PELABELAN $L(2, 1)$ PADA GRAF KOPRIMA DARI GRUP BILANGAN BULAT MODULO m

SKRIPSI

OLEH
SITI NUR KAMILA
NIM. 200601110074

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2024

PELABELAN $L(2,1)$ PADA GRAF KOPRIMA DARI GRUP BILANGAN BULAT MODULO m

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh:
Siti Nur Kamila
NIM. 200601110074

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2024

PELABELAN $L(2,1)$ PADA GRAF KOPRIMA DARI GRUP BILANGAN BULAT MODULO m

SKRIPSI

Oleh:
Siti Nur Kamila
NIM. 200601110074

Telah Disetujui untuk Diuji
Malang, 20 Juni 2024

Dosen Pembimbing I	Dosen Pembimbing II
Mohammad Nafie Jauhari, M.Si.	Erna Herawati, M.Pd.
NIPPPK. 19870218 202321 1 018	NIPPPK. 19760723 202321 2 006

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005

PELABELAN $L(2,1)$ PADA GRAF KOPRIMA DARI GRUP BILANGAN BULAT MODULO m

SKRIPSI

Oleh:
Siti Nur Kamila
NIM. 200601110074

Telah Dipertahankan di Depan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)
Tanggal, 26 Juni 2024

Ketua Penguji	: Dr. Abdussakir, M.Pd.,	…………………
Anggota Penguji 1	: Intan Nisfulaila, M.Si.,	…………………
Anggota Penguji 2	: Mohammad Nafie Jauhari, M.Si.,	…………………
Anggota Penguji 3	: Erna Herawati, M.Pd.,	…………………

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Siti Nur Kamila
NIM	: 200601110074
Program Studi	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	: Pelabelan $L(2,1)$ pada Graf Koprima dari Grup Bilangan Bulat Modulo m

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan dan pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perilaku tersebut.

Malang, 26 Juni 2024

Yang membuat pernyataan,

METERAI TEMPEL

10000

CB897ALX198179031

Siti Nur Kamila

NIM. 200601110074

MOTO

Allah tidak membebani seseorang, kecuali menurut kesanggupannya dan
sesungguhnya sesudah kesulitan ada kemudahan

PERSEMBAHAN

Penulis mempersembahkan skripsi ini untuk:
Bapak Mulyono, Ibu Riwani, Adik Ihyak Ulumuddin, dan Nenek Suhani yang tidak pernah putus dalam berdo'a dan juga dalam memberikan motivasi kepada penulis selama mengerjakan skripsi ini.
Seluruh keluarga yang turut memberikan do'a dan dukungan.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Alhamdulillaahirobbil'alamiin, puji syukur penulis haturkan kepada Allah SWT yang senantiasa memberikan rahmat-Nya, sehingga penyusunan skripsi yang berjudul "Pelabelan $L(2, 1)$ pada Graf Koprima dari Grup Bilangan Bulat Modulo m" ini dapat terselesaikan dengan baik. Tak lupa shalawat serta salam selalu tercurah kepada Baginda Nabi Muhammad SAW, yang telah membimbing umat manusia menuju jalan kebenaran. Semoga kita tergolong orang-orang yang beriman dan mendapatkan syafaatnya kelak di yaumil akhir, Amiin.

Penulis sadar bahwa terdapat beberapa pihak yang membantu dalam proses penyelesaian skripsi ini. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M.A., selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
2. Prof. Dr. Sri Harini, M.Si., selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
3. Dr. Elly Susanti, S.Pd., M.Sc., selaku ketua Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
4. Mohammad Nafie Jauhari, M.Si., selaku dosen pembimbing I yang berkenan membimbing penulis dalam penyusunan skripsi dari awal hingga akhir.
5. Erna Herawati, M.Pd., selaku dosen pembimbing II yang berkenan membimbing penulis dalam penulisan kajian integrasi topik dengan Al-Qur'an.
6. Dr. Abdussakir, M.Pd., selaku ketua penguji yang telah bersedia menguji dan memberikan banyak ilmu dan saran kepada penulis.
7. Intan Nisfulaila, M.Si., selaku anggota penguji I yang telah bersedia menguji dan memberikan banyak ilmu dan saran kepada penulis.
8. Seluruh dosen Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim yang telah memberikan dukungan dan saran pada penyusunan skripsi ini.

9. Orang tua dan seluruh keluarga yang telah mendo'akan sekaligus memberi dukungan kepada penulis untuk menyelesaikan skripsi ini.
10. Seluruh mahasiswa matematika angkatan 2020 yang telah memberikan semangat dan motivasi kepada penulis agar segera menyelesaikan skripsi ini.
11. Semua pihak yang ikut terlibat dalam penyelesaian skipsi ini.

Dengan mengharapkan berkah dan ridho dari Allah SWT, semoga amal baik dari semua pihak yang telah disebutkan diterima di sisi Allah SWT. Penulis berharap semoga skripsi ini bermanfaat kepada orang yang membacanya dan mohon maaf atas segala kekurangan.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, 26 Juni 2024

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

DAFTAR LAMPIRAN

ABSTRAK

Kamila, Siti Nur. 2024. **Pelabelan $L(2,1)$ pada Graf Koprima dari Grup Bilangan Bulat Modulo m**. Skripsi. Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Muhammad Nafie Jauhari, M.Si. (II) Erna Herawati, M.Pd.

Kata Kunci: Pelabelan $L(2,1)$, Graf Koprima, Grup Bilangan Bulat Modulo m.

Grup adalah himpunan takkosong yang dilengkapi dengan operasi biner dan memenuhi syarat-syarat tertentu. Salah satu contoh grup yaitu grup bilangan bulat modulo m. Graf koprima dari grup G adalah graf yang simpulnya merupakan elemen di G dan dua simpul x, y di G yang berbeda terhubung langsung jika dan hanya jika faktor persekutuan terbesar (FPB) dari orde x dan y relatif prima. Pelabelan $L(2,1)$ memiliki aplikasi penting dalam jaringan telekomunikasi nirkabel, di mana terdapat keterbatasan frekuensi radio yang tersedia dan transmitter yang berdekatan tidak dapat menggunakan frekuensi yang sama. Untuk mengatasi masalah ini, penetapan frekuensi dilakukan menggunakan konsep pelabelan, di mana transmitter disimbolkan sebagai simpul yang dihubungkan oleh sisi-sisi. Pelabelan $L(2,1)$ adalah teknik pelabelan graf yang memberikan label bilangan bulat non-negatif pada simpul-simpul graf dengan aturan bahwa dua simpul yang terhubung langsung harus memiliki selisih label minimal dua, dan dua simpul yang berjarak dua harus memiliki selisih label minimal satu. Tujuan penelitian ini adalah mengetahui rumus umum pelabelan $L(2,1)$ pada graf koprima dari grup bilangan bulat modulo m dan rumus umum nilai minimal label terbesar dari pelabelan $L(2,1)$ tersebut. Tahapan yang dilakukan dalam penelitian ini adalah menentukan bentuk graf koprima dari grup bilangan bulat modulo m. Kemudian melabeli setiap simpul dengan aturan pelabelan $L(2,1)$. Dari hasil penelitian ini dapat disimpulkan bahwa graf koprima dari grup bilangan bulat modulo m mempunyai pelabelan $L(2,1)$ dengan $\lambda_{2,1}(\Gamma_{\mathbb{Z}_m}) = 2p^2$.

ABSTRACT

Kamila, Siti Nur. 2024. **$L(2,1)$ Labeling on the Coprime Graph of the Integer Group Modulo m.** Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim, Malang. Advisor: (I) Muhammad Nafie Jauhari, M.Si. (II) Erna Herawati, M.Pd.

Keywords: $L(2,1)$ Labeling, Coprime Graph, Integer Group Modulo m.

Groups are nonempty sets equipped with binary operations and fulfill certain conditions. One example of a group is the group of integers modulo m. A coprime graph of a group G is a graph whose vertices are elements in G and any two vertices x, y in G are directly connected if and only if the greatest common factor (GCD) of the orders x and y are relatively prime. $L(2,1)$ labeling has important applications in wireless telecommunication networks, where there are limited radio frequencies available and adjacent transmitters cannot use the same frequency. To overcome this problem, frequency assignment is done using the concept of labeling, where transmitters are symbolized as vertices connected by edges. $L(2,1)$ labeling is a graph labeling technique that assigns non-negative integer labels to graph vertices with the rule that two directly connected vertices must have a minimum label difference of two, and two vertices that are two apart must have a minimum label difference of one. The purpose of this research is to find out the general formula for the $L(2,1)$ labeling on the coprime graph of the group of integers modulo m and the general formula for the minimum value of the largest label of the $L(2,1)$ labeling. The steps taken in this research are to determine the coprime graph form of the group of integers modulo m. Then label each vertex with a non-negative label. Then label each vertex with $L(2,1)$ labeling rule. From the result of this research, it can be concluded that the coprime graph of integer group modulo m has a $L(2,1)$ labeling with $\lambda_{2,1}\left(\Gamma_{\mathbb{Z}_{2p^2}}\right) = 2p^2$.

مستخلص البحث

كاميلا، ستي نور. ٢٠٢٤. **وضع العلامات $L(2,1)$ على الرسوم البيانية Coprime لمجموعات الأعداد الصحيحة Modulo m**. أطروحة. قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، الجامعة الحكومية. مولانا مالك إبراهيم مالانج المشرفون: (1) محمد نافع جوهري، الماجستير.(2) إرنا هيراواتي، الماجستير.

الكلمات الرئيسية: وضع العلامات $L(2,1)$ ، الرسم البياني $Coprime$، مجموعة الأعداد الصحيحة $Modulo$ m.

المجموعة عبارة عن مجموعة غير فارغة مجهزة بعمليات ثنائية وتفي بشروط معينة. من إحدى الأمثلة على المجموعة هو مجموعة الأعداد الصحيحة $modulo\ m$. الرسم البياني الرئيسي للمجموعة G هو رسم البياني الذي يكون رؤوس العبارة عن العناصر في G ورأسان مختلفان x, y في G مرتبطان مباشرة إذا وفقط إذا كان العامل المشترك الأكبر (FPB) من الرتبة x و y أوليًا نسبيًا. إن وضع العلامات $L(2,1)$ له تطبيقات مهمة في شبكات الاتصالات اللاسلكية، حيث تتوفر ترددات راديو محدودة ولا يمكن لأجهزة الإرسال المجاورة استخدام نفس التردد. للتغلب على هذه المشكلة، يتم تنفيذ تخصيص التردد باستخدام مفهوم التسمية، حيث يتم ترميز أجهزة الإرسال على أنها عقد متصلة بحواف. وضع العلامات $L(2,1)$ عبارة عن تقنية لوضع علامات على الرسم البياني يقوم بتعيين تسميات أعداد صحيحة غير سالبة لرؤوس الرسم البياني مع القاعدة التي تنص على أن القمتين المتصلتين بشكل مباشر يجب أن يكون لهما اختلاف في التسمية لا يقل عن اثنين، ويجب أن يكون للرأسين اللذين يفصل بينهما مسافة مسافتين الحد الأدنى من الفرق التسمية. الهدف من هذا البحث هو معرفة الصيغة العامة للتسمية $L(2,1)$ على الرسوم البيانية الرئيسية لمجموعات الأعداد الصحيحة $modulo\ m$ والصيغة العامة لأدنى القيمة للتسمية الأكبر من التسمية $L(2,1)$. المراحل التي تم تنفيذها في هذا البحث هي تحديد شكل الرسم البياني $coprime$ لمجموعة من الأعداد الصحيحة $modulo\ m$. ثم قم بتسمية كل عقدة باستخدام قاعدة التسمية $L(2,1)$. من نتائج هذا البحث يمكن استنتاج أن الرسم البياني $coprime$ لمجموعة الأعداد الصحيحة $modulo\ m$ يملك $L(2,1)$ بـ $\lambda_{2,1}\left(\Gamma_{\mathbb{Z}_{2p^2}}\right) = 2p^2$.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika merupakan abstraksi dari dunia nyata yang ditulis dengan bahasa simbolik dan topik-topik yang dibahas tersusun dengan rapi (Abdusysyakir, 2007). Saat ini cabang-cabang ilmu matematika semakin banyak dan terus berkembang, salah satunya adalah teori graf. Dalam beberapa tahun terakhir, teori graf sangat intensif dalam pengembangannya sehingga banyak dilakukan penelitian dan ribuan artikel telah diterbitkan (Suryadi & Priatna, 2005).

Graf merupakan subjek bahasan yang sudah tua usianya namun memiliki keunikan yang terletak pada kesederhanaan bahasa yang dipelajari. Graf G didefinisikan sebagai himpunan tak kosong dan berhingga V dari objek-objek yang disebut simpul dan anggota dari $E \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V, u \neq v\}$ disebut sisi (Chartrand dkk., 2010).

Teori graf memiliki banyak manfaat dan dapat diterapkan untuk menyelesaikan permasalahan kehidupan sehari-hari seperti pada masalah jembatan Konigsberg. Selain itu, teori graf juga dapat diaplikasikan dalam pengaturan lampu lalu lintas, menentukan jadwal ujian, pembuatan peta dan pencarian rute di GPS, menganalisis pola interaksi dalam jaringan sosial, dan mencari rute terpendek.

Teori graf juga dapat diaplikasikan pada berbagai disiplin ilmu seperti biologi, ekonomi, linguistik, teknik informatika, ilmu sosial, ilmu komputer, dan kesehatan (Abdussakir dkk., 2009). Selain itu, teori graf dapat diterapkan pada cabang matematika di antaranya matematika diskrit dan aljabar abstrak, seperti membangun graf dari grup.

Grup merupakan struktur aljabar yang mendasar dan memiliki banyak aplikasi dalam matematika. Grup adalah himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan operasi biner dan memenuhi syarat-syarat tertentu. Salah satu contoh grup yaitu grup bilangan bulat modulo m. Operasi biner pada himpunan bilangan bulat modulo m harus bersifat tertutup dan asosiatif. Sedangkan himpunan tak kosong pada bilangan bulat modulo m harus memiliki elemen identitas dan memuat invers. Grup bilangan bulat modulo m banyak digunakan dalam kriptografi, koding, dan bidang lainnya.

Konsep graf koprima dikemukakan oleh Sattanathan dan Kala dalam artikelnya tentang orde graf prima dari grup berhingga. Definisi graf koprima dari grup G adalah graf yang simpulnya merupakan elemen di G dan dua simpul x, y yang berbeda terhubung langsung jika dan hanya jika orde x dan y relatif prima (Ma dkk., 2014).

Graf dan grup terkait erat dengan himpunan, karena graf dan grup merupakan himpunan dengan syarat-syarat tertentu. Mengenai himpunan juga dibahas dalam Al-Qur’an. Salah satunya terdapat pada surah Fatir ayat 1.

اَلْحَمْدُ لِلّٰهِ فَاطِرِ السَّمٰوٰتِ وَالْاَرْضِ جَاعِلِ الْمَلٰۤىِٕكَةِ رُسُلًاۙ اُولِيْٓ اَجْنِحَةٍ مَّثْنٰى وَثُلٰثَ وَرُبٰعَۗ يَزِيْدُ فِى الْخَلْقِ مَا يَشَاۤءُۗ اِنَّ اللّٰهَ

عَلٰى كُلِّ شَيْءٍ قَدِيْرٌ ﴿١﴾

Artinya: *“Segala puji bagi Allah, pencipta langit dan bumi yang menjadikan malaikat sebagai utusan-utusan (untuk mengurus berbagai macam urusan) yang mempunyai sayap. Masing-masing (ada yang) dua, tiga, dan empat. Dia menambah pada ciptaan-Nya apa yang dia kehendaki. Sesungguhnya Allah maha kuasa atas segala sesuatu” (Fatir/35:1).*

Berdasarkan dari tafsir Al-Muyassar, ayat ini menjelaskan adanya pengelompokan malaikat berdasarkan banyak sayapnya. Hal in dapat diartikan bahwa ada himpunan malaikat yang mempunyai dua sayap, tiga sayap, dan empat sayap. Meskipun mereka mempunyai banyak sayap yang berbeda, namun mereka mempunyai fungsi yang sama menyampaikan risalah yang diperintah Allah SWT kepada hamba-Nya dengan cepat(Al-Qarni, 2007).

Adapun penelitian terdahulu tentang graf koprima dilakukan oleh Ma, Wei, & Yang (2014) tentang sifat-sifat khusus graf koprima dari grup dihedral. Penelitian lain juga dilakukan oleh Dorbidi (2016) tentang bilangan kromatik dan bilangan $clique$ pada graf koprima dari suatu grup. Selain itu, penelitian juga dilakukan oleh Shelash & Jasim (2021) tentang banyaknya sisi dan tabel orde elemen pada graf koprima dari D_{2n} dengan n adalah perkalian bilangan prima.

Pelabelan pada graf merupakan salah satu topik dari teori graf yang melibatkan pemberian label berupa bilangan bulat positif pada simpul-simpul atau sisi-sisi graf dengan aturan tertentu yang telah ditetapkan (Chartrand dkk., 2010). Pelabelan pada graf memiliki banyak peran terutama pada pengkodean, desain sirkuit gabungan pada komponen elektronik, navigasi geografis, radar, penjadwalan, komunikasi dan masalah optimasi lainnya. Terdapat berbagai jenis pelabelan pada graf di antaranya pelabelan ajaib, pelabelan anti ajaib, pelabelan graceful, pelabelan harmoni, pelabelan total tak beraturan (Irawati & Heri, 2010). Salah satu teknik pelabelan adalah pelabelan berdasarkan jaraknya yaitu pelabelan $L(2,1)$ yang merupakan bentuk khusus dari pelabelan $L(d1, d2)$. Pelabelan $L(2,1)$ pada graf G adalah pemetaan f dari himpunan simpul $V(G)$ ke himpunan bilangan bulat non negatif, dengan aturan: dua simpul terhubung langsung di $V(G)$ memiliki selisih label minimal dua sedangkan dua simpul yang berjarak dua memiliki selisih label minimal satu (Shao & Solis-Oba, 2010).

Pelabelan $L(2,1)$ memiliki aplikasi penting dalam perancangan jaringan komunikasi, seperti jaringan komputer dan jaringan komunikasi khususnya jaringan telekomunikasi nirkabel. Dalam jaringan tersebut, terdapat masalah keterbatasan frekuensi radio yang tersedia sehingga tidak cukup untuk memenuhi semua kebutuhan telekomunikasi. Selain itu, *transmitter* yang berdekatan tidak mungkin menggunakan frekuensi yang sama, karena dapat menyebabkan gangguan antar saluran. Untuk mengatasi masalah ini, penetapan frekuensi untuk *transmitter* dilakukan dengan konsep pelabelan di mana *transmitter* disimbolkan sebagai simpul yang dihubungkan oleh sisi-sisi. Agar penetapan frekuensi dapat dilakukan secara efisien, pelabelan harus memenuhi beberapa kondisi yaitu pelabelan pada simpul yang terhubung langsung harus memiliki selisih yang besar, dan simpul yang tidak terhubung langsung memiliki selisih kecil. Selain itu, harus meminimalkan pelabelan maksimum yang dapat ditetapkan (Mouly & Pautet, 1992).

