mu_{\tilde{R}_2}(y,z)\}$$

$$= \sup_{y \in S} \min\{\mu_{\tilde{R}_1}(31,y), \mu_{\tilde{R}_2}(y,225)\}$$

$$= \max\left\{\begin{matrix} min\{\mu_{\tilde{R}_1}(31,1), \mu_{\tilde{R}_2}(1,225)\}, min\{\mu_{\tilde{R}_1}(31,27), \mu_{\tilde{R}_2}(27,225)\}, \\ min\{\mu_{\tilde{R}_1}(31,119), \mu_{\tilde{R}_2}(119,225)\} \end{matrix}\right\}$$

$$= \max\{min\{0.5,0.9\}, min\{0.3,0.8\}, min\{0,0.5\}\}$$

$$= \max\{0.5,0.3,0\}$$

$$= 0.5$$

$$\mu_{\tilde{R}_1\circ\tilde{R}_2}(31{,}94) = \sup_{y\in S}\{\mu_{\tilde{R}_1}(x,y) \wedge \mu_{\tilde{R}_2}(y,z)\}$$

$$= \sup_{y\in S}\min\{\mu_{\tilde{R}_1}(31,y), \mu_{\tilde{R}_2}(y,94)\}$$

$$= \max\left\{\begin{matrix} min\{\mu_{\tilde{R}_1}(31{,}1), \mu_{\tilde{R}_2}(1{,}94)\}, min\{\mu_{\tilde{R}_1}(31{,}27), \mu_{\tilde{R}_2}(27{,}94)\}, \\ min\{\mu_{\tilde{R}_1}(31{,}119), \mu_{\tilde{R}_2}(119{,}94)\} \end{matrix}\right\}$$

$$= \max\{min\{0.3{,}0.5\}, min\{0.1{,}0.3\}, min\{0{,}0\}\}$$

$$= \max\{0.3{,}0.1{,}0\}$$

$$= 0.3$$

$$\mu_{\tilde{R}_1\circ\tilde{R}_2}(78{,}10) = \sup_{y\in S}\{\mu_{\tilde{R}_1}(x,y) \wedge \mu_{\tilde{R}_2}(y,z)\}$$

$$= \sup_{y\in S}\min\{\mu_{\tilde{R}_1}(78,y), \mu_{\tilde{R}_2}(y,10)\}$$

$$= \max\left\{\begin{matrix} min\{\mu_{\tilde{R}_1}(78{,}1), \mu_{\tilde{R}_2}(1{,}10)\}, min\{\mu_{\tilde{R}_1}(78{,}27), \mu_{\tilde{R}_2}(27{,}10)\}, \\ min\{\mu_{\tilde{R}_1}(78{,}119), \mu_{\tilde{R}_2}(119{,}10)\} \end{matrix}\right\}$$

$$= \max\{min\{0.5{,}0.1\}, min\{0.3{,}0\}, min\{0{,}0\}\}$$

$$= \max\{0.1{,}0{,}0\}$$

$$= 0.1$$

$$\mu_{\tilde{R}_1\circ\tilde{R}_2}(78{,}225) = \sup_{y\in S}\{\mu_{\tilde{R}_1}(x,y) \wedge \mu_{\tilde{R}_2}(y,z)\}$$

$$= \sup_{y\in S}\min\{\mu_{\tilde{R}_1}(78,y), \mu_{\tilde{R}_2}(y,225)\}$$

$$= \max\left\{\begin{matrix} min\{\mu_{\tilde{R}_1}(78{,}1), \mu_{\tilde{R}_2}(1{,}225)\}, min\{\mu_{\tilde{R}_1}(78{,}27), \mu_{\tilde{R}_2}(27{,}225)\}, \\ min\{\mu_{\tilde{R}_1}(78{,}119), \mu_{\tilde{R}_2}(119{,}225)\} \end{matrix}\right\}$$

$$= \max\{min\{0.5,0.9\}, min\{0.3,0.8\}, min\{0,0.5\}\}$$

$$= \max\{0.5,0.3,0\}$$

$$= 0.5$$

$$\mu_{\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2}(78,94) = \sup_{y \in S}\{\mu_{\tilde{R}_1}(x,y) \wedge \mu_{\tilde{R}_2}(y,z)\}$$

$$= \sup_{y \in S} \min\{\mu_{\tilde{R}_1}(78,y), \mu_{\tilde{R}_2}(y,94)\}$$

$$= \max\left\{\begin{matrix} min\{\mu_{\tilde{R}_1}(78,1), \mu_{\tilde{R}_2}(1,94)\}, min\{\mu_{\tilde{R}_1}(78,27), \mu_{\tilde{R}_2}(27,94)\}, \\ min\{\mu_{\tilde{R}_1}(78,119), \mu_{\tilde{R}_2}(119,94)\} \end{matrix}\right\}$$

$$= \max\{min\{0.5,0.5\}, min\{0.3,0.3\}, min\{0,0\}\}$$

$$= \max\{0.5,0.1,0\}$$

$$= 0.5$$

$$\mu_{\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2}(205,10) = \sup_{y \in S}\{\mu_{\tilde{R}_1}(x,y) \wedge \mu_{\tilde{R}_2}(y,z)\}$$

$$= \sup_{y \in S} \min\{\mu_{\tilde{R}_1}(205,y), \mu_{\tilde{R}_2}(y,10)\}$$

$$= \max\left\{\begin{matrix} min\{\mu_{\tilde{R}_1}(205,1), \mu_{\tilde{R}_2}(1,10)\}, min\{\mu_{\tilde{R}_1}(205,27), \mu_{\tilde{R}_2}(27,10)\}, \\ min\{\mu_{\tilde{R}_1}(205,119), \mu_{\tilde{R}_2}(119,10)\} \end{matrix}\right\}$$

$$= \max\{min\{0.5,0.1\}, min\{0.7,0\}, min\{0.4,0\}\}$$

$$= \max\{0.1,0,0\}$$

$$= 0.1$$

$$\mu_{\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2}(205,225) = \sup_{y \in S}\{\mu_{\tilde{R}_1}(x,y) \wedge \mu_{\tilde{R}_2}(y,z)\}$$

$$= \sup_{y \in S}\min\{\mu_{\tilde{R}_1}(205,y), \mu_{\tilde{R}_2}(y,225)\}$$

$$= \max\begin{Bmatrix} min\{\mu_{\tilde{R}_1}(205,1), \mu_{\tilde{R}_2}(1,225)\}, min\{\mu_{\tilde{R}_1}(205,27), \mu_{\tilde{R}_2}(27,225)\}, \\ min\{\mu_{\tilde{R}_1}(205,119), \mu_{\tilde{R}_2}(119,225)\} \end{Bmatrix}$$

$$= \max\{min\{0.9,0.9\}, min\{0.7,0.8\}, min\{0.4,0.5\}\}$$

$$= \max\{0.9,0.7,0.4\}$$

$$= 0.9$$

$$\mu_{\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2}(205,94) = \sup_{y \in S}\{\mu_{\tilde{R}_1}(x,y) \wedge \mu_{\tilde{R}_2}(y,z)\}$$

$$= \sup_{y \in S}\min\{\mu_{\tilde{R}_1}(205,y), \mu_{\tilde{R}_2}(y,94)\}$$

$$= \max\begin{Bmatrix} min\{\mu_{\tilde{R}_1}(205,1), \mu_{\tilde{R}_2}(1,94)\}, min\{\mu_{\tilde{R}_1}(205,27), \mu_{\tilde{R}_2}(27,94)\}, \\ min\{\mu_{\tilde{R}_1}(205,119), \mu_{\tilde{R}_2}(119,94)\} \end{Bmatrix}$$

$$= \max\{min\{0.9,0.5\}, min\{0.7,0.3\}, min\{0.4,0\}\}$$

$$= \max\{0.5,0.3,0\}$$

$$= 0.5$$

Dengan memperhatikan komputasi tersebut di atas, relasi fuzzy komposit $\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2$ dengan komposisi sup-min secara lengkap dapat disajikan dengan matriks berikut:

$$\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.1 & 0 \\ 0.5 & 0.3 & 0 \\ 0.9 & 0.7 & 0.4 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0.1 & 0.9 & 0.5 \\ 0 & 0.8 & 0.3 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.3 \\ 0.1 & 0.5 & 0.5 \\ 0.1 & 0.9 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Perhatikan bahwa komputasi relasi $\tilde{R}_1 \circ \tilde{R}_2$ dengan komposisi sup-min tersebut dikerjakan seperti komputasi perkalian matriks, dimana operasi perkalian matriks, dimana operasi perkalian diganti operasi "min" dan operasi penjumlahan diganti operasi "max" (Susilo. 2006: 97).

(2) Dengan menggunakan komposisi tipe II

$$\mu_{\tilde{R}_1 \odot \tilde{R}_2}(31,10) = \underset{y \in S}{inf} \{\mu_{\tilde{F}}(x,y) \vee \mu_{\tilde{G}}(y,z)\}$$

$$= \underset{y \in S}{inf} \max\{\mu_{\tilde{R}_1}(31,y), \mu_{\tilde{R}_2}(y,10)\}$$

$$= \min \left\{ \begin{matrix} \max\{\mu_{\tilde{R}_1}(31,1), \mu_{\tilde{R}_2}(1,10)\}, \max\{\mu_{\tilde{R}_1}(31,27), \mu_{\tilde{R}_2}(27,10)\}, \\ \max\{\mu_{\tilde{R}_1}(31,119), \mu_{\tilde{R}_2}(119,10)\} \end{matrix} \right\}$$

$$= \min\{\max\{0.3,0.1\}, \max\{0.1,0\}, \max\{0,0\}\}$$

$$= \min\{0.3,0.1,0\}$$

$$= 0$$

Perhitungan selanjutnya menggunakan operasi perkalian dan penjumlahan matriks. Dalam kasus ini perkalian matriks diganti operasi "max" dan operasi penjumlahan diganti operasi "min".

$$\tilde{R}_1 \odot \tilde{R}_2 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.1 & 0 \\ 0.5 & 0.3 & 0 \\ 0.9 & 0.7 & 0.4 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0.1 & 0.9 & 0.5 \\ 0 & 0.8 & 0.3 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mu_{\tilde{R}_1 \odot \tilde{R}_2}(31,225) = \min\{\max\{(0.3, 0.9), (0.1, 0.8), (0, 0.5)\}\}$$

$$= \min\{0.9, 0.8, 0.5\} = 0.5$$

$\mu_{\tilde{R}_1 \odot \tilde{R}_2}(31,94) = \min\{\max\{(0.3, 0.5), (0.1, 0.3), (0, 0)\}\} = \min\{0.5, 0.3, 0\} = 0$

$\mu_{\tilde{R}_1 \odot \tilde{R}_2}(78, 10) = \min\{\max\{(0.5, 0.1), (0.3, 0), (0, 0)\}\} = \min\{0.5, 0.3, 0\} \ = 0$

$\mu_{\tilde{R}_1 \odot \tilde{R}_2}(78, 225) = \min\big\{\max\{(0.5, 0.9), (0.3, 0.8), (0, 0.5)\}\big\}$

$= \min\{0.9, 0.8, 0.5\} = 0.5$

$\mu_{\tilde{R}_1 \odot \tilde{R}_2}(78, 94) = \min\{\max\{(0.5, 0.5), (0.3, 0.3), (0, 0)\}\} = \min\{0.5, 0.3, 0\} = 0$

$\mu_{\tilde{R}_1 \odot \tilde{R}_2}(205, 10) = \min\big\{\max\{(0.9, 0.1), (0.7, 0), (0.4, 0)\}\big\}$

$= \min\{0.9, 0.7, 0.4\} = 0.4$

$\mu_{\tilde{R}_1 \odot \tilde{R}_2}(205, 225) = \min\{\max\{(0.9, 0.9), (0.7, 0.8), (0.4, 0.5)\}\}$

$= \min\{0.9, 0.8, 0.5\} = 0.5$

$\mu_{\tilde{R}_1 \odot \tilde{R}_2}(205, 94) = \min\big\{\max\{(0.9, 0.5), (0.7, 0.3), (0.4, 0)\}\big\}$

$= \min\{0.9, 0.7, 0.4\} = 0.4$

maka matriks secara lengkapnya sebagai berikut:

$$\tilde{R}_1 \odot \tilde{R}_2 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.1 & 0 \\ 0.5 & 0.3 & 0 \\ 0.9 & 0.7 & 0.4 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0.1 & 0.9 & 0.5 \\ 0 & 0.8 & 0.3 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0.4 & 0.5 & 0.4 \end{bmatrix}$$

(3) Dengan menggunakan komposisi tipe III

Dalam kasus ini perkalian matriks diganti operasi “min” dan operasi penjumlahan diganti operasi “min”.

$\mu_{\tilde{R}_1 * \tilde{R}_2}(31,10) \ = \min\big\{\min\{(0.3,0.1), (0.1, 0), (0, 0)\}\big\} = \min\{0.1, 0, 0\} = 0$

$\mu_{\tilde{R}_1 * \tilde{R}_2}(31,225) = \min\{\min\{(0.3, 0.9), (0.1, 0.8), (0, 0.5)\}\}$

$= \min\{0.3, 0.1, 0\} = 0$

$\mu_{\tilde{R}_1 * \tilde{R}_2}(31,94) = \min\{\min\{(0.3, 0.5), (0.1, 0.3), (0, 0)\}\} = \min\{0.3, 0.1, 0\} = 0$

$\mu_{\tilde{R}_1 * \tilde{R}_2}(78, 10) = \min\{\min\{(0.5, 0.1), (0.3, 0), (0, 0)\}\} = \min\{0.1, 0, 0\} = 0$

$\mu_{\tilde{R}_1 * \tilde{R}_2}(78, 225) = \min\{\min\{(0.5, 0.9), (0.3, 0.8), (0, 0.5)\}\}$

$= \min\{0.5, 0.3, 0\} = 0$

$\mu_{\tilde{R}_1 * \tilde{R}_2}(78, 94) = \min\{\min\{(0.5, 0.5), (0.3, 0.3), (0, 0)\}\} = \min\{0.5, 0.3, 0\} = 0$

$\mu_{\tilde{R}_1 * \tilde{R}_2}(205, 10) = \min\{\min\{(0.9, 0.1), (0.7, 0), (0.4, 0)\}\} = \min\{0.1, 0, 0\} = 0$

$\mu_{\tilde{R}_1 * \tilde{R}_2}(205, 225) = \min\{\min\{(0.9, 0.9), (0.7, 0.8), (0.4, 0.5)\}\}$

$= \min\{0.9, 0.7, 0.4\} = 0.4$

$\mu_{\tilde{R}_1 * \tilde{R}_2}(205, 94) = \min\{\min\{(0.9, 0.5), (0.7, 0.3), (0.4, 0)\}\}$

$= \min\{0.5, 0.3, 0\} = 0$

maka matriks secara lengkapnya sebagai berikut:

$$\tilde{R}_1 * \tilde{R}_2 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.1 & 0 \\ 0.5 & 0.3 & 0 \\ 0.9 & 0.7 & 0.4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0.1 & 0.9 & 0.5 \\ 0 & 0.8 & 0.3 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 \end{bmatrix}$$

(4) Dengan menggunakan komposisi tipe IV

Dalam kasus ini perkalian matriks diganti operasi “max” dan operasi penjumlahan diganti operasi “max”.

$\mu_{\tilde{R}_1 \circledast \tilde{R}_2}(31,10) = \max\{\max\{(0.3,0.1),(0.1,0),(0,0)\}\} = \max\{0.3,0.1,0\} = 0.3$

$\mu_{\tilde{R}_1 \circledast \tilde{R}_2}(31,225) = \max\{\max\{(0.3,0.9),(0.1,0.8),(0,0.5)\}\}$

$= \max\{0.9,0.8,0.5\} = 0.9$

$\mu_{\tilde{R}_1 \circledast \tilde{R}_2}(31,94) = \max\{\max\{(0.3,0.5),(0.1,0.3),(0,0)\}\}$

$= \max\{0.5,0.3,0\} = 0.5$

$\mu_{\tilde{R}_1 \circledast \tilde{R}_2}(78,10) = \max\{\max\{(0.5,0.1),(0.3,0),(0,0)\}\}$

$= \max\{0.5,0.3,0\} = 0.5$

$\mu_{\tilde{R}_1 \circledast \tilde{R}_2}(78,225) = \max\{\max\{(0.5,0.9),(0.3,0.8),(0,0.5)\}\}$

$= \max\{0.9,0.8,0.5\} = 0.9$

$\mu_{\tilde{R}_1 \circledast \tilde{R}_2}(78,94) = \max\{\max\{(0.5,0.5),(0.3,0.3),(0,0)\}\}$

$= \max\{0.5,0.3,0\} = 0.5$

$\mu_{\tilde{R}_1 \circledast \tilde{R}_2}(205,10) = \max\{\max\{(0.9,0.1),(0.7,0),(0.4,0)\}\}$

$= \max\{0.9,0.7,0.4\} = 0.9$

$\mu_{\tilde{R}_1 \circledast \tilde{R}_2}(205,225) = \max\{\max\{(0.9,0.9),(0.7,0.8),(0.4,0.5)\}\}$

$= \max\{0.9,0.8,0.5\} = 0.9$

$\mu_{\tilde{R}_1 \circledast \tilde{R}_2}(205,94) = \max\{\max\{(0.9,0.5),(0.7,0.3),(0.4,0)\}\}$

$= \max\{0.9,0.7,0.4\} = 0.9$

maka matriks secara lengkapnya sebagai berikut:

$$\tilde{R}_1 \circledast \tilde{R}_2 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.1 & 0 \\ 0.5 & 0.3 & 0 \\ 0.9 & 0.7 & 0.4 \end{bmatrix} \circledast \begin{bmatrix} 0.1 & 0.9 & 0.5 \\ 0 & 0.8 & 0.3 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.9 & 0.5 \\ 0.5 & 0.9 & 0.5 \\ 0.9 & 0.9 & 0.9 \end{bmatrix}$$

Dari semua hasil perhitungan di atas dapat diketahui bahwa setiap tipe akan menghasilkan derajat keanggotaan yang berbeda pada setiap titik-titiknya. Hal ini jelas terlihat pada perbedaan tebal tipis garis relasi yang dihasilkan pada tiap tipe.

Sekarang kita akan menunjukkan bahwa empat tipe komposisi relasi fuzzy tersebut bersifat asosiatif.

Teorema 1 Misakan $\widetilde{F_1}, \widetilde{F_2}, \widetilde{F_3}$ adalah relasi fuzzy pada S, maka

1. $\widetilde{F_1} \circ \left(\widetilde{F_2} \circ \widetilde{F_3}\right) = \left(\widetilde{F_1} \circ \widetilde{F_2}\right) \circ \widetilde{F_3}$
2. $\widetilde{F_1} \odot \left(\widetilde{F_2} \odot \widetilde{F_3}\right) = \left(\widetilde{F_1} \odot \widetilde{F_2}\right) \odot \widetilde{F_3}$
3. $\widetilde{F_1} * \left(\widetilde{F_2} * \widetilde{F_3}\right) = \left(\widetilde{F_1} * \widetilde{F_2}\right) * \widetilde{F_3}$
4. $\widetilde{F_1} \circledast \left(\widetilde{F_2} \circledast \widetilde{F_3}\right) = \left(\widetilde{F_1} \circledast \widetilde{F_2}\right) \circledast \widetilde{F_3}$

(Kao, Yah-Ming dan Wu, Sun Yen: 606).

Sebelum membuktikan teorema ini, kita membutuhkan dua lemma

Lemma 1 Misal I adalah himpunan indeks. Ada a_i dimana $i \in I$, dan b adalah bilangan real. Maka

(1) $\underset{i \in I}{(\sup a_i)} \vee b = \underset{i \in I}{(\sup)}\{a_i \vee b\}$

(2) $\underset{i \in I}{(\inf a_i)} \vee b = \underset{i \in I}{(\inf)}\{a_i \vee b\}$

(3) $\underset{i \in I}{(\inf a_i)} \wedge b = \underset{i \in I}{(\inf)}\{a_i \wedge b\}$

(4) $\underset{i \in I}{(\sup a_i)} \wedge b = \underset{i \in I}{(\sup)} \{a_i \wedge b\}$

(Kao, Yah-Ming dan Wu, Sun Yen: 606).

Bukti Lemma 1:

Asumsi: I = {1, 2, …, n}

a_i: Derajat keanggotaan himpunan fuzzy

A : himpunan derajat keanggotaan fuzzy dengan $a_i \in [0, 1], \forall\, i \in I$

Sehingga dapat ditulis $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} = \{\forall\, a_i \mid i \in I\}$

b merupakan bilangan real, dapat ditulis $b \in R$

(1) Adib: $\underset{i \in I}{(\sup a_i)} \vee b = \underset{i \in I}{(\sup)} \{a_i \vee b\}, \forall b \in R$

karena $a_i \in [0, 1], \forall i \in I$ maka $= \{a_1, a_2, \ldots, a_i\}$ terbatas di atas. Jelas A memiliki supremum. Misal $\exists\, k \in I \ni a_k$ adalah sup A, dapat ditulis $\underset{i \in I}{(\sup a_i)} = a_k$.

Karena $b \in R$, sehingga terdapat tiga kondisi b, yaitu

1. Jika $b > a_k$, maka $\underset{i \in I}{(\sup a_i)} \vee b = a_k \vee b = b$

   dan $\underset{i \in I}{(\sup)} \{a_i \vee b\} = \underset{i \in I}{(\sup)} \{\text{maks}\,(a_i, b)\} = b$, karena $b > a_i, \forall\, i \in I$.

2. Jika $b < a_k$, maka $\underset{i \in I}{(\sup a_i)} \vee b = a_k \vee b = a_k$

   dan $\underset{i \in I}{(\sup)} \{a_i \vee b\} = \underset{i \in I}{(\sup)} \{\text{maks}\,(a_i, b)\} = a_k$, karena $b < a_i$,

   $\forall\, i \in I$.

3. Jika $b = a_k$, maka $\underset{i \in I}{(\sup a_i)} \vee b = a_k \vee b = a_k$ atau b

dan $\underset{i \in I}{(\sup)}\{a_i \vee b\} = \underset{i \in I}{(\sup)}\{\text{maks } (a_i, b)\} = a_k$ atau b, karena $b = a_i, \forall\, i \in I.$

Dari pembuktian di atas diperolah hasil yang sama, sehingga terbukti.

(2) Adib: $\underset{i \in I}{(\inf a_i)} \vee b = \underset{i \in I}{(\inf)}\{a_i \vee b\}, \forall b \in R$

karena $a_i \in [0,\ 1], \forall i \in I$ maka $= \{a_1, a_2, \dots, a_i\}$ terbatas di bawah. Jelas A memiliki infimum. Misal $\exists\, k \in I \ni a_k$ adalah inf A, maka dapat ditulis $\underset{i \in I}{(\inf a_i)} = a_k.$

Karena $b \in R$, sehingga terdapat tiga kondisi b, yaitu

1. Jika $b > a_k$, maka $\underset{i \in I}{(\inf a_i)} \vee b = a_k \ \vee b = b$

   dan $\underset{i \in I}{(\inf)}\{a_i \vee b\} = \underset{i \in I}{(\inf)}\{\text{maks } (a_i, b)\} = b$, karena $b > a_i, \forall\, i \in I.$

2. Jika $b < a_k$, maka $\underset{i \in I}{(\inf a_i)} \vee b = a_k \ \vee b = a_k$

   dan $\underset{i \in I}{(\inf)}\{a_i \vee b\} = \underset{i \in I}{(\inf)}\{\text{maks } (a_k, b)\} = a_k$, karena $b < a_i, \forall\, i \in I.$

3. Jika $b = a_k$, maka $\underset{i \in I}{(\inf a_i)} \vee b = a_k \ \vee b = a_k$ atau b

   dan $\underset{i \in I}{(\inf)}\{a_i \vee b\} = \underset{i \in I}{(\inf)}\{\text{maks } (a_k, b)\} = a_k$ atau b, karena $b = a_i, \forall\, i \in I.$

Dari pembuktian di atas diperolah hasil yang sama, sehingga terbukti.

(3) Adib: $\underset{i \in I}{(\inf a_i)} \wedge b = \underset{i \in I}{(\inf)}\{a_i \wedge b\}, \forall b \in R$

karena $a_i \in [0,\ 1], \forall i \in I$ maka $= \{a_1, a_2, \dots, a_i\}$ terbatas di bawah. Jelas A memiliki infimum. Misal $\exists\, k \in I \ni a_k$ adalah inf A, maka dapat ditulis $\underset{i \in I}{(\inf a_i)} = a_k$.

Karena $b \in R$, sehingga terdapat tiga kondisi b, yaitu

1. Jika $b > a_k$, maka $\underset{i \in I}{(\inf a_i)} \wedge b = a_k \wedge b = a_k$

   dan $\underset{i \in I}{(\inf)}\{a_i \wedge b\} = \underset{i \in I}{(\inf)}\{\min\,(a_i, b)\} = a_k$, karena $b > a_i, \forall\, i \in I$.

2. Jika $b < a_k$, maka $\underset{i \in I}{(\inf a_i)} \wedge b = a_i \wedge b = b$

   dan $\underset{i \in I}{(\inf)}\{a_i \wedge b\} = \underset{i \in I}{(\inf)}\{\min\,(a_k, b)\} = b$, karena $b < a_i, \forall\, i \in I$.

3. Jika $b = a_k$, maka $\underset{i \in I}{(\inf a_i)} \wedge b = a_i \wedge b = a_i$ atau b

   dan $\underset{i \in I}{(\inf)}\{a_i \wedge b\} = \underset{i \in I}{(\inf)}\{\min\,(a_k, b)\} = a_k$ atau b, karena

   $b = a_i, \forall\, i \in I$.

Dari pembuktian di atas diperolah hasil yang sama, sehingga terbukti.

(4) Adib: $\underset{i \in I}{(\sup a_i)} \wedge b = \underset{i \in I}{(\sup)}\{a_i \wedge b\}, \forall b \in R$

karena $a_i \in [0,\ 1], \forall i \in I$ maka $= \{a_1, a_2, \dots, a_i\}$ terbatas di atas. Jelas A memiliki supremum. Misal $\exists\, k \in I \ni a_k$ adalah sup A, dapat ditulis $\underset{i \in I}{(\sup a_i)} = a_k$.

Karena $b \in R$, sehingga terdapat tiga kondisi b, yaitu

1. Jika $b > a_k$, maka $\underset{i \in I}{(\sup a_i)} \wedge b = a_i \wedge b = a_k$

dan $\underset{i \in I}{(\sup)}\{a_i \wedge b\} = \underset{i \in I}{(\sup)}\{\min(a_i, b)\} = a_k$, karena $b > a_i, \forall\, i \in I$.

2. Jika $b < a_k$, maka $\underset{i \in I}{(\sup a_i)} \wedge b = a_i \wedge b = b$

   dan $\underset{i \in I}{(\sup)}\{a_i \wedge b\} = \underset{i \in I}{(\sup)}\{\min(a_i, b)\} = b$, karena $b < a_i, \forall\, i \in I$.

3. Jika $b = a_k$, maka $\underset{i \in I}{(\sup a_i)} \wedge b = a_i \wedge b = a_k$ atau b

   dan $\underset{i \in I}{(\sup)}\{a_i \wedge b\} = \underset{i \in I}{(\sup)}\{\min(a_i, b)\} = a_k$ atau b, karena

   $b = a_i, \forall\, i \in I$.

Dari pembuktian di atas diperolah hasil yang sama, sehingga terbukti.

<u>Lemma 2</u> Misalkan I, J adalah himpunan indeks dan a_{ij}, $i \in I$, $j \in J$ adalah bilangan riil dan $0 \leq a_{ij} \leq 1$. Maka,

(1) $\underset{i \in I}{\sup}\ \underset{j \in J}{\sup}\{a_{ij}\} = \underset{j \in J}{\sup}\ \underset{i \in I}{\sup}\{a_{ij}\}$

(2) $\underset{i \in I}{\inf}\ \underset{j \in J}{\inf}\{a_{ij}\} = \underset{j \in J}{\inf}\ \underset{i \in I}{\inf}\{a_{ij}\}$

(Kao, Yah-Ming dan Wu, Sun Yen: 606).

<u>Bukti Lemma 2</u>

Misalkan I = {1, 2, …, n}

J = {1, 2, …, m}

(1) Ambil sebarang a_{ij}, dimana a_{ij} adalah derajat keanggotaan suatu himpunan fuzzy, dengan $a_{ij} \in [0, 1], \forall\, i \in I$ dan $j \in J$. maka

$\underset{i \in I}{\sup}\ \underset{j \in J}{\sup}\{a_{ij}\} = \underset{i \in I}{\sup}\{a_j\} = a_k, \forall\, k \in I$, dimana a_j adalah $\underset{j \in J}{\sup}\{a_{ij}\}$.

Disisi lain,

$\underset{j \in J}{sup} \underset{i \in I}{sup}\{a_{ij}\} = \underset{j \in J}{sup}\{a_i\} = a_k, \forall\, k \in I$, dimana a_i adalah $\underset{i \in I}{sup}\{a_{ij}\}$.

Karena kedua sisi memperoleh hasil yang sama maka terbukti.

(2) Ambil sebarang a_{ij}, dimana a_{ij} adalah derajat keanggotaan suatu himpunan fuzzy, dengan $a_{ij} \in [0, 1], \forall\, i \in I$ dan $j \in J$. maka

$\underset{i \in I}{inf} \underset{j \in J}{inf}\{a_{ij}\} = \underset{i \in I}{inf}\{a_j\} = a_k, \forall\, k \in I$, dimana a_j adalah $\underset{j \in J}{inf}\{a_{ij}\}$.

Disisi lain,

$\underset{j \in J}{inf} \underset{i \in I}{inf}\{a_{ij}\} = \underset{j \in J}{inf}\{a_i\} = a_k, \forall\, k \in I$, dimana a_i adalah $\underset{i \in I}{inf}\{a_{ij}\}$.

Karena kedua sisi memperoleh hasil yang sama maka terbukti.

Bukti teorema 1.

Misalkan μ_{F_1}, μ_{F_2}, μ_{F_3} adalah fungsi keanggotaan dari $\widetilde{F_1}, \widetilde{F_2}, \widetilde{F_3}$. Misal $x, w \in S$ maka kita mempunyai

(1) $$\mu_{(F_1 \circ F_2) \circ F_3}(x, w) = \underset{z \in S}{sup}\left\{\left[\underset{y \in S}{sup}\{\mu_{F_1}(x, y) \wedge \mu_{F_2}(y, z)\}\right] \wedge \mu_{F_3}(z, w)\right\}$$

$$= \underset{z \in S}{sup} \underset{y \in S}{sup}\{\mu_{F_1}(x, y) \wedge \mu_{F_2}(y, z) \wedge \mu_{F_3}(z, w)\}$$

dan

$$\mu_{F_1 \circ (F_2 \circ F_3)}(x, w) = \underset{y \in S}{sup}\left\{\mu_{F_1}(x, y) \wedge \left[\underset{y \in S}{sup}\{\mu_{F_2}(y, z) \wedge \mu_{F_3}(z, w)\}\right]\right\}$$

$$= \underset{y \in S}{sup} \underset{y \in S}{sup}\{\mu_{F_1}(x, y) \wedge \mu_{F_2}(y, z) \wedge \mu_{F_3}(z, w)\}$$

Oleh karena itu

$$\mu_{(F_1 \circ F_2) \circ F_3}(x, w) = \mu_{F_1 \circ (F_2 \circ F_3)}(x, w), \text{ untuk semua } x, w \in S$$

Yaitu

$$(\widetilde{F_1} \circ \widetilde{F_2}) \circ \widetilde{F_3} = \widetilde{F_1} \circ (\widetilde{F_2} \circ \widetilde{F_3})$$

(2) $\mu_{(F_1 \odot F_2) \odot F_3}(x,w) = \underset{z \in S}{inf} \left\{ \left[\underset{y \in S}{inf} \{\mu_{F_1}(x,y) \vee \mu_{F_2}(y,z)\} \right] \vee \mu_{F_3}(z,w) \right\}$

$$= \underset{z \in S}{inf} \ \underset{y \in S}{inf} \{\mu_{F_1}(x,y) \vee \mu_{F_2}(y,z) \vee \mu_{F_3}(z,w)\}$$

dan

$$\mu_{F_1 \odot (F_2 \odot F_3)}(x,w) = \underset{y \in S}{inf} \left\{ \mu_{F_1}(x,y) \wedge \left[\underset{y \in S}{inf} \{\mu_{F_2}(y,z) \wedge \mu_{F_3}(z,w)\} \right] \right\}$$

$$= \underset{y \in S}{inf} \ \underset{y \in S}{inf} \{\mu_{F_1}(x,y) \wedge \mu_{F_2}(y,z) \wedge \mu_{F_3}(z,w)\}$$

Oleh karena itu

$\mu_{(F_1 \odot F_2) \odot F_3}(x,w) = \mu_{F_1 \odot (F_2 \odot F_3)}(x,w)$, untuk semua $x, w \in S$

Yaitu

$$(\widetilde{F_1} \odot \widetilde{F_2}) \odot \widetilde{F_3} = \widetilde{F_1} \odot (\widetilde{F_2} \odot \widetilde{F_3})$$

(3) $\mu_{(F_1 * F_2) * F_3}(x,w) = \underset{z \in S}{inf} \left\{ \left[\underset{y \in S}{inf} \{\mu_{F_1}(x,y) \wedge \mu_{F_2}(y,z)\} \right] \wedge \mu_{F_3}(z,w) \right\}$

$$= \underset{z \in S}{inf} \ \underset{y \in S}{inf} \{\mu_{F_1}(x,y) \wedge \mu_{F_2}(y,z) \wedge \mu_{F_3}(z,w)\}$$

Dan

$$\mu_{F_1*(F_2*F_3)}(x,w) = \underset{y \in S}{inf}\left\{\mu_{F_1}(x,y) \wedge \left[\underset{y \in S}{inf}\{\mu_{F_2}(y,z) \wedge \mu_{F_3}(z,w)\}\right]\right\}$$

$$= \underset{y \in S}{inf}\ \underset{y \in S}{inf}\{\mu_{F_1}(x,y) \wedge \mu_{F_2}(y,z) \wedge \mu_{F_3}(z,w)\}$$

Oleh karena itu

$\mu_{(F_1*F_2)*F_3}(x,w) = \mu_{F_1*(F_2*F_3)}(x,w)$, untuk semua $x, w \in S$

Yaitu

$$(\widetilde{F_1} * \widetilde{F_2}) * \widetilde{F_3} = \widetilde{F_1} * (\widetilde{F_2} * \widetilde{F_3})$$

(4) $\mu_{(F_1 \circledast F_2) \circledast F_3}(x,w) = \underset{z \in S}{sup}\left\{\left[\underset{y \in S}{sup}\{\mu_{F_1}(x,y) \vee \mu_{F_2}(y,z)\}\right] \vee \mu_{F_3}(z,w)\right\}$

$$= \underset{z \in S}{sup}\ \underset{y \in S}{sup}\{\mu_{F_1}(x,y) \vee \mu_{F_2}(y,z) \vee \mu_{F_3}(z,w)\}$$

dan

$$\mu_{F_1 \circledast (F_2 \circledast F_3)}(x,w) = \underset{y \in S}{sup}\left\{\mu_{F_1}(x,y) \vee \left[\underset{y \in S}{sup}\{\mu_{F_2}(y,z) \vee \mu_{F_3}(z,w)\}\right]\right\}$$

$$= \underset{y \in S}{sup}\ \underset{y \in S}{sup}\{\mu_{F_1}(x,y) \vee \mu_{F_2}(y,z) \vee \mu_{F_3}(z,w)\}$$

Oleh karena itu

$\mu_{(F_1 \circledast F_2) \circledast F_3}(x,w) = \mu_{F_1 \circledast (F_2 \circledast F_3)}(x,w)$, untuk semua $x, w \in S$

Yaitu

$$(\widetilde{F_1} \circledast \widetilde{F_2}) \circledast \widetilde{F_3} = \widetilde{F_1} \circledast (\widetilde{F_2} \circledast \widetilde{F_3})$$

(Kao, Yah-Ming dan Wu, Sun Yen: 606 - 608).

