CENTRALIZER, CENTER, DAN NORMALIZER SUBGRUP DI GRUP DIHEDRAL-$2n$ $(D_{2n}, \circ)$

SKRIPSI

Oleh:

EMMA PROVITA RAHMA

NIM. 07610009

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM

MALANG

2011

CENTRALIZER, CENTER, DAN NORMALIZER SUBGRUP DI GRUP DIHEDRAL-$2n$ $(D_{2n}, \circ)$

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
EMMA PROVITA RAHMA
NIM. 07610009

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2011

CENTRALIZER, CENTER, DAN NORMALIZER SUBGRUP DI GRUP DIHEDRAL-$2n$ $(D_{2n},\circ)$

SKRIPSI

Oleh:
EMMA PROVITA RAHMA
NIM. 07610009

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji

Tanggal: 25 Maret 2011

Dosen Pembimbing I,	Dosen Pembimbing II,
Evawati Alisah, M.Pd	Abdul Aziz, M.Si
NIP.19720604 199903 2 001	NIP. 19760318 200604 1 002

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

CENTRALIZER, CENTER, DAN NORMALIZER SUBGRUP DI GRUP DIHEDRAL-$2n$ $(D_{2n}, \circ)$

SKRIPSI

Oleh:
EMMA PROVITA RAHMA
NIM. 07610009

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal: 02 April 2011

Susunan Dewan Penguji			Tanda Tangan
1. Penguji Utama	:	Wahyu Henky Irawan, M.Pd NIP. 19710420 200003 1 003	____________
2. Ketua Penguji	:	Abdussakir, M.Pd NIP. 19751006 200312 1 001	____________
3. Sekretaris Penguji	:	Evawati Alisah, M.Pd NIP. 19720604 199903 2 001	____________
4. Anggota	:	Abdul Aziz, M.Si NIP. 19760318 200604 1 002	____________

Mengetahui dan Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika,

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: Emma Provita Rahma
NIM	: 07610009
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambil-alihan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 25 Maret 2011

Yang membuat pernyataan,

Emma Provita Rahma
NIM. 07610009

MOTTO

إِنَّ مَعَ ٱلۡعُسۡرِ يُسۡرًا ۝٦

"*Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan.*"

(Q.S. Al Insyirah : 6)

PERSEMBAHAN

Dengan segenap rasa syukur Alhamdulillah, karya ini dipersembahkan kepada:

Ayah Nur Ali

Ibu Siti Aliyah

Adik Nizara Isnanda Rahma

Adik Rizqy Mafluhatur Rahma

KATA PENGANTAR

بِسْمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحْمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

Alhamdulillah, puji syukur ke hadirat Allah SWT yang telah memberikan rahmat, taufik, dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik. Shalawat serta salam senantiasa terlantunkan kepada Nabi Muhammad SAW yang telah menunjukkan jalan yang lurus dan jalan yang diridhoi-Nya yakni agama Islam.

Skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik berkat bantuan, bimbingan, dan motivasi dari berbagai pihak. Penulis mengucapkan terima kasih dan hanya dapat memberikan ucapan dan doa, semoga Allah SWT membalas semua kebaikan dan menyinari jalan yang diridhoi-Nya, khususnya kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, sebagai rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, S.U, D.Sc sebagai dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd, sebagai ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Evawati Alisah, M.Pd dan Abdul Aziz, M.Si sebagai dosen pembimbing skripsi.
5. Ayah Nur Ali, Ibu Siti Aliyah, adik-adik Nizara Isnanda Rahma dan Rizqy Mafluhatur Rahma tercinta serta segenap keluarga.
6. Semua guru yang telah memberikan ilmu yang sangat berharga kepada penulis.

7. Wahyu Henky Irawan, M.Pd yang selalu memberikan arahan, nasihat, dan motivasi kepada penulis.
8. Teman-teman saya Faridhatun Nasikah, Silva Ahmad Adini, Fahima, Irma Nadia, Azki Adawiyah, M. Syafi'i, dan seluruh teman-teman jurusan matematika.
9. Seluruh penghuni Wisma Melati.
10. Kepada semua pihak yang telah membantu dalam penyelesaian skripsi ini, yang tidak bisa disebutkan satu per satu.

Semoga skripsi ini dapat bermanfaat. Amin.

Malang, 25 Maret 2011

Penulis

DAFTAR ISI

BAB IV PENUTUP

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

ABSTRAK

Rahma, Emma Provita. 2011. ***Centralizer*, *Center*, dan *Normalizer* Subgrup di Grup *Dihedral-2n* $(\boldsymbol{D_{2n}},\circ)$.** Skripsi. Jurusan Matematika. Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: (I) Evawati Alisah, M.Pd
(II) Abdul Aziz, M.Si

Kata kunci: grup *dihedral-2n* $(D_{2n},\circ)$, subgrup, *centralizer, center, normalizer*

Beberapa pokok bahasan dalam Aljabar adalah *centralizer, center*, dan *normalizer* subgrup di grup *dihedral-2n* $(D_{2n},\circ)$. Grup *dihedral-2n* $(D_{2n},\circ)$ adalah kumpulan dari simetri-simetri poligon n beraturan yang terdiri dari rotasi dan refleksi dengan operasi komposisi. Grup ini berkorespondensi dengan grup simetri-n dengan permutasinya. Elemen dari grup *dihedral-2n* $(D_{2n},\circ)$ adalah $D_{2n} = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, \dots, sr^{n-1}\}$. Grup ini tidak abelian sehingga centralizer, center, dan normalizer subgrupnya akan membentuk pola tertentu. Penentuan pola tersebut dilakukan dengan penentuan centralizer, center, dan normalizer subgrup pada beberapa grup *dihedral-2n* $(D_{2n},\circ)$ dan dilanjutkan dengan menentukan pola secara umum dalam grup tersebut. Penelitian ini menghasilkan pola banyaknya subgrup dari grup *dihedral-2n* $(D_{2n},\circ)$, tipe *centralizer, center*, dan *normalizer* subgrup di grup *dihedral-2n* $(D_{2n},\circ)$.

ABSTRACT

Rahma, Emma Provita. 2011. **Centralizer, Center, and Normalizer of Subgroup in Dihedral$-2n$ Group $(D_{2n},\circ)$.** Thesis. Mathematics Department. Science and Technology Faculty. State Islamic University Maulana Malik Ibrahim Malang.
Advisors : (I) Evawati Alisah, M.Pd
(II) Abdul Aziz, M.Si

Keywords: dihedral$-2n$ group $(D_{2n},\circ)$, subgroup, centralizer, center, normalizer

Several of topics in Algebra are centralizer, center, and normalizer of subgroup in dihedral$-2n$ group $(D_{2n},\circ)$. Dihedral$-2n$ group $(D_{2n},\circ)$ is a set of symmetries of a regular *n*-polygon contain rotation and reflection, with composition operation. This group is corresponding with permutation form of symmetry group. The element of this group is $D_{2n} = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, \dots, sr^{n-1}\}$. This group is not abelian group, so the centralizer, center, and normalizer of the subgroup will form certain pattern. The pattern determining is doing by determining the centralizer, center, and normalizer of subgroup in some of dihedral groups and then determining the general pattern of the group. This research results the patterns of the number of subgroup from the dihedral$-2n$ group $(D_{2n},\circ)$, the types of centralizer, center, and normalizer of subgroup in dihedral$-2n$ group $(D_{2n},\circ)$.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Secara bahasa, kata “matematika“ berasal dari bahasa Yunani yaitu “*mathema*” atau mungkin juga “*mathematikos*” yang artinya hal-hal yang dipelajari. Orang Belanda menyebut matematika dengan *wiskunde* yang artinya ilmu pasti. Sedangkan orang Arab menyebut matematika dengan *‘ilmu al-hisab*, artinya ilmu berhitung. Secara istilah, sampai saat ini belum ada definisi yang tepat mengenai matematika. Definisi-definisi yang dibuat para ahli matematika semuanya benar berdasar sudut pandang tertentu. Meskipun belum ada definisi yang tepat, matematika mempunyai ciri khas yang tidak dimiliki pengetahuan lain, yaitu merupakan abstraksi dari dunia nyata, menggunakan bahasa simbol, dan menganut pola pikir deduktif (pola berpikir yang didasarkan pada kebenaran-kebenaran yang secara umum sudah terbukti benar) (Abdussakir, 2007: 5). Sumber studi matematika, sebagaimana sumber ilmu pengetahuan dalam islam adalah tauhid, yaitu ke-Esa-an Allah. Akan tetapi Al-Quran tidak mengangkat metode baru dalam masalah ini, melainkan telah menunjukkan tentang adanya eksistensi dari sesuatu yang ada di balik alam semesta itu sendiri. Alam semesta serta segala isinya diciptakan Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mapan, dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi.

Dalam Al-Qur’an surat Al-Qamar ayat 49 disebutkan,

إِنَّا كُلَّ شَيۡءٍ خَلَقۡنَٰهُ بِقَدَرٖ

Artinya: *“Sesungguhnya kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran.”*

Ayat di atas menjelaskan bahwa semua yang ada di alam ini ada ukurannya, hitungannya, rumusnya, atau persamaannya. Ahli matematika atau fisika tidak membuat suatu rumus sedikitpun. Mereka hanya menemukan rumus atau persamaan (Abdussakir, 2007: 80). Jadi matematika sebenarnya telah diciptakan sejak zaman dahulu, manusia hanya menyimbolkan fenomena-fenomena yang ada dalam kehidupan sehari-hari. Manusia dianugerahi Allah petunjuk dengan kedatangan sekian rasul untuk membimbing mereka. Allah juga menganugerahkan akal agar mereka berpikir tentang kebesaran Tuhan. Semua anugerah itu termasuk dalam sistem yang sangat tepat, teliti, dan rapi yang telah ditetapkan Allah SWT. Dalam Al-Quran surat Al-Furqaan ayat 2:

ٱلَّذِي لَهُۥ مُلۡكُ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلۡأَرۡضِ وَلَمۡ يَتَّخِذۡ وَلَدٗا وَلَمۡ يَكُن لَّهُۥ شَرِيكٞ فِي ٱلۡمُلۡكِ وَخَلَقَ كُلَّ شَيۡءٖ فَقَدَّرَهُۥ تَقۡدِيرٗا ٢

Artinya: *“Yang kepunyaan-Nya-lah kerajaan langit dan bumi, dan dia tidak mempunyai anak, dan tidak ada sekutu baginya dalam kekuasaan(Nya), dan dia Telah menciptakan segala sesuatu, dan dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya”*

Dalam kehidupan sehari-hari, manusia tidak lepas dari berbagai masalah yang menyangkut berbagai aspek penyelesaiannya perlu pemahaman melalui seautu metode dan ilmu bantu tertentu. Matematika merupakan salah satu cabang ilmu yang mendasari berbagai macam ilmu lain. Matematika juga merupakan alat untuk menyederhanakan penyajian dan pemahaman masalah (Purwanto, 1998: 1).

Seiring dengan perkembangan zaman, keilmuan matematika juga berkembang dalam konsep dan penerapannya, baik penerapan dalam kehidupan sehari-hari maupun dalam hubungannya dengan disiplin ilmu lainnya. Matematika mempunyai beberapa cabang keilmuan yang masing-masing mempunyai penerapan dalam hubungannya dengan berbagai disiplin ilmu lain dan dalam kehidupan sehari-hari. Salah satu dari cabang-cabang ilmu tersebut adalah Aljabar abstrak. Aljabar abstrak merupakan bagian dari ilmu matematika yang berkembang dengan pesat karena berhubungan dengan himpunan, dan sifat struktur-struktur di dalamnya.

Salah satu yang dipelajari dalam ilmu aljabar abstrak adalah teori tentang grup. Grup adalah sebuah pasangan berurutan $(G,*)$ dimana G adalah sebuah himpunan dan "$*$" adalah sebuah operasi biner pada G yang memenuhi aksioma-aksioma tertentu yaitu tertutup, bersifat assosiatif, memuat identitas, dan memuat invers dari setiap elemennya. Seperti konsep dalam himpunan, dalam grup juga terdapat subgrup yaitu jika $(G,*)$ grup, $H \subseteq G$, maka $(H,*)$ adalah subgrup dari grup $(G,*)$ jika $(H,*)$ juga grup. Dalam grup juga dipelajari *centralizer*, *center*, dan *normalizer* suatu grup, yang menunjukkan sifat komutatif dari elemen-elemen tertentu suatu grup.

Grup *dihedral-2n* $(D_{2n},\circ)$ adalah himpunan simetri-simetri yaitu rotasi (perputaran) dan refleksi (pencerminan) dari segi-*n* beraturan, dinotasikan dengan D_{2n} untuk setiap $n \geq 3, n \in \mathbb{N}$ dengan operasi komposisi dan memenuhi aksioma-aksioma grup. Grup *dihedral-2n* $(D_{2n},\circ)$ bukan merupakan grup abelian (grup yang setiap elemennya komutatif) karena terdapat beberapa unsur yang tidak komutatif terhadap operasi komposisi.

Pembahasan aljabar abstrak khususnya tentang *centralizer*, *center*, dan *normalizer* melibatkan sub-sub himpunan dari suatu grup tertentu seperti grup *dihedral*, grup simetri, grup bilangan riil positif, grup permutasi, grup modulo-n. Di antara sub-sub himpunan tersebut, terdapat beberapa sub himpunan yang merupakan grup yang disebut dengan subgrup. Pembahasan tentang *centralizer*, *center*, dan *normalizer* suatu grup yang sering adalah menggunakan sebarang sub himpunan dari suatu grup tertentu. Jika penentuan *centralizer*, *center*, dan *normalizer* suatu grup hanya menggunakan subgrup-subgrup dari suatu grup tertentu, apakah akan terbentuk suatu pola? bagaimana pola yang terbentuk?