Teori graf dan teori grup merupakan dua topik aljabar yang perlu dikaji oleh mahasiswa matematika. Hubungan keduanya merupakan topik menarik untuk diteliti lebih lanjut. Berdasarkan uraian tersebut maka penulis melakukan penelitian dengan judul "Pelabelan $L(2,1)$ pada Graf Koprima dari Grup Bilangan Bulat Modulo m".

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah:

1. Bagaimana rumus umum pelabelan $L(2,1)$ pada graf koprima dari grup bilangan bulat modulo m?
2. Bagaimana rumus umum nilai minimal label terbesar dari pelabelan $L(2,1)$ pada graf koprima dari grup bilangan bulat modulo m?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah yang telah diuraikan, maka tujuan penelitian ini adalah:

1. Mengetahui rumus umum pelabelan $L(2,1)$ pada graf koprima dari grup bilangan bulat modulo m.
2. Mengetahui rumus umum nilai minimal label terbesar dari pelabelan $L(2,1)$ pada graf koprima dari grup bilangan bulat modulo m.

1.4 Manfaat Penelitian

Hasil penelitian ini diharapkan dapat menambah pengetahuan dan keilmuan penulis dan pembaca mengenai hal-hal yang berkaitan dengan pelabelan $L(2,1)$ pada graf koprima dari grup bilangan bulat modulo m.

1.5 Batasan Penelitian

Pada penelitian ini, grup bilangan bulat modulo m yang diteliti adalah $m = 2p^2$ dengan p merupakan bilangan prima.

1.6 Definisi Istilah

1. Kongruen

   Misalkan m adalah bilangan bulat positif. Misalkan a dan b adalah bilangan bulat. Dikatakan a kongruen b modulo m jika dan hanya jika $m \mid (a - b)$ dan dinotasikan sebagai $a \equiv b \ (mod\ m)$.

2. Relasi

   Misalkan A dan B adalah himpunan takkosong. Relasi biner dari A ke B adalah himpunan bagian dari $A \times B$.

BAB II

KAJIAN TEORI

2.1 Teori Pendukung

2.1.1 Faktor Persekutuan Terbesar

Definisi 2.1

Misalkan a dan b adalah bilangan bulat dengan $a \neq 0$. Dikatakan a membagi b jika terdapat bilangan bulat c sehingga $b = ac$, atau dengan kata lain $c = \frac{b}{a}$. Jika a membagi b maka a disebut faktor atau pembagi dari b, dan b disebut kelipatan dari a. Notasi $a \mid b$ menunjukkan bahwa a membagi b (Rosen, 2012).

Contoh 2.1

$3 \mid 12$ karena $12 = 3 \cdot 4$

Definisi 2.2

Misalkan p adalah bilangan bulat yang lebih dari 1. Bilangan p disebut bilangan prima jika faktor positif dari p hanyalah 1 dan p. Bilangan p selain bilangan prima disebut bilangan komposit (Rosen, 2012).

Contoh 2.2

Bilangan bulat 7 adalah bilangan prima karena faktor positif dari 7 hanya 1 dan 7, sedangkan bilangan bulat 9 adalah bilangan komposit karena 9 habis dibagi oleh 3.

Definisi 2.3

Misalkan a dan b adalah bilangan bulat yang keduanya tidak nol. Faktor persekutuan terbesar dari a dan b adalah bilangan bulat positif terbesar d sehingga $d|a$ dan $d|b$. Faktor persekutuan terbesar dari a dan b dinotasikan dengan $FPB(a, b)$ (Lee, 2010).

Contoh 2.3

Faktor persekutuan positif dari 24 dan 36 adalah $1, 2, 3, 4, 6,$ dan 12. Jadi $FPB(24, 36) = 12$.

Definisi 2.4

Bilangan bulat a dan b relatif prima jika faktor persekutuan terbesarnya adalah 1 (Rosen, 2012).

Contoh 2.4

Bilangan bulat 17 dan 22 adalah relatif prima karena $FPB(17, 22) = 1$.

2.1.2 Relasi dan Kelas Ekuivalen

Definisi 2.5

Misalkan A dan B adalah himpunan. Hasil kali kartesius dari A dan B, dinotasikan dengan $A \times B$ adalah himpunan semua pasangan terurut (a, b) dengan $a \in A$ dan $b \in B$. Oleh karena itu,

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \ \wedge b \in B\}$$

(Rosen, 2012).

Contoh 2.5

Misalkan $A = \{1,\ 2\}$ dan $B = \{a,\ b,\ c\}$. Hasil kali kartesius dari A dan B adalah

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$$

Definisi 2.6

Misalkan A dan B adalah himpunan takkosong. Relasi biner dari A ke B adalah himpunan bagian dari $A \times B$ (Rosen, 2012).

Contoh 2.6

Misalkan $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{4, 6\}$. Relasi dari A ke B adalah "faktor dari" maka dapat dituliskan sebagai $\{(1, 4), (1, 6), (2, 4), (2, 6), (3, 6)\}$.

Definisi 2.7

Relasi ekuivalensi R pada himpunan S adalah relasi biner yang memenuhi sifat-sifat berikut:

1. Refleksif, yaitu $a \sim a \in R$ untuk semua $a \in S$
2. Simetris, yaitu $a \sim b \in R$ mengakibatkan $b \sim a \in R$ untuk $a, b \in S$
3. Transitif, yaitu $a \sim b \in R$ dan $b \sim c \in R$ mengakibatkan $a \sim c \in R$ untuk $a, b, c \in S$

Simbol dari relasi ekuivalensi adalah $\sim$ (Dummit & Foot, 2004).

Contoh 2.7

Misalkan $S = \{1, 2, 3, 4\}$. Relasi ekuivalensi R di S yang didefinisikan dengan: $\forall a, b \in S$, a berelasi dengan b jika $a = b$. Maka diperoleh

$$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}.$$

Relasi tersebut merupakan relasi ekuivalensi karena R bersifat reflektif, simetris, dan transitif.

Definisi 2.8

Misalkan R adalah relasi ekuivalensi pada himpunan S dan $a \in S$. Kelas yang memuat a didefinisikan sebagai subhimpunan yang dinyatakan dengan

$$\bar{a} = \{b \in S \mid b \sim a\}$$

Himpunan $\bar{a}$ disebut kelas ekuivalen yang memuat a (Gallian, 2017).

Contoh 2.8

Contoh 2.7 merupakan relasi ekuivalen, maka diperoleh kelas ekuivalen sebagai berikut:

$$\bar{1} = \{1\}$$

$$\bar{2} = \{2\}$$

$$\bar{3} = \{3\}$$

$$\bar{4} = \{4\}$$

2.1.3 Kongruensi Modulo m

Definisi 2.9

Misalkan m adalah bilangan bulat positif. Misalkan a dan b adalah bilangan bulat. Dikatakan a kongruen b modulo m jika dan hanya jika $m \mid (a - b)$ dan dinotasikan sebagai $a \equiv b \ (mod\ m)$ (Dummit & Foot, 2004).

Contoh 2.9

$22 \equiv 4 \ (mod\ 9)$, karena $9 \mid (22 - 4)$.

Proposisi 2.10

Misalkan m adalah bilangan bulat positif. Kongruensi modulo m adalah relasi ekuivalen pada $\mathbb{Z}$ (Rosen, 1984).

Bukti

Misalkan $a, b, c \in \mathbb{Z}$ maka

1. Perhatikan bahwa

   $a - a = 0$ maka $m \mid (a - a = 0)$

   Artinya $a \equiv a \ (mod\ m)$ karena $m \mid (a - a = 0)$. Oleh karena itu relasi kongruensi modulo m bersifat refleksif.

2. Jika $a \equiv b \ (mod \ m)$, maka $m \mid (a - b)$. Oleh karena itu, terdapat bilangan bulat k dengan $km = a - b$ sehingga diperoleh $(-k)m = b - a$. Akibatnya, $m \mid (b - a)$ yang artinya $b \equiv a \ (mod \ m)$

   Jadi relasi kongruensi modulo m bersifat simetris.

3. Jika $a \equiv b \ (mod \ m)$ dan $b \equiv c \ (mod \ m)$ maka $m \mid (a - b)$ dan $m \mid (b - c)$. Oleh karena itu, terdapat bilangan bulat k dan j dengan $km = a - b$ dan $jm = b - c$ sehingga $a - c = (a - b) + (b - c) = km + jm = (k + j)\, m$.

   Akibatnya, $m \mid (a - c)$ yang artinya $a \equiv c \ (mod \ m)$.

   Jadi relasi kongruensi modulo m bersifat transitif.

Dengan demikian, terbukti bahwa kongruensi modulo m adalah relasi ekuivalen pada $\mathbb{Z}$.

Dari Proposisi 2.10 diperoleh bahwa himpunan bilangan bulat habis dibagi m adalah himpunan yang berbeda atau saling lepas dan disebut kelas kongruensi modulo m. Dengan demikian diperoleh kelas kongruensi yang memuat a adalah

$$\begin{aligned}
\bar{a} &= \{y \in \mathbb{Z} \mid y \equiv a \ (mod \ m)\} \\
&= \{y \in \mathbb{Z} \mid y - a = km, k \in \mathbb{Z}\} \\
&= \{y \in \mathbb{Z} \mid y = a + km, k \in \mathbb{Z}\} \\
&= \{a + km \mid k \in \mathbb{Z}\}
\end{aligned}$$

Misalkan $a, b \in \mathbb{Z}$. Jika $a \equiv b \ (mod \ m)$ dan $y \in \bar{a}$ maka $y \equiv a \ (mod \ m)$, dengan sifat transitif maka diperoleh $y \equiv b \ (mod \ m)$ sehingga $y \in \bar{b}$. Jadi $\bar{a} \subseteq \bar{b}$. Dengan cara yang sama diperoleh $\bar{b} \subseteq \bar{a}$, oleh karena itu $\bar{a} = \bar{b}$ dan jika $a \in \bar{a}$ maka $a \in \bar{b}$. Dengan demikian $a \equiv b \ (mod \ m)$ yang artinya

$$\bar{a} = \bar{b} \Leftrightarrow a \equiv b \ (mod \ m) \Leftrightarrow a - b = km, k \in \mathbb{Z}$$

Sehingga terdapat m kelas kongruensi modulo m yang berbeda sebagai berikut

$$\bar{0} = \{\dots, -2m, -m, 0, m, 2m, \dots\}$$

$$\bar{1} = \{\dots, -2m+1, -m+1, 1, m+1, 2m+1, \dots\}$$

$$\bar{2} = \{\dots, -2m+2, -m+2, 2, m+2, 2m+2, \dots\}$$

$$\vdots$$

$$\overline{m-1} = \{\dots, -m-1, -1, m-1, 2m-1, 3m-1, \dots\}$$

Kumpulan kelas kongruensi modulo m yang berbeda membentuk suatu himpunan yang dinotasikan dengan $\mathbb{Z}_m$ dan dapat ditulis sebagai:

$$\mathbb{Z}_m = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{m-1}\}$$

Contoh 2.10

$m = 5$ maka

$$\bar{0} = \{\dots - 10, -5, 0, 5, 10 \dots\}$$

$$\bar{1} = \{\dots - 9, -4, 1, 6, 11 \dots\}$$

$$\bar{2} = \{\dots - 8, -3, 2, 7, 12 \dots\}$$

$$\bar{3} = \{\dots - 7, -2, 3, 8, 13 \dots\}$$

$$\bar{4} = \{\dots - 6, -1, 4, 9, 14 \dots\}$$

Jadi $\mathbb{Z}_5 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$.

2.1.4 Grup

Definisi 2.11

Misalkan G adalah suatu himpunan. Operasi biner $*$ pada G adalah pemetaan $* : G \times G \to G$. Untuk sebarang $a, b \in G$ dapat ditulis sebagai $a * b$ untuk $*(a, b)$ (Dummit & Foot, 2004).

Definisi 2.12

Grup adalah pasangan terurut $(G, *)$ dengan G adalah himpunan tak kosong dan $*$ adalah operasi biner di G yang memenuhi syarat berikut:

1. Operasi $*$ bersifat asosiatif, untuk semua $x, y, z \in G$, berlaku $x * (y * z) = (x * y) * z$.
2. Himpunan G memiliki elemen identitas, yaitu terdapat $e \in G$ sehingga $x * e = e * x = x$ untuk semua $x \in G$.
3. Himpunan G memuat invers. Untuk setiap $x \in G$ terdapat elemen x^{-1} di G sehingga $x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$.

Selanjutnya, G disebut grup komutatif atau grup abelian jika $x * y = y * x$ untuk semua $x, y \in G$(Dummit & Foot, 2004).

Definisi 2.13

Orde grup adalah banyaknya elemen dari suatu grup (berhingga atau tak hingga) dan dinotasikan dengan $ord(G)$ (Gallian, 2017).

Contoh 2.13

Grup $\mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$, $ord(\mathbb{Z}_4) = 4$.

Definisi 2.14

Misalkan G adalah grup. Orde elemen g di G adalah bilangan bulat positif terkecil n sedemikian sehingga $g^n = e$.(dalam notasi penjumlahan, dapat ditulis sebagai $ng = 0$). Jika bilangan bulat positif n tidak memenuhi $g^n = e$, maka g memiliki orde takhingga. Orde dari elemen g dinotasikan dengan $ord(g)$ (Gallian, 2017).

Contoh 2.14

Misalkan $\mathbb{Z}_4 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$ adalah grup dengan operasi penjumlahan, orde elemen dari $\mathbb{Z}_4$ sebagai berikut:

$ord(\overline{0}) = 1$.

$ord(\overline{1}) = 4$ karena $1^4 = 0$

$ord(\overline{2}) = 2$ karena $2^2 = 0$

$ord(\overline{3}) = 4$ karena $3^4 = 0$

Proposisi 2.15

Misalkan G adalah grup hingga, orde setiap elemen dari grup G membagi orde dari G (Gallian, 2017).

2.1.5 Grup Bilangan Bulat Modulo m

Teorema 2.16

Misalkan m adalah bilangan bulat positif dengan $m > 1$. Operasi penjumlahan pada $\mathbb{Z}_m$ didefinisikan sebagai berikut:

$$\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b}$$

untuk setiap $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_m$. Dengan operasi tersebut, akan dibuktikan bahwa $\mathbb{Z}_m$ merupakan grup.

Bukti

1. Himpunan $\mathbb{Z}_m$ tertutup terhadap operasi penjumlahan

   Misalkan $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_m$ maka $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b}$ juga ada di $\mathbb{Z}_m$

   Jadi $\mathbb{Z}_m$ tertutup terhadap operasi penjumlahan.

2. Operasi penjumlahan bersifat asosiatif di $\mathbb{Z}_m$.

   Misalkan $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_m$ maka

$$\bar{a} + \left(\bar{b} + \bar{c}\right) = \bar{a} + \overline{b + c}$$

$$= \overline{a + (b + c)}$$

$$= \overline{(a + b) + c}$$

$$= \overline{a + b} + \bar{c}$$

$$= \left(\bar{a} + \bar{b}\right) + \bar{c}$$

Jadi operasi penjumlahan di $\mathbb{Z}_m$ bersifat asosiatif.

3. Elemen $\bar{0}$ merupakan identitas terhadap operasi penjumlahan di $\mathbb{Z}_m$

   Ambil $\bar{b} \in \mathbb{Z}_m$, maka diperoleh

   $$\bar{0} + \bar{b} = \overline{0 + b} = \bar{b} \qquad \text{dan} \qquad \bar{b} + \bar{0} = \overline{b + 0} = \bar{b}$$

4. Ambil $\bar{c} \in \mathbb{Z}_m$, maka diperoleh

   $$\bar{c} + (\overline{-c}) = \overline{c + (-c)} = \bar{0} \text{ dan} \qquad \overline{-c} + \bar{c} = \overline{-c + c} = \bar{0}$$

   Jadi $-\bar{c} = \overline{-c}$

Dengan demikian, terbukti bahwa $\mathbb{Z}_m$ terhadap operasi penjumlahan merupakan grup bilangan bulat modulo m. Operasi penjumlahan pada grup $\mathbb{Z}_m$ dapat ditulis sebagai

$$\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b}$$

2.1.6 Graf

Definisi 2.17

Graf G adalah himpunan takkosong dan berhingga V dari objek-objek yang disebut simpul dan anggota dari $E \subseteq \left\{\{u, v\} \mid u, v \in V, u \neq v\right\}$ disebut sisi. Graf G dinyatakan sebagai pasangan terurut dari himpunan simpul V dan himpunan sisi E dan dapat ditulis $G = (V, E)$. Untuk menegaskan bahwa V dan E merupakan himpunan simpul dan sisi dari graf G, maka V dapat dituliskan sebagai $V(G)$ dan E

dapat dituliskan sebagai $E(G)$. Suatu sisi $\{u, v\}$ dari G dapat dituliskan pula sebagai uv atau vu (Chartrand dkk., 2010).

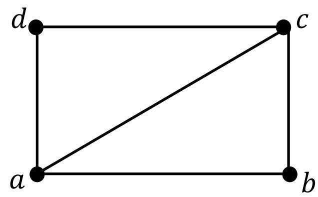
Contoh 2.17

Misalkan graf G memuat himpunan simpul $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$ sebagai berikut

$V(G) = \{a, b, c, d\}$

$E(G) = \{\{a, b\}, \{a, d\}, \{a, c\}, \{c, d\}, \{c, b\}\}$

Berdasarkan $V(G)$ dan $E(G)$ maka diperoleh gambar graf G seperti di bawah ini.

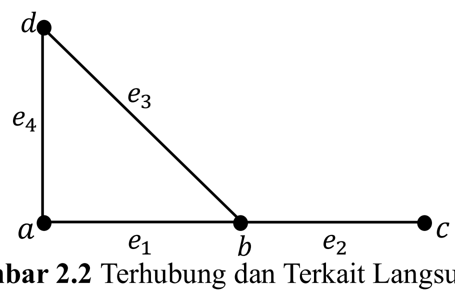


Gambar 2.1 Contoh Graf

Definisi 2.18

Misalkan u dan v adalah dua simpul pada graf G, $e = \{u, v\}$ adalah sisi dari graf G, maka simpul u dan v disebut terhubung langsung (*adjacent*) sedangkan u dan e serta v dan e disebut terkait langsung (*incident*), dan simpul u dan v disebut ujung dari e (Abdussakir dkk., 2009).

Contoh 2.18



Gambar 2.2 Terhubung dan Terkait Langsung

Dari Gambar 2.2 diketahui bahwa simpul yang terhubung langsung adalah a dan b, a dan d, b dan c. Sisi e_1 terkait langsung dengan simpul a dan b, serta sisi e_4 terkait langsung dengan simpul a dan d.

Definisi 2.19

Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf. Banyaknya simpul pada graf G disebut order dari G dan dinotasikan dengan $n(G)$ (Chartrand dkk., 2010).