Berikut ini diberikan contoh untuk memperjelas teorema diatas.

Contoh 2.9

Misalkan S= {1, 2, 3} dan μ_{F_1}, μ_{F_2} dan μ_{F_3} adalah fungsi keanggotaan dari relasi fuzzy $\widetilde{F_1}, \widetilde{F_2}$ dan $\widetilde{F_3}$, didefinisikan dengan:

$\mu_{F_1} = (1,1) \rightarrow 0.7$	$\mu_{F_2} = (1,1) \rightarrow 0.7$	$\mu_{F_3} = (1,1) \rightarrow 0$
$(1,2) \rightarrow 0.8$	$(1,2) \rightarrow 0$	$(1,2) \rightarrow 0.7$
$(1,3) \rightarrow 0.9$	$(1,3) \rightarrow 0.7$	$(1,3) \rightarrow 0$
$(2,1) \rightarrow 0.4$	$(2,1) \rightarrow 0$	$(2,1) \rightarrow 0.8$
$(2,2) \rightarrow 0.6$	$(2,2) \rightarrow 0.8$	$(2,2) \rightarrow 0$
$(2,3) \rightarrow 0.8$	$(2,3) \rightarrow 0$	$(2,3) \rightarrow 0.8$
$(3,1) \rightarrow 0.3$	$(3,1) \rightarrow 0.9$	$(3,1) \rightarrow 0$
$(3,2) \rightarrow 0.5$	$(3,2) \rightarrow 0$	$(3,2) \rightarrow 0.9$
$(3,3) \rightarrow 0.7$	$(3,3) \rightarrow 0.9$	$(3,3) \rightarrow 0$

(Kao, Yah-Ming dan Wu, Sun Yen: 611).

Dari keterangan di atas, maka relasi fuzzy $\widetilde{F_1}, \widetilde{F_2}$ dan $\widetilde{F_3}$ dapat disajikan dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\widetilde{F_1} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.8 & 0.9 \\ 0.4 & 0.6 & 0.8 \\ 0.3 & 0.5 & 0.7 \end{bmatrix}, \quad \widetilde{F_2} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0 & 0.7 \\ 0 & 0.8 & 0 \\ 0.9 & 0 & 0.9 \end{bmatrix}, \quad \widetilde{F_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0.7 & 0 \\ 0.8 & 0 & 0.8 \\ 0 & 0.9 & 0 \end{bmatrix}$$

1) Dikerjakan dengan teorema 1 bagian (1)

$$\widetilde{F_1} \circ \left(\widetilde{F_2} \circ \widetilde{F_3} \right) = \left(\widetilde{F_1} \circ \widetilde{F_2} \right) \circ \widetilde{F_3}$$

Jawab:

i) Ruas kiri

$\widetilde{F_1} \circ (\widetilde{F_2} \circ \widetilde{F_3})$

Untuk mengetahui hasilnya maka yang kita kerjakan terlebih dahulu yang di dalam kurung yaitu $\widetilde{F_2} \circ \widetilde{F_3}$, kita misalkan hasilnya $\tilde{G}$, baru kemudian $\widetilde{F_1} \circ \tilde{G}$.

$$\widetilde{F_2} \circ \widetilde{F_3} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0 & 0.7 \\ 0 & 0.8 & 0 \\ 0.9 & 0 & 0.9 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 & 0.7 & 0 \\ 0.8 & 0 & 0.8 \\ 0 & 0.9 & 0 \end{bmatrix}, \text{ maka}$$

$$\mu_{(\widetilde{F_2} \circ \widetilde{F_3})}(1,1) = \max\{\min\{(0.7, 0), (0, 0.8), (0.7, 0)\}\} = \max\{0, 0, 0\} = 0$$

$$\mu_{(\widetilde{F_2} \circ \widetilde{F_3})}(1,2) = \max\{\min\{(0.7, 0.7), (0, 0), (0.7, 0.9)\}\} = \max\{0.7, 0, 0.7\} = 0.7$$

$$\mu_{(\widetilde{F_2} \circ \widetilde{F_3})}(1,3) = \max\{\min\{(0.7, 0), (0, 0.8), (0.7, 0)\}\} = \max\{0, 0, 0\} = 0$$

$$\mu_{(\widetilde{F_2} \circ \widetilde{F_3})}(2,1) = \max\{\min\{(0, 0), (0.8, 0.8), (0, 0)\}\} = \max\{0, 0.8, 0\} = 0.8$$

$$\mu_{(\widetilde{F_2} \circ \widetilde{F_3})}(2,2) = \max\{\min\{(0, 0.7), (0.8, 0), (0, 0.9)\}\} = \max\{0, 0, 0\} = 0$$

$$\mu_{(\widetilde{F_2} \circ \widetilde{F_3})}(2,3) = \max\{\min\{(0, 0), (0.8, 0.8), (0, 0)\}\} = \max\{0, 0.8, 0\} = 0.8$$

$$\mu_{(\widetilde{F_2} \circ \widetilde{F_3})}(3,1) = \max\{\min\{(0.9, 0), (0, 0.8), (0.9, 0)\}\} = \max\{0, 0, 0\} = 0$$

$$\mu_{(\widetilde{F_2} \circ \widetilde{F_3})}(3,2) = \max\{\min\{(0.9, 0.7), (0,0), (0.9, 0.9)\}\} = \max\{0.7, 0, 0.9\} = 0.9$$

$$\mu_{(\widetilde{F_2} \circ \widetilde{F_3})}(3,3) = \max\{\min\{(0.9, 0), (0, 0.8), (0.9, 0)\}\} = \max\{0, 0, 0\} = 0$$

Sehingga, $\widetilde{F_2} \circ \widetilde{F_3} = \tilde{G} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0 & 0.7 \\ 0 & 0.8 & 0 \\ 0.9 & 0 & 0.9 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 & 0.7 & 0 \\ 0.8 & 0 & 0.8 \\ 0 & 0.9 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.7 & 0 \\ 0.8 & 0 & 0.8 \\ 0 & 0.9 & 0 \end{bmatrix}$

Setelah kita mendapatkan hasil dari $\widetilde{F_2} \circ \widetilde{F_3} = \tilde{G}$, selanjutnya kita operasikan $\tilde{G}$ dengan $\widetilde{F_1}$ sebagai berikut

$$\widetilde{F_1} \circ \tilde{G} = \widetilde{F_1} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.8 & 0.9 \\ 0.4 & 0.6 & 0.8 \\ 0.3 & 0.5 & 0.7 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 & 0.7 & 0 \\ 0.8 & 0 & 0.8 \\ 0 & 0.9 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mu_{(\widetilde{F_2} \circ \widetilde{F_3})}(1,1) = \max\{\min\{(0.7, 0), (0.8, 0.8), (0.9, 0)\}\} = \max\{0, 0.8, 0\} = 0.8$$

$$\mu_{(\widetilde{F_2} \circ \widetilde{F_3})}(1,2) = \max\{\min\{(0.7, 0.7), (0.8, 0), (0.9, 0.9)\}\} = \max\{0.7, 0, 0.9\}$$
$$= 0.9$$

$$\mu_{(\widetilde{F_2} \circ \widetilde{F_3})}(1,3) = \max\{\min\{(0.7, 0), (0.8, 0.8), (0.9, 0)\}\} = \max\{0, 0.8, 0\} = 0.8$$

$$\mu_{(\widetilde{F_2} \circ \widetilde{F_3})}(2,1) = \max\{\min\{(0.4, 0), (0.6, 0.8), (0.8, 0)\}\} = \max\{0, 0.6, 0\} = 0.6$$

$$\mu_{(\widetilde{F_2} \circ \widetilde{F_3})}(2,2) = \max\{\min\{(0.4, 0.7), (0.6, 0), (0.8, 0.9)\}\} = \max\{0.4, 0, 0.8\}$$
$$= 0.8$$

$$\mu_{(\widetilde{F_2} \circ \widetilde{F_3})}(2,3) = \max\{\min\{(0.4, 0), (0.6, 0.8), (0.8, 0)\}\} = \max\{0, 0.6, 0\} = 0.6$$

$$\mu_{(\widetilde{F_2} \circ \widetilde{F_3})}(3,1) = \max\{\min\{(0.3, 0), (0.5, 0.8), (0.7, 0)\}\} = \max\{0, 0.5, 0\} = 0.5$$

$$\mu_{(\widetilde{F_2} \circ \widetilde{F_3})}(3,2) = \max\{\min\{(0.3, 0.7), (0.5,0), (0.7, 0.9)\}\} = \max\{0.3, 0, 0.7\}$$
$$= 0.7$$

$$\mu_{(\widetilde{F_2} \circ \widetilde{F_3})}(3,3) = \max\{\min\{(0.3, 0), (0.5, 0.8), (0.7, 0)\}\} = \max\{0, 0.5, 0\} = 0.5$$

Sehingga diperoleh hasil akhir

$$\widetilde{F_1} \circ \widetilde{G} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.8 & 0.9 \\ 0.4 & 0.6 & 0.8 \\ 0.3 & 0.5 & 0.7 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 & 0.7 & 0 \\ 0.8 & 0 & 0.8 \\ 0 & 0.9 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.9 & 0.8 \\ 0.6 & 0.8 & 0.6 \\ 0.5 & 0.7 & 0.5 \end{bmatrix}$$

i) Ruas kanan

$(\widetilde{F_1} \circ \widetilde{F_2}) \circ \widetilde{F_3}$

Untuk menyelesaikan permasalahan diatas, maka terlebih dahulu kita kerjakan perhitungan $(\widetilde{F_1} \circ \widetilde{F_2})$ terlebih dahulu.

$$\widetilde{F_1} \circ \widetilde{F_2} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.8 & 0.9 \\ 0.4 & 0.6 & 0.8 \\ 0.3 & 0.5 & 0.7 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0.7 & 0 & 0.7 \\ 0 & 0.8 & 0 \\ 0.9 & 0 & 0.9 \end{bmatrix}$$

Seperti pada perhitungan sebelumnya, perkalian matriks diganti operasi “min” dan operasi penjumlahan diganti operasi “max”.

$$\mu_{\widetilde{F_1} \circ \widetilde{F_2}}(1,1) = \max\{\min\{(0.7, 0.7), (0.8, 0), (0.9, 0.9)\}\} = \max\{0.7, 0, 0.9\} = 0.9$$

$$\mu_{\widetilde{F_1} \circ \widetilde{F_2}}(1,2) = \max\{\min\{(0.7, 0), (0.8, 0.8), (0.9, 0)\}\} = \max\{0, 0.8, 0\} = 0.8$$

$$\mu_{\widetilde{F_1} \circ \widetilde{F_2}}(1,3) = \max\{\min\{(0.7, 0.7), (0.8, 0), (0.9, 0.9)\}\} = \max\{0.7, 0, 0.9\} = 0.9$$

$$\mu_{\widetilde{F_1} \circ \widetilde{F_2}}(2,1) = \max\{\min\{(0.4, 0.7), (0.6, 0), (0.8, 0.9)\}\} = \max\{0.4, 0, 0.8\} = 0.8$$

$$\mu_{\widetilde{F_1} \circ \widetilde{F_2}}(2,2) = \max\{\min\{(0.4, 0), (0.6, 0.8), (0.8, 0)\}\} = \max\{0.4, 0.6, 0\} = 0.6$$

$$\mu_{\widetilde{F_1} \circ \widetilde{F_2}}(2,3) = \max\{\min\{(0.4, 0.7), (0.6, 0), (0.8, 0.9)\}\} = \max\{0.4, 0, 0.8\} = 0.8$$

$$\mu_{\widetilde{F_1} \circ \widetilde{F_2}}(3,1) = \max\{\min\{(0.3, 0.7), (0.5, 0), (0.7, 0.9)\}\} = \max\{0.3, 0, 0.7\} = 0.7$$

$$\mu_{\widetilde{F_1} \circ \widetilde{F_2}}(3,2) = \max\{\min\{(0.3, 0), (0.5, 0.8), (0.7, 0)\}\} = \max\{0, 0.5, 0\} = 0.5$$

$$\mu_{\widetilde{F_1}\circ\widetilde{F_2}}(3,3) = \max\{\min\{(0.3, 0.7), (0.5, 0), (0.7, 0.9)\}\} = \max\{0.3, 0, 0.7\} = 0$$

Sehingga $\widetilde{F_1} \circ \widetilde{F_2} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.8 & 0.9 \\ 0.4 & 0.6 & 0.8 \\ 0.3 & 0.5 & 0.7 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0.7 & 0 & 0.7 \\ 0 & 0.8 & 0 \\ 0.9 & 0 & 0.9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.8 & 0.9 \\ 0.8 & 0.6 & 0.8 \\ 0.7 & 0.5 & 0.7 \end{bmatrix}$

Setelah didapatkan hasil tersebut, kita misalkan $\widetilde{F_1} \circ \widetilde{F_2} = \widetilde{H}$ maka untuk mendapatkan hasil akhir, kita operasikan $\widetilde{H}$ dengan $\widetilde{F_3}$

$$(\widetilde{F_1} \circ \widetilde{F_2}) \circ \widetilde{F_3} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.8 & 0.9 \\ 0.8 & 0.6 & 0.8 \\ 0.7 & 0.5 & 0.7 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 & 0.7 & 0 \\ 0.8 & 0 & 0.8 \\ 0 & 0.9 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mu_{\widetilde{F_1}\circ\widetilde{F_2}}(1,1) = \max\{\min\{(0.9, 0), (0.8, 0.8), (0.9, 0)\}\} = \max\{0, 0.8, 0\} = 0.8$$

$$\mu_{\widetilde{F_1}\circ\widetilde{F_2}}(1,2) = \max\{\min\{(0.9, 0,7), (0.8, 0), (0.9, 0.9)\}\} = \max\{0.7, 0, 0.9\} = 0.9$$

$$\mu_{\widetilde{F_1}\circ\widetilde{F_2}}(1,3) = \max\{\min\{(0.9, 0), (0.8, 0.8), (0.9, 0)\}\} = \max\{0, 0.8, 0\} = 0.8$$

$$\mu_{\widetilde{F_1}\circ\widetilde{F_2}}(2,1) = \max\{\min\{(0.8, 0), (0.6, 0.8), (0.8, 0)\}\} = \max\{0, 0.6, 0\} = 0.6$$

$$\mu_{\widetilde{F_1}\circ\widetilde{F_2}}(2,2) = \max\{\min\{(0.8, 0.7), (0.6, 0), (0.8, 0.9)\}\} = \max\{0.7, 0, 0.8\} = 0.8$$

$$\mu_{\widetilde{F_1}\circ\widetilde{F_2}}(2,3) = \max\{\min\{(0.8, 0), (0.6, 0.8), (0.8, 0)\}\} = \max\{0, 0.6, 0\} = 0.6$$

$$\mu_{\widetilde{F_1}\circ\widetilde{F_2}}(3,1) = \max\{\min\{(0.7, 0), (0.5, 0.8), (0.7, 0)\}\} = \max\{0, 0.5, 0\} = 0.5$$

$$\mu_{\widetilde{F_1}\circ\widetilde{F_2}}(3,2) = \max\{\min\{(0.7, 0.7), (0.5, 0), (0.7, 0.9)\}\} = \max\{0.7, 0, 0.7\} = 0.7$$

$$\mu_{\widetilde{F_1}\circ\widetilde{F_2}}(3,3) = \max\{\min\{(0.7, 0), (0.5, 0.8), (0.7, 0)\}\} = \max\{0, 0.5, 0\} = 0.5$$

Sehingga,

$$(\widetilde{F_1} \circ \widetilde{F_2}) \circ \widetilde{F_3} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.8 & 0.9 \\ 0.8 & 0.6 & 0.8 \\ 0.7 & 0.5 & 0.7 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 & 0.7 & 0 \\ 0.8 & 0 & 0.8 \\ 0 & 0.9 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.9 & 0.8 \\ 0.6 & 0.8 & 0.6 \\ 0.5 & 0.7 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Dari hasil yang di dapat maka dapat diketahui bahwa $\widetilde{F_1} \circ (\widetilde{F_2} \circ \widetilde{F_3}) = (\widetilde{F_1} \circ \widetilde{F_2}) \circ \widetilde{F_3}$.

Untuk teorema bagian 2, 3, dan 4, langkah pengerjaannya sama. Penggantian operasi perkalian dan penjumlahan sama seperti teorema sebelumnya.

Sekarang kita akan menunjukkan beberapa tipe komposisi relasi fuzzy yang distributif dengan operasi disjungsi (∨) dan konjungsi (∧).

Teorema 2. Misal $\widetilde{F_1}, \widetilde{F_2}, \widetilde{F_3}$ adalah relasi fuzzy pada S, maka

(1) $\widetilde{F_1} \circ (\widetilde{F_2} \vee \widetilde{F_3}) = (\widetilde{F_1} \circ \widetilde{F_2}) \vee (\widetilde{F_1} \circ \widetilde{F_3})$

(2) $\widetilde{F_1} \circ (\widetilde{F_2} \wedge \widetilde{F_3}) \leq (\widetilde{F_1} \circ \widetilde{F_2}) \wedge (\widetilde{F_1} \circ \widetilde{F_3})$

(3) $\widetilde{F_1} \odot (\widetilde{F_2} \vee \widetilde{F_3}) \geq (\widetilde{F_1} \odot \widetilde{F_2}) \vee (\widetilde{F_1} \odot \widetilde{F_3})$

(4) $\widetilde{F_1} \odot (\widetilde{F_2} \wedge \widetilde{F_3}) = (\widetilde{F_1} \odot \widetilde{F_2}) \wedge (\widetilde{F_1} \odot \widetilde{F_3})$

(5) $\widetilde{F_1} * (\widetilde{F_2} \vee \widetilde{F_3}) \geq (\widetilde{F_1} * \widetilde{F_2}) \vee (\widetilde{F_1} * \widetilde{F_3})$

(6) $\widetilde{F_1} * (\widetilde{F_2} \wedge \widetilde{F_3}) = (\widetilde{F_1} * \widetilde{F_2}) \wedge (\widetilde{F_1} * \widetilde{F_3})$

(7) $\widetilde{F_1} \circledast (\widetilde{F_2} \vee \widetilde{F_3}) = (\widetilde{F_1} \circledast \widetilde{F_2}) \vee (\widetilde{F_1} \circledast \widetilde{F_3})$

(8) $\widetilde{F_1} \circledast (\widetilde{F_2} \wedge \widetilde{F_3}) \leq (\widetilde{F_1} \circledast \widetilde{F_2}) \wedge (\widetilde{F_1} \circledast \widetilde{F_3})$

(Kao, Yah-Ming dan Wu, Sun Yen: 608).

Sebelum kita membuktikan teorema diatas, kita membutuhkan dua lemma yaitu:

Lemma 3. Misalkan A, B, C adalah himpunan. Maka

(1) A ∧ (B ∨ C) = (A ∧ B) ∨ (A ∧ C)

(2) A ∨ (B ∧ C) = (A ∨ B) ∧ (A ∨ C)

Bukti:

(1) Untuk membuktikan dapat menggunakan definisi kesamaan dua himpunan.

a) Akan dibuktikan A ∧ (B ∨ C) ⊂ (A ∧ B) ∨ (A ∧ C)

Ambil $x \in$ A ∧ (B ∨ C)

Maka $x \in A$ dan $x \in (B \ \vee$ C)

$x \in A$ dan $(x \in B\ atau\ x \in C)$

$(x \in A$ dan $x \in B)$ atau $(x \in A$ dan $x \in C)$

$x \in A \wedge$ B atau $x \in A \wedge C$

$x \in$ (A ∧ B) ∨ (A ∧ C)

Jadi, A ∧ (B ∨ C) ⊂ (A ∧ B) ∨ (A ∧ C)

b) Akan dibuktikan (A ∧ B) ∨ (A ∧ C) ⊂ A ∧ (B ∨ C)

Ambil y ∈ (A ∧ B) ∨ (A ∧ C)

Maka y ∈ (A ∧ B) atau y ∈ (A ∧ C)

(y ∈ A dan y ∈ B) atau (y ∈ A dan y ∈ C)

y ∈ A dan (y ∈ B atau y ∈ C)

y ∈ A dan y ∈ B ∨ C)

y ∈ A ∧ (B ∨ C)

Jadi, (A ∧ B) ∨ (A ∧ C) ⊂ A ∧ (B ∨ C)

Dari a) dan b) diperoleh A ∧ (B ∨ C) = (A ∧ B) ∨ (A ∧ C)

Untuk pembuktian lemma (2) langkah-langkahnya dengan pembuktian lemma (1), hanya saja perbedaan terletak pada operasi disjungsi (∨) dan konjungsi (∧).

Lemma 4. Misalkan I adalah indeks himpunan $a_i, b_i, i \in I$ bilangan riil. maka

$$(1)\ \underset{i \in I}{(\sup a_i)} \vee \underset{i \in I}{(\sup b_i)} = \underset{i \in I}{(\sup)}\{a_i \vee b_i\}$$

$$(2)\ \underset{i \in I}{(\sup a_i)} \wedge \underset{i \in I}{(\sup b_i)} \geq \underset{i \in I}{(\sup)}\{a_i \wedge b_i\}$$

$$(3)\ \underset{i \in I}{(\inf a_i)} \vee \underset{i \in I}{(\inf b_i)} \leq \underset{i \in I}{(\inf)}\{a_i \vee b_i\}$$

$$(4)\ \underset{i \in I}{(\inf a_i)} \wedge \underset{i \in I}{(\inf b_i)} = \underset{i \in I}{(\inf)}\{a_i \wedge b_i\}$$

(Kao, Yah-Ming dan Wu, Sun Yen: 609).

Bukti Lemma 4.

Misal: I = {1, 2, …, n}

A, B : himpunan fungsi keanggotaan himpunan fuzzy

a_i, b_i adalah derajat keanggotaan suatu himpunan, maka

$a_i \in [0, 1], \forall\, i \in I$

$b_i \in [0, 1], \forall\, i \in I$

$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_i\} = \{\forall\, a_i | i \in I\}$

$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_i\} = \{\forall\, b_i | i \in I\}$

Asumsi untuk lemma bagian (1) dan (2)

Karena $a_i, b_i \in [0, 1]$, maka A dan B terbatas di atas. Jelas A dan B memiliki supremum

Misal: $a_k = \sup A$

$b_t = \sup B$

(1) $\underset{i \in I}{(\sup a_i)} \vee \underset{i \in I}{(\sup b_i)} = \underset{i \in I}{(\sup)} \{a_i \vee b_i\}$

Terdapat tiga kondisi yaitu:

a. Jika $a_k > b_t$, maka $\underset{i \in I}{(\sup a_i)} \vee \underset{i \in I}{(\sup b_i)} = a_k \vee b_t = a_k$

Dan $\underset{i \in I}{(\sup)} \{a_i \vee b_i\} = \{\text{maks}\{a_k, b_t\}\} = a_k$

b. jika $b_t > a_k$, maka $\underset{i \in I}{(\sup a_i)} \vee \underset{i \in I}{(\sup b_i)} = a_k \vee b_t = b_t$

dan $\underset{i \in I}{(\sup)} \{a_i \vee b_i\} = \{\text{maks}\{a_k, b_t\}\} = b_t$

c. jika $b_t = a_k$, maka $\underset{i \in I}{(\sup a_i)} \vee \underset{i \in I}{(\sup b_i)} = a_k \vee b_t = a_k$ atau b_t

dan $\underset{i \in I}{(\sup)} \{a_i \vee b_i\} = \{\text{maks}\{a_k, b_t\}\} = a_k$ atau b_t

dari pembuktian tersebut, diperolah hasil yang sama sehingga terbukti.

(2) $\underset{i \in I}{(\sup a_i)} \wedge \underset{i \in I}{(\sup b_i)} \geq \underset{i \in I}{(\sup)} \{a_i \wedge b_i\}$

i) $\underset{i \in I}{(\sup a_i)} \wedge \underset{i \in I}{(\sup b_i)} = a_k \wedge b_t = \begin{cases} a_k, \text{jika } a_k < b_t \\ b_t, \text{jika } a_k > b_t \end{cases}$

ii) $\underset{i \in I}{(\sup)} \{a_i \wedge b_i\}$, maka terdapat dua kondisi yaitu:

a. jika $k = t$, maka $\underset{i \in I}{(\sup)} \{a_i \wedge b_i\} = \begin{cases} a_k, \text{jika } a_k < b_t \\ b_t, \text{jika } a_k > b_t \end{cases}$

b. jika $k \neq t$, maka $\underset{i \in I}{(\sup a_i)} \wedge \underset{i \in I}{(\sup b_i)} \geq \underset{i \in I}{(\sup)} \{a_i \wedge b_i\}$

dari i) dan ii) maka terbukti bahwa $\underset{i \in I}{(\sup a_i)} \wedge \underset{i \in I}{(\sup b_i)} \geq \underset{i \in I}{(\sup)} \{a_i \wedge b_i\}$

Asumsi untuk lemma bagian (3) dan (4)

Karena $a_i, b_i \in [0,1]$, maka A dan B terbatas di bawah. Jelas A dan B memiliki infimum.

Misal: $a_k = \inf A\,, b_t = \inf B$

(3) $\underset{i \in I}{(\inf a_i)} \vee \underset{i \in I}{(\inf b_i)} \leq \underset{i \in I}{(\inf)} \{a_i \vee b_i\}$

i) $\underset{i \in I}{(\inf a_i)} \wedge \underset{i \in I}{(\inf b_i)} = a_k \wedge b_t = \begin{cases} a_k, \text{jika } a_k > b_t \\ b_t, \text{jika } a_k < b_t \end{cases}$

ii) $\underset{i \in I}{(\inf)} \{a_i \wedge b_i\}$, maka terdapat dua kondisi yaitu:

a. jika $k = t$, maka $\underset{i \in I}{(\inf)} \{a_i \wedge b_i\} = \begin{cases} a_k, \text{jika } a_k > b_t \\ b_t, \text{jika } a_k < b_t \end{cases}$

b. jika $k \neq t$, maka $\underset{i \in I}{(\inf a_i)} \wedge \underset{i \in I}{(\inf b_i)} \geq \underset{i \in I}{(\inf)} \{a_i \wedge b_i\}$

dari i) dan ii) maka terbukti bahwa $\underset{i \in I}{(\inf a_i)} \vee \underset{i \in I}{(\inf b_i)} \leq \underset{i \in I}{(\inf)} \{a_i \vee b_i\}$.

(4) $\underset{i \in I}{(\inf a_i)} \wedge \underset{i \in I}{(\inf b_i)} = \underset{i \in I}{(\inf)} \{a_i \wedge b_i\}$

Terdapat tiga kondisi yaitu:

a. Jika $a_k > b_t$, maka $\underset{i \in I}{(\inf a_i)} \wedge \underset{i \in I}{(\inf b_i)} = a_k \wedge b_t = b_t$

Dan $\underset{i \in I}{(\inf)} \{a_i \wedge b_i\} = \{\min \{a_k, b_t\}\} = b_t$

b. jika $b_t > a_k$, maka $\underset{i \in I}{(\inf a_i)} \wedge \underset{i \in I}{(\inf b_i)} = a_k \wedge b_t = a_k$

dan $\underset{i \in I}{(\inf)} \{a_i \wedge b_i\} = \{\min \{a_k, b_t\}\} = a_k$

c. jika $b_t = a_k$, maka $\underset{i \in I}{(\inf a_i)} \wedge \underset{i \in I}{(\inf b_i)} = a_k \wedge b_t = a_k$ atau b_t

dan $\underset{i \in I}{(\inf)} \{a_i \wedge b_i\} = \{\min \{a_k, b_t\}\} = a_k$ atau b_t

dari pembuktian tersebut, diperolah hasil yang sama sehingga terbukti.

Bukti Teorema 2.

(1) $\mu_{F_1\circ(F_2\vee F_3)}(x,z) = \underset{y\,\in\,S}{sup}\{\mu_{F_1}(x,y) \wedge [\mu_{F_2}(y,z) \vee \mu_{F_3}(y,z)]\}$

$= \underset{y\,\in\,S}{sup}\{[\mu_{F_1}(x,y) \wedge \mu_{F_2}(y,z)] \vee [\mu_{F_1}(x,y) \wedge \mu_{F_3}(y,z)]\}$

$= \underset{y\,\in\,S}{sup}\{\mu_{F_1}(x,y) \wedge \mu_{F_2}(y,z)\} \vee \underset{y\,\in\,S}{sup}\{ \mu_{F_1}(x,y) \wedge \mu_{F_3}(y,z)]\}$

$= \mu_{(F_1\circ F_2)\vee(F_2\circ F_3)}(x,z)$

(2) $\mu_{F_1\circ(F_2\wedge F_3)}(x,z) = \underset{y\,\in\,S}{sup}\{\mu_{F_1}(x,y) \wedge [\mu_{F_2}(y,z) \wedge \mu_{F_3}(y,z)]\}$

$= \underset{y\,\in\,S}{sup}\{[\mu_{F_1}(x,y) \wedge \mu_{F_2}(y,z)] \wedge [\mu_{F_1}(x,y) \wedge \mu_{F_3}(y,z)]\}$

$\leq \underset{y\,\in\,S}{sup}\{\mu_{F_1}(x,y) \wedge \mu_{F_2}(y,z)\} \wedge \underset{y\,\in\,S}{sup}\{ \mu_{F_1}(x,y) \wedge \mu_{F_3}(y,z)]\}$

$= \mu_{(F_1\circ F_2)\wedge(F_2\circ F_3)}(x,z)$

(3) $\mu_{F_1\odot(F_2\vee F_3)}(x,z) = \underset{y\,\in\,S}{inf}\{\mu_{F_1}(x,y) \vee [\mu_{F_2}(y,z) \vee \mu_{F_3}(y,z)]\}$

$= \underset{y\,\in\,S}{inf}\{[\mu_{F_1}(x,y) \vee \mu_{F_2}(y,z)] \vee [\mu_{F_1}(x,y) \vee \mu_{F_3}(y,z)]\}$

$\geq \underset{y\,\in\,S}{inf}\{\mu_{F_1}(x,y) \vee \mu_{F_2}(y,z)\} \vee \underset{y\,\in\,S}{inf}\{ \mu_{F_1}(x,y) \vee \mu_{F_3}(y,z)]\}$

$= \mu_{(F_1\odot F_2)\vee(F_2\odot F_3)}(x,z)$

(4) $\mu_{F_1\odot(F_2\wedge F_3)}(x,z) = \underset{y\,\in\,S}{inf}\{\mu_{F_1}(x,y) \vee [\mu_{F_2}(y,z) \wedge \mu_{F_3}(y,z)]\}$

$= \underset{y\,\in\,S}{inf}\{[\mu_{F_1}(x,y) \vee \mu_{F_2}(y,z)] \wedge [\mu_{F_1}(x,y) \vee \mu_{F_3}(y,z)]\}$

$$\leq \inf_{y \in S}\{\mu_{F_1}(x,y) \vee \mu_{F_2}(y,z)\} \wedge \inf_{y \in S}\{ \mu_{F_1}(x,y) \vee \mu_{F_3}(y,z)]\}$$

$$= \mu_{(F_1 \odot F_2) \wedge (F_2 \odot F_3)}(x,z)$$

(5) $\mu_{F_1 * (F_2 \vee F_3)}(x,z) = \inf_{y \in S}\{\mu_{F_1}(x,y) \wedge [\mu_{F_2}(y,z) \vee \mu_{F_3}(y,z)]\}$

$$= \inf_{y \in S}\{[\mu_{F_1}(x,y) \wedge \mu_{F_2}(y,z)] \vee [\mu_{F_1}(x,y) \wedge \mu_{F_3}(y,z)]\}$$

$$\geq \inf_{y \in S}\{\mu_{F_1}(x,y) \wedge \mu_{F_2}(y,z)\} \vee \inf_{y \in S}\{ \mu_{F_1}(x,y) \wedge \mu_{F_3}(y,z)]\}$$

$$= \mu_{(F_1 * F_2) \vee (F_2 * F_3)}(x,z)$$

(6) $\mu_{F_1 * (F_2 \wedge F_3)}(x,z) = \inf_{y \in S}\{\mu_{F_1}(x,y) \wedge [\mu_{F_2}(y,z) \wedge \mu_{F_3}(y,z)]\}$

$$= \inf_{y \in S}\{[\mu_{F_1}(x,y) \wedge \mu_{F_2}(y,z)] \wedge [\mu_{F_1}(x,y) \wedge \mu_{F_3}(y,z)]\}$$

$$= \inf_{y \in S}\{\mu_{F_1}(x,y) \wedge \mu_{F_2}(y,z)\} \wedge \inf_{y \in S}\{ \mu_{F_1}(x,y) \wedge \mu_{F_3}(y,z)]\}$$

$$= \mu_{(F_1 * F_2) \wedge (F_2 * F_3)}(x,z)$$

(7) $\mu_{F_1 \circledast (F_2 \vee F_3)}(x,z) = \sup_{y \in S}\{\mu_{F_1}(x,y) \vee [\mu_{F_2}(y,z) \vee \mu_{F_3}(y,z)]\}$

$$= \sup_{y \in S}\{[\mu_{F_1}(x,y) \vee \mu_{F_2}(y,z)] \vee [\mu_{F_1}(x,y) \vee \mu_{F_3}(y,z)]\}$$

$$\geq \sup_{y \in S}\{\mu_{F_1}(x,y) \vee \mu_{F_2}(y,z)\} \vee \sup_{y \in S}\{ \mu_{F_1}(x,y) \vee \mu_{F_3}(y,z)\}$$

$$= \mu_{(F_1 \circledast F_2) \vee (F_2 \circledast F_3)}(x,z)$$

(8) $\mu_{F_1 \circledast (F_2 \wedge F_3)}(x,z) = \sup_{y \in S}\{\mu_{F_1}(x,y) \vee [\mu_{F_2}(y,z) \wedge \mu_{F_3}(y,z)]\}$

$$= \sup_{y \in S}\{[\mu_{F_1}(x,y) \vee \mu_{F_2}(y,z)] \wedge [\mu_{F_1}(x,y) \vee \mu_{F_3}(y,z)]\}$$

$$\leq \sup_{y \in S}\{\mu_{F_1}(x,y) \vee \mu_{F_2}(y,z)\} \wedge \sup_{y \in S}\{ \mu_{F_1}(x,y) \vee \mu_{F_3}(y,z)]\}$$

$$= \mu_{(F_1 \circledast F_2)\wedge(F_2 \circledast F_3)}(x,z)$$

(Kao, Yah-Ming dan Wu, Sun Yen: 609 - 611).

