

**ANALISIS PERSAMAAN NAVIER-STOKES 2D UNTUK
MODEL GELOMBANG PERAIRAN DANGKAL DENGAN
MASALAH NILAI AWAL DAN MASALAH NILAI BATAS**

SKRIPSI

**oleh:
FITRIYANTI RUMFOT
NIM. 07610018**



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2011**

**ANALISIS PERSAMAAN NAVIER-STOKES 2D UNTUK
MODEL GELOMBANG PERAIRAN DANGKAL DENGAN
MASALAH NILAI AWAL DAN MASALAH NILAI BATAS**

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan Dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

oleh:
FITRIYANTI RUMFOT
NIM. 07610018

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2011**

**ANALISIS PERSAMAAN NAVIER-STOKES 2D UNTUK
MODEL GELOMBANG PERAIRAN DANGKAL DENGAN
MASALAH NILAI AWAL DAN MASALAH NILAI BATAS**

SKRIPSI

**oleh:
FITRIYANTI RUMFOT
NIM. 07610018**

**Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji:
Tanggal, 14 Februari 2011**

Pembimbing I

Pembimbing II

**Ari Kusumastuti, S.Si., M.Pd
NIP.19770521 200501 2 004**

**Ach. Nashichuddin, M.A
NIP. 19730705 200003 1 002**

**Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika**

**Abdussakir, M.Pd
NIP.19751006 200312 1 001**

ANALISIS PERSAMAAN NAVIER-STOKES 2D UNTUK MODEL GELOMBANG PERAIRAN DANGKAL DENGAN MASALAH NILAI AWAL DAN MASALAH NILAI BATAS

SKRIPSI

oleh:
FITRIYANTI RUMFOT
NIM. 07610018

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan Untuk
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal, 1 April 2011

Susunan Dewan Penguji

Tanda Tangan

- | | | |
|------------------|---|-----|
| 1. Penguji Utama | : <u>Hairur Rahman, M.Si</u>
NIP. 19800429 200604 1 003 | () |
| 2. Ketua | : <u>Usman Pagalay, M.Si</u>
NIP. 19650414 200312 1 001 | () |
| 3. Sekretaris | : <u>Ari Kusumastuti, S.Si., M.Pd</u>
NIP. 19770521 200501 2 004 | () |
| 4. Anggota | : <u>Ach. Nashichuddin, M.A</u>
NIP. 19730705 200003 1 002 | () |

Mengetahui dan Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP.19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Fitriyanti Rumfot
NIM : 07610018
Jurusan : Matematika
Fakultas : Sains dan Teknologi

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambil alihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 13 Januari 2011

Yang Membuat Pernyataan,

Fitriyanti Rumfot

NIM. 07610018

MOTTO

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

إِنَّ اللَّهَ لَا يُغَيِّرُ مَا بِقَوْمٍ حَتَّى يُغَيِّرُوا مَا بِأَنْفُسِهِمْ

Sesungguhnya Allah tidak merubah keadaan sesuatu kaum sehingga mereka merubah keadaan yang ada pada diri mereka sendiri
(Q.S. Ar-Ra'd: 11)

"There is a will, There is a way"

PERSEMBAHAN

Untuk yang tersayang dan tercinta:

Mama Siti Zaenab (Almarhumah)

Bapak Sarif Rumfot dan

Mama Megawati

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr.Wb.

Syukur alhamdulillah penulis hanturkan ke hadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan studi di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang sekaligus penulisan skripsi ini dengan baik.

Selanjutnya penulis hanturkan ucapan terima kasih seiring do'a dan harapan *jazakumullah ahsanul jaza'* kepada semua pihak yang telah membantu terselesaikannya skripsi ini. Ucapan terima kasih ini penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Drs. Sutiman B. Sumitro, SU., DSc, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
4. Ari Kusumastuti, S.Si., M.Pd dan Ach. Nashichuddin, M.A selaku dosen pembimbing skripsi, yang telah memberikan banyak pengarahan dan pengalaman yang berharga.
5. Segenap civitas akademika Jurusan Matematika, terutama seluruh dosen, terima kasih atas segenap ilmu dan bimbinganya.

6. Ayahanda (Sarif Rumfot), (Almarhumah) Ibunda tercinta (Siti Zaenab), dan Mama tersayang (Megawati) yang senantiasa memberikan do'a dan restunya kepada penulis dalam menuntut ilmu.
7. Adik-adik (Sulaiman Rumfot, Zainal Efendi Rumfot, Hapsanto Panca Putra Nugroho Rumfot, Zainuddin Rumfot, Muhammad Amin Rumfot, dan Siti Hajar Rumfot), terima kasih atas do'a dan motivasinya.
8. Pasukan Tujuh Ratus dimanapun berada. Terimakasih atas do'a dan dukungannya selama ini. Kasih sayang kalian sungguh membuat penulis dapat bertahan di tanah rantau.
9. Sahabat-sahabat terbaik (Matahari, Arumi Normaningrum, Eka Irianti, Vitri Nurhayati, Dewi Erla Mahmudah, Silva Ahmad Adini, Kridha Pusa, Navis Nur Ilmiyah, Abdul Majid dan teman-teman di Ma'had Sunan Ampel Al-'Aly khususnya: Kamar 23 (tahun 2007-2008), Kamar 30 (tahun 2008-2009), Kamar 47 (tahun 2009-2010), dan Kamar 10 (tahun 2010-sekarang)) terima kasih atas do'a, semangat, kebersamaan, dan kenangan indah selama di tanah rantau ini.
10. Sahabat-sahabat senasib seperjuangan mahasiswa Matematika 2007, terima kasih atas segala pengalaman berharga dan kenangan terindah saat menuntut ilmu bersama.
11. Semua pihak yang tidak mungkin penulis sebut satu persatu, terima kasih atas keiklasan bantuan moral dan spiritual yang sudah diberikan pada penulis.

Penulis menyadari bahwa dalam penyusunan skripsi ini masih terdapat kekurangan, dan penulis berharap semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat kepada para pembaca khususnya bagi penulis secara pribadi. Amin Ya Rabbal Alamin.

Wassalamu'alaikum Wr.Wb.

Malang, 13 Januari 2011

Penyusun



DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PENGAJUAN	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	
MOTTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR.....	i
DAFTAR ISI.....	iv
DAFTAR GAMBAR.....	vi
DAFTAR TABEL	vii
DAFTAR SIMBOL	viii
ABSTRAK	ix
 BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	8
1.3 Tujuan Penelitian	8
1.4 Batasan Masalah	8
1.5 Metode Penelitian	9
1.6 Sistematika Penulisan	9
 BAB II KAJIAN TEORI	
2.1 Persamaan Diferensial Parsial.....	11
2.2 Persamaan Diferensial Parsial Linier dan Nonlinier.....	12
2.3 Orde Persamaan Diferensial Parsial.....	13
2.4 Tipe-tipe Dasar dari Persamaan Diferensial Parsial	15
2.5 Penyelesaian Umum dan Penyelesaian Khusus Persamaan Diferensial Parsial	15
2.6 Persamaan Linier Homogen dengan Koefisien Konstan ...	16
2.7 Masalah Nilai Awal dan Masalah Nilai Batas	18
2.8 Nilai Eigen dan Fungsi Eigen	22
2.9 Metode Pemisahan Variabel Persamaan Diferensial Parsial Nonlinier	24
2.10 Struktur Solusi Pemisahan Secara Umum	26
2.11 Bentuk Umum dari Persamaan Diferensial Fungsional	27
2.12 Solusi Persamaan Diferensial Fungsional dengan Diferensiasi	27
2.13 Solusi Persamaan Fungsional dengan <i>Splitting</i>	29
2.14 Solusi dari Persamaan Fungsional Sederhana dan Aplikasinya	31

2.15	Penyederhanaan Skema untuk Mengkonstruksi Solusi Pemisahan Secara Umum	34
2.16	Metode Pemisahan Variabel Fungsional	34
2.17	Persamaan Diferensial Kekekalan Massa	37
2.18	Aliran Tak Termampatkan (<i>Incompressible Flow</i>).....	38
2.19	Persamaan Diferensial Momentum Linear	39
2.20	Konstruksi Persamaan Navier-Stokes.....	41
2.21	Bentuk Kanonik Persamaan Diferensial Parsial	45
2.22	Batas Kemampuan Manusia dalam Al-Qur'an	46
BAB III PEMBAHASAN		
3.1	Solusi Partikular Masalah Nilai Awal Persamaan Navier-Stokes 2D	51
3.2	Solusi Partikular Masalah Nilai Batas Persamaan Navier-Stokes 2D	57
3.3	Penyelesaian Persamaan Navier-Stokes dengan Syarat Batasnya	63
3.4	Bentuk Kanonik dari Persamaan Navier-Stokes.....	74
3.5	Masalah Nilai Batas dan Batas Kemampuan Manusia	77
BAB IV PENUTUP		
4.1	Kesimpulan	80
4.2	Saran	84
DAFTAR PUSTAKA		

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Skema Umum untuk Mengkonstruksi Solusi Pemisahan Secara Umum dengan <i>Splitting Method</i>	30
Gambar 2.2	Volume Kendali	37
Gambar 3.1	Grafik Solusi Nilai Batas Bidang Gelombang dari Persamaan Navier-Stokes 2D pada Sumbu (u,y)	67
Gambar 3.2	Grafik Solusi Nilai Batas Bidang Gelombang dari Persamaan Navier-Stokes 2D pada Sumbu (u,t)	67
Gambar 3.3	Grafik Solusi Nilai Batas Bidang Gelombang dari Persamaan Navier-Stokes 2D pada Sumbu (u,y,t)	68
Gambar 3.4	Grafik Solusi Nilai Batas Bidang Gelombang dari Persamaan Navier-Stokes 2D pada Sumbu (v,x)	72
Gambar 3.5	Grafik Solusi Nilai Batas Bidang Gelombang dari Persamaan Navier-Stokes 2D pada Sumbu (v,t)	72
Gambar 3.6	Grafik Solusi Nilai Batas Bidang Gelombang dari Persamaan Navier-Stokes 2D pada Sumbu (v,x,t)	73
Gambar 4.1	Grafik Solusi Nilai Batas Bidang Gelombang dari Persamaan Navier-Stokes 2D pada Sumbu (u,y)	81
Gambar 4.2	Grafik Solusi Nilai Batas Bidang Gelombang dari Persamaan Navier-Stokes 2D pada Sumbu (u,t)	82
Gambar 4.3	Grafik Solusi Nilai Batas Bidang Gelombang dari Persamaan Navier-Stokes 2D pada Sumbu (u,y,t)	82
Gambar 4.4	Grafik Solusi Nilai Batas Bidang Gelombang dari Persamaan Navier-Stokes 2D pada Sumbu (v,x)	83
Gambar 4.5	Grafik Solusi Nilai Batas Bidang Gelombang dari Persamaan Navier-Stokes 2D pada Sumbu (v,t)	83
Gambar 4.6	Grafik Solusi Nilai Batas Bidang Gelombang dari Persamaan Navier-Stokes 2D pada Sumbu (v,x,t)	84

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1 Flux Massa 37

Tabel 2.2 Flux Momentum..... 39



DAFTAR SIMBOL

Simbol-simbol yang digunakan dalam skripsi ini adalah:

A	: Luasan
a	: Percepatan
F	: Gaya
Re	: Bilangan Reynold
t	: Waktu
u	: Penampang gelombang/amplitudo di sumbu x
v	: Penampang gelombang/amplitudo di sumbu y
$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$	: Kecepatan sepanjang sumbu x
$\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$	: Kecepatan sepanjang sumbu y
ρ	: Densitas (massa jenis)
P	: Tekanan
m	: Massa
$\partial_t w = \frac{\partial w}{\partial t}$ $\partial_x w = \frac{\partial w}{\partial x}$ $\partial_{tt} w = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ $\partial_{xx} w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$	: Turunan-turunan parsial
$f'_x = \frac{df}{dx}$ $f''_{xx} = \frac{d^2 f}{dx^2}$ $f'''_{xxx} = \frac{d^3 f}{dx^3}$ $f^{(n)}_x = \frac{d^n f}{dx^n}$	: Turunan-turunan untuk $f = f(x)$

ABSTRAK

Rumfot, Fitriyanti. 2011. **Analisis Persamaan Navier-Stokes 2D untuk Model Gelombang Perairan Dangkal dengan Masalah Nilai Awal dan Masalah Nilai Batas**. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Pembimbing: (I) Ari Kusumastuti, S.Si., M.Pd

(II) Ach. Nashichuddin, M.A

Sistem persamaan Navier-Stokes adalah persamaan diferensial parsial nonlinear yang dapat dikerjakan pada kasus fluida cair. Penelitian ini berupaya untuk memperoleh solusi masalah nilai awal dan masalah nilai batas yang diasumsikan pada aliran fluida 2D. Dalam hal ini solusi d'Alembert adalah solusi partikular masalah nilai awal. Penyelesaian masalah masalah nilai batas pada persamaan diferensial parsial Navier-Stokes dikerjakan dengan *Splitting method* untuk mendapatkan sistem persamaan diferensial biasa yang terpisah. Selanjutnya pemisahan variabel dikerjakan untuk mendapatkan solusi umum pada masalah nilai batasnya. Dalam hal ini batas-batas didefinisikan $0 < x < L$ dan $0 < y < W$. Solusi bentuk kanonik juga dibahas dalam penelitian ini.

Kata Kunci: Persamaan Navier-Stokes 2D, Solusi Nilai Awal, Solusi Nilai Batas, Bentuk Kanonik

ABSTRACT

Rumfot, Fitriyanti. 2011. **Analysis of 2D Navier-Stokes for Model of Shallow Water Flow with Initial Value Problem and Boundary Value Problem.**

Thesis. Mathematics Department, Science and Technology Faculty, The State Islamic University Maulana Malik Ibrahim Malang.

Advisor: (I) Ari Kusumastuti, S.Si., M.Pd.

(II) Ach. Nashichuddin, M.A.

System of Navier-Stokes equations are nonlinear partial differential equations that can do for fluid of water. This research aims to find solutions to initial value problem and assumed boundary value problems in 2D fluid flow. In this case the d'Alembert solution is a characteristic solution to the initial value problem. Problem solving boundary value problems in partial differential equation of Navier-Stokes equations by separation method to get the system of ordinary differential equations separately. separation of variables further carried out to obtain a general solution for boundary value problems. In this case the limits specified by $0 < x < L$ and $0 < y < W$. Solution of canonical form is also discussed in this research.

Key Words: 2D Navier-Stokes Equation, Solutions of Initial Value, Solutions of Boundary Value, Canonical Form

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Persamaan diferensial parsial merupakan kajian matematik yang sangat fundamental yang dapat menterjemahkan fenomena alam ke dalam bentuk yang sistematis. Fakta dari suatu objek yang akan diamati akan menjadi logis dan jelas dengan menampilkan model dari fakta ini, yang pada umumnya berbentuk persamaan diferensial parsial atau bahkan sistem persamaan diferensial parsial. Dari model ini akan tergambar sebuah transformasi baru yang siap untuk diperhitungkan jawabannya dari masalah atau fakta ini. Tentunya model dari fakta ini merupakan miniatur masalah yang hanya mempertimbangkan variabel-variabel yang terbatas, asalkan variabel-variabel tersebut mewakili fakta yang sesungguhnya. Hal ini karena tidak mungkin menggunakan semua variabel dari fakta atau masalah secara keseluruhan. Oleh karena itu miniatur fakta adalah hal yang “manusiawi” dalam mendapatkan jawaban suatu masalah, seperti firman Allah berikut:

لَا يُكَلِّفُ اللَّهُ نَفْسًا إِلَّا وُسْعَهَا لَهَا مَا كَسَبَتْ وَعَلَيْهَا مَا اكْتَسَبَتْ رَبَّنَا لَا تُؤَاخِذْنَا
 إِن نَّسِينَا أَوْ أَخْطَأْنَا رَبَّنَا وَلَا تَحْمِلْ عَلَيْنَا إَصْرًا كَمَا حَمَلْتَهُ عَلَى الَّذِينَ مِن
 قَبْلِنَا رَبَّنَا وَلَا تُحَمِّلْنَا مَا لَا طَاقَةَ لَنَا بِهِ ۖ وَاعْفُ عَنَّا وَارْحَمْنَا أَنْتَ
 مَوْلَانَا فَانصُرْنَا عَلَى الْقَوْمِ الْكَافِرِينَ ﴿٢٢٨﴾

Artinya: Allah tidak membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya. ia mendapat pahala (dari kebajikan) yang diusahakannya dan

ia mendapat siksa (dari kejahatan) yang dikerjakannya. (mereka berdoa): "Ya Tuhan kami, janganlah Engkau hukum kami jika kami lupa atau kami tersalah. Ya Tuhan kami, janganlah Engkau bebaskan kepada kami beban yang berat sebagaimana Engkau bebaskan kepada orang-orang sebelum kami. Ya Tuhan kami, janganlah Engkau pikulkan kepada kami apa yang tak sanggup kami memikulnya. beri maaflah Kami; ampunilah Kami; dan rahmatilah kami. Engkaulah penolong kami, Maka tolonglah kami terhadap kaum yang kafir." (Q.S.al-Baqarah: 286).

Dalam ayat ini Allah swt. mengatakan bahwa seseorang dibebani hanyalah sesuai dengan batas kesanggupannya. Karena memang apabila kita dibebani di luar dari batasan kemampuan kita, pastilah kita tidak akan sanggup menjalani beban itu. Agama Islam adalah agama yang tidak memberatkan manusia dengan beban yang berat dan sukar. Mudah, ringan dan tidak sempit adalah asas pokok dari agama Islam.

Seperti telah diuraikan sebelumnya bahwa apa yang dikerjakan adalah hanya menggunakan sampel model yang bersifat terbatas dan melibatkan persamaan diferensial parsial. Dalam hal ini, kajian persamaan diferensial parsial melibatkan serangkaian kajian yang mendalam atas solusi analitik atau bahkan solusi numerik dari model yang dihadapi. Solusi analitik atau *exact solution* dari suatu persamaan diferensial parsial adalah penentuan solusi yang terdefinisi atau sah dalam sistem yang dihadapi. Dalam pembahasan solusi analitik suatu persamaan diferensial parsial umumnya mengkaji masalah nilai awal dan masalah nilai batas. Sehingga solusi analitik yang dimaksud harus terdefinisi juga dalam sistem atau pada batas-batas sistem. Dalam hal ini sesungguhnya solusi analitik melibatkan serangkaian prosedur yang tidaklah mudah, oleh karena itu biasanya digunakan solusi numerik yang terkatagori sebagai prosedur yang masuk akal untuk dilalui oleh semua peneliti terutama bagi mereka yang tidak “*interest*” atau

tidak terlalu mendalami prosedur matematik secara mendalam. Tetapi harus diingat bahwa solusi numerik adalah hanya solusi pendekatan, sehingga solusi analitik memegang kendali dalam mengontrol keakuratan dari solusi pendekatannya. Tetapi tidak dapat dipungkiri bahwa kadangkala ada beberapa masalah dalam suatu model yang hampir tidak mungkin ditentukan solusi analitiknya. Dalam kenyataan seperti ini sebagai seorang ilmuwan muslim hanya mampu meyakini bahwa kebenaran yang nisbi adalah Allah yang maha mengetahui, hanya ijtihad dan ikhtiar yang mampu dilewati, seperti firman Allah tentang ijtihad sebagai berikut:

قَالُوا لَنْ نُؤْثِرَكَ عَلَىٰ مَا جَاءَنَا مِنَ الْبَيِّنَاتِ وَالَّذِي فَطَرْنَا فَاقْضِ مَا أَنْتَ قَاضٍ
إِنَّمَا تَقْضِي هَذِهِ الْحَيَاةَ الدُّنْيَا ﴿٧٢﴾

Artinya: Mereka berkata: "Kami sekali-kali tidak akan mengutamakan kamu daripada bukti-bukti yang nyata (mukjizat), yang telah datang kepada kami dan daripada Tuhan yang telah menciptakan kami; maka putuskanlah apa yang hendak kamu putuskan. Sesungguhnya kamu hanya akan dapat memutuskan pada kehidupan di dunia ini saja. (QS. Thaha:72)

Selanjutnya pada saat berangkat pada model dari keadaan alam saat ini, bahwa faktanya mulai banyak bermunculan fenomena yang ditimbulkan oleh kelalaian manusia dalam melihat perubahan arus sungai yang mengakibatkan banyak kerusakan. Berdasarkan berita pada surat kabar Kompas, 28 Juli 2010, kerusakan sungai Brantas yang panjangnya mencapai 340 kilometer tersebut, telah bertambah parah. Karena kedalaman dasar sungai pada tahun 1991 3-4 meter, kini telah mencapai 12 meter. Akibat penurunan dasar sungai, terdapat sedikitnya 74 titik kerusakan di tanggul, plengsengan, dan sarana pengairan berupa bendungan. Jumlah kerusakan itu mencapai ratusan apabila ditambah dengan jembatan, jalan

dan saluran irigasi yang rusak di sepanjang aliran sungai. Kondisi kerusakan di setiap titik termasuk kategori parah. Sebagai contoh, pondasi bendungan Mrican di Kabupaten Kediri menggantung setinggi 4 meter dari permukaan air. Jika bendungan ini sampai runtuh, ribuan hektar sawah di Kabupaten dan Kota Kediri serta Kabupaten Nganjuk akan kekeringan. Contoh lainnya adalah amblesnya pondasi jembatan Mrican di Kota Kediri yang mengakibatkan terputusnya jalur transportasi dari Kabupaten Kediri menuju Kota Kediri, lumpuhnya kegiatan perdagangan, dan bertambahnya biaya ekonomi karena akses lalu lintas harus memutar sejauh 10 kilometer (Kompas.com, 2010).