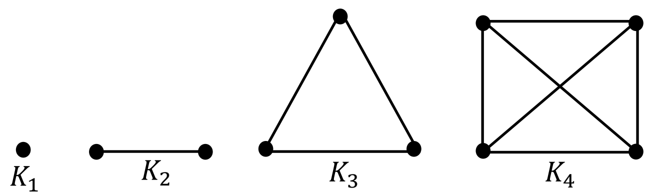
Contoh 2.19

$n(G)$ pada Gambar 2.2 adalah 4

Definisi 2.20

Misalkan G adalah graf. Graf komplit adalah setiap dua simpul yang berbeda di G terhubung langsung dan dinotasikan dengan K_n , $n \geq 1$ dan n adalah bilangan asli (Chartrand dkk., 2010).

Contoh 2.20

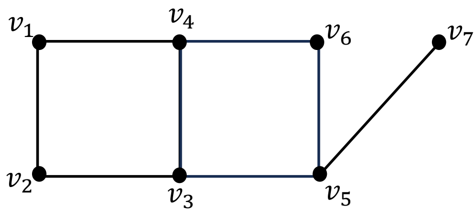


Gambar 2.3 Graf Komplit

Definisi 2.21

Misalkan G adalah graf. Graf G dikatakan graf bipartisi jika $V(G)$ dapat dipartisi menjadi dua himpunan U dan W sedemikian sehingga setiap sisi pada graf G dapat menghubungkan simpul di U dan simpul di W (Chartrand dkk., 2010).

Contoh 2.21



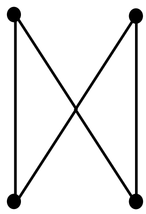
Gambar 2.4 Graf Bipartisi

Pada Gambar 2.4 graf tersebut dapat dipartisi menjadi dua himpunan yaitu $\{v_1, v_3, v_6, v_7\}$ dan $\{v_2, v_4, v_5\}$.

Definisi 2.22

Suatu graf G dikatakan graf bipartisi lengkap jika $V(G)$ dapat dipartisi menjadi dua himpunan U dan W sedemikian sehingga uw adalah sisi pada graf G jika $u \in U$ dan $w \in W$. Jika $|U| = s$ dan $|W| = t$ maka graf bipartisi tersebut dapat dinotasikan dengan $K_{s,t}$ atau $K_{t,s}$ (Chartrand dkk., 2010).

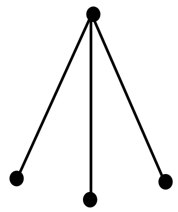
Contoh 2.22



Gambar 2.5 $K_{2,2}$

Definisi 2.23

Graf bipartisi lengkap yang berbentuk $K_{1,t}$ disebut graf bintang (Chartrand dkk., 2010).



Gambar 2.6 $K_{1,3}$

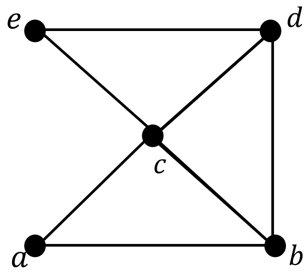
Definisi 2.24

Misalkan u dan v adalah simpul-simpul (tidak harus berbeda) dari graf G. Pada graf G jalan $W: u - v$ adalah barisan simpul-simpul yang dimulai dari simpul u dan diakhiri di simpul v sehingga simpul-simpul yang berurutan di W terhubung langsung di G. Jalan W di G dapat dituliskan sebagai

$$W = \{u = v_0, v_1, \dots, v_k = v\}$$

Di mana $v_i v_{i+1} \in E(G)$ untuk $0 \leq i \leq k - 1$. Panjang jalan dari W adalah banyaknya sisi yang dilalui. Jalan yang tidak mengulang simpul disebut lintasan dan dinotasikan dengan Y (Chartrand dkk., 2010).

Contoh 2.24



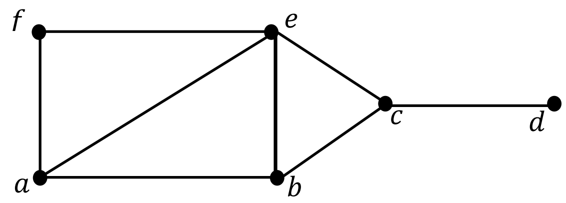
Gambar 2.7 Jalan dan Lintasan

Misalkan $W: u - v$ dengan $W = \{a, c, b, c, d, e, c\}$ maka W termasuk contoh dari jalan dan panjang dari jalan $W = 6$. Sedangkan contoh dari lintasan adalah $Y = \{e, d, c, b\}$ dengan panjang lintasan $Y = 3$.

Definisi 2.25

Misalkan G adalah suatu graf dengan u dan v adalah simpul di G. Graf G dikatakan graf terhubung jika untuk setiap simpul u dan v terdapat lintasan $u - v$ di G (Chartrand dkk., 2010).

Contoh 2.25



Gambar 2.8 Graf Terhubung

Definisi 2.26

Jarak dari simpul u ke simpul v pada graf terhubung G adalah panjang lintasan $u - v$ terpendek di G dan dinotasikan dengan $d(u, v)$ (Chartrand dkk, 2010).

Contoh 2.26

Pada Gambar 2.8 $d(f, b) = 2$

Definisi 2.27

Derajat suatu simpul v pada graf G adalah banyaknya simpul di G yang terhubung langsung dengan v dan dinotasikan dengan $\deg(v)$ (Chartrand dkk., 2010).

Contoh 2.27

Pada Gambar 2.8 $\deg(a) = 3$

Definisi 2.28

Derajat terbesar di antara simpul-simpul di graf G disebut derajat maksimum dari G dan dinotasikan dengan $\Delta(G)$ (Chartrand dkk., 2010).

Contoh 2.28

Pada Gambar 2.8 $\Delta(G) = 4$.

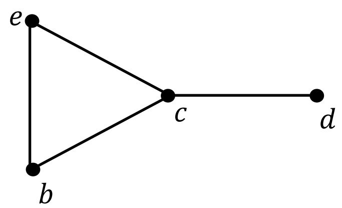
2.1.7 Subgraf

Definisi 2.29

Misalkan G adalah graf. Graf H dikatakan subgraf dari G jika $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$. Jika H subgraf dari G maka dinotasikan dengan $H \subseteq G$ (Chartrand dkk., 2010).

Contoh 2.29

Dari Gambar 2.8 diperoleh $V(G) = \{a, b, c, d, e, f\}$ dan $E(G) = \{\{a, b\}, \{a, e\}, \{a, f\}, \{b, c\}, \{b, e\}, \{c, d\}, \{e, c\}, \{f, e\}\}$.



Gambar 2.9 Subgraf H

Dari Gambar 2.9 diperoleh $V(H) = \{b, c, d, e\}$ dan $E(H) = \{\{b, c\}, \{b, e\}, \{c, d\}, \{e, c\}\}$.

Gambar 2.9 merupakan subgraf dari Gambar 2.8 karena $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$.

2.1.8 Graf Koprima

Definisi 2.30

Misalkan G adalah suatu grup dengan x dan y adalah elemen dari grup G. Graf koprima dari grup G adalah graf yang simpulnya merupakan elemen di G dan dua simpul x, y yang berbeda terhubung langsung jika dan hanya jika $FPB(ord(x), ord(y)) = 1$. Graf koprima dari grup G dinotasikan dengan Γ_G (Ma dkk., 2014).

Contoh 2.30

Diberikan grup $\mathbb{Z}_9 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}\}$ dengan operasi penjumlahan. Graf koprima $\Gamma_{\mathbb{Z}_9}$ adalah graf dengan himpunan simpul

$$V(\Gamma_{\mathbb{Z}_9}) = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}\}$$

Misalkan $x, y \in V(\Gamma_{\mathbb{Z}_9})$. Orde elemen dan FPB dari orde elemen di $\mathbb{Z}_9$ dapat dilihat pada Tabel 2.1.

Tabel 2.1 Orde Elemen di $\mathbb{Z}_9$

Elemen $\mathbb{Z}_9$	Orde elemen di $\mathbb{Z}_9$
$\bar{0}$	1
$\bar{1}$	9
$\bar{2}$	9
$\bar{3}$	3
$\bar{4}$	9
$\bar{5}$	9
$\bar{6}$	3
$\bar{7}$	9
$\bar{8}$	9

Tabel 2.2 Faktor Persekutuan Terbesar dari Orde Elemen di $\mathbb{Z}_9$

$FPB(ord(x), ord(y))$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$
$\bar{0}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\bar{1}$	1	9	9	3	9	9	3	9	9
$\bar{2}$	1	9	9	3	9	9	3	9	9
$\bar{3}$	1	3	3	3	3	3	3	3	3
$\bar{4}$	1	9	9	3	9	9	3	9	9

$FPB(ord(x), ord(y))$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$
$\overline{5}$	1	9	9	3	9	9	3	9	9
$\overline{6}$	1	3	3	3	3	3	3	3	3
$\overline{7}$	1	9	9	3	9	9	3	9	9
$\overline{8}$	1	9	9	3	9	9	3	9	9

Dari Tabel 2.2 diperoleh simpul yang terhubung dari graf koprima $\Gamma_{\mathbb{Z}_9}$ adalah sebagai berikut.

$\overline{0}$ terhubung langsung dengan $\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}$

$\overline{1}$ terhubung langsung dengan $\overline{0}$

$\overline{2}$ terhubung langsung dengan $\overline{0}$

$\overline{3}$ terhubung langsung dengan $\overline{0}$

$\overline{4}$ terhubung langsung dengan $\overline{0}$

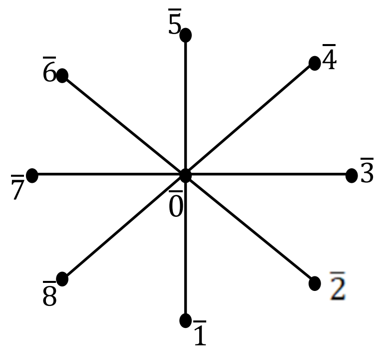
$\overline{5}$ terhubung langsung dengan $\overline{0}$

$\overline{6}$ terhubung langsung dengan $\overline{0}$

$\overline{7}$ terhubung langsung dengan $\overline{0}$

$\overline{8}$ terhubung langsung dengan $\overline{0}$

Dari simpul yang terhubung tersebut maka graf koprima $\mathbb{Z}_9$ dapat digambarkan sebagai berikut



Gambar 2.10 Graf Koprima $\Gamma_{\mathbb{Z}_9}$

2.1.9 Pelabelan $L(2,1)$

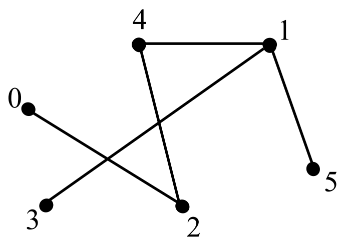
Definisi 2.31

Misalkan S dan T adalah sebarang himpunan. Pemetaan $f : S \mapsto T$ adalah aturan yang mengaitkan setiap $s \in S$ dengan elemen $f(s) \in T$ (Lee, 2010).

Definisi 2.32

Pelabelan $L(2,1)$ pada graf G adalah pemetaan $f : V(G) \to \{0,1,2,...\}$ sedemikian sehingga jika x, y adalah dua simpul yang terhubung langsung di $V(G)$ maka $|f(x) - f(y)| \geq 2,$ dan jika jarak antara x dan y adalah 2 maka $|f(x) - f(y)| \geq 1$ (Lum, 2007).

Contoh 2.32



Gambar 2.11 Contoh Pelabelan $L(2,1)$

Syarat pelabelan $L(2,1)$

1. Dua simpul yang terhubung langsung di $V(G)$ maka $|f(x) - f(y)| \geq 2$

   $|1-4| = 3 \geq 2$ $\quad$ $|1-5| = 4 \geq 2$ $\quad$ $|1-3| = 2 \geq 2$

   $|4-2| = 2 \geq 2$ $\quad$ $|0-2| = 2 \geq 2$

2. Jika jarak antara x dan y adalah 2 maka $|f(x) - f(y)| \geq 1$

   $|5-4| = 1 \geq 1$ $\quad$ $|4-3| = 1 \geq 1$ $\quad$ $|5-3| = 2 \geq 1$

   $|4-0) = 4| \geq 1$ $\quad$ $|1-2| = 1 \geq 1$

Karena kedua syarat tersebut terpenuhi, maka Contoh 2.32 mempunyai pelabelan $L(2,1)$.

Definisi 2.33

Nilai pelabelan $L(2, 1)$ dari graf G adalah bilangan terkecil m sedemikian sehingga G mempunyai label $L(2, 1)$ dengan label tidak lebih dari m dan dinotasikan dengan $\lambda_{2,1}(G)$ (Lum, 2007).

Contoh 2.33

Pada Gambar 2.11, $\lambda_{2,1}(G) = 5$

Berikut ini nilai pelabelan $L(2, 1)$ pada beberapa graf.

Proposisi 2.34 $\lambda_{2,1}(K_n) = 2n - 2$

Bukti

Diberikan K_n dengan simpul $v_1, v_2, \dots, v_n$. Pemetaan $f: V(G) \to \{0, 1, 2, \dots, 2n - 2\}$ didefinisikan sebagai $f(v_i) = 2i - 2$ adalah suatu pelabelan untuk K_n. Dengan demikian, $\lambda_{2,1}(K_n) \leq 2n - 2$. Diklaim bahwa K_n tidak dapat dilabeli dengan angka $0, 1, 2, \dots, 2n - 3$. Perhatikan bahwa, $2n - 2$ merupakan label yang akan digunakan untuk melabeli n simpul. Kondisi ini dapat digambarkan sebagai $n - 1$ pasangan *disjoint* dari label yang berurutan di mana n simpul harus dilabeli dengan label tersebut. Dengan menggunakan Prinsip Sarang Merpati, maka salah satu dari pasangan tersebut harus memuat dua simpul. Namun, karena kedua simpul ini terhubung langsung di K_n, jelas ini bertentangan dengan syarat pelabelan $L(2, 1)$. Sehingga $\lambda_{2,1}(K_n) = 2n - 2$ (Lum, 2007).

Lemma 2.35

Jika H adalah subgraf dari G, maka $\lambda_{2,1}(H) \leq \lambda_{2,1}(G)$

Bukti

Misalkan $\lambda_{2,1}(G) = m$ dengan pelabelan $f: V(G) \to \{0, 1, 2, \dots, m\}$. Maka $g: V(H) \to \{0, 1, 2, \dots, m\}$, yang artinya $g(v) = f(v)$ untuk semua $v \in V(H)$

adalah suatu pelabelan untuk H yang tidak menggunakan label lebih dari m. Dengan demikian $\lambda_{2,1}(H) \leq m = \lambda_{2,1}(G)$ (Lum, 2007).

Teorema 2.36

Nilai $\lambda_{2,1}$ dari graf bintang $K_{1,\Delta} = \Delta + 1$ di mana Δ merupakan derajat maksimum dari $K_{1,\Delta}$.

Diberikan $K_{1,n}$ dengan simpul-simpul $V(K_{1,n}) = \{v_1, \dots, v_n\}$. Simpul v_j mempunyai derajat maksimum Δ dan terhubung langsung ke $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ dikarenakan $K_{1,n}$ adalah graf bintang. Pelabelan $L(2,1)$ dari $K_{1,n}$ adalah simpul v_1 diberi label 0 dan simpul $v_2, v_3, \dots, v_n$ diberi label yang berbeda. Karena setiap $v_i, 2 \leq i \leq n$, terhubung langsung hanya dengan satu $v_j, j < i$ dan berjarak 2 maka ada setidaknya $\Delta + 1$ label yang dapat digunakan (Griggs & Yeh, 1992).

2.2 Kajian Integrasi Topik dengan Al-Qur'an

Dalam Al-Qur'an sudah dijelaskan tentang representasi teori graf yang mengacu pada sarang lebah. Dilihat dari bentuknya, sarang lebah memuat sisi-sisi dan simpul-simpul sebagai pengait sisinya. Ayat tentang sarang lebah terdapat pada surat An-Nahl ayat 68.

وَاَوْحٰى رَبُّكَ اِلَى النَّحْلِ اَنِ اتَّخِذِيْ مِنَ الْجِبَالِ بُيُوْتًا وَّمِنَ الشَّجَرِ وَمِمَّا يَعْرِشُوْنَۙ ﴿٦٨﴾

Artinya: *"Dan Tuhanmu mewahyukan kepada lebah: "buatlah sarang-sarang di bukit-bukit, di pohon-pohon kayu, dan di tempat-tempat yang dibikin manusia" (An-Nahl/16:68).*

Dari dulu kelompok lebah membangun sarangnya menggunakan bentuk segi enam yang menurut para ahli struktur bangunan merupakan ruang yang paling banyak memuat isi dibanding dengan segi-segi lain. Masing-masing kelompok lebah memiliki cara atau sarana sendiri untuk membuat sarangnya mulai dari gua yang terletak di pegunungan atau lubang-lubang pada pohon tua (Kemenag RI, 2022). Segi enam tersebut menyerupai graf sikel yang mempunyai enam simpul dan enam sisi. Pada graf sarang lebah, semakin| besar bentuk sarang maka akan lebih banyak simpul dan sisi yang termuat dalam sarang tersebut.

Dalam graf ada istilah graf terhubung, di mana dua simpul berbeda dikatakan terhubung langsung jika terdapat lintasan dari satu simpul ke simpul lainnya. Representasi dari graf terhubung terdapat pada peristiwa Isra’ dan Mi’raj Nabi Muhammad SAW. Peristiwa Isra’ terdapat dalam surat Al Isra’ ayat 1 berikut ini:

سُبْحٰنَ الَّذِيْٓ اَسْرٰى بِعَبْدِهٖ لَيْلًا مِّنَ الْمَسْجِدِ الْحَرَامِ اِلَى الْمَسْجِدِ الْاَقْصَا الَّذِيْ بٰرَكْنَا حَوْلَهٗ لِنُرِيَهٗ مِنْ اٰيٰتِنَاۗ اِنَّهٗ هُوَ السَّمِيْعُ الْبَصِيْرُ ﴿١﴾

Artinya: *“Mahasuci (Allah) yang telah memperjalankan hamba-Nya (Nabi Muhammad) pada malam hari dari Masjid Al-haram ke Masjid Al-Aqsa yang telah kami berkahi sekelilingnya agar Kami perlihatkan kepadanya sebagian tanda-tanda (kebesaran) Kami. Sesungguhnya Dia Maha Mendengar lagi Maha Melihat” (Al-Isra’/17:1).*

Menurut tafsir Ibnu Katsir, ayat ini menjelaskan tentang peristiwa Isra' Nabi Muhammad SAW. Isra' adalah perjalanan Nabi Muhammad SAW dari Masjid Al-Haram di Makkah menuju Masjid Al-Aqsha di Palestina. Pada suatu malam, Allah SWT membawa hamba-Nya yang mulia, yaitu Nabi Muhammad SAW, dari Masjid Al-Haram ke Masjid Al-Aqsha (Abdullah, 2003). Perjalanan ini terjadi pada kegelapan malam hari dalam keadaan sadar dan bukan dalam mimpi.