Contoh 2.10

Dari contoh soal 2.9 di atas, lalu akan dikerjakan dengan menggunakan teorema 2 sebagai berikut:

Berdasarkan teorema 2 bagian (1)

$$\boxed{\widetilde{F_1} \circ \left(\widetilde{F_2} \vee \widetilde{F_3}\right) = \left(\widetilde{F_1} \circ \widetilde{F_2}\right) \vee \left(\widetilde{F_1} \circ \widetilde{F_3}\right)}$$

i) Ruas kiri $\widetilde{F_1} \circ \left(\widetilde{F_2} \vee \widetilde{F_3}\right)$, maka

$$\widetilde{F_2} \vee \widetilde{F_3} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0 & 0.7 \\ 0 & 0.8 & 0 \\ 0.9 & 0 & 0.9 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 0 & 0.7 & 0 \\ 0.8 & 0 & 0.8 \\ 0 & 0.9 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.7 & 0.7 \\ 0.8 & 0.8 & 0.8 \\ 0.9 & 0.9 & 0.9 \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{F_1} \circ \left(\widetilde{F_2} \vee \widetilde{F_3}\right) = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.8 & 0.9 \\ 0.4 & 0.6 & 0.8 \\ 0.3 & 0.5 & 0.7 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0.7 & 0.7 & 0.7 \\ 0.8 & 0.8 & 0.8 \\ 0.9 & 0.9 & 0.9 \end{bmatrix}$$

Seperti pada perhitungan sebelumnya, perkalian matriks diganti operasi “min” dan operasi penjumlahan diganti operasi “max”.

$$\mu_{\widetilde{F_1} \circ (\widetilde{F_2} \vee \widetilde{F_3})}(1,1) = \max\{\min\{(0.7, 0.7), (0.8, 0.8), (0.9, 0.9)\}\}$$

$$= \max\{0.7, 0.8, 0.9\} = 0.9$$

$$\mu_{\widetilde{F_1}\circ(\widetilde{F_2}\vee\widetilde{F_3})}(1,2) = \max\{\min\{(0.7, 0.7), (0.8, 0.8), (0.9, 0.9)\}\}$$
$$= \max\{0.7, 0.8, 0.9\} = 0.9$$

$$\mu_{\widetilde{F_1}\circ(\widetilde{F_2}\vee\widetilde{F_3})}(1,3) = \max\{\min\{(0.7, 0.7), (0.8, 0.8), (0.9, 0.9)\}\}$$
$$= \max\{0.7, 0.8, 0.9\} = 0.9$$

$$\mu_{\widetilde{F_1}\circ(\widetilde{F_2}\vee\widetilde{F_3})}(2,1) = \max\{\min\{(0.4, 0.7), (0.6, 0.8), (0.8, 0.9)\}\}$$
$$= \max\{0.4, 0.6, 0.8\} = 0.8$$

$$\mu_{\widetilde{F_1}\circ(\widetilde{F_2}\vee\widetilde{F_3})}(2,2) = \max\{\min\{(0.4, 0.7), (0.6, 0.8), (0.8, 0.9)\}\}$$
$$= \max\{0.4, 0.6, 0.8\} = 0.8$$

$$\mu_{\widetilde{F_1}\circ(\widetilde{F_2}\vee\widetilde{F_3})}(2,3) = \max\{\min\{(0.4, 0.7), (0.6, 0.8), (0.8, 0.9)\}\}$$
$$= \max\{0.4, 0.6, 0.8\} = 0.8$$

$$\mu_{\widetilde{F_1}\circ(\widetilde{F_2}\vee\widetilde{F_3})}(3,1) = \max\{\min\{(0.3, 0.7), (0.5, 0.8), (0.7, 0.9)\}\}$$
$$= \max\{0.3, 0.5, 0.7\} = 0.7$$

$$\mu_{\widetilde{F_1}\circ(\widetilde{F_2}\vee\widetilde{F_3})}(3,2) = \max\{\min\{(0.3, 0.7), (0.5, 0.8), (0.7, 0.9)\}\}$$
$$= \max\{0.3, 0.5, 0.7\} = 0.7$$

$$\mu_{\widetilde{F_1}\circ(\widetilde{F_2}\vee\widetilde{F_3})}(3,3) = \max\{\min\{(0.3, 0.7), (0.5, 0.8), (0.7, 0.9)\}\}$$
$$= \max\{0.3, 0.5, 0.7\} = 0.7$$

Sehingga

$$\widetilde{F_1} \circ \left(\widetilde{F_2} \vee \widetilde{F_3}\right) = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.8 & 0.9 \\ 0.4 & 0.6 & 0.8 \\ 0.3 & 0.5 & 0.7 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0.7 & 0.7 & 0.7 \\ 0.8 & 0.8 & 0.8 \\ 0.9 & 0.9 & 0.9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.9 & 0.9 \\ 0.8 & 0.8 & 0.8 \\ 0.7 & 0.7 & 0.7 \end{bmatrix}$$

i) Ruas kanan $(\widetilde{F_1} \circ \widetilde{F_2}) \vee (\widetilde{F_1} \circ \widetilde{F_3})$ maka

Untuk $\widetilde{F_1} \circ \widetilde{F_2} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.8 & 0.9 \\ 0.4 & 0.6 & 0.8 \\ 0.3 & 0.5 & 0.7 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0.7 & 0 & 0.7 \\ 0 & 0.8 & 0 \\ 0.9 & 0 & 0.9 \end{bmatrix}$

Seperti pada perhitungan sebelumnya, perkalian matriks diganti operasi "min" dan operasi penjumlahan diganti operasi "max".

$\mu_{\widetilde{F_1} \circ \widetilde{F_2}}(1,1) = \max\{\min\{(0.7, 0.7), (0.8, 0), (0.9, 0.9)\}\} = \max\{0.7, 0, 0.9\} = 0.9$

$\mu_{\widetilde{F_1} \circ \widetilde{F_2}}(1,2) = \max\{\min\{(0.7, 0), (0.8, 0.8), (0.9, 0)\}\} = \max\{0, 0.8, 0\} = 0.8$

$\mu_{\widetilde{F_1} \circ \widetilde{F_2}}(1,3) = \max\{\min\{(0.7, 0.7), (0.8, 0), (0.9, 0.9)\}\} = \max\{0.7, 0, 0.9\} = 0.9$

$\mu_{\widetilde{F_1} \circ \widetilde{F_2}}(2,1) = \max\{\min\{(0.4, 0.7), (0.6, 0), (0.8, 0.9)\}\} = \max\{0.4, 0, 0.8 = 0.8$

$\mu_{\widetilde{F_1} \circ \widetilde{F_2}}(2,2) = \max\{\min\{(0.4, 0), (0.6, 0.8), (0.8, 0)\}\} = \max\{0.4, 0.6, 0\} = 0.6$

$\mu_{\widetilde{F_1} \circ \widetilde{F_2}}(2,3) = \max\{\min\{(0.4, 0.7), (0.6, 0), (0.8, 0.9)\}\} = \max\{0.4, 0, 0.8\} = 0.8$

$\mu_{\widetilde{F_1} \circ \widetilde{F_2}}(3,1) = \max\{\min\{(0.3, 0.7), (0.5, 0), (0.7, 0.9)\}\} = \max\{0.3, 0, 0.7\} = 0.7$

$\mu_{\widetilde{F_1} \circ \widetilde{F_2}}(3,2) = \max\{\min\{(0.3, 0), (0.5, 0.8), (0.7, 0)\}\} = \max\{0, 0.5, 0\} = 0.5$

$\mu_{\widetilde{F_1} \circ \widetilde{F_2}}(3,3) = \max\{\min\{(0.3, 0.7), (0.5, 0), (0.7, 0.9)\}\} = \max\{0.3, 0, 0.7\} = 0.7$

Sehingga $\widetilde{F_1} \circ \widetilde{F_2} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.8 & 0.9 \\ 0.4 & 0.6 & 0.8 \\ 0.3 & 0.5 & 0.7 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0.7 & 0 & 0.7 \\ 0 & 0.8 & 0 \\ 0.9 & 0 & 0.9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.8 & 0.9 \\ 0.8 & 0.6 & 0.8 \\ 0.7 & 0.5 & 0.7 \end{bmatrix}$

Untuk $\widetilde{F_1} \circ \widetilde{F_3} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.8 & 0.9 \\ 0.4 & 0.6 & 0.8 \\ 0.3 & 0.5 & 0.7 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 & 0.7 & 0 \\ 0.8 & 0 & 0.8 \\ 0 & 0.9 & 0 \end{bmatrix}$

$\mu_{\widetilde{F_1}\circ\widetilde{F_3}}(1,1) = \max\{\min\{(0.7, 0), (0.8, 0.8), (0.9, 0)\}\} = \max\{0, 0.8, 0\} = 0.8$

$\mu_{\widetilde{F_1}\circ\widetilde{F_3}}(1,2) = \max\{\min\{(0.7, 0.7), (0.8, 0), (0.9, 0.9)\}\} = \max\{0.7, 0.8, 0.9\}$

$= 0.9$

$\mu_{\widetilde{F_1}\circ\widetilde{F_3}}(1,3) = \max\{\min\{(0.7, 0), (0.8, 0.8), (0.9, 0)\}\} = \max\{0, 0.8, 0\} = 0.8$

$\mu_{\widetilde{F_1}\circ\widetilde{F_3}}(2,1) = \max\{\min\{(0.4, 0), (0.6, 0.8), (0.8, 0)\}\} = \max\{0, 0.6, 0\} = 0.6$

$\mu_{\widetilde{F_1}\circ\widetilde{F_3}}(2,2) = \max\{\min\{(0.4, 0.7), (0.6, 0), (0.8, 0.9)\}\} = \max\{0.4, 0, 0.8\} = 0.8$

$\mu_{\widetilde{F_1}\circ\widetilde{F_3}}(2,3) = \max\{\min\{(0.4, 0), (0.6, 0.8), (0.8, 0)\}\} = \max\{0, 0.6, 0\} = 0.6$

$\mu_{\widetilde{F_1}\circ\widetilde{F_3}}(3,1) = \max\{\min\{(0.3, 0), (0.5, 0.8), (0.7, 0)\}\} = \max\{0, 0.5, 0\} = 0.5$

$\mu_{\widetilde{F_1}\circ\widetilde{F_3}}(3,2) = \max\{\min\{(0.3, 0.7), (0.5, 0), (0.7, 0.8)\}\} = \max\{0.3, 0, 0.7\} = 0.7$

$\mu_{\widetilde{F_1}\circ\widetilde{F_3}}(3,3) = \max\{\min\{(0.3, 0), (0.5, 0.8), (0.7, 0)\}\} = \max\{0, 0.5, 0\} = 0.5$

Sehingga

$$\widetilde{F_1} \circ \widetilde{F_3} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.8 & 0.9 \\ 0.4 & 0.6 & 0.8 \\ 0.3 & 0.5 & 0.7 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 & 0.7 & 0 \\ 0.8 & 0 & 0.8 \\ 0 & 0.9 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.9 & 0.8 \\ 0.6 & 0.8 & 0.6 \\ 0.5 & 0.7 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$(\widetilde{F_1} \circ \widetilde{F_2}) \vee (\widetilde{F_1} \circ \widetilde{F_3}) = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.8 & 0.9 \\ 0.8 & 0.6 & 0.8 \\ 0.7 & 0.5 & 0.7 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 0.8 & 0.9 & 0.8 \\ 0.6 & 0.8 & 0.6 \\ 0.5 & 0.7 & 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.9 & 0.9 \\ 0.8 & 0.8 & 0.8 \\ 0.7 & 0.7 & 0.7 \end{bmatrix}$$

Jadi $\widetilde{F_1} \circ (\widetilde{F_2} \vee \widetilde{F_3}) = (\widetilde{F_1} \circ \widetilde{F_2}) \vee (\widetilde{F_1} \circ \widetilde{F_3})$

Berdasarkan teorema 2 bagian (2)

$$\widetilde{F_1} \circ \left(\widetilde{F_2} \wedge \widetilde{F_3} \right) \leq (\widetilde{F_1} \circ \widetilde{F_2}) \wedge \left(\widetilde{F_1} \circ \widetilde{F_3} \right)$$

$\widetilde{F_1} \circ \left(\widetilde{F_2} \wedge \widetilde{F_3} \right)$, maka

$$\widetilde{F_2} \wedge \widetilde{F_3} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0 & 0.7 \\ 0 & 0.8 & 0 \\ 0.9 & 0 & 0.9 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 & 0.7 & 0 \\ 0.8 & 0 & 0.8 \\ 0 & 0.9 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{F_1} \circ \left(\widetilde{F_2} \wedge \widetilde{F_3} \right) = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.8 & 0.9 \\ 0.4 & 0.6 & 0.8 \\ 0.3 & 0.5 & 0.7 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dan

$(\widetilde{F_1} \circ \widetilde{F_2}) \wedge \left(\widetilde{F_1} \circ \widetilde{F_3} \right)$, maka

$$\widetilde{F_1} \circ \widetilde{F_2} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.8 & 0.9 \\ 0.4 & 0.6 & 0.8 \\ 0.3 & 0.5 & 0.7 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0.7 & 0 & 0.7 \\ 0 & 0.8 & 0 \\ 0.9 & 0 & 0.9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.8 & 0.9 \\ 0.8 & 0.6 & 0.8 \\ 0.7 & 0.5 & 0.7 \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{F_1} \circ \widetilde{F_3} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.8 & 0.9 \\ 0.4 & 0.6 & 0.8 \\ 0.3 & 0.5 & 0.7 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 & 0.7 & 0 \\ 0.8 & 0 & 0.8 \\ 0 & 0.9 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.9 & 0.8 \\ 0.6 & 0.8 & 0.6 \\ 0.5 & 0.7 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$(\widetilde{F_1} \circ \widetilde{F_2}) \wedge \left(\widetilde{F_1} \circ \widetilde{F_3} \right) = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.8 & 0.9 \\ 0.8 & 0.6 & 0.8 \\ 0.7 & 0.5 & 0.7 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0.8 & 0.9 & 0.8 \\ 0.6 & 0.8 & 0.6 \\ 0.5 & 0.7 & 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.8 & 0.8 \\ 0.6 & 0.6 & 0.6 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Jadi, $\widetilde{F_1} \circ \left(\widetilde{F_2} \wedge \widetilde{F_3} \right) \neq (\widetilde{F_1} \circ \widetilde{F_2}) \wedge \left(\widetilde{F_1} \circ \widetilde{F_3} \right)$ tetapi

$$\widetilde{F_1} \circ \left(\widetilde{F_2} \wedge \widetilde{F_3} \right) \leq (\widetilde{F_1} \circ \widetilde{F_2}) \wedge \left(\widetilde{F_1} \circ \widetilde{F_3} \right)$$

Untuk teorema 3, 4, 5, 6, 7, dan 8 caranya sama. Penggantian operasi perkalian dan penjumlahan sama seperti teorema sebelumnya.

2.7 Inspirasi Al-Qur’an tentang Digraf dan Himpunan Fuzzy

Al-Qur’an merupakan kalam Allah yang memberikan berbagai landasan-landasan sebagai dasar sumber adanya ilmu pengetahuan, termasuk matematika. Al-Qur’an sebenarnya berbicara tentang bilangan, aljabar, geometri, dan pengukuran serta statistika. Dalam Al-Qur’an disebutkan sebanyak 38 bilangan berbeda yang terdiri dari 30 bilangan asli dan 8 bilangan pecahan. Al-Qur’an berbicara aljabar, yakni operasi bilangan. Al-Qur’an berbicara mengenai geometri dan pengukuran yakni mengenai panjang dan luas. Al-Qur’an juga berbicara mengenai statistika, yakni mengenai pengumpulan data, pengolahan data, dan penarikan kesimpulan (Abdussakir. 2007: 23 - 24). Digraf dan himpunan fuzzy juga ada dalam pembicaraan Al-Qur’an.

Definisi digraf adalah suatu pasangan himpunan dari himpunan yang tidak kosong yang memuat elemen-elemen yang disebut titik, dan suatu daftar pasangan tidak terurut elemen itu yang disebut sisi berarah. Sehingga dapat kita analogikan dengan Islam, yaitu elemen (titik) diartikan sebagai manusia, sedangkan sisi/garis yang menghubungkan elemen-elemen tersebut menujukkan bagaimana hubungan manusia dengan manusia yang satu dengan yang lain. Sebagaimana disebutkan dalam Surat Al-Hujurat dibawah ini:

إِنَّمَا ٱلْمُؤْمِنُونَ إِخْوَةٌ فَأَصْلِحُوا۟ بَيْنَ أَخَوَيْكُمْ ۚ وَٱتَّقُوا۟ ٱللَّهَ لَعَلَّكُمْ تُرْحَمُونَ ١٠

“Orang-orang beriman itu Sesungguhnya bersaudara. sebab itu damaikanlah (perbaikilah hubungan) antara kedua saudaramu itu dan takutlah terhadap Allah, supaya kamu mendapat rahmat”.

Dari penjelasan ayat di atas maka dapat kita ketahui bahwa kita harus selalu menjaga hubungan baik antar sesama mukmin. Persaudaraan mukmin yang satu dengan yang lain merupakan ketetapan syariat. Persatuan, kesatuan dan hubungan harmonis antar anggota masyarakat kecil maupun besar akan melahirkan limpahan rahmat bagi mereka semua. Sebaliknya, perpecahan dan keretakan hubungan mengundang lahirnya bencana buat mereka. Namun dalam kehidupan nyata, kita tidak hanya akan berhubungan dengan sesama mukmin, tetapi juga dengan orang-orang kafir (non muslim). Yang dimaksud Non muslim yaitu orang yang tidak menganut agama Islam. Sehingga kita harus tahu bagaimana perlakuan kita terhadap orang non muslim semestinya. Sebagaimana dijelaskan dalam ayat di bawah ini

لَّا يَتَّخِذِ ٱلْمُؤْمِنُونَ ٱلْكَٰفِرِينَ أَوْلِيَآءَ مِن دُونِ ٱلْمُؤْمِنِينَ ۖ وَمَن يَفْعَلْ ذَٰلِكَ فَلَيْسَ مِنَ ٱللَّهِ فِى شَىْءٍ إِلَّآ أَن تَتَّقُوا۟ مِنْهُمْ تُقَىٰةً ۗ وَيُحَذِّرُكُمُ ٱللَّهُ نَفْسَهُۥ ۗ وَإِلَى ٱللَّهِ ٱلْمَصِيرُ ﴿٢٨﴾

28. janganlah orang-orang mukmin mengambil orang-orang kafir menjadi wali[192] dengan meninggalkan orang-orang mukmin. barang siapa berbuat demikian, niscaya lepaslah ia dari pertolongan Allah, kecuali karena (siasat) memelihara diri dari sesuatu yang ditakuti dari mereka. dan Allah memperingatkan kamu terhadap diri (siksa)-Nya. dan hanya kepada Allah kembali (mu).

Ayat di atas menjelaskan cara komunikasi dan hubungan Muslimin antara satu dengan lainnya dan juga antara mereka dengan kaum kafir. Hubungan seorang Mukmin dengan lain-lainnya haruslah berdasarkan iman. Oleh sebab itu, semua Mukminin haruslah berusaha semaksimal mungkin untuk menguatkan antara mereka agar orang-orang kafir tidak punya jalan untuk menguasai

Muslimin. Namun di lain sisi juga harus menjaga hubungan baik, tenggang rasa, saling menghormati terhadap golongan non muslim selagi mereka tidak merugikan kaum muslim atau menyakiti kaum muslimin.

Salah satu cabang ilmu matematika lainnya yang dibahas dalam bab ini adalah himpunan fuzzy, himpunan fuzzy disebut juga himpunan kabur atau samar. Kekaburan dan kesamaran ini ada karena banyaknya permasalahan yang tidak pasti, jadi belum tentu sesuatu itu masuk pada anggota dan belum tentu tidak masuk anggota, bisa saja hanya masuk beberapa saja sehingga hal ini berhubungan dengan derajat keanggotaan. Dalam surat Al-Baqarah ayat 3 sampai 5 menjelaskan tentang ciri-ciri orang yang bertakwa.

ٱلَّذِينَ يُؤْمِنُونَ بِٱلْغَيْبِ وَيُقِيمُونَ ٱلصَّلَوٰةَ وَمِمَّا رَزَقْنَٰهُمْ يُنفِقُونَ ﴿٣﴾ وَٱلَّذِينَ يُؤْمِنُونَ بِمَآ أُنزِلَ
إِلَيْكَ وَمَآ أُنزِلَ مِن قَبْلِكَ وَبِٱلْءَاخِرَةِ هُمْ يُوقِنُونَ ﴿٤﴾ أُو۟لَٰٓئِكَ عَلَىٰ هُدًى مِّن رَّبِّهِمْ ۖ وَأُو۟لَٰٓئِكَ هُمُ
ٱلْمُفْلِحُونَ ﴿٥﴾

3. (yaitu) mereka yang beriman[13] kepada yang ghaib[14], yang mendirikan shalat[15], dan menafkahkan sebahagian rezki[16] yang Kami anugerahkan kepada mereka.
4. dan mereka yang beriman kepada kitab (Al Quran) yang telah diturunkan kepadamu dan Kitab-Kitab yang telah diturunkan sebelummu[17], serta mereka yakin akan adanya (kehidupan) akhirat[18].
5. mereka Itulah yang tetap mendapat petunjuk dari Tuhan mereka, dan merekalah orang-orang yang beruntung[19].

Ayat diatas menjelaskan bahwa terdapat beberapa ciri orang-orang bertakwa, jika memenuhi syarat tersebut maka seorang muslim dikatakan hubungan antara satu dengan lainnya dan mewujudkan persatuan dan solidaritas bertakwa jika tidak maka ia dikatakan kafir. Namun pada kenyataannya banyak muslim yang tidak melakukan syarat-syarat tersebut sesuai syari'at islam. Misalnya saja sholat, banyak dari golongan muslim yang lalai akan sholatnya, atau sholat ketika ada orang yang melihatnya. Hal ini menunjukkan bahwa seorang muslim belum bisa dikatakan beriman sepenuhnya, namun terdapat suatu derajat keimanan sesuai dengan sikap dan perilakunya dalam menjalankan perintah Allah dan menjauhi segala laranganNya. Sehingga jika dihubungkan dengan derajat keanggotaan himpunan fuzzy, golongan ini tidak anggota 0 (kafir) atau 1 (bertakwa) tetapi diantara 0 dan 1 yang artinya perlu kajian yang mendalam seberapa besar derajat keimanan seorang hamba terhadap penciptanya (Allah). Jika tingkat keimanannya mendekati ketakwaan maka derajat keanggotaannya semakin mendekati satu, namun jika tingkat keimanannya mendekati kafir maka derajat keanggotaannya semakin mendekati nol.

BAB III

PEMBAHASAN

Pada bab ini penulis akan membahas tentang komposisi digraf fuzzy, dimana akan dijelaskan definisi dari komposisi digraf fuzzy dan membuktikan beberapa teorema disertai contohnya.

3.1 Komposisi Digraf Fuzzy

Misal S adalah himpunan *finit* dan $\widetilde{D_1} = (\tilde{A}, \tilde{E}), \widetilde{D_2} = (\tilde{B}, \tilde{F})$ adalah dua himpunan digraf fuzzy di S. Kita akan mendefinisikan empat tipe komposisi dari $\widetilde{D_1}$ dan $\widetilde{D_2}$ sebagai berikut:

(1) Komposisi tipe I:

$$\widetilde{D_1} \circ \widetilde{D_2} = (\tilde{A}, \tilde{E}) \circ (\tilde{B}, \tilde{F}) = (\tilde{A} \vee \tilde{B}, \tilde{E} \circ \tilde{F})$$

(2) Komposisi tipe II:

$$\widetilde{D_1} \odot \widetilde{D_2} = (\tilde{A}, \tilde{E}) \odot (\tilde{B}, \tilde{F}) = (\tilde{A} \vee \tilde{B}, \tilde{E} \odot \tilde{F})$$

(3) Komposisi tipe III:

$$\widetilde{D_1} * \widetilde{D_2} = (\tilde{A}, \tilde{E}) * (\tilde{B}, \tilde{F}) = (\tilde{A} \vee \tilde{B}, \tilde{E} * \tilde{F})$$

(4) Komposisi tipe IV:

$$\widetilde{D_1} \circledast \widetilde{D_2} = (\tilde{A}, \tilde{E}) \circledast (\tilde{B}, \tilde{F}) = (\tilde{A} \vee \tilde{B}, \tilde{E} \circledast \tilde{F})$$

(Kao, Yah-Ming dan Wu, Sun Yen: 613).

Jika pada bab II disebutkan komposisi relasi fuzzy, namun pada bab III, relasi fuzzy akan dinyatakan dalam bentuk digraf fuzzy sehingga selanjutnya pada bab ini, komposisi relasi fuzzy dinyatakan dalam istilah komposisi digraf fuzzy.

Untuk memperjelas definisi di atas, maka penulis memberikan contoh sebagai berikut:

Misalkan S adalah himpunan *finit* dengan $S = \{a, b, c\}$, dan himpunan fuzzy $\widetilde{D_1} = (\tilde{A}, \tilde{E})$, $\widetilde{D_2} = (\tilde{B}, \tilde{F})$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$\tilde{A} = \{(a, 0.4), (b, 0.2), (c, 0.5)\}$

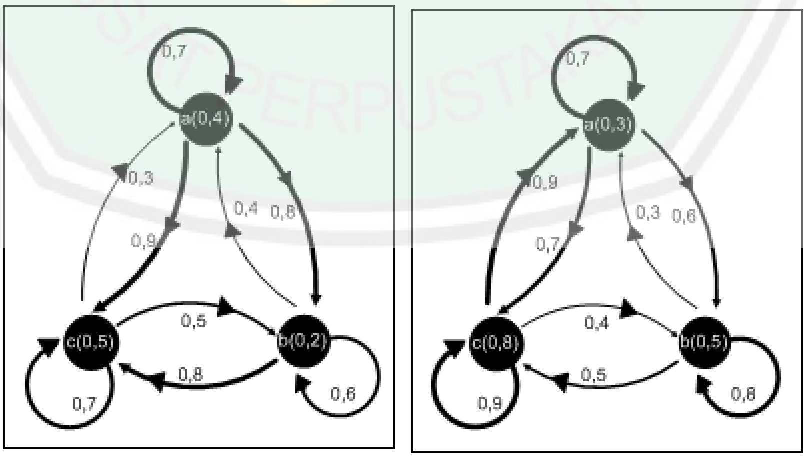
$\tilde{E} = \{((a, a), 0.7), ((a, b), 0.8), ((a, c), 0.9), ((b, a), 0.4), ((b, b), 0.6), ((b, c), 0.8),$
$((c, a), 0.3), ((c, b). 0.5), ((c, c), 0.7)\}$

Jika dalam bentuk matriks, $\tilde{E} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.8 & 0.9 \\ 0.4 & 0.6 & 0.8 \\ 0.3 & 0.5 & 0.7 \end{bmatrix}$

$\tilde{B} = \{(a, 0.3), (b, 0.5), (c, 0.8)\}$

$\tilde{F} = \{((a, a), 0.7), ((a, b), 0.6), ((a, c), 0.7), ((b, a), 0.3), ((b, b), 0.8),$
$((b, c), 0.5), ((c, a), 0.9), ((c, b), 0.4), ((c, c), 0.9)\}$

Jika dalam bentuk matriks, $\tilde{F} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.6 & 0.7 \\ 0.3 & 0.8 & 0.5 \\ 0.9 & 0.4 & 0.9 \end{bmatrix}$



a. $\widetilde{D_1} = (\tilde{A}, \tilde{E})$ b. $\widetilde{D_2} = (\tilde{B}, \tilde{F})$

Gambar 3.1 *Digraf dari* $\widetilde{D_1}$ *dan* $\widetilde{D_2}$

Dari soal tersebut, akan dicari hasilnya dengan menggunakan empat tipe komposisi seperti pada definisi diatas.