Berdasarkan ilmu hidrologi, keadaan aliran sungai bermacam-macam. Apabila pola kecepatan aliran dalam suatu penampang melintang sungai tidak berubah di setiap arah aliran atau dengan kata lain kedalaman aliran sama dan kecepatan aliran tetap sama pada kedalaman aliran yang sama tersebut, maka dikatakan sungai itu beraliran seragam (*uniform flow*), sedangkan jika keadaan aliran berubah dan pola kecepatan aliran berubah, maka dikatakan sungai tersebut beraliran tidak seragam (*non uniform flow*). Selanjutnya jika butir-butir air seolah-olah bergerak menuju lintasan tertentu yang teratur atau lurus, dan selapis air yang sangat tipis, seperti menggelincir di atas lapisan di sebelahnya maka aliran sungai tersebut dikatakan laminar. Sedangkan jika butir-butir air bergerak menuju lintasan yang tidak teratur, tidak lancar, maupun tidak tetap, walaupun butir-butir tersebut tetap menunjukkan gerak maju dalam aliran keseluruhan, maka sungai tersebut beraliran turbulen. Aliran laminar dan turbulen

dapat diidentifikasi berdasarkan bilangan Reynolds, yang dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$Re = \frac{Pvd}{\mu}$$

Dengan, P adalah kerapatan massa, v kecepatan aliran, d kedalaman aliran, dan μ kekentalan air. Apabila Re kurang dari 500 maka terjadi aliran laminar, apabila harganya 500-2000 terjadi keadaan transisi, bila kecepatan dan kedalaman bertambah besar maka harga Re bertambah dan aliran akan menjadi turbulen. Berdasarkan realita yang ada, hampir seluruh aliran sungai keadaannya adalah turbulen. Suatu aliran sungai dapat juga berupa aliran tetap (*steady flow*) dan aliran tidak tetap (*unsteady flow*). Aliran tetap terjadi apabila kecepatan tidak berubah terhadap waktu, sedangkan apabila kecepatan aliran tersebut berubah terhadap waktu maka akan menjadi aliran tidak tetap. Aliran tetap atau tidak tetap dapat dibedakan sebagai aliran seragam dan tidak seragam, apabila:

1. Suatu debit fluida yang tetap mengalir di sepanjang alur terhadap luas penampang yang tetap disebut aliran tetap dan seragam (*steady uniform flow*) tipe aliran ini yang paling banyak digunakan dalam hidrolika fluida berbentuk air (*water*);
2. Suatu debit yang besarnya sama dan tetap melalui suatu alur sungai yang luas penampangnya semakin bertambah besar atau berkurang merupakan aliran tetap dan tidak seragam (*steady non uniform flow*);
3. Suatu debit sungai yang bertambah atau berkurang dalam hubungannya dengan waktu dan mengalir pada suatu penampang sungai yang tetap adalah merupakan aliran tidak tetap dan seragam (*unsteady uniform flow*);

4. Suatu debit sungai yang bertambah atau berkurang dalam hubungannya dengan waktu dan mengalir pada suatu penampang yang berubah adalah merupakan aliran tidak tetap dan tidak seragam (*unsteady non uniform flow*)

(Soewarno, 1991).

Setiap zat cair (air sungai) mempunyai sifat-sifat fluida yang penting. Salah satunya adalah viskositas. Viskositas adalah hasil dari gaya-gaya antara molekul yang timbul pada saat lapisan-lapisan fluida berusaha menggeser satu dengan lainnya (Orianto, 1989).

Dalam penelitian ini model matematik yang mampu menterjemahkan keadaan fluida air seperti di atas, adalah persamaan Navier-Stokes. Persamaan ini adalah persamaan diferensial parsial non linier yang ditemukan oleh ahli matematika Perancis, L.M.H Navier (1758-1836) dan Sir Gorge Gabriel Stokes (1819-1903) dan Persamaan Navier-Stokes merupakan sistem dari persamaan momentum dan persamaan kontinuitas, yang dapat berlaku pada aliran fluida laminar atau turbulen (Munson, 2002). Persamaan Navier-Stokes ini adalah persamaan diferensial parsial nonlinear yang mendiskripsikan bagaimana fluida mengalir dan persamaan ini juga telah banyak dipakai untuk masalah-masalah unik di kehidupan sehari-hari sebagai contoh, bagaimana pesawat bisa terbang? (terkait dengan fluida gas) dan berapa waktu yang dibutuhkan secangkir kopi yang diaduk menjadi tenang? (fluida cair). Persamaan Navier-Stokes pada mulanya berasal dari hukum Newton, $f = m \cdot a$, tetapi karena digunakan pada

elemen fluida yang tergantung dari gaya eksternal, gaya tekan, dan gaya gesek sehingga persamaannya berubah.

Asumsi fluida yang dipilih dalam penelitian ini adalah air dangkal (*shallow water*). Perairan dangkal yang dimaksud adalah perairan yang mempunyai *surface* (batas permukaan) dan *bottom* (batas dasar) (Zauderer, 2006).

Penelitian ini berupaya menekankan analisis pemecahan analitik bagi model gelombang perairan pada suatu sistem yang dipilih. Penelitian dibatasi pada kondisi 2 dimensi. Analisis tentang gelombang (amplitudo) perairan ini dapat menjadi inspirasi pengendalian kondisi kecepatan daerah aliran sungai atau DAS. Hal ini tentunya bahwa hasil analisis analitik harus diimplementasikan pada data DAS yang dihadapi, sehingga hasil analisa matematik ini menjadi sangat aktual. Dalam penelitian ini, peneliti membatasi pada analisis pemecahan analitik kondisi gelombang perairan. Selanjutnya hasil analisis analitik kondisi gelombang di perairan ini dapat dilanjutkan dalam penelitian berikutnya dalam melihat tingkat pengaruh *noise* gelombang di perairan terhadap sedimentasi dan fungsi lahan di sekitar daerah aliran sungai.

Dari paparan di atas, maka penelitian ini menjadi penting untuk dilakukan karena akan sangat membantu pengamatan lebih lanjut terhadap persamaan Navier-Stokes di perairan dangkal yang melibatkan masalah nilai batas dan masalah nilai awal yang telah diberikan dalam penelitian ini. Oleh karena itu, peneliti menuangkan gagasan tersebut dalam skripsi ini dan memberi judul: *"Analisis Persamaan Navier-Stokes 2D untuk Model Gelombang Perairan Dangkal dengan Masalah Nilai Awal dan Masalah Nilai Batas"*.

1.2 Rumusan Masalah

Berangkat dari uraian di atas, maka dalam penelitian ini akan difokuskan pada masalah berikut:

1. Bagaimana analisis persamaan Navier-Stokes 2D untuk memodelkan penampang gelombang dengan melibatkan masalah nilai awal dan masalah nilai batas di perairan dangkal?
2. Bagaimana bentuk kanonik persamaan Navier-Stokes 2D di perairan dangkal?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menganalisis persamaan Navier-Stokes 2D untuk memodelkan penampang gelombang yang melibatkan masalah nilai awal dan masalah nilai batasnya pada perairan dangkal.
2. Menentukan bentuk kanonik persamaan Navier-stokes di perairan dangkal.

1.4. Batasan Masalah

1. Analisis persamaan Navier-Stokes dibatasi pada konstruksi model analitik kecepatan dan tekanan pada objek perairan berbentuk persegi, dengan batas $0 \leq x \leq L$ dan $0 \leq y \leq W$
2. Menggunakan Persamaan Navier-Stokes 2D (variabel x digunakan sebagai parameter panjang sungai dan variabel y digunakan sebagai parameter kedalaman sungai).

$$x \text{ momentum: } \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$y \text{ momentum: } \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

3. Model dikaji pada asumsi Perairan dangkal.
4. Solusi Analitik yang dipilih adalah dengan bentuk linear yaitu $w = F(y, t)x + G(y, t)$ dan $w = F(x, t)y + G(x, t)$

1.5 Metode Penelitian

Metode penelitian yang dilakukan adalah dengan melakukan teknik analisis secara literatur. Di mana model rujukan yaitu Navier-Stokes 2D di analisis untuk memperoleh pemecahan secara analitik menggunakan nilai awal dan nilai batas yang didefinisikan. Selanjutnya dilanjutkan dengan analisis untuk mendapatkan bentuk kanonik dari persamaan Navier-Stokes 2D.

1.6 Sistematika Penulisan

Dalam penulisan tugas akhir ini, penulis menggunakan sistematika penulisan yang terdiri dari 4 bab, dan masing-masing bab dibagi dalam subbab dengan sistematika penulisan sebagai berikut:

BAB I : PENDAHULUAN

Pada bab ini meliputi beberapa sub bahasan yaitu latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II : KAJIAN PUSTAKA

Pada bab ini penulis menjelaskan beberapa teori-teori yang berhubungan dengan penelitian, diantaranya adalah pengertian

persamaan diferensial parsial, solusi umum dan solusi khusus dari persamaan diferensial parsial, metode pemisahan variabel persamaan diferensial parsial nonlinier, konstruksi persamaan Navier-Stokes dan bentuk kanonik persamaan diferensial parsial.

BAB III : PEMBAHASAN

Pada bab ini penulis menjelaskan cara menganalisis persamaan Navier-Stokes 2D untuk memodelkan penampang gelombang yang melibatkan masalah nilai awal dan masalah nilai batasnya pada perairan dangkal serta menentukan bentuk kanonik persamaan Navier-Stokes di perairan dangkal

BAB IV : PENUTUP

Pada bab ini penulis memberikan kesimpulan yang diperoleh dari pembahasan yang dilengkapi dengan saran-saran yang berkaitan dengan hasil penelitian ini.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Diferensial Parsial

Dalam persamaan diferensial parsial muncul turunan parsial yang menyatakan hukum Fisika tertentu. Misalnya, persamaan diferensial parsial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.1)$$

yang menggambarkan gerak bentuk gelombang, dapat berbentuk gelombang samudera, gelombang suara, gelombang cahaya dan gelombang yang lainnya.

Persamaan diferensial parsial (PDP) adalah suatu persamaan yang mengandung dua atau lebih derivatif parsial untuk suatu fungsi dari dua atau lebih variabel bebas. Tingkat derivatif parsial tertinggi merupakan tingkat persamaan diferensial parsial tersebut. Sedangkan pangkat tertinggi dari order tertinggi merupakan derajat dari persamaan diferensial tersebut. (Soecharjo, 1996)

Notasi untuk turunan parsial, jika $z = f(x, y)$, maka,

$$f_x(x, y) = f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = f_1 = D_1 f = D_x f \quad (2.2)$$

$$f_y(x, y) = f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = f_2 = D_2 f = D_y f \quad (2.3)$$

Dari notasi turunan tersebut di atas, maka dapat diketahui turunan dari turunan parsial dari $z = f(x, y)$ yaitu:

1. Untuk mencari f_x , pandang y sebagai konstanta dan diferensialkan $f(x, y)$ terhadap x

2. Untuk mencari f_y , pandang x sebagai konstanta dan diferensialkan $f(x, y)$ terhadap y (Stewart, 2003: 353).

Untuk turunan yang lebih tinggi, jika f adalah fungsi dari dua variabel, maka turunan parsialnya f_x dan f_y juga fungsi dua variabel. Sehingga, dapat ditinjau turunan parsial dari $(f_x)_x, (f_y)_y, (f_y)_x$ dan $(f_x)_y$ yang disebut turunan parsial kedua dari f . Jika $z = f(x, y)$, dengan menggunakan notasi tersebut maka,

$$(f_x)_x = f_{xx} = f_{11} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \quad (2.4)$$

$$(f_x)_y = f_{xy} = f_{12} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \quad (2.5)$$

$$(f_y)_x = f_{yx} = f_{21} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \quad (2.6)$$

$$(f_y)_y = f_{yy} = f_{22} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \quad (2.7)$$

Dari notasi f_{xy} (atau $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$) berarti bahwa dideferensialkan terhadap x kemudian terhadap y . Sedangkan dalam menghitung f_{yx} urutannya dibalik (Stewart, 2003: 357).

2.2 Persamaan Diferensial Parsial Linier dan Nonlinier

Persamaan diferensial parsial (PDP) diklasifikasikan menjadi PDP linier dan nonlinier.

$$\begin{aligned} &A(x, y)u_{xx}(x, y) + 2B(x, y)u_{xy}(x, y) + C(x, y)u_{yy}(x, y) + \\ &D(x, y)u_x(x, y) + E(x, y)u_y(x, y) + F(x, y)u(x, y) = G(x, y) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Linieritas dari PDP ditentukan oleh fungsional dari koefisien $A(x, y), B(x, y), C(x, y), D(x, y), E(x, y), F(x, y)$, dan $G(x, y)$. Jika koefisien-koefisien tersebut konstanta atau hanya tergantung pada variabel bebas, $[F(x, y) = 0]$, maka PDP tersebut adalah linier (Zauderer, 2006: 66). Jika koefisien-koefisien merupakan fungsi dari turunan pertama dan kedua $[F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}) = 0]$, maka PDP adalah nonlinier (Zauderer, 2006: 102). Untuk lebih jelasnya perhatikan beberapa PDP berikut:

- a. $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (Linier)
- b. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u = \sin x$ (Linier)
- c. $\frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} y + u = 1$ (Nonlinier)
- d. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u^2 = 0$ (Nonlinier)

2.3 Orde Persamaan Diferensial Parsial

Orde suatu persamaan diferensial adalah turunan tertinggi yang muncul dalam persamaan tersebut (Stewart, 2003: 5). Persamaan diferensial parsial dengan dua variabel bebas dikatakan berorde satu jika turunan tertinggi dari variabel terikatnya adalah satu. Bentuk umum persamaan diferensial parsial linier dan nonlinier berorde satu adalah:

$$a(x, t) \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} + b(x, t) \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = c(x, t)v(x, t) + d(x, t) \quad (2.9)$$

di mana a, b, c , dan d adalah fungsi dan di setiap titik (x, t) merupakan vektor $[a(x, t), b(x, t)]$ yang terdefinisi dan tidak nol. Persamaan (2.9) dapat ditulis dalam bentuk:

$$F(x, t, v(x, t), v_x(x, t), v_t(x, t)) = 0$$

di mana $v_x(x, t) = \frac{\partial v(x, t)}{\partial x}$ dan $v_t(x, t) = \frac{\partial v(x, t)}{\partial t}$ (Zauderer, 2006: 63).

Demikian halnya dengan persamaan diferensial parsial dengan dua variabel bebas dikatakan berorde dua, tiga, empat hingga berorde m jika turunan tertinggi dari variabel terikatnya adalah dua, tiga, empat atau m . Bentuk umum persamaan diferensial parsial linier dan nonlinier berorde dua, tiga, empat dan berorde n :

$$\left. \begin{aligned} \text{(i).} \quad & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu + d = 0 \\ \text{(ii).} \quad & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ijk} \frac{\partial^3 u}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \\ & \sum_{i=1}^n c_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + du + e = 0 \\ \text{(iii).} \quad & \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \sum_{i_3=1}^n \sum_{i_4=1}^n a_{i_1 i_2 i_3 i_4} \frac{\partial^4 u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \partial x_{i_3} \partial x_{i_4}} + \\ & \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \sum_{i_3=1}^n b_{i_1 i_2 i_3} \frac{\partial^3 u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \partial x_{i_3}} + \\ & \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n c_{i_1 i_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}} + \sum_{i=1}^n d_{i_1} \frac{\partial u}{\partial x_{i_1}} + eu + f = 0 \\ \text{(iv).} \quad & \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \dots \sum_{i_m=1}^n \sum_{i_4=1}^n a_{i_1, i_2, i_3, \dots, i_m} \frac{\partial^m u}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_m}} + \dots + 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

(Zauderer, 2006: 137).

2.4 Tipe-tipe Dasar dari Persamaan Diferensial Parsial

Suatu klasifikasi penting dalam PDP adalah terdiri dari tipe parabolik, hiperbolik, dan eliptik. Persamaan diferensial parsial linier orde dua atau persamaan (2.8) diklasifikasikan berdasarkan aturan berikut ini:

- a. Persamaan Ellips jika: $B^2 - 4AC < 0$

Contoh: Persamaan Poisson

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + g = 0$$

dan persamaan Laplace

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

- b. Persamaan Parabola jika: $B^2 - 4AC = 0$

Contoh: Persamaan Perambatan Panas

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

- c. Persamaan Hiperbola jika: $B^2 - 4AC > 0$

Contoh: Persamaan Gelombang

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (\text{Triatmojo, 2002:201}).$$

2.5 Solusi Umum dan Solusi Khusus Persamaan Diferensial Parsial

Solusi dari suatu persamaan diferensial adalah suatu fungsi tanpa turunan-turunan dan yang memenuhi persamaan tersebut (Soehardjo, 1996: 93). Dalam solusi persamaan diferensial parsial dikenal istilah solusi umum dan solusi khusus. Solusi umum itu sendiri adalah suatu solusi yang terdiri dari sejumlah

fungsi bebas sembarang yang jumlahnya sesuai dengan orde persamaannya. Sedangkan solusi khusus merupakan suatu solusi yang bisa didapatkan dari solusi umumnya dengan pilihan khusus dari fungsi sebarang (Spiegel, 1983:2). Sebagai contoh $u = x^2y - \frac{1}{2}xy^2 + F(x) + G(y)$ merupakan solusi dari persamaan $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2x - y$. Solusi ini disebut sebagai solusi umum karena terdiri dari dua fungsi bebas sembarang yaitu $F(x)$ dan $G(y)$. secara khusus kalau $F(x) = 2 \sin x$, $G(y) = 3y^4 - 5$, akan ditemukan solusi khususnya sebagai berikut:

$$u = x^2y - \frac{1}{2}xy^2 + 2 \sin x + 3y^4 - 5$$

2.6 Persamaan Linier Homogen dengan Koefisien Konstan

Suatu persamaan diferensial linier homogen orde dua dengan koefisien konstan:

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (2.11)$$

dengan $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, maka solusi umum dari persamaan (2.11) adalah

$$y = c_1y_1 + c_2y_2$$

dengan c_1 dan c_2 konstan.

Selanjutnya jika $y = e^{rx}$ disubstitusikan ke persamaan (2.11) maka diperoleh

$$ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0$$

$$e^{rx}(ar^2 + br + c) = 0 \quad (2.12)$$

Karena e^{rx} tidak mungkin sama dengan nol, maka persamaan (2.12) dibagi dengan e^{rx} , sehingga diperoleh

$$ar^2 + br + c = 0 \quad (2.13)$$

Akibatnya $y = e^{rx}$ adalah solusi untuk persamaan (2.11) jika dan hanya jika r memenuhi persamaan (2.13). Persamaan (2.13) disebut persamaan bantu yang dihubungkan dengan persamaan homogen.

Persamaan bantu tersebut adalah kuadratik, dan akar-akarnya adalah sebagai berikut:

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad \text{dan} \quad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ketika $b^2 - 4ac > 0$, akar r_1 dan r_2 adalah real dan berbeda. Jika $b^2 - 4ac = 0$, maka akar-akarnya real dan sama. Ketika $b^2 - 4ac < 0$ maka akar-akarnya adalah bilangan kompleks konjugat.

Jika persamaan bantunya mempunyai akar-akar real yang berbeda (*distinct real roots*) yaitu akar-akar real r_1 dan r_2 , maka e^{r_1x} dan e^{r_2x} adalah solusi untuk persamaan (2.11). Oleh karena itu, solusi umum dari persamaan (2.11) adalah

$$y(x) = c_1 e^{r_1x} + c_2 e^{r_2x}$$

dengan c_1 dan c_2 konstan.

Jika persamaan bantunya mempunyai akar kembar (*repeated root*) yaitu r , maka solusi untuk persamaan (2.11) adalah e^{rx} dan xe^{rx} , dan solusi umumnya adalah

$$y(x) = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx}$$

dengan c_1 dan c_2 konstan.

Jika persamaan bantunya mempunyai akar-akar kompleks (*complex conjugate roots*) yaitu $\alpha \pm i\beta$, maka solusi untuk persamaan (2.13) adalah

$$e^{\alpha x} \cos \beta x \quad \text{dan} \quad e^{\alpha x} \sin \beta x$$

dan solusi umumnya adalah

$$y(x) = c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$$

dengan c_1 dan c_2 konstan (Nagle, 1993:153-162).

2.7 Masalah Nilai Awal dan Masalah Nilai Batas

Masalah nilai batas (MNB) melibatkan suatu persamaan diferensial parsial dan semua solusinya yang memenuhi syarat yang dinamakan syarat batas (Spiegel, 1983: 276).

Misal persamaan diferensial linier orde dua

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \quad (2.14)$$

dengan koefisien-koefisien $a_2(x), a_1(x), a_0(x)$ dan fungsi $f(x)$ merupakan fungsi-fungsi yang kontinu di dalam selang $a \leq x \leq b$ dengan $a_2(x) \neq 0$ di dalam selang ini. Menentukan solusi $y(x)$ dari persamaan diferensial (2.14) pada suatu titik $x = x_0$ di dalam selang $a \leq x \leq b$ dan memenuhi dua syarat awal yang diberikan

$$y(x_0) = y_0 \text{ dan } y'(x_0) = y_1 \quad (2.15)$$

merupakan suatu *masalah nilai awal* (MNA). Dalam banyak MNA variabel bebas x dari persamaan diferensial pada umumnya menyatakan waktu, x_0 menyatakan waktu awal dan y_0 dan y_1 menyatakan syarat awal. Bila variabel x bebas merupakan variabel yang menyatakan tempat (*space variabel*), maka mencari suatu solusi $y(x)$ dari persamaan diferensial yang memenuhi syarat pada titik akhir dari selang $a \leq x \leq b$

$$y(a) = A \text{ dan } y(b) = B \quad (2.16)$$

dengan A dan B dua buah konstanta, disebut *syarat batas*. Persamaan diferensial (2.14), bersama-sama dengan syarat batas (2.16), merupakan suatu *masalah nilai batas* (MNB). Bentuk dari syarat batas pada titik akhir dapat sangat berbeda-beda (Finizio dan Ladas, 1982: 244).

Ada beberapa bentuk khusus syarat batas yang digunakan dalam aplikasi, yaitu:

$$\begin{aligned}
 \text{Separated} & : a_1 y(a) + a_2 y'(a) = c_1, \\
 & b_1 y(b) + b_2 y'(b) = c_2, \\
 \text{Dirichlet} & : y(a) = c_1, y(b) = c_2 \\
 \text{Neumann} & : y'(a) = c_1, y'(b) = c_2 \\
 \text{Periodic} & : y(-T) = y(T), y'(-T) = y'(T) \\
 & y(0) = y(2T), y'(0) = y'(2T)
 \end{aligned}$$

dengan periodenya adalah $2T$. Bentuk Dirichlet dan Neumann adalah syarat batas yang khusus digunakan pada masalah nilai batas (Nagle, 1996: 612).