Berdasarkan latar belakang tersebut, peneliti tertarik untuk membahas tentang "***centralizer*, *center*, dan *normalizer* subgrup di grup *dihedral*-$2n$ $(D_{2n},\circ)$**" dengan harapan dapat lebih memperdalam materi dan dapat memberikan referensi yang berhubungan dengan penelitian tersebut. Hasil dari penelitian ini dapat dijadikan teorema sebagai tambahan pustaka perkuliahan, khususnya bidang aljabar. Peneliti mengambil obyek grup *dihedral*-$2n$ $(D_{2n},\circ)$ dengan alasan hasil penelitian ini dapat menambah informasi baru tentang sifat grup *dihedral*-$2n$ $(D_{2n},\circ)$ yang berkaitan dengan aljabar abstrak, khususnya *centralizer*, *center*, dan *normalizer* dari suatu grup. Selain itu, karena grup *dihedral*-$2n$ $(D_{2n},\circ)$ bukan merupakan grup abelian, maka *centralizer*, *center*, dan *normalizer* dari grup *dihedral*-$2n$ $(D_{2n},\circ)$ dimungkinkan akan memiliki suatu pola tertentu.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, rumusan masalah dalam penelitian ini adalah:

1. Bagaimana pola banyaknya subgrup dari grup *dihedral-2n* $(D_{2n},\circ)$?
2. Bagaimana pola *centralizer* subgrup di grup *dihedral-2n* $(D_{2n},\circ)$?
3. Bagaimana pola *center* dari grup *dihedral-2n* $(D_{2n},\circ)$?
4. Bagaimana pola *normalizer* subgrup di grup *dihedral-2n* $(D_{2n},\circ)$?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, tujuan dari penelitian ini adalah:

1. Mengetahui pola banyaknya subgrup dari grup *dihedral-2n* $(D_{2n},\circ)$.
2. Mengetahui pola *centralizer* subgrup di grup *dihedral-2n* $(D_{2n},\circ)$.
3. Mengetahui pola *center* dari grup *dihedral-2n* $(D_{2n},\circ)$.
4. Mengetahui pola *normalizer* subgrup di grup *Dihedral-2n* $(D_{2n},\circ)$.

1.4 Manfaat Penelitian

Hasil penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat bagi:

1. Peneliti

   Peneliti memperoleh tambahan pengetahuan tentang Aljabar Abstrak, khususnya tentang *centralizer*, *center*, *normalizer*, dan grup *dihedral-2n* $(D_{2n},\circ)$. Selain itu, peneliti juga memperoleh tambahan wawasan penelitian tentang *centralizer*, *center*, dan *normalizer* subgrup di grup *dihedral-2n* $(D_{2n},\circ)$.

2. Lembaga

   Bagi lembaga, sebagai tambahan pustaka untuk bahan perkuliahan tentang *centralizer*, *center*, dan *normalizer* dari suatu grup, serta tentang grup *dihedral-2n* $(D_{2n},\circ)$. Selain itu, juga sebagai tambahan pustaka untuk rujukan penelitian tentang *centralizer*, *center*, dan *normalizer* subgrup dari grup *dihedral-2n* $(D_{2n},\circ)$.

3. Pembaca

   Pembaca memperoleh pengetahuan tambahan mengenai salah satu materi disiplin ilmu Matematika, yaitu bidang Aljabar Abstrak, khususnya tentang *centralizer*, *center*, dan *normalizer* subgrup di grup *dihedral-2n* $(D_{2n},\circ)$.

1.5 Batasan Masalah

Batasan masalah dalam penelitian ini diantaranya obyek penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah:

a. Obyek penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah grup *dihedral-2n* $(D_{2n},\circ)$ dengan operasi komposisi.
b. Penelitian ini hanya difokuskan pada penentuan pola subgrup, *centralizer*, *center*, dan *normalizer* subgrup di grup *dihedral-2n* $(D_{2n},\circ)$ serta pembuktian pola tersebut.

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode studi literatur yaitu penelitian yang dilakukan dengan mengumpulkan teori dan informasi yang berhubungan dengan penelitian dengan bantuan referensi yang terdapat di ruang perpustakaan seperti buku-buku.

Langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Identifikasi masalah mengenai permasalahan yang ada pada *centralizer*, *center*, dan *normalizer* subgrup di grup *dihedral-2n* (D_{2n},∘),
2. Mengumpulkan sumber-sumber referensi pendukung dari internet yang berupa definisi, sifat-sifat, dan teorema-teorema tentang grup, subgrup, *centralizer*, *center*, dan *normalizer*, dan grup *dihedral-2n* (D_{2n},∘),
3. Merumuskan masalah tentang *centralizer*, *center*, dan *normalizer* subgrup di grup *dihedral-2n* (D_{2n},∘),
4. Mengumpulkan data berupa penentuan subgrup, *centralizer*, *center*, dan *normalizer*, dari grup *dihedral-2n* (D_{2n},∘) yang dimulai dari $n = 3$ sampai dengan $n = 9$.
5. Menganalisis penentuan pola:
   a. Mengidentifikasi unsur-unsur dari D_6 sampai dengan D_{18}.
   b. Menentukan subgrup dari grup *dihedral*-6 (D_6,∘) sampai dengan grup *dihedral*-18 (D_{18},∘),
   c. Menentukan *centralizer* semua subgrup pada masing-masing grup *dihedral*-6 (D_6,∘) sampai dengan grup *dihedral*-18 (D_{18},∘),
   d. Menentukan *center* semua grup *dihedral*-6 (D_6,∘) sampai dengan grup *Dihedral*-18 (D_{18},∘),

e. Menentukan *normalizer* semua subgrup pada masing-masing grup *Dihedral*-6 $(D_6,\circ)$ sampai dengan grup *dihedral*-18 $(D_{18},\circ)$,

f. Membuat pola umum banyaknya subgrup dari grup *dihedral-2n* $(D_{2n},\circ)$, tipe dari *centralizer*, *center*, dan *normalizer* subgrup di grup *dihedral-2n* $(D_{2n},\circ)$,

g. Membuktikan pola umum banyaknya subgrup di grup *dihedral-2n* $(D_{2n},\circ)$, tipe dari *centralizer*, *center*, dan *normalizer* subgrup di grup *dihedral-2n* $(D_{2n},\circ)$.

6. Merumuskan kesimpulan dari hasil pembahasan yang telah dikemukakan berdasarkan rumusan masalah.

1.7 Sistematika Penulisan

Agar penulisan penelitian ini sistematis dan mempermudah pembaca memahami tulisan ini, penulis membagi tulisan ini ke dalam empat bab sebagai berikut:

1. BAB I PENDAHULUAN

   Bab ini membahas tentang latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

2. BAB II KAJIAN PUSTAKA

   Bab ini membahas tetang teori-teori yang berhubungan dengan penelitian yaitu tentang grup, subgrup, *centralizer*, *center*, dan *normalizer*, grup simetri, dan grup *dihedral-2n* $(D_{2n},\circ)$.

3. BAB III PEMBAHASAN

Bab ini membahas tentang analisis penentuan pola diperoleh berupa subgrup-subgrup dan banyaknya subgrup, tipe *centralizer*, *center*, dan *normalizer* subgrup di grup *dihedral-2n* $(D_{2n},\circ)$, dan pola-pola umum beserta buktinya.

4. BAB IV PENUTUP

Bab ini berisi kesimpulan dari materi yang dibahas dan saran peneliti untuk pembaca dan peneliti selanjutnya.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Relasi

Suatu relasi f dari suatu himpunan A ke himpunan B adalah sub himpunan dari $A \times B$. Himpunan $\{x: (x, y) \in f\}$ disebut daerah asal (domain) dari f dan himpunan $\{y: (x, y) \in f\}$ disebut himpunan daerah hasil (range). Invers dari f, dinotasikan f^{-1}, adalah relasi dari B ke A didefinisikan sebagai $f^{-1} = \{(y, x): (x, y) \in f\}$. Jika $A = B$, sebarang sub himpunan dari $A \times A$ disebut relasi dalam himpunan A. Jika f suatu relasi dan $(x, y) \in f$, dikatakan bahwa x direlasikan oleh f ke y (Raisinghania dan Aggarwal, 1980: 11).

Contoh 2.1 :

Misalkan $P = \{2,3,4\}$ dan $Q = \{2,4,8,9,15\}$. Jika didefinisikan relasi R dari P ke Q dengan $(p, q) \in R$ jika p habis membagi q maka diperoleh $R = \{(2,2), (2,4), (4,4), (2,8), (4,8), (3,9), (3,15)\}$.

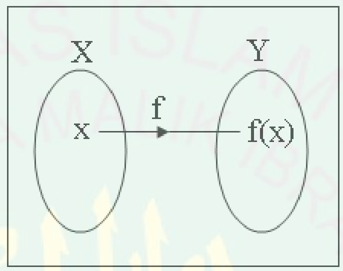
2.2 Fungsi (Pemetaan)

Misalkan X dan Y adalah dua himpunan tak-kosong, maka fungsi atau pemetaan dari X ke Y adalah suatu korespondensi yang menghubungkan setiap elemen x dari X, suatu elemen tunggal dinyatakan oleh $f(x)$ dari Y dan ditulis:

$$f: X \rightarrow Y$$

yang berarti bahwa f adalah pemetaan dari X ke Y. Elemen $f(x)$ dari Y terhubung dengan elemen x dari X disebut *image* dari x atau bayangan dari x, sedangkan x disebut *pre-image* dari $f(x)$ (Raisinghania dan Aggarwal, 1980: 14).

Fungsi f memetakan X ke Y dapat direpresentasikan dengan gambar berikut:



Gambar 2.1: Fungsi f Memetakan X ke Y

Contoh 2.2:

Misalkan $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ didefinisikan oleh $f(x) = x^2$. Daerah asal dari f adalah himpunan bilangan bulat, dan *image* dari f adalah himpunan bilangan bulat tidak-negatif (karena kuadrat dari sembarang bilangan bulat tidak mungkin negatif).

Jika f adalah suatu pemetaan dari X ke Y, maka tidak mungkin bahwa sebuah elemen dari X boleh mempunyai dua *image.* Di pihak lain, hal ini sangat memungkinkan bahwa dua atau lebih elemen-elemen X mempunyai *image* yang sama. Jika setiap elemen dari X yang berbeda tidak ada yang mempunyai *image* yang sama, yaitu elemen-elemen yang berbeda dari X mempunyai *image-image* yang berbeda, maka pemetaan tersebut disebut fungsi satu-satu. Jadi, f adalah fungsi satu-satu jika dan hanya jika $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$. Dalam pemetaan ini, setiap elemen dari X harus mempunyai *image* di Y, tetapi beberapa elemen dari dari Y boleh tidak mempunyai *pre-image* sama sekali. Jika setiap elemen dari Y mempunyai sekurang-kurangnya satu *pre-image* di X, maka pemetaan tersebut disebut fungsi onto (fungsi pada). X disebut domain (daerah asal) dari f dan himpunan $f(X)$ terdiri dari semua *image* dari elemen-elemen X disebut range (daerah hasil) dari f. Jadi, f adalah fungsi onto jika dan hanya jika $f(X) = Y$. Pemetaan I dari X ke X didefinisikan $I(x) = x, \forall x \in X$ disebut pemetaan identitas pada X. Jika fungsi f adalah fungsi satu-satu sekaligus fungsi onto, maka fungsi f disebut fungsi bijektif (Raisinghania dan Aggarwal, 1980: 14).

Contoh 2.3:

Relasi $f = \{(1, x), (2, u), (3, v)\}$ dari $A = \{1,2,3\}$ ke $B = \{u, v, w, x\}$ merupakan fungsi injektif karena tidak ada dua elemen A yang mempunyai bayangan yang sama.

Contoh 2.4:

Relasi $f = \{(1, w), (2, u), (3, v)\}$ dari $A = \{1,2,3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ merupakan fungsi pada karena semua elemen B merupakan hasil dari f.

Contoh 2.5:

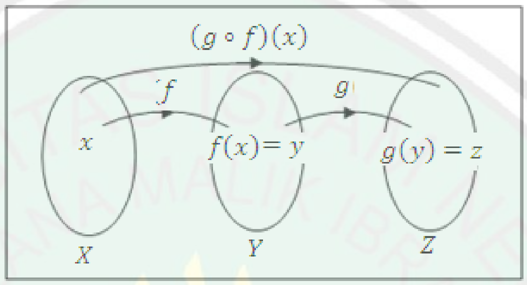
Relasi $f = \{(1, u), (2, w), (3, v)\}$ dari $A = \{1,2,3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ adalah fungsi yang berkorespondensi satu-satu, karena f adalah fungsi satu-satu maupun fungsi pada.

2.2.1 Fungsi Komposisi

Jika X, Y, dan Z adalah tiga himpunan sebarang sedemikian sehingga $f: X \to Y$ dan $g: Y \to Z$, maka f memetakan sebuah elemen x dari X ke sebuah elemen $f(x) = y$ dari Y dan elemen dari Y ini dipetakan ke sebuah elemen $g(y) = z$ dari Z sedemikian sehingga $z = g(y) = g(f(x))$. Jadi, diperoleh aturan yang memasangkan setiap elemen $x \in X$ ke elemen tunggal $z = g(f(x))$ dari Z.