1) Dengan Komposisi Tipe I

$$(\widetilde{D_1} \circ \widetilde{D_2}) = (\tilde{A}, \tilde{E}) \circ (\tilde{B}, \tilde{F}) = (\tilde{A} \vee \tilde{B}, \tilde{E} \circ \tilde{F})$$

$$\tilde{A} \vee \tilde{B} = \{\{(a, 0.4), (b, 0.2), (c, 0.5)\} \vee \{(a, 0.3), (b, 0.5), (c, 0.8)\}\}$$

$$= \max\{\{(a, 0.4), (b, 0.2), (c, 0.5)\}, \{(a, 0.3), (b, 0.5), (c, 0.8)\}\}$$

$$= \{(a, 0.4), (b, 0.5), (c, 0.8)\}$$

$$\tilde{E} \circ \tilde{F} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.8 & 0.9 \\ 0.4 & 0.6 & 0.8 \\ 0.3 & 0.5 & 0.7 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0.7 & 0.6 & 0.7 \\ 0.3 & 0.8 & 0.5 \\ 0.9 & 0.4 & 0.9 \end{bmatrix}$$

$$\mu_{\tilde{E}\circ\tilde{F}}(a, a) = \max\{\min\{(0.7, 0.7), (0.8, 0.3), (0.9, 0.9)\}\} = \max\{0.7, 0.3, 0.9\}$$

$$= 0.9$$

$$\mu_{\tilde{E}\circ\tilde{F}}(a, b) = \max\{\min\{(0.7, 0.6), (0.8, 0.8), (0.9, 0.4)\}\} = \max\{0.6, 0.8, 0.4\}$$

$$= 0.8$$

$$\mu_{\tilde{E}\circ\tilde{F}}(a, c) = \max\{\min\{(0.7, 0.7), (0.8, 0.5), (0.9, 0.9)\}\} = \max\{0.7, 0.5, 0.9\}$$

$$= 0.9$$

$$\mu_{\tilde{E}\circ\tilde{I}}(b, c) = \max\{\min\{(0.4, 0.7), (0.6, 0.5), (0.8, 0.9)\}\} = \max\{0.4, 0.5, 0.8\}$$

$$= 0.8$$

$$\mu_{\tilde{E}\circ\tilde{I}}(b, a) = \max\{\min\{(0.4, 0.7), (0.6, 0.3), (0.8, 0.9)\}\} = \max\{0.4, 0.3, 0.8\}$$

$$= 0.8$$

$$\mu_{\tilde{E}\circ\tilde{I}}(b, b) = \max\{\min\{(0.4, 0.6), (0.6, 0.8), (0.8, 0.4)\}\} = \max\{0.4, 0.6, 0.4\}$$

$$= 0.6$$

$$\mu_{\tilde{E}\circ\tilde{I}}(c, a) = \max\{\min\{(0.3, 0.7), (0.5, 0.3), (0.7, 0.9)\}\} = \max\{0.3, 0.3, 0.7\}$$

$$= 0.7$$

$\mu_{\tilde{E} \circ \tilde{I}}(c, b) = \max\{\min\{(0.3, 0.6), (0.5, 0.8), (0.7, 0.4)\}\} = \max\{0.3, 0.5, 0.4\}$

$= 0.5$

$\mu_{\tilde{E} \circ \tilde{I}}(c, c) = \max\{\min\{(0.3, 0.7), (0.5, 0.5), (0.7, 0.9)\}\} = \max\{0.3, 0.5, 0.7\}$

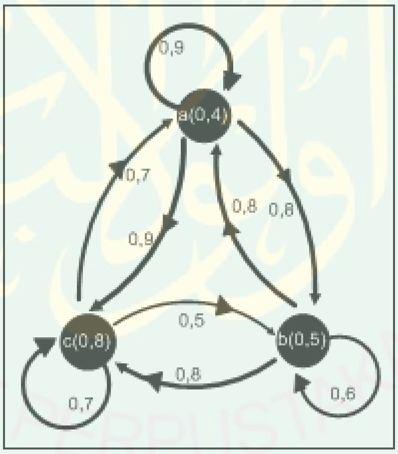
$= 0.7$

$$\tilde{E} \circ \tilde{F} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.8 & 0.9 \\ 0.4 & 0.6 & 0.8 \\ 0.3 & 0.5 & 0.7 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0.7 & 0.6 & 0.7 \\ 0.3 & 0.8 & 0.5 \\ 0.9 & 0.4 & 0.9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.8 & 0.9 \\ 0.8 & 0.6 & 0.8 \\ 0.7 & 0.5 & 0.7 \end{bmatrix}$$

Sehingga

$(\widetilde{D_1} \circ \widetilde{D_2}) = \Big\{\{(a, 0.4), (b, 0.5), (c, 0.8)\}, \{\big((a, a), 0.9\big), \big((a, b), 0.8\big), \big((a, c), 0.9\big),$

$\big((b, a), 0.8\big), \big((b, b), 0.6\big), \big((b, c), 0.8\big), \big((c, a), 0.7\big), \big((c, b), 0.5\big), \big((c, c), 0.7\big)\}\Big\}$



Gambar 3.2 Komposisi tipe I $(\widetilde{D_1} \circ \widetilde{D_2})$

2) Dengan Komposisi tipe II:

$$\widetilde{D_1} \odot \widetilde{D_2} = (\tilde{A}, \tilde{E}) \odot (\tilde{B}, \tilde{F}) = (\tilde{A} \vee \tilde{B}, \tilde{E} \odot \tilde{F})$$

$$\tilde{E} \odot \tilde{F} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.8 & 0.9 \\ 0.4 & 0.6 & 0.8 \\ 0.3 & 0.5 & 0.7 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0.7 & 0.6 & 0.7 \\ 0.3 & 0.8 & 0.5 \\ 0.9 & 0.4 & 0.9 \end{bmatrix}$$

$$\mu_{\tilde{E}\odot\tilde{F}}(a,a) = \min\{\max\{(0.7, 0.7), (0.8, 0.3), (0.9, 0.9)\}\} = \min\{0.7, 0.8, 0.9\}$$
$$= 0.7$$

$$\mu_{\tilde{E}\odot\tilde{F}}(a,b) = \min\{\max\{(0.7, 0.6), (0.8, 0.8), (0.9, 0.4)\}\} = \min\{0.7, 0.8, 0.9\}$$
$$= 0.7$$

$$\mu_{\tilde{E}\odot\tilde{F}}(a,c) = \min\{\max\{(0.7, 0.7), (0.8, 0.5), (0.9, 0.9)\}\} = \min\{0.7, 0.8, 0.9\}$$
$$= 0.7$$

$$\mu_{\tilde{E}\odot\tilde{F}}(b,a) = \min\{\max\{(0.4, 0.7), (0.6, 0.3), (0.8, 0.9)\}\} = \min\{0.7, 0.6, 0.9\}$$
$$= 0.6$$

$$\mu_{\tilde{E}\odot\tilde{F}}(b,b) = \min\{\max\{(0.4, 0.6), (0.6, 0.8), (0.8, 0.4)\}\} = \min\{0.6, 0.8, 0.8\}$$
$$= 0.6$$

$$\mu_{\tilde{E}\odot\tilde{F}}(b,c) = \min\{\max\{(0.4, 0.7), (0.6, 0.5), (0.8, 0.9)\}\} = \min\{0.7, 0.6, 0.9\}$$
$$= 0.6$$

$$\mu_{\tilde{E}\odot\tilde{F}}(c,a) = \min\{\max\{(0.3, 0.7), (0.5, 0.3), (0.7, 0.9)\}\} = \min\{0.7, 0.5, 0.9\}$$
$$= 0.5$$

$$\mu_{\tilde{E}\odot\tilde{F}}(c,b) = \min\{\max\{(0.3, 0.6), (0.5, 0.8), (0.7, 0.4)\}\} = \min\{0.6, 0.8, 0.7\}$$
$$= 0.6$$

$$\mu_{\tilde{E}\odot\tilde{F}}(c,c) = \min\{\max\{(0.3, 0.7), (0.5, 0.5), (0.7, 0.9)\}\} = \min\{0.7, 0.5, 0.9\}$$
$$= 0.5$$

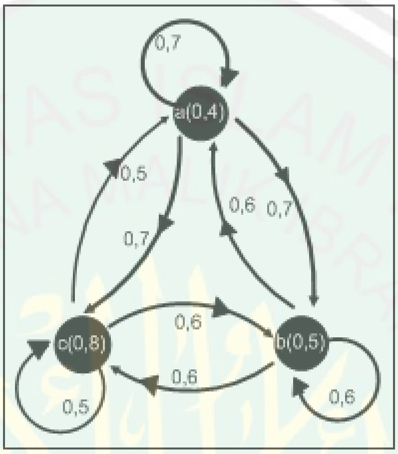
$$\tilde{E}\odot\tilde{F} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.8 & 0.9 \\ 0.4 & 0.6 & 0.8 \\ 0.3 & 0.5 & 0.7 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0.7 & 0.6 & 0.7 \\ 0.3 & 0.8 & 0.5 \\ 0.9 & 0.4 & 0.9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.7 & 0.7 \\ 0.6 & 0.6 & 0.6 \\ 0.5 & 0.6 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Sehingga

$(\widetilde{D_1} \odot \widetilde{D_2})$

$= \{\{(a, 0.4), (b, 0.5), (c, 0.8)\}, \{((a, a), 0.7), ((a, b), 0.7), ((a, c), 0.7),$

$((b, a), 0.6), ((b, b), 0.6), ((b, c), 0.6), ((c, a), 0.5), ((c, b), 0.6), ((c, c), 0.5)\}\}$



Gambar 3.3 Komposisi tipe II$(\widetilde{D_1} \odot \widetilde{D_2})$

3) Komposisi tipe III:

$$\widetilde{D_1} * \widetilde{D_2} = (\tilde{A}, \tilde{E}) * (\tilde{B}, \tilde{F}) = (\tilde{A} \vee \tilde{B}, \tilde{E} * \tilde{F})$$

$$\tilde{E} * \tilde{F} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.8 & 0.9 \\ 0.4 & 0.6 & 0.8 \\ 0.3 & 0.5 & 0.7 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0.7 & 0.6 & 0.7 \\ 0.3 & 0.8 & 0.5 \\ 0.9 & 0.4 & 0.9 \end{bmatrix}$$

$\mu_{\tilde{E}*\tilde{F}}(a, a) = \min\{\min\{(0.7, 0.7), (0.8, 0.3), (0.9, 0.9)\}\}$

$= \min\{0.7, 0.3, 0.9\} = 0.3$

$\mu_{\tilde{E}*\tilde{F}}(a, b) = \min\{\min\{(0.7, 0.6), (0.8, 0.8), (0.9, 0.4)\}\}$

$= \min\{0.6, 0.8, 0.4\} = 0.4$

$\mu_{\tilde{E}*\tilde{F}}(a, c) = \min\{\min\{(0.7, 0.7), (0.8, 0.5), (0.9, 0.9)\}\}$

$= \min\{0.7, 0.5, 0.9\} = 0.5$

$$\mu_{\tilde{E}*\tilde{F}}(b,a) = \min\{\min\{(0.4,0.7),(0.6,0.3),(0.8,0.9)\}\}$$

$$= \min\{0.4, 0.3, 0.8\} = 0.3$$

$$\mu_{\tilde{E}*\tilde{F}}(b,b) = \min\{\min\{(0.4,0.6),(0.6,0.8),(0.8,0.4)\}\}$$

$$= \min\{0.4, 0.6, 0.4\} = 0.4$$

$$\mu_{\tilde{E}*\tilde{F}}(b,c) = \min\{\min\{(0.4,0.7),(0.6,0.5),(0.8,0.9)\}\}$$

$$= \min\{0.4, 0.5, 0.8\} = 0.4$$

$$\mu_{\tilde{E}*\tilde{F}}(c,a) = \min\{\min\{(0.3,0.7),(0.5,0.3),(0.7,0.9)\}\}$$

$$= \min\{0.3, 0.3, 0.7\} = 0.3$$

$$\mu_{\tilde{E}*\tilde{F}}(c,b) = \min\{\min\{(0.3,0.6),(0.5,0.8),(0.7,0.4)\}\}$$

$$= \min\{0.3, 0.5, 0.4\} = 0.3$$

$$\mu_{\tilde{E}*\tilde{F}}(c,c) = \min\{\min\{(0.3,0.7),\ (0.5,0.5),(0.7,0.9)\}\}$$

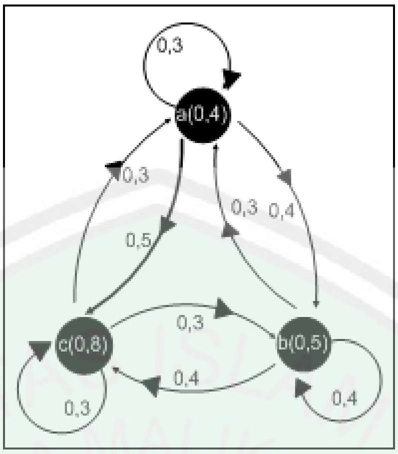
$$= \min\{0.3, 0.5, 0.7\} = 0.3$$

$$\tilde{E} * \tilde{F} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.8 & 0.9 \\ 0.4 & 0.6 & 0.8 \\ 0.3 & 0.5 & 0.7 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0.7 & 0.6 & 0.7 \\ 0.3 & 0.8 & 0.5 \\ 0.9 & 0.4 & 0.9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 & 04 & 0.5 \\ 0.3 & 0.4 & 0.4 \\ 0.3 & 0.3 & 0.3 \end{bmatrix}$$

Sehingga

$(\widetilde{D_1} * \widetilde{D_2}) = \{\{(a,0.4),(b,0.5),(c,0.8)\},\{\big((a,a),0.3\big),\big((a,b),0.4\big),\big((a,c),0.5\big),$

$\big((b,a),0.3\big),\big((b,b),0.4\big),\big((b,c),0.4\big),\big((c,a),0.3\big),\big((c,b),0.3\big),((c,c),0.3)\}\}$



Gambar 3.4 Komposisi tipe III $(\widetilde{D_1} * \widetilde{D_2})$

4) Komposisi tipe IV:

$$\widetilde{D_1} \circledast \widetilde{D_2} = (\tilde{A}, \tilde{E}) \circledast (\tilde{B}, \tilde{F}) = (\tilde{A} \vee \tilde{B}, \tilde{E} \circledast \tilde{F})$$

$$\tilde{E} \circledast \tilde{F} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.8 & 0.9 \\ 0.4 & 0.6 & 0.8 \\ 0.3 & 0.5 & 0.7 \end{bmatrix} \circledast \begin{bmatrix} 0.7 & 0.6 & 0.7 \\ 0.3 & 0.8 & 0.5 \\ 0.9 & 0.4 & 0.9 \end{bmatrix}$$

$$\mu_{\tilde{E} \circledast \tilde{F}}(a,a) = \max\{\max\{(0.7,0.7),(0.8,0.3),(0.9,0.9)\}\}$$

$$= \max\{0.7, 0.8, 0.9\} = 0.9$$

$$\mu_{\tilde{E} \circledast \tilde{F}}(a,b) = \max\{\max\{(0.7,0.6),(0.8,0.8),(0.9,0.4)\}\}$$

$$= \max\{0.7, 0.8, 0.9\} = 0.9$$

$$\mu_{\tilde{E} \circledast \tilde{F}}(a,c) = \max\{\max\{(0.7,0.7),\ (0.8,0.5),(0.9,0.9)\}\}$$

$$= \max\{0.7, 0.8, 0.9\} = 0.9$$

$$\mu_{\tilde{E} \circledast \tilde{F}}(b,a) = \max\{\max\{(0.4,0.7),(0.6,0.3),(0.8,0.9)\}\}$$

$$= \max\{0.7, 0.6, 0.9\} = 0.9$$

$$\mu_{\tilde{E} \circledast \tilde{F}}(b,b) = \max\{\max\{(0.4,0.6),(0.6,0.8),(0.8,0.4)\}\}$$

$$= \max\{0.6, 0.8, 0.8\} = 0.8$$

$\mu_{\tilde{E} \circledast \tilde{F}}(b,c) = \max\{\max\{(0.4,0.7),(0.6,0.5),(0.8,0.9)\}\}$

$= \max\{0.7, 0.6, 0.9\} = 0.9$

$\mu_{\tilde{E} \circledast \tilde{F}}(c,a) = \max\{\max\{(0.3,0.7),(0.5,0.3),(0.7,0.9)\}\}$

$= \max\{0.7, 0.5, 0.9\} = 0.9$

$\mu_{\tilde{E} \circledast \tilde{F}}(c,b) = \max\{\max\{(0.3,0.6),(0.5,0.8),(0.7,0.4)\}\}$

$= \max\{0.6, 0.8, 0.7\} = 0.8$

$\mu_{\tilde{E} \circledast \tilde{F}}(c,c) = \max\{\max\{(0.3,0.7),(0.5,0.5),(0.7,0.9)\}\}$

$= \max\{0.7, 0.5, 0.9\} = 0.9$

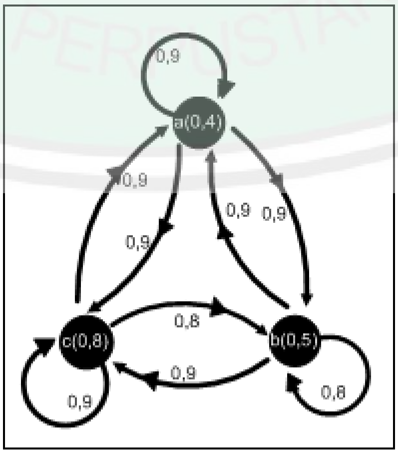
$$\tilde{E} \circledast \tilde{F} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.8 & 0.9 \\ 0.4 & 0.6 & 0.8 \\ 0.3 & 0.5 & 0.7 \end{bmatrix} \circledast \begin{bmatrix} 0.7 & 0.6 & 0.7 \\ 0.3 & 0.8 & 0.5 \\ 0.9 & 0.4 & 0.9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.9 & 0.9 \\ 0.9 & 0.8 & 0.9 \\ 0.9 & 0.8 & 0.9 \end{bmatrix}$$

Sehingga

$\widetilde{D_1} \circledast \widetilde{D_2})$

$= \Big\{\{(a,0.4),(b,0.5),(c,0.8)\},\{\big((a,a),0.9\big),\big((a,b),0.9\big),\big((a,c),0.9\big),$

$\big((b,a),0.9\big),\big((b,b),0.8\big),\big((b,c),0.9\big),\big((c,a),0.9\big),\big((c,b),0.8\big),\big((c,c),0.9\big)\}\Big\}$



Gambar 3.5 Komposisi tipe IV($\widetilde{D_1} \circledast \widetilde{D_2}$)

3.2 Sifat Asosiatif dan Distributif pada Komposisi Digraf Fuzzy

Sekarang kita akan menunjukkan bahwa empat tipe komposisi relasi digraf fuzzy bersifat asosiatif dan distributif.

3.2.1 Komposisi Digraf Fuzzy bersifat Asosiatif

Teorema 3.1:

Misal $\widetilde{D_1}, \widetilde{D_2}, \widetilde{D_3}$ adalah digraf fuzzy di S. maka

(1) $\widetilde{D_1} \circ (\widetilde{D_2} \circ \widetilde{D_3}) = (\widetilde{D_1} \circ \widetilde{D_2}) \circ \widetilde{D_3}$

(2) $\widetilde{D_1} \odot (\widetilde{D_2} \odot \widetilde{D_3}) = (\widetilde{D_1} \odot \widetilde{D_2}) \odot \widetilde{D_3}$

(3) $\widetilde{D_1} * (\widetilde{D_2} * \widetilde{D_3}) = (\widetilde{D_1} * \widetilde{D_2}) * \widetilde{D_3}$

(4) $\widetilde{D_1} \circledast (\widetilde{D_2} \circledast \widetilde{D_3}) = (\widetilde{D_1} \circledast \widetilde{D_2}) \circledast \widetilde{D_3}$

(Kao, Yah Ming dan Wu, Sun Yen: 614).

Bukti Teorema 3.1:

Misalkan $\widetilde{D_1} = (\tilde{A}, \tilde{E}), \widetilde{D_2} = (\tilde{B}, \tilde{F})$ dan $\widetilde{D_3} = (\tilde{C}, \tilde{G})$ adalah digraf fuzzy di S. maka

(1) $\widetilde{D_1} \circ (\widetilde{D_2} \circ \widetilde{D_3}) = (\tilde{A}, \tilde{E}) \circ [(\tilde{B}, \tilde{F}) \circ (\tilde{C}, \tilde{G})]$

$$= (\tilde{A}, \tilde{E}) \circ (\tilde{B} \vee \tilde{C}, \tilde{F} \circ \tilde{G})$$

$$= \left(\tilde{A} \vee (\tilde{B} \vee \tilde{C}), \tilde{E} \circ (\tilde{F} \circ \tilde{G})\right)$$

$$= \left((\tilde{A} \vee \tilde{B}) \vee \tilde{C}, \tilde{E} \circ (\tilde{F} \circ \tilde{G})\right)$$

$$= (\tilde{A} \vee \tilde{B}, \tilde{E} \circ \tilde{F}) \circ (\tilde{C}, \tilde{G})$$

$$= [(\tilde{A}, \tilde{E}) \circ (\tilde{B}, \tilde{F})] \circ (\tilde{C}, \tilde{G})$$

$$= (\widetilde{D_1} \circ \widetilde{D_2}) \circ \widetilde{D_3}$$

Dari pembuktian di atas maka dapat diketahui bahwa

$\widetilde{D_1} \circ (\widetilde{D_2} \circ \widetilde{D_3}) = (\tilde{A},\tilde{E}) \circ [(\tilde{B},\tilde{F}) \circ (\tilde{C},\tilde{G})]$ sama dengan $[(\tilde{A},\tilde{E}) \circ (\tilde{B},\tilde{F})] \circ (\tilde{C},\tilde{G})$ karena bersifat asosiatif, sehingga $\widetilde{D_1} \circ (\widetilde{D_2} \circ \widetilde{D_3}) = (\widetilde{D_1} \circ \widetilde{D_2}) \circ \widetilde{D_3}$

(2) $\widetilde{D_1} \odot (\widetilde{D_2} \odot \widetilde{D_3}) = (\tilde{A},\tilde{E}) \odot [(\tilde{B},\tilde{F}) \odot (\tilde{C},\tilde{G})]$

$$= (\tilde{A},\tilde{E}) \odot (\tilde{B} \vee \tilde{C}, \tilde{F} \odot \tilde{G})$$

$$= \left(\tilde{A} \vee (\tilde{B} \vee \tilde{C}), \tilde{E} \odot (\tilde{F} \odot \tilde{G})\right)$$

$$= \left((\tilde{A} \vee \tilde{B}) \vee \tilde{C}, \tilde{E} \odot (\tilde{F} \odot \tilde{G})\right)$$

$$= (\tilde{A} \vee \tilde{B}, \tilde{E} \odot \tilde{F}) \odot (\tilde{C},\tilde{G})$$

$$= [(\tilde{A},\tilde{E}) \odot (\tilde{B},\tilde{F})] \odot (\tilde{C},\tilde{G})$$

$$= (\widetilde{D_1} \odot \widetilde{D_2}) \odot \widetilde{D_3}$$

Dari pembuktian di atas maka dapat diketahui bahwa

$\widetilde{D_1} \odot (\widetilde{D_2} \odot \widetilde{D_3})$ bersifat asosiatif, sehingga $\widetilde{D_1} \odot (\widetilde{D_2} \odot \widetilde{D_3}) = (\widetilde{D_1} \odot \widetilde{D_2}) \odot \widetilde{D_3}$

(3) $\widetilde{D_1} * (\widetilde{D_2} * \widetilde{D_3}) = (\tilde{A},\tilde{E}) * [(\tilde{B},\tilde{F}) * (\tilde{C},\tilde{G})]$

$$= (\tilde{A},\tilde{E}) * (\tilde{B} \vee \tilde{C}, \tilde{F} * \tilde{G})$$

$$= \left(\tilde{A} \vee (\tilde{B} \vee \tilde{C}), \tilde{E} * (\tilde{F} * \tilde{G})\right)$$

$$= \left((\tilde{A} \vee \tilde{B}) \vee \tilde{C}, \tilde{E} * (\tilde{F} * \tilde{G})\right)$$

$$= (\tilde{A} \vee \tilde{B}, \tilde{E} * \tilde{F}) * (\tilde{C},\tilde{G})$$

$$= [(\tilde{A},\tilde{E}) * (\tilde{B},\tilde{F})] * (\tilde{C},\tilde{G})$$

$$= (\widetilde{D_1} * \widetilde{D_2}) * \widetilde{D_3}$$

Dari pembuktian di atas maka dapat diketahui bahwa

$\widetilde{D_1} * (\widetilde{D_2} * \widetilde{D_3})$ bersifat asosiatif, sehingga $\widetilde{D_1} * (\widetilde{D_2} * \widetilde{D_3}) = (\widetilde{D_1} * \widetilde{D_2}) * \widetilde{D_3}$

(4) $\widetilde{D_1} \circledast (\widetilde{D_2} \circledast \widetilde{D_3}) = (\tilde{A}, \tilde{E}) \circledast [(\tilde{B}, \tilde{F}) \circledast (\tilde{C}, \tilde{G})]$

$= (\tilde{A}, \tilde{E}) \circledast (\tilde{B} \vee \tilde{C}, \tilde{F} \circledast \tilde{G})$

$= \left(\tilde{A} \vee (\tilde{B} \vee \tilde{C}), \tilde{E} \circledast (\tilde{F} \circledast \tilde{G})\right)$

$= \left((\tilde{A} \vee \tilde{B}) \vee \tilde{C}, \tilde{E} \circledast (\tilde{F} \circledast \tilde{G})\right)$

$= (\tilde{A} \vee \tilde{B}, \tilde{E} \circledast \tilde{F}) \circledast (\tilde{C}, \tilde{G})$

$= [(\tilde{A}, \tilde{E}) \circledast (\tilde{B}, \tilde{F})] \circledast (\tilde{C}, \tilde{G})$

$= (\widetilde{D_1} \circledast \widetilde{D_2}) \circledast \widetilde{D_3}$

(Kao, Yah-Ming dan Wu, Sun Yen: 614).

Dari pembuktian di atas maka dapat diketahui bahwa $\widetilde{D_1} \circledast (\widetilde{D_2} \circledast \widetilde{D_3})$ bersifat asosiatif, sehingga $\widetilde{D_1} \circledast (\widetilde{D_2} \circledast \widetilde{D_3}) = (\widetilde{D_1} \circledast \widetilde{D_2}) \circledast \widetilde{D_3}$

3.2.2 Komposisi Digraf Fuzzy bersifat Distributif

Sifat distributif pada himpunan fuzzy

(1) $\tilde{A} \wedge (\tilde{B} \vee \tilde{C}) = (\tilde{A} \wedge \tilde{B}) \vee (\tilde{A} \wedge \tilde{C})$

(2) $\tilde{A} \vee (\tilde{B} \wedge \tilde{C}) = (\tilde{A} \vee \tilde{B}) \wedge (\tilde{A} \vee \tilde{C})$

Sifat distributif tersebut sama seperti pada himpunan tegas.

Dari sifat distributif diatas dan teorema 3.1 maka diperoleh teorema berikut.

<u>Teorema 3.2.</u>

Misal $\widetilde{D_1}, \widetilde{D_2}, \widetilde{D_3}$ adalah digraf fuzzy di S. maka

(1) $\widetilde{D_1} \circ (\widetilde{D_2} \vee \widetilde{D_3}) = (\widetilde{D_1} \circ \widetilde{D_2}) \vee (\widetilde{D_1} \circ \widetilde{D_3})$

(2) $\widetilde{D_1} \circ (\widetilde{D_2} \wedge \widetilde{D_3}) \leq (\widetilde{D_1} \circ \widetilde{D_2}) \wedge (\widetilde{D_1} \circ \widetilde{D_3})$

(3) $\widetilde{D_1} \odot (\widetilde{D_2} \vee \widetilde{D_3}) \geq (\widetilde{D_1} \odot \widetilde{D_2}) \vee (\widetilde{D_1} \odot \widetilde{D_3})$

(4) $\widetilde{D_1} \odot (\widetilde{D_2} \wedge \widetilde{D_3}) = (\widetilde{D_1} \odot \widetilde{D_2}) \wedge (\widetilde{D_1} \odot \widetilde{D_3})$

(5) $\widetilde{D_1} * (\widetilde{D_2} \vee \widetilde{D_3}) \geq (\widetilde{D_1} * \widetilde{D_2}) \vee (\widetilde{D_1} * \widetilde{D_3})$

(6) $\widetilde{D_1} * (\widetilde{D_2} \wedge \widetilde{D_3}) = (\widetilde{D_1} * \widetilde{D_2}) \wedge (\widetilde{D_1} * \widetilde{D_3})$

(7) $\widetilde{D_1} \circledast (\widetilde{D_2} \vee \widetilde{D_3}) = (\widetilde{D_1} \circledast \widetilde{D_2}) \vee (\widetilde{D_1} \circledast \widetilde{D_3})$

(8) $\widetilde{D_1} \circledast (\widetilde{D_2} \wedge \widetilde{D_3}) \leq (\widetilde{D_1} \circledast \widetilde{D_2}) \wedge (\widetilde{D_1} \circledast \widetilde{D_3})$

(Kao, Yah-Ming dan Wu, Sun Yen: 615).

Teorema ini menunjukkan bahwa komposisi digraf fuzzy bersifat distributif.

Bukti teorema 3.2:

Misalkan $\widetilde{D_1} = (\tilde{A}, \tilde{E}), \widetilde{D_2} = (\tilde{B}, \tilde{F})$ dan $\widetilde{D_3} = (\tilde{C}, \tilde{G})$ adalah digraf fuzzy di S. maka

(1) $\widetilde{D_1} \circ (\widetilde{D_2} \vee \widetilde{D_3}) = (\tilde{A}, \tilde{E}) \circ [(\tilde{B}, \tilde{F}) \vee (\tilde{C}, \tilde{G})]$

$= (\tilde{A}, \tilde{E}) \circ (\tilde{B} \vee \tilde{C}, \tilde{F} \vee \tilde{G})$

$= \left(\tilde{A} \vee (\tilde{B} \vee \tilde{C}), \tilde{E} \circ (\tilde{F} \vee \tilde{G})\right)$

$= \left((\tilde{A} \vee \tilde{B}) \vee (\tilde{A} \vee \tilde{C}), (\tilde{E} \circ \tilde{F}) \vee (\tilde{E} \circ \tilde{G})\right)$

$= (\tilde{A} \vee \tilde{B}, \tilde{E} \circ \tilde{F}) \vee (\tilde{A} \vee \tilde{C}, \tilde{E} \circ \tilde{G})$

$= [(\tilde{A}, \tilde{E}) \circ (\tilde{B}, \tilde{F})] \vee [(\tilde{A}, \tilde{E}) \circ (\tilde{C}, \tilde{G})]$

$= (\widetilde{D_1} \circ \widetilde{D_2}) \vee (\widetilde{D_1} \circ \widetilde{D_3})$

Sehingga $\widetilde{D_1} \circ (\widetilde{D_2} \vee \widetilde{D_3}) = (\widetilde{D_1} \circ \widetilde{D_2}) \vee (\widetilde{D_1} \circ \widetilde{D_3})$, ini menunjukkan bahwa komposisi tipe I (°) distributif terhadap operasi "∨".

(2) $\widetilde{D_1} \circ (\widetilde{D_2} \wedge \widetilde{D_3}) = (\tilde{A}, \tilde{E}) \circ [(\tilde{B}, \tilde{F}) \wedge (\tilde{C}, \tilde{G})]$

$$= (\tilde{A}, \tilde{E}) \circ (\tilde{B} \wedge \tilde{C}, \tilde{F} \wedge \tilde{G})$$

$$= \left(\tilde{A} \vee (\tilde{B} \wedge \tilde{C}), \tilde{E} \circ (\tilde{F} \wedge \tilde{G})\right)$$

$$\leq \left((\tilde{A} \vee \tilde{B}) \wedge (\tilde{A} \vee \tilde{C}), (\tilde{E} \circ \tilde{F}) \wedge (\tilde{E} \circ \tilde{G})\right)$$

$$= (\tilde{A} \vee \tilde{B}, \tilde{E} \circ \tilde{F}) \wedge (\tilde{A} \vee \tilde{C}, \tilde{E} \circ \tilde{G})$$

$$= [(\tilde{A}, \tilde{E}) \circ (\tilde{B}, \tilde{F})] \wedge [(\tilde{A}, \tilde{E}) \circ (\tilde{C}, \tilde{G})]$$

$$= (\widetilde{D_1} \circ \widetilde{D_2}) \wedge (\widetilde{D_1} \circ \widetilde{D_3})$$

Sehingga $\widetilde{D_1} \circ (\widetilde{D_2} \wedge \widetilde{D_3}) \leq (\widetilde{D_1} \circ \widetilde{D_2}) \wedge (\widetilde{D_1} \circ \widetilde{D_3})$, ini menunjukkan bahwa komposisi tipe I (∘) distributif terhadap operasi "∧".

Dari pembuktian (1) dan (2) dapat diketahui bahwa komposisi tipe 1 distributif terhadap operasi ∨ (max) dan ∧ (min)

(3) $\widetilde{D_1} \odot (\widetilde{D_2} \vee \widetilde{D_3}) = (\tilde{A}, \tilde{E}) \odot [(\tilde{B}, \tilde{F}) \vee (\tilde{C}, \tilde{G})]$

$$= (\tilde{A}, \tilde{E}) \odot (\tilde{B} \vee \tilde{C}, \tilde{F} \vee \tilde{G})$$

$$= \left(\tilde{A} \vee (\tilde{B} \vee \tilde{C}), \tilde{E} \odot (\tilde{F} \vee \tilde{G})\right)$$

$$\geq \left((\tilde{A} \vee \tilde{B}) \vee (\tilde{A} \vee \tilde{C}), (\tilde{E} \odot \tilde{F}) \vee (\tilde{E} \odot \tilde{G})\right)$$

$$= (\tilde{A} \vee \tilde{B}, \tilde{E} \odot \tilde{F}) \vee (\tilde{A} \vee \tilde{C}, \tilde{E} \odot \tilde{G})$$

$$= [(\tilde{A}, \tilde{E}) \odot (\tilde{B}, \tilde{F})] \vee [(\tilde{A}, \tilde{E}) \odot (\tilde{C}, \tilde{G})]$$

$$= (\widetilde{D_1} \odot \widetilde{D_2}) \vee (\widetilde{D_1} \odot \widetilde{D_3})$$

Sehingga $\widetilde{D_1} \odot (\widetilde{D_2} \vee \widetilde{D_3}) \geq (\widetilde{D_1} \odot \widetilde{D_2}) \vee (\widetilde{D_1} \odot \widetilde{D_3})$, ini menunjukkan bahwa komposisi tipe II (⊙) distributif terhadap operasi "∨".

(4) $\widetilde{D_1} \odot (\widetilde{D_2} \wedge \widetilde{D_3}) = (\tilde{A}, \tilde{E}) \odot [(\tilde{B}, \tilde{F}) \wedge (\tilde{C}, \tilde{G})]$

$$= (\tilde{A}, \tilde{E}) \odot (\tilde{B} \wedge \tilde{C}, \tilde{F} \wedge \tilde{G})$$

$$= \left(\tilde{A} \vee (\tilde{B} \wedge \tilde{C}), \tilde{E} \odot (\tilde{F} \wedge \tilde{G})\right)$$

$$= \left((\tilde{A} \vee \tilde{B}) \wedge (\tilde{A} \vee \tilde{C}), (\tilde{E} \odot \tilde{F}) \wedge (\tilde{E} \odot \tilde{G})\right)$$

$$= (\tilde{A} \vee \tilde{B}, \tilde{E} \odot \tilde{F}) \wedge (\tilde{A} \vee \tilde{C}, \tilde{E} \odot \tilde{G})$$

$$= [(\tilde{A}, \tilde{E}) \odot (\tilde{B}, \tilde{F})] \wedge [(\tilde{A}, \tilde{E}) \odot (\tilde{C}, \tilde{G})]$$

$$= (\widetilde{D_1} \odot \widetilde{D_2}) \wedge (\widetilde{D_1} \odot \widetilde{D_3})$$

Sehingga $\widetilde{D_1} \odot (\widetilde{D_2} \wedge \widetilde{D_3}) = (\widetilde{D_1} \odot \widetilde{D_2}) \wedge (\widetilde{D_1} \odot \widetilde{D_3})$, ini menunjukkan bahwa komposisi tipe II ($\odot$) distributif terhadap operasi "$\wedge$".

Dari pembuktian (3) dan (4) dapat diketahui bahwa komposisi tipe 2 distributif terhadap operasi $\vee$ (max) dan $\wedge$ (min)

(5) $\widetilde{D_1} * (\widetilde{D_2} \vee \widetilde{D_3}) = (\tilde{A}, \tilde{E}) * [(\tilde{B}, \tilde{F}) \vee (\tilde{C}, \tilde{G})]$

$$= (\tilde{A}, \tilde{E}) * (\tilde{B} \vee \tilde{C}, \tilde{F} \vee \tilde{G})$$

$$= \left(\tilde{A} \vee (\tilde{B} \vee \tilde{C}), \tilde{E} * (\tilde{F} \vee \tilde{G})\right)$$

$$\geq \left((\tilde{A} \vee \tilde{B}) \vee (\tilde{A} \vee \tilde{C}), (\tilde{E} * \tilde{F}) \vee (\tilde{E} * \tilde{G})\right)$$

$$= (\tilde{A} \vee \tilde{B}, \tilde{E} * \tilde{F}) \vee (\tilde{A} \vee \tilde{C}, \tilde{E} * \tilde{G})$$

$$= [(\tilde{A}, \tilde{E}) * (\tilde{B}, \tilde{F})] \vee [(\tilde{A}, \tilde{E}) * (\tilde{C}, \tilde{G})]$$

$$= (\widetilde{D_1} * \widetilde{D_2}) \vee (\widetilde{D_1} * \widetilde{D_3})$$

Sehingga $\widetilde{D_1} * (\widetilde{D_2} \vee \widetilde{D_3}) \geq (\widetilde{D_1} * \widetilde{D_2}) \vee (\widetilde{D_1} * \widetilde{D_3})$, ini menunjukkan bahwa komposisi tipe III ($*$) distributif terhadap operasi "$\vee$".