Allah SWT menguraikan peristiwa ini untuk menunjukkan kebesaran dan kekuasaan-Nya. Selain itu peristiwa ini menjadi mukjizat bagi Nabi Muhammad

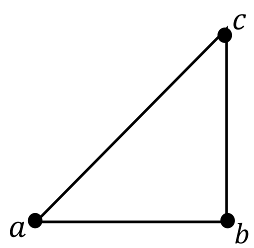
SAW untuk memperkuat misi dakwahnya. Dalam perjalanan ini, Nabi Muhammad SAW menerima perintah shalat lima waktu sebagai kewajiban umat Islam. Sedangkan peristiwa Mi’raj terdapat pada surat An-Najm ayat 13-14 berikut ini:

وَلَقَدْ رَاٰهُ نَزْلَةً اُخْرٰىۙ ﴿١٣﴾ عِنْدَ سِدْرَةِ الْمُنْتَهٰى ﴿١٤﴾

Artinya: *“Dan sungguh, dia (Muhammad) telah melihatnya (dalam rupanya yang asli) pada waktu lain. (yaitu) di Sidrat Al-Muntaha” (An-Najm/53:13-14).*

Sesungguhnya Nabi Muhammad SAW melihat Jibril (untuk kedua kalinya) yang sangat agung pada waktu melakukan Mi’raj, yaitu perjalanan Nabi Muhammad SAW dari Masjid Al-Aqsa di planet bumi ke Sidrat Al-Muntaha (batas alam yang dapat diketahui oleh para malaikat). Sidrat Al-Muntaha adalah nama sebuah pohon Nabaq yang terletak di sebelah kanan Arasy (Al-Mahalli & As-Suyuti, 2016). Selain itu, ada hadits yang berpendapat bahwa Sidrat Al-Muntaha ada dilangit ketujuh.

Peristiwa Isra’ dan Mi’raj dapat dikaitkan dengan graf di mana Masjid Al-Haram, Masjid Al-Aqsa dan Sidrat Al-Muntaha diibaratkan sebagai simpul dan perjalanan Nabi Muhammad SAW diibaratkan sebagai sisi. Graf terhubung dalam peristiwa Isra’ dan Mi’raj dapat direpresentasikan sebagai berikut.



Gambar 2.12 Graf Terhubung dalam Peristiwa Isra’ Mi’raj

Keterangan:

a : Masjid Al-Haram

b : Masjid Al- Aqsa

c : Sidrat Al-Muntaha

Peristiwa Isra’ dan Mi’raj juga diperkuat dengan hadits yang diriwayatkan oleh Imam Bukhari dari Anas bin Malik yaitu

حَدَّثَنَا هُدْبَةُ بْنُ خَالِدٍ، حَدَّثَنَا هَمَّامٌ، عَنْ قَتَادَةَ. وَقَالَ لِي خَلِيفَةُ حَدَّثَنَا يَزِيدُ بْنُ زُرَيْعٍ، حَدَّثَنَا سَعِيدٌ، وَهِشَامٌ، قَالاَ حَدَّثَنَا قَتَادَةُ، حَدَّثَنَا أَنَسُ بْنُ مَالِكٍ، عَنْ مَالِكِ بْنِ صَعْصَعَةَ ـ رضى الله عنهما ـ قَالَ قَالَ النَّبِيُّ صلى الله عليه وسلم " بَيْنَا أَنَا عِنْدَ الْبَيْتِ بَيْنَ النَّائِمِ وَالْيَقْظَانِ ـ وَذَكَرَ بَيْنَ الرَّجُلَيْنِ ـ فَأُتِيتُ بِطَسْتٍ مِنْ ذَهَبٍ مُلِئَ حِكْمَةً وَإِيمَانًا، فَشُقَّ مِنَ النَّحْرِ إِلَى مَرَاقِّ الْبَطْنِ، ثُمَّ غُسِلَ الْبَطْنُ بِمَاءِ زَمْزَمَ، ثُمَّ مُلِئَ حِكْمَةً وَإِيمَانًا، وَأُتِيتُ بِدَابَّةٍ أَبْيَضَ دُونَ الْبَغْلِ وَفَوْقَ الْحِمَارِ الْبُرَاقُ، فَانْطَلَقْتُ مَعَ جِبْرِيلَ حَتَّى أَتَيْنَا السَّمَاءَ الدُّنْيَا قِيلَ مَنْ هَذَا قَالَ جِبْرِيلُ. قِيلَ مَنْ مَعَكَ قِيلَ مُحَمَّدٌ. قِيلَ وَقَدْ أُرْسِلَ إِلَيْهِ قَالَ نَعَمْ. قِيلَ مَرْحَبًا بِهِ، وَلَنِعْمَ الْمَجِيءُ جَاءَ. فَأَتَيْتُ عَلَى آدَمَ، فَسَلَّمْتُ عَلَيْهِ، فَقَالَ مَرْحَبًا بِكَ مِنِ ابْنٍ وَنَبِيٍّ. فَأَتَيْنَا السَّمَاءَ الثَّانِيَةَ، قِيلَ مَنْ هَذَا قَالَ جِبْرِيلُ. قِيلَ مَنْ مَعَكَ قَالَ مُحَمَّدٌ صلى الله عليه وسلم. قِيلَ أُرْسِلَ إِلَيْهِ قَالَ نَعَمْ. قِيلَ مَرْحَبًا بِهِ، وَلَنِعْمَ الْمَجِيءُ جَاءَ. فَأَتَيْتُ عَلَى عِيسَى وَيَحْيَى فَقَالاَ مَرْحَبًا بِكَ مِنْ أَخٍ وَنَبِيٍّ. فَأَتَيْنَا السَّمَاءَ الثَّالِثَةَ، قِيلَ مَنْ هَذَا قِيلَ جِبْرِيلُ. قِيلَ مَنْ مَعَكَ قِيلَ مُحَمَّدٌ. قِيلَ وَقَدْ أُرْسِلَ إِلَيْهِ قَالَ نَعَمْ. قِيلَ مَرْحَبًا بِهِ وَلَنِعْمَ الْمَجِيءُ جَاءَ.فَأَتَيْتُ يُوسُفَ فَسَلَّمْتُ عَلَيْهِ،قَالَ مَرْحَبًا بِكَ مِنْ أَخٍ وَنَبِيٍّ فَأَتَيْنَا السَّمَاءَ الرَّابِعَةَ،قِيلَ مَنْ هَذَا قِيلَ جِبْرِيلُ. قِيلَ مَنْ مَعَكَ قِيلَ مُحَمَّدٌ صلى الله عليه وسلم. قِيلَ وَقَدْ أُرْسِلَ إِلَيْهِ قِيلَ نَعَمْ. قِيلَ مَرْحَبًا بِهِ، وَلَنِعْمَ الْمَجِيءُ جَاءَ. فَأَتَيْتُ عَلَى إِدْرِيسَ فَسَلَّمْتُ عَلَيْهِ،فَقَالَ مَرْحَبًا مِنْ أَخٍ وَنَبِيٍّ.فَأَتَيْنَا السَّمَاءَ الْخَامِسَةَ، قِيلَ مَنْ هَذَا قَالَ جِبْرِيلُ. قِيلَ وَمَنْ مَعَكَ قِيلَ مُحَمَّدٌ. قِيلَ وَقَدْ أُرْسِلَ إِلَيْهِ قَالَ نَعَمْ. قِيلَ مَرْحَبًا بِهِ، وَلَنِعْمَ الْمَجِيءُ جَاءَ. فَأَتَيْنَا عَلَى هَارُونَ، فَسَلَّمْتُ عَلَيْهِ فَقَالَ مَرْحَبًا بِكَ مِنْ أَخٍ وَنَبِيٍّ.فَأَتَيْنَا عَلَى السَّمَاءِ السَّادِسَةِ، قِيلَ مَنْ هَذَا قِيلَ جِبْرِيلُ. قِيلَ مَنْ مَعَكَ قَالَ مُحَمَّدٌ صلى الله عليه وسلم. قِيلَ وَقَدْ أُرْسِلَ إِلَيْهِ مَرْحَبًا بِهِ، وَلَنِعْمَ الْمَجِيءُ جَاءَ. فَأَتَيْتُ عَلَى مُوسَى، فَسَلَّمْتُ {عَلَيْهِ} فَقَالَ مَرْحَبًا بِكَ مِنْ أَخٍ وَنَبِيٍّ. فَلَمَّا جَاوَزْتُ بَكَى. فَقِيلَ مَا أَبْكَاكَ قَالَ يَا رَبِّ، هَذَا الْغُلاَمُ الَّذِي

بُعِثَ بَعْدِي يَدْخُلُ الْجَنَّةَ مِنْ أُمَّتِهِ أَفْضَلُ مِمَّا يَدْخُلُ مِنْ أُمَّتِي. فَأَتَيْنَا السَّمَاءَ السَّابِعَةَ، قِيلَ مَنْ هَذَا قِيلَ جِبْرِيلُ. قِيلَ مَنْ مَعَكَ قِيلَ مُحَمَّدٌ. قِيلَ وَقَدْ أُرْسِلَ إِلَيْهِ مَرْحَبًا بِهِ، وَنِعْمَ الْمَجِيءُ جَاءَ. فَأَتَيْتُ عَلَى إِبْرَاهِيمَ، فَسَلَّمْتُ عَلَيْهِ فَقَالَ مَرْحَبًا بِكَ مِنِ ابْنٍ وَنَبِيٍّ، فَرُفِعَ لِيَ الْبَيْتُ الْمَعْمُورُ، فَسَأَلْتُ جِبْرِيلَ فَقَالَ هَذَا الْبَيْتُ الْمَعْمُورُ يُصَلِّي فِيهِ كُلَّ يَوْمٍ سَبْعُونَ أَلْفَ مَلَكٍ، إِذَا خَرَجُوا لَمْ يَعُودُوا إِلَيْهِ آخِرَ مَا عَلَيْهِمْ، وَرُفِعَتْ لِي سِدْرَةُ الْمُنْتَهَى فَإِذَا نَبِقُهَا كَأَنَّهُ قِلاَلُ هَجَرٍ، وَوَرَقُهَا كَأَنَّهُ آذَانُ الْفُيُولِ، فِي أَصْلِهَا أَرْبَعَةُ أَنْهَارٍ نَهْرَانِ بَاطِنَانِ وَنَهْرَانِ ظَاهِرَانِ، فَسَأَلْتُ جِبْرِيلَ فَقَالَ أَمَّا الْبَاطِنَانِ فَفِي الْجَنَّةِ، وَأَمَّا الظَّاهِرَانِ النِّيلُ وَالْفُرَاتُ (رواه البخاري)

Artinya: *"Telah bercerita kepada kami Hudbah bin Khalid telah bercerita kepada kami Hammam dari Qatadah. Dan diriwayartkan pula, Khalifah berkata kepadaku, telah bercerita kepada kami Yazid bin Zurai' telah bercerita kepada kami Sa'id dan Hisyam keduanya berkata telah bercerita kepada kami Qatadah telah bercerita kepada kami Anas bin Malik dari Malik bin Sha'sha'ah radliallahu 'anhuma berkata, Nabi shallallahu 'alaihi wasallam bersabda: Ketika aku berada di sisi Baitullah antara tidur dan sadar. Lalu Beliau menyebutkan, yaitu: Ada seorang laki-laki di antara dua laki-laki yang datang kepadaku membawa baskom terbuat dari emas yang dipenuhi dengan hikmah dan iman lalu orang itu membelah badanku dari atas dada hingga bawah perut, lalu dia mencuci perutku dengan air zamzam kemudian mengisinya dengan hikmah dan iman. Kemudian aku diberi seekor hewan tunggangan putih yang lebih kecil dari pada baghal namun lebih besar dibanding keledai bernama Al-Buraq. Maka aku berangkat bersama Jibril Alaihissalam, hingga sampai di langit dunia. Lalu ditanyakan; Siapakah ini. Jibril menjawab; Jibril. Ditanyakan lagi; Siapa orang yang bersamamu?. Jibril menjawab; Muhammad. Ditanyakan lagi; Apakah dia telah diutus?. Jibril menjawab; Ya. Maka dikatakan; Selamat datang, sebaik-baik orang yang datang telah tiba. Kemudian aku menemui Adam Alaihissalam dan memberi salam kepadanya lalu dia berkata; (Ucapan) selamat datang bagimu dari anak keturunan dan nabi . Kemudian kami naik ke langit kedua lalu ditanyakan; Siapakah ini. Jibril menjawab; Jibril. Ditanyakan lagi; Siapa orang yang bersamamu?. Jibril menjawab; Muhammad. Ditanyakan lagi; Apakah dia telah diutus?. Jibril menjawab; Ya. Maka dikatakan; Selamat datang baginya dan ini sebaik-baiknya kedatangan orang yang datang. Lalu aku menemui 'Isa dan Yahya Alaihissalam lalu keduanya berkata; Selamat datang bagimu dari saudara dan nabi. Kemudian kami naik ke langit ketiga lalu ditanyakan; Siapakah ini. Jibril menjawab; Jibril. Ditanyakan lagi; Siapa orang yang bersamamu?. Jibril menjawab; Muhammad. Ditanyakan lagi; Apakah dia telah diutus?. Jibril menjawab; Ya. Maka dikatakan; Selamat datang baginya dan ini sebaik-baiknya kedatangan orang yang datang. Lalu aku menemui Yusuf Alaihissalam dan memberi salam kepadanya lalu dia berkata; Selamat datang bagimu dari saudara dan nabi. Kemudian kami naik ke langit keempat lalu ditanyakan; Siapakah ini. Jibril menjawab; Jibril. Ditanyakan lagi; Siapa orang yang bersamamu?. Jibril menjawab; Muhammad. Ditanyakan* *lagi; Apakah dia telah diutus?. Jibril menjawab; Ya. Maka dikatakan; Selamat datang baginya dan ini sebaik-baik kedatangan orang yang datang. Lalu aku menemui Idris Alaihissalam dan memberi salam kepadanya lalu dia berkata; Selamat datang bagimu dari saudara dan nabi. Kemudian kami naik ke langit kelima lalu ditanyakan; Siapakah ini. Jibril menjawab; Jibril. Ditanyakan lagi; Siapa orang yang bersamamu?. Jibril menjawab; Muhammad. Ditanyakan lagi; Apakah dia telah diutus?. Jibril menjawab; Ya. Maka dikatakan; Selamat datang baginya dan ini sebaik-baiknya kedatangan orang yang datang. Lalu aku menemui Harun Alaihissalam dan memberi salam kepadanya lalu dia berkata; Selamat datang bagimu dari saudara dan nabi. Kemudian kami naik ke langit keenam lalu ditanyakan; Siapakah ini. Jibril menjawab; Jibril. Ditanyakan lagi; Siapa orang yang bersamamu?. Jibril menjawab; Muhammad. Ditanyakan lagi; Apakah dia telah diutus?. Jibril menjawab; Ya. Maka dikatakan; Selamat datang baginya dan ini sebaik-baiknya kedatangan orang yang datang. Kemudian aku menemui Musa 'Alaihissalam dan memberi salam kepadanya lalu dia berkata; Selamat datang bagimu dari saudara dan nabi. Ketika aku sudah selesai, tiba-tiba dia menangis. Lalu ditanyakan; Mengapa kamu menangis?. Musa menjawab; Ya Rabb, anak ini yang diutus setelah aku, umatnya akan masuk surga dengan kedudukan lebih utama dibanding siapa yang masuk surga dari umatku. Kemudian kami naik ke langit ketujuh lalu ditanyakan; Siapakah ini. Jibril menjawab; Jibril. Ditanyakan lagi; Siapa orang yang bersamamu?. Jibril menjawab; Muhammad. Ditanyakan lagi; Apakah dia telah diutus?. Jibril menjawab; Ya. Maka dikatakan; Selamat datang baginya dan ini sebaik-baiknya kedatangan orang yang datang. Kemudian aku menemui Ibrahim 'Alaihissalam dan memberi salam kepadanya lalu dia berkata; Selamat datang bagimu dari saudara dan nabi. Kemudian aku ditampakkan Al-Baitul Ma'mur. Aku bertanya kepada Jibril, lalu dia menjawab; Ini adalah Al-Baitul Mamur, setiap hari ada tujuh puluh ribu malaikat mendirikan shalat di sana. Jika mereka keluar (untuk pergi shalat) tidak ada satu pun dari mereka yang kembali. Kemudian diperlihatkan kepadaku Sidrat Al-Muntaha yang ternyata bentuknya seperti kubah dengan daun jendelanya laksana telinga-telinga gajah. Di dasarnya ada empat sungai yang berada di dalam (disebut Bathinan) dan di luar (Zhahiran) . Aku bertanya kepada Jibril, maka dia menjawab; Adapun Bathinan berada di surga sedangkan Zhahiran adalah an-Nail dan al-Furat (dua nama sungai di surga)"* (HR. Bukhari, 3207).

Maksud dari hadits tersebut adalah Nabi Muhammad SAW berada di Masjid Al-Haram di kota Mekah pada suatu malam. Setelah itu datang malaikat dan kendaraan langit bernama Al-Buraq untuk menjemput beliau. Kemudian beliau menunggangi Al-Buraq dan dalam waktu singkat, Al-Buraq telah membawa beliau ke Masjid Al-Aqsa di kota Bait Al-Makdis (Palestina). Perjalanan inilah yang disebut Isra'.

Setibanya di Masjid Al-Aqsa, beliau shalat dua rakaat dan memilih bejana yang berisi susu. Setelah itu, beliau melanjutkan perjalanan lagi untuk naik ke langit. Inilah peristiwa yang disebut Mi'raj. Dalam perjalanan Mi'raj itu, Nabi Muhammad SAW menembus beberapa tingkatan langit. Di setiap langit, beliau berjumpa dengan nabi-nabi terdahulu. Puncak dari peristiwa Isra Mi'raj adalah ketika Nabi Muhammad SAW sampai ke Sidrat Al-Muntaha. Dari peristiwa ini, beliau mendapat wahyu dari Allah SWT berupa diwajibkan shalat lima puluh kali dalam sehari semalam. Kemudian Allah SWT menguranginya menjadi shalat lima waktu dalam sehari semalam.

Selain peristiwa Isra' dan Mi'raj, graf terhubung juga dapat di representasikan dalam silaturahmi. Berikut ini hadits tentang silaturahmi yang diriwayatkan oleh Imam Bukhari dari Abu Ayyub Al-Anshori.