Contoh:

Pandang suatu persamaan:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \quad (2.17)$$

dengan syarat batas

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t > 0 \quad (2.18)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L \quad (2.19)$$

Misal:

$$u(x, t) = X(x)T(t) \quad (2.20)$$

Maka $\frac{\partial u}{\partial t} = X(x)T'(t)$ dan $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x)T(t)$. (2.21)

Substitusi (2.21) ke persamaan (2.17) menghasilkan

$$X(x)T'(t) = \beta X''(x)T(t)$$

dan pemisahan variabelnya menghasilkan

$$\frac{T'(t)}{\beta T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Selanjutnya

$$\frac{T'(t)}{\beta T(t)} = K \text{ dan } \frac{X''(x)}{X(x)} = K$$

atau

$$T'(t) - \beta K T(t) = 0 \text{ dan } X''(x) - K X(x) = 0 \quad (2.22)$$

Karena persamaan (2.20) maka syarat batas (2.18) menjadi

$$X(0)T(t) = 0 \text{ dan } X(L)T(t) = 0, \quad t > 0$$

$$\text{Karena } T(t) = 0, \quad t > 0 \text{ maka } u(x, t) \equiv 0 \text{ atau } X(0) = X(L) = 0 \quad (2.23)$$

Dengan mengombinasikan kondisi batas (2.23) dengan persamaan diferensial untuk X di (2.22) maka

$$X''(x) - K X(x) = 0, \quad X(0) = X(L) = 0 \quad (2.24)$$

Untuk menyelesaikan persamaan (2.24) maka bentuk persamaan diferensial biasa dibentuk menjadi persamaan bantu: $r^2 - K = 0$ sehingga terdapat tiga kasus,

Kasus 1: Jika $K > 0$, maka akar-akarnya adalah $\pm\sqrt{K}$. Maka solusi umum dari persamaan (2.24) adalah

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{K}x} + C_2 e^{-\sqrt{K}x}$$

Untuk menentukan C_1 dan C_2 maka dikombinasikan dengan syarat batasnya sehingga:

$$X(0) = C_1 + C_2 = 0 \text{ atau } C_2 = -C_1$$

dan $X(L) = C_1 e^{\sqrt{K}L} + C_2 e^{-\sqrt{K}L} = 0$. Karena $C_2 = -C_1$ maka:

$$C_1(e^{\sqrt{K}L} - e^{-\sqrt{K}L}) = 0$$

Kedua ruas dikali $e^{\sqrt{K}L}$ maka:

$$C_1(e^{2\sqrt{K}L} - 1) = 0$$

Karena $K > 0$ maka $(e^{2\sqrt{K}L} - 1) > 0$ sehingga $C_1 = C_2 = 0$ mengakibatkan tidak ada solusi nontrivial untuk $K > 0$.

Kasus 2: Jika $K = 0$. Maka akar-akarnya adalah kembar, $r = 0$. Maka solusi umum dari persamaan (2.24) adalah

$$X(x) = C_1 + C_2 x$$

Syarat batas pada persamaan (2.24) menghasilkan $C_1 = 0$ dan $C_1 + C_2 L = 0$. Sehingga $C_1 = C_2 = 0$. Karena $K = 0$ maka tidak ada solusi nontrivial untuk persamaan (2.24).

Kasus 3: Jika $K < 0$. Maka akar-akarnya adalah $\pm i\sqrt{-K}$. Maka solusi umum dari persamaan (2.24) adalah

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{-K}x + C_2 \sin \sqrt{-K}x$$

Karena syarat batas pada persamaan (2.24) dengan $C_1 = 0$ maka menghasilkan

$$C_2 \sin \sqrt{-K}x = 0$$

Maka $C_2 = 0$ atau $\sin \sqrt{-K}x = 0$. $\sin \sqrt{-K}x = 0$ hanya ketika $\sqrt{-K}x = n\pi$ atau

$$K = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \text{ dengan } n = 1, 2, 3, \dots$$

Maka solusi nontrivial-nya adalah

$$X_n(x) = a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

dengan a_n adalah konstan.

Karena $K = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ maka persamaan untuk T di (2.22) menjadi

$$T'(t) + \beta \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 T(t) = 0$$

Untuk setiap $n = 1, 2, 3, \dots$

Maka solusi umum nya adalah

$$T_n(t) = b_n e^{-\beta \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$$

Menghasilkan solusi

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) b_n e^{-\beta \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} = c_n e^{-\beta \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

dengan c_n adalah konstan (Nagle, hal 536-539).

2.8 Nilai Eigen dan Fungsi Eigen

Dalam bahasa Jerman “*eigen*” dapat diartikan dengan sebenarnya atau karakteristik. Oleh karena itu nilai *eigen* dapat juga dinamakan nilai sebenarnya atau nilai karakteristik (Anton, 1987:277). Semua nilai *eigen* λ adalah real (Folland dalam Sutrima, 2004)

Jika A adalah matriks $n \times n$, maka vektor tak nol $\mathbf{x}$ di dalam R^n disebut *vektor eigen* (*eigenvector*) dari A jika $A\mathbf{x}$ adalah suatu kelipatan skalar dari $\mathbf{x}$, yaitu $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ untuk suatu skalar sebarang λ . Skalar λ disebut nilai *eigen*

(*eigenvalue*) dari A dan $\mathbf{x}$ disebut sebagai vektor *eigen* dari A yang terkait dengan λ (Anton, 2000: 384)

Untuk memperoleh nilai *eigen* dari suatu matriks A yang berukuran $n \times n$, maka $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ dituliskan sebagai $A\mathbf{x} = \lambda I\mathbf{x}$ atau $(\lambda I - A)\mathbf{x} = 0$. Agar λ menjadi nilai *eigen*, maka harus ada pemecahan tak nol dari persamaan $(\lambda I - A)\mathbf{x} = 0$. Akan tetapi karena $\det(A) \neq 0$, maka persamaan $(\lambda I - A)\mathbf{x} = 0$ akan mempunyai solusi tak nol jika dan hanya jika

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

yang disebut dengan persamaan karakteristik matriks A . Skalar yang memenuhi persamaan ini adalah nilai *eigen* dari A .

Bila diperluas, maka $\det(\lambda I - A) = 0$ adalah polynomial p dalam variabel λ yang disebut polinomial karakteristik matriks A .

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \dots + c_n \quad (\text{Anton, 2000:385})$$

Jika A adalah suatu matriks $n \times n$ dan λ adalah suatu bilangan real maka pernyataan-pernyataan berikut ini adalah ekuivalen:

1. λ adalah nilai *eigen* dari A
2. Sistem persamaan $(\lambda I - A)\mathbf{x} = 0$ memiliki solusi nontrivial
3. Ada vektor tak nol $\mathbf{x}$ di dalam R^n sehingga $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$
4. λ adalah solusi dari persamaan karakteristik $\det(\lambda I - A) = 0$

(Anton, 2000: 388).

2.9 Metode Pemisahan Variabel Persamaan Diferensial Parsial Nonlinier

Metode pemisahan variabel adalah teknik klasik yang efektif untuk menyelesaikan beberapa tipe dari persamaan diferensial parsial. Misalnya saja solusi $u(x, t)$ untuk persamaan diferensial parsial sebagai kombinasi linier tak hingga fungsi komponen sederhana $u_n(x, t)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ yang juga memenuhi persamaan dan kondisi batasnya (Nagle, 1993:536).

Untuk menentukan solusi komponen $u_n(x, t)$, pertama misalkan $u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t)$. Selanjutnya dilakukan proses substitusi dari bentuk ini ke persamaan diferensial dan dengan menggunakan kondisi batasnya yang nantinya menghasilkan dua persamaan diferensial biasa untuk fungsi $X_n(x)$ dan $T_n(t)$. Dengan cara ini akan dihasilkan solusi untuk persamaan diferensial parsial (Nagle, 1993:536).

Pemisahan dari variabel-variabel adalah pendekatan yang biasanya digunakan untuk menyelesaikan persamaan linier dari model matematik fisika yang dihadapi. Untuk persamaan-persamaan yang melibatkan dua variabel bebas x, y dan variabel tidak bebas w , maka pendekatan ini merujuk pada pencarian solusi analitik dalam bentuk perkalian fungsi-fungsi yang bergantung pada argumen-argumen yang berbeda yaitu

$$w(x, t) = \varphi(x)\psi(t) \quad (2.25)$$

Integral untuk beberapa kelas khusus dari persamaan diferensial parsial nonlinier orde satu berdasarkan mencari solusi analitik dalam bentuk penjumlahan fungsi-fungsi yang bergantung pada argumen-argumen yang berbeda.

$$w(x, t) = \varphi(x) + \psi(t) \quad (2.26)$$

Untuk orde dua dan yang lebih tinggi maka solusi analitiknya boleh menggunakan bentuk (2.25) dan (2.26) juga. Masing-masing solusi disebut solusi perkalian fungsi-fungsi terpisah dan penjumlahan fungsi-fungsi terpisah (Polyanin dan Zaitsev, 2003).

Dalam kasus yang jarang terjadi, pemisahan variabel dalam persamaan nonlinier dilakukan dengan menggunakan teknik yang sama seperti persamaan linier. Secara khusus, solusi analitik adalah menemukan dalam bentuk perkalian atau penjumlahan fungsi-fungsi yang bergantung pada argumen-argumen yang berbeda. Solusi analitik tersebut disubstitusikan pada persamaan dan melakukan prosedur manipulasi aljabar dasar, sehingga menghasilkan suatu persamaan yang melibatkan dua sisi bebas dari variabel berbeda (untuk persamaan dengan dua variabel). Kemudian disimpulkan bahwa masing-masing sisi harus sama dengan konstanta yang sama hal ini disebut pemisahan konstanta.

Contoh:

Persamaan gelombang dengan nonlinier eksponensial.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{\lambda w} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (2.27)$$

Mempunyai solusi pemisahan penjumlahan. Dengan mensubstitusikan (2.26) ke (2.27) dan dibagi dengan $e^{\lambda \psi}$, maka diperoleh persamaan:

$$e^{-\lambda \psi} \psi''_{tt} = a(e^{\lambda \varphi} \varphi'_x)'_x$$

Kemudian masing-masing dipisahkan dan disamadengankan konstanta (C):

$$e^{-\lambda \psi} \psi''_{tt} = C \quad \text{dan} \quad a(e^{\lambda \varphi} \varphi'_x)'_x = C \quad (2.28)$$

Solusi PDB dari bentuk (2.28) menghasilkan suatu solusi dari persamaan (2.27) dengan bentuk (2.26) (Polyanin dan Zaitsev, 2003).

2.10 Struktur Solusi Pemisahan Secara Umum

Pemisahan persamaan linier dari matematika fisika mempunyai solusi analitik dalam bentuk:

$$w(x, y) = \varphi_1(x)\psi_1(y) + \varphi_2(x)\psi_2(y) + \dots + \varphi_n(x)\psi_n(y) \quad (2.29)$$

Dengan $w_i = \varphi_i(x)\psi_i(y)$ adalah solusi partikular, fungsi $\varphi_i(x)$ dan $\psi(y)$ dengan i yang berbeda tidak berhubungan satu sama lain.

Persamaan diferensial parsial nonlinier dengan nonlinier kuadratik atau *power*

$$f_1(x)g_1(y) \prod_1 [w] + f_2(x)g_2(y) \prod_2 [w] + \dots + f_m(x)g_m(y) \prod_m [w] = 0 \quad (2.30)$$

Juga mempunyai solusi analitik bentuk (2.29). Pada bentuk (2.30) $\prod_i [w]$ adalah bentuk-bentuk diferensial yang merupakan perkalian-perkalian bilangan bulat *power* non-negatif dari fungsi w dan turunan parsialnya yaitu $\partial_x w, \partial_y w, \partial_{xx} w, \partial_{xy} w, \partial_{yy} w, \partial_{xxx} w$ dll. Sehingga solusi pemisahan secara umum untuk persamaan (2.29) adalah persamaan (2.30). Tidak seperti persamaan linier, pada persamaan nonlinier fungsi $\varphi_i x$ dengan indeks i yang berbeda biasanya berhubungan satu sama lain [dan untuk fungsi $\psi_j(y)$]. Secara umum, fungsi $\varphi_i(x)$ dan $\psi_j(y)$ dalam (2.29) tidak diperkenalkan di awal dan harus diidentifikasi.

Solusi bentuk khususnya adalah:

$$w(x, y) = \varphi(x)\psi(y) + \chi(x);$$

variabel bebas di sisi kanan dapat ditukarkan. Dalam kasus khusus $\chi(x) = 0$, untuk perkalian solusi-solusi terpisah, dan jika $\chi(x) = 1$, untuk penjumlahan solusi-solusi terpisah (Polyanin dan Zaitsev, 2003).

2.11 Bentuk Umum dari Persamaan Diferensial Fungsional

Secara umum, dari substitusi bentuk (2.29) pada persamaan diferensial (2.30) diperoleh persamaan diferensial fungsional

$$\Phi_1(X)\Psi_1(Y) + \Phi_2(X)\Psi_2(Y) + \dots + \Phi_k(X)\Psi_k(Y) = 0 \quad (2.31)$$

Untuk $\varphi_i(x)$ dan $\psi_i(y)$. Fungsional $\Phi_j(X)$ dan $\Psi_j(Y)$ masing-masing bergantung pada x dan y ,

$$\begin{aligned} \Phi_j(X) &= \Phi_j(x, \varphi_1, \varphi'_1, \varphi''_1, \dots, \varphi_n, \varphi'_n, \varphi''_n) \\ \Psi_j(Y) &= \Psi_j(y, \psi_1, \psi'_1, \psi''_1, \dots, \psi_n, \psi'_n, \psi''_n) \end{aligned} \quad (2.32)$$

Rumus ini untuk menyelesaikan persamaan orde dua (2.30); untuk persamaan orde tinggi, sisi kanan persamaan (2.32) akan berisi turunan orde tinggi dari φ_i dan ψ_j (Polyanin dan Zaitsev, 2003).

2.12 Solusi Persamaan Diferensial Fungsional dengan Diferensiasi

Prosedur untuk mengkonstruksi solusi persamaan diferensial fungsional meliputi tiga tahap berikut, yaitu:

1. Asumsikan bahwa $\Psi_k \neq 0$. Persamaan (2.31) dibagi dengan Ψ_k dan diturunkan terhadap y . sehingga menghasilkan persamaan yang serupa tetapi dengan bentuk yang lebih sederhana. $\tilde{\Phi}_1(X)\tilde{\Psi}_1(Y) + \tilde{\Phi}_2(X)\tilde{\Psi}_2(Y) + \dots + \tilde{\Phi}_{k-1}(X)\tilde{\Psi}_{k-1}(Y) = 0$

$$\tilde{\Phi}_j(X) = \Phi_j(X), \quad \tilde{\Psi}_j(Y) = \left[\frac{\Psi_j(Y)}{\Psi_k(Y)} \right]'_y$$

prosedur di atas diteruskan sampai memperoleh dua bentuk persamaan pemisahan,

$$\hat{\Phi}_1(X)\hat{\Psi}_1(Y) + \hat{\Phi}_2(X)\hat{\Psi}_2(Y) = 0 \quad (2.33)$$

Dimisalkan tiga kasus. Kasus *nondegenerate*: $|\hat{\Phi}_1(X)| + |\hat{\Phi}_2(X)| \neq 0$ dan $|\hat{\Psi}_1(Y)| + |\hat{\Psi}_2(Y)| \neq 0$. Maka persamaan (2.33) ekuivalen dengan Persamaan diferensial biasa.

$$\hat{\Phi}_1(X) + C\hat{\Phi}_2(X) = 0, \quad C\hat{\Psi}_1(Y) - \hat{\Psi}_2(Y) = 0$$

dengan C adalah sebarang konstanta. Persamaan $\hat{\Phi}_2 = 0$ dan $\hat{\Psi}_1 = 0$ sesuai dengan kasus limit $C = \infty$.

Kasus *two degenerate*:

$$\hat{\Phi}_1(X) \equiv 0, \quad \hat{\Phi}_2(X) \equiv 0 \Rightarrow \hat{\Psi}_{1,2}(Y) \text{ are any:}$$

$$\hat{\Psi}_1(Y) \equiv 0, \quad \hat{\Psi}_2(Y) \equiv 0 \Rightarrow \hat{\Phi}_{1,2}(X) \text{ are any.}$$

2. Solusi dua bentuk persamaan (2.33) harus disubstitusikan ke persamaan diferensial fungsional-asli (2.31) untuk menghilangkan konstanta yang berlebihan dari pengintegralan [ini muncul karena persamaan (2.33) yang diperoleh dari (2.31) dengan diferensiasi]
3. Kasus $\Psi_k \equiv 0$ harus diperlakukan secara terpisah (karena persamaan dibagi dengan $\Psi_k \equiv 0$ pada tahap pertama). Demikian juga, semua kasus-kasus lain harus dipelajari di mana fungsional dari persamaan diferensial fungsional menengah (*intermediate*) yang telah dibagi itu habis.

(Polyanin dan Zaitsev, 2003)

2.13 Solusi Persamaan Diferensial Fungsional dengan *Splitting*

Penyederhanaan persamaan diferensial fungsional (2.31)-(2.32) dengan diferensiasi, menyebabkan adanya konstanta yang berlebihan dari pengintegralan. Konstanta tersebut harus dihilangkan pada saat tahap akhir. Selain itu, persamaan yang dihasilkan mungkin saja memiliki orde yang lebih tinggi daripada persamaan asli. Untuk menghindari kesulitan-kesulitan ini, solusi persamaan diferensial fungsional dibawa ke solusi persamaan fungsional bilinear standar dan solusi sistem persamaan diferensial biasa. Dengan demikian masalah asli dibagi menjadi dua masalah sederhana.

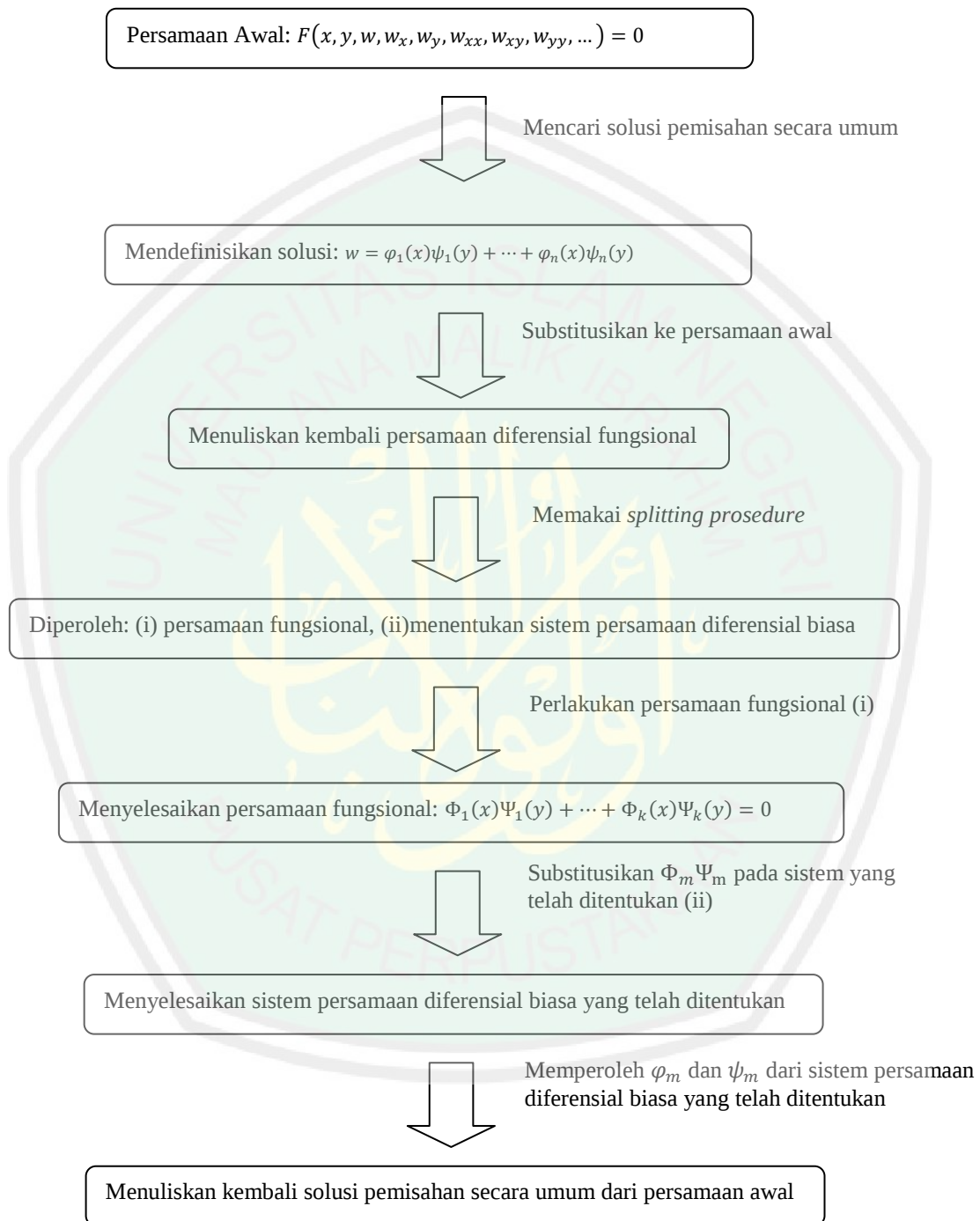
Di bawah ini, merupakan langkah-langkah dasar metode *splitting*.