(6) $\widetilde{D_1} * (\widetilde{D_2} \wedge \widetilde{D_3}) = (\tilde{A}, \tilde{E}) * [(\tilde{B}, \tilde{F}) \wedge (\tilde{C}, \tilde{G})]$

$$= (\tilde{A}, \tilde{E}) * (\tilde{B} \wedge \tilde{C}, \tilde{F} \wedge \tilde{G})$$

$$= \left(\tilde{A} \vee (\tilde{B} \wedge \tilde{C}), \tilde{E} * (\tilde{F} \wedge \tilde{G})\right)$$

$$= \left((\tilde{A} \vee \tilde{B}) \wedge (\tilde{A} \vee \tilde{C}), (\tilde{E} * \tilde{F}) \wedge (\tilde{E} * \tilde{G})\right)$$

$$= (\tilde{A} \vee \tilde{B}, \tilde{E} * \tilde{F}) \wedge (\tilde{A} \vee \tilde{C}, \tilde{E} * \tilde{G})$$

$$= [(\tilde{A}, \tilde{E}) * (\tilde{B}, \tilde{F})] \wedge [(\tilde{A}, \tilde{E}) * (\tilde{C}, \tilde{G})]$$

$$= (\widetilde{D_1} * \widetilde{D_2}) \wedge (\widetilde{D_1} * \widetilde{D_3})$$

Sehingga $\widetilde{D_1} * (\widetilde{D_2} \wedge \widetilde{D_3}) = (\widetilde{D_1} * \widetilde{D_2}) \wedge (\widetilde{D_1} * \widetilde{D_3})$, ini menunjukkan bahwa komposisi tipe III ($*$) distributif terhadap operasi "$\wedge$".

Dari pembuktian (5) dan (6) dapat diketahui bahwa komposisi tipe 3 distributif terhadap operasi $\vee$ (max) dan $\wedge$ (min)

(7) $\widetilde{D_1} \circledast (\widetilde{D_2} \vee \widetilde{D_3}) = (\tilde{A}, \tilde{E}) \circledast [(\tilde{B}, \tilde{F}) \vee (\tilde{C}, \tilde{G})]$

$$= (\tilde{A}, \tilde{E}) \circledast (\tilde{B} \vee \tilde{C}, \tilde{F} \vee \tilde{G})$$

$$= \left(\tilde{A} \vee (\tilde{B} \vee \tilde{C}), \tilde{E} \circledast (\tilde{F} \vee \tilde{G})\right)$$

$$= \left((\tilde{A} \vee \tilde{B}) \vee (\tilde{A} \vee \tilde{C}), (\tilde{E} \circledast \tilde{F}) \vee (\tilde{E} \circledast \tilde{G})\right)$$

$$= (\tilde{A} \vee \tilde{B}, \tilde{E} \circledast \tilde{F}) \vee (\tilde{A} \vee \tilde{C}, \tilde{E} \circledast \tilde{G})$$

$$= [(\tilde{A}, \tilde{E}) \circledast (\tilde{B}, \tilde{F})] \vee [(\tilde{A}, \tilde{E}) \circledast (\tilde{C}, \tilde{G})]$$

$$= (\widetilde{D_1} \circledast \widetilde{D_2}) \vee (\widetilde{D_1} \circledast \widetilde{D_3})$$

Sehingga $\widetilde{D_1} \circledast (\widetilde{D_2} \vee \widetilde{D_3}) = (\widetilde{D_1} \circledast \widetilde{D_2}) \vee (\widetilde{D_1} \circledast \widetilde{D_3})$, ini menunjukkan bahwa komposisi tipe IV ($\circledast$) distributif terhadap operasi "$\vee$".

(8) $\widetilde{D_1} \circledast (\widetilde{D_2} \wedge \widetilde{D_3}) = (\tilde{A}, \tilde{E}) \circledast [(\tilde{B}, \tilde{F}) \wedge (\tilde{C}, \tilde{G})]$

$$= (\tilde{A}, \tilde{E}) \circledast (\tilde{B} \wedge \tilde{C}, \tilde{F} \wedge \tilde{G})$$

$$= \left(\tilde{A} \vee (\tilde{B} \wedge \tilde{C}), \tilde{E} \circledast (\tilde{F} \wedge \tilde{G})\right)$$

$$\leq \left((\tilde{A} \vee \tilde{B}) \wedge (\tilde{A} \vee \tilde{C}), (\tilde{E} \circledast \tilde{F}) \wedge (\tilde{E} \circledast \tilde{G})\right)$$

$$= (\tilde{A} \vee \tilde{B}, \tilde{E} \circledast \tilde{F}) \wedge (\tilde{A} \vee \tilde{C}, \tilde{E} \circledast \tilde{G})$$

$$= [(\tilde{A}, \tilde{E}) \circledast (\tilde{B}, \tilde{F})] \wedge [(\tilde{A}, \tilde{E}) \circledast (\tilde{C}, \tilde{G})]$$

$$= (\widetilde{D_1} \circledast \widetilde{D_2}) \wedge (\widetilde{D_1} \circledast \widetilde{D_3})$$

(Kao, Yah-Ming dan Wu, Sun Yen: 615 - 616).

Sehingga $\widetilde{D_1} \circledast (\widetilde{D_2} \wedge \widetilde{D_3}) \leq (\widetilde{D_1} \circledast \widetilde{D_2}) \wedge (\widetilde{D_1} \circledast \widetilde{D_3})$, ini menunjukkan bahwa komposisi tipe IV ($\circledast$) distributif terhadap operasi "$\wedge$".

Dari pembuktian (7) dan (8) dapat diketahui bahwa komposisi tipe 4 distributif terhadap operasi $\vee$ (max) dan $\wedge$ (min)

Untuk memperjelas Teorema 3.1 dan Teorema 3.2 maka di berikan contoh sebagai berikut:

3.3 Contoh Soal

Misalkan himpunan *finit* $S = \{a, b, c\}$, serta himpunan fuzzy $\widetilde{D_1} = (\tilde{A}, \tilde{E})$, $\widetilde{D_2} = (\tilde{B}, \tilde{F})$ dan $\widetilde{D_3} = (\tilde{C}, \tilde{G})$ yang didefinisikan dengan

$\tilde{A} = \{(a, 0.4), (b, 0.2), (c, 0.5)\}$

$\tilde{E} = \{((a,a), 0.7), ((a,b), 0.8), ((a,c), 0.9), ((b,a), 0.4), ((b,b), 0.6),$
$((b,c), 0.8), ((c,a), 0.3), ((c,b). 0.5), ((c,c), 0.7)\}$

Jika dalam bentuk matriks, $\tilde{E} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.8 & 0.9 \\ 0.4 & 0.6 & 0.8 \\ 0.3 & 0.5 & 0.7 \end{bmatrix}$

$\tilde{B} = \{(a, 0.3), (b, 0.5), (c, 0.8)\}$

$\tilde{F} = \{((a,a), 0.7), ((a,b), 0.6), ((a,c), 0.7), ((b,a), 0.c), ((b,b), 0.8),$

$((b,c), 0.5), ((c,a), 0.9), ((c,b), 0.4), ((c,c), 0.9)\}$

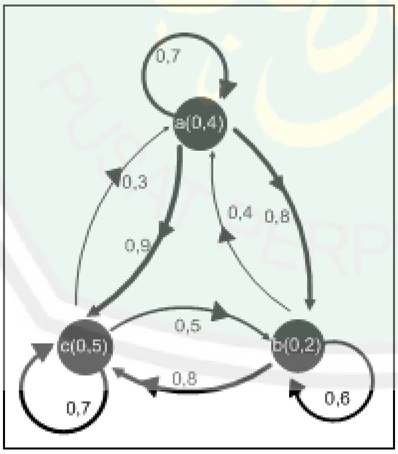
Jika dalam bentuk matriks, $\tilde{F} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.6 & 0.7 \\ 0.3 & 0.8 & 0.5 \\ 0.9 & 0.4 & 0.9 \end{bmatrix}$

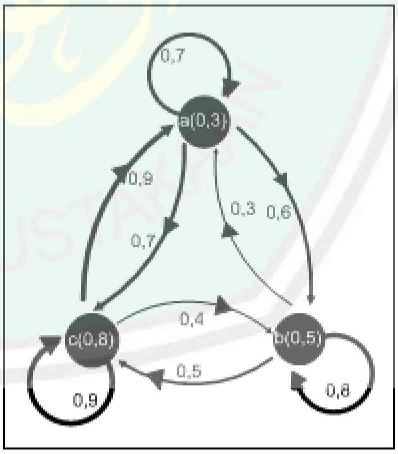
$\tilde{C} = \{(a, 0.6), (b, 0.a), (c, 0.7)\}$

$\tilde{G} = \{((a,a), 0.1), ((a,b), 0.7), ((a,c), 0.4), ((b,a), 0.8), ((b,b), 0.2),$

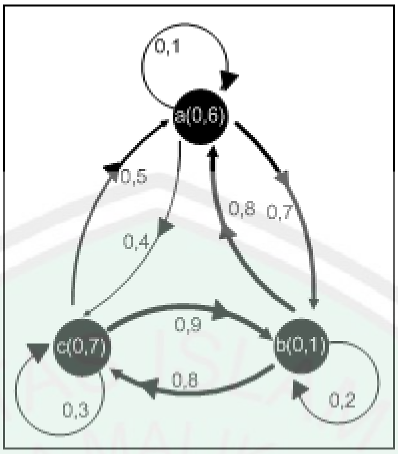
$((b,c), 0.8), ((c,a), 0.5), ((c,b), 0.9), ((c,c), 0.3)\}$

Jika dalam bentuk matriks, $\tilde{G} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.7 & 0.4 \\ 0.8 & 0.2 & 0.8 \\ 0.5 & 0.9 & 0.3 \end{bmatrix}$





a. $\widetilde{D_1} = (\tilde{A}, \tilde{E})$ b. $\widetilde{D_2} = (\tilde{B}, \tilde{F})$



c. $\widetilde{D_3} = (\tilde{C}, \tilde{G})$

Gambar 3.6 *Digraf dari* $\widetilde{D_1}, \widetilde{D_2}, dan\ \widetilde{D_3}$

Contoh di atas akan dikerjakan dengan menggunakan teorema 2.

a. Dikerjakan dengan menggunakan teorema 2 bagian (1)

$$\boxed{\widetilde{D_1} \circ \left(\widetilde{D_2} \vee \widetilde{D_3}\right) = \left(\widetilde{D_1} \circ \widetilde{D_2}\right) \vee \left(\widetilde{D_1} \circ \widetilde{D_3}\right)}$$

Untuk menunjukkan hal tersebut, maka kita harus mengerjakannya dari kedua ruas, yaitu ruas kiri dan ruas kanan. Jika diperoleh hasil yang sama maka contoh yang diberikan telah sesuai dengan teorema 2 bagian (1).

1) Ruas kiri $\widetilde{D_1} \circ \left(\widetilde{D_2} \vee \widetilde{D_3}\right)$, maka

$\widetilde{D_2} \vee \widetilde{D_3} = \left(\tilde{B} \vee \tilde{C}, \tilde{F} \vee \tilde{G}\right)$

$= \{\left((\mathrm{a}, 0.3), (\mathrm{b}, 0.5), (\mathrm{c}, 0.8)\right) \vee \left((\mathrm{a}, 0.6), (\mathrm{b}, 0.1), (\mathrm{c}, 0.7)\right)\},$

$\Big\{\{\left((\mathrm{a},\mathrm{a}), 0.7\right), \left((\mathrm{a},\mathrm{b}), 0.6\right), \left((\mathrm{a},\mathrm{c}), 0.7\right), \left((\mathrm{b},\mathrm{a}), 0.3\right), \left((\mathrm{b},\mathrm{b}), 0.8\right),$

$\left((\mathrm{b},\mathrm{c}), 0.5\right), \left((\mathrm{c},\mathrm{a}), 0.9\right), \left((\mathrm{c},\mathrm{b}), 0.4\right), \left((\mathrm{c},\mathrm{c}), 0.9\right)\} \vee$

$\{\left((\mathrm{a},\mathrm{a}), 0.1\right), \left((\mathrm{a},\mathrm{b}), 0.7\right), \left((\mathrm{a},\mathrm{c}), 0.4\right), \left((\mathrm{b},\mathrm{a}), 0.8\right), \left((\mathrm{b},\mathrm{b}), 0.2\right),$

$\left((\mathrm{b},\mathrm{c}), 0.8\right), \left((\mathrm{c},\mathrm{a}), 0.5\right), \left((\mathrm{c},\mathrm{b}), 0.9\right), \left((\mathrm{c},\mathrm{c}), 0.3\right)\}\Big\}$

$= \max\{((a,0.3),(b,0.5),(c,0.8)),((a,0.6),(b,0.1),(c,0.7))\},$

$\max\{\{((a,a),0.7),((a,b),0.6),((a,c),0.7),((b,a),0.3),((b,b),0.8),$

$((b,c),0.5),((c,a),0.9),((c,b),0.4),((c,c),0.9)\},$

$\{((a,a),0.1),((a,b),0.7),((a,c),0.4),((b,a),0.8),((b,b),0.2),$

$((b,c),0.8),((c,a),0.5),((c,b),0.9),((c,c),0.3)\}\}$

$= \{\{(a,0.6),(b,0.5),(c,0.8)\},\{((a,a),0.7),((a,b),0.7),((a,c),0.7),$

$((b,a),0.8),((b,b),0.8),((b,c),0.8),((c,a),0.9),((c,b),0.9),((c,c),0.9)\}\}$

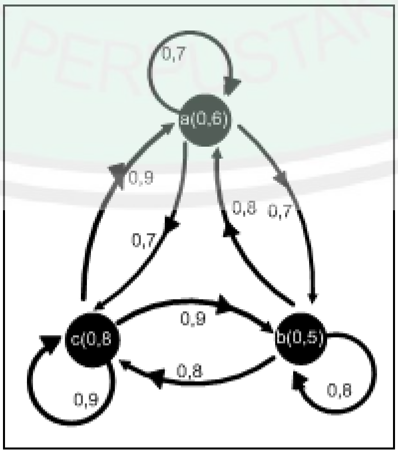
Dari $\widetilde{D_2} \vee \widetilde{D_3}$ diperoleh

$\tilde{B} \vee \tilde{C} = \tilde{H} = \{(a,0.6),(b,0.5),(c,0.8)\}$

$\tilde{F} \vee \tilde{G} = \tilde{I} = \{((a,a),0.7),((a,b),0.7),((a,c),0.7),((b,a),0.8),((b,b),0.8),$

$((b,c),0.8),((c,a),0.9),((c,b),0.9),((c,c),0.9)\}$

Jika dalam bentuk matriks, $\tilde{I} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.7 & 0.7 \\ 0.8 & 0.8 & 0.8 \\ 0.9 & 0.9 & 0.9 \end{bmatrix}$



Gambar 3.7 *Digraf dari* $\widetilde{D_2} \vee \widetilde{D_3}$

Setelah $\widetilde{D_2} \vee \widetilde{D_3}$ diperoleh, selanjutnya kita menghitung nilai $\widetilde{D_1} \circ \left(\widetilde{D_2} \vee \widetilde{D_3}\right)$

$$\widetilde{D_1} \circ \left(\widetilde{D_2} \vee \widetilde{D_3}\right) = \left(\tilde{A}, \tilde{E}\right) \circ \left(\tilde{H}, \tilde{I}\right) = \left(\tilde{A} \vee \tilde{H}, \tilde{E} \circ \tilde{I}\right)$$

$$\begin{aligned}\tilde{A} \vee \tilde{H} &= \{\{(a, 0.4), (b, 0.2), (c, 0.5)\} \vee \{(a, 0.6), (b, 0.5), (c, 0.8)\}\} \\ &= \max\{\{(\mathrm{a}, 0.4), (\mathrm{b}, 0.2), (\mathrm{c}, 0.5)\}, \{(\mathrm{a}, 0.6), (\mathrm{b}, 0.5), (\mathrm{c}, 0.8)\}\} \\ &= \{(\mathrm{a}, 0.6), (\mathrm{b}, 0.5), (\mathrm{c}, 0.8)\}\end{aligned}$$

$$\tilde{E} \circ \tilde{I} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.8 & 0.9 \\ 0.4 & 0.6 & 0.8 \\ 0.3 & 0.5 & 0.7 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0.7 & 0.7 & 0.7 \\ 0.8 & 0.8 & 0.8 \\ 0.9 & 0.9 & 0.9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\mu_{\tilde{E} \circ \tilde{I}}(a, a) &= \max\{\min\{(0.7, 0.7), (0.8, 0.8), (0.9, 0.9)\}\} \\ &= \max\{0.7, 0.8, 0.9\} = 0.9 \\ \mu_{\tilde{E} \circ \tilde{I}}(a, b) &= \max\{\min\{(0.7, 0.7), (0.8, 0.8), (0.9, 0.9)\}\} \\ &= \max\{0.7, 0.8, 0.9\} = 0.9 \\ \mu_{\tilde{E} \circ \tilde{I}}(a, c) &= \max\{\min\{(0.7, 0.7), (0.8, 0.8), (0.9, 0.9)\}\} \\ &= \max\{0.7, 0.8, 0.9\} = 0.9 \\ \mu_{\tilde{E} \circ \tilde{I}}(b, a) &= \max\{\min\{(0.4, 0.7), (0.6, 0.8), (0.8, 0.9)\}\} \\ &= \max\{0.4, 0.6, 0.8\} = 0.8 \\ \mu_{\tilde{E} \circ \tilde{I}}(b, b) &= \max\{\min\{(0.4, 0.7), (0.6, 0.8), (0.8, 0.9)\}\} \\ &= \max\{0.4, 0.6, 0.8\} = 0.8 \\ \mu_{\tilde{E} \circ \tilde{I}}(b, c) &= \max\{\min\{(0.4, 0.7), (0.6, 0.8), (0.8, 0.9)\}\} \\ &= \max\{0.4, 0.6, 0.8\} = 0.8 \\ \mu_{\tilde{E} \circ \tilde{I}}(\mathrm{c}, \mathrm{a}) &= \max\{\min\{(0.3, 0.7), (0.5, 0.8), (0.7, 0.9)\}\} \\ &= \max\{0.3, 0.5, 0.7\} = 0.7\end{aligned}$$

$$\mu_{\tilde{E}\circ\tilde{I}}(c,a) = \max\{\min\{(0.3,0.7),(0.5,0.8),(0.7,0.9)\}\}$$

$$= \max\{0.3, 0.5, 0.7\} = 0.7$$

$$\mu_{\tilde{E}\circ\tilde{I}}(c,a) = \max\{\min\{(0.3,0.7),(0.5,0.8),(0.7,0.9)\}\}$$

$$= \max\{0.3, 0.5, 0.7\} = 0.7$$

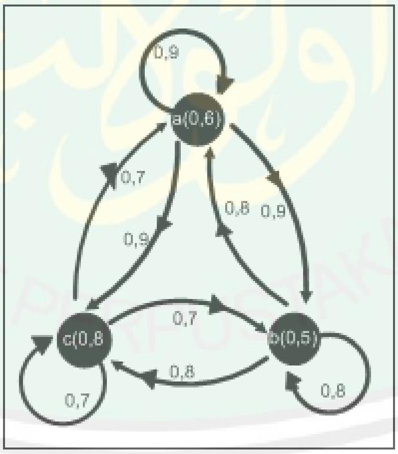
$$\tilde{E} \circ \tilde{I} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.8 & 0.9 \\ 0.4 & 0.6 & 0.8 \\ 0.3 & 0.5 & 0.7 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0.7 & 0.7 & 0.7 \\ 0.8 & 0.8 & 0.8 \\ 0.9 & 0.9 & 0.9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.9 & 0.9 \\ 0.8 & 0.8 & 0.8 \\ 0.7 & 0.7 & 0.7 \end{bmatrix}$$

Maka diperoleh nilai sebagai berikut:

$\widetilde{D_1} \circ (\widetilde{D_2} \vee \widetilde{D_3})$

$= \Big\{\{(a,0.6),(b,0.5),(c,0.8)\},\{\big((a,a),0.9\big),\big((a,b),0.9\big),\big((a,c),0.9\big),$

$\big((b,a),0.8\big),\big((b,b),0.8\big),\big((b,c),0.8\big),\big((c,a),0.7\big),\big((c,b),0.7\big),\big((c,c),0.7\big)\}\Big\}$



Gambar 3.8 *Digraf dari* $\widetilde{D_1} \circ (\widetilde{D_2} \vee \widetilde{D_3})$

Jika perhitungan ruas kiri telah mendapatkan hasil seperti di atas, sekarang kita akan melakukan perhitungan pada ruas kanan, sehingga akan diperoleh hasil yang sama atau berbeda dengan ruas kiri.

2) Ruas kanan $(\widetilde{D_1} \circ \widetilde{D_2}) \vee (\widetilde{D_1} \circ \widetilde{D_3})$

Untuk mendapatkan hasil pada ruas kanan ini, kita harus menghitung $(\widetilde{D_1} \circ \widetilde{D_2})$ terlebih dahulu, baru kemudian $(\widetilde{D_1} \circ \widetilde{D_3})$, setelah itu hasil dari keduanya di ambil nilai yang maksimum.

$$(\widetilde{D_1} \circ \widetilde{D_2}) = (\tilde{A}, \tilde{E}) \circ (\tilde{B}, \tilde{F}) = (\tilde{A} \vee \tilde{B}, \tilde{E} \circ \tilde{F})$$

Berdasarkan perhitungan $(\widetilde{D_1} \circ \widetilde{D_2})$ pada bagian sebelumnya diperoleh

$(\widetilde{D_1} \circ \widetilde{D_2})$

$= \Big\{\{(a, 0.4), (b, 0.5), (c, 0.8)\}, \{\big((a, a), 0.9\big), \big((a, b), 0.8\big), \big((a, c), 0.9\big),$

$\big((b, a), 0.8\big), \big((b, b), 0.6\big), \big((b, c), 0.8\big), \big((c, a), 0.7\big), \big((c, b), 0.5\big), \big((c, c), 0.7\big)\}\Big\}$

Selanjutnya,

$$(\widetilde{D_1} \circ \widetilde{D_3}) = (\tilde{A}, \tilde{E}) \circ (\tilde{C}, \tilde{G}) = (\tilde{A} \vee \tilde{C}, \tilde{E} \circ \tilde{G})$$

$\tilde{A} \vee \tilde{C} = \{\{(a, 0.4), (b, 0.2), (c, 0.5)\} \vee \{(a, 0.6), (b, 0.1), (c, 0.7)\}\}$

$\quad = \max\{\{(a, 0.4), (b, 0.2), (c, 0.5)\}, \{(a, 0.6), (b, 0.1), (c, 0.7)\}\}$

$\quad = \{(a, 0.6), (b, 0.2), (c, 0.7)\}$

$$\tilde{E} \circ \tilde{G} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.8 & 0.9 \\ 0.4 & 0.6 & 0.8 \\ 0.3 & 0.5 & 0.7 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0.1 & 0.7 & 0.4 \\ 0.8 & 0.2 & 0.8 \\ 0.5 & 0.9 & 0.3 \end{bmatrix}$$

$\mu_{\tilde{E} \circ \tilde{I}}(a, a) = \max\{\min\{(0.7, 0.1), (0.8, 0.8), (0.9, 0.5)\}\}$

$\quad = \max\{0.1, 0.8, 0.5\} = 0.8$

$\mu_{\tilde{E} \circ \tilde{I}}(a, b) = \max\{\min\{(0.7, 0.7), (0.8, 0.2), (0.9, 0.9)\}\}$

$\quad = \max\{0.7, 0.2, 0.9\} = 0.9$

$\mu_{\tilde{E}\circ\tilde{I}}(a,a) = \max\{\min\{(0.7, 0.1), (0.8, 0.8), (0.9, 0.5)\}\}$

$= \max\{0.1, 0.8, 0.5\} = 0.8$

$\mu_{\tilde{E}\circ\tilde{I}}(b,a) = \max\{\min\{(0.4, 0.1), (0.6, 0.8), (0.8, 0.5)\}\}$

$= \max\{0.1, 0.6, 0.5\} = 0.6$

$\mu_{\tilde{E}\circ\tilde{I}}(b,b) = \max\{\min\{(0.4, 0.7), (0.6, 0.2), (0.8, 0.9)\}\}$

$= \max\{0.4, 0.2, 0.8\} = 0.8$

$\mu_{\tilde{E}\circ\tilde{I}}(b,a) = \max\{\min\{(0.4, 0.1), (0.6, 0.8), (0.8, 0.5)\}\}$

$= \max\{0.1, 0.6, 0.5\} = 0.6$

$\mu_{\tilde{E}\circ\tilde{I}}(c,a) = \max\{\min\{(0.3, 0.1), (0.5, 0.8), (0.7, 0.5)\}\}$

$= \max\{0.1, 0.5, 0.5\} = 0.5$

$\mu_{\tilde{E}\circ\tilde{I}}(c,b) = \max\{\min\{(0.3, 0.7), (0.5, 0.2), (0.7, 0.9)\}\}$

$= \max\{0.3, 0.2, 0.7\} = 0.7$

$\mu_{\tilde{E}\circ\tilde{I}}(c,a) = \max\{\min\{(0.3, 0.1), (0.5, 0.8), (0.7, 0.5)\}\}$

$= \max\{0.1, 0.5, 0.5\} = 0.5$

$$\tilde{E} \circ \tilde{F} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.8 & 0.9 \\ 0.4 & 0.6 & 0.8 \\ 0.3 & 0.5 & 0.7 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0.7 & 0.6 & 0.7 \\ 0.3 & 0.8 & 0.5 \\ 0.9 & 0.4 & 0.9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.9 & 0.8 \\ 0.6 & 0.8 & 0.6 \\ 0.5 & 0.7 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Sehingga

$(\widetilde{D_1} \circ \widetilde{D_3}) = \{\{(a, 0.6), (b, 0.2), (c, 0.7)\}, \{((a,a), 0.8), ((a,b), 0.9), ((a,c), 0.8),$

$((b,a), 0.6), ((b,b), 0.8), ((b,c), 0.6), ((c,a), 0.5), ((c,b), 0.7), ((c,c), 0.5)\}\}$

Selanjutnya mencari nilai maksimal dari kedua hasil di atas, sebagai berikut:

$(\widetilde{D_1} \circ \widetilde{D_2}) \vee (\widetilde{D_1} \circ \widetilde{D_3})$

$= \{\{(a, 0.4), (b, 0.5), (c, 0.8)\}, \{((a, a), 0.9), ((a, b), 0.8), ((a, c), 0.9), ((b, a), 0.8),$

$((b, b), 0.6), ((b, c), 0.8), ((c, a), 0.7), ((c, b), 0.5), ((c, c), 0.7)\}\}$

$\vee \{\{(a, 0.6), (b, 0.2), (c, 0.7)\}, \{((a, a), 0.8), ((a, b), 0.9), ((a, c), 0.8), ((b, a), 0.6),$

$((b, b), 0.8), ((b, c), 0.6), ((c, a), 0.5), ((c, b), 0.7), ((c, c), 0.5)\}\}$

$= \max\{(a, 0.4), (b, 0.5), (c, 0.8)\}, \{((a, a), 0.9), ((a, b), 0.8), ((a, c), 0.9), ((b, a), 0.8),$

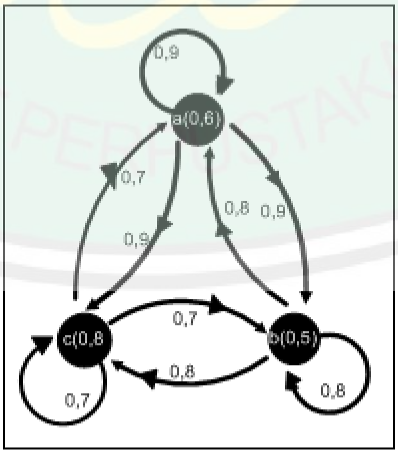
$((b, b), 0.6), ((b, c), 0.8), ((c, a), 0.7), ((c, b), 0.5), ((c, c), 0.7),$

$\{\{(a, 0.6), (b, 0.2), (c, 0.7)\}, \{((a, a), 0.8), ((a, b), 0.9), ((a, c), 0.8), ((b, a), 0.6),$

$((b, b), 0.8), ((b, c), 0.6), ((c, a), 0.5), ((c, b), 0.7), ((c, c), 0.5)\}\}$

$= \{\{(a, 0.6), (b, 0.5), (c, 0.8)\}, \{((a, a), 0.9), ((a, b), 0.9), ((a, c), 0.9),$

$((b, a), 0.8), ((b, b), 0.8), ((b, c), 0.8), ((c, a), 0.7), ((c, b), 0.7), ((c, c), 0.7)\}\}$



Gambar 3.9 Digraf dari $(\widetilde{D_1} \circ \widetilde{D_2}) \vee (\widetilde{D_1} \circ \widetilde{D_3})$

Dari 1) dan 2) maka dapat disimpulkan bahwa contoh yang diberikan telah sesuai dan lebih memperkuat teorema 2 bagian 1.

b. Dikerjakan dengan menggunakan teorema 2 bagian (2)

$$\boxed{\widetilde{D_1} \circ \left(\widetilde{D_2} \wedge \widetilde{D_3}\right) \leq \left(\widetilde{D_1} \circ \widetilde{D_2}\right) \wedge \left(\widetilde{D_1} \circ \widetilde{D_3}\right)}$$

1) Ruas kiri $\widetilde{D_1} \circ \left(\widetilde{D_2} \wedge \widetilde{D_3}\right)$, maka

$$\widetilde{D_2} \wedge \widetilde{D_3} = \left(\tilde{B} \wedge \tilde{C}, \tilde{F} \wedge \tilde{G}\right)$$

$$= \{\left((\mathrm{a}, 0.3), (\mathrm{b}, 0.5), (\mathrm{c}, 0.8)\right) \vee \left((\mathrm{a}, 0.6), (\mathrm{b}, 0.1), (\mathrm{c}, 0.7)\right)\},$$

$$\{\{\left((\mathrm{a},\mathrm{a}), 0.7\right), \left((\mathrm{a},\mathrm{b}), 0.6\right), \left((\mathrm{a},\mathrm{c}), 0.7\right), \left((\mathrm{b},\mathrm{a}), 0.3\right), \left((\mathrm{b},\mathrm{b}), 0.8\right),$$

$$\left((\mathrm{b},\mathrm{c}), 0.5\right), \left((\mathrm{c},\mathrm{a}), 0.9\right), \left((\mathrm{c},\mathrm{b}), 0.4\right), \left((\mathrm{c},\mathrm{c}), 0.9\right)\} \vee$$

$$\{\left((\mathrm{a},\mathrm{a}), 0.\mathrm{a}\right), \left((\mathrm{a},\mathrm{b}), 0.7\right), \left((\mathrm{a},\mathrm{c}), 0.4\right), \left((\mathrm{b},\mathrm{a}), 0.8\right), \left((\mathrm{b},\mathrm{b}), 0.2\right),$$

$$\left((\mathrm{b},\mathrm{c}), 0.8\right), \left((\mathrm{c},\mathrm{a}), 0.5\right), \left((\mathrm{c},\mathrm{b}), 0.9\right), \left((\mathrm{c},\mathrm{c}), 0.3\right)\}\}$$

$$= \min\{\left((\mathrm{a}, 0.3), (\mathrm{b}, 0.5), (\mathrm{c}, 0.8)\right), \left((\mathrm{a}, 0.6), (\mathrm{b}, 0.1), (\mathrm{c}, 0.7)\right)\},$$

$$\min\{\{\left((\mathrm{a},\mathrm{a}), 0.7\right), \left((\mathrm{a},\mathrm{b}), 0.6\right), \left((\mathrm{a},\mathrm{c}), 0.7\right), \left((\mathrm{b},\mathrm{a}), 0.3\right), \left((\mathrm{b},\mathrm{b}), 0.8\right),$$

$$\left((\mathrm{b},\mathrm{c}), 0.5\right), \left((\mathrm{c},\mathrm{a}), 0.9\right), \left((\mathrm{c},\mathrm{b}), 0.4\right), \left((\mathrm{c},\mathrm{c}), 0.9\right)\},$$

$$\{\left((\mathrm{a},\mathrm{a}), 0.1\right), \left((\mathrm{a},\mathrm{b}), 0.7\right), \left((\mathrm{a},\mathrm{c}), 0.4\right), \left((\mathrm{b},\mathrm{a}), 0.8\right), \left((\mathrm{b},\mathrm{b}), 0.2\right),$$

$$\left((\mathrm{b},\mathrm{c}), 0.8\right), \left((\mathrm{c},\mathrm{a}), 0.5\right), \left((\mathrm{c},\mathrm{b}), 0.9\right), \left((\mathrm{c},\mathrm{c}), 0.3\right)\}\}$$

$$= \{\{(a, 0.3), (b, 0.1), (c, 0.7)\}, \{\left((a,a), 0.1\right), \left((a,b), 0.6\right), \left((a,c), 0.4\right), \left((b,a), 0.3\right),$$

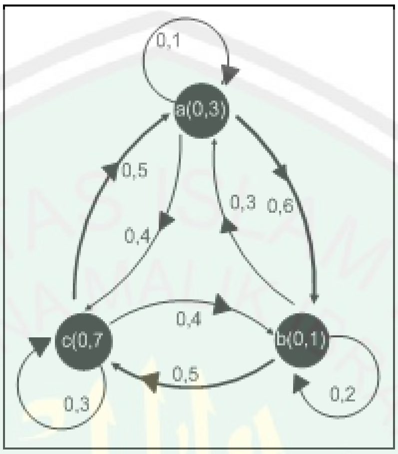
$$\left((b,b), 0.2\right), \left((b,c), 0.5\right), \left((c,a), 0.5\right), \left((c,b), 0.4\right), \left((c,c), 0.3\right)\}\}$$