حَدَّثَنِي عَبْدُ الرَّحْمَنِ، حَدَّثَنَا بَهْزٌ، حَدَّثَنَا شُعْبَةُ، حَدَّثَنَا ابْنُ عُثْمَانَ بْنِ عَبْدِ اللَّهِ بْنِ مَوْهَبٍ، وَأَبُوهُ، عُثْمَانُ بْنُ عَبْدِ اللَّهِ أَنَّهُمَا سَمِعَا مُوسَى بْنَ طَلْحَةَ، عَنْ أَبِي أَيُّوبَ الأَنْصَارِيِّ. رضى الله عنه أَنَّ رَجُلاً قَالَ يَا رَسُولَ اللَّهِ أَخْبِرْنِي بِعَمَلٍ يُدْخِلُنِي الْجَنَّةَ. فَقَالَ النَّبِيُّ صلى الله عليه وسلم " تَعْبُدُ اللَّهَ لاَ تُشْرِكُ بِهِ شَيْئًا، وَتُقِيمُ الصَّلاَةَ، وَتُؤْتِي الزَّكَاةَ، وَتَصِلُ الرَّحِمَ،ذَرْهَا "(رواه البخاري)

Artinya: *"Telah bercerita kepadaku Abdur Rahman, telah bercerita kepada kami Bahz, telah bercerita kepada kami Syu'bah, telah bercerita kepada kami Ibnu Utsman bin Abdillah bin Mahwab dan ayahnya, mereka mendengar Musa bin Talha dari Abu Ayyub Al-Anshari radliallahu 'anhu. Sesungguhnya seorang laki-laki bertanya: wahai Rasulallah , ceritakan kepadaku tentang suatu amalan yang bisa memasukkanku ke surga. Nabi shallallahu 'alaihi wasallam bersabda: Sembahlah Allah, janganlah berbuat syirik pada-Nya, dirikanlah shalat, tunaikanlah zakat, dan jalinlah tali silaturahmi (dengan orang tua dan kerabat)"* (HR. Bukhari, 5983).

Hadits ini menjelaskan tentang beberapa macam ibadah kepada Allah SWT termasuk bersilaturahmi antar sesama manusia. Jika direpresentasikan dengan graf, maka manusia diibaratkan sebagai simpul dan silaturahmi diibaratkan sebagai sisi. Mereka yang menjaga silaturahmi dapat diilustrasikan menjadi graf terhubung.

2.3 Kajian Topik dengan Teori Pendukung

Tahapan yang harus dilakukan adalah menentukan orde dari semua elemen di $\mathbb{Z}_{2p^2}$. Definisi orde elemen g dari grup G adalah bilangan bulat positif terkecil n sedemikian sehingga $g^n = e$.(dalam notasi penjumlahan, bisa ditulis sebagai $ng = 0$). Setelah menentukan orde elemen, maka menentukan faktor persekutuan terbesar dari setiap dua orde elemen. Definisi faktor persekutuan terbesar dari a dan b adalah bilangan bulat positif terbesar d sehingga $d|a$ dan $d|b$. Kemudian dilakukan pemodelan graf untuk memudahkan dalam proses menentukan pelabelan $L(2,1)$ pada graf koprima dari grup bilangan bulat modulo $2p^2$.

Tahap selanjutnya yaitu menentukan nilai pelabelan $L(2,1)$ dari $\Gamma_{\mathbb{Z}_{2p^2}}$. Pelabelan $L(2,1)$ pada graf G adalah pemetaan $f : V(G) \to \{0,1,2,\ldots\}$ sedemikian sehingga jika x, y adalah dua simpul yang terhubung langsung di $V(G)$ maka $|f(x) - f(y)| \geq 2$, dan jika jarak antara x dan y adalah 2 maka $|f(x) - f(y)| \geq 1$. Nilai pelabelan $L(2,1)$ dari graf G adalah bilangan terkecil m sedemikian sehingga G mempunyai pelabelan $L(2,1)$ dengan label tidak lebih dari m dan dinotasikan dengan $\lambda_{2,1}$.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Dalam penelitian ini, penulis menggunakan pendekatan kualitatif. Pendekatan kualitatif cenderung berfokus pada fenomena-fenomena alami dengan sifatnya yang naturalistik, mendasar, dan tidak dapat dilakukan di laboratorium, tetapi harus dilakukan langsung di lapangan (Nazir, 1998).

Jenis penelitian yang digunakan adalah studi literatur, yaitu proses pengumpulan data dan informasi melalui telaah berbagai sumber literatur seperti artikel jurnal, buku, catatan, dan laporan penelitian terdahulu. Data yang digunakan penulis adalah data sekunder berupa elemen dari grup $\mathbb{Z}_{2p^2}$ di mana p merupakan bilangan prima, definisi, teorema dan sifat-sifat yang relevan dengan pengambilan kesimpulan dalam penelitian ini.

3.2 Pra Penelitian

Pra penelitian yang dilakukan penulis yaitu menentukan $\Gamma_{\mathbb{Z}_{2p^2}}$ dengan p merupakan bilangan prima dan $p \in \{2, 3, 5\}$. Setelah itu menentukan pelabelan simpul dari $\Gamma_{\mathbb{Z}_{2p^2}}$ dengan aturan pelabelan $L(2, 1)$ untuk memunculkan dugaan.

3.3 Tahap Penelitian

Tahapan yang dilakukan oleh penulis untuk melakukan penelitian sebagai berikut:

1. Menentukan orde dari semua elemen di grup $\mathbb{Z}_{2p^2}$,
2. Menentukan faktor persekutuan terbesar dari setiap dua orde elemen di grup $\mathbb{Z}_{2p^2}$,
3. Menentukan sisi dari $\Gamma_{\mathbb{Z}_{2p^2}}$,
4. Menentukan pelabelan $L(2,1)$ dari $\Gamma_{\mathbb{Z}_{2p^2}}$,

dengan p adalah sebarang bilangan prima.

BAB IV

PEMBAHASAN

4.1 Bentuk Graf Koprima dari $\mathbb{Z}_{2p^2}$

1. Bentuk Graf Koprima dari $\mathbb{Z}_{2p^2}$ dengan $p \in \{2, 3, 5\}$

Pada bagian ini, akan dipaparkan tentang bentuk graf koprima dari $\mathbb{Z}_{2p^2}$ dengan $p \in \{2, 3, 5\}$.

a. Bentuk Graf Koprima dari $\mathbb{Z}_8$

Elemen-elemen dari $\mathbb{Z}_8 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\}$. Graf koprima dari $\mathbb{Z}_8$ adalah graf dengan himpunan simpul

$$V(\Gamma_{\mathbb{Z}_8}) = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\}$$

Misalkan $x, y \in V(\Gamma_{\mathbb{Z}_8})$, orde elemen dan FPB dari orde elemen di $\mathbb{Z}_8$ dapat dilihat pada tabel di bawah ini.

Tabel 4.1 Orde Elemen di $\mathbb{Z}_8$

Elemen $\mathbb{Z}_8$	Orde elemen di $\mathbb{Z}_8$
$\bar{0}$	1
$\bar{1}$	8
$\bar{2}$	4
$\bar{3}$	8
$\bar{4}$	2
$\bar{5}$	8
$\bar{6}$	4
$\bar{7}$	8

Tabel 4.2 Faktor Persekutuan Terbesar dari Dua Orde Elemen di $\mathbb{Z}_8$

$FPB(ord(x), ord(y))$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$
$\bar{0}$	1	1	1	1	1	1	1	1
$\bar{1}$	1	8	4	8	2	8	4	8
$\bar{2}$	1	4	4	4	2	4	4	4

$FPB(ord(x), ord(y))$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$
$\bar{3}$	1	8	4	8	2	8	4	8
$\bar{4}$	1	2	2	2	2	2	2	2
$\bar{5}$	1	8	4	8	2	8	4	8
$\bar{6}$	1	4	4	4	2	4	4	4
$\bar{7}$	1	8	4	8	2	8	4	8

Dari Tabel 4.2 diperoleh simpul yang terhubung dari $\Gamma_{\mathbb{Z}_8}$ adalah sebagai berikut.

$\bar{0}$ terhubung langsung dengan $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}$

$\bar{1}$ terhubung langsung dengan $\bar{0}$

$\bar{2}$ terhubung langsung dengan $\bar{0}$

$\bar{3}$ terhubung langsung dengan $\bar{0}$

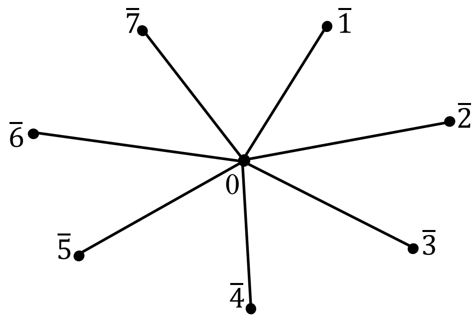
$\bar{4}$ terhubung langsung dengan $\bar{0}$

$\bar{5}$ terhubung langsung dengan $\bar{0}$

$\bar{6}$ terhubung langsung dengan $\bar{0}$

$\bar{7}$ terhubung langsung dengan $\bar{0}$

Dari simpul yang terhubung tersebut maka $\Gamma_{\mathbb{Z}_8}$ dapat digambarkan sebagai berikut



Gambar 4.1 Graf Koprima dari $\mathbb{Z}_8$

b. Bentuk Graf Koprima dari Grup $\mathbb{Z}_{18}$

Elemen-elemen dari $\mathbb{Z}_{18} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{13}, \overline{14}, \overline{15}, \overline{16}, \overline{17}\}$. Graf koprima dari $\mathbb{Z}_{18}$ adalah graf dengan himpunan simpul

$$V(\Gamma_{\mathbb{Z}_{18}}) = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{13}, \overline{14}, \overline{15}, \overline{16}, \overline{17}\}$$

Misalkan $x, y \in V(\Gamma_{\mathbb{Z}_{18}})$, orde elemen dan FPB dari orde elemen di $\mathbb{Z}_{18}$ dapat dilihat pada tabel di bawah ini.

Tabel 4.3 Orde Elemen di $\mathbb{Z}_{18}$

Elemen $\mathbb{Z}_{18}$	Orde elemen di $\mathbb{Z}_{18}$
$\overline{0}$	1
$\overline{1}$	18
$\overline{2}$	9
$\overline{3}$	6
$\overline{4}$	9
$\overline{5}$	18
$\overline{6}$	3
$\overline{7}$	18
$\overline{8}$	9
$\overline{9}$	2
$\overline{10}$	9
$\overline{11}$	18
$\overline{12}$	3
$\overline{13}$	18
$\overline{14}$	9
$\overline{15}$	6
$\overline{16}$	9
$\overline{17}$	18

Tabel 4.4 Faktor Persekutuan Terbesar dari Dua Orde Elemen di $\mathbb{Z}_{18}$

$FPB(ord(x), ord(y))$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	...	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$
$\overline{0}$	1	1	1	1	1	...	1	1	1
$\overline{1}$	1	18	9	6	9	...	6	9	18
$\overline{2}$	1	9	9	3	9	...	3	9	9
$\overline{3}$	1	6	3	6	3	...	6	3	6
$\overline{4}$	1	9	9	3	9	...	3	9	9
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\overline{15}$	1	6	3	6	3	...	6	3	6
$\overline{16}$	1	9	9	3	9	...	3	9	9

$FPB(ord(x), ord(y))$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	...	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$
$\overline{17}$	1	18	9	6	9	...	6	9	18

Tabel faktor persekutuan terbesar dari dua orde elemen di $\mathbb{Z}_{18}$ tersebut yang lebih lengkap terdapat pada Lampiran 1.

Dari Tabel 4.4 diperoleh simpul yang terhubung dari $\Gamma_{\mathbb{Z}_{18}}$ adalah sebagai berikut.

$\overline{0}$ terhubung langsung dengan $\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{13}, \overline{14}, \overline{15}, \overline{16}, \overline{17}$

$\overline{1}$ terhubung langsung dengan $\overline{0}$

$\overline{2}$ terhubung langsung dengan $\overline{0}, \overline{9}$

$\overline{3}$ terhubung langsung dengan $\overline{0}$

$\overline{4}$ terhubung langsung dengan $\overline{0}, \overline{9}$

$\overline{5}$ terhubung langsung dengan $\overline{0}$

$\overline{6}$ terhubung langsung dengan $\overline{0}, \overline{9}$

$\overline{7}$ terhubung langsung dengan $\overline{0}$

$\overline{8}$ terhubung langsung dengan $\overline{0}, \overline{9}$

$\overline{9}$ terhubung langsung dengan $\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{16}$

$\overline{10}$ terhubung langsung dengan $\overline{0}, \overline{9}$

$\overline{11}$ terhubung langsung dengan $\overline{0}$

$\overline{12}$ terhubung langsung dengan $\overline{0}, \overline{9}$

$\overline{13}$ terhubung langsung dengan $\overline{0}$

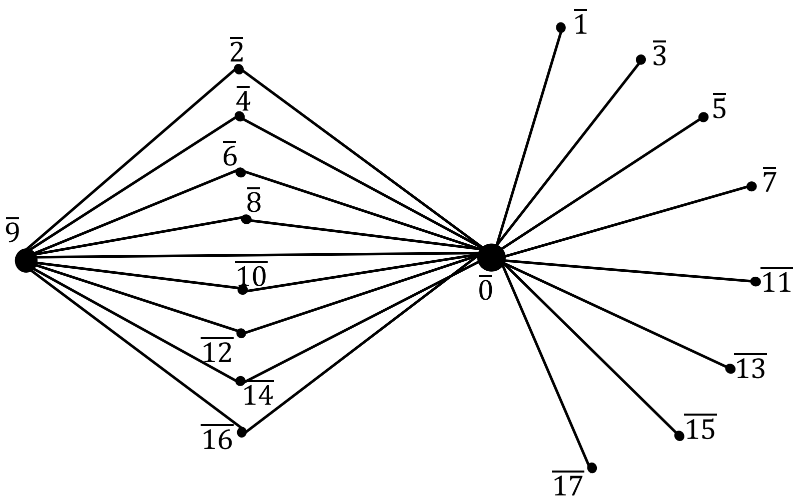
$\overline{14}$ terhubung langsung dengan $\overline{0}, \overline{9}$

$\overline{15}$ terhubung langsung dengan $\overline{0}$

$\overline{16}$ terhubung langsung dengan $\overline{0}, \overline{9}$

$\overline{17}$ terhubung langsung dengan $\overline{0}$

Dari simpul yang terhubung tersebut maka $\Gamma_{\mathbb{Z}_{18}}$ dapat digambarkan sebagai berikut



Gambar 4.2 Graf Koprima dari $\mathbb{Z}_{18}$

c. Bentuk Graf Koprima dari $\mathbb{Z}_{50}$

Elemen-elemen dari $\mathbb{Z}_{50} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{13}, \overline{14}\,, \overline{15}, \overline{16}, \overline{1718}, \overline{19}, \overline{20}, \overline{21}, \overline{22}, \overline{23}, \overline{24}, \overline{25}, \overline{26}, \overline{27}, \overline{28}, \overline{29}, \overline{30}, \overline{31}, \overline{32}, \overline{33}, \overline{34}, \overline{35}, \overline{36}, \overline{37}, \ \overline{38}, \overline{39}, \overline{40}, \overline{41}, \overline{4243}, \overline{44}, \overline{45}, \overline{46}, \overline{47}, \overline{48}, \overline{49}\}$. Graf koprima dari $\mathbb{Z}_{50}$ adalah graf dengan himpunan simpul

$$V(\Gamma_{\mathbb{Z}_{50}}) = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{13}, \overline{14}, \overline{15}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{18}, \overline{19}, \overline{20}, \overline{21}, \overline{22}, \overline{23}, \overline{24}, \overline{25}, \overline{26}, \overline{27}, \overline{28}, \overline{29}, \overline{30}, \overline{31}, \overline{32}, \overline{33}, \overline{34}, \overline{35}, \overline{36}, \overline{37}, \overline{38}, \overline{39}, \overline{40}, \overline{41}, \overline{42}, \overline{43}, \overline{44}, \overline{45}, \overline{46}, \overline{47}, \overline{48}, \overline{49}\}$$

Misalkan $x, y \in V(\Gamma_{\mathbb{Z}_{50}})$, orde elemen dan FPB dari orde elemen di $\mathbb{Z}_{50}$ dapat dilihat pada tabel di bawah ini.

Tabel 4.5 Orde Elemen di $\mathbb{Z}_{50}$

Elemen $\mathbb{Z}_{50}$	Orde elemen di $\mathbb{Z}_{50}$
$\overline{0}$	1
$\overline{1}$	50
$\overline{2}$	25
$\overline{3}$	50

Elemen $\mathbb{Z}_{50}$	Orde elemen di $\mathbb{Z}_{50}$
$\overline{4}$	25
$\overline{5}$	10
$\overline{6}$	25
$\overline{7}$	50
$\overline{8}$	25
$\overline{9}$	50
$\overline{10}$	5
$\overline{11}$	50
$\overline{12}$	25
$\overline{13}$	50
$\overline{14}$	25
$\overline{15}$	10
$\overline{16}$	25
$\overline{17}$	50
$\overline{18}$	25
$\overline{19}$	50
$\overline{20}$	5
$\overline{21}$	50
$\overline{22}$	25
$\overline{23}$	50
$\overline{24}$	25
$\overline{25}$	2
$\overline{26}$	25
$\overline{27}$	50
$\overline{28}$	25
$\overline{29}$	50
$\overline{30}$	5
$\overline{31}$	50
$\overline{32}$	25
$\overline{33}$	50
$\overline{34}$	25
$\overline{35}$	10
$\overline{36}$	25
$\overline{37}$	50
$\overline{38}$	25
$\overline{39}$	50
$\overline{40}$	5
$\overline{41}$	50
$\overline{42}$	25
$\overline{43}$	50
$\overline{44}$	25
$\overline{45}$	10
$\overline{46}$	25

Elemen $\mathbb{Z}_{50}$	Orde elemen di $\mathbb{Z}_{50}$
$\overline{47}$	50
$\overline{48}$	25
$\overline{49}$	50

Tabel 4.6 Faktor Persekutuan Terbesar dari Dua Orde Elemen di $\mathbb{Z}_{50}$

$FPB(ord(x), ord(y))$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	...	$\overline{47}$	$\overline{48}$	$\overline{49}$
$\overline{0}$	1	1	1	1	1	1	...	1	1	1
$\overline{1}$	1	50	25	50	25	10	...	50	25	50
$\overline{2}$	1	25	25	25	25	5	...	25	25	25
$\overline{3}$	1	50	25	50	25	10	...	50	25	50
$\overline{4}$	1	25	25	25	25	5	...	25	25	25
$\overline{5}$	1	10	5	10	5	10	...	10	5	10
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\overline{47}$	1	50	25	50	25	10	...	50	25	50
$\overline{48}$	1	25	25	25	25	5	...	25	25	25
$\overline{49}$	1	50	25	50	25	10	...	50	25	50

Tabel faktor persekutuan terbesar dari dua orde elemen di $\mathbb{Z}_{50}$ tersebut yang lebih lengkap terdapat pada Lampiran 2.

Dari Tabel 4.6 diperoleh simpul yang terhubung dari $\Gamma_{\mathbb{Z}_{50}}$ adalah sebagai berikut.