1. Pada tahap pertama persamaan (2.31) dikerjakan sebagai persamaan fungsional murni yang bergantung pada dua variabel X dan Y , dengan $\Phi_n = \Phi_n(X)$ dan $\Psi_n = \Psi_n(Y)$ tidak diketahui jumlahnya ($n = 1, \dots, k$). Sehingga dapat ditunjukkan bahwa persamaan fungsional bilinear (2.31) memiliki solusi yang berbeda untuk $k-1$:

$$\begin{aligned}\Phi_i(X) &= C_{i,1}\Phi_{m+1}(X) + C_{i,2}\Phi_{m+2}(X) + \dots + C_{i,k-m}\Phi_k(X), \quad i = 1, \dots, m; \\ \Psi_{m+j}(Y) &= -C_{1,j}\Psi_1(Y) - C_{2,j}\Psi_2(Y) - \dots - C_{m,j}\Psi_m(Y), \quad j = 1, \dots, k-m; \\ m &= 1, 2, \dots, k-1\end{aligned}\tag{2.34}$$

Dengan $C_{i,j}$ adalah sebarang konstanta

2. Pada tahap kedua, substitusikan $\Phi_i(X)$ dan $\Psi_j(Y)$ secara berturut-turut dari (2.32) ke semua solusi (2.34) untuk mendapatkan sistem persamaan diferensial biasa untuk fungsi yang tidak diketahui $\varphi_p(x)$ dan $\psi_q(y)$. Selanjutnya didapatkan solusi pemisahan secara umum dari bentuk (2.29).



Gambar 2.1. Skema Umum untuk Mengkonstruksi Solusi Pemisahan Secara Umum dengan *Splitting Method*.

(Polyanin dan Zaitsev, 2003).

2.14 Solusi dari Persamaan Fungsional Sederhana dan Aplikasinya

1. Persamaan fungsional

$$\Phi_1\Psi_1 + \Phi_2\Psi_2 + \Phi_3\Psi_3 = 0 \quad (2.35)$$

dengan Φ_i adalah semua fungsi dari argumen yang sama dan Ψ_i adalah semua fungsi dari argument lainnya, yang mana mempunyai dua solusi:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= A_1\Phi_3, \quad \Phi_2 = A_2\Phi_3, \quad \Psi_3 = -A_1\Psi_1 - A_2\Psi_2; \\ \Psi_1 &= A_1\Psi_3, \quad \Psi_2 = A_2\Psi_3, \quad \Phi_3 = -A_1\Phi_1 - A_2\Phi_2; \end{aligned} \quad (2.36)$$

Sebarang konstanta diubah namanya menjadi $A_1 = C_{1,1}$ dan $A_2 = C_{2,1}$ pada solusi pertama, dan pada solusi kedua $A_1 = -\frac{1}{C_{1,2}}$ dan $A_2 = \frac{C_{1,1}}{C_{1,2}}$. fungsi dari sisi sebelah kanan persamaan (2.35) diasumsikan sebarang.

2. Persamaan fungsional

$$\Phi_1\Psi_1 + \Phi_2\Psi_2 + \Phi_3\Psi_3 + \Phi_4\Psi_4 = 0 \quad (2.37)$$

dengan Φ_i semua fungsi dari argumen yang sama dan Ψ_i adalah semua fungsi dari argumen lainnya, mempunyai solusi

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= A_1\Phi_3 + A_2\Phi_4, \quad \Phi_2 = A_3\Phi_3 + A_4\Phi_4; \\ \Psi_3 &= -A_1\Psi_1 - A_3\Psi_2, \quad \Psi_4 = -A_2\Psi_1 - A_4\Psi_2; \end{aligned} \quad (2.38)$$

bergantung pada empat konstanta sebarang $A_1, \dots, A_4$; lihat solusi (2.34) dengan $k = 4, m = 2, C_{1,1} = A_1, C_{1,2} = A_2, C_{2,1} = A_3$ dan $C_{2,2} = A_4$.

Fungsi dari sisi kanan persamaan (2.36) diasumsikan sebarang.

Persamaan (2.37) juga mempunyai dua solusi yang lain:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 &= A_1\Phi_4, \quad \Phi_2 = A_2\Phi_4, \quad \Phi_3 = A_3\Phi_4, \quad \Psi_4 = -A_1\Psi_1 - A_2\Psi_2 - A_3\Psi_3; \\ \Psi_1 &= A_1\Psi_4, \quad \Psi_2 = A_2\Psi_4, \quad \Psi_3 = A_3\Psi_4, \quad \Phi_4 = -A_1\Phi_1 - A_2\Phi_2 - A_3\Phi_3; \end{aligned} \right\} \quad (2.39)$$

yang melibatkan tiga konstanta sebarang. Pada solusi pertama $A_1 = C_{1,1}$, $A_2 =$

$C_{2,1}$, dan $A_3 = C_{3,1}$ dan di solusi kedua $A_1 = -\frac{1}{C_{1,3}}$, $A_2 = C_{1,1}/C_{1,3}$ dan $A_3 = \frac{C_{1,2}}{C_{1,3}}$.

Solusi (2.39) terkadang disebut *degenerated*, untuk menegaskan fakta bahwa solusi (2.39) memuat lebih sedikit konstanta sebarang daripada solusi (2.38).

Contoh: Persamaan nonlinier

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - w \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = v \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \quad (2.40)$$

Solusi analitiknya dicari dari bentuk

$$w = \varphi(t)\theta(x) + \psi(t) \quad (2.41)$$

Substitusi (2.41) ke dalam persamaan (2.40) sehingga menghasilkan

$$\varphi'_t \theta'_x - \varphi \psi \theta''_{xx} + \varphi^2 [(\theta'_x)^2 - \theta \theta''_{xx}] - v \varphi \theta'''_{xxx} = 0$$

Persamaan diferensial fungsional ini dapat dikurangi ke persamaan (2.37) dengan

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1 &= \varphi'_t, \quad \Phi_2 = \varphi \psi, \quad \Phi_3 = \varphi^2, \quad \Phi_4 = v \varphi, \\ \Psi_1 &= \theta'_x, \quad \Psi_2 = -\theta''_{xx}, \quad \Psi_3 = (\theta'_x)^2 - \theta \theta''_{xx}, \quad \Psi_4 = -\theta'''_{xxx} \end{aligned} \right\} \quad (2.42)$$

Dari substitusi (2.42) ke persamaan (2.38) diperoleh sistem persamaan

$$\left. \begin{aligned} \varphi'_t &= A_1 \varphi^2 + A_2 v \varphi, \quad \varphi \psi = A_3 \varphi^2 + A_4 v \varphi, \quad (\theta'_x)^2 - \theta \theta''_{xx} = -A_1 \theta'_x + A_3 \theta''_{xx}, \\ \theta'''_{xxx} &= A_2 \theta'_x - A_4 \theta''_{xx} \end{aligned} \right\} \quad (2.43)$$

Ini dapat ditunjukkan bahwa dua persamaan terakhir di (2.43) adalah konsisten jika dan hanya jika fungsi θ dan turunannya bergantung linier.

$$\theta'_x = B_1 \theta + B_2 \quad (2.44)$$

enam konstanta B_1, B_2, A_1, A_2, A_3 , dan A_4 harus memenuhi tiga kondisi

$$\left. \begin{aligned} B_1(A_1 + B_2 - A_3B_1) &= 0, \\ B_2(A_1 + B_2 - A_3B_1) &= 0, \\ B_1^2 + A_4B_1 - A_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.45)$$

Integralkan (4.44) sehingga menghasilkan

$$\theta = \begin{cases} B_3 \exp(B_1x) - \frac{B_2}{B_1}, & \text{jika } B_1 \neq 0 \\ B_2x + B_3, & \text{jika } B_1 = 0 \end{cases} \quad (2.46)$$

dengan B_3 adalah sebarang konstanta.

Dua persamaan pertama di (2.43) menyebabkan φ dan ψ :

$$\varphi = \begin{cases} \frac{A_2v}{C \exp(-A_2vt) - A_1}, & \text{jika } A_2 \neq 0 \\ -\frac{1}{A_1t + C}, & \text{jika } A_2 = 0 \end{cases} \quad \psi = A_3\varphi + A_4v \quad (2.47)$$

dengan C adalah sebarang konstanta.

Formula (2.46), (2.47) dengan relasi (2.45) mengakibatkan diperolehnya solusi persamaan (2.40) dalam bentuk (2.41):

$$w = \frac{x+C_1}{t+C_2} + C_3, \text{ jika } A_2 = B_1 = 0, B_2 = -A_1$$

$$w = \frac{C_1 e^{-\lambda x} + 1}{\lambda t + C_2} + v\lambda, \text{ jika } A_2 = 0, B_1 = -A_4, B_2 = -A_1 - A_3A_4$$

$$w = C_1 e^{-\lambda(x+\beta vt)} + v(\lambda + \beta), \text{ jika } A_1 = A_3 = B_2 = 0, A_2 = B_1^2 + A_4B_1$$

$$w = \frac{v\beta + C_1 e^{-\lambda x}}{1 + C_2 e^{\lambda x} - v\lambda\beta t} + v(\lambda - \beta), \text{ jika } A_1 = A_3B_1 - B_2, A_2 = B_1^2 + A_4B_1$$

dengan C_1, C_2, C_3, β , dan λ sebarang konstanta.

Analisis dari solusi kedua persamaan (2.39) dari persamaan fungsional (2.37)

menyebabkan solusi persamaan diferensial (2.40) lebih dari dua:

$$w = \frac{x}{t + C_1} + \psi(t), \quad w = \varphi(t)e^{-\lambda x} - \frac{\varphi_t'(t)}{\lambda\varphi(t)} + v\lambda$$

dengan $\varphi(t)$ dan $\psi(t)$ sebarang fungsi, dan C_1 dan λ adalah sebarang konstanta (Polyanin dan Zaitsev, 2003).

2.15 Penyederhanaan Skema untuk Mengkonstruksi Solusi Pemisahan Secara Umum

Untuk membangun solusi analitik dari persamaan (2.30) dengan nonlinier kuadratik atau *power* yang tidak bergantung secara eksplisit pada x (semua f_i konstan), ini masuk akal untuk menggunakan pendekatan yang disederhanakan berikut. Seperti sebelumnya, mencari solusi dalam bentuk penjumlahan terbatas (2.29). Asumsikan bahwa sistem koordinat fungsi $\{\varphi_i(x)\}$ diatur oleh persamaan diferensial linier dengan koefisien konstan. Solusi yang paling umum untuk persamaan tersebut adalah bentuk:

$$\varphi_i(x) = x^i, \varphi_i(x) = e^{\lambda_i x}, \varphi_i(x) = \sin(\alpha_i x), \varphi_i(x) = \cos(\beta_i x) \quad (2.48)$$

Rangkaian fungsi ini terhingga (dalam berbagai kombinasi) dapat digunakan untuk mencari solusi pemisahan (2.29), dengan λ_i, α_i , dan β_i dianggap sebagai parameter bebas. Sistem fungsi lain $\{\varphi_i(y)\}$ ditentukan dengan menyelesaikan persamaan nonlinier karena mengganti (2.29) ke dalam persamaan yang dipertimbangkan (Polyanin dan Zaitsev, 2003).

2.16 Metode Pemisahan Variabel Fungsional

Struktur penyelesaian terpisah fungsional adalah misalkan persamaan linier untuk $w = w(x, y)$ yang diperoleh dari persamaan linier fisika matematika untuk $z = z(x, y)$ dengan perubahan nonlinier dalam variabel $w = F(z)$.

Kemudian, jika persamaan linier untuk z mengakui solusi terpisah, persamaan nonlinier yang ditransformasikan untuk w akan mempunyai solusi analitik dari bentuk

$$w(x, y) = F(z), \text{ dengan } z = \sum_{m=1}^n \varphi_m(x) \psi_m(y). \quad (2.50)$$

Namun, masih adas banyak persamaan diferensial nonlinier yang tidak dapat direduksi menjadi persamaan linier yang memiliki solusi analitik dari bentuk (2.50). Penyelesaian-penyelesaian tersebut disebut penyelesaian terpisah fungsional. Secara umum, fungsi-fungsi $\varphi_m(x), \psi_m(y)$, dan $F(z)$ pada (2.50) tidak diketahui sebelumnya dan harus diidentifikasi.

Gagasan utama, persamaan diferensial fungsional yang dihasilkan dari substitusi persamaan (2.50) dalam persamaan diferensial parsial asli direduksi ke bentuk persamaan fungsional bilinear standar.

Keterangan 1: Dalam pemisahan variabel fungsional, mencari solusi dalam bentuk $w = F(\varphi(x) + \psi(y))$ dan $w = F(\varphi(x)\psi(y))$ menghasilkan hasil yang setara, karena dua bentuk adalah ekuivalen secara fungsional. Oleh karena itu, $F(\varphi(x)\psi(y)) = F(\varphi(x) + \psi(y))$, dengan $F_1(z) = F(e^z)$, $\varphi_1(x) = \ln \varphi(x)$, dan $\psi_1(y) = \ln \psi(y)$.

Keterangan 2: Dalam mengkonstruksi solusi pemisahan fungsional dengan bentuk $w = F(\varphi(x) + \psi(y))$, diasumsikan bahwa φ dan ψ tidak konstan.

Keterangan 3: Fungsi $F(z)$ bisa dihitung dengan persamaan diferensial biasa atau dengan *overdetermined system* dari persamaan; keduanya mungkin dipakai.

Untuk mempermudah analisis pencarian penyelesaian terpisah fungsional khusus, beberapa dari fungsi di persamaan (2.50) bisa disingkat suatu priori dan fungsi yang lain yang akan didefinisikan yang disebut penyelesaian pemisahan fungsional khusus.

Pemisahan fungsional khusus dari bentuk persamaan (2.50) dalam kasus khusus dengan komposit argumen adalah linier di salah satu variabel bebas (misal: di x). Substitusikan persamaan (2.50) ke persamaan yang dipelajari dan mengeliminasi x menggunakan ekspresi dari z untuk mendapatkan persamaan diferensial fungsional dengan dua argumen.

Berikut adalah solusi sederhana pemisahan fungsional dari bentuk khusus (x dan y dapat ditukar):

$$w = F(z), \quad z = \psi_1(y)x + \psi_2(y) \quad (z \text{ adalah linier di } x);$$

$$w = F(z), \quad z = \psi_1(y)x^2 + \psi_2(y) \quad (z \text{ adalah kuadrat di } x);$$

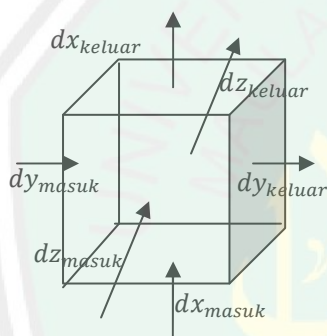
$$w = F(z), \quad z = \psi_1(y)e^{\lambda x} + \psi_2(y) \quad (z \text{ memuat eksponensial } x).$$

Solusi pertama akan disebut solusi perjalanan gelombang (*traveling-wave*) umum. Dalam rumus terakhir, $e^{\lambda x}$ dapat diganti dengan $\cosh(ax + b)$, $\sinh(ax + b)$, atau $\sin(ax + b)$ untuk mendapatkan 3 modifikasi yang lain.

Setelah mensubstitusikan sembarang pernyataan diatas ke persamaan dasar, hilangkan x dengan bantuan pernyataan z . Ini akan menghasilkan suatu persamaan diferensial fungsional dengan dua argumen, y dan z (Polyanin dan Zaitsev, 2003).

2.17 Persamaan Diferensial Kekekalan Massa

Semua persamaan diferensial gerak dasar fluida dapat diturunkan dengan meninjau suatu volume keunsuran atau suatu sistem keunsuran. Disini dipilih suatu volume kendali keunsuran yang letaknya tetap (dx , dy , dz), perhatikan gambar di bawah ini:



Gambar 2.2 Volume Kendali

Tabel 2.1 Flux massa

Sisi	Massa Masuk	Massa Keluar
x	$\rho u dy dz$	$\left[\rho u + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) dx \right] dy dz$
y	$\rho v dx dz$	$\left[\rho v + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) dy \right] dx dz$
z	$\rho w dx dy$	$\left[\rho w + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) dz \right] dx dy$

Dengan memperhatikan hukum kekekalan massa untuk volume kendali yang tetap:

$$\iiint_{VK} \frac{\partial \rho}{\partial t} dv + \sum (\rho_i A_i V_i)_{keluar} - \sum (\rho_i A_i V_i)_{masuk} = 0 \quad (2.51)$$

Unsur itu sedemikian kecilnya sehingga integral volumenya menjadi suatu suku diferensial:

$$\iiint_{VK} \frac{\partial \rho}{\partial t} dv \approx \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz \quad (2.52)$$

Jika suku-suku dalam persamaan (2.52) serta data pada flux massa masuk dan massa keluar disubstitusikan ke persamaan (2.51), maka:

$$\frac{\partial p}{\partial t} dxdydz + \left[\rho u dydz + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) dxdydz + \rho v dx dz + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) dxdydz + \rho w dxdy + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) dxdydz \right] - [\rho u dydz + \rho v dx dz + \rho w dxdy] = 0$$

sehingga diperoleh:

$$\frac{\partial p}{\partial t} dxdydz + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) dxdydz + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) dxdydz + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) dxdydz = 0 \quad (2.53)$$

Dengan menghilangkan volume unsur $dxdydz$ maka dapat dituliskan:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0 \quad (2.54)$$

Ditinjau definisi operasi grid (dalam notasi vektor), yaitu:

$$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.55)$$

Maka diperoleh persamaan kontinu:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) = 0 \quad (2.56)$$

(John, 1999)

2.18 Aliran Tak Termampatkan (*Incompressible Flow*)

Dalam kasus aliran tak termampatkan ini memberikan banyak penyederhanaan, salah satunya adalah perubahan kecepatannya dapat diabaikan.

Maka $\frac{\partial \rho}{\partial t} \approx 0$, tidak tergantung apakah alirannya steady atau tidak steady, sehingga kerapatan itu dapat dikeluarkan dan dapat dibagi dari divergensi dalam persamaan (2.56), maka hasilnya adalah:

$$\nabla \cdot V = 0 \quad (2.57)$$

atau dalam sistem koordinat hasilnya adalah:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.58)$$

(Kaplan, 1963)

2.19 Persamaan Diferensial Momentum Linier

Dengan menggunakan volume kendali keunsuran yang sama seperti Gambar (2.2), maka bentuk persamaan linier yang sesuai adalah:

$$\Sigma F = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{VK} \rho v dv + \Sigma (m_i v_i)_{keluar} - \Sigma (m_i v_i)_{masuk} \quad (2.59)$$

Juga di sini volume kendali sangat kecil sehingga volume di atas berubah menjadi suku derivatif:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{VK} \rho v dv \approx \frac{\partial}{\partial t} (\rho v) dx dy dz \quad (2.60)$$

Flux momentum terjadi di keenam sisi dengan mengacu pada Gambar (2.2) dapat dibuat tabel flux:

Tabel 2.2 Flux Momentum

Sisi	Momentum Masuk	Momentum Keluar
x	$\rho u V dy dz$	$\left[\rho u V + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u V) dx \right] dy dz$
y	$\rho v V dx dz$	$\left[\rho v V + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v V) dy \right] dx dz$
z	$\rho w V dx dy$	$\left[\rho w V + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w V) dz \right] dx dy$

Jika suku-suku dalam persamaan (2.60) serta data pada flux momentum masuk dan momentum keluar disubstitusikan ke persamaan (2.59) maka:

$$\Sigma F = \frac{\partial}{\partial t}(\rho v)dx dy dz + [\rho u V dy dz + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u V)dx dy dz + \rho v V dx dz + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v V)dx dy dz + \rho w V dx dy + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w V)dx dy dz] - [\rho u V dy dz + \rho v V dx dz + \rho w V dx dy]$$

sehingga diperoleh:

$$\Sigma F = dx dy dz \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho V) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u V) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v V) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w V) \right] \quad (2.61)$$

dengan persamaan (2.61) ekuivalen dengan:

$$V \left[\frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) \right] + \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

Dengan memperhatikan $V \left[\frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) \right] = 0$, maka:

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \frac{dV}{dt} \quad (2.62)$$

Persamaan (2.62) merupakan percepatan total volume kendali.

Maka persamaan (2.61) menjadi:

$$\Sigma F = \rho \frac{dV}{dt} dx dy dz \quad (2.63)$$

Persamaan (2.63) menunjukkan bahwa gaya netto pada volume kendali harus berukuran diferensial dan sebanding dengan volume unsur itu. Gaya ini terdiri atas dua jenis, yaitu gaya gravitasi dan gaya permukaan. Dengan mengabaikan gaya gravitasi maka gaya yang bekerja hanyalah gaya permukaan yang didefinisikan:

$$\left(\frac{dF}{dv} \right)_{permukaan} = -\nabla p + \left(\frac{dF}{dv} \right)_{kental} \quad (2.64)$$

$$\text{dengan } \left(\frac{dF}{dv} \right)_{kental} = \nabla \cdot \tau_{ij} \quad (2.65)$$

dengan $\tau_{ij} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \tau_{zz} \end{bmatrix}$ adalah tensor tegangan kental yang bekerja pada

elemen. Dengan memanfaatkan persamaan (2.63),(2.64),(2.65), maka diperoleh

persamaan momentum: $\rho \frac{dV}{dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \tau_{ij}$

atau dapat diuraikan menurut komponen-komponen berikut:

$$\left. \begin{aligned} \text{(i). } x \text{ momentum: } \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \\ \text{(ii). } y \text{ momentum: } \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \\ \text{(iii). } z \text{ momentum: } \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (2.66)$$

2.20 Konstruksi Persamaan Navier- Stokes

Persamaan ini dinamakan persamaan Navier-Stokes untuk menghormati ahli matematika Perancis, L.M.H Navier (1758-1836) dan Sir Gorge Gabriel Stokes (1819-1903), yang menemukan rumus-rumus tersebut (Munson, 2002).