Sehingga diperoleh suatu pemetaan yang dinyatakan $(g \circ f)$ dari X ke Z didefinisikan $(g \circ f)(x) = g(f(x)), \forall x \in X$ (Raisinghania dan Aggarwal, 1980: 16).

Komposisi dua buah fungsi f dan g digambarkan sebagai berikut:



Gambar 2.2 : Komposisi Dua Buah Fungsi

Contoh 2.6

Diberikan fungsi $g = \{(1,u),(2,u),(3,v)\}$ yang memetakan $A = \{1,2,3\}$ ke $B = \{u,v,w\}$, dan fungsi $f = \{(u,y),(v,x),(w,z)\}$ yang memetakan $B = \{u,v,w\}$ ke $C = \{x,y,z\}$. Fungsi komposisi dari A ke C adalah $f \circ g = \{(1,y),(2,y),(3,x)\}$.

Raisinghania dan Aggarwal (1980: 16) menyatakan dalam sebuah teorema bahwa fungsi komposisi adalah assosiatif.

Bukti:

Misalkan X, Y, Z, U adalah empat himpunan tak-kosong dan misalkan f, g, h adalah pemetaan dari X ke Y, Y ke Z, dan Z ke U berturut-turut. Maka harus ditunjukkan bahwa $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$. Untuk sebarang $x \in X$, diperoleh

$$\begin{aligned}[(h \circ g) \circ f](x) &= (h \circ g)(f(x)) \\ &= h\Big(g\big(f(x)\big)\Big) \\ &= h\big((g \circ f)(x)\big)\end{aligned}$$

$$= [h \circ (g \circ f)](x)$$

Jadi, $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$. Jadi, fungsi komposisi adalah assosiatif.

2.2.2 Fungsi Invers

Misalkan f adalah fungsi satu-satu dari himpunan X ke himpunan Y dan misalkan y adalah sebarang elemen dari Y, maka f merupakan fungsi onto, elemen y di Y akan mempunyai *pre-image* x di X sehingga $f(x) = y$ dan f merupakan fungsi satu-satu, x harus tunggal. Jadi, jika f adalah fungsi satu-satu onto maka memetakan elemen y di Y terdapat elemen tunggal x di X sedemikian sehingga $f(x) = y$. Jadi, suatu fungsi yang dinyatakan f^{-1} didefinsikan sebagai:

$$f^{-1}: Y \to X : f^{-1}(y) = x, \forall y \in Y \Leftrightarrow f(x) = y.$$

Fungsi f^{-1} disebut invers dari f dan merupakan fungsi satu-satu dan onto dari Y ke X. Fungsi f dikatakan mempunyai invers (*inversible*) jika dan hanya jika satu-satu dan onto (Raisinghania dan Aggarwal, 1980: 16).

Contoh 2.6:

$$f: R^+ \to R^+: f(x) = e^x, \forall x \in R^+$$

dimana R^+ menyatakan himpunan semua bilangan real positif. Maka f adalah fungsi satu-satu dan onto karena $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow e^{x_1} = e^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$. Dan untuk setiap $x \in R^+$ terdapat $(log\, x) \in R^+$ sedemikian sehingga $f(log\, x) = e^{log\, x} = x$. Oleh sebab itu, fungsi invers didefinisikan

$f^{-1}: R^+ \to R^+: f^{-1}(y) = log\, y, \forall y \in R^+$.

Raisinghania dan Aggarwal (1980: 17) menyatakan dalam sebuah teorema bahwa misalkan X, Y, dan Z adalah sembarang tiga himpunan tak-kosong dan misalkan f dan g adalah fungsi satu-satu X pada Y dan Y pada Z berturut-turut sehingga f dan g merupakan dua fungsi yang *inversible* maka $(g \circ f)$ juga *inversible* dan

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Bukti:

Untuk menunjukkan bahwa $(g \circ f)$ *inversible*, maka harus ditunjukkan bahwa $(g \circ f)$ adalah fungsi satu-satu dan onto. Misalkan x dan y adalah dua elemen sebarang dari X, maka

$$(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$$

$$g(f(x)) = g(f(y))$$

$$f(x) = f(y) \qquad [g \text{ adalah fungsi satu-satu}]$$

$$x = y \qquad [f \text{ adalah fungsi satu-satu}]$$

Jadi, $(g \circ f)$ adalah fungsi satu-satu.

Untuk menunjukkan bahwa $(g \circ f)$ adalah fungsi onto, misalkan z adalah sebarang elemen dari Z, maka g fungsi onto jika terdapat $y \in Y$ sedemikian sehingga $g(y) = z$. Begitu juga f adalah onto jika terdapat $x \in X$ sedemikian sehingga $g(x) = y$. Akibatnya,

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g\big(f(x)\big) \\ &= g(y) \qquad [f(x) = y] \\ &= z \qquad [g(y) = z]\end{aligned}$$

Sehingga untuk sebarang $z \in Z$, terdapat $x \in X$ sedemikian sehingga $(g \circ f)(x) = z$. Jadi, $(g \circ f)$ adalah fungsi onto. Karena $(g \circ f)$ adalah fungsi satu-satu dan onto, maka $(g \circ f)$ *inversible*. Selanjutnya

$$(g \circ f)(x) = z \Rightarrow (g \circ f)^{-1}(z) = x \qquad \text{... (i)}$$

$$(f^{-1} \circ g^{-1})(z) = f^{-1}\left(g^{-1}(z)\right)$$

$$= f^{-1}(y) \qquad [g(y) = z \Rightarrow y = g^{-1}(z)]$$

$$= x \qquad [f(x) = y \Rightarrow x = f^{-1}(y)]$$

$$(f^{-1} \circ g^{-1})(z) = x \qquad \text{... (ii)}$$

Jadi, dari (i) dan (ii) diperoleh $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

2.3 Bilangan Prima dan Keterbagian

Jika p adalah suatu bilangan bulat positif lebih dari 1 $(p > 1)$ yang hanya mempunyai pembagi positif 1 dan p, maka p disebut bilangan prima. Jika suatu bilangan bulat $q > 1$ bukan suatu bilangan prima, maka q disebut bilangan komposit (Muhsetyo, 1997: 92).

Contoh 2.7 :

Bilangan-bilangan $2, 3,$ dan 5 adalah bilangan-bilangan prima sebab:

a. 2 adalah bilangan positif yang hanya mempunyai pembagi positif 1 dan 2
b. 3 adalah bilangan positif yang hanya mempunyai pembagi positif 1 dan 3
c. 5 adalah bilangan positif yang hanya mempunyai pembagi positif 1 dan 5

Bilangan-bilangan $4, 6,$ dan 15 adalah bilangan-bilangan komposit sebab:

a. Pembagi-pembagi yang positif dari 4 adalah 1, 2, dan 4, tidak hanya 1 dan 4
b. Pembagi-pembagi yang positif dari 6 adalah 1, 2, 3, dan 6, tidak hanya 1 dan 6
c. Pembagi-pembagi yang positif dari 15 adalah 1, 3, 5, dan 15, tidak hanya 1 dan 15

Suatu bilangan bulat n adalah habis dibagi oleh suatu bilangan bulat $m \neq 0$ jika ada suatu bilangan bulat x sehingga $n = mx$, dinotasikan dengan $m|n$ (dibaca m membagi n, n habis dibagi m, m faktor n, atau n kelipatan dari m) dan $m \nmid n$ (dibaca m tidak membagi n, n tidak habis dibagi m, m bukan faktor n, atau n bukan kelipatan dari m). Jika suatu bilangan bulat dibagi oleh suatu bilangan bulat lain, maka hasil pembagiannya adalah bilangan bulat atau bukan bilangan bulat. Misalnya jika 30 dibagi 5 maka hasil baginya adalah bilangan bulat 6; tetapi jika 30 dibagi 4, maka hasil baginya adalah 7,5 bukan bilangan bulat (Muhsetyo, 1997: 43).

Contoh 2.8 :

$4|12$ sebab ada bilangan bulat 3 sehingga $12 = 4 \times 3$ atau $\frac{12}{4} = 3$

2.4 Grup

2.4.1 Operasi Biner

Dummit dan Foote (1980: 17) menyebutkan definisi dari operasi biner sebagai berikut:

1. Operasi biner " $*$ " pada suatu himpunan G adalah suatu fungsi $*: G \times G \to G$. Untuk setiap $a, b \in G$ dapat dituliskan $a * b$ untuk $*(a, b)$.
2. Suatu operasi biner " $*$ " pada suatu himpunan G adalah assosiatif jika untuk setiap $a, b, c \in G, a * (b * c) = (a * b) * c$.
3. Jika " $*$ " operasi biner pada suatu himpunan G, elemen-elemen $a, b \in G$ dikatakan komutatif jika $a * b = b * a$. Dikatakan " $*$ " (atau G) komutatif jika untuk setiap $a, b \in G, a * b = b * a$.

Contoh 2.9 :

Misalkan B = himpunan bilangan bulat. Operasi + (penjumlahan) pada B merupakan operasi biner, sebab operasi + merupakan pemetaan dari $(B \times B) \rightarrow B$, yaitu $\forall (a, b) \in B \times B$ maka $(a + b) \in B$. Jumlah dua bilangan bulat adalah suatu bilangan bulat pula. Operasi ÷ (pembagian) pada B bukan merupakan operasi biner pada B sebab terdapat $(a, b) \in B \times B$ sedemikian sehingga $(a \div b) \notin B$, misalnya $(3,4) \in B \times B$ dan $(3:4) \notin B$ (Sukirman, 2005: 35).

2.4.2 Definisi Grup

Himpunan tak-kosong G dikatakan grup jika dalam G terdapat operasi biner yang dinyatakan dengan " $*$ ", sedemikian sehingga menurut Herstein (1975: 28) :

1. Untuk setiap $a, b, c \in G$ mengakibatkan $a * (b * c) = (a * b) * c$ (sifat assosiatif)
2. Terdapat suatu elemen $e \in G$ sedemikian sehingga $a * e = e * a = a$ untuk setiap $a \in G$ (e adalah elemen identitas di G)
3. Untuk setiap $a \in G$, terdapat suatu elemen $a^{-1} \in G$ sedemikian sehingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ (a^{-1} adalah invers dari a di G).

Contoh 2.10:

$\mathbb{Z}$ adalah himpunan bilangan bulat, $(\mathbb{Z}, +)$ adalah grup karena berlaku:

1. Untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$ maka $(a + b) \in \mathbb{Z}$. Jadi, operasi $+$ adalah operasi biner pada $\mathbb{Z}$ atau dengan kata lain, operasi + tertutup di $\mathbb{Z}$.

2. Untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}$ maka $a + (b + c) = (a + b) + c$. Jadi, $\mathbb{Z}$ dengan operasi + (penjumlahan) memenuhi sifat assosiatif.
3. Terdapat elemen identitas yaitu $0 \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $a + 0 = 0 + a = a$, untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$.
4. Untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$ terdapat a^{-1} yaitu $(-a) \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga

$$a + (-a) = (-a) + a = 0$$

   Elemen $(-a)$ adalah invers dari a.

Karena himpunan $\mathbb{Z}$ dengan operasi + (penjumlahan) memenuhi aksioma-aksioma grup, maka $(\mathbb{Z}, +)$ adalah grup.

Grup $(G,*)$ dikatakan *abelian* (komutatif) jika untuk setiap $a, b \in G$ berlaku $a * b = b * a$ (Arifin, 2000: 36).

Contoh 2.11:

Misalkan m sembarang bilangan bulat tertentu dan misalkan $G = \{m \cdot a : a \in \mathbb{Z}\}$ adalah himpunan semua perkalian bilangan bulat dengan bilangan bulat tertentu m. Maka G adalah grup abelian dengan operasi + (penjumlahan). Himpunan G dengan operasi + (penjumlahan) menurut Raisinghania dan Aggarwal (1980: 34-35) memenuhi :

1. Jika $m \cdot a$ dan $m \cdot b$ adalah dua elemen sembarang dari G maka

$$m \cdot a + m \cdot b = m \cdot (a + b)$$

   Karena $a, b \in \mathbb{Z}$ maka $(a + b) \in \mathbb{Z}$

   Akibatnya $m \cdot (a + b) = m \cdot a + m \cdot b$ adalah perkalian bilangan bulat $(a + b)$ dengan m, sehingga $m \cdot a + m \cdot b \in G$.

   Jadi, G tertutup terhadap operasi + (penjumlahan).

2. Jika $m \cdot a, m \cdot b, m \cdot c \in G$ maka:

   $(m \cdot a + m \cdot b) + m \cdot c$

   $= \{m \cdot (a + b)\} + m \cdot c$

   $= m \cdot \{(a + b) + c\}$

   $= m \cdot \{a + (b + c)\}$ [keassosiatifan penjumlahan bilangan bulat]

   $= m \cdot a + m \cdot (b + c)$ [hukum distributif perkalian terhadap penjumlahan]

   $= m \cdot a + \{m \cdot b + m \cdot c\}$

   Jadi, penjumlahan assosiatif di G.