$\overline{0}$ terhubung langsung dengan $\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}, \overline{8}, \overline{9}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{13}, \overline{14}, \overline{15}, \overline{16}, \overline{17}, \overline{18}, \overline{19}, \overline{20}, \overline{21}, \overline{22}, \overline{23}, \overline{24}, \overline{25}, \overline{26}, \overline{27}, \overline{28}, \overline{29}, \overline{30}, \overline{31}, \overline{32}, \overline{33}, \overline{34}, \overline{35}, \overline{36}, \overline{37}, \overline{38}, \overline{39}, \overline{40}, \overline{41}, \overline{42}, \overline{43}, \overline{44}, \overline{45}, \overline{46}, \overline{47}, \overline{48}, \overline{49}$

$\overline{1}$ terhubung langsung dengan $\overline{0}$

$\overline{2}$ terhubung langsung dengan $\overline{0}, \overline{25}$

$\overline{3}$ terhubung langsung dengan $\overline{0}$

$\overline{4}$ terhubung langsung dengan $\overline{0}, \overline{25}$

$\overline{5}$ terhubung langsung dengan $\overline{0}$

$\overline{6}$ terhubung langsung dengan $\overline{0}, \overline{25}$

$\overline{7}$ terhubung langsung dengan $\overline{0}$

$\overline{8}$ terhubung langsung dengan $\overline{0}, \overline{25}$

$\overline{9}$ terhubung langsung dengan $\overline{0}$

$\overline{10}$ terhubung langsung dengan $\overline{0}, \overline{25}$

$\overline{11}$ terhubung langsung dengan $\overline{0}$

$\overline{12}$ terhubung langsung dengan $\overline{0}, \overline{25}$

$\overline{13}$ terhubung langsung dengan $\overline{0}$

$\overline{14}$ terhubung langsung dengan $\overline{0}, \overline{25}$

$\overline{15}$ terhubung langsung dengan $\overline{0}$

$\overline{16}$ terhubung langsung dengan $\overline{0}, \overline{25}$

$\overline{17}$ terhubung langsung dengan $\overline{0}$

$\overline{18}$ terhubung langsung dengan $\overline{0}, \overline{25}$

$\overline{19}$ terhubung langsung dengan $\overline{0}$

$\overline{20}$ terhubung langsung dengan $\overline{0}, \overline{25}$

$\overline{21}$ terhubung langsung dengan $\overline{0}$

$\overline{22}$ terhubung langsung dengan $\overline{0}, \overline{25}$

$\overline{23}$ terhubung langsung dengan $\overline{0}$

$\overline{24}$ terhubung langsung dengan $\overline{0}, \overline{25}$

$\overline{25}$ terhubung langsung dengan $\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{16}, \overline{18}, \overline{20}, \overline{22}, \overline{24}, \overline{26}, \overline{28},$
$\overline{30}, \overline{32}, \overline{34}, \overline{36}, \overline{38}, \overline{40}, \overline{42}, \overline{44}, \overline{46}, \overline{48}$

$\overline{26}$ terhubung langsung dengan $\overline{0}, \overline{25}$

$\overline{27}$ terhubung langsung dengan $\overline{0}$

$\overline{28}$ terhubung langsung dengan $\overline{0}, \overline{25}$

$\overline{29}$ terhubung langsung dengan $\overline{0}$

$\overline{30}$ terhubung langsung dengan $\overline{0}, \overline{25}$

$\overline{31}$ terhubung langsung dengan $\overline{0}$

$\overline{32}$ terhubung langsung dengan $\overline{0}, \overline{25}$

$\overline{33}$ terhubung langsung dengan $\overline{0}$

$\overline{34}$ terhubung langsung dengan $\overline{0}, \overline{25}$

$\overline{35}$ terhubung langsung dengan $\overline{0}$

$\overline{36}$ terhubung langsung dengan $\overline{0}, \overline{25}$

$\overline{37}$ terhubung langsung dengan $\overline{0}$

$\overline{38}$ terhubung langsung dengan $\overline{0}, \overline{25}$

$\overline{39}$ terhubung langsung dengan $\overline{0}$

$\overline{40}$ terhubung langsung dengan $\overline{0}, \overline{25}$

$\overline{41}$ terhubung langsung dengan $\overline{0}$

$\overline{42}$ terhubung langsung dengan $\overline{0}, \overline{25}$

$\overline{43}$ terhubung langsung dengan $\overline{0}$

$\overline{44}$ terhubung langsung dengan $\overline{0}, \overline{25}$

$\overline{45}$ terhubung langsung dengan $\overline{0}$

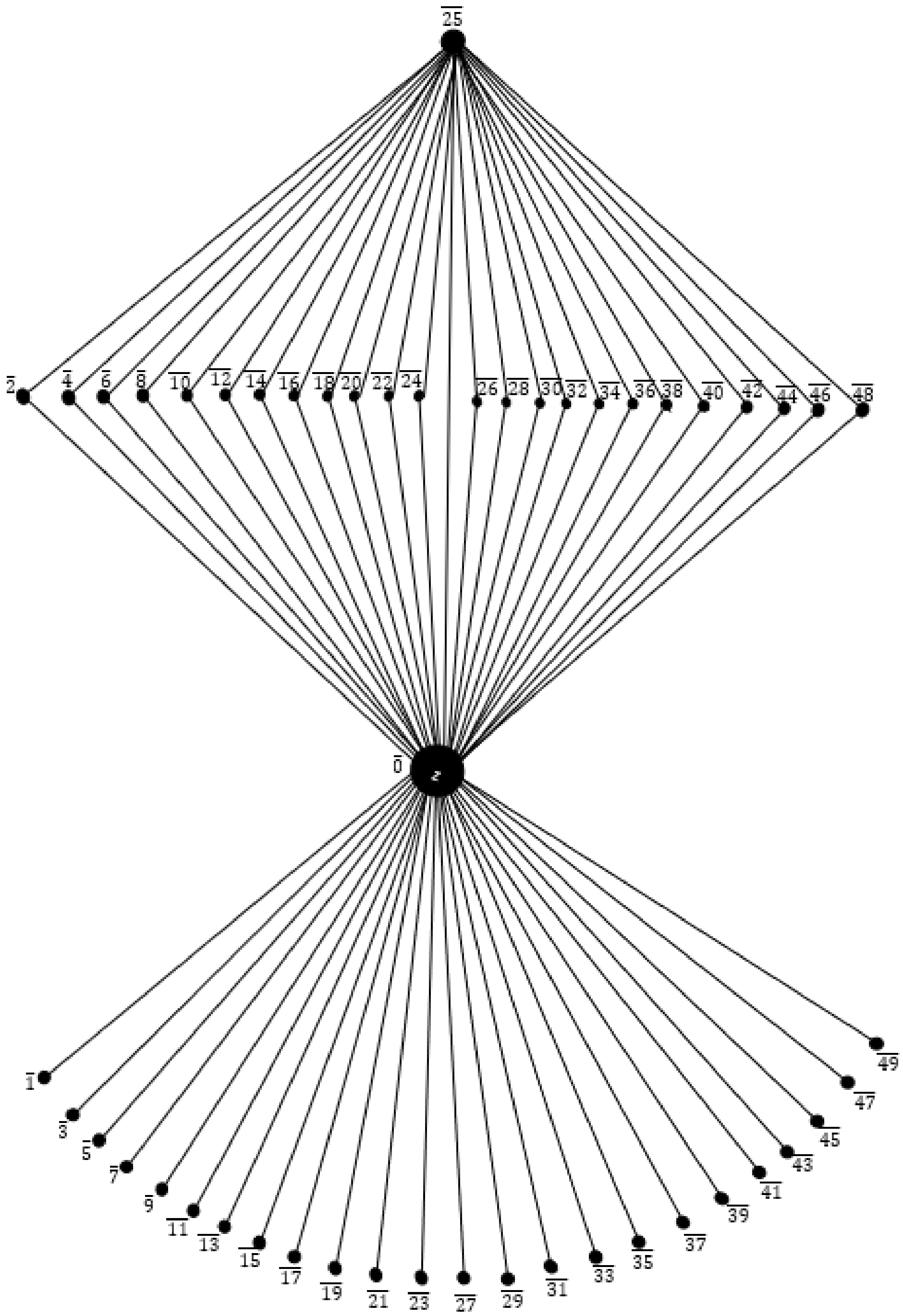
$\overline{46}$ terhubung langsung dengan $\overline{0}, \overline{25}$

$\overline{47}$ terhubung langsung dengan $\overline{0}$

$\overline{48}$ terhubung langsung dengan $\overline{0}, \overline{25}$

$\overline{49}$ terhubung langsung dengan $\overline{0}$

Dari simpul yang terhubung tersebut maka $\Gamma_{\mathbb{Z}_{50}}$ dapat digambarkan sebagai berikut:

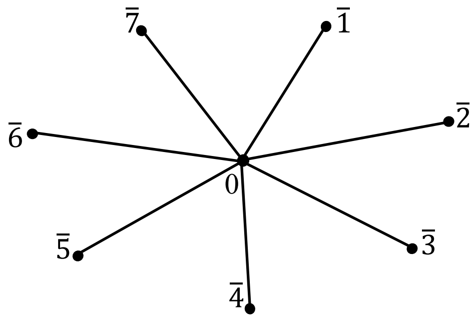


Gambar 4.3 Graf Koprima dari $\mathbb{Z}_{50}$

2. Bentuk Umum Graf Koprima dari $\mathbb{Z}_{2p^2}$

Pada bagian ini, akan dipaparkan tentang generalisasi bentuk graf koprima dari $\mathbb{Z}_{2p^2}$ dengan p adalah bilangan prima.

a. Graf Koprima dari $\mathbb{Z}_{2p^2}$ untuk $p = 2$



Gambar 4.4 Graf Koprima dari $\mathbb{Z}_{2p^2}$ untuk $p = 2$

b. Graf Koprima dari $\mathbb{Z}_{2p^2}$ untuk $p \geq 3$

Lemma 1

Misalkan $A, B, C, D \subseteq \mathbb{Z}_{2p^2}$ dengan p adalah bilangan prima dan $p \geq 3$ dengan $A = \{p^2\}$, $B = \{2n \mid 1 \leq n \leq p^2 - 1\}$, $C = \{0\}$, dan $D = \{2n + 1 \mid 0 \leq n \leq p^2 - 1\} \setminus \{p^2\}$.

i. Setiap elemen dari C terhubung langsung dengan semua elemen $\mathbb{Z}_{2p^2}$.

   Misalkan $x \in C$, maka $ord(x) = 1$. Misalkan $y \in \mathbb{Z}_{2p^2}$ maka $ord(y) > 1$. Dengan demikian diperoleh $FPB\ (1, ord(y)) = 1$.

   Sehingga dapat disimpulkan bahwa $\{x, y\} \in E\left(\Gamma_{\mathbb{Z}_{2p^2}}\right)\ \forall\, x \in C,\ y \in \mathbb{Z}_{2p^2} \backslash \{0\}$.

ii. Setiap elemen dari A terhubung langsung dengan semua elemen dari B

   Misalkan $x \in A$, maka $ord(x) = 2$. Misalkan $y \in B$, maka $ord(y) = p$ atau $ord(y) = p^2$ dengan p adalah bilangan prima dan $p \geq 3$.

   Akan ditunjukkan $FPB(ord(x), ord(y)) = 1$

   Kasus 1, $ord(y) = p$.

   Karena $ord(x) = 2$ dan $ord(y) = p$, maka $FPB(2, p) = 1$.

Kasus 2, $ord(y) = p^2$.

Karena $ord(x) = 2$ dan $ord(y) = p^2$, maka $FPB(2, p^2) = 1$.

Dari kedua kasus di atas, dapat disimpulkan bahwa $FPB(ord(x), ord(y)) = 1$.

Sehingga dari poin i dan ii diperoleh $\{x, y\} \in E\left(\Gamma_{\mathbb{Z}_{2p^2}}\right)\ \forall\, x \in A, y \in B \cup C$.

iii. Setiap elemen dari D hanya terhubung langsung dengan semua elemen dari C

Misalkan $x \in D$, maka $ord(x) = 2p$ atau $ord(x) = 2p^2$. Misalkan $y \in A$, maka $ord(y) = 2$ dan misalkan $z \in B$, maka $ord(z) = p$ atau $ord(z) = p^2$

1. Akan ditunjukkan $FPB(ord(x), ord(y)) \neq 1$

   Kasus 1, $ord(x) = 2p$

   Karena $ord(x) = 2p$ dan $ord(y) = 2$, maka $FPB(2p, 2) \geq 2 \neq 1$.

   Kasus 2, $ord(x) = 2p^2$

   Karena $ord(x) = 2p^2$ dan $ord(y) = 2$, maka $FPB(2p^2, 2) \geq 2 \neq 1$.

   Dari kedua kasus di atas, dapat disimpulkan bahwa $FPB(ord(x), ord(y)) \neq 1$.

   Sehingga diperoleh $\{x, y\} \notin E\left(\Gamma_{\mathbb{Z}_{2p^2}}\right)\ \forall\, x \in D,\ y \in A$.

2. Akan ditunjukkan $FPB(ord(x), ord(z)) \neq 1$

   Kasus 1, $ord(x) = 2p$ dan $ord(z) = p$

Karena $ord(x) = 2p$ dan $ord(z) = p$, maka

$FPB(2p, p) \geq p \neq 1$.

Kasus 2, $ord(x) = 2p$ dan $ord(z) = p^2$

Karena $ord(x) = 2p$ dan $ord(z) = p^2$, maka

$FPB(2p, p^2) \geq p \neq 1$.

Kasus 3, $ord(x) = 2p^2$ dan $ord(z) = p$

Karena $ord(x) = 2p^2$ dan $ord(z) = p$, maka

$FPB(2p^2, p) \geq p \neq 1$.

Kasus 4, $ord(x) = 2p^2$ dan $ord(z) = p^2$

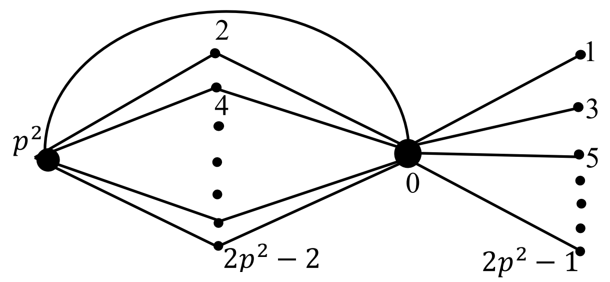
Karena $ord(x) = 2p^2$ dan $ord(z) = p^2$, maka

$FPB(2p^2, p^2) \geq p \neq 1$.

Dari ke empat kasus di atas, dapat disimpulkan bahwa $FPB(ord(x), ord(z)) \neq 1$, sehingga $\{x, z\} \notin E\left(\Gamma_{\mathbb{Z}_{2p^2}}\right)$ $\forall\, x \in D, z \in B$.

Jadi berdasarkan poin 1 dan 2 diperoleh $\{x, y\} \notin E\left(\Gamma_{\mathbb{Z}_{2p^2}}\right)$ $\forall\, x \in D$, $y \in \mathbb{Z}_{2p^2} \backslash \{C\}$.

Berdasarkan poin i, ii, dan iii maka graf koprima dari $\mathbb{Z}_{2p^2}$ untuk $p \geq 3$ dapat diilustrasikan seperti berikut:



Gambar 4.5 Graf Koprima dari $\mathbb{Z}_{2p^2}$ untuk $p \geq 3$

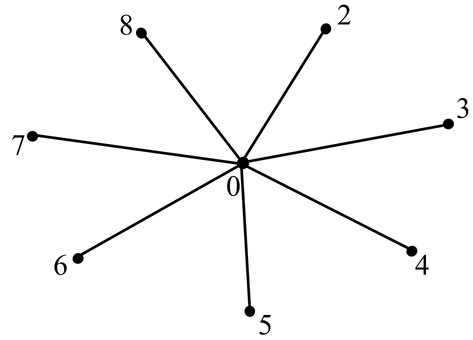
4.2 Pelabelan $L(2,1)$ pada Graf Koprima dari $\mathbb{Z}_{2p^2}$

1. Pelabelan $L(2,1)$ pada Graf Koprima dari $\mathbb{Z}_{2p^2}$ dengan $p \in \{2,3,5\}$

Pada bagian ini, akan dipaparkan tentang pelabelan $L(2,1)$ pada graf koprima dari $\mathbb{Z}_{2p^2}$ dengan $p \in \{2,3,5\}$

a. Pelabelan $L(2,1)$ pada Graf Koprima dari $\mathbb{Z}_8$

Pelabelan $L(2,1)$ pada $\Gamma_{\mathbb{Z}_8}$ sebagai berikut



Gambar 4.6 Pelabelan $L(2,1)$ pada $\Gamma_{\mathbb{Z}_8}$

Berdasarkan Gambar 4.6 tersebut, maka diperoleh pemetaan sebagai berikut:

$\bar{0} \mapsto 0$

$\bar{1} \mapsto 2$

$\bar{2} \mapsto 3$

$\bar{3} \mapsto 4$

$\bar{4} \mapsto 5$

$\bar{5} \mapsto 6$

$\bar{6} \mapsto 7$

$\bar{7} \mapsto 8$

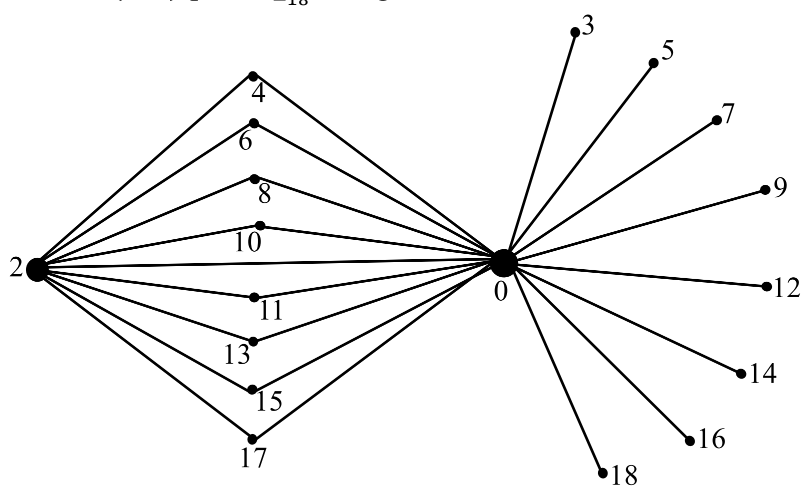
Secara umum untuk setiap $x \in \mathbb{Z}_8$ diperoleh pemetaan

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = \bar{0} \\ x + 1, & untuk\ lainnya \end{cases}$$

Dari Teorema 2.36 diperoleh $\lambda_{2,1}(\Gamma_{\mathbb{Z}_8}) = 8$

b. Pelabelan $L(2,1)$ pada Graf Koprima dari Grup $\mathbb{Z}_{18}$

Pelabelan $L(2,1)$ pada $\Gamma_{\mathbb{Z}_{18}}$ sebagai berikut



Gambar 4.7 Pelabelan $L(2,1)$ pada $\Gamma_{\mathbb{Z}_{18}}$

Berdasarkan Gambar 4.7 tersebut, maka diperoleh pemetaan sebagai berikut:

$\bar{0} \mapsto 0$	$\bar{3} \mapsto 5$	$\bar{6} \mapsto 8$	$\bar{9} \mapsto 2$	$\overline{12} \mapsto 13$	$\overline{15} \mapsto 16$
$\bar{1} \mapsto 3$	$\bar{4} \mapsto 6$	$\bar{7} \mapsto 9$	$\overline{10} \mapsto 11$	$\overline{13} \mapsto 14$	$\overline{16} \mapsto 17$
$\bar{2} \mapsto 4$	$\bar{5} \mapsto 7$	$\bar{8} \mapsto 10$	$\overline{11} \mapsto 12$	$\overline{14} \mapsto 15$	$\overline{17} \mapsto 18$

Secara umum untuk setiap $x \in \mathbb{Z}_{18}$ diperoleh pemetaan

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = \bar{0} \\ x + 2, & \bar{0} < x < \bar{9} \\ 2, & x = \bar{9} \\ x + 1, & \bar{9} < x \leq \overline{17} \end{cases}$$

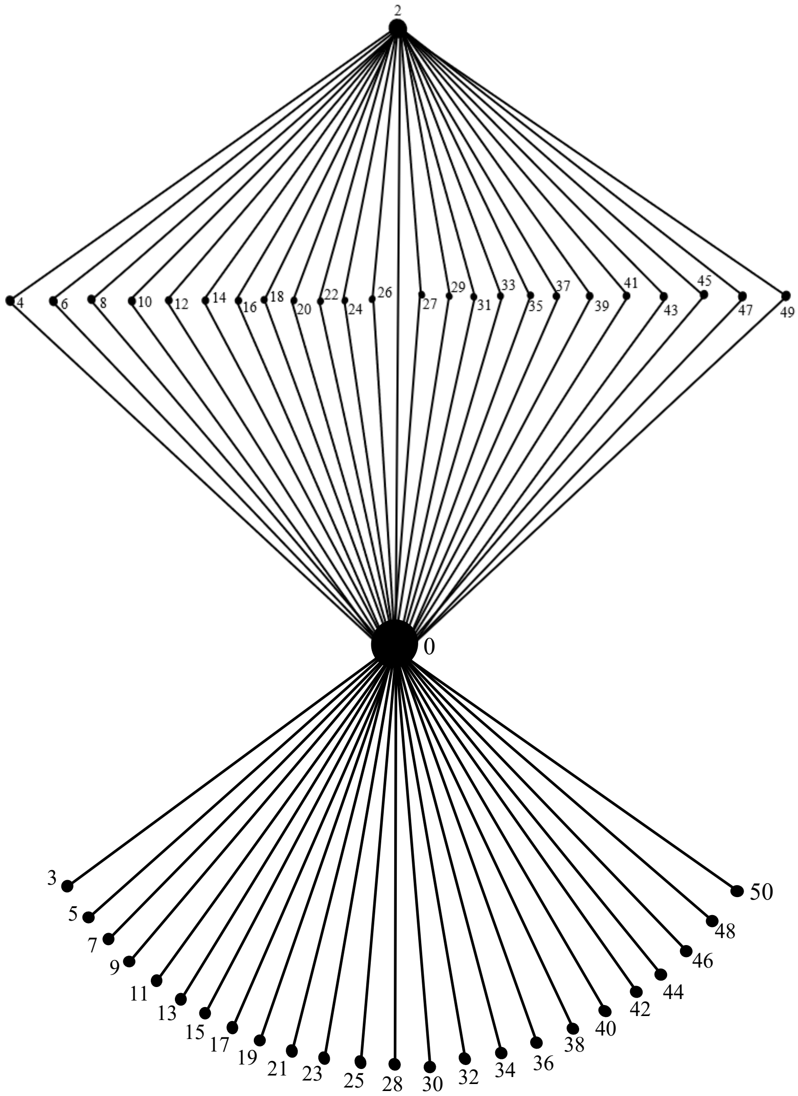
Dari Gambar 4.7 diperoleh $\lambda_{2,1}(\Gamma_{\mathbb{Z}_{18}}) \leq 18$

Dari Lemma 2.35 diperoleh $18 \leq \lambda_{2,1}(\Gamma_{\mathbb{Z}_{18}})$

Sehingga dari dua pernyataan di atas dapat disimpulkan bahwa $\lambda_{2,1}(\Gamma_{\mathbb{Z}_{18}}) = 18$

c. Pelabelan $L(2,1)$ pada Graf Koprima dari Grup $\mathbb{Z}_{50}$

Pelabelan $L(2,1)$ pada $\Gamma_{\mathbb{Z}_{50}}$ ditunjukkan pada Gambar 4.8



Gambar 4.8 Pelabelan $L(2,1)$ pada $\Gamma_{\mathbb{Z}_{50}}$

Berdasarkan Gambar 4.8 tersebut, maka diperoleh pemetaan sebagai berikut:

$\overline{0} \mapsto 0$	$\overline{10} \mapsto 12$	$\overline{20} \mapsto 22$	$\overline{30} \mapsto 31$	$\overline{40} \mapsto 41$
$\overline{1} \mapsto 3$	$\overline{11} \mapsto 13$	$\overline{21} \mapsto 23$	$\overline{31} \mapsto 32$	$\overline{41} \mapsto 42$
$\overline{2} \mapsto 4$	$\overline{12} \mapsto 14$	$\overline{22} \mapsto 24$	$\overline{32} \mapsto 33$	$\overline{42} \mapsto 43$
$\overline{3} \mapsto 5$	$\overline{13} \mapsto 15$	$\overline{23} \mapsto 25$	$\overline{33} \mapsto 34$	$\overline{43} \mapsto 44$
$\overline{4} \mapsto 6$	$\overline{14} \mapsto 16$	$\overline{24} \mapsto 26$	$\overline{34} \mapsto 35$	$\overline{44} \mapsto 45$
$\overline{5} \mapsto 7$	$\overline{15} \mapsto 17$	$\overline{25} \mapsto 2$	$\overline{35} \mapsto 36$	$\overline{45} \mapsto 46$
$\overline{6} \mapsto 8$	$\overline{16} \mapsto 18$	$\overline{26} \mapsto 27$	$\overline{36} \mapsto 37$	$\overline{46} \mapsto 47$
$\overline{7} \mapsto 9$	$\overline{17} \mapsto 19$	$\overline{27} \mapsto 28$	$\overline{37} \mapsto 38$	$\overline{47} \mapsto 48$
$\overline{8} \mapsto 10$	$\overline{18} \mapsto 20$	$\overline{28} \mapsto 29$	$\overline{38} \mapsto 39$	$\overline{48} \mapsto 49$
$\overline{9} \mapsto 11$	$\overline{19} \mapsto 21$	$\overline{29} \mapsto 30$	$\overline{39} \mapsto 40$	$\overline{49} \mapsto 50$

Secara umum untuk setiap $x \in \mathbb{Z}_{50}$ diperoleh pemetaan

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = \overline{0} \\ x + 2, & \overline{0} < x < \overline{25} \\ 2, & x = \overline{25} \\ x + 1, & \overline{25} < x \leq \overline{49} \end{cases}$$

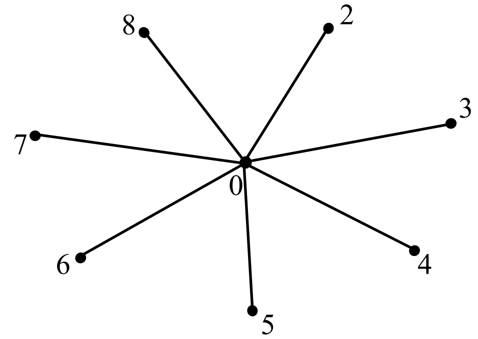
Dari Gambar 4.8 diperoleh $\lambda_{2,1}(\Gamma_{\mathbb{Z}_{50}}) \leq 50$

Dari Lemma 2.35 diperoleh $50 \leq \lambda_{2,1}(\Gamma_{\mathbb{Z}_{50}})$

Sehingga dari dua pernyataan di atas dapat disimpulkan bahwa $\lambda_{2,1}(\Gamma_{\mathbb{Z}_{50}}) = 50$

2. Pelabelan $L(2,1)$ pada Bentuk Secara Umum Graf Koprima dari $\mathbb{Z}_{2p^2}$

a. Pelabelan $L(2,1)$ pada $\Gamma_{\mathbb{Z}_{2p^2}}$ untuk $p = 2$



Gambar 4.9 Pelabelan $L(2,1)$ pada $\Gamma_{\mathbb{Z}_{2p^2}}$ untuk $p = 2$

Berdasarkan Gambar 4.9 tersebut, maka diperoleh pemetaan sebagai berikut:

$\bar{0} \mapsto 0$

$\bar{1} \mapsto 2$

$\bar{2} \mapsto 3$

$\bar{3} \mapsto 4$

$\bar{4} \mapsto 5$

$\bar{5} \mapsto 6$

$\bar{6} \mapsto 7$

$\bar{7} \mapsto 8$

Secara umum untuk setiap $x \in \mathbb{Z}_8$ diperoleh pemetaan

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = \bar{0} \\ x + 1, & untuk\ lainnya \end{cases}$$

Dari Teorema 2.36 diperoleh $\lambda_{2,1}\left(\Gamma_{\mathbb{Z}_{2p^2}}\right) = 8$, untuk $p = 2$

b. Pelabelan $L(2,1)$ pada $\Gamma_{\mathbb{Z}_{2p^2}}$ untuk $p \geq 3$

Lemma 2. Misalkan $x \in \mathbb{Z}_{2p^2}$ dengan p adalah bilangan prima dan $p \geq 3$. Pemetaan f yang didefinisikan sebagai

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = \overline{0} \\ x+2, & \overline{0} < x < \overline{p^2} \\ 2, & x = \overline{p^2} \\ x+1, & \overline{p^2} < x \leq \overline{2p^2-1} \end{cases}$$

adalah suatu pelabelan $L(2,1)$.

Bukti.

Domain dari f adalah $\mathbb{Z}_{2p^2} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{2p^2-1}\}$. Dari definisi di atas, f memetakan semua unsur domain ke tepat satu bilangan bulat. Dengan demikian f adalah suatu pemetaan.

Adapun syarat untuk pelabelan $L(2,1)$ sebagai berikut:

1. Dua simpul yang terhubung langsung harus mempunyai selisih label minimal dua.

   Dari Lemma 1 diperoleh:

   i. $\{x,y\} \in E\left(\Gamma_{\mathbb{Z}_{2p^2}}\right)$ $\forall\, x \in C, y \in \mathbb{Z}_{2p^2} \backslash \{0\}$.

      Sehingga $f(x) = 0$ dan $f(y) \geq 2$, dengan demikian diperoleh $|f(x) - f(y)| \geq 2$.

   ii. $\{x,y\} \in E\left(\Gamma_{\mathbb{Z}_{2p^2}}\right)$ $\forall\, x \in A, y \in B \cup C$.

      Kasus 1, $y \in B$

      Sehingga $f(x) = 2$ dan $f(y) \geq 4$ dengan demikian diperoleh $|f(x) - f(y)| \geq 2$.

Kasus 2, $y \in C$

Dari poin i diperoleh, $|f(x) - f(y)| \geq 2$.

2. Dua simpul yang berjarak dua harus mempunyai selisih label minimal satu.

   Dari Lemma 1 diperoleh:

   i. $\{x, y\} \notin E\left(\Gamma_{\mathbb{Z}_{2p^2}}\right)\ \forall\, x \in D, y \in B$.

      Dari Gambar 4.5 diketahui bahwa jarak dari $x \in D$ ke $y \in B$ adalah 2.

      Sehingga $f(x) \geq 3$ dan $f(y) \geq 4$, dengan demikian diperoleh $|f(x) - f(y)| \geq 1$.

   ii. $\{x, y\} \notin E\left(\Gamma_{\mathbb{Z}_{2p^2}}\right)\ \forall\, x \in D,\ y \in A$.

      Dari Gambar 4.5 diketahui bahwa jarak dari $x \in D$ ke $y \in A$ adalah 2.

      Sehingga $f(x) \geq 3$ dan $f(y) = 2$, dengan demikian diperoleh $|f(x) - f(y)| \geq 1$.

Dari poin 1 dan 2 maka dapat disimpulkan bahwa pemetaan f memenuhi kaidah pelabelan $L(2, 1)$.

Lemma 3

Untuk setiap bilangan prima $p \geq 3$ berlaku

$$\lambda_{2,1}\left(\Gamma_{\mathbb{Z}_{2p^2}}\right) = 2p^2.$$

Bukti

Dari Lemma 2 diperoleh $\lambda_{2,1}\left(\Gamma_{\mathbb{Z}_{2p^2}}\right) \leq 2p^2$. Dari Lemma 2.35 dan Teorema 2.36 diperoleh $\lambda_{2,1}\left(\Gamma_{\mathbb{Z}_{2p^2}}\right) \geq \lambda_{2,1}(K_{1,2p^2-1}) = 2p^2$. Dengan demikian $\lambda_{2,1}\left(\Gamma_{\mathbb{Z}_{2p^2}}\right) = 2p^2$.

4.3 Kajian Penelitian dalam Perspektif Islam

Dalam teori graf, terdapat bermacam-macam jenis graf, salah satunya di tinjau berdasarkan derajat simpulnya seperti graf bintang. Graf bintang adalah graf yang terdiri dari satu simpul pusat dan beberapa simpul samping. Dalam Al-Qur'an sudah dijelaskan tentang representasi graf bintang yang mengacu pada surat An-Nahl ayat 11.

يُنْۢبِتُ لَكُمْ بِهِ الزَّرْعَ وَالزَّيْتُوْنَ وَالنَّخِيْلَ وَالْاَعْنَابَ وَمِنْ كُلِّ الثَّمَرٰتِۗ اِنَّ فِيْ ذٰلِكَ لَاٰيَةً لِّقَوْمٍ يَّتَفَكَّرُوْنَ ﴿١١﴾

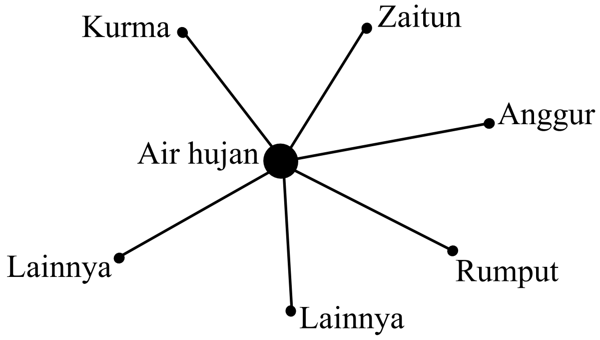
Artinya: *"Dengan (air hujan) itu Dia menumbuhkan untuk kamu tanam-tanaman, zaitun, kurma, anggur dan segala macam buah-buahan. Sungguh, pada yang demikian itu benar-benar terdapat tanda (kebesaran Allah) bagi orang yang berpikir" (An-Nahl/16:11).*

Allah SWT memberikan hujan untuk menumbuhkan berbagai tanaman yang buahnya dapat memenuhi kebutuhan hidup manusia. Manusia memperoleh makanan untuk ternaknya dari rumput-rumputan. Manusia mendapatkan minyak tubuh mereka dari pohon zaitun. Orang-orang juga dapat mendapatkan nutrisi dari buah-buahan seperti kurma dan anggur. Untuk menunjukkan kekuasaan-Nya yang tak terbatas, Allah SWT juga menumbuhkan berbagai jenis buah.

Allah SWT memiliki kekuatan untuk menumbuhkan berbagai jenis tanaman dari air hujan yang sama, yang menghasilkan buah dengan berbagai bentuk, warna, bau, dan rasa. Semua tumbuhan yang menghasilkan bahan untuk memenuhi kebutuhan hidup manusia merupakan nikmat dari Allah SWT sekaligus bukti kekuasaan dan keesaan-Nya bagi mereka yang mengingkarinya. Mereka yang melihat dan mempercayai kekuasaan Allah SWT di alam ini cukup puas.

Sebagai contoh, lihat biji-bijian yang hampir sama bentuknya di tanah yang dibasahi hujan. Setelah merekah, akarnya keluar dari tanah, dan kemudian tumbuh batang, daun, berbunga, dan berbuah. Menariknya, biji-bijian yang hampir sama menghasilkan tanaman yang bervariasi dalam bentuk, warna, dan rasa buahnya (Kemenag RI, 2022).

Ayat tersebut merupakan representasi dari graf bintang, di mana air hujan dapat direpresentasikan sebagai simpul pusat. Sedangkan rumput-rumput, zaitun, kurma, anggur, dan tanaman lainnya yang tumbuh karena air hujan direpresentasikan sebagai simpul samping. Graf bintang pada ayat tersebut dapat diilustrasikan sebagai berikut.



Gambar 4.10 Graf Bintang pada Tanaman

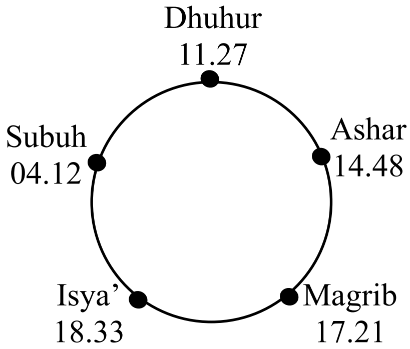
Pelabelan merupakan salah satu topik dalam teori graf. Pelabelan merupakan pemberian label berupa bilangan bulat positif pada simpul-simpul atau sisi-sisi graf dengan aturan tertentu yang telah ditetapkan. Dalam Al-Qur’an sudah dijelaskan tentang pelabelan pada graf yang mengacu pada ibadah shalat fardhu yang terdapat pada surat Al-Isra ayat 78.

اَقِمِ الصَّلٰوةَ لِدُلُوْكِ الشَّمْسِ اِلٰى غَسَقِ الَّيْلِ وَقُرْاٰنَ الْفَجْرِۗ اِنَّ قُرْاٰنَ الْفَجْرِ كَانَ مَشْهُوْدًا ﴿٧٨﴾

Artinya: *"Dirikanlah salat sejak matahari tergelincir sampai gelapnya malam dan (laksanakan pula salat) Subuh! Sesungguhnya salat Subuh itu disaksikan (oleh malaikat)" (Al-Isra'/17:78).*

Ayat ini memerintahkan agar Rasulullah SAW untuk mendirikan salat sesudah matahari tergelincir sampai gelap malam, serta shalat Subuh. Perintah ini mencakup salat lima waktu: shalat Dzuhur dan Asar setelah matahari tergelincir, salat Magrib dan Isya setelah gelap malam, dan shalat fajar yakni shalat Subuh (Abdullah, 2003).