Dari $\widetilde{D_2} \wedge \widetilde{D_3}$ diperoleh

$$\tilde{B} \wedge \tilde{C} = \tilde{J} = \{(a, 0.3), (b, 0.1), (c, 0.7)\}$$

$$\tilde{F} \wedge \tilde{G} = \tilde{K} = \{((a,a),0.1),((a,b),0.6),((a,c),0.4),((b,a),0.3),$$

$$((b,b),0.2),((b,c),0.5),((c,a),0.5),((c,b),0.4),((c,c),0.3)\}$$



Gambar 3.10 *Digraf dari* $\widetilde{D_2} \wedge \widetilde{D_3}$

Selanjutnya menghitung $\widetilde{D_1} \circ (\widetilde{D_2} \wedge \widetilde{D_3})$, sebagai berikut:

$$\widetilde{D_1} \circ (\widetilde{D_2} \wedge \widetilde{D_3}) = (\tilde{A}, \tilde{E}) \circ (\tilde{J}, \tilde{K}) = (\tilde{A} \vee \tilde{J}, \tilde{E} \circ \tilde{K})$$

$$\tilde{A} \vee \tilde{J} = \{\{(a,0.4),(b,0.2),(c,0.5)\} \vee \{(a,0.3),(b,0.1),(c,0.7)\}\}$$

$$= \max\{\{(a,0.4),(b,0.2),(c,0.5)\},\{(a,0.3),(b,0.1),(c,0.7)\}\}$$

$$= \{(a,0.4),(b,0.2),(c,0.7)\}$$

$$\tilde{E} \circ \tilde{K} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.8 & 0.9 \\ 0.4 & 0.6 & 0.8 \\ 0.3 & 0.5 & 0.7 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0.1 & 0.6 & 0.4 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.5 & 0.4 & 0.3 \end{bmatrix}$$

$$\mu_{\tilde{E} \circ \tilde{K}}(a,a) = \max\{\min\{(0.7,0.1),(0.8,0.3),(0.9,0.5)\}\}$$

$$= \max\{0.1, 0.3, 0.5\} = 0.5$$

$$\mu_{\tilde{E} \circ \tilde{K}}(a,b) = \max\{\min\{(0.7,0.6),(0.8,0.2),(0.9,0.4)\}\}$$

$$= \max\{0.6, 0.2, 0.4\} = 0.6$$

$$\mu_{\tilde{E}\circ\tilde{K}}(a,c) = \max\{\min\{(0.7,0.4),(0.8,0.5),(0.9,0.3)\}\}$$

$$= \max\{0.4,0.5,0.3\} = 0.5$$

$$\mu_{\tilde{E}\circ\tilde{K}}(b,a) = \max\{\min\{(0.4,0.1),(0.6,0.3),(0.8,0.5)\}\}$$

$$= \max\{0.a,0.3,0.5\} = 0.5$$

$$\mu_{\tilde{E}\circ\tilde{K}}(b,b) = \max\{\min\{(0.4,0.6),(0.6,0.2),(0.8,0.4)\}\}$$

$$= \max\{0.4,0.2,0.4\} = 0.4$$

$$\mu_{\tilde{E}\circ\tilde{K}}(b,c) = \max\{\min\{(0.4,0.4),(0.6,0.5),(0.8,0.3)\}\}$$

$$= \max\{0.4,0.5,0.3\} = 0.5$$

$$\mu_{\tilde{E}\circ\tilde{K}}(c,a) = \max\{\min\{(0.3,0.1),(0.5,0.3),(0.7,0.5)\}\}$$

$$= \max\{0.1,0.3,0.5\} = 0.5$$

$$\mu_{\tilde{E}\circ\tilde{K}}(c,b) = \max\{\min\{(0.3,0.6),(0.5,0.2),(0.7,0.4)\}\}$$

$$= \max\{0.3,0.2,0.4\} = 0.4$$

$$\mu_{\tilde{E}\circ\tilde{K}}(c,c) = \max\{\min\{(0.3,0.4),(0.5,0.5),(0.7,0.3)\}\}$$

$$= \max\{0.3,0.5,0.3\} = 0.5$$

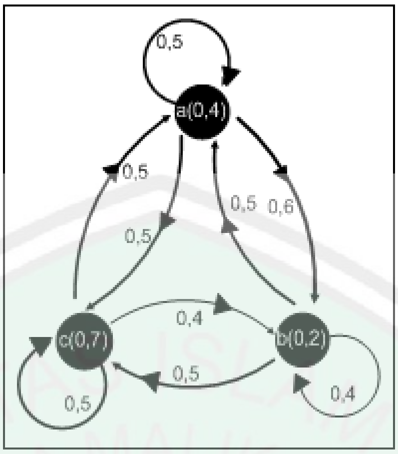
$$\tilde{E} \circ \tilde{K} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.8 & 0.9 \\ 0.4 & 0.6 & 0.8 \\ 0.3 & 0.5 & 0.7 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0.1 & 0.6 & 0.4 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.5 & 0.4 & 0.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.6 & 0.5 \\ 0.5 & 0.4 & 0.5 \\ 0.5 & 0.4 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Sehingga

$$\widetilde{D_1} \circ \left(\widetilde{D_2} \wedge \widetilde{D_3}\right)$$

$$= \Big\{\{(a,0.4),(2,0.2),(c,0.7)\},\{\big((a,a),0.5\big),\big((a,b),0.6\big),\big((a,c),0.5\big),$$

$$\big((b,a),0.5\big),\big((b,b),0.4\big),\big((b,c),0.5\big),\big((c,a),0.5\big),\big((c,b),0.4\big),\big((c,c),0.5\big)\}\Big\}$$



Gambar 3.11 Digraf dari $\widetilde{D_1}\circ\left(\widetilde{D_2}\wedge\widetilde{D_3}\right)$

Jika perhitungan ruas kiri telah mendapatkan hasil seperti di atas, sekarang kita akan melakukan perhitungan pada ruas kanan, sehingga akan ketahui apakah contoh telah sesuai dengan teoreme atau tidak.

2) Ruas kanan $(\widetilde{D_1}\circ\widetilde{D_2})\wedge(\widetilde{D_1}\circ\widetilde{D_3})$, maka

$$(\widetilde{D_1}\circ\widetilde{D_2}) = \left(\tilde{A},\tilde{E}\right)\circ\left(\tilde{B},\tilde{F}\right) = (\tilde{A}\vee\tilde{B},\tilde{E}\circ\tilde{F})$$

Berdasarkan perhitungan pada bagian sebelumnya, maka dipeoleh

$(\widetilde{D_1}\circ\widetilde{D_2})$

$= \Big\{\{(a,0.4),(b,0.5),(c,0.8)\},\{\big((a,a),0.9\big),\big((a,b),0.8\big),\big((a,c),0.9\big),$

$\big((b,a),0.8\big),\big((b,b),0.6\big),\big((b,c),0.8\big),\big((c,a),0.7\big),\big((c,b),0.5\big),\big((c,c),0.7\big)\}\Big\}$

Selanjutnya mencari nilai dari $(\widetilde{D_1}\circ\widetilde{D_3})$,yaitu

$$(\widetilde{D_1}\circ\widetilde{D_3}) = \left(\tilde{A},\tilde{E}\right)\circ\left(\tilde{C},\tilde{G}\right) = (\tilde{A}\vee\tilde{C},\tilde{E}\circ\tilde{G})$$

Berdasaran perhitungan $(\widetilde{D_1}\circ\widetilde{D_3})$ sebelumnya, maka diperoleh

$(\widetilde{D_1} \circ \widetilde{D_3})$

$= \Big\{\{(a, 0.6), (b, 0.2), (c, 0.7)\}, \{\big((a, a), 0.8\big), \big((a, b), 0.9\big), \big((a, c), 0.8\big),$

$\big((b, a), 0.6\big), \big((b, b), 0.8\big), \big((b, c), 0.6\big), \big((c, a), 0.5\big), \big((c, b), 0.7\big), \big((c, c), 0.5\big)\}\Big\}$

Dari kedua perhitungan diatas, selanjutnya dicari nilai minimumnya, yaitu

$(\widetilde{D_1} \circ \widetilde{D_2}) \wedge (\widetilde{D_1} \circ \widetilde{D_3})$

$= \Big\{\{(a, 0.4), (b, 0.5), (c, 0.8)\}, \{\big((a, a), 0.9\big), \big((a, b), 0.8\big), \big((a, c), 0.9\big),$

$\big((b, a), 0.8\big), \big((b, b), 0.6\big), \big((b, c), 0.8\big), \big((c, a), 0.7\big), \big((c, b), 0.5\big), \big((c, c), 0.7\big)\}\Big\}$

$\wedge \Big\{\{(a, 0.6), (b, 0.2), (c, 0.7)\}, \{\big((a, a), 0.8\big), \big((a, b), 0.9\big), \big((a, c), 0.8\big),$

$\big((b, a), 0.6\big), \big((b, b), 0.8\big), \big((b, c), 0.6\big), \big((c, a), 0.5\big), \big((c, b), 0.7\big), \big((c, c), 0.5\big)\}\Big\}$

$= \min\{\{(a, 0.4), (b, 0.5), (c, 0.8)\}, \{(a, 0.6), (b, 0.2), (c, 0.7)\}\},$

$\min\Big\{\{\big((a, a), 0.9\big), \big((a, b), 0.8\big), \big((a, c), 0.9\big), \big((b, a), 0.8\big), \big((b, b), 0.6\big),$

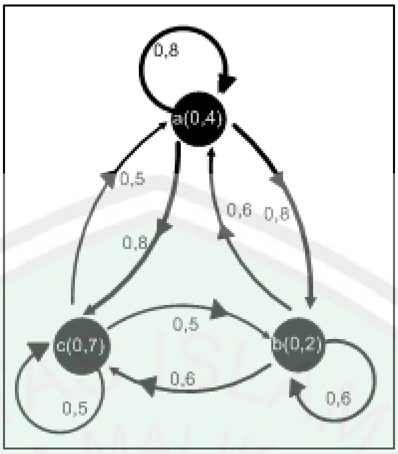
$\big((b, c), 0.8\big), \big((c, a), 0.7\big), \big((c, b), 0.5\big), \big((c, c), 0.7\big)\}, \{(a, 0.4), (b, 0.1),$

$(c, 0.5)\}, \{\big((a, a), 0.8\big), \big((a, b), 0.9\big), \big((a, c), 0.8\big), \big((b, a), 0.6\big), \big((b, b), 0.8\big),$

$\big((b, c), 0.6\big), \big((c, a), 0.5\big), \big((c, b), 0.7\big), \big((c, c), 0.5\big)\}\Big\}$

$= \Big\{\{(a, 0.4), (b, 0.2), (c, 0.7)\}, \{\big((a, a), 0.8\big), \big((a, b), 0.8\big), \big((a, c), 0.8\big),$

$\big((b, a), 0.6\big), \big((b, b), 0.6\big), \big((b, c), 0.6\big), \big((c, a), 0.5\big), \big((c, b), 0.5\big), \big((c, c), 0.5\big)\}\Big\}$



Gambar 3.12 Digraf dari $(\widetilde{D_1} \circ \widetilde{D_2}) \wedge (\widetilde{D_1} \circ \widetilde{D_3})$

Perbandingan hasil ruas kiri dan ruas kanan

$$\widetilde{D_1} \circ \left(\widetilde{D_2} \wedge \widetilde{D_3}\right) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.6 & 0.5 \\ 0.5 & 0.4 & 0.5 \\ 0.5 & 0.4 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$(\widetilde{D_1} \circ \widetilde{D_2}) \wedge (\widetilde{D_1} \circ \widetilde{D_3}) = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.8 & 0.8 \\ 0.6 & 0.6 & 0.6 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Dari hasil yang diperoleh diatas, terlihat jelas bahwa ruas kiri tidak sama dengan ruas kanan tetapi ruas kiri lebih kecil dari pada ruas kanan.

$$\widetilde{D_1} \circ \left(\widetilde{D_2} \wedge \widetilde{D_3}\right) \neq (\widetilde{D_1} \circ \widetilde{D_2}) \wedge (\widetilde{D_1} \circ \widetilde{D_3})$$

Tetapi

$$\widetilde{D_1} \circ \left(\widetilde{D_2} \wedge \widetilde{D_3}\right) \leq (\widetilde{D_1} \circ \widetilde{D_2}) \wedge (\widetilde{D_1} \circ \widetilde{D_3})$$

Hal tersebut menunjukkan bahwa contoh yang diberikan telah sesuai dengan teorema 2 bagian (2).

c. Dikerjakan dengan menggunakan teorema 2 bagian (3)

$$\boxed{\widetilde{D_1} \odot (\widetilde{D_2} \vee \widetilde{D_3}) \geq (\widetilde{D_1} \odot \widetilde{D_2}) \vee (\widetilde{D_1} \odot \widetilde{D_3})}$$

1) Ruas kiri $\widetilde{D_1} \odot (\widetilde{D_2} \vee \widetilde{D_3})$, maka

$\widetilde{D_2} \vee \widetilde{D_3} = (\tilde{B} \vee \tilde{C}, \tilde{F} \vee \tilde{G})$

Dari Perhitungan $\widetilde{D_2} \vee \widetilde{D_3}$ pada pembuktian teorema 2 bagian (1) diperoleh

$\tilde{B} \vee \tilde{C} = \tilde{H} = \{(a, 0.6), (b, 0.5), (c, 0.8)\}$

$\tilde{F} \vee \tilde{G} = \tilde{I} = \{((a, a), 0.7), ((a, b), 0.7), ((a, c), 0.7), ((b, a), 0.8), ((b, b), 0.8),$
$((b, c), 0.8), ((c, a), 0.9), ((c, b), 0.9), ((c, c), 0.9)\}$

Jika dalam bentuk matriks, $\tilde{I} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.7 & 0.7 \\ 0.8 & 0.8 & 0.8 \\ 0.9 & 0.9 & 0.9 \end{bmatrix}$

$\widetilde{D_1} \odot (\widetilde{D_2} \vee \widetilde{D_3}) = (\tilde{A}, \tilde{E}) \odot (\tilde{H}, \tilde{I}) = (\tilde{A} \vee \tilde{H}, \tilde{E} \odot \tilde{I})$

$\tilde{A} \vee \tilde{H} = \{\{(a, 0.4), (b, 0.2), (c, 0.5)\} \vee \{(a, 0.6), (b, 0.5), (c, 0.8)\}\}$

$= \max\{\{(a, 0.4), (b, 0.2), (c, 0.5)\} \vee \{(a, 0.6), (b, 0.5), (c, 0.8)\}\}$

$= \{(a, 0.6), (b, 0.5), (c, 0.8)\}$

$\tilde{E} \odot \tilde{I} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.8 & 0.9 \\ 0.4 & 0.6 & 0.8 \\ 0.3 & 0.5 & 0.7 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0.7 & 0.7 & 0.7 \\ 0.8 & 0.8 & 0.8 \\ 0.9 & 0.9 & 0.9 \end{bmatrix}$

$\mu_{\tilde{E} \odot \tilde{I}}(a, a) = \min\{\max\{(0.7, 0.7), (0.8, 0.8), (0.9, 0.9)\}\}$

$= \min\{0.7, 0.8, 0.9\} = 0.7$

$\mu_{\tilde{E} \odot \tilde{I}}(a, b) = \min\{\max\{(0.7, 0.7), (0.8, 0.8), (0.9, 0.9)\}\}$

$= \min\{0.7, 0.8, 0.9\} = 0.7$

$$\mu_{\tilde{E}\odot\tilde{I}}(a,c) = \min\{\max\{(0.7, 0.7), (0.8, 0.8), (0.9, 0.9)\}\}$$

$$= \min\{0.7, 0.8, 0.9\} = 0.7$$

$$\mu_{\tilde{E}\odot\tilde{I}}(b,a) = \min\{\max\{(0.4, 0.7), (0.6, 0.8), (0.8, 0.9)\}\}$$

$$= \min\{0.7, 0.8, 0.9\} = 0.7$$

$$\mu_{\tilde{E}\odot\tilde{I}}(b,b) = \min\{\max\{(0.4, 0.7), (0.6, 0.8), (0.8, 0.9)\}\}$$

$$= \min\{0.7, 0.8, 0.9\} = 0.7$$

$$\mu_{\tilde{E}\odot\tilde{I}}(b,c) = \min\{\max\{(0.4, 0.7), (0.6, 0.8), (0.8, 0.9)\}\}$$

$$= \min\{0.7, 0.8, 0.9\} = 0.7$$

$$\mu_{\tilde{E}\odot\tilde{I}}(c,a) = \min\{\max\{(0.3, 0.7), (0.5, 0.8), (0.7, 0.9)\}\}$$

$$= \min\{0.7, 0.8, 0.9\} = 0.7$$

$$\mu_{\tilde{E}\odot\tilde{I}}(c,b) = \min\{\max\{(0.3, 0.7), (0.5, 0.8), (0.7, 0.9)\}\}$$

$$= \min\{0.7, 0.8, 0.9\} = 0.7$$

$$\mu_{\tilde{E}\odot\tilde{I}}(c,c) = \min\{\max\{(0.3, 0.7), (0.5, 0.8), (0.7, 0.9)\}\}$$

$$= \min\{0.7, 0.8, 0.9\} = 0.7$$

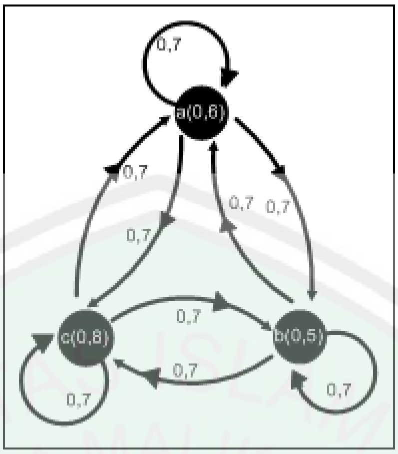
$$\tilde{E}\odot\tilde{I} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.8 & 0.9 \\ 0.4 & 0.6 & 0.8 \\ 0.3 & 0.5 & 0.7 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0.7 & 0.7 & 0.7 \\ 0.8 & 0.8 & 0.8 \\ 0.9 & 0.9 & 0.9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.7 & 0.7 \\ 0.7 & 0.7 & 0.7 \\ 0.7 & 0.7 & 0.7 \end{bmatrix}$$

Sehingga

$$\widetilde{D_1}\odot\left(\widetilde{D_2} \vee \widetilde{D_3}\right)$$

$$= \Big\{\{(a, 0.6), (b, 0.5), (c, 0.8)\}, \{\big((a,a), 0.7\big), \big((a,b), 0.7\big), \big((a,c), 0.7\big),$$

$$\big((b,a), 0.7\big), \big((b,b), 0.7\big), \big((b,c), 0.7\big), \big((c,a), 0.7\big), \big((c,b), 0.7\big), \big((c,c), 0.7\big)\}\Big\}$$



Gambar 3.13 Digraf dari $\widetilde{D_1} \odot \left(\widetilde{D_2} \vee \widetilde{D_3}\right)$

Jika perhitungan ruas kiri telah mendapatkan hasil seperti di atas, sekarang kita akan melakukan perhitungan pada ruas kanan, apakah akan diperoleh hasil yang sama dengan ruas kiri.

2) Ruas kanan $(\widetilde{D_1} \odot \widetilde{D_2}) \vee (\widetilde{D_1} \odot \widetilde{D_3})$, maka

$$(\widetilde{D_1} \odot \widetilde{D_2}) = \left(\tilde{A}, \tilde{E}\right) \odot \left(\tilde{B}, \tilde{F}\right) = (\tilde{A} \vee \tilde{B}, \tilde{E} \odot \tilde{F})$$

Berdasarkan perhitungan pada bagian sebelumnya, maka diperoleh

$(\widetilde{D_1} \odot \widetilde{D_2})$

$= \Big\{\{(a, 0.4), (b, 0.5), (c, 0.8)\}, \big\{\big((a, a), 0.7\big), \big((a, b), 0.7\big), \big((a, c), 0.7\big),$

$\big((b, a), 0.6\big), \big((b, b), 0.6\big), \big((b, c), 0.6\big), \big((c, a), 0.5\big), \big((c, b), 0.6\big), \big((c, c), 0.5\big)\big\}\Big\}$

$$(\widetilde{D_1} \odot \widetilde{D_3}) = \left(\tilde{A}, \tilde{E}\right) \odot \left(\tilde{C}, \tilde{G}\right) = (\tilde{A} \vee \tilde{C}, \tilde{E} \odot \tilde{G})$$

$\tilde{A} \vee \tilde{C} = \{\{(a, 0.4), (b, 0.2), (c, 0.5)\} \vee \{(a, 0.6), (b, 0.1), (c, 0.7)\}\}$

$\qquad = \{(a, 0.6), (b, 0.2), (c, 0.7)\}$

$$\tilde{E} \odot \tilde{G} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.8 & 0.9 \\ 0.4 & 0.6 & 0.8 \\ 0.3 & 0.5 & 0.7 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0.1 & 0.7 & 0.4 \\ 0.8 & 0.2 & 0.8 \\ 0.5 & 0.9 & 0.3 \end{bmatrix}$$

$$\mu_{\tilde{E}\odot\tilde{G}}(a,a) = \min\{\max\{(0.7, 0.1), (0.8, 0.8), (0.9, 0.5)\}\}$$

$$= \min\{0.7, 0.8, 0.9\} = 0.7$$

$$\mu_{\tilde{E}\odot\tilde{G}}(a,b) = \min\{\max\{(0.7, 0.7), (0.8, 0.2), (0.9, 0.9)\}\}$$

$$= \min\{0.7, 0.8, 0.9\} = 0.7$$

$$\mu_{\tilde{E}\odot\tilde{G}}(a,c) = \min\{\max\{(0.7, 0.4), (0.8, 0.8), (0.9, 0.3)\}\}$$

$$= \min\{0.7, 0.8, 0.9\} = 0.7$$

$$\mu_{\tilde{E}\odot\tilde{G}}(b,a) = \min\{\max\{(0.4, 0.1), (0.6, 0.8), (0.8, 0.5)\}\}$$

$$= \min\{0.4, 0.8, 0.8\} = 0.4$$

$$\mu_{\tilde{E}\odot\tilde{G}}(b,b) = \min\{\max\{(0.4, 0.7), (0.6, 0.2), (0.8, 0.9)\}\}$$

$$= \min\{0.7, 0.6, 0.9\} = 0.6$$

$$\mu_{\tilde{E}\odot\tilde{G}}(b,c) = \min\{\max\{(0.4, 0.4), (0.6, 0.8), (0.8, 0.3)\}\}$$

$$= \min\{0.4, 0.8, 0.8\} = 0.4$$

$$\mu_{\tilde{E}\odot\tilde{G}}(c,a) = \min\{\max\{(0.3, 0.1), (0.5, 0.8), (0.7, 0.5)\}\}$$

$$= \min\{0.3, 0.8, 0.7\} = 0.3$$

$$\mu_{\tilde{E}\odot\tilde{G}}(c,b) = \min\{\max\{(0.3, 0.7), (0.5, 0.2), (0.7, 0.9)\}\}$$

$$= \min\{0.7, 0.5, 0.9\} = 0.5$$

$$\mu_{\tilde{E}\odot\tilde{G}}(c,c) = \min\{\max\{(0.3, 0.4), (0.5, 0.8), (0.7, 0.3)\}\}$$

$$= \min\{0.4, 0.8, 0.7\} = 0.4$$

$$\tilde{E}\odot\tilde{G} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.8 & 0.9 \\ 0.4 & 0.6 & 0.8 \\ 0.3 & 0.5 & 0.7 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0.1 & 0.7 & 0.4 \\ 0.8 & 0.2 & 0.8 \\ 0.5 & 0.9 & 0.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.7 & 0.7 \\ 0.4 & 0.6 & 0.4 \\ 0.3 & 0.5 & 0.4 \end{bmatrix}$$

Sehingga

$(\widetilde{D_1} \odot \widetilde{D_3})$

$= \{\{(a, 0.6), (b, 0.2), (c, 0.7)\}, \{((a, a), 0.7), ((a, b), 0.7), ((a, c), 0.7),$

$((b, a), 0.8), ((b, b), 0.6), ((b, c), 0.8), ((c, a), 0.3), ((c, b), 0.5), ((c, c), 0.4)\}\}$

Jadi,

$(\widetilde{D_1} \odot \widetilde{D_2}) \vee (\widetilde{D_1} \odot \widetilde{D_3})$

$= \{\{(a, 0.4), (b, 0.5), (c, 0.8)\}, \{((a, a), 0.7), ((a, b), 0.7), ((a, c), 0.7), ((b, a), 0.6),$

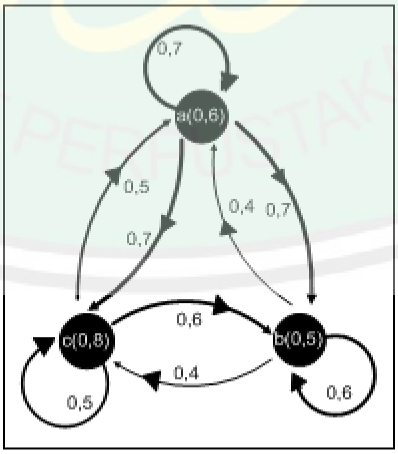
$((b, b), 0.6), ((b, c), 0.6), ((c, a), 0.5), ((c, b), 0.6), ((c, c), 0.5)\}\}$

$\vee \{\{(a, 0.6), (b, 0.2), (c, 0.7)\}, \{((a, a), 0.7), ((a, b), 0.7), ((a, c), 0.7), ((b, a), 0.8),$

$((b, b), 0.6), ((b, c), 0.8), ((c, a), 0.3), ((c, b), 0.5), ((c, c), 0.4)\}\}$

$= \{\{(a, 0.6), (b, 0.5), (c, 0.8)\}, \{((a, a), 0.7), ((a, b), 0.7), ((a, c), 0.7),$

$((b, a), 0.4), ((b, b), 0.6), ((b, c), 0.4), ((c, a), 0.5), ((c, b), 0.6), ((c, c), 0.5)\}\}$



Gambar 3.14 Digraf dari $(\widetilde{D_1} \odot \widetilde{D_2}) \vee (\widetilde{D_1} \odot \widetilde{D_3})$

Perbandingan hasil ruas kiri dan ruas kanan

$$\widetilde{D_1} \odot \left(\widetilde{D_2} \wedge \widetilde{D_3}\right) = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.7 & 0.7 \\ 0.7 & 0.7 & 0.7 \\ 0.7 & 0.7 & 0.7 \end{bmatrix}$$

$$(\widetilde{D_1} \odot \widetilde{D_2}) \vee (\widetilde{D_1} \odot \widetilde{D_3}) = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.7 & 0.7 \\ 0.4 & 0.6 & 0.4 \\ 0.5 & 0.6 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Dari hasil yang diperoleh diatas, terlihat jelas bahwa ruas kiri tidak sama dengan ruas kanan tetapi ruas kiri lebih besar dari pada ruas kanan.

$$\widetilde{D_1} \odot \left(\widetilde{D_2} \wedge \widetilde{D_3}\right) \neq (\widetilde{D_1} \odot \widetilde{D_2}) \vee (\widetilde{D_1} \odot \widetilde{D_3})$$

Tetapi

$$\widetilde{D_1} \odot \left(\widetilde{D_2} \wedge \widetilde{D_3}\right) \geq (\widetilde{D_1} \odot \widetilde{D_2}) \vee (\widetilde{D_1} \odot \widetilde{D_3})$$

d. Dikerjakan dengan menggunakan teorema 2 bagian (4)

$$\boxed{\widetilde{D_1} \odot \left(\widetilde{D_2} \wedge \widetilde{D_3}\right) = (\widetilde{D_1} \odot \widetilde{D_2}) \wedge (\widetilde{D_1} \odot \widetilde{D_3})}$$

1) Ruas kiri $\widetilde{D_1} \odot \left(\widetilde{D_2} \wedge \widetilde{D_3}\right)$, maka

$\widetilde{D_2} \wedge \widetilde{D_3} = \left(\tilde{B} \wedge \tilde{C}, \tilde{F} \wedge \tilde{G}\right)$

Berdasarkan perhitungan $\widetilde{D_2} \wedge \widetilde{D_3}$ sebelumnya diperoleh

$\tilde{B} \wedge \tilde{C} = \widetilde{H} = \{(a, 0.3), (b, 0.1), (c, 0.7)\}$

$$\tilde{F} \wedge \tilde{G} = \tilde{I} = \{((a,a), 0.1), ((a,b), 0.6), ((a,c), 0.4), ((b,a), 0.3), ((b,b), 0.2), ((b,c), 0.5), ((c,a), 0.5), ((c,b), 0.4), ((c,c), 0.3)\}$$

Jika dalam bentuk matriks, $\tilde{I} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.6 & 0.4 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.5 & 0.4 & 0.3 \end{bmatrix}$

$$\widetilde{D_1}\odot(\widetilde{D_2}\wedge\widetilde{D_3}) = (\tilde{A},\tilde{E})\odot(\tilde{H},\tilde{I}) = (\tilde{A}\vee\tilde{H},\tilde{E}\odot\tilde{I})$$

$$\tilde{A}\vee\tilde{H} = \{\{(a,0.4),(b,0.2),(c,0.5)\}\vee\{(a,0.c),(b,0.1),(c,0.7)\}\}$$

$$= \{(a,0.4),(b,0.2),(c,0.7)\}$$

$$\tilde{E}\odot\tilde{I} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.8 & 0.9 \\ 0.4 & 0.6 & 0.8 \\ 0.3 & 0.5 & 0.7 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0.1 & 0.6 & 0.4 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.5 & 0.4 & 0.3 \end{bmatrix}$$

$$\mu_{\tilde{E}\odot\tilde{I}}(a,a) = \min\{\max\{(0.7,0.1),(0.8,0.3),(0.9,0.5)\}\}$$

$$= \min\{0.7,0.8,0.9\} = 0.7$$

$$\mu_{\tilde{E}\odot\tilde{I}}(a,b) = \min\{\max\{(0.7,0.6),(0.8,0.2),(0.9,0.4)\}\}$$

$$= \min\{0.7,0.8,0.9\} = 0.7$$

$$\mu_{\tilde{E}\odot\tilde{I}}(a,c) = \min\{\max\{(0.7,0.4),(0.8,0.5),(0.9,0.3)\}\}$$

$$= \min\{0.7,0.8,0.9\} = 0.7$$

$$\mu_{\tilde{E}\odot\tilde{I}}(b,a) = \min\{\max\{(0.4,0.1),(0.6,0.3),(0.8,0.5)\}\}$$

$$= \min\{0.4,0.6,0.8\} = 0.4$$

$$\mu_{\tilde{E}\odot\tilde{I}}(b,b) = \min\{\max\{(0.4,0.6),(0.6,0.2),(0.8,0.4)\}\}$$

$$= \min\{0.6,0.6,0.8\} = 0.6$$

$$\mu_{\tilde{E}\odot\tilde{I}}(b,c) = \min\{\max\{(0.4,0.4),(0.6,0.5),(0.8,0.3)\}\}$$

$$= \min\{0.4,0.6,0.8\} = 0.4$$

$$\mu_{\tilde{E}\odot\tilde{I}}(c,a) = \min\{\max\{(0.3,0.1),(0.5,0.3),(0.7,0.5)\}\}$$

$$= \min\{0.3,0.5,0.7\} = 0.3$$

$$\mu_{\tilde{E}\odot\tilde{I}}(c,b) = \min\{\max\{(0.3,0.6),(0.5,0.2),(0.7,0.4)\}\}$$

$$= \min\{0.6,0.5,0.7\} = 0.5$$

$$\mu_{\tilde{E}\odot\tilde{I}}(b,c) = \min\{\max\{(0.3, 0.4), (0.5, 0.5), (0.7, 0.3)\}\}$$

$$= \min\{0.4, 0.5, 0.7\} = 0.4$$

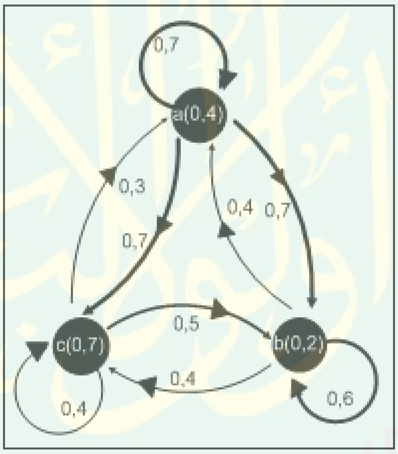
$$\tilde{E}\odot\tilde{I} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.8 & 0.9 \\ 0.4 & 0.6 & 0.8 \\ 0.3 & 0.5 & 0.7 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0.1 & 0.6 & 0.4 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.5 & 0.4 & 0.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.7 & 0.7 \\ 0.4 & 0.6 & 0.4 \\ 0.3 & 0.5 & 0.4 \end{bmatrix}$$

Sehingga

$\widetilde{D_1}\odot(\widetilde{D_2}\wedge\widetilde{D_3})$

$= \{\{(a, 0.4), (b, 0.2), (c, 0.7)\}\}, \{((a,a), 0.7), ((a,b), 0.7), ((a,c), 0.7),$

$((b,a), 0.4), ((b,b), 0.6), ((b,c), 0.4), ((c,a), 0.3), ((c,b), 0.5), ((c,c), 0.4)\}$



Gambar 3.15 Digraf dari $\widetilde{D_1}\odot(\widetilde{D_2}\wedge\widetilde{D_3})$

Jika perhitungan ruas kiri telah mendapatkan hasil seperti di atas, sekarang kita akan melakukan perhitungan pada ruas kanan, apakah akan diperoleh hasil yang sama dengan ruas kiri.