Deskripsi matematis gerakan fluida berdasarkan asumsi berikut ini:

- Konstanta Massa jenis, ρ
- Konstanta Kekentalan, μ
- Kontinuitas (aliran tak termampatkan), $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$

Untuk fluida Newtonian mampu mampat, generalisasi aliran kental 3 dimensi dapat dinyatakan dalam koordinat Cartesius sebagai (untuk tegangan normal dan tegangan geser):

$$\begin{aligned}
 \tau_{xx} &= 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \\
 \tau_{yy} &= 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \\
 \tau_{zz} &= 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \\
 \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\
 \tau_{yz} &= \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\
 \tau_{zx} &= \tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)
 \end{aligned} \tag{2.67}$$

Selanjutnya jika persamaan (2.67) disubstitusikan ke persamaan (2.66) (i)

untuk x momentum, maka:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right)$$

atau

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Jika lebih diuraikan lagi menjadi:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}$$

Sehingga diperoleh,

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \tag{2.68}$$

Substitusikan persamaan kontinuitas aliran tak termampatkan $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$ ke

persamaan (2.68) maka,

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial x} (0)$$

atau

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \tag{2.69}$$

Prosedur yang analog dilakukan jika persamaan (2.67) disubstitusikan ke persamaan (2.66) (ii) untuk y momentum, maka:

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right)$$

atau

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2\mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z}$$

Jika lebih diuraikan lagi menjadi:

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z}$$

sehingga diperoleh,

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (2.70)$$

Subtitusikan persamaan kontinuitas aliran tak termampatkan $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$ ke persamaan (2.70) ke maka,

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial y} (0)$$

atau

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (2.71)$$

Prosedur yang analog juga dilakukan jika persamaan (2.67) disubstitusikan ke persamaan (2.66) (iii) untuk z momentum, maka:

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

atau

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\mu \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z}$$

Jika lebih diuraikan lagi menjadi:

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$$

sehingga diperoleh,

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (2.72)$$

Substitusikan persamaan kontinuitas aliran tak termampatkan $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$ ke persamaan (2.72) maka,

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial z} (0)$$

atau

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (2.73)$$

Selanjutnya asumsikan bahwa masalah dibatasi pada kasus dua dimensi, maka persamaan (2.69) dan (2.71) dengan mengabaikan sumbu z dapat ditulis sebagai persamaan momentum fluida 2D dengan kerapatan dan kekentalan tetap sebagai berikut:

$$\left. \begin{aligned} \text{x momentum: } \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ \text{y momentum: } \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.74)$$

diketahui definisi bilangan Reynold (Re):

$$Re = \frac{\rho u d}{\mu} \quad (2.75)$$

dengan u adalah kecepatan, d diameter pipa, ρ densitas fluida dan μ viskositas absolut fluida. (Godwin.et All,1986)

Jika disubstitusikan bilangan Reynold tersebut pada persamaan (2.74) serta diasumsikan tekanan atau p pada persamaan (2.74) adalah konstan sehingga dapat diabaikan, maka akan menjadi persamaan Navier-Stokes dalam 2D, yaitu:

$$\begin{aligned}
 x \text{ momentum: } \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\
 y \text{ momentum: } \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} x \text{ momentum: } \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ y \text{ momentum: } \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)} \right\} \quad (2.76)$$

2.21 Bentuk Kanonik Persamaan Diferensial Parsial

Bentuk umum persamaan diferensial parsial linier orde dua pada persamaan (2.8) mengandung turunan kedua dari u , dapat diubah oleh perubahan variabel independen dalam bentuk yang mirip dengan difusi, gelombang dan persamaan Laplace. Sehingga persamaan ini sebenarnya merupakan prototipe persamaan linier orde dua dari bentuk (2.8). Versi mengubah persamaan ini disebut *bentuk kanonik* (Zauderer, 2006: 124).

Persamaan (2.8) dibagi dengan $A(x,y)$ sehingga diperoleh:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2B}{A}(x,y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{C}{A}(x,y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (2.77)$$

Dengan faktorisasi operator, maka persamaan (2.77) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2B}{A}(x,y) \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{C}{A} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x} - w^+(x,y) \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} - w^-(x,y) \frac{\partial}{\partial y} \right) 0 \quad (2.78)$$

dengan $w^+(x,y) + w^-(x,y) = -\frac{2B}{A}(x,y)$ dan $w^+(x,y)w^-(x,y) = -\frac{C}{A}(x,y)$.

Selanjutnya, solusi untuk $w^\pm$ dinyatakan sebagai berikut:

$$\frac{-B(x,y) \pm \sqrt{B^2(x,y) - A(x,y)C(x,y)}}{A(x,y)}$$

dimana, $w^+(x,y)$ dan $w^-(x,y)$ adalah sebarang fungsi real yang diberikan.

Dengan memandang diskriminannya, diperoleh bahwa tipe-tipe dasar persamaan diferensial parsial harus memenuhi syarat berikut:

1. Jika $B^2 - 4AC < 0$ disebut bentuk Persamaan Eliptik
2. Jika $B^2 - 4AC = 0$ disebut bentuk Persamaan Parabolik
3. Jika $B^2 - 4AC > 0$ disebut bentuk Persamaan Hiperbolik

dan dijamin terdapat koordinat karakteristik yaitu $\xi(x, y)$ dan $\eta(x, y)$ pada vektor singgung kurva karakteristik $\frac{dy}{dx} = -w^\pm(x, y)$. Maka diperoleh bentuk kanonik secara umum dari tipe-tipe dasar persamaan diferensial parsial yaitu sebagai berikut:

1. Eliptik: $u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} + a(\alpha, \beta)u_\alpha + b(\alpha, \beta)u_\beta + c(\alpha, \beta)u = d(\alpha, \beta)$ dengan $\xi = \alpha + i\beta$ dan $\eta = \alpha - i\beta$
2. Parabolik: $u_{\eta\eta}(\xi, \eta) + a(\xi, \eta)u_\xi(\xi, \eta) + b(\xi, \eta)u_\eta(\xi, \eta) + c(\xi, \eta)u(\xi, \eta) = d(\xi, \eta)$
3. Hiperbolik: $u_{\xi\eta}(\xi, \eta) + a(\xi, \eta)u_\xi(\xi, \eta) + b(\xi, \eta)u_\eta(\xi, \eta) + c(\xi, \eta)u(\xi, \eta) = d(\xi, \eta)$

(Zauderer, 2006: 126-128)

2.22 Batas Kemampuan Manusia dalam Al-Qur'an

Dalam al-Qur'an surah al-Baqarah ayat 286 Allah berfirman:

لَا يُكَلِّفُ اللَّهُ نَفْسًا إِلَّا وُسْعَهَا لَهَا مَا كَسَبَتْ وَعَلَيْهَا مَا اكْتَسَبَتْ رَبَّنَا لَا تُؤَاخِذْنَا إِنْ نَسِينَا أَوْ
أَخْطَأْنَا رَبَّنَا وَلَا تَحْمِلْ عَلَيْنَا إَصْرًا كَمَا حَمَلْتَهُ عَلَى الَّذِينَ مِنْ قَبْلِنَا رَبَّنَا وَلَا تُحَمِّلْنَا مَا
لَا طَاقَةَ لَنَا بِهِ ۖ وَاعْفُ عَنَّا وَارْحَمْنَا ۖ أَنْتَ مَوْلَانَا فَانصُرْنَا عَلَى الْقَوْمِ
الْكَافِرِينَ ﴿٢٨٦﴾

Artinya: Allah tidak membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya. ia mendapat pahala (dari kebajikan) yang diusahakannya dan ia mendapat siksa (dari kejahatan) yang dikerjakannya. (mereka berdoa): "Ya Tuhan kami, janganlah Engkau hukum kami jika kami lupa atau kami tersalah. Ya Tuhan kami, janganlah Engkau bebaskan kepada kami beban yang berat sebagaimana Engkau bebaskan kepada orang-orang sebelum kami. Ya Tuhan

kami, janganlah Engkau pikulkan kepada kami apa yang tak sanggup kami memikulnya. beri maafilah Kami; ampunilah Kami; dan rahmatilah kami. Engkaulah penolong kami, Maka tolonglah kami terhadap kaum yang kafir."(Q.S.al-Baqarah: 286)

Penekanan tentang batas kemampuan manusia terletak pada awal ayat tersebut yaitu,

لَا يُكَلِّفُ اللَّهُ نَفْسًا إِلَّا وُسْعَهَا

Artinya: Allah tidak membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya

Dalam tafsir al-Maragi kata *at-Takliif* (التكليف) diartikan kewajiban yang mempunyai beban atau bobot dan kata *al-Wus'u* (الوسع) diartikan batas kekuatan manusia tanpa menyusahkan atau merepotkan dirinya. oleh karena itu dikatakan bahwa ayat ini menerangkan bahwa Allah tidak membebani seseorang melainkan hanya sebatas kemampuannya, yang mungkin dilakukan olehnya (Al-Maragi, 1974: 143-148). Hal ini merupakan karunia dan rahmat Allah. Ayat yang maknanya sama adalah firman Allah:

يُرِيدُ اللَّهُ بِكُمُ الْيُسْرَ وَلَا يُرِيدُ بِكُمُ الْعُسْرَ

Artinya: Allah menghendaki kemudahan bagimu, dan tidak menghendaki kesukaran bagimu.(Q.S.al-Baqarah: 185).

Dalam tafsir al-Qurthubi lebih lengkap dijelaskan bahwa kata *at-Takliif* (التكليف) (pembebanan) adalah sesuatu yang memberatkan seseorang. Terbebani sesuatu artinya artinya adalah menanggung atau menahan beban tersebut. Makna ini disampaikan oleh al Jauhari. Sedangkan kata *وسعها* adalah kesungguhan, kemampuan dan kesanggupan. Sehingga pada ayat ini dijelaskan bahwasanya Allah memberitahukan bahwa dari awal diturunkannya ayat pertama, hamba-hamba-Nya tidak pernah dibebani dengan suatu ibadah, entah itu yang dilakukan

dengan anggota badan yang terlihat ataupun yang tidak terlihat, kecuali pembebanan itu masih dapat dilakukan oleh mereka. Untuk kata **يُكَلِّف**, sebenarnya kata ini memerlukan dua objek (*maf'ul*) sekaligus, namun pada ayat ini salah satu objek tersebut tidak disebutkan. Perkiraan yang seharusnya adalah: Allah SWT tidak membebani seseorang dengan ibadah, ataupun dengan yang lainnya. Karena Allah dengan kenikmatan dan kasih sayang-Nya kepada hamba-Nya (Al-Qurthubi, 2008: 959-965).

Dalam tafsir Ibnu Katsir ditambahkan bahwa ayat inilah yang menghapus beban berat yang dirasakan oleh para sahabat Nabi, yaitu ayat (وإن تبدوا ما في أنفسكم أو تخفوه يحاسبكم به الله) *“Dan jika kamu melahirkan apa yang ada dalam hatimu atau kamu menyembunyikannya, niscaya Allah membuat perhitungan denganmu tentang perbuatan itu.”* Maksudnya, meskipun Dia menghisab dan meminta pertanggungjawaban, namun Allah tidak mengadzab melainkan disebabkan dosa yang seseorang memiliki kemampuan untuk menolak bisikan atau godaan syaitan. Apabila manusia tidak mempunyai kemampuan itu maka beban itu tidak akan diberikan kepada manusia (al-Mubarak, 2006: 102-103). Atau dengan kata lain, seperti yang dijelaskan pada tafsir al-Qur'anul Majid an-Nur, bahwa Allah hanya akan mengadzab seseorang yang diberikan pekerjaan yang mana pekerjaan tersebut mampu dikerjakan dan tidak sulit untuk dikerjakan tetapi tidak dikerjakan (ash-Shiddieqy, 2000: 513).

Tafsir al-Aisar mengatakan bahwa Ayat ini menerangkan dalam mencapai tujuan hidup itu manusia diberi beban oleh Allah swt. sesuai batas kesanggupannya, mereka diberi pahala lebih dari yang telah diusahakannya dan

mendapat siksa seimbang dengan kejahatan yang telah dilakukannya. Agama Islam adalah agama yang tidak memberati manusia dengan beban yang berat dan sukar. Mudah, ringan dan tidak sempit adalah asas pokok dari agama Islam. Hal ini merupakan salah satu dari lemah-lembut serta kasih-sayang-Nya kepada makhluk-Nya (Al-Jazairi, 2006: 488-491). Sesuai dengan firman Allah:

وَمَا جَعَلَ عَلَيْكُمْ فِي الدِّينِ مِنْ حَرَجٍ

Artinya:dan Dia sekali-kali tidak menjadikan untuk kamu dalam agama suatu kesempitan.... (Q.S Al Hajj: 78)

dan firman Allah swt.:

يُرِيدُ اللَّهُ أَنْ يُخَفِّفَ عَنْكُمْ وَخُلِقَ الْإِنْسَانُ ضَعِيفًا

Artinya: Allah hendak memberikan keringanan kepadamu dan manusia dijadikan bersifat lemah. (Q.S An Nisa': 28)

Dalam tafsir *fi-zhilalil qur'an* dikatakan bahwa setiap tugas yang diberikan oleh Allah adalah sesuai dengan batas kemampuan manusia. Walaupun akan ada saat di mana manusia merasa berat melaksanakannya, tetapi itu bukanlah karena beban tersebut berat. Tetapi itu merupakan kelemahan dari manusia itu sendiri. Dengan melipatgandakan semangat dan meningkatkan tekad, semua itu akan dapat diatasi. Sebab, semua tugas yang dibebankan masih dalam lingkup kemampuannya (Qutb, 2001: 141).

Ditambahkan dari tafsir al-Maragi bahwa ayat ini mendorong manusia agar mengerjakan perbuatan yang baik serta menunaikan kewajiban-kewajiban yang telah ditetapkan oleh agama. Ayat ini memberi pengertian bahwa perbuatan baik itu adalah perbuatan yang mudah dikerjakan manusia karena sesuai dengan watak dan tabiatnya, karena ada kegembiraan dan kebahagiaan dalam

mengerjakannya. Sedang perbuatan yang jahat adalah perbuatan yang sukar dikerjakan manusia karena tidak sesuai dengan watak dan tabiatnya, karena ada keberatan atau kesusahan dalam mengerjakannya (Al-Maragi, 1974: 148).



BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Solusi Partikular Masalah Nilai Awal Persamaan Navier-Stokes 2D

Pandang persamaan x momentum Navier-Stokes berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (3.1)$$

Dalam hal ini persamaan (3.1) merupakan bentuk persamaan diferensial parsial parabolik, selanjutnya dilakukan prosedur faktorisasi operator untuk persamaan Laplace di ruas kanannya, sehingga dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) u(x, y) \quad (3.2)$$

dengan $i = \sqrt{-1}$. Dari persamaan (3.2) dimisalkan fungsi sebarang $w(x, y)$, yakni:

$$\frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = w(x, y) \quad (3.3)$$

Substitusikan (3.3) ke persamaan (3.1), maka dapat dinyatakan kembali bentuk persamaan (3.1) tersebut sebagai berikut:

$$\frac{\partial w}{\partial x} + i \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.4)$$

Dalam hal ini dapat diasumsikan bahwa $v \frac{\partial u}{\partial y}$ konstan (dapat diabaikan) atau $v \frac{\partial u}{\partial y} \approx 0$. Hal ini karena persamaan (3.1) menyatakan pergerakan partikel dalam suatu bidang gelombang hanya pada sumbu x . oleh karena itu, mengakibatkan persamaan (3.4) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + 0 = \frac{\partial w}{\partial x} + i \frac{\partial w}{\partial y} \text{ atau } \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} + i \frac{\partial w}{\partial y} \quad (3.5)$$

Pada kondisi awal (ketika $t = 0$), diberikan suatu nilai awal $u(x, 0) = f(x)$ dan $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x)$ untuk suatu fungsi-fungsi $f(x), g(x)$ sebarang. Hal ini mengakibatkan persamaan (3.5) dapat dinyatakan kembali sebagai berikut:

$$g(x) + uf'(x) = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.6)$$

Jika pada kondisi awal gelombang diasumsikan tidak teratur (*turbulen*) dalam fungsi $\sin \tau$, maka secara parametrik dapat dinyatakan bahwa

$$x_1 = \sin \tau \quad (3.7)$$

sehingga ketika $t = 0$ maka dapat dinyatakan

$$u(x, 0) = u(\sin \tau, 0) = f(\sin \tau) \quad (3.8)$$

Dengan memperhatikan kembali persamaan (3.6), dimana persamaan tersebut merupakan persamaan diferensial parsial orde satu, maka dapat disimpulkan bahwa vektor-vektor singgung arah dari persamaan tersebut adalah sebagai berikut:

$$\frac{dt}{ds} = 1, \quad \frac{dx}{ds} = u, \quad \text{dan} \quad \frac{du}{ds} = g(x) + uf'(x) \quad (3.9)$$

sehingga dari persamaan (3.9) diperoleh:

$$t = s, \quad x = us, \quad \text{dan} \quad U = \int_{s=0}^s (g(x) + uf'(x)) ds \quad (3.10)$$

Oleh karena itu, bersama dengan kondisi awalnya, diperoleh

$$x_2 = us + \sin \tau \quad \text{atau} \quad \sin \tau = x_2 - us \quad (3.11)$$

sehingga dari persamaan (3.11) diperoleh

$$f(\sin \tau) = f(x_2 - us) = u(x, 0) \quad (3.12)$$

Selanjutnya jika kedua ruas persamaan (3.11) ditambah dengan us , maka

$$x_2 + us = us + \sin \tau + us$$

Atau dapat dinyatakan

$$x_2 + us = \sin \tau + 2us \quad (3.13)$$

Karena telah diketahui pada persamaan (3.10) bahwa $t = s$, maka persamaan

(3.13) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$x_2 + ut = \sin \tau + 2ut \quad (3.14)$$

Dari persamaan (3.10) untuk $U = \int_{s=0}^s (g(x) + uf'(x))ds$, maka:

$$U = \int_{t_1=0}^{t_2=t=s} (g(x_1) + uf'(x_1))ds + f(x_2) \quad (3.15)$$

Atau

$$U = \int_{t_1=0}^{t_2=t=s} (g(x_1) + uf'(x_1))dt + f(x_2) \quad (3.16)$$

Substitusikan persamaan (3.7) dan (3.14) ke persamaan (3.16) diperoleh

$$U = \int_{t_1=0}^{t_2=t=s} (g(\sin \tau) + uf'(\sin \tau))dt + f(\sin \tau + 2ut) \quad (3.17)$$

Jika dimisalkan $\lambda = \sin \tau + 2ut$, sehingga diperoleh untuk $\frac{d\lambda}{dt} = 2u$ maka mengakibatkan

$$dt = \frac{d\lambda}{2u} \text{ atau } u dt = \frac{1}{2} d\lambda$$

sehingga persamaan (3.17) dapat dinyatakan kembali sebagai berikut:

$$\begin{aligned} U &= \int_{\lambda_1=\sin \tau}^{\lambda_2=\sin \tau+2ut} (g(\lambda)) \frac{d\lambda}{2u} + \int_{\lambda_1=\sin \tau}^{\lambda_2=\sin \tau+2ut} (f'(\lambda)) \left(\frac{1}{2}\right) d\lambda + f(\sin \tau + 2ut) \\ &= \frac{1}{2u_0} \int_{\lambda_1=\sin \tau}^{\lambda_2=\sin \tau+2ut} (g(\lambda)) d\lambda + \frac{1}{2} \int_{\lambda_1=\sin \tau}^{\lambda_2=\sin \tau+2ut} (f'(\lambda)) d\lambda + f(\sin \tau + 2ut) \\ &= \frac{1}{2u_0} [G(\sin \tau + 2ut) - G(\sin \tau)] + \frac{1}{2} (f(\lambda)) \Big|_{\sin \tau}^{\sin \tau + 2ut} + f(\sin \tau + 2ut) \\ &= \frac{1}{2u_0} [G(\sin \tau + 2ut) - G(\sin \tau)] + \frac{1}{2} [f(\sin \tau + 2ut) - f(\sin \tau)] + f(\sin \tau + 2ut) \end{aligned}$$

sehingga diperoleh;

$$U(x, t) = \left[\frac{1}{2u_0} G(\sin \tau + 2ut) + \frac{3}{2} f(\sin \tau + 2ut) \right] + \left[-\frac{1}{2u_0} G(\sin \tau) - \frac{1}{2} f(\sin \tau) \right]$$

yang merupakan solusi awal bidang gelombang pada saat $t = 0$ di sumbu x .