3. Terdapat $0 \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $m \cdot 0 = 0 \in G$, untuk sembarang elemen $m \cdot a$ dari G,

   $m \cdot 0 + m \cdot a = m(0 + a)$ [hukum distributif]

   $= m \cdot a$ [jadi, $0 + a = a$]

   $m \cdot a + m \cdot 0 = m \cdot (a + 0)$ [hukum distributif]

   $= m \cdot a$ [jadi, $0 + a = a$]

   Jadi, $m \cdot 0 + m \cdot a = m \cdot a + m \cdot 0 = m \cdot a, \forall m \cdot a \in G$

4. Jika $m \cdot a$ adalah sembarang elemen di G, maka a adalah bilangan bulat dan begitu juga $(-a)$ dan oleh sebab itu $m \cdot (-a)$ adalah elemen G

   $$m \cdot (-a) + m \cdot a = m \cdot a + m \cdot (-a) = m \cdot 0 = 0$$

   Jadi, setiap elemen $m \cdot a$ di G mempunyai invers penjumlahan yaitu $m \cdot (-a)$ di G.

5. Jika $m \cdot a$ dan $m \cdot b$ adalah dua elemen sembarang dari G maka

   $m \cdot a + m \cdot b = m \cdot (a + b)$ [distributif perkalian terhadap penjumlahan]

   $= m \cdot (b + a)$ [kekomutatifan penjumlahan bilangan bulat]

$$= m \cdot b + m \cdot a$$

Jadi, penjumlahan komutatif di G.

Jadi, $(G, +)$ adalah grup abelian.

2.4.3 Sifat-Sifat Grup

Jika G grup dengan operasi $*$, maka menurut Dummit dan Foote (1991: 19) berlaku:

(1) Identitas di G adalah tunggal

(2) Untuk setiap $a \in G, a^{-1}$ adalah tunggal

(3) $(a^{-1})^{-1} = a$, untuk setiap $a \in G$

(4) $(a * b)^{-1} = (b^{-1}) * (a^{-1})$

Sukirman (2005: 47) menambahkan:

(5) (Sifat penghapusan atau kanselasi)

Jika $(G,*)$ suatu grup, maka $\forall a, b, c \in G$ berlaku:

i) Jika $a * b = a * c$, maka $b = c$ (sifat kanselasi kiri)

ii) Jika $a * c = b * c$, maka $a = b$ (sifat kanselasi kanan)

Bukti :

Bukti dari sifat-sifat grup (1) dan (2) menurut Dummit dan Foote (1991: 19) :

(1) Jika f dan g keduanya identitas, $f, g \in G$, maka dengan aksioma dari definisi grup $f * g = f$ (ambil $a = f$ dan $e = g$). Dengan aksioma yang sama $f * g = g$ (ambil $a = g$ dan $e = f$). Jadi, $f = g$. Jadi, identitas dari G adalah tunggal.

(2) Diasumsikan b dan c keduanya invers dari a, misal e identitas dari G. Dengan $a * b = e$ dan $c * a = e$, sehingga

$c = c * e$ [definisi e]

$= c * (a * b)$ [$e = a * b$]

$= (c * a) * b$ [sifat assosiatif]

$= e * b$ [$e = c * a$]

$= b$ [definisi e]

Jadi, $c = b$. Jadi, invers dari a adalah tunggal.

(3) Untuk setiap $a \in G$ maka $a^{-1} \in G$ sehingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ (e adalah elemen identitas).

(i) $a * a^{-1} = e$

$(a * a^{-1}) * (a^{-1})^{-1} = e * (a^{-1})^{-1}$

$a * (a^{-1} * (a^{-1})^{-1}) = (a^{-1})^{-1}$ [assosiatif]

$a * e = (a^{-1})^{-1}$

$a = (e^{-1})^{-1}$

(ii) $a^{-1} * a = e$

$(a^{-1})^{-1} * (a^{-1} * a) = (a^{-1})^{-1} * e$

$((a^{-1})^{-1} * a^{-1}) * a = (a^{-1})^{-1}$ [assosiatif]

$e * a = (a^{-1})^{-1}$

$a = (e^{-1})^{-1}$

Dari (i) dan (ii), maka $a = (a^{-1})^{-1}$.

Sehingga $(a^{-1})^{-1} = a$

Bukti sifat-sifat grup (4) menurut Arifin (2000: 37) :

(4) Misal $c = (a * b)^{-1}$, sehingga dengan definisi c, $(a * b) * c = e$. Dengan sifat assosiatif diperoleh $a * (b * c) = e$. Kedua ruas dioperasikan dengan a^{-1} dari kiri untuk memperoleh bentuk:

$$a^{-1} * \big(a * (b * c)\big) = a^{-1} * e$$

Pada ruas kiri dikenakan sifat assosiatif operasi dan pada ruas kanan dikenakan definisi identitas e, diperoleh:

$(a^{-1} * a) * (b * c) = a^{-1}$

$e * (b * c) = a^{-1}$ [definisi identitas]

$(b * c) = a^{-1}$ [definisi identitas]

Kedua ruas dioperasikan dengan b^{-1} di sebelah kiri dan dengan cara yang sama:

$b^{-1} * (b * c) = b^{-1} * a^{-1}$

$(b^{-1} * b) * c = b^{-1} * a^{-1}$ [sifat assosiatif]

$e * c = b^{-1} * a^{-1}$ [definisi identitas]

$c = b^{-1} * a^{-1}$ [definisi identitas]

$(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$ [definisi c]

Jadi terbukti bahwa $(a * b)^{-1} = (b^{-1}) * (a^{-1})$.

Bukti sifat-sifat grup (5) menurut Sukirman (2005: 47) :

(5) i) ambil sembarang $a, b, c \in G$ dan diketahui bahwa $a * b = a * c$, maka

$a^{-1} * (a * b) = a^{-1} * (a * c)$ [G grup dan $a \in G$, maka $a^{-1} \in G$]

$(a^{-1} * a) * b = (a^{-1} * a) * c$ [sifat assosiatif]

$e * b = e * c$ [definisi identitas]

$b = c$

ii) ambil sembarang $a, b, c \in G$ dan diketahui bahwa $a * c = b * c$, maka

$(a * c) * c^{-1} = (b * c) * c^{-1}$ [G grup dan $c \in G$, maka $c^{-1} \in G$]

$a * (c * c^{-1}) = b * (c * c^{-1})$ [sifat assosiatif]

$a * e = b * e$ [definisi identitas]

$a = b$

2.4.4 Tabel Cayley

Dalam sebuah grup senantiasa melibatkan hanya satu operasi tertentu. Pendefinisian dari operasi pada suatu himpunan tak kosong merupakan salah satu syarat cukup untuk dapat mengkontruksi suatu struktur grup. Pendefinisan operasi pada himpunan berhingga (*finite*) dapat dilakukan dengan cara yang mudah yaitu dengan membuat tabel yang berisi hasil operasi dari masing-masing dua elemen di himpunan tersebut. Tabel ini disebut tabel Cayley (Sulandra, 1996: 55).

Contoh 2.12 :

Misalkan A grup dengan operasi pada himpunan tersebut adalah operasi biner "$*$". Himpunan $A = \{e, a\}, e$ elemen identitas. Maka tabel Cayley dari himpunan tersebut adalah:

Tabel 2.1: Tabel Cayley Grup A

$*$	e	a
e	e	a
a	a	e

Dari tabel tersebut, e adalah elemen identitas, sehingga $e * a = a * e = a$ dan agar himpunan A merupakan suatu grup dengan operasi "$*$", maka elemen a

harus mempunyai invers (balikan) a^{-1} sedemikian sehingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$. Sehingga diperoleh $a^{-1} = a$.

2.5 Subgrup

Sub himpunan tak-kosong H dari suatu grup G dikatakan subgrup dari G jika H membentuk grup terhadap operasi yang sama pada grup G (Herstein, 1975: 37).

Herstein (1975: 37) menyatakan dalam sebuah teorema bahwa suatu sub himpunan tak-kosong H dari grup G adalah subgrup dari grup G jika dan hanya jika menurut Herstein (1975: 38) berlaku:

1. $a, b \in H$ maka $a * b \in H$
2. $a \in H$ maka $a^{-1} \in H$

Bukti:

Untuk membuktikan teorema tersebut, perlu dibuktikan kondisi perlu dan cukup bagi subgrup. Kondisi perlu bagi subgrup adalah jika $(H,*) \leq (G,*)$ maka $\forall a, b \in H$ berlaku $a * b \in H$ dan $a^{-1} \in H$. Sedangkan kondisi cukup bagi subgrup adalah jika $H \subseteq G, H \neq \emptyset$ dan $a * b^{-1} \in H$ maka $(H,*) \leq (G,*)$.

Kondisi perlu:

$(H,*) \leq (G,*)$ maka $\forall a, b \in H$ berlaku $a * b \in H$ dan $a^{-1} \in H$

Diketahui $(H,*) \leq (G,*)$ maka H adalah sebuah grup, sehingga memenuhi aksioma-aksioma grup yaitu untuk setiap $a, b, c \in H$, maka berlaku sifat assosiatif, H memuat elemen identitas, dan H memuat invers dari setiap elemennya. Akan ditunjukkan bahwa untuk setiap $a, b, c \in H$ berlaku $a * b \in H$ dan $a^{-1} \in H$.

Karena H adalah grup. Karena H grup maka berlaku sifat ketertutupan yaitu untuk setiap $a, b \in H$ maka $a * b \in H$ dan H juga memuat invers dari setiap elemennya yaitu $a^{-1}, b^{-1} \in H$. Karena $a^{-1}, b^{-1} \in H$ maka berlaku $a * b^{-1} \in H$ atau $a^{-1} * b \in H$ (sifat tertutup terhadap operasi " $*$ "). Jadi kondisi perlu bagi subgrup telah terpenuhi.

Kondisi cukup:

Diketahui $H \subseteq G, H \neq \emptyset$ dan $a * b^{-1} \in H$

Akan ditunjukkan bahwa $(H,*) \leq (G,*)$.

H adalah sub himpunan dari G yang memenuhi (1) dan (2). Untuk menunjukkan bahwa H subgrup perlu ditunjukkan bahwa $e \in H$ dan bahwa berlaku sifat assosiatif untuk semua elemen dari H. Karena sifat assosiatif berlaku di G, maka hal ini juga terpenuhi untuk sub himpunan dari G yaitu H. Jika $a \in H$, menurut (2), $a^{-1} \in H$ dan dengan (1), $e = a * a^{-1} \in H$. Sehingga kondisi cukup bagi subgrup terpenuhi. Sehingga teorema terbukti.

Contoh 2.13

Misal G grup bilangan bulat terhadap operasi + (penjumlahan), H sub himpunan yang terdiri dari kelipatan 5. Maka H adalah subgrup dari grup G.

Subgrup yang terdiri dari identitas saja atau semua elemen suatu grup disebut subgrup *trivial*. Sedangkan subgrup selain identitas dan semua elemen suatu grup disebut subgrup sejati.

2.6 *Centralizer*

Misalkan $(G,*)$ grup dengan operasi " $*$ " dan A sub himpunan tak-kosong dari G, *centralizer* A di G didefinisikan $C_G(A) = \{g \in G | g * a * g^{-1} = a$ untuk semua $a \in A\}$. Karena $g * a * g^{-1} = a$ jika dan hanya jika $g * a = a * g$. Dengan kata lain, $C_G(A)$ adalah himpunan elemen dari G yang komutatif dengan setiap elemen dari A (Dummit dan Foote, 1991:48).

Centralizer A di G adalah subgrup dari G. $C_G(A) \neq 0$ karena $e \in C_G(A)$ sesuai dengan definisi dari identitas yang menetapkan bahwa $e * a = a * e$, untuk setiap $a \in G$ (khususnya untuk setiap $a \in A$). Jadi, e memenuhi definisi untuk keanggotaan di $C_G(A)$. Selanjutnya, penulisan $a * b = ab$.

Kedua, diasumsikan $x, y \in C_G(A)$, yaitu untuk setiap $a \in A, xax^{-1} = a$ dan $yay^{-1} = a$. Tetapi, hal ini tidak berarti bahwa $xy = yx$. Karena $yay^{-1} = a$, kedua ruas terlebih dahulu dioperasikan dengan y^{-1} pada ruas kiri, dan dengan y pada ruas kanan. Kemudian diperoleh $a = y^{-1}ay$, yaitu $y^{-1} \in C_G(A)$ sedemikian sehingga $C_G(A)$ tertutup. Selanjutnya

$(xy)a(xy)^{-1} = (xy)a(y^{-1}x^{-1})$ [sifat-sifat subgrup (4) pada (xy)]

$= x(yay^{-1})x^{-1}$ [sifat assosiatif]

$= xax^{-1}$ [$y \in C_G(A)$]

$= a$ [$x \in C_G(A)$]

Jadi, $xy \in C_G(A)$ dan $C_G(A)$ tertutup terhadap suatu operasi tertentu, jadi $C_G(A) \leq G$.

Contoh 2.14 :

$D_6 = \{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$, $(D_6, \circ)$ grup.