Shalat memiliki kedudukan yang sangat penting dalam Islam dan menjadi dasar kokoh bagi tegaknya agama Islam. Menunaikan shalat tepat pada waktunya menjadi sesuatu yang sangat dianjurkan. Al-Qur'an tidak menjelaskan secara terperinci kapan waktu shalat fardhu dilakukan. Namun, hadits Rasulullah SAW, menjelaskan waktu shalat secara rinci, termasuk waktu awal dan akhir untuk setiap shalat. Hadits yang diriwayatkan dari Jabir bin 'Abdillah Radhiyallahu anhu dalam kitab An-Nasa'i nomer 526 adalah salah satu hadits yang menjelaskan kapan waktu shalat fardhu dilakukan. Waktu shalat tersebut jika direpresentasikan dalam pelabelan graf akan tergambar sebagai berikut:



Gambar 4.11 Representasi Pelabelan graf terhadap waktu shalat

Semua waktu shalat fardhu yaitu dhuhur, ashar, magrib, isya’ dan subuh saling terhubung satu sama lain, seperti yang ditunjukkan pada di atas. Ada garis yang menunjukkan perputaran matahari. Waktu pelaksanaan shalat fardhu dalam agama Islam diatur berdasarkan pergerakan atau putaran matahari. Waktu dzuhur dimulai sejak tergelincirnya matahari sampai bayangan sesuatu sama panjang dengan aslinya, dan waktu ashar dimulai sejak bayangan sesuatu sama panjang dengan aslinya sampai bayangan sesuatu dua kali panjang aslinya atau terbenamnya matahari. Waktu magrib dimulai sejak terbenamnya matahari sampai hilangnya mega merah dan waktu isya’ dimulai sejak hilangnya mega merah sampai sepertiga malam (terbit fajar). Waktu subuh dimulai sejak terbit fajar shadiq sampai terbitnya matahari.

BAB V
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah dijelaskan, dapat disimpulkan bahwa pelabelan $L(2,1)$ pada $\Gamma_{\mathbb{Z}_{2p^2}}$ untuk p adalah bilangan prima sebagai berikut:

1. Untuk $p = 2$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = \overline{0} \\ x+1, & untuk\ lainnya \end{cases}$$

2. Untuk $p \geq 3$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = \overline{0} \\ x+2, & \overline{0} < x < \overline{p^2} \\ 2, & x = \overline{p^2} \\ x+1, & \overline{p^2} < x \leq \overline{2p^2 - 1} \end{cases}$$

dengan $x \in \mathbb{Z}_{2p^2}$ dan $\lambda_{2,1}\left(\Gamma_{\mathbb{Z}_{2p^2}}\right) = 2p^2$.

5.2 Saran

Berdasarkan penelitian ini, diharapkan bagi peneliti selanjutnya dapat mengembangkan penelitian ini dengan varian pelabelan jarak atau grup lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Abdullah. (2003). *Tafsir Ibnu Katsir Jilid 5*. Mu-assasah Daar Al-Hilaal Kairo.

Abdussakir, Azizah, N. N., & Nofandika, F. F. (2009). *Teori Graf: Topik Dasar untuk Tugas Akhir/Skripsi*. UIN-Malang Press.

Abdusysyakir. (2007). *Ketika kyai mengajar matematika*. UIN-Malang Press.

Al-Mahalli, I. J., & As-Suyuti, I. J. (2016). *Tafsir Jalalain Jilid 2*. Sinar Baru Algensido.

Al-Qarni, A. (2007). *Tafsir Al-Muyassar*. Qisthi Press.

Bukhari. (2009). *Shahih Al-Bukhari*. Dar Al-Kutub.

Chartrand, G., Lesniak, L., & Zhang, P. (2010). Graphs & digraphs. In *Graphs and Digraphs*. https://doi.org/10.1201/b19731

Dorbidi, H. R. (2016). A note on the coprime graph of a group. *International Journal of Group Theory*, *5*(4), 17–22.

Dummit, D. S., & Foot, R. M. (2004). *Abstract Algebra* (United Sta). John Wiley and Sons, Inc.

Gallian, J. A. (2017). *Contemporary Abstract Algebra*. Cengage Learning.

Griggs, J. R., & Yeh, R. K. (1992). *Labeling Graphs with a Condition at Distance 2*. *5*(4), 586–595.

Irawati, N., & Heri, R. (2010). Pelabelan Total Titik Ajaib Pada Complete Graph. *Matematika*, *13*(3), 136–142.

Kementrian, A. R. (2022). *Al-Qur'an dan Terjemahannya*. Lajnah Pentashihan Mushaf Al-Qur'an.

Lee, G. T. (2010). *Abstract Algebra An Introductory Course*. Springer International Publishing AG. https://doi.org/10.2307/3607096

Lum, A. (2007). *Upper bounds on the L(2, 1)-labeling number of graphs with maximum degree* Δ. 1–22.

Ma, X., Wei, H., & Yang, L. (2014). The Coprime graph of a group. *International Journal of Group Theory*, *3*(3), 13–23.

Mouly, M., & Pautet, M. B. (1992). *The GSM System for Mobile Communications*. Cell & Sys.

Nazir, M. (1998). *Metode Penelitian*. Ghalia Indonesia.

Rosen, K. H. (1984). Elementary Number Theory and Its Applications. In *Mathematics of Computation* (Vol. 48, Issue 177). ADDISON-WESLEY PUBLISHING COMPANY. https://doi.org/10.2307/2007902

Rosen, K. H. (2012). *Discrete Mathematics and Its Applications*. McGraw-Hill Higher Education.

Shao, Z., & Solis-Oba, R. (2010). L (2, 1)-Labelings on the composition of n graphs. *Theoretical Computer Science*, *411*(34–36), 3287–3292. https://doi.org/10.1016/j.tcs.2010.03.013

Shelash, H. B., & Jasim, M. (2021). Co-prime Graph of Finite Groups. *Order*, *April*. https://doi.org/10.13140/RG.2.2.25739.41762

Suryadi, D., & Priatna, N. (2005). *Pengantar Dasar Teori Graf*. UPI

LAMPIRAN

Lampiran 1. Faktor Persekutuan Terbesar dari Setiap Dua Orde Elemen di $\mathbb{Z}_{18}$

$(\lvert x\rvert, \lvert y\rvert)$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$
$\bar{0}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\bar{1}$	1	18	9	6	9	18	3	18	9	2	9	18	3	18	9	6	9	18
$\bar{2}$	1	9	9	3	9	9	3	9	9	1	9	9	3	9	9	3	9	9
$\bar{3}$	1	6	3	6	3	6	3	6	3	2	3	6	3	6	3	6	3	6
$\bar{4}$	1	9	9	3	9	9	3	9	9	1	9	9	3	9	9	3	9	9
$\bar{5}$	1	18	9	6	9	18	3	18	9	2	9	18	3	18	9	6	9	18
$\bar{6}$	1	3	3	3	3	3	3	3	3	1	3	3	3	3	3	3	3	3
$\bar{7}$	1	18	9	6	9	18	3	18	9	2	9	18	3	18	9	6	9	18
$\bar{8}$	1	9	9	3	9	9	3	9	9	1	9	9	3	9	9	3	9	9
$\bar{9}$	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
$\overline{10}$	1	9	9	3	9	9	3	9	9	1	9	9	3	9	9	3	9	9
$\overline{11}$	1	18	9	6	9	18	3	18	9	2	9	18	3	18	9	6	9	18
$\overline{12}$	1	3	3	3	3	3	3	3	3	1	3	3	3	3	3	3	3	3
$\overline{13}$	1	18	9	6	9	18	3	18	9	2	9	18	3	18	9	6	9	18
$\overline{14}$	1	9	9	3	9	9	3	9	9	1	9	9	3	9	9	3	9	9
$\overline{15}$	1	6	3	6	3	6	3	6	3	2	3	6	3	6	3	6	3	6
$\overline{16}$	1	9	9	3	9	9	3	9	9	1	9	9	3	9	9	3	9	9
$\overline{17}$	1	18	9	6	9	18	3	18	9	2	9	18	3	18	9	6	9	18

Lampiran 2. Faktor Persekutuan Terbesar dari Setiap Dua Orde Elemen di $\mathbb{Z}_{50}$

$(\lvert x\rvert,\lvert y\rvert)$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$	$\overline{18}$	$\overline{19}$	$\overline{20}$	$\overline{21}$	$\overline{22}$	$\overline{23}$	$\overline{24}$	$\overline{25}$
$\overline{0}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\overline{1}$	1	50	25	50	25	10	25	50	25	50	5	50	25	50	25	10	25	50	25	50	5	50	25	50	25	2
$\overline{2}$	1	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	1
$\overline{3}$	1	50	25	50	25	10	25	50	25	50	5	50	25	50	25	10	25	50	25	50	5	50	25	50	25	2
$\overline{4}$	1	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	1
$\overline{5}$	1	10	5	10	5	10	5	10	5	10	5	10	5	10	5	10	5	10	5	10	5	10	5	10	5	2
$\overline{6}$	1	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	1
$\overline{7}$	1	50	25	50	25	10	25	50	25	50	5	50	25	50	25	10	25	50	25	50	5	50	25	50	25	2
$\overline{8}$	1	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	1
$\overline{9}$	1	50	25	50	25	10	25	50	25	50	5	50	25	50	25	10	25	50	25	50	5	50	25	50	25	2
$\overline{10}$	1	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	1
$\overline{11}$	1	50	25	50	25	10	25	50	25	50	5	50	25	50	25	10	25	50	25	50	5	50	25	50	25	2
$\overline{12}$	1	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	1
$\overline{13}$	1	50	25	50	25	10	25	50	25	50	5	50	25	50	25	10	25	50	25	50	5	50	25	50	25	2
$\overline{14}$	1	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	1
$\overline{15}$	1	10	5	10	5	10	5	10	5	10	5	10	5	10	5	10	5	10	5	10	5	10	5	10	5	2
$\overline{16}$	1	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	1
$\overline{17}$	1	50	25	50	25	10	25	50	25	50	5	50	25	50	25	10	25	50	25	50	5	50	25	50	25	2
$\overline{18}$	1	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	1
$\overline{19}$	1	50	25	50	25	10	25	50	25	50	5	50	25	50	25	10	25	50	25	50	5	50	25	50	25	2
$\overline{20}$	1	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	1
$\overline{21}$	1	50	25	50	25	10	25	50	25	50	5	50	25	50	25	10	25	50	25	50	5	50	25	50	25	2
$\overline{22}$	1	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	1
$\overline{23}$	1	50	25	50	25	10	25	50	25	50	5	50	25	50	25	10	25	50	25	50	5	50	25	50	25	2
$\overline{24}$	1	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	1
$\overline{25}$	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
$\overline{26}$	1	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	1
$\overline{27}$	1	50	25	50	25	10	25	50	25	50	5	50	25	50	25	10	25	50	25	50	5	50	25	50	25	2
$\overline{28}$	1	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	1
$\overline{29}$	1	50	25	50	25	10	25	50	25	50	5	50	25	50	25	10	25	50	25	50	5	50	25	50	25	2
$\overline{30}$	1	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	1
$\overline{31}$	1	50	25	50	25	10	25	50	25	50	5	50	25	50	25	10	25	50	25	50	5	50	25	50	25	2
$\overline{32}$	1	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	1
$\overline{33}$	1	50	25	50	25	10	25	50	25	50	5	50	25	50	25	10	25	50	25	50	5	50	25	50	25	2
$\overline{34}$	1	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	1
$\overline{35}$	1	10	5	10	5	10	5	10	5	10	5	10	5	10	5	10	5	10	5	10	5	10	5	10	5	2
$\overline{36}$	1	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	1
$\overline{37}$	1	50	25	50	25	10	25	50	25	50	5	50	25	50	25	10	25	50	25	50	5	50	25	50	25	2
$\overline{38}$	1	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	1
$\overline{39}$	1	50	25	50	25	10	25	50	25	50	5	50	25	50	25	10	25	50	25	50	5	50	25	50	25	2
$\overline{40}$	1	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	1
$\overline{41}$	1	50	25	50	25	10	25	50	25	50	5	50	25	50	25	10	25	50	25	50	5	50	25	50	25	2
$\overline{42}$	1	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	1
$\overline{43}$	1	50	25	50	25	10	25	50	25	50	5	50	25	50	25	10	25	50	25	50	5	50	25	50	25	2
$\overline{44}$	1	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	1
$\overline{45}$	1	10	5	10	5	10	5	10	5	10	5	10	5	10	5	10	5	10	5	10	5	10	5	10	5	2
$\overline{46}$	1	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	1
$\overline{47}$	1	50	25	50	25	10	25	50	25	50	5	50	25	50	25	10	25	50	25	50	5	50	25	50	25	2
$\overline{48}$	1	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	1
$\overline{49}$	1	50	25	50	25	10	25	50	25	50	5	50	25	50	25	10	25	50	25	50	5	50	25	50	25	2

$(\lvert x\rvert,\lvert y\rvert)$	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	25	50	25	50	5	50	25	50	25	10	25	50	25	50	5	50	25	50	25	10	25	50	25	50
2	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25
3	25	50	25	50	5	50	25	50	25	10	25	50	25	50	5	50	25	50	25	10	25	50	25	50
4	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25
5	5	10	5	10	5	10	5	10	5	10	5	10	5	10	5	10	5	10	5	10	5	10	5	10
6	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25
7	25	50	25	50	5	50	25	50	25	10	25	50	25	50	5	50	25	50	25	10	25	50	25	50
8	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25
9	25	50	25	50	5	50	25	50	25	10	25	50	25	50	5	50	25	50	25	10	25	50	25	50
10	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
11	25	50	25	50	5	50	25	50	25	10	25	50	25	50	5	50	25	50	25	10	25	50	25	50
12	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25
13	25	50	25	50	5	50	25	50	25	10	25	50	25	50	5	50	25	50	25	10	25	50	25	50
14	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25
15	5	10	5	10	5	10	5	10	5	10	5	10	5	10	5	10	5	10	5	10	5	10	5	10
16	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25
17	25	50	25	50	5	50	25	50	25	10	25	50	25	50	5	50	25	50	25	10	25	50	25	50
18	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25
19	25	50	25	50	5	50	25	50	25	10	25	50	25	50	5	50	25	50	25	10	25	50	25	50
20	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
21	25	50	25	50	5	50	25	50	25	10	25	50	25	50	5	50	25	50	25	10	25	50	25	50
22	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25
23	25	50	25	50	5	50	25	50	25	10	25	50	25	50	5	50	25	50	25	10	25	50	25	50
24	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25
25	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
26	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25
27	25	50	25	50	5	50	25	50	25	10	25	50	25	50	5	50	25	50	25	10	25	50	25	50
28	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25
29	25	50	25	50	5	50	25	50	25	10	25	50	25	50	5	50	25	50	25	10	25	50	25	50
30	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
31	25	50	25	50	5	50	25	50	25	10	25	50	25	50	5	50	25	50	25	10	25	50	25	50
32	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25
33	25	50	25	50	5	50	25	50	25	10	25	50	25	50	5	50	25	50	25	10	25	50	25	50
34	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25
35	5	10	5	10	5	10	5	10	5	10	5	10	5	10	5	10	5	10	5	10	5	10	5	10
36	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25
37	25	50	25	50	5	50	25	50	25	10	25	50	25	50	5	50	25	50	25	10	25	50	25	50
38	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25
39	25	50	25	50	5	50	25	50	25	10	25	50	25	50	5	50	25	50	25	10	25	50	25	50
40	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
41	25	50	25	50	5	50	25	50	25	10	25	50	25	50	5	50	25	50	25	10	25	50	25	50
42	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25
43	25	50	25	50	5	50	25	50	25	10	25	50	25	50	5	50	25	50	25	10	25	50	25	50
44	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25
45	5	10	5	10	5	10	5	10	5	10	5	10	5	10	5	10	5	10	5	10	5	10	5	10
46	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25
47	25	50	25	50	5	50	25	50	25	10	25	50	25	50	5	50	25	50	25	10	25	50	25	50
48	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25	5	25	25	25	25
49	25	50	25	50	5	50	25	50	25	10	25	50	25	50	5	50	25	50	25	10	25	50	25	50

RIWAYAT HIDUP

Siti Nur Kamila, lahir di Situbondo pada tanggal 03 Juli 2001, biasa dipanggil Mila. Penulis tinggal di Dusun Krajan, RT 003/ RW 001, Desa Agel, Kecamatan Jangkar, Kabupaten Situbondo. Anak pertama dari dua bersaudara dari pasangan Bapak Mulyono dan Ibu Riwani.

Penulis telah menempuh pendidikan formal mulai dari TK Dharma Wanita dan lulus pada tahun 2008. Setelah itu, penulis menempuh pendidikan dasar di SDN 2 Kumbang Sari dan lulus pada tahun 2014. Selanjutnya, penulis menempuh jenjang pendidikan menengah pertama di SMP Ibrahimy 3 Sukorejo dan lulus pada tahun 2017. Kemudian, penulis melanjutkan ke jenjang pendidikan menengah atas di SMA Ibrahimy 1 Sukorejo dan lulus pada tahun 2020. Dan selanjutnya penulis melanjutkan ke pendidikan perguruan tinggi Strata 1 di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang dengan mengambil Program Studi Matematika. Selama menempuh perkuliahan, penulis aktif menjadi pengurus di IKMASS Malang Raya pada tahun 2020 - 2023.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Siti Nur Kamila
NIM : 200601110074
Fakultas / Jurusan : Sains dan Teknologi / Matematika
Judul Skripsi : Pelabelan $L(2,1)$ pada Graf Koprima dari Grup Bilangan Bulat Modulo m
Pembimbing I : Mohammad Nafie Jauhari, M.Si.
Pembimbing II : Erna Herawati, M.Pd.

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	05 Januari 2024	Konsultasi Topik dan Data	1.
2.	10 Januari 2024	Konsultasi Bab I, II, dan III	2.
3.	15 Januari 2024	Konsultasi Bab I, II, dan III	3.
4.	19 Januari 2024	Konsultasi Bab I, II, dan III	4.
5.	22 Januari 2024	Konsultasi Kajian Agama Bab I dan II	5.
6.	23 Januari 2024	Konsultasi Bab I, II, dan III	6.
7.	24 Januari 2024	Revisi Kajian Agama Bab I dan II	7.
8.	26 Januari 2024	ACC Bab I, II, dan III	8.
9.	26 Januari 2024	Revisi Kajian Agama Bab I dan II	9.
10.	29 Januari 2024	ACC Kajian Agama Bab I dan II	10.
11.	30 Januari 2024	ACC Seminar Proposal	11.
12.	08 Maret 2024	Konsultasi Revisi Seminar Proposal	12.
13.	18 Maret 2024	Konsultasi Bab IV dan V	13.
14.	27 Maret 2024	Konsultasi Bab IV dan V	14.
15.	03 April 2024	Konsultasi Bab IV dan V	15.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

16.	22 April 2024	Konsultasi Bab IV dan V	16.
17.	26 April 2024	ACC Bab IV dan V	17.
18.	02 Mei 2024	Konsultasi Kajian Agama Bab IV	18.
19.	07 Mei 2024	Revisi Kajian Agama Bab IV	19.
20.	17 Mei 2024	ACC Kajian Agama Bab IV	20.
21.	20 Mei 2024	ACC Seminar Hasil	21.
22.	29 Mei 2024	ACC Seminar Hasil lanjutan	22.
23.	04 Juni 2024	Konsultasi Revisi Seminar Hasil	23.
24.	20 Juni 2024	ACC Sidang Skripsi	24.
25.	26 Juni 2024	ACC Akhir Keseluruhan	25.

Malang, 26 Juni 2024
Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005