2) Ruas kanan $(\widetilde{D_1}\odot\widetilde{D_2}) \wedge (\widetilde{D_1}\odot\widetilde{D_3})$, maka

$$(\widetilde{D_1}\odot\widetilde{D_2}) = (\tilde{A}, \tilde{E})\odot(\tilde{B}, \tilde{F}) = (\tilde{A}\vee\tilde{B}, \tilde{E}\odot\tilde{F})$$

Berdasarkan perhitungan $(\widetilde{D_1}\odot\widetilde{D_2})$ sebelumnya, maka diperoleh

$(\widetilde{D_1} \odot \widetilde{D_2})$

$= \{\{(a, 0.4), (b, 0.5), (c, 0.8)\}, \{((a, a), 0.7), ((a, b), 0.7), ((a, c), 0.7),$

$((b, a), 0.6), ((b, b), 0.6), ((b, c), 0.6), ((c, a), 0.5), ((c, b), 0.6), ((c, c), 0.5)\}\}$

$$(\widetilde{D_1} \odot \widetilde{D_3}) = (\tilde{A}, \tilde{E}) \odot (\tilde{C}, \tilde{G}) = (\tilde{A} \vee \tilde{C}, \tilde{E} \odot \tilde{G})$$

Berdasarkan perhitungan $(\widetilde{D_1} \odot \widetilde{D_3})$ sebelumnya, maka diperoleh

$(\widetilde{D_1} \odot \widetilde{D_3})$

$= \{\{(a, 0.6), (b, 0.2), (c, 0.7)\}, \{((a, a), 0.7), ((a, b), 0.7), ((a, c), 0.7),$

$((b, a), 0.4), ((b, b), 0.6), ((b, c), 0.4), ((c, a), 0.3), ((c, b), 0.5), ((c, c), 0.4)\}\}$

Sehingga,

$(\widetilde{D_1} \odot \widetilde{D_2}) \wedge (\widetilde{D_1} \odot \widetilde{D_3})$

$= \{\{(a, 0.4), (b, 0.5), (c, 0.8)\}, \{((a, a), 0.7), ((a, b), 0.7), ((a, c), 0.7),$

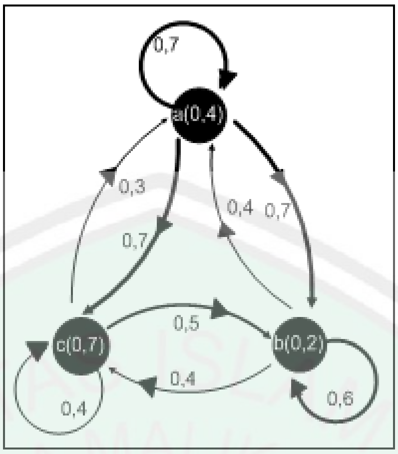
$((b, a), 0.6), ((b, b), 0.6), ((b, c), 0.6), ((c, a), 0.5), ((c, b), 0.6), ((c, c), 0.5)\}\}$

$\wedge \{\{(a, 0.6), (b, 0.2), (c, 0.7)\}, \{((a, a), 0.7), ((a, b), 0.7), ((a, c), 0.7),$

$((b, a), 0.4), ((b, b), 0.6), ((b, c), 0.4), ((c, a), 0.3), ((c, b), 0.5), ((c, c), 0.4)\}\}$

$= \{\{(a, 0.4), (b, 0.2), (c, 0.7)\}, \{((a, a), 0.7), ((a, b), 0.7), ((a, c), 0.7),$

$((b, a), 0.4), ((b, b), 0.6), ((b, c), 0.4), ((c, a), 0.3), ((c, b), 0.5), ((c, c), 0.4)\}\}$



Gambar 3.16 Digraf dari $(\widetilde{D_1} \odot \widetilde{D_2}) \wedge (\widetilde{D_1} \odot \widetilde{D_3})$

Dari hasil perhitungan tersebut, terlihat bahwa $\widetilde{D_1} \odot (\widetilde{D_2} \wedge \widetilde{D_3}) = (\widetilde{D_1} \odot \widetilde{D_2}) \wedge (\widetilde{D_1} \odot \widetilde{D_3})$

e. Dikerjakan dengan menggunakan teorema 2 bagian (5)

$$\boxed{\widetilde{D_1} * (\widetilde{D_2} \vee \widetilde{D_3}) \geq (\widetilde{D_1} * \widetilde{D_2}) \vee (\widetilde{D_1} * \widetilde{D_3})}$$

1) Ruas kiri

$\widetilde{D_1} * (\widetilde{D_2} \vee \widetilde{D_3})$

Berdasarkan hasil perhitungan $\widetilde{D_2} \vee \widetilde{D_3}$ sebelumnya diperoleh

$\tilde{B} \vee \tilde{C} = \tilde{H} = \{(a, 0.6), (b, 0.5), (c, 0.8)\}$

$$\tilde{F} \vee \tilde{G} = \tilde{I} = \{((a,a), 0.7), ((a,b), 0.7), ((a,c), 0.7), ((b,a), 0.8), ((b,b), 0.8), ((b,c), 0.8), ((c,a), 0.9), ((c,b), 0.9), ((c,c), 0.9)\}$$

Jika dalam bentuk matriks, $\tilde{I} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.7 & 0.7 \\ 0.8 & 0.8 & 0.8 \\ 0.9 & 0.9 & 0.9 \end{bmatrix}$

$\widetilde{D_1} * (\widetilde{D_2} \vee \widetilde{D_3}) = (\tilde{A}, \tilde{E}) * (\tilde{H}, \tilde{I}) = (\tilde{A} \vee \tilde{H}, \tilde{E} * \tilde{I})$

$$\widetilde{A} \vee \widetilde{H} = \{\{(a, 0.4), (b, 0.2), (c, 0.5)\} \vee \{(a, 0.6), (b, 0.5), (c, 0.8)\}\}$$

$$= \{(a, 0.6), (b, 0.5), (c, 0.8)\}$$

$$\tilde{E} * \tilde{I} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.8 & 0.9 \\ 0.4 & 0.6 & 0.8 \\ 0.3 & 0.5 & 0.7 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0.7 & 0.7 & 0.7 \\ 0.8 & 0.8 & 0.8 \\ 0.9 & 0.9 & 0.9 \end{bmatrix}$$

$$\mu_{\tilde{E} * \tilde{I}}(a, a) = \min\{\min\{(0.7, 0.7), (0.8, 0.8), (0.9, 0.9)\}\}$$

$$= \min\{0.7, 0.8, 0.9\} = 0.7$$

$$\mu_{\tilde{E} * \tilde{I}}(a, b) = \min\{\min\{(0.7, 0.7), (0.8, 0.8), (0.9, 0.9)\}\}$$

$$= \min\{0.7, 0.8, 0.9\} = 0.7$$

$$\mu_{\tilde{E} * \tilde{I}}(a, c) = \min\{\min\{(0.7, 0.7), (0.8, 0.8), (0.9, 0.9)\}\}$$

$$= \min\{0.7, 0.8, 0.9\} = 0.7$$

$$\mu_{\tilde{E} * \tilde{I}}(b, a) = \min\{\min\{(0.4, 0.7), (0.6, 0.8), (0.8, 0.9)\}\}$$

$$= \min\{0.4, 0.6, 0.8\} = 0.4$$

$$\mu_{\tilde{E} * \tilde{I}}(b, b) = \min\{\min\{(0.4, 0.7), (0.6, 0.8), (0.8, 0.9)\}\}$$

$$= \min\{0.4, 0.6, 0.8\} = 0.4$$

$$\mu_{\tilde{E} * \tilde{I}}(b, c) = \min\{\min\{(0.4, 0.7), (0.6, 0.8), (0.8, 0.9)\}\}$$

$$= \min\{0.4, 0.6, 0.8\} = 0.4$$

$$\mu_{\tilde{E} * \tilde{I}}(c, a) = \min\{\min\{(0.3, 0.7), (0.5, 0.8), (0.7, 0.9)\}\}$$

$$= \min\{0.3, 0.5, 0.7\} = 0.3$$

$$\mu_{\tilde{E} * \tilde{I}}(c, b) = \min\{\min\{(0.3, 0.7), (0.5, 0.8), (0.7, 0.9)\}\}$$

$$= \min\{0.3, 0.5, 0.7\} = 0.3$$

$$\mu_{\tilde{E} * \tilde{I}}(c, c) = \min\{\min\{(0.3, 0.7), (0.5, 0.8), (0.7, 0.9)\}\}$$

$$= \min\{0.3, 0.5, 0.7\} = 0.3$$

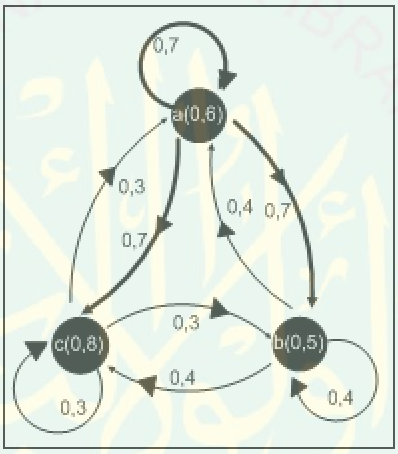
$$\tilde{E} * \tilde{I} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.8 & 0.9 \\ 0.4 & 0.6 & 0.8 \\ 0.3 & 0.5 & 0.7 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0.7 & 0.7 & 0.7 \\ 0.8 & 0.8 & 0.8 \\ 0.9 & 0.9 & 0.9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.7 & 0.7 \\ 0.4 & 0.4 & 0.4 \\ 0.3 & 0.3 & 0.3 \end{bmatrix}$$

Sehingga

$\widetilde{D_1} * (\widetilde{D_2} \vee \widetilde{D_3})$

$= \{\{(a, 0.6), (b, 0.5), (c, 0.8)\}, \{((a, a), 0.7), ((a, b), 0.7), ((a, c), 0.7),$

$((b, a), 0.4), ((b, b), 0.4), ((b, c), 0.4), ((c, a), 0.3), ((c, b), 0.3), ((c, c), 0.3)\}\}$



Gambar 3.17 Digraf dari $\widetilde{D_1} * (\widetilde{D_2} \vee \widetilde{D_3})$

Jika perhitungan ruas kiri telah mendapatkan hasil seperti di atas, sekarang kita akan melakukan perhitungan pada ruas kanan, apakah akan diperoleh hasil yang sama dengan ruas kiri.

2) Ruas kanan $(\widetilde{D_1} * \widetilde{D_2}) \vee (\widetilde{D_1} * \widetilde{D_3})$, maka

$$(\widetilde{D_1} * \widetilde{D_2}) = (\tilde{A}, \tilde{E}) * (\tilde{B}, \tilde{F}) = (\tilde{A} \vee \tilde{B}, \tilde{E} * \tilde{F})$$

Berdasarkan perhitungan $(\widetilde{D_1} * \widetilde{D_2})$ pada bagian sebelumnya diperoleh

$(\widetilde{D_1} * \widetilde{D_2}) = \{\{(a, 0.4), (b, 0.5), (c, 0.8)\}, \{((a, a), 0.3), ((a, b), 0.4), ((a, c), 0.5),$

$((b, a), 0.3), ((b, b), 0.4), ((b, c), 0.4), ((c, a), 0.3), ((c, b), 0.3), ((c, c), 0.3)\}\}$

$$(\widetilde{D_1} * \widetilde{D_3}) = (\tilde{A}, \tilde{E}) * (\tilde{C}, \tilde{G}) = (\tilde{A} \vee \tilde{C}, \tilde{E} * \tilde{G})$$

$$\tilde{A} \vee \tilde{C} = \{\{(a, 0.4), (b, 0.2), (c, 0.5)\} \vee \{(a, 0.6), (b, 0.1), (c, 0.7)\}\}$$

$$= \{(a, 0.6), (b, 0.2), (c, 0.7)\}$$

$$\tilde{E} * \tilde{G} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.8 & 0.9 \\ 0.4 & 0.6 & 0.8 \\ 0.3 & 0.5 & 0.7 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0.1 & 0.7 & 0.4 \\ 0.8 & 0.2 & 0.8 \\ 0.5 & 0.9 & 0.3 \end{bmatrix}$$

$$\mu_{\tilde{E}*\tilde{G}}(a, a) = \min\{\min\{(0.7, 0.1), (0.8, 0.8), (0.9, 0.5)\}\}$$

$$= \min\{0.1, 0.8, 0.5\} = 0.1$$

$$\mu_{\tilde{E}*\tilde{G}}(a, b) = \min\{\min\{(0.7, 0.7), (0.8, 0.2), (0.9, 0.9)\}\}$$

$$= \min\{0.7, 0.2, 0.9\} = 0.2$$

$$\mu_{\tilde{E}*\tilde{G}}(a, 3) = \min\{\min\{(0.7, 0.4), (0.8, 0.8), (0.9, 0.3)\}\}$$

$$= \min\{0.4, 0.8, 0.3\} = 0.3$$

$$\mu_{\tilde{E}*\tilde{G}}(b, a) = \min\{\min\{(0.4, 0.1), (0.6, 0.8), (0.8, 0.5)\}\}$$

$$= \min\{0. a, 0.6, 0.5\} = 0.1$$

$$\mu_{\tilde{E}*\tilde{G}}(b, b) = \min\{\min\{(0.4, 0.7), (0.6, 0.2), (0.8, 0.9)\}\}$$

$$= \min\{0.4, 0.2, 0.8\} = 0.2$$

$$\mu_{\tilde{E}*\tilde{G}}(b, c) = \min\{\min\{(0.4, 0.4), (0.6, 0.8), (0.8, 0.3)\}\}$$

$$= \min\{0.4, 0.6, 0.3\} = 0.3$$

$$\mu_{\tilde{E}*\tilde{G}}(c, a) = \min\{\min\{(0.3, 0.1), (0.5, 0.8), (0.7, 0.5)\}\}$$

$$= \min\{0.1, 0.5, 0.5\} = 0.1$$

$$\mu_{\tilde{E}*\tilde{G}}(c, b) = \min\{\min\{(0.3, 0.7), (0.5, 0.2), (0.7, 0.9)\}\}$$

$$= \min\{0.3, 0.2, 0.7\} = 0.2$$

$$\mu_{\tilde{E}*\tilde{G}}(c, c) = \min\{\min\{(0.3, 0.4), (0.5, 0.8), (0.7, 0.3)\}\}$$

$$= \min\{0.3, 0.5, 0.3\} = 0.3$$

$$\tilde{E} * \tilde{G} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.8 & 0.9 \\ 0.4 & 0.6 & 0.8 \\ 0.3 & 0.5 & 0.7 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0.1 & 0.7 & 0.4 \\ 0.8 & 0.2 & 0.8 \\ 0.5 & 0.9 & 0.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 \end{bmatrix}$$

Sehingga

$(\widetilde{D_1} * \widetilde{D_3}) = \{\{(a, 0.6), (b, 0.2), (c, 0.7)\}, \{((a, a), 0.1), ((a, b), 0.2), ((a, c), 0.3),$

$((b, a), 0.1), ((b, b), 0.2), ((b, c), 0.3), ((c, a), 0.1), ((c, b), 0.2), ((c, c), 0.3)\}\}$

Jadi,

$(\widetilde{D_1} * \widetilde{D_2}) \vee (\widetilde{D_1} * \widetilde{D_3})$

$= \{\{(a, 0.4), (b, 0.5), (c, 0.8)\}, \{((a, a), 0.3), ((a, b), 0.4), ((a, c), 0.5),$

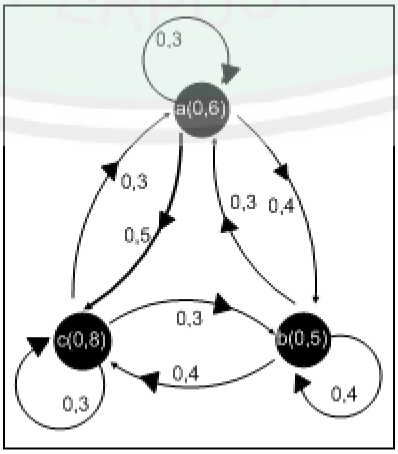
$((b, a), 0.3), ((b, b), 0.4), ((b, c), 0.4), ((c, a), 0.3), ((c, b), 0.3), ((c, c), 0.3)\}\}$

$\vee \{\{(a, 0.6), (b, 0.2), (c, 0.7)\}, \{((a, a), 0.1), ((a, b), 0.2), ((a, c), 0.3),$

$((b, a), 0.1), ((b, b), 0.2), ((b, c), 0.3), ((c, a), 0.1), ((c, b), 0.2), ((c, c), 0.3)\}\}$

$= \{\{(a, 0.6), (b, 0.5), (c, 0.8)\}, \{((a, a), 0.3), ((a, b), 0.4), ((a, c), 0.5),$

$((b, a), 0.3), ((b, b), 0.4), ((b, c), 0.4), ((c, a), 0.3), ((c, b), 0.3), ((c, c), 0.3)\}\}$



Gambar 3.18 Digraf dari $(\widetilde{D_1} * \widetilde{D_2}) \vee (\widetilde{D_1} * \widetilde{D_3})$

Perbandingan hasil ruas kiri dan ruas kanan

$$\widetilde{D_1} * (\widetilde{D_2} \vee \widetilde{D_3}) = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.7 & 0.7 \\ 0.4 & 0.4 & 0.4 \\ 03 & 0.3 & 0.3 \end{bmatrix}$$

$$(\widetilde{D_1} * \widetilde{D_2}) \vee (\widetilde{D_1} * \widetilde{D_3}) = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.4 & 0.5 \\ 0.3 & 0.4 & 0.4 \\ 0.3 & 0.3 & 0.3 \end{bmatrix}$$

Dari hasil yang diperoleh diatas, terlihat jelas bahwa ruas kiri tidak sama dengan ruas kanan tetapi ruas kiri lebih besar dari pada ruas kanan.

$$\widetilde{D_1} * (\widetilde{D_2} \vee \widetilde{D_3}) \neq (\widetilde{D_1} * \widetilde{D_2}) \vee (\widetilde{D_1} * \widetilde{D_3})$$

Tetapi

$$\widetilde{D_1} * (\widetilde{D_2} \vee \widetilde{D_3}) \geq (\widetilde{D_1} * \widetilde{D_2}) \vee (\widetilde{D_1} * \widetilde{D_3})$$

e. Dikerjakan dengan menggunakan teorema 2 bagian (6)

$$\boxed{\widetilde{D_1} * (\widetilde{D_2} \wedge \widetilde{D_3}) = (\widetilde{D_1} * \widetilde{D_2}) \wedge (\widetilde{D_1} * \widetilde{D_3})}$$

1) Ruas kiri $\widetilde{D_1} * (\widetilde{D_2} \wedge \widetilde{D_3})$, maka

$$\widetilde{D_2} \wedge \widetilde{D_3} = (\tilde{B} \wedge \tilde{C}, \tilde{F} \wedge \tilde{G})$$

Berdasarkan perhitungan $\widetilde{D_2} \wedge \widetilde{D_3}$ sebelumnya, maka diperoleh

$\tilde{B} \wedge \tilde{C} = \tilde{J} = \{(a, 0.3), (b, 0.1), (c, 0.7)\}$

$\tilde{F} \wedge \tilde{G} = \tilde{K} = \{((a,a), 0.1), ((a,b), 0.6), ((a,c), 0.4), ((b,a), 0.3),$

$((b,b), 0.2), ((b,c), 0.5), ((c,a), 0.5), ((c,b), 0.4), ((c,c), 0.3)\}$

Jika dalam bentuk matriks, $\tilde{K} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.6 & 0.4 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.5 & 0.4 & 0.3 \end{bmatrix}$

$$\widetilde{D_1} * (\widetilde{D_2} \wedge \widetilde{D_3}) = (\tilde{A}, \tilde{E}) * (\tilde{J}, K) = (\tilde{A} \vee \tilde{J}, \tilde{E} * \tilde{K})$$

$$\widetilde{A} \vee \tilde{J} = \{\{(a, 0.4), (b, 0.2), (c, 0.5)\} \vee \{(a, 0.3), (b, 0.1), (c, 0.7)\}\}$$

$$= \{(a, 0.4), (b, 0.2), (c, 0.7)\}$$

$$\tilde{E} * \widetilde{K} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.8 & 0.9 \\ 0.4 & 0.6 & 0.8 \\ 0.3 & 0.5 & 0.7 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0.1 & 0.6 & 0.4 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.5 & 0.4 & 0.3 \end{bmatrix}$$

$$\mu_{\tilde{E}*\widetilde{K}}(a, a) = \min\{\min\{(0.7, 0.1), (0.8, 0.3), (0.9, 0.5)\}\}$$

$$= \min\{0.1, 0.3, 0.5\} = 0.1$$

$$\mu_{\tilde{E}*\widetilde{K}}(a, b) = \min\{\min\{(0.7, 0.6), (0.8, 0.2), (0.9, 0.4)\}\}$$

$$= \min\{0.6, 0.2, 0.4\} = 0.2$$

$$\mu_{\tilde{E}*\widetilde{K}}(a, c) = \min\{\min\{(0.7, 0.4), (0.8, 0.5), (0.9, 0.3)\}\}$$

$$= \min\{0.4, 0.5, 0.3\} = 0.3$$

$$\mu_{\tilde{E}*\widetilde{K}}(b, a) = \min\{\min\{(0.4, 0.1), (0.6, 0.3), (0.8, 0.5)\}\}$$

$$= \min\{0.4, 0.2, 0.4\} = 0.2$$

$$\mu_{\tilde{E}*\widetilde{K}}(b, b) = \min\{\min\{(0.4, 0.6), (0.6, 0.2), (0.8, 0.4)\}\}$$

$$= \min\{0.4, 0.2, 0.4\} = 0.2$$

$$\mu_{\tilde{E}*\widetilde{K}}(b, c) = \min\{\min\{(0.4, 0.4), (0.6, 0.5), (0.8, 0.3)\}\}$$

$$= \min\{0.4, 0.5, 0.3\} = 0.3$$

$$\mu_{\tilde{E}*\widetilde{K}}(c, a) = \min\{\min\{(0.3, 0.1), (0.5, 0.3), (0.7, 0.5)\}\}$$

$$= \min\{0.1, 0.3, 0.5\} = 0.1$$

$$\mu_{\tilde{E}*\widetilde{K}}(c, b) = \min\{\min\{(0.3, 0.6), (0.5, 0.2), (0.7, 0.4)\}\}$$

$$= \min\{0.3, 0.2, 0.4\} = 0.2$$

$$\mu_{\tilde{E}*\widetilde{K}}(c, c) = \min\{\min\{(0.3, 0.4), (0.5, 0.5), (0.7, 0.3)\}\}$$

$$= \min\{0.3, 0.5, 0.3\} = 0.3$$

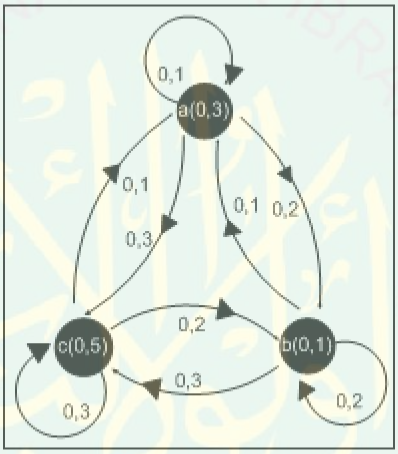
$$\tilde{E} * \tilde{K} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.8 & 0.9 \\ 0.4 & 0.6 & 0.8 \\ 0.3 & 0.5 & 0.7 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0.1 & 0.6 & 0.4 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.5 & 0.4 & 0.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 \end{bmatrix}$$

Sehingga

$\widetilde{D_1} * \left(\widetilde{D_2} \wedge \widetilde{D_3}\right)$

$= \Big\{\{(a, 0.4), (b, 0.2), (c, 0.7)\}, \{\big((a, a), 0.1\big), \big((a, b), 0.2\big), \big((a, c), 0.3\big),$

$\big((b, a), 0.1\big), \big((b, b), 0.2\big), \big((b, c), 0.3\big), \big((c, a), 0.1\big), \big((c, b), 0.2\big), \big((c, c), 0.3\big)\}\Big\}$



Gambar 3.19 Digraf dari $\widetilde{D_1} * \left(\widetilde{D_2} \wedge \widetilde{D_3}\right)$

Jika perhitungan ruas kiri telah mendapatkan hasil seperti di atas, sekarang kita akan melakukan perhitungan pada ruas kanan, apakah akan diperoleh hasil yang sama dengan ruas kiri.

1) Ruas kanan $(\widetilde{D_1} * \widetilde{D_2}) \wedge (\widetilde{D_1} * \widetilde{D_3})$, maka

$$(\widetilde{D_1} * \widetilde{D_2}) = \left(\tilde{A}, \tilde{E}\right) * \left(\tilde{B}, \tilde{F}\right) = (\tilde{A} \vee \tilde{B}, \tilde{E} * \tilde{F})$$

Berdasarkan perhitungan $(\widetilde{D_1} * \widetilde{D_2})$ sebelumnya, maka diperoleh

$(\widetilde{D_1} * \widetilde{D_2})$

$= \{\{(a, 0.4), (b, 0.5), (c, 0.8)\}, \{((a, a), 0.3), ((a, b), 0.4), ((a, c), 0.5),$

$((b, a), 0.3), ((b, b), 0.4), ((b, c), 0.4), ((c, a), 0.3), ((c, b), 0.3), ((c, c), 0.3)\}\}$

$$(\widetilde{D_1} * \widetilde{D_3}) = (\tilde{A}, \tilde{E}) * (\tilde{C}, \tilde{G}) = (\tilde{A} \vee \tilde{C}, \tilde{E} * \tilde{G})$$

Berdasarkan perhitungan $(\widetilde{D_1} * \widetilde{D_3})$ sebelumnya, maka diperoleh

$(\widetilde{D_1} * \widetilde{D_3}) = \{\{(a, 0.4), (b, 0.1), (c, 0.5)\}, \{((a, a), 0.1), ((a, b), 0.2), ((a, c), 0.3),$

$((b, a), 0.1), ((b, b), 0.2), ((b, c), 0.3), ((c, a), 0.1), ((c, b), 0.2), ((c, c), 0.3)\}\}$

Jadi,

$(\widetilde{D_1} * \widetilde{D_2}) \wedge (\widetilde{D_1} * \widetilde{D_3})$

$= \{\{(a, 0.3), (b, 0.2), (c, 0.5)\}, \{((a, a), 0.3), ((a, b), 0.4), ((a, c), 0.5),$

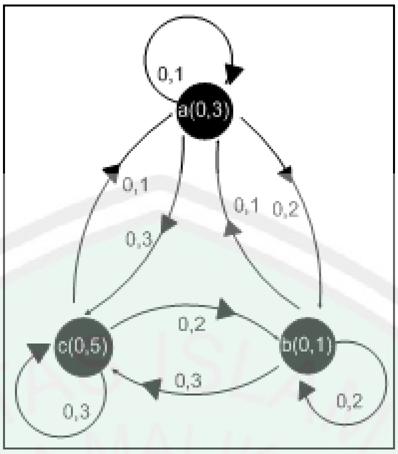
$((b, a), 0.3), ((b, b), 0.4), ((b, c), 0.4), ((c, a), 0.3), ((c, b), 0.3), ((c, c), 0.3)\}\}$

$\wedge \{\{(a, 0.4), (b, 0.1), (c, 0.5)\}, \{((a, a), 0.1), ((a, b), 0.2), ((a, c), 0.3),$

$((b, a), 0.1), ((b, b), 0.2), ((b, c), 0.3), ((c, a), 0.1), ((c, b), 0.2), ((c, c), 0.3)\}\}$

$= \{\{(a, 0.3), (b, 0.1), (c, 0.5)\}, \{((a, a), 0.1), ((a, b), 0.2), ((a, c), 0.3),$

$((b, a), 0.1), ((b, b), 0.2), ((b, c), 0.3), ((c, a), 0.1), ((c, b), 0.2), ((c, c), 0.3)\}\}$



Gambar 3.20 Digraf dari $(\widetilde{D_1} * \widetilde{D_2}) \wedge (\widetilde{D_1} * \widetilde{D_3})$

Perbandingan hasil ruas kiri dan ruas kanan

$$\widetilde{D_1} * \left(\widetilde{D_2} \wedge \widetilde{D_3}\right) = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 \end{bmatrix}$$

$$(\widetilde{D_1} * \widetilde{D_2}) \wedge (\widetilde{D_1} * \widetilde{D_3}) = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 \end{bmatrix}$$

Dari hasil yang diperoleh diatas, terlihat jelas bahwa ruas kiri sama dengan ruas kanan.

$$\widetilde{D_1} * \left(\widetilde{D_2} \wedge \widetilde{D_3}\right) = (\widetilde{D_1} * \widetilde{D_2}) \wedge (\widetilde{D_1} * \widetilde{D_3})$$

g. Dikerjakan dengan menggunakan teorema 2 bagian (7)

$$\boxed{\widetilde{D_1} \circledast \left(\widetilde{D_2} \vee \widetilde{D_3}\right) = (\widetilde{D_1} \circledast \widetilde{D_2}) \vee (\widetilde{D_1} \circledast \widetilde{D_3})}$$

1) Ruas kiri $\widetilde{D_1} \circledast \left(\widetilde{D_2} \vee \widetilde{D_3}\right)$, maka

$\widetilde{D_2} \vee \widetilde{D_3} = \left(\tilde{B} \vee \tilde{C}, \tilde{F} \vee \tilde{G}\right)$

Berdasarkan perhitungan $\widetilde{D_2} \vee \widetilde{D_3}$ sebelumnya, maka diperoleh

$\tilde{B} \vee \tilde{C} = \tilde{H} = \{(a, 0.6), (b, 0.5), (c, 0.8)\}$

$$\tilde{F} \vee \tilde{G} = \tilde{I} = \{((a,a),0.7),((a,b),0.7),((a,c),0.7),((b,a),0.8),((b,b),0.8),$$

$$((b,c),0.8),((c,a),0.9),((c,b),0.9),((c,c),0.9)\}$$

Jika dalam bentuk matriks, $\tilde{I} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.7 & 0.7 \\ 0.8 & 0.8 & 0.8 \\ 0.9 & 0.9 & 0.9 \end{bmatrix}$

$$\widetilde{D_1} \circledast (\widetilde{D_2} \vee \widetilde{D_3}) = (\tilde{A},\tilde{E}) \circledast (\tilde{H},\tilde{I}) = (\tilde{A} \vee \tilde{H}, \tilde{E} \circledast \tilde{I})$$

$$\tilde{A} \vee \tilde{H} = \{\{(a,0.4),(b,0.2),(c,0.5)\} \vee \{(a,0.6),(b,0.5),(c,0.8)\}\}$$

$$= \{(a,0.6),(b,0.5),(c,0.8)\}$$

$$\tilde{E} \circledast \tilde{I} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.8 & 0.9 \\ 0.4 & 0.6 & 0.8 \\ 0.3 & 0.5 & 0.7 \end{bmatrix} \circledast \begin{bmatrix} 0.7 & 0.7 & 0.7 \\ 0.8 & 0.8 & 0.8 \\ 0.9 & 0.9 & 0.9 \end{bmatrix}$$

$$\mu_{\tilde{E} \circledast \tilde{I}}(a,a) = \max\{\max\{(0.7,0.7),(0.8,0.8),(0.9,0.9)\}\}$$

$$= \max\{0.7,0.8,0.9\} = 0.9$$

$$\mu_{\tilde{E} \circledast \tilde{I}}(a,b) = \max\{\max\{(0.7,0.7),(0.8,0.8),(0.9,0.9)\}\}$$

$$= \max\{0.7,0.8,0.9\} = 0.9$$

$$\mu_{\tilde{E} \circledast \tilde{I}}(a,c) = \max\{\max\{(0.7,0.7),(0.8,0.8),(0.9,0.9)\}\}$$

$$= \max\{0.7,0.8,0.9\} = 0.9$$

$$\mu_{\tilde{E} \circledast \tilde{I}}(b,a) = \max\{\max\{(0.4,0.7),(0.6,0.8),(0.8,0.9)\}\}$$

$$= \max\{0.7,0.8,0.9\} = 0.9$$

$$\mu_{\tilde{E} \circledast \tilde{I}}(b,c) = \max\{\max\{(0.4,0.7),(0.6,0.8),(0.8,0.9)\}\}$$

$$= \max\{0.7,0.8,0.9\} = 0.9$$

$$\mu_{\tilde{E} \circledast \tilde{I}}(c,c) = \max\{\max\{(0.3,0.7),(0.5,0.8),(0.7,0.9)\}\}$$

$$= \max\{0.7,0.8,0.9\} = 0.9$$

$$\mu_{\tilde{E} \circledast \tilde{I}}(c, b) = \max\{\max\{(0.3, 0.7), (0.5, 0.8), (0.7, 0.9)\}\}$$

$$= \max\{0.7, 0.8, 0.9\} = 0.9$$

$$\mu_{\tilde{E} \circledast \tilde{I}}(c, c) = \max\{\max\{(0.3, 0.7), (0.5, 0.8), (0.7, 0.9)\}\}$$

$$= \max\{0.7, 0.8, 0.9\} = 0.9$$

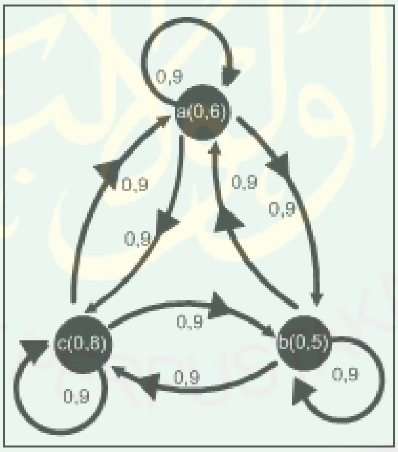
$$\tilde{E} \circledast \tilde{I} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.8 & 0.9 \\ 0.4 & 0.6 & 0.8 \\ 0.3 & 0.5 & 0.7 \end{bmatrix} \circledast \begin{bmatrix} 0.7 & 0.7 & 0.7 \\ 0.8 & 0.8 & 0.8 \\ 0.9 & 0.9 & 0.9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.9 & 0.9 \\ 0.9 & 0.9 & 0.9 \\ 0.9 & 0.9 & 0.9 \end{bmatrix}$$

Sehingga

$\widetilde{D_1} \circledast (\widetilde{D_2} \vee \widetilde{D_3})$

$= \{\{(a, 0.6), (b, 0.5), (c, 0.8)\}, \{((a, a), 0.9), ((a, b), 0.9), ((a, c), 0.9),$

$((b, a), 0.9), ((b, b), 0.9), ((b, c), 0.9), ((c, a), 0.9), ((c, b), 0.9), ((c, c), 0.9)\}\}$



Gambat 3.21 Digraf dari $\widetilde{D_1} \circledast (\widetilde{D_2} \vee \widetilde{D_3})$

Jika perhitungan ruas kiri telah mendapatkan hasil seperti di atas, sekarang kita akan melakukan perhitungan pada ruas kanan, apakah akan diperoleh hasil yang sama dengan ruas kiri.