$A = \{s, r\}$ maka *centralizer* A di D_6 adalah

Tabel 2.2: Tabel Cayley grup *dihedral*-6

$\circ$	1	r	r^2	s	sr	sr^2
1	1	r	r^2	s	sr	sr^2
r	r	r^2	1	sr^2	s	sr
r^2	r^2	1	r	sr	sr^2	s
s	s	sr	sr^2	1	r	r^2
sr	sr	sr^2	s	r^2	1	r
sr^2	sr^2	s	sr	r	r^2	1

Dari tabel tersebut diperoleh invers tiap-tiap elemennya sebagai berikut:

$1^{-1} = 1$; $r^{-1} = r^2$; $r^{-2} = r$; $s^{-1} = s$; $(sr)^{-1} = sr$; $(sr^2)^{-1} = sr^2$

Centralizer A di grup *dihedral*-6 $(D_6,\circ)$, yaitu:

$1 \in D_6$ maka $1 \circ s \circ 1 = 1$

$1 \circ r \circ 1 = r$

$r \in D_6$ maka $r \circ s \circ r^2 = sr$

$r^2 \in D_6$ maka $r^2 \circ s \circ r = sr^2$

$s \in D_6$ maka $s \circ r \circ s = r^2$

$sr \in D_6$ maka $sr \circ s \circ sr = sr^2$

$sr^2 \in D_6$ maka $sr^2 \circ s \circ sr^2 = sr$

Pada elemen-elemen $r, r^2, s, sr, sr^2 \in D_6$, apabila terdapat sedikitnya satu elemen yang tidak memenuhi definisi *centralizer,* maka elemen tersebut bukan merupakan *centralizer* A di grup *dihedral*-6 $(D_6,\circ)$.

Jadi, elemen yang memenuhi definisi *centralizer* adalah elemen 1.

Jadi, *centralizer* dari A di grup *dihedral*-6 $(D_6,\circ)$ adalah $\{1\}$, atau dapat dinyatakan dalam bentuk $C_{D_6}(\{s,r\}) = \{1\}$.

2.7 *Center*

Misalkan $(G,*)$ grup dan A sub himpunan tak-kosong dari G, *center* dari G didefinisikan $Z(G) = \{g \in G | gx = xg,$ untuk setiap $x \in G\}$. Dengan kata lain *center* dari G merupakan himpunan elemen-elemen yang komutatif dengan semua elemen dari G (Dummit dan Foote, 1991: 49).

Jika diperhatikan kembali *centralizerA* di grup G yaitu

$$C_G(A) = \{g \in G | g * a = a * g, \forall a \in A\}$$

Bila A diganti dengan G maka menjadi

$$C_G(A) = \{g \in G | g * a = a * g, \forall a \in A\}$$

sehingga definisi tersebut akan sama dengan definisi $Z(G)$. Dengan demikian dapat dikatakan bahwa *center* dari G adalah *centralizers* G di G, atau $Z(G) = C_G(G)$.

Contoh 2.15 :

$(D_6,\circ)$ grup, $D_6 = \{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$, maka *center* dari D_6, yaitu:

$1 \in D_6$ maka $1 \circ 1 = 1 \circ 1$

$1 \circ r = r \circ 1$

$1 \circ r^2 = r^2 \circ 1$

$1 \circ s = s \circ 1$

$1 \circ sr = sr \circ 1$

$1 \circ sr^2 = sr^2 \circ 1$

$r \in D_6$, terdapat elemen yang tidak komutatif yaitu $r \circ s \neq s \circ r$

$r^2 \in D_6$, terdapat elemen yang tidak komutatif yaitu $r^2 \circ s \neq s \circ r^2$

$s \in D_6$, terdapat elemen yang tidak komutatif yaitu $r \circ s \neq s \circ r$

$sr \in D_6$, terdapat elemen yang tidak komutatif yaitu $sr \circ s \neq s \circ sr$

$sr^2 \in D_6$, terdapat elemen yang tidak komutatif yaitu $s \circ sr^2 \neq sr^2 \circ s$

Karena pada $r, r^2, s, sr, sr^2 \in D_6$ terdapat sedikitnya satu elemen yang tidak komutatif maka $r, r^2, s, sr, sr^2 \in D_6$ bukan termasuk *center* dari grup $(D_6, \circ)$. Jadi, *Center* dari D_6 adalah $\{1\}$.

2.8 *Normalizer*

Misalkan $(G,*)$ grup dan A sub himpunan tak-kosong dari G, *normalizer* A di G didefinisikan $N_G(A) = \{g \in G | g * A * g^{-1} = A\}$ dengan $g * A * g^{-1} = \{g * a * g^{-1} | a \in A\}$ (Dummit dan Foote, 1991: 49).

Dengan kata lain, *normalizer* A di G adalah himpunan elemen di G yang memenuhi $g * A * g^{-1} \in A$.

Contoh 2.16 :

$D_8 = \{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$, $(D_8, \circ)$ adalah grup. Misal $M = \{1, r^2\}$, maka *normalizer* M di D_8 sebagai berikut:

$1 \in D_8$ maka $1 \circ \{1, r^2\} \circ 1^{-1} = 1 \circ \{1, r^2\} \circ 1 = \{1, r^2\}$

$r \in D_8$ maka $r \circ \{1, r^2\} \circ r^{-1} = r \circ \{1, r^2\} \circ r^3 = \{1, r^2\}$

$r^2 \in D_8$ maka $r^2 \circ \{1, r^2\} \circ (r^2)^{-1} = r^2 \circ \{1, r^2\} \circ r^2 = \{1, r^2\}$

$r^3 \in D_8$ maka $r^3 \circ \{1, r^2\} \circ (r^3)^{-1} = r^3 \circ \{1, r^2\} \circ r = \{1, r^2\}$

$s \in D_8$ maka $s \circ \{1, r^2\} \circ s^{-1} = s \circ \{1, r^2\} \circ s = \{1, r^2\}$

$sr \in D_8$ maka $sr \circ \{1, r^2\} \circ (sr)^{-1} = sr \circ \{1, r^2\} \circ sr = \{1, r^2\}$

$sr^2 \in D_8$ maka $sr^2 \circ \{1, r^2\} \circ (sr^2)^{-1} = sr^2 \circ \{1, r^2\} \circ sr^2 = \{1, r^2\}$

$sr^3 \in D_8$ maka $sr^3 \circ \{1, r^2\} \circ (sr^3)^{-1} = sr^3 \circ \{1, r^2\} \circ sr^3 = \{1, r^2\}$

Jadi, $N_{D_8}(M) = \{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\} = D_8$

2.9 Grup Simetri-*n* dan Grup Permutasi-*n*

Fungsi satu-satu dari suatu himpunan berhingga ke himpunan tersebut disebut permutasi. Banyaknya elemen dari himpunan berhingga tersebut disebut derajat permutasi. Misalkan $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ adalah himpunan berhingga yang terdiri dari n elemen yang berbeda dan misalkan f adalah fungsi satu-satu dari S ke S, maka sesuai definisi f adalah permutasi berderajat n. Misalkan S adalah himpunan berhingga yang terdiri dari n elemen yang berbeda, maka terdapat sebanyak $n!$ cara menyusun elemen-elemen S. Dengan kata lain, banyaknya permutasi berderajat n yang berbeda yang terdefinisi pada S adalah $n!$. Himpunan yang terdiri dari $n!$ permutasi berderajat n yang berbeda disebut himpunan simetri dari permutasi berderajat n dan dinyatakan dengan S_n (Raisinghania dan Aggarwal, 1980: 115).

Misalkan Ω adalah sebarang himpunan tak kosong dan misal S_Ω adalah himpunan yang memuat semua fungsi-fungsi bijektif dari Ω ke Ω (atau himpunan yang memuat permutasi dari Ω). Himpunan S_Ω dengan operasi komposisi "$\circ$" atau $(S_\Omega, \circ)$ adalah grup. operasi komposisi "$\circ$" adalah operasi biner pada S_Ω karena jika $\alpha: \Omega \to \Omega$ dan $\beta: \Omega \to \Omega$ adalah fungsi-fungsi bijektif maka $\alpha \circ \beta$ juga fungsi bijektif. Operasi "$\circ$" yang merupakan komposisi fungsi adalah bersifat assosiatif. Identitas dari S_Ω adalah permutasi 1 yang didefinisikan oleh $1(a) = a, \forall a \in \Omega$. Untuk setiap $\alpha: \Omega \to \Omega$ maka terdapat fungsi invers yaitu $\alpha: \Omega \to \Omega$ yang memenuhi $\alpha \circ \alpha^{-1} = \alpha^{-1} \circ \alpha = 1$. Dengan demikian semua aksioma grup telah dipenuhi oleh S_Ω dengan operasi "$\circ$". Grup $(S_\Omega, \circ)$ disebut sebagai grup simetri pada himpunan Ω (Dummit dan Foote,1991: 28).

Himpunan simetri-n terdiri $n!$ elemen yang merupakan permutasi-permutasi yang berbeda. Sehingga dapat dikatakan bahwa permutasi berderajat n merupakan sub himpunan dari himpunan simetri-*n*. Himpunan permutasi-n dengan operasi "$\circ$" dan memenuhi aksioma-aksioma grup disebut grup permutasi-*n* dan dinyatakan dengan $(P_n, \circ)$. Grup permutasi-*n* merupakan subgrup dari grup simetri-*n*. Himpunan permutasi-*n* merupakan himpunan simetri-*n* yang terdiri dari rotasi (perputaran) dan refleksi (pencerminan) suatu segi-*n* beraturan. Grup permutasi-*n* terdiri dari $2n$ elemen yaitu n elemen yang menunjukkan rotasi dan n elemen refleksi (Dummit dan Foote, 1991: 28).

2.10 Grup *Dihedral-2n* $(D_{2n}, \circ)$

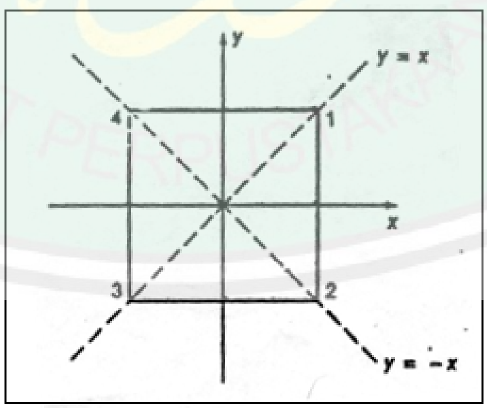
2.10.1 Definisi Grup *Dihedral-2n* $(D_{2n}, \circ)$

Grup *dihedral-2n* adalah himpunan simetri-simetri dari segi-*n* beraturan, dinotasikan dengan D_{2n}, untuk setiap $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ dengan operasi komposisi "$\circ$" yang memenuhi aksioma-aksioma grup. Untuk setiap $n \geq 3, n \in \mathbb{N}$, misal D_{2n} adalah himpunan simetri-simetri dari segi-*n* beraturan dimana suatu simetri adalah sebarang gerakan segi-*n* yang dapat diakibatkan oleh pengambilan salinan segi-*n*, kemudian dipindahkan dalam sebarang model dalam ruang-3 sampai kembali ke posisi semula. Kemudian masing-masing simetri s dapat dideskripsikan dengan mengkorespondensikan permutasi σ dari $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ dimana jika simetri s sebuah rotasi $\frac{2\pi}{n}$ radian searah jarum jam, maka σ permutasi yang mengantarkan titik $\boldsymbol{i}$ ke $\boldsymbol{i+1}$, $\boldsymbol{1 \leq i \leq n-1}$, dan $\boldsymbol{\sigma(n) = 1}$ (Dummit dan Foote, 1991: 25).

Poligon beraturan dengan $\boldsymbol{n}$ sisi mempunyai $\boldsymbol{2n}$ simetri yang berbeda yaitu $\boldsymbol{n}$ simetri rotasi dan $\boldsymbol{n}$ simetri refleksi. Jika $\boldsymbol{n}$ ganjil tiap-tiap sumbu simetri menghubungkan titik tengah suatu sisi ke titik sudut di hadapannya. Jika $\boldsymbol{n}$ genap, terdapat $\boldsymbol{\frac{n}{2}}$ sumbu simetri yang menghubungkan titik tengah suatu sisi yang berhadapan dan $\boldsymbol{\frac{n}{2}}$ sumbu simetri yang menghubungkan titik sudut yang berhadapan. Umumnya terdapat $\boldsymbol{n}$ sumbu simetri dan $\boldsymbol{2n}$ elemen dalam grup simetri tersebut.

Contoh 2.17:

Jika $n = 4$, digambarkan suatu persegi pada bidang x, y. Garis-garis simetrinya adalah garis $x = 0$ (sumbu $- y$), $y = 0$ (sumbu $- x$), $y = x, y = -x$. Sehingga D_{2n} dengan $n = 4$ dapat dinyatakan dalam bentuk $D_{2n} = \{r, r^2, r^3, r^4 = 1, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4 = s\}$.



Gambar 2.3 : Simetri pada *dihedral*-8

Grup *dihedral-2n* adalah suatu grup yang elemennya adalah simetri-simetri dari segi-*n* beraturan (poligon-*n*). Simetri dari suatu poligon adalah rotasi dan refleksi. Artinya suatu poligon-n dapat menempati bingkainya kembali dengan Rotasi dan Refleksi. Grup *dihedral-2n* ini ditulis sebagai D_{2n}. Jika pada grup simetri, anggotanya mewakili rotasi dan refleksi, sedangkan anggota grup permutasi mewakili permutasi dari rotasi dan refleksi, maka anggota dari grup *dihedral-2n* atau D_{2n} merupakan rotasi dan komposisi dari rotasi dan refleksi. Komposisi dari rotasi dan refleksi ini menghasilkan suatu refleksi. Penulisan grup *dihedral-2n* adalah

$$D_{2n} = \{ 1 , r , r^2, \ldots, r^{n-1} , s , sr , sr^2 , \ldots, sr^{n-1} \}$$

dimana *r* menyatakan rotasi dan s menyatakan refleksi.