Selanjutnya pada y momentum persamaan Navier-Stokes dikerjakan dengan prosedur yang analog, bentuk persamaannya dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (3.18)$$

Persamaan (3.18) tersebut merupakan bentuk persamaan diferensial parsial parabolik. Selanjutnya dilakukan faktorisasi operator untuk persamaan Laplace di ruas kanannya yang dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) v(x, y) \quad (3.19)$$

dengan $i = \sqrt{-1}$. Dari persamaan (3.19) dimisalkan fungsi sebarang $w(x, y)$, yakni

$$\frac{\partial v}{\partial x} - i \frac{\partial v}{\partial y} = w(x, y) \quad (3.20)$$

Substitusikan persamaan (3.20) ke persamaan (3.18), maka dapat dinyatakan kembali bentuk persamaan (3.18) diperoleh

$$\frac{\partial w}{\partial x} + i \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \quad (3.21)$$

Dalam hal ini dapat diasumsikan bahwa $u \frac{\partial v}{\partial x}$ konstan (dapat diabaikan) atau $u \frac{\partial v}{\partial x} \approx 0$. Hal ini karena persamaan (3.18) menyatakan pergerakan partikel dalam suatu bidang gelombang hanya pada sumbu y . Oleh karena itu, mengakibatkan persamaan (3.21) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + 0 + v \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial x} + i \frac{\partial w}{\partial y} \quad \text{atau} \quad \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial x} + i \frac{\partial w}{\partial y} \quad (3.22)$$

Pada kondisi awal (ketika $t = 0$), diberikan suatu nilai awal $v(y, 0) = f(y)$ dan $\frac{\partial v}{\partial t}(y, 0) = g(y)$ untuk suatu fungsi-fungsi $f(x)$, $g(x)$ sebarang. Hal ini mengakibatkan persamaan (3.22) dapat dinyatakan kembali sebagai berikut:

$$g(y) + vf'(y) = \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial y} \quad (3.23)$$

Jika pada kondisi awal gelombang diasumsikan tidak teratur (*turbulen*) dalam fungsi $\sin \tau$, maka secara parametrik dapat dinyatakan bahwa

$$y_1 = \sin \tau \quad (3.24)$$

sehingga ketika $t = 0$ maka dapat dinyatakan

$$v(y, 0) = v(\sin \tau, 0) = f(\sin \tau) \quad (3.25)$$

Dengan memperhatikan kembali persamaan (3.23), dimana persamaan tersebut merupakan persamaan diferensial parsial orde satu, maka dapat disimpulkan bahwa vektor-vektor singgung arah dari persamaan tersebut adalah sebagai berikut

$$\frac{dt}{ds} = 1, \frac{dy}{ds} = v, \text{ dan } \frac{dv_1}{ds} = g(y) + vf'(y) \quad (3.26)$$

sehingga dari persamaan (3.26) diperoleh

$$t = s, y = v_1 s, \text{ dan } v_1 = \int_{s=0}^s (g(y) + vf'(y)) ds \quad (3.27)$$

Oleh karena itu, bersama dengan kondisi awalnya, diperoleh:

$$y_2 = vs + \sin \tau \text{ atau } \sin \tau = y - vs \quad (3.28)$$

sehingga dari persamaan (3.28) diperoleh

$$f(\sin \tau) = f(y - vs) = v(y, 0) \quad (3.29)$$

Selanjutnya jika kedua ruas persamaan (3.28) di tambah dengan vs , maka

$$y_2 + vs = v_1 s + \sin \tau + vs \text{ atau } y_2 + vs = \sin \tau + 2vs \quad (3.30)$$

Karena telah diketahui pada persamaan (3.27) bahwa $t = s$ maka persamaan (3.30) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$y_2 + vt = \sin \tau + 2vt \quad (3.31)$$

Dari persamaan (3.27) untuk $V = \int_{s=0}^s (g(y) + v_1 f'(y)) ds$, maka:

$$V = \int_{t_1=0}^{t_2=t=s} (g(y_1) + v_1 f'(y_1)) ds + f(y_2) \quad (3.32)$$

atau

$$V = \int_{t_1=0}^{t_2=t=s} (g(y_1) + v f'(y_1)) dt + f(y_2) \quad (3.33)$$

Substitusikan persamaan (3.24) dan (3.28) ke persamaan (3.33) diperoleh

$$V = \int_{t_1=0}^{t_2=t=s} (g(\sin \tau) + v f'(\sin \tau)) dt + f(\sin \tau + 2vt) \quad (3.34)$$

Jika dimisalkan $\lambda = \sin \tau + 2vt$, sehingga diperoleh untuk $\frac{d\lambda}{dt} = 2v$ maka mengakibatkan $dt = \frac{d\lambda}{2v}$ atau $v dt = \frac{1}{2} d\lambda$

sehingga, persamaan (3.34) dapat dinyatakan kembali sebagai berikut:

$$\begin{aligned} V &= \int_{\lambda_1=\sin \tau}^{\lambda_2=\sin \tau + 2vt} (g(\lambda)) \frac{d\lambda}{2v} + \int_{\lambda_1=\sin \tau}^{\lambda_2=\sin \tau + 2vt} (f'(\lambda)) \left(\frac{1}{2}\right) d\lambda + f(\sin \tau + 2vt) \\ &= \frac{1}{2v_0} \int_{\lambda_1=\sin \tau}^{\lambda_2=\sin \tau + 2vt} (g(\lambda)) d\lambda + \frac{1}{2} \int_{\lambda_1=\sin \tau}^{\lambda_2=\sin \tau + 2vt} (f'(\lambda)) d\lambda + f(\sin \tau + 2vt) \\ &= \frac{1}{2v_0} [G(\sin \tau + 2vt) - G(\sin \tau)] + \frac{1}{2} (f(\lambda)) \Big|_{\sin \tau}^{\sin \tau + 2vt} + f(\sin \tau + 2vt) \\ &= \frac{1}{2v_0} [G(\sin \tau + 2vt) - G(\sin \tau)] + \frac{1}{2} [f(\sin \tau + 2vt) - f(\sin \tau)] + f(\sin \tau + 2vt) \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh

$$v(y, t) = \left[\frac{1}{2v_0} G(\sin \tau + 2vt) + \frac{3}{2} f(\sin \tau + 2vt) \right] + \left[-\frac{1}{2v_0} G(\sin \tau) - \frac{1}{2} f(\sin \tau) \right]$$

yang merupakan solusi awal bidang gelombang pada saat $t = 0$ di sumbu y .

3.2 Solusi Partikular Masalah Nilai Batas Persamaan Navier-Stokes 2D

Pandang Persamaan momentum Navier-Stokes 2D dalam arah x

(persamaan (3.1)) dan y (persamaan (3.18)) serta persamaan kontinu $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$.

Dalam hal ini didefinisikan batas-batas daerah (*bounded of region*) dalam interval

$0 < x < L$ dan $0 < y < W$. Akibatnya kondisi batas bidang gelombang dapat

didefinisikan sebagai berikut:

$$u(x, y, t) = u(0, y, t) = 0 \text{ dan } u(L, y, t) = 0$$

Dan $u(x, 0, t) = u(x, W, t) = 0$, untuk setiap $t > 0$

Untuk persamaan x momentum Navier-Stokes, didefinisikan $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} +$

$\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ sehingga $\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$. Jika dimisalkan $u = \frac{\partial w}{\partial y}$ dan $v = -\frac{\partial w}{\partial x}$ yang

disebut sebagai *stream function*, maka substitusi fungsi ini ke persamaan (3.1).

Diperoleh:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

Selanjutnya dengan mengasumsikan $\frac{\partial w}{\partial y}$ ke bentuk Δw , maka persamaan Navier-

Stokes dapat diubah dalam bentuk PDP nonlinier orde empat yaitu:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Delta w) + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial x} (\Delta w) - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} (\Delta w) = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\Delta w)$$

Karena telah dimisalkan sebelumnya bahwa $\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ maka:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \\ & \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (3.35)$$

Selanjutnya salah satu solusi eksak untuk persamaan Navier-Stokes menurut A.D Polyanin dan V.F Zaitsev (2003) yang dipilih adalah berbentuk:

$$w = F(y, t)x + G(y, t) \text{ sehingga berlaku } \frac{\partial w}{\partial x} = F(y, t) \text{ dan } \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y}x + \frac{\partial G}{\partial y}$$

Akibatnya persamaan (3.35) dapat diselesaikan suku persuku secara terpisah dengan pemisahan solusi sebagai bentuk sistem persamaan berikut, untuk suku pertama,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial x} (F) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial y}x + \frac{\partial G}{\partial y} \right) \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(0 + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}x + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} \right) \\ &= \frac{\partial^3 F}{\partial t \partial y^2}x + \frac{\partial^3 G}{\partial t \partial y^2} \end{aligned}$$

suku kedua,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) &= \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \right) \\ &= \left(\frac{\partial F}{\partial y}x + \frac{\partial G}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} (F) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial y}x + \frac{\partial G}{\partial y} \right) \right) \\ &= \left(\frac{\partial F}{\partial y}x + \frac{\partial G}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(0 + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}x + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} \right) \\ &= \left(\frac{\partial F}{\partial y}x + \frac{\partial G}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) \\ &= \frac{\partial F}{\partial y}x \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial G}{\partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \end{aligned}$$

suku ketiga,

$$-\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -F \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \right)$$

$$\begin{aligned}
&= -F \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} (F) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial y} x + \frac{\partial G}{\partial y} \right) \right) \\
&= -F \frac{\partial}{\partial y} \left(0 + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} x + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} \right) \\
&= -F \left(\frac{\partial^3 F}{\partial y^3} x + \frac{\partial^3 G}{\partial y^3} \right)
\end{aligned}$$

dan suku keempat,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) &= \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} (F) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial y} x + \frac{\partial G}{\partial y} \right) \right) \\
&= \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(0 + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} x + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} \right) \\
&= \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} x + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} \right) \\
&= \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} x \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 G}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} x \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 G}{\partial y^2} \right) \right) \\
&= \frac{1}{Re} \left(0 + 0 + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} x + \frac{\partial^4 G}{\partial y^4} \right) = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^4 F}{\partial y^4} x + \frac{\partial^4 G}{\partial y^4} \right)
\end{aligned}$$

Dengan menggunakan keempat persamaan hasil di atas, maka persamaan (3.35)

dapat dinyatakan kembali menjadi

$$\frac{\partial^3 F}{\partial t \partial y^2} x + \frac{\partial^3 G}{\partial t \partial y^2} + \frac{\partial F}{\partial y} x \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial G}{\partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - F \left(\frac{\partial^3 F}{\partial y^3} x + \frac{\partial^3 G}{\partial y^3} \right) = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^4 F}{\partial y^4} x + \frac{\partial^4 G}{\partial y^4} \right) \quad (3.36)$$

sehingga dari persamaan (3.36) diperoleh

$$\frac{\partial^3 F}{\partial t \partial y^2} x + \frac{\partial F}{\partial y} x \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - F \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} x = \frac{1}{Re} \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} x \quad (3.37)$$

$$\frac{\partial^3 G}{\partial t \partial y^2} + \frac{\partial G}{\partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - F \frac{\partial^3 G}{\partial y^3} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^4 G}{\partial y^4} \quad (3.38)$$

Dalam hal ini persamaan (3.37) dan (3.38) saling terpisah.

Bagi persamaan (3.37) dengan x kemudian integralkan terhadap y

$$\int \frac{\partial^3 F}{\partial t \partial y^2} dy + \int \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} dy - F \int \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} dy = \frac{1}{Re} \int \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} dy$$

sehingga diperoleh

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t \partial y} + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 - F \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} + f_1(t) \quad (3.39)$$

Integrasikan persamaan (3.38) terhadap y

$$\int \frac{\partial^3 G}{\partial t \partial y^2} dy + \int \frac{\partial G}{\partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} dy - F \int \frac{\partial^3 G}{\partial y^3} dy = \frac{1}{Re} \int \frac{\partial^4 G}{\partial y^4} dy$$

sehingga diperoleh

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t \partial y} + \frac{\partial G}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial y} - F \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^3 G}{\partial y^3} + f_2(t) \quad (3.40)$$

Untuk sebarang fungsi konstant $f_1(t)$ dan $f_2(t)$

Selanjutnya penyelesaian persamaan Navier-Stokes di sumbu y dapat dikerjakan dengan prosedur analog pada x momentumnya. Untuk persamaan y momentum Navier-Stokes, didefinisikan $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ sehingga $\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$.

Jika dimisalkan $u = \frac{\partial w}{\partial y}$ dan $v = -\frac{\partial w}{\partial x}$ yang disebut sebagai *stream function*, maka

ketika fungsi ini disubstitusikan ke persamaan (3.18) diperoleh

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial w}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial w}{\partial x} \right) - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(-\frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

Selanjutnya dengan mengasumsikan $\frac{\partial w}{\partial y}$ ke bentuk Δw , maka persamaan

Navier-Stokes dapat diubah dalam bentuk PDP nonlinier orde empat yaitu

$$-\frac{\partial}{\partial t} (\Delta w) - \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial x} (\Delta w) + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} (\Delta w) = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\Delta w)$$

Karena telah dimisalkan sebelumnya bahwa $\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ maka

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) =$$

$$\frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (3.41)$$

Selanjutnya salah satu solusi eksak untuk persamaan Navier-Stokes menurut A.D Polyanin dan V.F Zaitsev (2003) yang dipilih adalah yang berbentuk

$$w = F(x, t)y + G(x, t) \text{ sehingga berlaku } \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x}y + \frac{\partial G}{\partial x} \text{ dan } \frac{\partial w}{\partial y} = F(x, t)$$

Akibatnya persamaan (3.41) dapat diselesaikan suku persuku secara terpisah dengan pemecahan solusi sebagai bentuk sistem persamaan berikut, untuk suku pertama,

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) &= -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial x}y + \frac{\partial G}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} (F) \right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}y + \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + 0 \right) \\ &= -\frac{\partial^3 F}{\partial t \partial x^2}y - \frac{\partial^3 G}{\partial t \partial x^2} \end{aligned}$$

suku kedua,

$$\begin{aligned} -\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) &= -\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \right) \\ &= -F \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial x}y + \frac{\partial G}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} (F) \right) \\ &= -F \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}y + \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + 0 \right) \\ &= -F \left(\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}y + \frac{\partial^3 G}{\partial x^3} \right) \end{aligned}$$

suku ketiga,

$$\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{\partial F}{\partial x} y + \frac{\partial G}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial x} y + \frac{\partial G}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} (F) \right) \\
&= \left(\frac{\partial F}{\partial x} y + \frac{\partial G}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} y + \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + 0 \right) \\
&= \left(\frac{\partial F}{\partial x} y + \frac{\partial G}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) \\
&= \frac{\partial F}{\partial x} y \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial G}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}
\end{aligned}$$

dan suku keempat,

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) &= -\frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \right) \\
&= -\frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial x} y + \frac{\partial G}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} (F) \right) \\
&= -\frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} y + \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + 0 \right) \\
&= -\frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} y + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} y + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \right) \\
&= -\frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} y + \frac{\partial^4 G}{\partial x^4} + 0 + 0 \right) = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} y + \frac{\partial^4 G}{\partial x^4} \right)
\end{aligned}$$

Dengan menggunakan keempat persamaan hasil di atas, maka persamaan (3.41)

dapat dinyatakan kembali menjadi

$$-\frac{\partial^3 F}{\partial t \partial x^2} y - \frac{\partial^3 G}{\partial t \partial x^2} - F \left(\frac{\partial^3 F}{\partial x^3} y + \frac{\partial^3 G}{\partial x^3} \right) + \frac{\partial F}{\partial x} y \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial G}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^4 F}{\partial y^4} y + \frac{\partial^4 G}{\partial y^4} \right) \quad (3.42)$$

sehingga dari persamaan (3.42) diperoleh

$$-\frac{\partial^3 F}{\partial t \partial x^2} y - F \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} y + \frac{\partial F}{\partial x} y \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\frac{1}{Re} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} y \quad (3.43)$$

$$-\frac{\partial^3 G}{\partial t \partial x^2} - F \frac{\partial^3 G}{\partial x^3} + \frac{\partial G}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\frac{1}{Re} \frac{\partial^4 G}{\partial x^4} \quad (3.44)$$

Dalam hal ini persamaan persamaan (3.43) dan (3.44) saling terpisah.

Bagi persamaan (3.43) dengan y kemudian integralkan terhadap x

$$-\int \frac{\partial^3 F}{\partial t \partial x^2} dx - F \int \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} dx + \int \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dx = -\frac{1}{Re} \int \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} dx$$

sehingga diperoleh

$$-\frac{\partial^2 F}{\partial t \partial x} - F \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 = -\frac{1}{Re} \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} \quad (3.45)$$

Integralkan persamaan (3.44) terhadap x

$$-\int \frac{\partial^3 G}{\partial t \partial x^2} dx - F \int \frac{\partial^3 G}{\partial x^3} dx + \int \frac{\partial G}{\partial x} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dx = -\frac{1}{Re} \int \frac{\partial^4 G}{\partial x^4} dx$$

sehingga diperoleh

$$-\frac{\partial^2 G}{\partial t \partial x} - F \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial G}{\partial x} = -\frac{1}{Re} \frac{\partial^3 G}{\partial x^3} + f_2(t) \quad (3.46)$$

Untuk setiap $f_1(t)$ dan $f_2(t)$ adalah sebarang fungsi

3.3 Penyelesaian Persamaan Navier-Stokes dengan Syarat Batasnya

Selanjutnya penyelesaian untuk persamaan x momentum Navier-Stokes dilakukan dengan menggunakan persamaan (3.39) dan persamaan (3.40). Dalam hal ini persamaan (3.40) dapat ditulis

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial G}{\partial y} \right) + \frac{\partial G}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial y} - F \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial G}{\partial y} \right) = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial G}{\partial y} \right) + f_2(t) \quad (3.47)$$

Jika dimisalkan $\frac{\partial G}{\partial y} = u$, maka (3.47) menjadi

$$\frac{\partial}{\partial t} (u) + u \frac{\partial F}{\partial y} - F \frac{\partial}{\partial y} (u) = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (u) + f_2(t)$$

yakni

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F \frac{\partial u}{\partial y} - u \frac{\partial F}{\partial y} + f_2(t) \quad (3.48)$$

Dengan metode pemisahan variabel dimisalkan

$$u(y, t) = Y(y)T(t) \text{ dan } F(y, t) = Y(y)T(t)$$

sehingga persamaan (3.48) menjadi

$$Y(y)T'(t) = \frac{1}{Re} Y''(y)T(t) + Y(y)T(t)Y'(y)T(t) - Y(y)T(t)Y'(y)T(t)$$

atau

$$Y(y)T'(t) = \frac{1}{Re} Y''(y)T(t) \quad (3.49)$$

Selanjutnya persamaan (3.49) dibagi $Y(y)T(t)$ sehingga menjadi

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{1}{Re} \frac{Y''(y)}{Y(y)} \quad (3.50)$$

kedua ruas dari persamaan (3.50) pasti bernilai sama yaitu konstanta C sehingga

dapat ditulis

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = C \text{ yakni } T'(t) = CT(t) \quad (3.51)$$

$$\text{dan } \frac{Y''(y)}{Y(y)} = C \text{ yakni } Y''(y) = Re CY(y) \quad (3.52)$$

Karena persamaan tersebut akan mempunyai solusi jika $C < 0$ maka

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = -C \text{ yakni } T'(t) = -CT(t) \quad (3.53)$$

$$\text{dan } \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -Re C \text{ yakni } Y''(y) = -Re CY(y) \quad (3.54)$$

persamaan (3.53) dan (3.54) dapat ditulis menjadi

$$T'(t) + CT(t) = 0 \quad (3.55)$$

$$Y''(y) + Re CY(y) = 0 \quad (3.56)$$

$$\text{Misal } Re C = a \text{ maka persamaan (3.54) menjadi } Y''(y) + aY(y) = 0 \quad (3.57)$$

Sebelum menyelesaikan Persamaan diferensial biasa dari persamaan (3.54) dan (3.56) di atas, diberikan kondisi batas dari persamaan Navier-Stokes 2D yaitu $u(0, t) = u(W, t) = 0$ untuk setiap $t > 0$ karena $u(y, t) = Y(y)T(t)$ maka kondisi batasnya menjadi

$Y(0)T(t) = 0$ dan $Y(W)T(t) = 0$ untuk setiap $t > 0$

$$Y(0) = Y(W) = 0 \quad (3.58)$$

Persamaan (3.57) dapat ditulis

$$r^2 + a = 0 \quad (3.59)$$

Sehingga akar-akar persamaan (3.59) adalah:

$$r^2 = -a$$

$$r_{1,2} = \pm\sqrt{-a}$$

$$= \pm\sqrt{-1}\sqrt{a}$$

$$= \pm i\sqrt{a} \text{ untuk setiap konstanta kekentalan } a = Re \cdot C$$

Sehingga $Y(y) = C_1 \cos \sqrt{a}y + C_2 \sin \sqrt{a}y$

Jika $0 \leq y \leq W$, maka

$$Y(0) = C_1 \cos \sqrt{a}(0) + C_2 \sin \sqrt{a}(0) = C_1 + 0 = C_1 = 0$$

dan

$$Y(W) = C_1 \cos \sqrt{a}W + C_2 \sin \sqrt{a}W$$

Karena telah diperoleh $C_1 = 0$ maka

$$Y(W) = C_2 \sin \sqrt{a}W = 0$$

Artinya $C_2 = 0$ atau $\sin \sqrt{a}W = 0$

Jika $C_2 \neq 0$ maka $\sin \sqrt{a}W = 0$ terpenuhi jika $\sqrt{a}W = n\pi, \forall n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$\text{atau } W = \frac{n\pi}{\sqrt{a}}$$

sehingga solusi umumnya menjadi

$$Y(y) = a_n \sin \left(\frac{n\pi}{\sqrt{a}} y \right) \quad (3.60)$$

Untuk persamaan (3.55) dimana $C = W = \frac{n\pi}{\sqrt{a}}$ sehingga diperoleh

$$T'(t) + \frac{n\pi}{\sqrt{a}}T(t) = 0 \quad (3.61)$$

Persamaan (3.61) dapat ditulis

$$m - \frac{n\pi}{\sqrt{a}} = 0 \quad (3.62)$$

Sehingga solusi umumnya menjadi

$$T(t) = b_n e^{\frac{n\pi}{\sqrt{a}}t} \quad (3.63)$$

Substitusikan (3.60) dan (3.63) pada $u(y, t) = Y(y)T(t)$ sehingga diperoleh

$$u(y, t) = a_n \sin\left(\frac{n\pi}{\sqrt{a}}\right) b_n e^{\frac{n\pi}{\sqrt{a}}t}$$

Misal $a_n b_n = C_n$ maka

$$u(y, t) = C_n e^{\frac{n\pi}{\sqrt{a}}t} \sin\left(\frac{n\pi}{\sqrt{a}}\right) y$$

Adalah solusi nilai batas bidang gelombang di x momentum Navier-Stokes 2D

Untuk mengetahui gambar dari solusi analitik dari persamaan Navier-

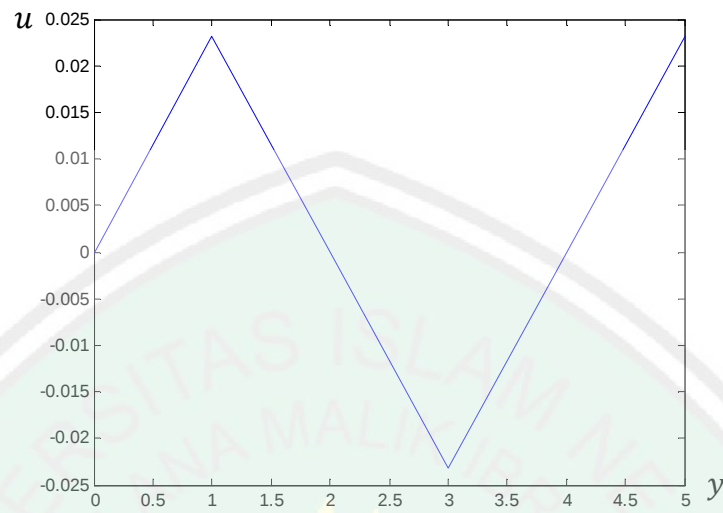
Stokes 2D, maka diinputkan pada MATLAB *source code* sebagai berikut:

```
y=0:1:5; Cn=0.001; n=1; t=2; a=4000*0.001;
u=Cn*exp(n*pi*t/a^(1/2))*sin(n*pi*y/a^(1/2));
plot(y, u)
```