1) Ruas kanan $(\widetilde{D_1} \circledast \widetilde{D_2}) \vee (\widetilde{D_1} \circledast \widetilde{D_3})$, maka

$$(\widetilde{D_1} \circledast \widetilde{D_2}) = (\tilde{A}, \tilde{E}) \circledast (\tilde{B}, \tilde{F}) = (\tilde{A} \vee \tilde{B}, \tilde{E} \circledast \tilde{F})$$

Berdasarkan perhitungan $(\widetilde{D_1} \circledast \widetilde{D_2})$ pada bagian sebelumnya, maka diperoleh

$(\widetilde{D_1} \circledast \widetilde{D_2})$

$= \Big\{\{(a, 0.4), (b, 0.5), (c, 0.8)\}, \{\big((a, a), 0.9\big), \big((a, b), 0.9\big), \big((a, c), 0.9\big),$

$\big((b, a), 0.9\big), \big((b, b), 0.8\big), \big((b, c), 0.9\big), \big((c, a), 0.9\big), \big((c, b), 0.8\big), \big((c, c), 0.9\big)\}\Big\}$

$$(\widetilde{D_1} \circledast \widetilde{D_3}) = \big(\tilde{A}, \tilde{E}\big) \circledast \big(\tilde{C}, \tilde{G}\big) = (\tilde{A} \vee \tilde{C}, \tilde{E} \circledast \tilde{G})$$

Berdasarkan perhitungan $(\widetilde{D_1} \circledast \widetilde{D_2})$ pada bagian sebelumnya, maka diperoleh

$(\widetilde{D_1} \circledast \widetilde{D_3}) = \Big\{\{(a, 0.6), (b, 0.2), (c, 0.7)\}, \{\big((a, a), 09\big), \big((a, b), 0.9\big), \big((a, c), 0.9\big),$

$\big((b, a), 0.8\big), \big((b, b), 0.9\big), \big((b, c), 0.8\big), \big((c, a), 0.8\big), \big((c, b), 0.9\big),$

$\big((c, c), 0.8\big)\}\Big\}$

Jadi,

$(\widetilde{D_1} \circledast \widetilde{D_2}) \vee (\widetilde{D_1} \circledast \widetilde{D_3})$

$= \Big\{\{(a, 0.4), (b, 0.5), (c, 0.8)\}, \{\big((a, a), 0.9\big), \big((a, b), 0.9\big), \big((a, c), 0.9\big),$

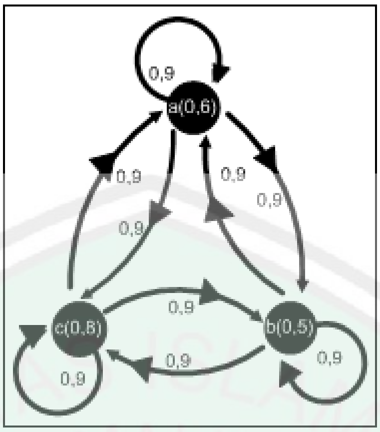
$\big((b, a), 0.9\big), \big((b, b), 0.8\big), \big((b, c), 0.9\big), \big((c, a), 0.9\big), \big((c, b), 0.8\big), \big((c, c), 0.9\big)\}$

$\vee \{(a, 0.6), (b, 0.2), (c, 0.7)\}, \{\big((a, a), 09\big), \big((a, b), 0.9\big), \big((a, c), 0.9\big),$

$\big((b, a), 0.8\big), \big((b, b), 0.9\big), \big((b, c), 0.8\big), \big((c, a), 0.8\big), \big((c, b), 0.9\big), \big((c, c), 0.8\big)\}\Big\}$

$= \Big\{\{(a, 0.6), (b, 0.5), (c, 0.8)\}, \{\big((a, a), 0.9\big), \big((a, b), 0.9\big), \big((a, c), 0.9\big),$

$\big((b, a), 0.9\big), \big((b, b), 0.9\big), \big((b, c), 0.9\big), \big((c, a), 0.9\big), \big((c, b), 0.9\big), \big((c, c), 0.9\big)\}\Big\}$



Gambar 3.22 Digraf dari $(\widetilde{D_1} \circledast \widetilde{D_2}) \vee (\widetilde{D_1} \circledast \widetilde{D_3})$

Setelah dilakukan perhitungan pada ruas kanan ternyata diperoleh hasil yang sama dengan ruas kiri, hal ini menunjukkan bahwa teorema 2 bagian 7 terbukti.

$$\widetilde{D_1} \circledast \left(\widetilde{D_2} \vee \widetilde{D_3}\right) = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.9 & 0.9 \\ 0.9 & 0.9 & 0.9 \\ 0.9 & 0.9 & 0.9 \end{bmatrix}$$

$$(\widetilde{D_1} \circledast \widetilde{D_2}) \vee (\widetilde{D_1} \circledast \widetilde{D_3}) = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.9 & 0.9 \\ 0.9 & 0.9 & 0.9 \\ 0.9 & 0.9 & 0.9 \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{D_1} \circledast \left(\widetilde{D_2} \vee \widetilde{D_3}\right) = (\widetilde{D_1} \circledast \widetilde{D_2}) \vee (\widetilde{D_1} \circledast \widetilde{D_3})$$

h. Dikerjakan dengan menggunakan teorema 2 bagian (8)

$$\boxed{\widetilde{D_1} \circledast \left(\widetilde{D_2} \vee \widetilde{D_3}\right) = (\widetilde{D_1} \circledast \widetilde{D_2}) \vee (\widetilde{D_1} \circledast \widetilde{D_3})}$$

1) Ruas kiri $\widetilde{D_1} \circledast \left(\widetilde{D_2} \wedge \widetilde{D_3}\right)$, maka

$\widetilde{D_2} \wedge \widetilde{D_3} = \left(\tilde{B} \wedge \tilde{C}, \tilde{F} \wedge \tilde{G}\right)$

Berdasarkan perhitungan $\widetilde{D_2} \wedge \widetilde{D_3}$ pada bagian sebelumnya, maka diperoleh

$\tilde{B} \wedge \tilde{C} = \tilde{J} = \{(a, 0.3), (b, 0.1), (c, 0.7)\}$

$$\tilde{F} \wedge \tilde{G} = \tilde{K} = \{((a,a),0.1),((a,b),0.6),((a,c),0.4),((b,a),0.3),$$

$$((b,b),0.2),((b,c),0.5),((c,a),0.5),((c,b),0.4),((c,c),0.3)\}$$

Jika dalam bentuk matriks, $\widetilde{K} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.6 & 0.4 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.5 & 0.4 & 0.3 \end{bmatrix}$

$$\widetilde{D_1} \circledast (\widetilde{D_2} \wedge \widetilde{D_3}) = (\tilde{A}, \tilde{E}) \circledast (\tilde{J}, \tilde{K}) = (\tilde{A} \vee \tilde{J}, \tilde{E} \circledast \tilde{K})$$

$$\tilde{A} \vee \tilde{J} = \{\{(a,0.4),(b,0.2),(c,0.5)\} \vee \{(a,0.3),(b,0.1),(c,0.7)\}\}$$

$$= \{(a,0.4),(b,0.2),(c,0.7)\}$$

$$\tilde{E} \circledast \tilde{K} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.8 & 0.9 \\ 0.4 & 0.6 & 0.8 \\ 0.3 & 0.5 & 0.7 \end{bmatrix} \circledast \begin{bmatrix} 0.1 & 0.6 & 0.4 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.5 & 0.4 & 0.3 \end{bmatrix}$$

$$\mu_{\tilde{E}\circledast\tilde{K}}(a,a) = \max\{\max\{(0.7,0.1),(0.8,0.3),(0.9,0.5)\}\}$$

$$= \max\{0.7,0.8,0.9\} = 0.9$$

$$\mu_{\tilde{E}\circledast\tilde{K}}(a,b) = \max\{\max\{(0.7,0.6),(0.8,0.2),(0.9,0.4)\}\}$$

$$= \max\{0.7,0.8,0.9\} = 0.9$$

$$\mu_{\tilde{E}\circledast\tilde{K}}(a,c) = \max\{\max\{(0.7,0.4),(0.8,0.5),(0.9,0.3)\}\}$$

$$= \max\{0.7,0.8,0.9\} = 0.9$$

$$\mu_{\tilde{E}\circledast\tilde{K}}(b,a) = \max\{\max\{(0.4,0.1),(0.6,0.3),(0.8,0.5)\}\}$$

$$= \max\{0.4,0.6,0.8\} = 0.8$$

$$\mu_{\tilde{E}\circledast\tilde{K}}(b,b) = \max\{\max\{(0.4,0.6),(0.6,0.2),(0.8,0.4)\}\}$$

$$= \max\{0.6,0.6,0.8\} = 0.8$$

$$\mu_{\tilde{E}\circledast\tilde{K}}(b,c) = \max\{\max\{(0.4,0.4),(0.6,0.5),(0.8,0.3)\}\}$$

$$= \max\{0.4,0.6,0.8\} = 0.8$$

$$\mu_{\tilde{E}\circledast\tilde{K}}(c,a) = \max\{\max\{(0.3,0.1),(0.5,0.3),(0.7,0.5)\}\}$$

$$= \max\{0.3,0.5,0.7\} = 0.7$$

$$\mu_{\tilde{E}\circledast\tilde{K}}(c,b) = \max\{\max\{(0.3,0.6),(0.5,0.2),(0.7,0.4)\}\}$$

$$= \max\{0.6, 0.5, 0.7\} = 0.7$$

$$\mu_{\tilde{E}\circledast\tilde{K}}(c,c) = \max\{\max\{(0.3,0.4),(0.5,0.5),(0.7,0.3)\}\}$$

$$= \max\{0.4, 0.5, 0.7\} = 0.7$$

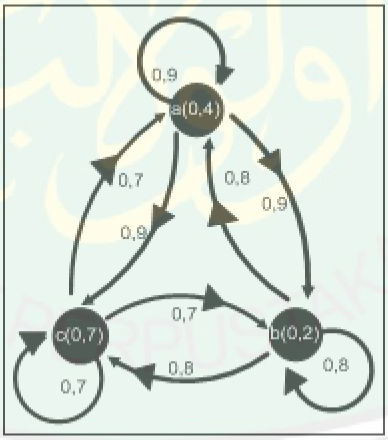
$$\tilde{E} \circledast \tilde{K} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.8 & 0.9 \\ 0.4 & 0.6 & 0.8 \\ 0.3 & 0.5 & 0.7 \end{bmatrix} \circledast \begin{bmatrix} 0.1 & 0.6 & 0.4 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.5 & 0.4 & 0.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.9 & 0.9 \\ 0.8 & 0.8 & 0.8 \\ 0.7 & 0.7 & 0.7 \end{bmatrix}$$

Sehingga

$\widetilde{D_1} \circledast \left(\widetilde{D_2} \wedge \widetilde{D_3}\right)$

$= \{\{(a,0.4),(b,0.2),(c,0.7)\}\},\{\big((a,a),0.9\big),\big((a,b),0.9\big),\big((a,c),0.9\big),$

$\big((b,a),0.8\big),\big((b,b),0.8\big),\big((b,c),0.8\big),\big((c,a),0.7\big),\big((c,b),0.7\big),\big((c,c),0.7\big)\}\}$



Gambar 3.23 Digraf dari $\widetilde{D_1} \circledast \left(\widetilde{D_2} \wedge \widetilde{D_3}\right)$

Jika perhitungan ruas kiri telah mendapatkan hasil seperti di atas, sekarang kita akan melakukan perhitungan pada ruas kanan, apakah akan diperoleh hasil yang sama dengan ruas kiri

1) Ruas kanan $(\widetilde{D_1} \circledast \widetilde{D_2}) \wedge (\widetilde{D_1} \circledast \widetilde{D_3})$, maka

$$(\widetilde{D_1} \circledast \widetilde{D_2}) = \left(\tilde{A}, \tilde{E}\right) \circledast \left(\tilde{B}, \tilde{F}\right) = (\tilde{A} \vee \tilde{B}, \tilde{E} \circledast \tilde{F})$$

Berdasarkan perhitungan $\widetilde{D_2} \circledast \widetilde{D_3}$ sebelumnya, maka diperoleh

$(\widetilde{D_1} \circledast \widetilde{D_2})$

$= \Big\{\{(a, 0.4), (b, 0.5), (c, 0.8)\}, \{\big((a, a), 0.9\big), \big((a, b), 0.9\big), \big((a, c), 0.9\big),$

$\big((b, a), 0.9\big), \big((b, b), 0.8\big), \big((b, c), 0.9\big), \big((c, a), 0.9\big), \big((c, b), 0.8\big), \big((c, c), 0.9\big)\}\Big\}$

$$(\widetilde{D_1} \circledast \widetilde{D_3}) = \big(\tilde{A}, \tilde{E}\big) \circledast \big(\tilde{C}, \tilde{G}\big) = (\tilde{A} \vee \tilde{C}, \tilde{E} \circledast \tilde{G})$$

Berdasarkan perhitungan $\widetilde{D_1} \circledast \widetilde{D_3}$ sebelumnya, maka diperoleh

$(\widetilde{D_1} \circledast \widetilde{D_3}) = \{\{(a, 0.6), (b, 0.2), (c, 0.7)\}, \{\big((a, a), 09\big), \big((a, b), 0.9\big), \big((a, c), 0.9\big),$

$\big((b, a), 0.8\big), \big((b, b), 0.9\big), \big((b, c), 0.8\big), \big((c, a), 0.8\big), \big((c, b), 0.9\big), \big((c, c), 0.8\big)\}\}$

Sehingga,

$(\widetilde{D_1} \circledast \widetilde{D_2}) \wedge (\widetilde{D_1} \circledast \widetilde{D_3})$

$= \Big\{\{(a, 0.4), (b, 0.5), (c, 0.8)\}, \{\big((a, a), 0.9\big), \big((a, b), 0.9\big), \big((a, c), 0.9\big),$

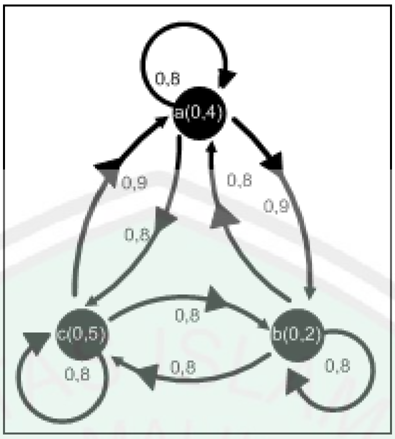
$\big((b, a), 0.9\big), \big((b, b), 0.8\big), \big((b, c), 0.9\big), \big((c, a), 0.9\big), \big((c, b), 0.8\big), \big((c, c), 0.9\big)\}$

$\wedge \{(a, 0.6), (b, 0.2), (c, 0.7)\}, \{\big((a, a), 09\big), \big((a, b), 0.9\big), \big((a, c), 0.9\big),$

$\big((b, a), 0.8\big), \big((b, b), 0.9\big), \big((b, c), 0.8\big), \big((c, a), 0.8\big), \big((c, b), 0.9\big), \big((c, c), 0.8\big)\}\Big\}$

$= \{\{(a, 0.4), (b, 0.2), (c, 0.7)\}, \{\big((a, a), 0.9\big), \big((a, b), 0.9\big), \big((a, c), 0.9\big),$

$\big((b, a), 0.8\big), \big((b, b), 0.8\big), \big((b, c), 0.8\big), \big((c, a), 0.8\big), \big((c, b), 0.8\big), \big((c, c), 0.8\big)\}\}$



Gambar 3.24 digraf dari $(\widetilde{D_1} \circledast \widetilde{D_2}) \wedge (\widetilde{D_1} \circledast \widetilde{D_3})$

Perbandingan hasil ruas kiri dan ruas kanan

$$\widetilde{D_1} \circledast (\widetilde{D_2} \wedge \widetilde{D_3}) = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.9 & 0.9 \\ 0.8 & 0.8 & 0.8 \\ 0.7 & 0.7 & 0.7 \end{bmatrix}$$

$$(\widetilde{D_1} \circledast \widetilde{D_2}) \wedge (\widetilde{D_1} \circledast \widetilde{D_3}) = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.9 & 0.9 \\ 0.8 & 0.8 & 0.8 \\ 0.8 & 0.8 & 0.8 \end{bmatrix}$$

Dari hasil yang diperoleh diatas, terlihat jelas bahwa ruas kiri tidak sama dengan ruas kanan tetapi ruas kiri lebih kecil dari pada ruas kanan.

$$\widetilde{D_1} \circledast (\widetilde{D_2} \wedge \widetilde{D_3}) \neq (\widetilde{D_1} \circledast \widetilde{D_2}) \wedge (\widetilde{D_1} \circledast \widetilde{D_3})$$

Tetapi

$$\widetilde{D_1} \circledast (\widetilde{D_2} \wedge \widetilde{D_3}) \leq (\widetilde{D_1} \circledast \widetilde{D_2}) \wedge (\widetilde{D_1} \circledast \widetilde{D_3})$$

3.4 Kajian Komposisi Relasi Fuzzy dalam Tafsir Surat Al-Baqarah Ayat 3-5

Berikut ini akan di jelaskan tenteng tafsir surat Al-Baqarah ayat 3-5, kemudian akan di jelaskan hubungan surat tersebut dengan fuzzy dan komposisi fuzzy.

ٱلَّذِينَ يُؤۡمِنُونَ بِٱلۡغَيۡبِ وَيُقِيمُونَ ٱلصَّلَوٰةَ وَمِمَّا رَزَقۡنَٰهُمۡ يُنفِقُونَ ٣

3. (yaitu) mereka yang beriman[13] kepada yang ghaib[14], yang mendirikan shalat[15], dan menafkahkan sebahagian rezki[16] yang kami anugerahkan kepada mereka.

Dalam tafsir jalalain dijelaskan bahwa:

ٱلَّذِينَيُؤۡمِنُون (*orang-orang yang beriman*) yang membenarkan بِٱلۡغَيۡبِ (*kepada ghaib*) yaitu yang tidak kelihatan oleh mereka, seperti kebangkitan, surga dan neraka. وَيُقِيمُونَٱلصَّلَوٰةَ (*dan dirikan sholat*) artinya melakukannya sebagaimana mestinya, وَمِمَّا رَزَقۡنَٰهُمۡ (*dan sebagian dari yang Kami berikan kepada mereka*) yang Kami anugrahkan kepada mereka sebagai rezeki, يُنفِقُون (*mereka nafkahkan*) mereka belanjakan untuk menaati Allah.

وَٱلَّذِينَ يُؤۡمِنُونَ بِمَآ أُنزِلَ إِلَيۡكَ وَمَآ أُنزِلَ مِن قَبۡلِكَ وَبِٱلۡأٓخِرَةِ هُمۡ يُوقِنُونَ ٤

4. Dan mereka yang beriman kepada Kitab (Al Quran) yang Telah diturunkan kepadamu dan kitab-kitab yang Telah diturunkan sebelummu[17], serta mereka yakin akan adanya (kehidupan) akhirat[18].

Dalam tafsir jalalain dijelaskan bahwa:

وَٱلَّذِينَيُؤۡمِنُون بِمَآ أُنزِلَإِلَيۡكَ (*dan orang-orang yang beriman pada apa yang diturunkan kepadamu*), maksudnya Al-Qur'an, وَمَآ أُنزِلَ مِن قَبۡلِكَ (*dan apa yang* *diturunkan sebelummu*) yaitu taurat, injil, dan selainnya, هُمْ وَبِٱلْأَخِرَةِ (*serta mereka yakin akan hari akhirat*) artinya mengetahui secara pasti.

أُوْلَٰٓئِكَ عَلَىٰ هُدًى مِّن رَّبِّهِمْۖ وَأُوْلَٰٓئِكَ هُمُ ٱلْمُفْلِحُونَ ۝٥

5. Mereka Itulah yang tetap mendapat petunjuk dari Tuhan mereka, dan merekalah orang-orang yang beruntung[19].

Dalam tafsir jalalain dijelaskan bahwa:

أُوْلَٰٓئِكَ (*merekalah*) yakni orang-orang yang memenuhi sifat-sifat yang di sebutkan di atas عَلَىٰ هُدًى مِّن رَّبِّهِمْۖ وَأُوْلَٰٓئِكَ هُمُ ٱلْمُفْلِحُونَ (*yang beroleh petunjuk dari Tuhan mereka, dan merekalah orang-orang yang beruntung*) yang akan berhasil meraih surga dan terlepas dari siksa neraka.

Dalam tafsir lain, Tafsir Al-Aisar dijelaskan arti per kata yaitu

يُؤْمِنُون بِٱلْغَيْبِ :Mereka membenarkan dengan sejujur-jujurnya segala apa yang termasuk kategori ghaib yang tidak terjangkau oleh panca indra manusia, seperti Tuhan baik dalam Dzat maupun sifat-sifat-Nya, para malaikat , hari kebangkitan, surga beserta segala kenikmatannya dan neraka beserta adzabnya.

وَيُقِيمُونَ ٱلصَّلَوٰةَ: Melaksanakan sholat lima waktu secara tetap dan tepat pada waktunya dengan memperhatikan syarat, rukun dan sunah-sunahnya serta menambahnya dengan sholat-sholat sunnah rawatib dan lainnya.

وَمِمَّا رَزَقۡنَٰهُمۡ يُنفِقُونَ: Mereka menginfakkandari sebagian harta yang diberikan oleh Allah Ta'ala kepada mereka dalam bentuk mengeluarkan zakat, membelanjakannya untuk keperluan diri, istri, anak dan kedua orang tua, dan bersedekah kepada fakir miskin.

يُؤۡمِنُونَ بِمَآ أُنزِلَ إِلَيۡكَ: Mereka membenarkan wahyu yang diturunkan kepadamu, wahai Rasul berupa Al-Kitab, dan As-Sunnah

وَمَآ أُنزِلَ مِن قَبۡلِكَ: Mereka membenarkan kitab-kitab yang diturunkan oleh Allah Ta'ala kepada rasul sebelum kamu, seperti Taurat, Injil, Zabur.

وَبِٱلۡأٓخِرَةِ هُمۡ يُوقِنُونَ: Dengan adanya kehidupan di alam akhirat beserta peristiwa yang akan terjadi disana berupa perhitungan amal (hisab), pahala dan siksa, mereka mengetahui dan meyakini. Mereka tidak ragu-ragu sedikitpun disebabkan keimanan mereka yang sempurna dan ketakwaan mereka yang tinggi.

أُوْلَٰٓئِكَ عَلَىٰ هُدٗى مِّن رَّبِّهِمۡۖ: Sebuah isyarat untuk mereka yang mempunyai lima karakteristik di atas. Kalimat ini juga memberitahukan bahwa atas petunjuk yang diberikan oleh Allah Ta'ala kepada mereka sehingga mereka bisa beriman dan beramal shalih, mereka teguh beristiqomah di atas manhaj Allah Ta'ala yang akan menghantarkan mereka kepada keberhasilan.

وَأُوْلَٰٓئِكَ هُمُ ٱلْمُفْلِحُونَ: Isyarat untuk mereka yang memperoleh petunjuk

(hidayah) secara sempurna dan pemberitahuan bahwa merekalah orang-orang yang beruntung dan layakmendapatkan kesuksesan hidup yang sesungguhnya, yakni masuk ke dalam surga dan selamat dari api neraka.

Dari surat Al-Baqarah ayat 3 sampai 5, dapat kita ketahui bahwa yang di maksud dengan orang-orang yang bertakwa adalah

1. orang-orang yang percaya pada yang ghaib,
2. orang-orang yang mendirikan sholat,
3. orang-orang yang menafkahkan sebagian rezeki,
4. orang-orang yang beriman kepada kitab Al-qur'an dan kitab-kitab sebelumnya.
5. Orang-orang yang beriman pada hari akhir

Jadi, seseorang dikatakan bertakwa jika ia beriman kepada lima hal tersebut. Maka mereka berada pada kesempurnaan hidayah dari Tuhan mereka dan merekalah orang-orang yang beruntung di dunia berupa kesucian dan ketentraman jiwa serta di akhirat dengan masuk surge dan selamat dari neraka.

Tingkat keimanan manusia yang paling sempurna yang sesuai dengan ayat di atas hanyalah tingkat keimanan Nabi Muhammad SAW. Kebanyakan dari kita dalam melaksanakan perintah Allah sering lalai, tidak ikhlas, riya', lupa, dsb. Sehingga hal ini mengurangi tingkat keimanan kita kepada Allah SWT, namun masih tergolong kedalam golongan beriman. Sedangkan orang-orang yang sama sekali tidak melaksanakan hal-hal diatas, maka ia tergolong dalam golongan kafir, misalnya Fir'aun.

Dari permasalahan tersebut jika di hubungkan dengan fuzzy yang memiliki derajat keanggotaan maka tingkat keimanan Nabi Muhammad SAW adalah a dan. tingkat keimanan Fir'aun adalah 0. Sedangkan kita sebagai manusia biasa yang memiliki sifat salah dan lupa, sifat malas, sombong, riya', dsb, menyebabkan keimanan kita naik dan turun. Sehingga tingkat keimanan kita bisa dikatakan berkisar antara nol dan satu atau pada interval 0 dan 1.

Sifat-sifat di atas saling berhubungan satu sama lain, jika digabungkan (dioperasikan) maka akan melahirkan seorang muslim yang memiliki kualitas keimanan yang tinggi. Jika kita memaksimalkan sifat tersebut artinya menjalankannya sesuai perintah, aturan, dan syari'at Islam maka akan menghasilkan muslim yang berkualitas tinggi (tingkat keimanan tinggi). Namun jika kita melakukan sifat tersebut dengan setengah hati, tidak sesuai dengan perintah, aturan, dan syari'at Islam maka akan menghasilkan muslim yang berkualitas rendah (tingkat keimanan rendah).

Dalam kehidupan nyata, banyak terdapat berbagai kondisi hubungan antar manusia yang dapat berpengaruh terhadap tingkat keimanan kepada Allah. Misalnya saja interaksi sesama muslim, tingkat keimanan orang muslim yang satu dengan yang lain berbeda-beda. Ketika muslim yang taat beribadah berinteraksi dengan seorang ulama (muslim dengan tingkat keimanan yang tinggi) maka bisa dipastikan muslim tersebut akan semakin meningkatkan keimanannya kepada

Allah, karena ada bimbingan dan dorongan dari ulama tersebut. Namun, berbeda halnya jika seorang muslim yang taat beribadah kemudian berinteraksi dengan orang kafir atau dengan muslim yang keimanannya lebih rendah, bisa jadi muslim yang keimanannya tinggi akan mengalami penurunan keimanan, atau sebaliknya muslim dengan tingkat keimanannya yang lebih rendah akan mengalami peningkatan keimanan, atau muslim yang keimanannya tinggi akan dapat menyadarkan orang kafir tersebut sehingga mempercayai Allah dan masuk Islam. Tetapi jika orang kafir berinteraksi dengan sesama kafir, maka dapat dipastikan bahwa kekafiran tersebut akan semakin kuat melekat dalam diri orang-orang kafir, sehingga tingkat keimanan mereka kepada Allah semakin menghilang.

Dari permasalahan tersebut, maka dalam matematika juga terdapat hal serupa yang dikenal dengan komposisi digraf fuzzy yaitu mengoperasikan beberapa fungsi dengan operasi tertentu sehingga diperoleh hasil akhir. Jika nilai fungsi yang di ambil adalah nilai yang maksimal maka akan menghasilkan hasil yang maksimal pula, namun jika yang di ambil adalah nilai yang minimal maka hasil akhir yang diperoleh juga akan minimal.

BAB IV

PENUTUP

4.1. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang penulis telah uraikan pada bab III, maka dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

Misal $\widetilde{F_1}, \widetilde{F_2}, \widetilde{F_3}$ adalah relasi fuzzy pada S dengan definisi komposisi relasi digraf fuzzy, maka komposisi relasi digraf fuzzy memiliki dua sifat yaitu:

a. Bersifat asosiatif

(1) $\widetilde{F_1} \circ (\widetilde{F_2} \circ \widetilde{F_3}) = (\widetilde{F_1} \circ \widetilde{F_2}) \circ \widetilde{F_3}$

(2) $\widetilde{F_1} \odot (\widetilde{F_2} \odot \widetilde{F_3}) = (\widetilde{F_1} \odot \widetilde{F_2}) \odot \widetilde{F_3}$

(3) $\widetilde{F_1} * (\widetilde{F_2} * \widetilde{F_3}) = (\widetilde{F_1} * \widetilde{F_2}) * \widetilde{F_3}$

(4) $\widetilde{F_1} \circledast (\widetilde{F_2} \circledast \widetilde{F_3}) = (\widetilde{F_1} \circledast \widetilde{F_2}) \circledast \widetilde{F_3}$

b. Bersifat distributif

(1) $\widetilde{F_1} \circ (\widetilde{F_2} \vee \widetilde{F_3}) = (\widetilde{F_1} \circ \widetilde{F_2}) \vee (\widetilde{F_1} \circ \widetilde{F_3})$

(2) $\widetilde{F_1} \circ (\widetilde{F_2} \wedge \widetilde{F_3}) \leq (\widetilde{F_1} \circ \widetilde{F_2}) \wedge (\widetilde{F_1} \circ \widetilde{F_3})$

(3) $\widetilde{F_1} \odot (\widetilde{F_2} \vee \widetilde{F_3}) \geq (\widetilde{F_1} \odot \widetilde{F_2}) \vee (\widetilde{F_1} \odot \widetilde{F_3})$

(4) $\widetilde{F_1} \odot (\widetilde{F_2} \wedge \widetilde{F_3}) = (\widetilde{F_1} \odot \widetilde{F_2}) \wedge (\widetilde{F_1} \odot \widetilde{F_3})$

(5) $\widetilde{F_1} * (\widetilde{F_2} \vee \widetilde{F_3}) \geq (\widetilde{F_1} * \widetilde{F_2}) \vee (\widetilde{F_1} * \widetilde{F_3})$

(6) $\widetilde{F_1} * (\widetilde{F_2} \wedge \widetilde{F_3}) = (\widetilde{F_1} * \widetilde{F_2}) \wedge (\widetilde{F_1} * \widetilde{F_3})$

(7) $\widetilde{F_1} \circledast (\widetilde{F_2} \vee \widetilde{F_3}) = (\widetilde{F_1} \circledast \widetilde{F_2}) \vee (\widetilde{F_1} \circledast \widetilde{F_3})$

(8) $\widetilde{F_1} \circledast (\widetilde{F_2} \wedge \widetilde{F_3}) \leq (\widetilde{F_1} \circledast \widetilde{F_2}) \wedge (\widetilde{F_1} \circledast \widetilde{F_3})$

4.2. Saran

Pembahasan pada skripsi ini hanya difokuskan pada pembahasan teori digraf fuzzy dan komposisi relasi digraf fuzzy serta teorema-teorema aljabar dari komposisi relasi digraf fuzzy. Maka untuk penulisan skripsi selanjutnya, penulis menyarankan untuk mengkaji masalah fuzzy yang diperluas dalam multiobyektif yang dihubungkan dengan multidigraf.

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Press.

Abdussakir, Nilna N. Azizah, dan Fifi F. Nofandika. 2009. *Teori Graf*. Malang: UIN Press.

Al-Jaziri, Abu Bakar Jabir. 2006. *Tafsir Al-Aisar*. Jakarta: Darus Sunnah.

Al-Mahalli, Imam Jalaluddin dan As-Suyuti, Imam Jalaluddin. 2008. *Tafsir Jalalain berikut Asbabun Nuzul Jilid 1*. Bandung: PT. Sinar Baru Algensindo.

Autar, Rusdiana. 2009. Fuzzy Digraf. *Skripsi*. Malang: Jurusan Matematika UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.

Bartle, Robert G dan Sherbert, Donal R. 1994. *Introduction to Real Analysis*. Singapore: John Wiley & Sons.

Chartrand, Gery and Lesniak, Linda. 1986. *Graphs and Digraphs Second Edition*. California: a Division of Wadsworth, Inc.

Chen, In Chu dan Wu, Sun yen. *Fuzzy Digraph*. http: //140.122.100.145/ntnuj/j30/j30.asp?appl=j30-14.pdf. diakses tanggal 22 April 2011.

Kao, Yah-Ming dan Wu, Sun yen. *The Compositions of Fuzzy Digraphs*. http: //140.122.100.145/ntnuj/j30/j30.asp?appl=j30-20.pdf. diakses tanggal 22 April 2011.

Klir, G.J., and Yuan, B. 1995. *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications*. New Jersey: Prentice-Hall.

Kusumadewi, Dewi dan Purnomo, Hari. 2004. *Aplikasi Logika Fuzzy Untuk Pendukung Keputusan*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

Naba, Agus. 2009. *Belajar Cepat Fuzzy Logic Menggunakan Matlab*. Yogyakarta: Andi.

Purnomo, Mauridhi Hery. 2002. *Dasar Algoritma Cerdas Program Diploma*. Surabaya: ITS.

Susilo, Frans. 2006. *Himpunan dan Logika Kabur*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang (0341)551345
Fax. (0341)572533

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : **Novia Nur Rohma**
Nim : **07610020**
Fakultas/ jurusan : **Sains dan Teknologi/ Matematika**
Judul skripsi : **Kajian Komposisi Digraf Fuzzy**
Pembimbing I : **Evawati Alisah, M.Pd**
Pembimbing II : **Fachrur Rozi, M.Si**

No.	Tanggal	Materi konsultasi	Tanda tangan	
1	04 Mei 2011	Konsultasi Bab I dan II	1.	
2	05 Mei 2011	Kajian Agama Bab I dan II		2.
3	09 Mei 2011	Revisi Bab I dan Bab II	3.	
4	10 Mei 2011	Revisi Kajian Agama		4.
5	13 Mei 2011	ACC Bab I dan Bab II	5.	
6	25 Mei 2011	Konsultasi Bab III		6.
7	26 Mei 2011	Konsultasi Kajian Agama Bab III	7.	
8	1 Juni 2011	Revisi BAB III		8.
9	2 Juni 2011	Revisi Kajian Agama Bab III	9.	
10	8 Juni 2011	Revisi BAB III		10.
11	15 Juni 2011	Abstrak	11.	
12	11 Juni 2011	Revisi Abstrak		12.
13	14 Juli 2011	ACC Kajian Agama	13.	
14	15 Juli 2011	ACC Keseluruhan		14.

Malang, 16 Juli 2011
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

<u>Abdussakir, M.Pd</u>
NIP. 19751006 200312 1 001