Himpunan pembangun dari D_{2n} adalah $\{r, s\}$. Sebarang relasi antara dua pembangun tersebut dapat ditunjukkan oleh sifat-sifat grup *dihedral-2n* yaitu $1, r, r^2, \ldots, r^{n-1}$ semua berbeda dan $r^n = 1$, sehingga $|r| = n,\ n \in \mathbb{N},\ |s| = 2$, dan $sr = r^{-1}s$. Sehingga grup *dihedral-2n* dapat dinyatakan dengan

$$D_{2n} = \langle r, s | r^n = s^2 = 1, r \circ s = s \circ r^{-1} \rangle$$

2.10.2 Sifat-sifat grup *Dihedral-2n* (D_{2n})

Dummit dan Foote (1991: 26) menyatakan bahwa pada *dihedral-2n* berlaku:

1. $1, r, r^2, \ldots, r^{n-1}$ semua berbeda dan $r^n = 1$, sehingga $|r| = n, n \in \mathbb{N}$
2. |s|=2
3. $s \neq r^i$ untuk sebarang $i, \forall i \in \mathbb{Z}^+$
4. $sr^i \neq sr^j$, untuk semua $0 \leq i, j \leq n-1$ dengan $i \neq j$, sehingga

$$D_{2n} = \{1, r, r^2, \ldots, r^{n-1}, s, sr, \ldots, sr^{n-1}\}$$

yaitu, tiap-tiap elemen dapat ditulis secara tunggal dalam bentuk $s^k r^i$ untuk beberapa $k = 0$ atau 1 dan $0 \leq i \leq n-1,\ \forall i, j, k \in \mathbb{Z}^+$

5. $sr = r^{-1}s$.

   Hal ini menunjukkan bahwa r dan s tidak saling komutatif, sehingga D_{2n} bukan grup abelian.

6. $sr^i = r^{-i}s$, untuk semua $0 \leq i \leq n$.

   Hal ini menunjukkan bagaimana s komutatif dengan pangkat dari *r*.

Elemen *r* pada grup *dihedral-2n* komutatif dengan semua elemen *r*. Jika $r^i \circ r^j = r^{i+j}$ dengan $i + j =$ Modulo $-n$. Sedangkan elemen identitas yaitu 1 komutatif dengan semua elemen grup *dihedral-2n*. Invers dari r^i, $0 \leq i \leq n-1$ adalah $n - i$. Sedangkan invers dari elemen sr^i pada grup *dihedral-2n* adalah sr^i dengan $0 \leq i \leq n-1$. Invers dari sr^{n-1} adalah sr^{n-1}

$(sr^{n-1})^{-1} = sr^{n-1}$

$(r^{n-1})^{-1}s^{-1} = (r^n r^{-1})^{-1}s$ [sifat grup (3)]

$= (1r^{-1})^{-1}s$ [sifat grup *dihedral-2n*]

$= rs$ [sifat grup (3)]

$= sr^{n-1}$ [sifat grup *dihedral-2n*]

Jadi, invers dari sr^{n-1} adalah sr^{n-1}.

Sifat-sifat pada grup *dihedral-2n* tersebut digunakan untuk mempermudah penghitungan komposisi grup *dihedral-2n*.

Contoh 2.18 :

Misal $n = 12$.

$(sr^9)(sr^6) = s(r^9s)r^6 = s(sr^{-9})r^6 = s^2r^{-9+6} = r^{-3} = r^9$.

2.11 Kajian Agama

Secara umum beberapa konsep dari disiplin ilmu telah dijelaskan dalam Al-Qur'an, salah satunya adalah matematika. Konsep dari disiplin ilmu matematika yang ada dalam Al-Qur'an diantaranya adalah masalah statistik, logika, pemodelan, dan aljabar. Teori tentang grup, dimana definisi dari grup sendiri adalah suatu struktur aljabar yang dinyatakan sebagai $(G,\circ)$ dengan G tak-kosong dan " $\circ$ " adalah operasi biner pada G yang memenuhi sifat-sifat assosiatif, memuat identitas, dan memuat invers dari setiap elemen dalam grup tersebut. Himpunan-himpunan dalam grup mempunyai anggota yang juga merupakan makhluk dari ciptaan-Nya. Sedangkan operasi biner merupakan interaksi antara makhluk-makhluk-Nya, dan sifat-sifat yang harus dipenuhi merupakan aturan-aturan yang telah ditetapkan oleh Allah, artinya sekalipun makhluk-Nya berinteraksi dengan sesama makhluk ia harus tetap berada dalam koridor yang telah ditetapkan oleh Allah.

Kajian mengenai himpunan sudah ada dalam Al-Qur'an. Misalnya kehidupan manusia yang terdiri dari berbagai macam golongan. Dimana golongan juga merupakan himpunan karena himpunan sendiri merupakan kumpulan objek-objek yang terdefinisi.

Dalam Al-Qur'an surat Al-fatihah ayat 7 menyebutkan:

صِرَٰطَ ٱلَّذِينَ أَنۡعَمۡتَ عَلَيۡهِمۡ غَيۡرِ ٱلۡمَغۡضُوبِ عَلَيۡهِمۡ وَلَا ٱلضَّآلِّينَ ٧

Artinya: *(yaitu) jalan orang-orang yang telah Engkau beri nikmat kepada mereka; bukan (jalan) mereka yang dimurkai dan bukan (pula jalan) mereka yang sesat (Q. S. Al-Fatihah: 7).*

Ayat di atas menjelaskan bahwa manusia terbagi menjadi tiga kelompok, yaitu (1) kelompok yang mendapat nikmat dari Allah, (2) kelompok yang dimurkai, dan (3) kelompok yang sesat (Abdussakir, 2007: 79).

Ayat ini melukiskan permohonan manusia kepada Allah untuk membimbingnya ke jalan orang-orang yang diberi nikmat oleh-Nya, seperti nikmat berupa petunjuk, kesuksesan, kepemimpinan orang-orang yang benar, pengetahuan, amal yang baik, yaitu jalan lurus para nabi, orang-orang sholeh, dan semua orang yang mendapat nikmat, rahmat, dan kemurahan-Nya. Jalan yang lurus adalah ajaran tauhid, agama kebenaran, dan keimanan kepada perintah Allah. Ayat ini juga memperingatkan kepada manusia tentang adanya dua jalan yang menyimpang di hadapan manusia yaitu jalan orang-orang yang mendapatkan murka-Nya dan orang-orang yang tersesat. Adapun yang dimaksud dengan orang-orang yang diberi nikmat oleh Allah seperti yang ditunjukkan pada Al Quran surat An-Nisa' [4] ayat 69 :

وَمَآ أَرۡسَلۡنَا مِن رَّسُولٍ إِلَّا لِيُطَاعَ بِإِذۡنِ ٱللَّهِۚ وَلَوۡ
أَنَّهُمۡ إِذ ظَّلَمُوٓاْ أَنفُسَهُمۡ جَآءُوكَ فَٱسۡتَغۡفَرُواْ ٱللَّهَ وَٱسۡتَغۡفَرَ لَهُمُ
ٱلرَّسُولُ لَوَجَدُواْ ٱللَّهَ تَوَّابًا رَّحِيمًا ﴿٦٤﴾

Artinya: "*Dan Kami tidak mengutus seseorang rasul melainkan untuk ditaati dengan seizin Allah. Sesungguhnya jikalau mereka ketika menganiaya dirinya*[313] *datang kepadamu, lalu memohon ampun kepada Allah, dan Rasulpun memohonkan ampun untuk mereka, tentulah mereka mendapati Allah Maha Penerima Taubat lagi Maha Penyayang.*"

Ayat di atas menjelaskan bahwa orang-orang yang mendapat nikmat dan rahmat Allah ada empat kelompok: para nabi, orang-orang yang ikhlas, para saksi, dan orang-orang yang beramal shaleh. Sedangkan pemisahan dua kelompok terakhir dalam Al Quran surat Al Fatihah ayat 7 ini dari kelompok lainnya mengisyaratkan bahwa masing-masing kelompok memiliki karakteristik khusus. Dalam hal ini, Imani (2006: 60-61) membagi karakteristik khusus dua kelompok yang terakhir menjadi tiga tafsir :

1. Orang-orang yang tersesat adalah awam yang tidak terbimbing, sedangkan *magdhubi 'alaihim* adalah orang yang tidak terbimbing yang keras kepala atau munafik. Orang-orang yang mendapatkan murka-Nya adalah orang-orang yang disamping kekufuran mereka, mengambil jalan kedegilan dan permusuhan kepada Allah, dan kapan saja mereka dapat, mereka bahkan melukai para pemimpin Ilahiah dan para nabi sebagaimana disebutkan dalam Al Quran surat Ali Imran ayat 112.
2. Sebagian ahli tafsir percaya bahwa *adh-dhallin* (orang-orang yang tersesat) merujuk pada orang-orang Nasrani; sedangkan *magdhubi 'alaihim* (orang-orang yang mendapatkan murka-Nya) mengacu pada orang-orang yahudi. Kesimpulan ini diambil karena respon-respon khas mereka.
3. Bacaan *adh-dhallin* dimaksudkan kepada orang-orang yang tersesat tapi tidak menekan orang-orang selain mereka untuk tersesat juga, sedangkan *magdhubi 'alaihim* mengacu pada orang-orang yang tersesat dan membuat orang lain tersesat juga. Mereka mencoba mempengaruhi orang lain agar seperti mereka. Acuan makna ini adalah Al Quran surat Asy-Syura ayat 16.

Kembali pada definisi grup yang merupakan suatu himpunan yang tak-kosong dan operasi " $\circ$ " pada G adalah suatu operasi biner yang memenuhi sifat-sifat assosiatif, memuat identitas, dan memuat invers dari setiap elemen dalam grup tersebut. Misal " $\circ$ " adalah operasi pada elemen-elemen S, maka ia disebut biner apabila setiap dua elemen $a, b \in S$, maka $(a \circ b) \in S$. Jadi, jika anggota dari himpunan S dioperasikan hasilnya juga merupakan anggota S. Begitu juga dengan operasi biner dalam dunia nyata. Operasi biner dan sifat-sifat yang harus dipenuhi oleh grup merupakan interaksi-interaksi dengan berbagai macam pola, ia akan tetap berada dalam himpunan tersebut, yaitu himpunan makhluk ciptaan-Nya.

Sistem aljabar merupakan salah satu materi pada bagian aljabar abstrak yang mengandung operasi biner. Himpunan dengan satu atau lebih operasi biner disebut sistem aljabar. Sedangkan sistem aljabar dengan satu operasi biner disebut grup. Kajian himpunan dengan satu operasi biner dalam konsep islam yaitu, bahwa manusia adalah ciptaan Allah secara berpasang-pasangan. Perhatikan firman Allah SWT dalam surat Al-Fathir ayat 11:

وَٱللَّهُ خَلَقَكُم مِّن تُرَابٍ ثُمَّ مِن نُّطْفَةٍ ثُمَّ جَعَلَكُمْ أَزْوَٰجًا ۚ وَمَا تَحْمِلُ مِنْ أُنثَىٰ وَلَا تَضَعُ إِلَّا
بِعِلْمِهِۦ ۚ وَمَا يُعَمَّرُ مِن مُّعَمَّرٍ وَلَا يُنقَصُ مِنْ عُمُرِهِۦٓ إِلَّا فِى كِتَٰبٍ ۚ إِنَّ ذَٰلِكَ عَلَى ٱللَّهِ يَسِيرٌ ﴿١١﴾

Artinya: *"Dan Allah menciptakan kamu dari tanah Kemudian dari air mani, Kemudian dia menjadikan kamu berpasangan (laki-laki dan perempuan). dan tidak ada seorang perempuanpun mengandung dan tidak (pula) melahirkan melainkan dengan sepengetahuan-Nya. dan sekali-kali tidak dipanjangkan umur seorang yang berumur panjang dan tidak pula dikurangi umurnya, melainkan (sudah ditetapkan) dalam Kitab (Lauh mahfuzh). Sesungguhnya yang demikian itu bagi Allah adalah mudah. "*

Center dari suatu grup G merupakan himpunan elemen-elemen yang komutatif dengan semua elemen-elemen dari grup G. Elemen-elemen a dan b dari G komutatif jika $a * b = b * a$. Sehingga dua hal yang apabila dioperasikan tidak memperhatikan urutan hasilnya akan sama. Firman Allah dalam Al Quran surat Adz-Dzaariyat ayat 56 :

وَمَا خَلَقْتُ ٱلْجِنَّ وَٱلْإِنسَ إِلَّا لِيَعْبُدُونِ ﴿٥٦﴾

Artinya: "*Dan aku tidak menciptakan jin dan manusia melainkan supaya mereka mengabdi kepada-Ku.*"

Ayat tersebut menjelaskan bahwa Allah menciptakan jin dan manusia dengan tujuan untuk menyembah-Nya. Hal ini menunjukkan bahwa tujuan hidup manusia di dunia ini hanya satu yaitu menyembah Allah. Manusia berbuat kebaikan, melaksanakan segala perintah-Nya dan menjauhi segala larangan-Nya, semua dilakukan semata-mata untuk beribadah kepada Allah. Manusia berinteraksi dengan sesamanya juga semata-mata untuk beribadah kepada allah. Akan tetapi, dalam kehidupan manusia tidak ada yag sempurna. Kesalahan selalu menyertai kehidupan manusia. Banyak atau sedikit kesalahan, tujuan hidup manusia tetap satu yaitu menyembah-Nya, beribadah kepada-Nya.