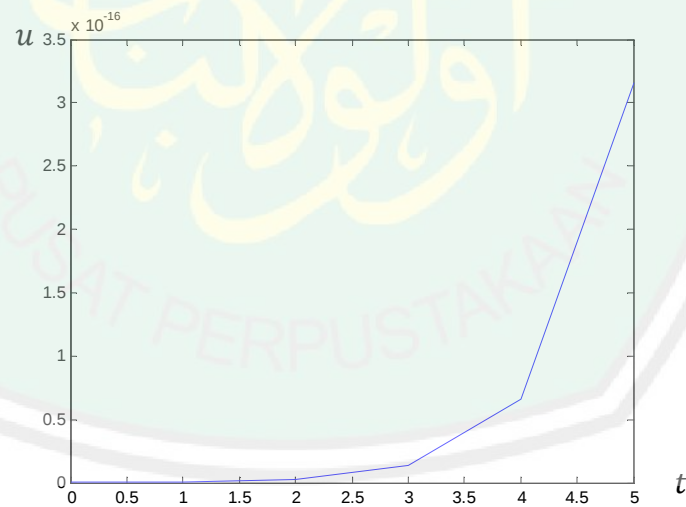
pada sumbu (u, v) (gambar 3.1) dan

```
t=0:1:5; Cn=0.001; n=1; y=2; a=4000*0.001;
u=Cn*exp(n*pi*t/a^(1/2))*sin(n*pi*y/a^(1/2));
plot(t, u)
```

pada sumbu (u, t) (gambar 3.2), menghasilkan gambar di bawah ini:



Gambar 3.1 Grafik Solusi Nilai Batas Bidang Gelombang dari Persamaan Navier-Stokes 2D pada Sumbu (u,y)



Gambar 3.2 Grafik Solusi Nilai Batas Bidang Gelombang dari Persamaan Navier-Stokes 2D pada Sumbu (u,t)

Sedangkan untuk gambar penampang gelombang pada sumbu (u,y,t) diinputkan *source code* pada MATLAB sebagai berikut:

```
clc, clear
```

```

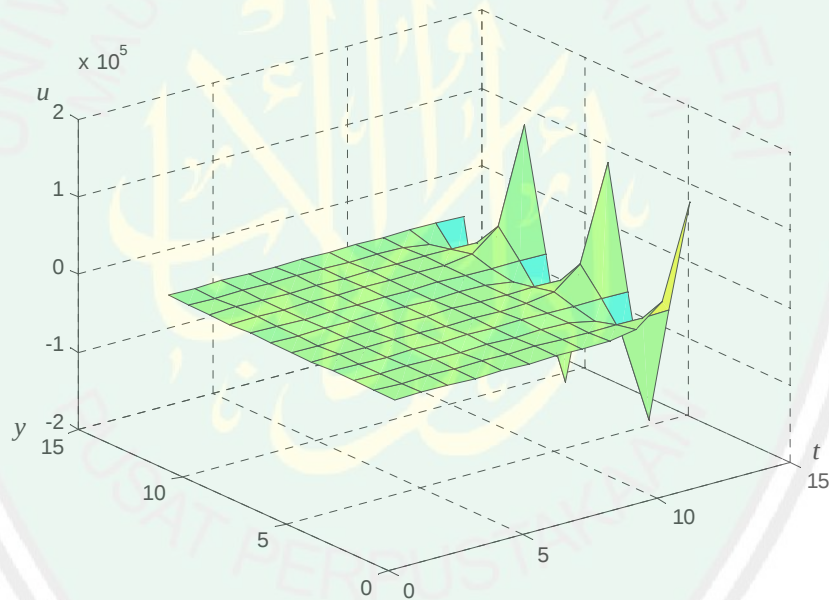
t=1:12;Cn=0.001;n=1;y=1:12;a=4000*0.001;
u=zeros(12,12)

for i=1:12
    for j=1:12
        u(i,j)=Cn*exp(n*pi*t(j)/a^(1/2))*sin(n*pi*y(i)/a^(1/2));
    end
end

surf(y,t,u)

```

yang menghasilkan gambar di bawah ini:



Gambar 3.3 Grafik Solusi Nilai Batas Bidang Gelombang dari Persamaan Navier-Stokes 2D pada Sumbu (u,y,t)

Berikutnya penyelesaian untuk persamaan y momentum Navier-Stokes dilakukan dengan prosedur yang analog dengan persamaan x momentumnya dan menggunakan persamaan (3.45) dan persamaan (3.46). Sehingga dalam hal ini persamaan (3.46) bisa ditulis

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial G}{\partial x} \right) - F \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial G}{\partial x} \right) + \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial G}{\partial x} = -\frac{1}{Re} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial G}{\partial x} \right) + f_2(t) \quad (3.64)$$

Selanjutnya dimisalkan $\frac{\partial G}{\partial x} = v$, maka (3.64) menjadi

$$-\frac{\partial}{\partial t} (v) - F \frac{\partial}{\partial x} (v) + v \frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{1}{Re} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (v) + f_2(t)$$

Atau $-\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + F \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial F}{\partial x} + f_2(t)$ (3.65)

Persamaan (3.65) bersolusi trivial jika $v \frac{\partial F}{\partial x} \neq 0$.

Dengan metode pemisahan variabel dimisalkan

$$v(x, t) = X(x)T(t) \text{ dan } F(x, t) = X(x)T(t)$$

Sehingga persamaan (3.65) menjadi

$$-X(x)T'(t) = -\frac{1}{Re} X''(x)T(t) + X(x)T(t)X'(x)T(t) - X(x)T(t)X'(x)T(t)$$

$$X(x)T'(t) = \frac{1}{Re} X''(x)T(t) \quad (3.66)$$

Selanjutnya persamaan (3.66) dibagi $X(x)T(t)$ sehingga menjadi

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{1}{Re} \frac{X''(x)}{X(x)} \quad (3.67)$$

kedua ruas dari persamaan (3.67) pasti bernilai sama yaitu konstanta C sehingga dapat ditulis

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = C \text{ yakni } T'(t) = CT(t) \quad (3.68)$$

$$\text{dan } \frac{X''(x)}{X(x)} = C \text{ yakni } X''(x) = Re CX(x) \quad (3.69)$$

Karena persamaan tersebut akan mempunyai solusi jika $C < 0$ maka

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = -C \text{ yakni } T'(t) = -CT(t) \quad (3.70)$$

$$\text{dan } \frac{X''(x)}{X(x)} = -Re C \text{ yakni } X''(x) = -Re CX(x) \quad (3.71)$$

persamaan (3.70) dan (3.71) dapat ditulis menjadi

$$T'(t) + CT(t) = 0 \quad (3.72)$$

$$X''(x) + Re CX(x) = 0 \quad (3.73)$$

Misal $Re C = a$ maka persamaan (3.73) menjadi $X''(x) + aX(x) = 0$ (3.74)

Sebelum menyelesaikan Persamaan diferensial biasa dari persamaan (3.71) dan (3.73) di atas, diberikan kondisi batas dari persamaan Navier-Stokes 2D yaitu $u(0, t) = u(L, t) = 0$ untuk semua $t > 0$ karena $v(x, t) = X(x)T(t)$ maka kondisi batasnya menjadi:

$$X(0)T(t) = 0 \text{ dan } X(L)T(t) = 0 \text{ untuk semua } t > 0$$

$$X(0) = X(W) = 0 \quad (3.75)$$

Persamaan (3.74) dapat ditulis:

$$r^2 + a = 0 \quad (3.76)$$

Sehingga akar-akar persamaan (3.76) adalah:

$$r^2 = -a$$

$$r_{1,2} = \pm\sqrt{-a}$$

$$= \pm\sqrt{-1}\sqrt{a}$$

$$= \pm i\sqrt{a} \text{ untuk setiap konstanta kekentalan } a = Re \cdot C$$

$$\text{Sehingga } X(x) = C_1 \cos \sqrt{a}x + C_2 \sin \sqrt{a}x$$

Jika $0 \leq x \leq L$, maka

$$X(0) = C_1 \cos \sqrt{a}(0) + C_2 \sin \sqrt{a}(0) = C_1 + 0 = C_1 = 0$$

dan

$$X(L) = C_1 \cos \sqrt{a}L + C_2 \sin \sqrt{a}L$$

Karena telah diperoleh $C_1 = 0$ maka

$$X(L) = C_2 \sin \sqrt{a}L = 0$$

Artinya $C_2 = 0$ atau $\sin \sqrt{a} L = 0$

Jika $C_2 \neq 0$ maka $\sin \sqrt{a} L = 0$ terpenuhi jika $\sqrt{a} L = n\pi, \forall n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$\text{Atau } L = \frac{n\pi}{\sqrt{a}}$$

Sehingga solusi umumnya menjadi

$$X(x) = a_n \sin\left(\frac{n\pi}{\sqrt{a}}\right) x \quad (3.77)$$

Untuk persamaan (3.72) dimana $C = L = \frac{n\pi}{\sqrt{a}}$ sehingga diperoleh

$$T'(t) + \frac{n\pi}{\sqrt{a}} T(t) = 0 \quad (3.78)$$

Persamaan (3.78) dapat ditulis:

$$m - \frac{n\pi}{\sqrt{a}} = 0 \text{ atau } m = \frac{n\pi}{\sqrt{a}} \quad (3.79)$$

Sehingga solusi umumnya menjadi

$$T(t) = b_n e^{\frac{n\pi}{\sqrt{a}} t} \quad (3.80)$$

Substitusikan (3.77) dan (3.80) pada $v(x, t) = X(x)T(t)$ sehingga diperoleh

$$v(x, t) = a_n \sin\left(\frac{n\pi}{\sqrt{a}}\right) x b_n e^{\frac{n\pi}{\sqrt{a}} t}$$

Misal $a_n b_n = C_n$ maka:

$$v(x, t) = C_n e^{\frac{n\pi}{\sqrt{a}} t} \sin\left(\frac{n\pi}{\sqrt{a}}\right) x$$

Adalah solusi nilai batas bidang gelombang di y momentum Navier-Stokes 2D

Untuk mengetahui gambar dari solusi analitik persamaan Navier-Stokes

2D, maka diinputkan pada MATLAB *source code* sebagai berikut:

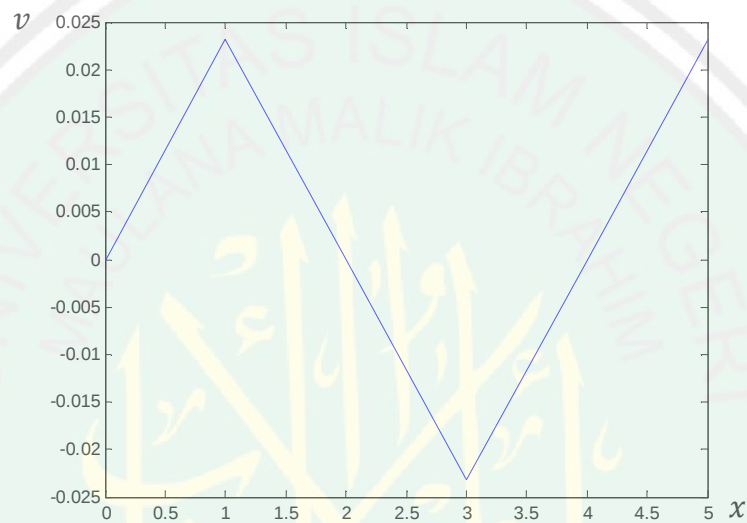
```
x=0:1:5; Cn=0.001; n=1; t=2; a=4000*0.001;
v=Cn*exp(n*pi*t/a^(1/2))*sin(n*pi*x/a^(1/2));
plot(x, v)
```

pada sumbu (v, x) (gambar 3.4) dan

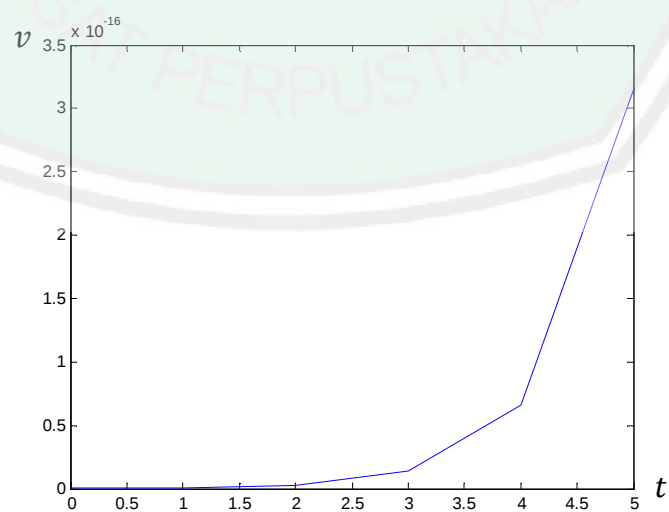
```
t=0:1:5;Cn=0.001;n=1;x=2;a=4000*0.001;
v=Cn*exp(n*pi*t/a^(1/2))*sin(n*pi*x/a^(1/2));
plot(t,v)
```

pada sumbu (v,t) (gambar 3.5)

yang menghasilkan gambar di bawah ini:



Gambar 3.4 Grafik Solusi Nilai Batas Bidang Gelombang dari Persamaan Navier-Stokes 2D pada Sumbu (v,x)



Gambar 3.5 Grafik Solusi Nilai Batas Bidang Gelombang dari Persamaan Navier-Stokes 2D pada Sumbu (v,t)

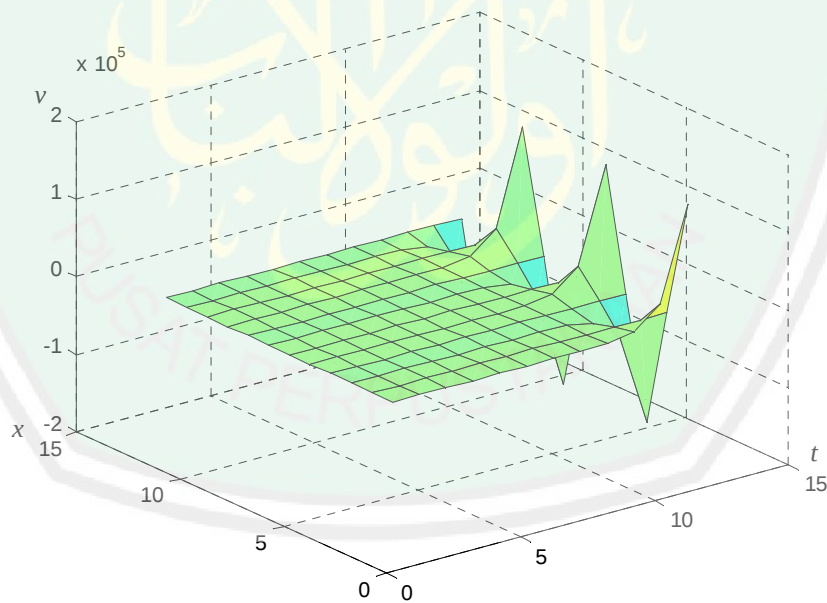
Sedangkan untuk gambar penampang gelombang pada sumbu (v,x,t) diinputkan *source code* pada MATLAB sebagai berikut:

```
clc, clear
t=1:12; Cn=0.001; n=1; x=1:12; a=4000*0.001;
v=zeros(12,12)

for i=1:12
    for j=1:12
        v(i,j)=Cn*exp(n*pi*t(j)/a^(1/2))*sin(n*pi*x(i)/a^(1/2));
    end
end

surf(x,t,v)
```

yang menghasilkan gambar di bawah ini:



Gambar 3.6 Grafik Solusi Nilai Batas Bidang Gelombang dari Persamaan Navier-Stokes 2D pada Sumbu (v,x,t)

3.4 Bentuk Kanonik dari Persamaan Navier-Stokes 2D

Persamaan Navier-Stokes memenuhi syarat tipe persamaan eliptik, karena:

$$B^2(x, y) - A(x, y)C(x, y) = 0^2 - \frac{1}{Re} \frac{1}{Re} = -\frac{1}{Re^2} < 0$$

Selanjutnya dicari $w^+(x, y)$ dan $w^-(x, y)$ yang merupakan akar persamaan kuadrat tersebut, dimana $w^+(x, y) \neq w^-(x, y)$ sehingga diperoleh:

$$w^\pm(x, y, t) = \frac{-B(x, y) \pm \sqrt{B^2(x, y) - A(x, y)C(x, y)}}{A(x, y)}$$

$$w^\pm(x, y, t) = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - \frac{1}{Re} \frac{1}{Re}}}{\frac{1}{Re}} = \pm \sqrt{-\frac{1}{Re^2} Re} = \pm \frac{Re}{Re} \sqrt{-1} = \pm i$$

Atau $w^+(x, y, t) = i$ dan $w^-(x, y, t) = -i$, dengan $i = \sqrt{-1}$

Selanjutnya $(\frac{\partial}{\partial x} - w^+ \frac{\partial}{\partial y})$ dan $(\frac{\partial}{\partial x} - w^- \frac{\partial}{\partial y})$ disebut turunan berarah sepanjang kurva karakteristik.

1. Menentukan $\xi(x, y, t)$

a. $\frac{dt}{dx} = -w^+(x, y, t)$ karena $w^+(x, y, t) = i$ maka

$\frac{dt}{dx} = -i$, selanjutnya kedua ruas diintegrasikan terhadap x

$$\int \frac{dt}{dx} = \int -i dx, \text{ sehingga diperoleh } t = -ix$$

Dimana, $t + ix = \xi(x, t)$, dan $\xi(x, t)$ adalah konstan

b. $\frac{dt}{dy} = -w^+(x, y, t)$ karena $w^+(x, y, t) = i$ maka

$\frac{dt}{dy} = -i$, selanjutnya kedua ruas diintegrasikan terhadap y

$$\int \frac{dt}{dy} = \int -i dy, \text{ sehingga diperoleh } t = -iy$$

Dimana, $t + iy = \xi(y, t)$, dan $\xi(y, t)$ adalah konstan

Dari a dan b diperoleh

$$\xi(x, y, t) = \xi(x, t) + \xi(y, t) = (t + ix) + (t + iy) = 2t + i(x + y)$$

Dari persamaan di atas diperoleh $\xi_x = i$, $\xi_y = i$, dan $\xi_t = 2$

2. Menentukan $\eta(x, y, t)$

a. $\frac{dt}{dx} = -w^-(x, y, t)$ karena $w^-(x, y, t) = -i$ maka

$$\frac{dt}{dx} = i, \text{ selanjutnya kedua ruas diintegralkan terhadap } x$$

$$\int \frac{dt}{dx} = \int i \, dx, \text{ sehingga diperoleh } t = ix$$

Dimana, $t - ix = \eta(x, t)$, dan $\eta(y, t)$ adalah konstan

b. $\frac{dt}{dy} = -w^-(x, y, t)$ karena $w^-(x, y, t) = -i$ maka

$$\frac{dt}{dy} = i, \text{ selanjutnya kedua ruas diintegralkan terhadap } y$$

$$\int \frac{dt}{dy} = \int i \, dy, \text{ sehingga diperoleh } t = iy$$

Dimana, $t - iy = \eta(y, t)$, dan $\eta(x, t)$ adalah konstan

Dari a dan b diperoleh

$$\eta(x, y, t) = \eta(x, t) + \eta(y, t) = (t - ix) + (t - iy) = 2t - i(x + y)$$

Dari persamaan di atas diperoleh $\eta_x = -i$, $\eta_y = -i$, dan $\eta_t = 2$

Jika diberikan koordinat karakteristik $\xi(x, y, t)$, $\eta(x, y, t)$, dan jika $u = u(\xi, \eta) =$

$u(\xi(x, y, t), \eta(x, y, t))$ maka:

$$1. \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x$$

Untuk $\xi_x = i$ dan $\eta_x = -i$ maka

$$\frac{\partial u}{\partial x} = iu_\xi - iu_\eta$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = i(u_{\xi} - u_{\eta})$$

$$2. \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = u_{\xi} \xi_y + u_{\eta} \eta_y$$

Untuk $\xi_y = i$ dan $\eta_y = -i$ maka

$$\frac{\partial u}{\partial y} = iu_{\xi} - iu_{\eta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = i(u_{\xi} - u_{\eta})$$

$$3. \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u_{\xi} \xi_t + u_{\eta} \eta_t$$

Untuk $\xi_t = 2$ dan $\eta_t = 2$ maka

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2u_{\xi} + 2u_{\eta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2(u_{\xi} + u_{\eta})$$

$$4. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x}$$

Karena diketahui $\frac{\partial u}{\partial x} = i(u_{\xi} - u_{\eta})$, maka

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = [i(u_{\xi} - u_{\eta})] [i(u_{\xi} - u_{\eta})]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = [iu_{\xi} - iu_{\eta}][iu_{\xi} - iu_{\eta}]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = [iu_{\xi} - iu_{\eta}][iu_{\xi} - iu_{\eta}]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -u_{\xi}^2 + 2u_{\xi\eta} - u_{\eta}^2$$

$$5. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y}$$

Karena diketahui $\frac{\partial u}{\partial y} = i(u_{\xi} - u_{\eta})$, maka

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = [i(u_\xi - u_\eta)] [i(u_\xi - u_\eta)]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = [iu_\xi - iu_\eta][iu_\xi - iu_\eta]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = [iu_\xi - iu_\eta][iu_\xi - iu_\eta]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -u_\xi^2 + 2u_{\xi\eta} - u_\eta^2$$

Substitusikan persamaan (1),(2), (3), (4) dan (5) pada persamaan Navier-Stokes agar diperoleh bentuk kanonik dari persamaan Navier-Stokes tersebut.

$$\begin{aligned} \text{x momentum: } \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ [2u_\xi - 2u_\eta] + u[iu_\xi - iu_\eta] + v[iu_\xi - iu_\eta] + \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{Re} \left((-u_\xi^2 + 2u_{\xi\eta} - u_\eta^2) + \right. \\ &\left. (-u_\xi^2 + 2u_{\xi\eta} - u_\eta^2) \right) = 0 \\ [2u_\xi - 2u_\eta] + u[iu_\xi - iu_\eta] + v[iu_\xi - iu_\eta] + \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{Re} (-2u_\xi^2 + 4u_{\xi\eta} - 2u_\eta^2) &= 0 \end{aligned}$$

Untuk y momentum dikerjakan dengan analog sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} \text{y momentum: } \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\ [2v_\xi - 2v_\eta] + u[iv_\xi - iv_\eta] + v[iv_\xi - iv_\eta] + \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{1}{Re} \left((-2v_\xi^2 + 4v_{\xi\eta} - 2v_\eta^2) \right) &= 0 \end{aligned}$$

3.5 Masalah Nilai Batas dan Batas Kemampuan Manusia

Masalah nilai batas dalam matematika adalah dengan melibatkan suatu batas untuk suatu persamaan diferensial parsial atau sistem persamaan diferensial parsial baik linier atau tidak linier dalam suatu batas daerah tertentu (*bounded region*). Dalam hal ini batas-batas daerah dinyatakan dalam suatu interval $0 \leq x \leq L$ dan $0 \leq y \leq W$, jika masalah yang dihadapi adalah kasus dua

dimensi. Solusi awal dan solusi umum persamaan diferensial parsial harus terdefinisi atau sah di dalam atau pada batas sistem atau daerah. Sehingga baik solusi analitik atau solusi numerik secara keseluruhan harus terdefinisi dengan baik pada batas dan syarat batas sistem.