Uraian di atas merupakan salah satu representasi dari *center*. Dimana identitas dari hidup manusia adalah tujuannya yaitu hanya menyembah Allah. segala yang dilakukan manusia mewakili suatu grup, dan *center* dari grup tersebut adalah identitasnya yaitu menyembah Allah. Manusia prima adalah manusia yang selalu dekat dengan yang satu, yang Esa, dzat yang maha tunggal, yaitu Allah SWT. Bagi manusia prima, *center* dari hidupnya hanya menyembah kepada Allah. Sedangkan bagi manusia yang bukan prima, *center* hidupnya tidak hanya menyembah Allah, tetapi masih terdapat tujuan lainnya.

Allah juga berfirman dalam Al-Qur’an surat Yasin ayat 40:

لَا ٱلشَّمۡسُ يَنۢبَغِي لَهَآ أَن تُدۡرِكَ ٱلۡقَمَرَ وَلَا ٱلَّيۡلُ سَابِقُ ٱلنَّهَارِۚ وَكُلّٞ فِي فَلَكٖ يَسۡبَحُونَ

Artinya: *”Tidaklah mungkin bagi matahari mendapatkan bulan dan malampun tidak dapat mendahului siang. dan masing-masing beredar pada garis edarnya.”*

Ayat di atas menunjukkan tentang gerakan kumpulan benda angkasa yang ada di sekeliling matahari, artinya, matahari, bulan, dan bumi yang diumpamakan dengan malam dan siang masing-masing mesti beredar bersama-sama mengelilingi matahari. Sehingga dengan pengaitan pada representasi *dihedral*, diasumsikan titik pusat *dihedral* adalah matahari dan titik-titik sudutnya adalah benda-benda langit yang mengelilingi matahari. Benda-benda langit berotasi mengelilingi matahari sesuai garis edarnya.

Dari uraian tersebut maka representasi *dihedral* dapat diasumsikan sebagai susunan dari tata surya, dengan titik *center* diasumsikan sebagai matahari dan titik-titik lainnya diasumsikan sebagai benda-benda langit yang mengelilingi matahari sesuai dengan garis edarnya dan berjalan pada dimensi yang tetap dalam kelompoknya.

Purwanto (2007: 393) menjelaskan bahwa tubuh manusia juga dijadikan dalam keadaan setimbang antara bagian demi bagian sehingga memungkinkan manusia bergerak lincah. Tubuh manusia bagian kiri dan bagian kanan tampak setimbang atau tepatnya simetri. Dua mata manusia ada di kanan dan di kiri pada jarak yang sama dari garis yang membelah manusia menjadi dua bagian yang sama persis. Semua anggota tubuh yang berjumlah dua seperti telinga, lubang hidung, tangan, dan kaki berada dalam posisi simetri kanan-kiri. Kesetimbangan dan kesimetrian ini juga telah ditegaskan dalam Al-Qur'an surat Al-Infithar ayat 7:

ٱلَّذِى خَلَقَكَ فَسَوَّىٰكَ فَعَدَلَكَ ۝٧

Artinya : *"Yang telah menciptakan kamu lalu menyempurnakan kejadianmu dan menjadikan (susunan tubuh)mu seimbang."*

Alam di sekitar kita menampakkan diri dalam bentuknya yang simetri. Aneka bunga dan dedaunan di kebun dan di taman-taman bunga, juga serangga-serangga seperti semut, lebah, dan kupu-kupu yang mengerumuninya. Kita akan mendapatkan bahwa bentuk dan pola warna sangat serasi dan simetri. Simetri juga terjadi pada tingkat molekuler dan Kristal seperti air dan amoniak (Purwanto, 2007: 393).

Segitiga sama kaki yang mempunyai dua simetri, pertama simetri cermin yang membelah segi tiga menjadi dua bagian yang sama besar dan simetri putar (rotasi) 180 derajat. Segitiga sama sisi mempunyai delapan simetri, tiga simetri cermin, tiga rotasi 180 derajat seperti segitiga sama kaki dan dua simetri rotasi 120 dan 240 derajat dengan sumbu rotasi melalui titik pusat segitiga. Bidang elips dan bidang lingkaran yang permukaan satu lain dari permukaan lainnya sehingga tidak simetri bolak-balik. Elips hanya mempunyai satu simetri, yakni simetri rotasi 180 derajat terhadap sumbu yang tegak lurus elips dan melalui titik pusat. Sementara itu, lingkaran mempunyai simetri tak terhingga karena lingkaran simetri terhadap rotasi apapun. Kristal dan molekul pada umumnya juga mempunyai format simetri. Molekul air terdiri dari dua atom *hydrogen* dan satu atom *oksigen*. Molekul ini mempunyai simetri rotasi 180 derajat. Molekul amoniak terdiri dari satu atom *nitrogen* dan tiga atom *hydrogen* dan mempunyai simetri 120 dan 240 derajat (Purwanto, 2007: 394).

Allah berfirman dalam Al Quran surat Al Maidah ayat 97:

۞ جَعَلَ ٱللَّهُ ٱلۡكَعۡبَةَ ٱلۡبَيۡتَ ٱلۡحَرَامَ قِيَٰمٗا لِّلنَّاسِ وَٱلشَّهۡرَ ٱلۡحَرَامَ وَٱلۡهَدۡيَ
وَٱلۡقَلَٰٓئِدَۚ ذَٰلِكَ لِتَعۡلَمُوٓاْ أَنَّ ٱللَّهَ يَعۡلَمُ مَا فِي ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَمَا فِي ٱلۡأَرۡضِ وَأَنَّ
ٱللَّهَ بِكُلِّ شَيۡءٍ عَلِيمٌ ٩٧

Artinya: "*Allah telah menjadikan Ka'bah, rumah suci itu sebagai pusat (peribadatan dan urusan dunia) bagi manusia, dan (demikian pula) bulan Haram, had-ya, qalaid, (Allah menjadikan yang) demikian itu agar kamu tahu, bahwa sesungguhnya Allah mengetahui apa yang ada di langit dan apa yang ada di bumi dan bahwa sesungguhnya Allah Maha Mengetahui segala sesuatu.*"

Ayat tersebut menjelaskan tentang tempat suci yang menjadi pusat peribadatan umat Islam di seluruh dunia, yaitu ka'bah. Ka'bah dan sekitarnya menjadi tempat yang aman bagi manusia untuk mengerjakan urusan-urusannya yang berhubungan dengan duniawi dan ukhrawi, dan pusat bagi amalan ibadah haji.

Ibadah haji merupakan salah satu dari lima rukun Islam. Serangkaian ibadah haji merupakan salah satu representasi dari suatu himpunan dimana elemen-elemennya adalah segala sesuatu dalam ibadah tersebut seperti haji dan umrah, pada himpunan tersebut dikenakan suatu operasi yaitu "dilanjutkan". Inti dari pembahasan mengenai *centralizer* dan *center* adalah kekomutatifan antara elemen-elemen tertentu. Jika dalam serangkaian ibadah haji, seseorang diperbolehkan melaksanakan ibadah haji dilanjutkan dengan umrah atau melaksanakan ibadah umrah dilanjutkan ibadah haji. Hal tersebut menunjukkan sifat komutatif. *Center* dalam matematika merupakan himpunan seluruh elemen yang komutatif dengan semua elemen suatu grup. *Center* dalam Islam dapat diwakilkan oleh menghadap kiblat yaitu ka'bah. Sehingga *center* dari suatu ibadah adalah ka'bah yang merupakan pusat peribadatan, kiblat dalam shalat dan pusat ibadah thawaf. *Centralizer* dapat diartikan dengan pemusatan, Dalam hal ini, pemusatan seluruh ibadah umat Islam menuju suatu titik pusat yaitu *center* (ka'bah). Sedangkan *normalizer* dalam hal ini adalah serangkaian ibadah adalah normal ketika dilaksanakan sesuai dengan ketentuannya.

BAB III

PEMBAHASAN

Dalam pembahasan ini, grup *dihedral-2n* $(D_{2n},\circ)$, $n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$ dikelompokkan menjadi 2 berdasarkan pembagi-pembaginya, yaitu grup *dihedral-2n* $(D_{2n},\circ), n \geq 3$, dengan n bilangan prima dan bilangan komposit. Hal tersebut karena dimungkinkan pola *centralizer*, *center*, dan *normalizer* yang dihasilkan oleh grup *dihedral-2n* dengan n bilangan prima dan n bilangan komposit adalah berbeda. Dalam pembahasan ini, grup *dihedral-2n* $(D_{2n},\circ), n \geq 3, n$ dimulai dari $n = 3$ karena grup *dihedral-2n* $(D_{2n},\circ)$ merupakan himpunan segi-n beraturan. Segi-n yang paling sederhana adalah segitiga yang memiliki 3 titik sudut yaitu segitiga sama sisi. Selanjutnya dalam pembahasan ini, penulisan grup *dihedral-2n* $(D_{2n},\circ) =$ grup *dihedral-2n*.

3.1 Grup *Dihedral-2n* $(D_{2n},\circ)$, $n \geq 3$, n Bilangan Prima

Bilangan prima adalah bilangan bulat positif yang lebih dari 1 dan hanya habis dibagi oleh 1 dan bilangan itu sendiri.

3.1.1 Grup *Dihedral*-6 $(D_6,\circ)$

Elemen grup *dihedral-2n* dengan $n = 3$ yaitu grup *dihedral*-6 adalah $D_6 = \{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$. Sub-sub himpunan yang memenuhi aksioma-aksioma grup yaitu subgrup dari grup *dihedral*-6 adalah:

1. $(\{1\},\circ)$
2. $(\{1, s\},\circ)$

3. $(\{1, sr\}, \circ)$
4. $(\{1, sr^2\}, \circ)$
5. $(\{1, r, r^2\}, \circ)$
6. $(\{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}, \circ)$

Berdasarkan subgrup-subgrup tersebut dapat disimpulkan bahwa pada grup *dihedral*-6 terdapat:

1. Sebanyak 1 subgrup yang terdiri dari 1 elemen yaitu elemen identitas, yaitu $(\{1\}, \circ)$.
2. Sebanyak 3 subgrup yang terdiri dari 2 elemen yaitu elemen identitas dan elemen yang memuat s, yaitu $(\{1, s\}, \circ)$, $(\{1, sr\}, \circ)$, dan $(\{1, sr^2\}, \circ)$.
3. Sebanyak 1 subgrup yang terdiri dari 3 elemen yaitu elemen identitas dan semua elemen r, yaitu $(\{1, r, r^2\}, \circ)$.
4. Sebanyak 1 subgrup yang terdiri dari 6 elemen yaitu semua elemen D_6, yaitu $(\{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}, \circ)$.

Misalkan A_6 adalah subgrup dari grup *dihedral*-6. *Centralizer* A_6 di grup *dihedral*-6 dapat didefinisikan sebagai himpunan elemen-elemen di grup *dihedral*-6 yang komutatif dengan setiap elemen dari subgrupnya yaitu A_6. *Centralizer* subgrup di grup *dihedral*-6 adalah sebagai berikut:

Tabel 3. 1: Tabel *Centralizer* Subgrup di Grup *Dihedral*-6

A_6	$C_{D_6}(A_6)$
$\{1\}$	$\{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$
$\{1, s\}$	$\{1, s\}$
$\{1, sr\}$	$\{1, sr\}$
$\{1, sr^2\}$	$\{1, sr^2\}$
$\{1, r, r^2\}$	$\{1, r, r^2\}$
$\{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$	$\{1\}$

Berdasarkan tabel tersebut dapat disimpulkan bahwa :

1. *Centralizer* identitas di grup *dihedral*-6 adalah semua elemen D_6, yaitu $C_{D_6}(\{1\}) = \{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$.
2. *Centralizer* semua elemen grup *dihedral*-6 di grup *dihedral*-6 adalah elemen identitas, yaitu $C_{D_6}(\{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}) = \{1\}$.
3. *Centralizer* subgrup sejati dari grup *dihedral*-6 adalah subgrup itu sendiri, yaitu $C_{D_6}(\{1, s\}) = \{1, s\}$, $C_{D_6}(\{1, sr\}) = \{1, sr\}$, $C_{D_6}(\{1, sr^2\}) = \{1, sr^2\}$, dan $C_{D_6}(\{1, r, r^2\}) = \{1, r, r^2\}$.

Center dari grup *dihedral*-6 merupakan himpunan elemen-elemen grup *dihedral*-6 yang komutatif dengan setiap elemen grup *dihedral*-6. Dengan kata lain, *center* grup *dihedral*-6 adalah *centralizer* D_6 di D_6. Jadi, *center* dari grup *dihedral*-6 adalah elemen identitas, yaitu $Z(\{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}) = \{1\}$.