Selanjutnya telah diketahui bahwa manusia mempunyai kemampuan terbatas sesuai dengan ukuran yang diberikan oleh Allah kepadanya. Makhluk ini, misalnya, tidak dapat terbang. Ini merupakan salah satu ukuran atau batas kemampuan yang dianugerahkan Allah kepadanya. Ia tidak mampu melampauinya, kecuali jika ia menggunakan akalnyanya untuk menciptakan satu alat, namun akalnyanya pun, mempunyai ukuran yang tidak mampu dilampaui. Sebagaimana diterangkan pada firman Allah berikut

فَلَا أُقْسِمُ بِمَا تُبْصِرُونَ ۖ وَمَا لَا تُبْصِرُونَ ۚ

Artinya: Maka Aku bersumpah dengan apa yang kamu lihat. Dan dengan apa yang tidak kamu lihat. (Q.S. al-Haqqah: 38-39)

Di sisi lain, manusia berada di bawah hukum-hukum Allah sehingga segala yang dilakukan pun tidak terlepas dari hukum-hukum yang telah mempunyai kadar dan ukuran tertentu. Hanya saja karena hukum-hukum tersebut cukup banyak, dan manusia diberi kemampuan memilih maka manusia dapat memilih yang mana di antara takdir yang ditetapkan Tuhan terhadap alam yang dipilihnya. Di sinilah pentingnya pengetahuan dan perlunya ilham atau petunjuk Ilahi.

Dari paparan di atas, maka dapat dilihat bahwa ada korelasi antara ayat 286 dari surah al-Baqarah yang membahas tentang batas kemampuan manusia

dengan bahasan masalah nilai batas pada matematika. Suatu permasalahan pada matematika, tidak dapat mengerjakan tanpa batasan. Karena interpretasinya akan sulit diperoleh jika permasalahan tersebut tidak terdefinisi dengan jelas begitu juga dengan manusia, Allah memberikan ujian sesuai dengan kemampuannya karena jika tidak terdefinisi dengan jelas dalam artian tidak diketahui dengan jelas karena telah sampai pada batas kemampuan manusia, maka ujian tersebut akan sulit untuk diselesaikan.



BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Dari paparan pembahasan di atas dapat dikonstruksi langkah-langkah *d'Alembert Solution* untuk memperoleh model gelombang di sumbu x dan y sebagai berikut:

$$U(x, t) = \left[\frac{1}{2u_0} G(\sin \tau + 2ut) + \frac{3}{2} f(\sin \tau + 2ut) \right] + \left[-\frac{1}{2u_0} G(\sin \tau) - \frac{1}{2} f(\sin \tau) \right]$$

dan

$$V(y, t) = \left[\frac{1}{2v_0} G(\sin \tau + 2vt) + \frac{3}{2} f(\sin \tau + 2vt) \right] + \left[-\frac{1}{2v_0} G(\sin \tau) - \frac{1}{2} f(\sin \tau) \right]$$

Selanjutnya, dengan *splitting method* dapat diselesaikan model gelombang pada persamaan Navier-Stokes 2D menggunakan nilai batas dengan langkah-langkah sebagai berikut:

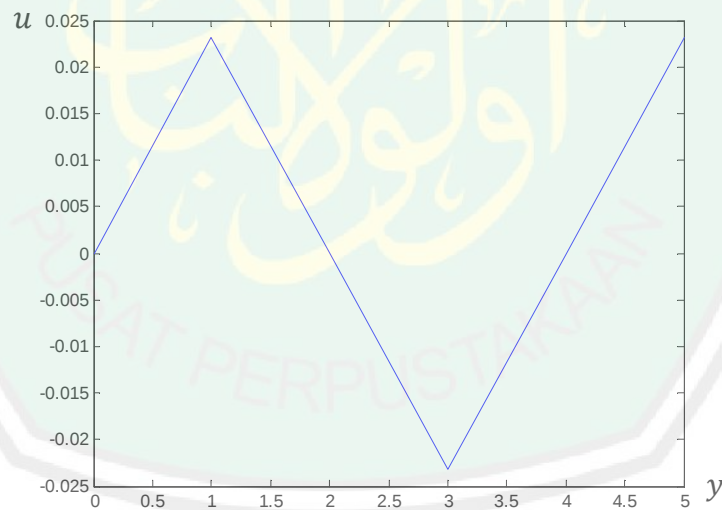
1. Diberikan persamaan umum: $(x, y, w, w_x, w_y, w_{xx}, w_{xy}, w_{yy}, \dots) = 0$. Hal ini digunakan untuk mencari solusi pemisahan secara umum.
2. Didefinisikan stuktur solusi sebagai berikut $w = \varphi_1(x)\psi_1(y) + \dots + \varphi_n(x)\psi_n(y)$ yang selanjutnya akan disubstitusikan ke dalam persamaan umum.
3. Menulis kembali persamaan umum Navier-Stokes yang selanjutnya dikerjakan dengan menggunakan *splitting procedure*.
4. Menghasilkan persamaan fungsional dan sistem persamaan diferensial biasa.
5. Menyelesaikan persamaan fungsional $w = \Phi_1(x)\Psi_1(y) + \dots + \Phi_k(x)\Psi_k(y) = 0$.

6. Subtitusikan Φ_m dan Ψ_m yang diperoleh ke dalam sistem persamaan diferensial biasa.
7. Menyelesaikan sistem persamaan diferensial biasa sehingga diperoleh φ_m dan ψ_m .
8. Menulis kembali solusi pemisahan umum dari persamaan umum.

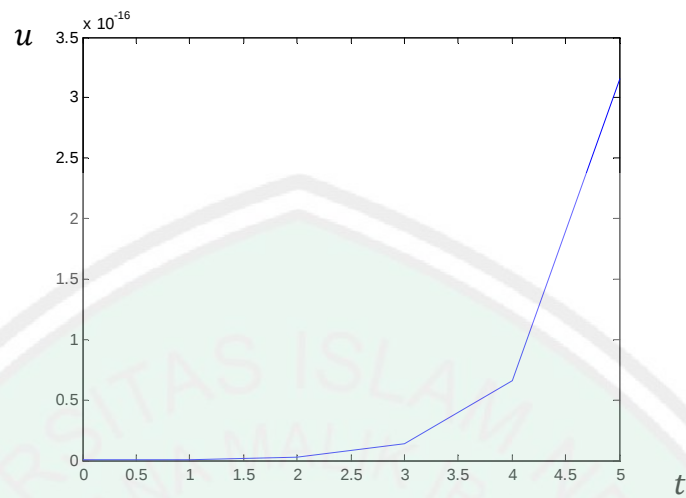
Hasil dari *splitting method* pada persamaan Navier-Stokes 2D adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned} W(x, y, t) &= U(y, t) + V(x, t) \\ &= C_n e^{\frac{n\pi}{\sqrt{a}}t} \sin\left(\frac{n\pi}{\sqrt{a}}\right)y + C_n e^{\frac{n\pi}{\sqrt{a}}t} \sin\left(\frac{n\pi}{\sqrt{a}}\right)x \end{aligned}$$

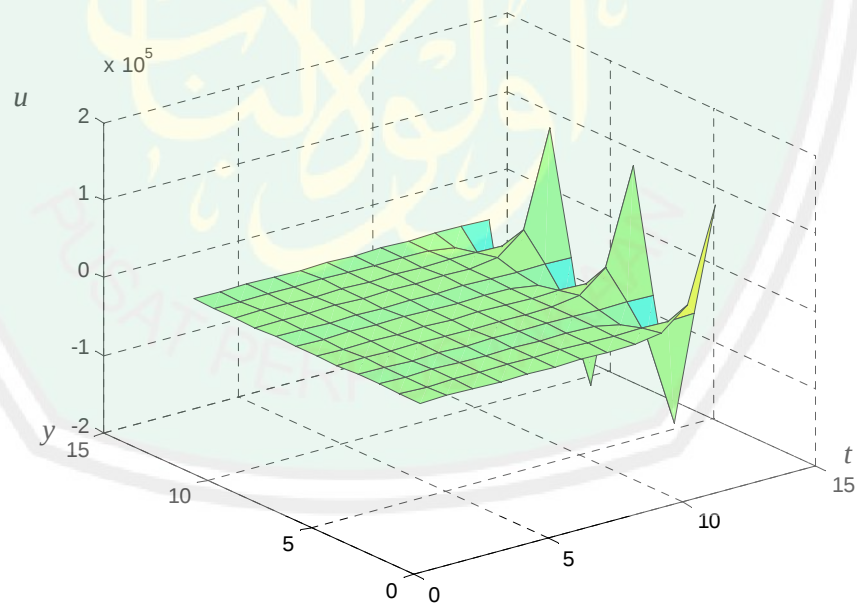
Gambarnya adalah:



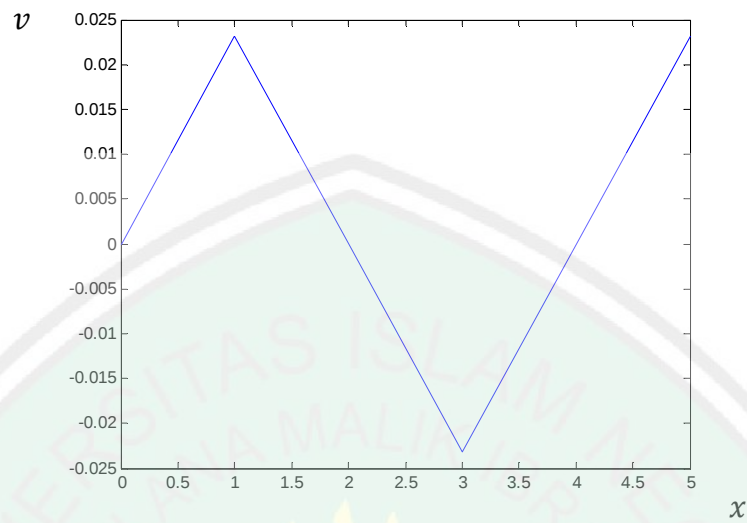
Gambar 4.1 Grafik Solusi Nilai Batas Bidang Gelombang dari Persamaan Navier-Stokes 2d pada Sumbu (u,y)



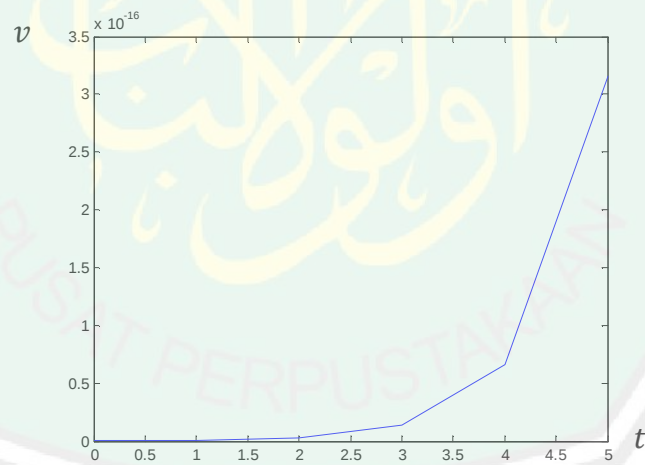
Gambar 4.2 Grafik Solusi Nilai Batas Bidang Gelombang dari Persamaan Navier-Stokes 2D pada Sumbu (u,t)



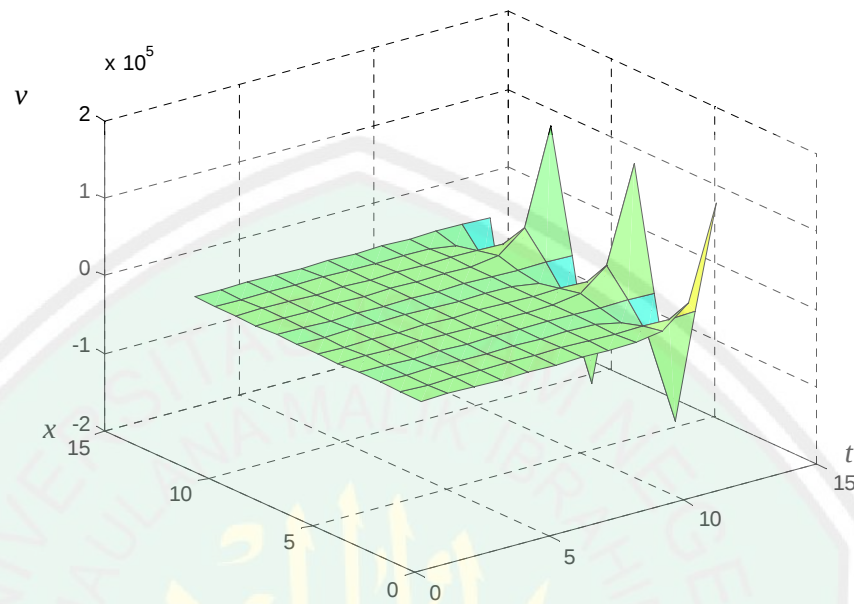
Gambar 4.3 Grafik Solusi Nilai Batas Bidang Gelombang dari Persamaan Navier-Stokes 2D pada Sumbu (u,y,t)



Gambar 4.4 Grafik Solusi Nilai Batas Bidang Gelombang dari Persamaan Navier-Stokes 2D pada Sumbu (v,x)



Gambar 4.5 Grafik Solusi Nilai Batas Bidang Gelombang dari Persamaan Navier-Stokes 2D pada Sumbu (v,t)



Gambar 4.6 Grafik Solusi Nilai Batas Bidang Gelombang dari Persamaan Navier-Stokes 2D pada Sumbu (v,x,t)

Bentuk kanonik dari persamaan Navier-Stokes 2D untuk x momentum:

$$[2u_{\xi} - 2u_{\eta}] + u[iu_{\xi} - iu_{\eta}] + v[iu_{\xi} - iu_{\eta}] + \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{Re}(-2u_{\xi}^2 + 4u_{\xi\eta} - 2u_{\eta}^2) = 0$$

dan untuk y momentum:

$$[2v_{\xi} - 2v_{\eta}] + u[iv_{\xi} - iv_{\eta}] + v[iv_{\xi} - iv_{\eta}] + \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{1}{Re}((-2v_{\xi}^2 + 4v_{\xi\eta} - 2v_{\eta}^2)) = 0$$

4.2 Saran

Data yang dimasukkan untuk memperoleh gambar penampang gelombang sebaiknya langsung diterapkan pada data perairan dangkal langsung dari Daerah Aliran Sungai. Metode pemisahan variabel untuk kasus persamaan diferensial parsial non linier dapat dikerjakan dengan metode Rayleigt-Ritz. Penelitian ini

juga dapat dilanjutkan pada justifikasi analisis besaran lebih lanjut dan analisis pengaruh besaran yang terkait dalam model Navier-Stokes khususnya pada fluida cair.



DAFTAR PUSTAKA

- Al Jazairi, A. B. J. 2006. *Tafsir Al-Aisar*. Terjemahan M. Azhari Hatim, M. A. dan Abdurrahim Mukti, M. A. Jakarta: Darus Sunnah Press
- Al Maragi, A. M. 1974. *Tafsir Al Maragi*. Terjemahan Bahrin Abubakar, Lc., K. Anshori Umar Sitanggal dan Drs. Hery Noer Aly. 1993. Semarang: CV. Toha Putra Semarang
- Al Qurthubi, S. I. 2008. *Tafsir Al Qurthubi*. Terjemahan Fathurrahman, Ahmad Hotib, dan Dudi Rasyadi. Jakarta: Pustaka Azzam
- Anton, H. 2000. *Elementary Linear Algebra*. Terjemahan Refina Indriasari, S.T., M.Sc dan Irzam Harmein, S.T. 2004. Jakarta: Erlangga.
- Ash-Shiddieqy, M. H. T. 2000. *Tafsir Al-Qur'anul Majid An-Nur*. Semarang: Pustaka Rizki Putra
- Finizio, N dan Ladaz, G. 1982. *Ordinary Differential Equations, with Modern Applications*. Terjemahan Widiarti Santoso ITB. 1988. Erlangga: Jakarta
- Furi, S.S.A. 2006. *Tafsir Ibnu Katsir. Jilid 2*. Terjemahan Abu ihsan al-Atsari. Bogor: Pustaka Ibnu Katsir
- Godwin, P. B., Dugdale R. H. 1986. *Mekanika Fluida Edisi Ketiga*. Jakarta: Erlangga
- Kaplan, W. 1963. *Advanced Calculus: First Edition*. London: Addison-Wesley Publishing Company, Inc
- Johnson, Lee W. R, Dean Riess, dan Jimmy T. Arnold. 1993. *Introduction to Linear Algebra*. New York: Addison-Wesley Publishing Company.
- Nagle, K. R dan Saff, E.B. 1996. *Fundamentals of Differential Equations and Boundary Value Problems*. Florida: University of South Florida.
- Munson, Bruce R, dkk. 2002. *Fundamentals of Fluid Mechanics, Fourth Edition. Jilid 1*. Tejemahan Dr. Ir. Harinaldi dan Ir. Budiarmo M.Eng. 2003. Jakarta: Erlangga.
- Munson, B.R, dkk. 2002. *Fundamentals of Fluid Mechanics, Fourth Edition. Jilid 2*. Tejemahan Dr. Ir. Harinaldi dan Ir. Budiarmo M.Eng. 2003. Jakarta: Erlangga.
- Orianto, M & Pratikto. 1989. *Mekanika Fluida*. Yogyakarta: BPFE-Yogyakarta

- Polyanin , A. D. dan Zaitsev ,V. F. 2003. *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations*. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press
- Qutb, S. 2001. *Fi-Zhilalil Qur'an*. Terjemahan Aunur Rafiq Shaleh Tamhid, Lc dan Syafril Halim, Lc. Jakarta: Rabbani Press
- Soeharjo. 1996. *Matematika IV*. Diklat ITS
- Soewarno. 1991. *Hidrologi: Pengukuran dan Pengolahan Data Aliran Sungai (Hidrometri)*. Bandung: Penerbit Nova
- Spiegel, M R. 1983. *Advanced Mathematics for Engineer and Scientists*. Terjemahan oleh Koko Martono. 1994. Jakarta: Erlangga
- Stewart, J. 2002. *Kalkulus jilid 1*. Terjemahan oleh I Nyoman Susila, Hendra Gunawan. 2002. Jakarta: Erlangga.
- Stewart, J. 2003. *Kalkulus jilid 2*. Terjemahan oleh I Nyoman Susila, Hendra Gunawan. 2003. Jakarta: Erlangga.
- Sutrima. 2004. *Representasi Sprektal dari Operator Strum-Liouville Berparameter*. Jurnal MIPA Jurusan Matematika FMIPA UNS. MIPA vol 14:17.
- White F.M. 1988. *Mekanika Fluida Edisi Kedua Jilid 1*. Jakarta: Erlangga
- Zauderer, E. 2006. *Partial Differential Equations of Applied Mathematics*. New Jersey: John Willey & Sons, Inc



KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS & TEKNOLOGI
Jln. Gajayana No. 50 Malang Telp. (0341) 551354 Fax. (0341) 572533

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Fitriyanti Rumfot
NIM : 07610018
Fakultas/ Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Analisis Persamaan Navier-Stokes 2D untuk Model Gelombang Perairan Dangkal dengan Masalah Nilai Awal dan Masalah Nilai Batas
Pembimbing I : Ari Kusumastuti, S.Si., M.Pd
Pembimbing II : Ach. Nashichuddin, M.A

No	Tanggal	Hal Yang Dikonsultasikan	Tanda Tangan
1	12 November 2010	Konsultasi Bab I dan Bab II	1.
2	19 November 2010	Konsultasi Kajian Agama Bab I dan Bab II	2.
3	15 November 2010	Revisi Bab I dan Bab II	3.
4	16 November 2010	ACC Bab I dan Bab II	4.
5	25 November 2010	Revisi Kajian Agama Bab I dan Bab II	5.
6	12 Januari 2011	Revisi Kajian Agama Bab I dan Bab II, Konsultasi Kajian Agama Bab III	6.
7	13 Januari 2011	Konsultasi Bab III dan Bab IV	7.
8	14 Januari 2011	Revisi Kajian Agama Bab III	8.
9	14 Januari 2011	Revisi Bab III (pembahasan)	9.
10	15 Januari 2011	ACC Bab III dan Bab IV	10.
11	22 Maret 2011	ACC Kajian Agama	11.
12	22 Maret 2011	ACC Keseluruhan	12.

Malang, 23 Maret 2011
Mengetahui
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001