Misalkan A_6 adalah subgrup dari grup *dihedral*-6. *Normalizer* A_6 di grup *dihedral*-6 dapat didefinisikan sebagai himpunan dari elemen-elemen grup *dihedral*-6 yang memenuhi $g \circ a \circ g^{-1} \in A_6, \forall a \in A_6, g \in D_6$. *Normalizer* subgrup di grup *dihedral*-6 adalah sebagai berikut:

Tabel 3.2: Tabel *Normalizer* Subgrup di Grup *Dihedral*-6

A_6	$N_{D_6}(A_6)$
$\{1\}$	$\{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$
$\{1, s\}$	$\{1, s\}$
$\{1, sr\}$	$\{1, sr\}$
$\{1, sr^2\}$	$\{1, sr^2\}$
$\{1, r, r^2\}$	$\{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$
$\{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$	$\{1, r, r^2, s, sr, sr^2\}$

Berdasarkan tabel tersebut dapat disimpulkan bahwa :

1. *Normalizer* subgrup yang terdiri dari 2 elemen, yaitu elemen identitas dan elemen yang memuat s di grup *dihedral*-6 adalah subgrup itu sendiri yaitu $N_{D_6}(\{1,s\}) = \{1,s\}$, $N_{D_6}(\{1,sr\}) = \{1,sr\}$, dan $N_{D_6}(\{1,sr^2\}) = \{1,sr^2\}$.
2. *Normalizer* subgrup selain terdiri dari 2 elemen di grup *dihedral*-6 adalah semua elemen grup *dihedral*-6, yaitu:
   $N_{D_6}(\{1\}) = \{1,r,r^2,s,sr,sr^2\}$, $N_{D_6}(\{1,r,r^2\}) = \{1,r,r^2,s,sr,sr^2\}$, dan $N_{D_6}(\{1,r,r^2,s,sr,sr^2\}) = \{1,r,r^2,s,sr,sr^2\}$.

3.1.2 Grup *Dihedral*-10 (D_{10},∘)

Elemen-elemen grup *dihedral-2n* dengan $n = 5$ yaitu grup *dihedral*-10 adalah $D_{10} = \{1,r,r^2,r^3,r^4,s,sr,sr^2,sr^3,sr^4\}$. Sub-sub himpunan yang memenuhi aksioma-aksioma grup yaitu subgrup dari grup *dihedral*-10 adalah:

1. $(\{1\},\circ)$
2. $(\{1,s\},\circ)$
3. $(\{1,sr\},\circ)$
4. $(\{1,sr^2\},\circ)$
5. $(\{1,sr^3\},\circ)$
6. $(\{1,sr^4\},\circ)$
7. $(\{1,r,r^2,r^3,r^4\},\circ)$
8. $(\{1,r,r^2,r^3,r^4,s,sr,sr^2,sr^3,sr^4\},\circ)$

Berdasarkan subgrup-subgrup tersebut dapat disimpulkan bahwa pada grup *dihedral*-10 terdapat:

1. Sebanyak 1 subgrup yang terdiri dari 1 elemen yaitu elemen identitas, yaitu $(\{1\},\circ)$.
2. Sebanyak 5 subgrup yang terdiri dari 2 elemen yaitu elemen identitas dan elemen yang memuat s, yaitu $(\{1,s\},\circ)$, $(\{1,sr\},\circ)$, $(\{1,sr^2\},\circ)$, $(\{1,sr^3\},\circ)$, dan $(\{1,sr^4\},\circ)$.
3. Sebanyak 1 subgrup yang terdiri dari 5 elemen yaitu elemen identitas dan semua elemen r, yaitu $(\{1,r,r^2,r^3,r^4\},\circ)$.
4. Sebanyak 1 subgrup yang terdiri dari 10 elemen yaitu semua elemen D_{10}, yaitu $(\{1,r,r^2,r^3,r^4,s,sr,sr^2,sr^3,sr^4\},\circ)$.

Misalkan A_{10} adalah subgrup dari grup *dihedral*-10. *Centralizer* A_{10} di grup *dihedral*-10 dapat didefinisikan sebagai himpunan elemen-elemen di grup *dihedral*-10 yang komutatif dengan setiap elemen dari subgrupnya yaitu A_{10}. *Centralizer* subgrup di grup *dihedral*-10 adalah sebagai berikut:

Tabel 3.3: Tabel *Centralizer* Subgrup di Grup *Dihedral*-10

A_{10}	$C_{D_{10}}(A_{10})$
$\{1\}$	$\{1,r,r^2,r^3,r^4,s,sr,sr^2,sr^3,sr^4\}$
$\{1,s\}$	$\{1,s\}$
$\{1,sr\}$	$\{1,sr\}$
$\{1,sr^2\}$	$\{1,sr^2\}$
$\{1,sr^3\}$	$\{1,sr^3\}$
$\{1,sr^4\}$	$\{1,sr^4\}$
$\{1,r,r^2,r^3,r^4\}$	$\{1,r,r^2,r^3,r^4\}$
$\{1,r,r^2,r^3,r^4,s,sr,sr^2,sr^3,sr^4\}$	$\{1\}$

Berdasarkan tabel tersebut dapat disimpulkan bahwa :

1. *Centralizer* identitas di grup *dihedral*-10 adalah semua elemen D_{10}, yaitu $C_{D_{10}}(\{1\}) = \{1,r,r^2,r^3,r^4,s,sr,sr^2,sr^3,sr^4\}$.

2. *Centralizer* semua elemen grup *dihedral*-10 di grup *dihedral*-10 adalah elemen identitas, yaitu $C_{D_{10}}(\{1, r, r^2, r^3, r^4, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\}) = \{1\}$.
3. *Centralizer* subgrup sejati dari grup *dihedral*-10 adalah subgrup itu sendiri, yaitu:

$$C_{D_{10}}(\{1, s\}) = \{1, s\},$$

$$C_{D_{10}}(\{1, sr\}) = \{1, sr\},$$

$$C_{D_{10}}(\{1, sr^2\}) = \{1, sr^2\},$$

$$C_{D_{10}}(\{1, sr^3\}) = \{1, sr^3\},$$

$$C_{D_{10}}(\{1, sr^4\}) = \{1, sr^4\},$$

$$C_{D_{10}}(\{1, r, r^2, r^3, r^4\}) = \{1, r, r^2, r^3, r^4\}.$$

Center dari grup *dihedral*-10 merupakan himpunan elemen-elemen grup *dihedral*-10 yang komutatif dengan setiap elemen grup *dihedral*-10. Dengan kata lain, *center* grup *dihedral*-10 adalah *centralizer* D_{10} di D_{10}. Jadi, *center* dari grup *dihedral*-10 adalah elemen identitas, yaitu

$$Z(\{1, r, r^2, r^3, r^4, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\}) = \{1\}.$$

Misalkan A_{10} adalah subgrup dari grup *dihedral*-10. *Normalizer* A_{10} di grup *dihedral*-10 dapat didefinisikan sebagai himpunan dari elemen-elemen grup *dihedral*-10 yang memenuhi $g \circ a \circ g^{-1} \in A_{10}, \forall a \in A_{10}, g \in D_{10}$. *Normalizer* subgrup di grup *dihedral*-10 adalah sebagai berikut:

Tabel 3.4: Tabel *Normalizer* Subgrup di Grup *Dihedral*-10

A	$N_{D_{10}}(A)$
$\{1\}$	$\{1, r, r^2, r^3, r^4, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\}$
$\{1, s\}$	$\{1, s\}$
$\{1, sr\}$	$\{1, sr\}$
$\{1, sr^2\}$	$\{1, sr^2\}$
$\{1, sr^3\}$	$\{1, sr^3\}$
$\{1, sr^4\}$	$\{1, sr^4\}$
$\{1, r, r^2, r^3, r^4\}$	$\{1, r, r^2, r^3, r^4, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\}$
$\{1, r, r^2, r^3, r^4, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\}$	$\{1, r, r^2, r^3, r^4, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\}$

Berdasarkan tabel tersebut dapat disimpulkan bahwa :

1. *Normalizer* subgrup yang terdiri dari 2 elemen, yaitu elemen identitas dan elemen yang memuat s di grup *dihedral*-10 adalah subgrup itu sendiri, yaitu:

$$N_{D_{10}}(\{1, s\}) = \{1, s\}$$

$$N_{D_{10}}(\{1, sr\}) = \{1, sr\}$$

$$N_{D_{10}}(\{1, sr^2\}) = \{1, sr^2\}$$

$$N_{D_{10}}(\{1, sr^3\}) = \{1, sr^3\}$$

$$N_{D_{10}}(\{1, sr^4\}) = \{1, sr^4\}.$$

2. *Normalizer* subgrup selain terdiri dari 2 elemen di grup *dihedral*-10 adalah semua elemen grup *dihedral*-10, yaitu

$N_{D_{10}}(\{1\}) = \{1, r, r^2, r^3, r^4, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\}$

$N_{D_{10}}(\{1, r, r^2, r^3, r^4\}) = \{1, r, r^2, r^3, r^4, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\}$

$N_{D_{10}}(\{1, r, r^2, r^3, r^4, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\}) = \{1, r, r^2, r^3, r^4, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4\}$

3.1.3 Grup *Dihedral*-14 $(D_{14},\circ)$

Elemen-elemen grup *dihedral-2n* dengan $n = 7$ yaitu grup *dihedral*-14 adalah $D_{14} = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6\}$. Sub-sub himpunan yang memenuhi aksioma-aksioma grup yaitu subgrup dari grup *dihedral*-14 adalah:

1. $(\{1\},\circ)$
2. $(\{1, s\},\circ)$
3. $(\{1, sr\},\circ)$
4. $(\{1, sr^2\},\circ)$
5. $(\{1, sr^3\},\circ)$
6. $(\{1, sr^4\},\circ)$
7. $(\{1, sr^5\},\circ)$
8. $(\{1, sr^6\},\circ)$
9. $(\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6\},\circ)$
10. $(\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6\},\circ)$

Berdasarkan subgrup-subgrup tersebut dapat disimpulkan bahwa pada grup *dihedral*-14 terdapat:

1. Sebanyak 1 subgrup yang terdiri dari 1 elemen yaitu elemen identitas, yaitu $(\{1\},\circ)$.
2. Sebanyak 7 subgrup yang terdiri dari 2 elemen yaitu elemen identitas dan elemen yang memuat s, yaitu $(\{1, s\},\circ)$, $(\{1, sr\},\circ)$, $(\{1, sr^2\},\circ)$, $(\{1, sr^3\},\circ)$, $(\{1, sr^4\},\circ)$, $(\{1, sr^5\},\circ)$, dan $(\{1, sr^6\},\circ)$.

3. Sebanyak 1 subgrup yang terdiri dari 7 elemen yaitu elemen identitas dan semua elemen r, yaitu $(\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6\}, \circ)$.
4. Sebanyak 1 subgrup yang terdiri dari 14 elemen yaitu semua elemen D_{14}, yaitu $(\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6\}, \circ)$.

Misalkan A_{14} adalah subgrup dari grup *dihedral*-14 $(D_{14}, \circ)$. *Centralizer* A_{14} di grup *dihedral*-14 dapat didefinisikan sebagai himpunan elemen-elemen di grup *dihedral*-14 yang komutatif dengan setiap elemen dari subgrupnya yaitu A_{14}. *Centralizer* subgrup di grup *dihedral*-14 adalah sebagai berikut:

Tabel 3.5: Tabel *Centralizer* Subgrup di Grup *Dihedral*-14

B_{14}	$C_{D_{14}}(B_{14})$
$\{1\}$	$\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6\}$
$\{1, s\}$	$\{1, s\}$
$\{1, sr\}$	$\{1, sr\}$
$\{1, sr^2\}$	$\{1, sr^2\}$
$\{1, sr^3\}$	$\{1, sr^3\}$
$\{1, sr^4\}$	$\{1, sr^4\}$
$\{1, sr^5\}$	$\{1, sr^5\}$
$\{1, sr^6\}$	$\{1, sr^6\}$
$\{1, r, r^2\}$	$\{1, r, r^2\}$
$\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6\}$	$\{1\}$

Berdasarkan tabel tersebut dapat disimpulkan bahwa :

1. *Centralizer* identitas di grup *dihedral*-14 $(D_{14}, \circ)$ adalah semua elemen D_{14}, yaitu $C_{D_{14}}(\{1\}) = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6\}$.
2. *Centralizer* semua elemen *dihedral*-14 di grup *dihedral*-14 adalah elemen identitas, yaitu

$$C_{D_{14}}(\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6\}) = \{1\}.$$

3. *Centralizer* subgrup sejati dari grup *dihedral*-14 adalah subgrup itu sendiri, yaitu:

$$C_{D_{14}}(\{1, s\}) = \{1, s\}$$

$$C_{D_{14}}(\{1, sr\}) = \{1, sr\}$$

$$C_{D_{14}}(\{1, sr^2\}) = \{1, sr^2\}$$

$$C_{D_{14}}(\{1, sr^3\}) = \{1, sr^3\}$$

$$C_{D_{14}}(\{1, sr^4\}) = \{1, sr^4\}$$

$$C_{D_{14}}(\{1, sr^5\}, \circ) = \{1, sr^5\}$$

$$C_{D_{14}}(\{1, sr^6\}, \circ) = \{1, sr^6\}$$

$$C_{D_{14}}(\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6\}) = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6\}.$$

Center dari grup *dihedral*-14 merupakan himpunan elemen-elemen grup *dihedral*-14 yang komutatif dengan setiap elemen *dihedral*-14. Dengan kata lain, *center* grup *dihedral*-14 adalah *centralizer* D_{14} di D_{14}. Jadi, *center* dari grup *dihedral*-14 adalah elemen identitas, yaitu

$$Z(\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6\}) = \{1\}.$$

Misalkan A_{14} adalah subgrup dari grup *dihedral*-14. *Normalizer* A_{14} di grup *dihedral*-14 dapat didefinisikan sebagai himpunan dari elemen-elemen grup *dihedral*-14 yang memenuhi $g \circ a \circ g^{-1} \in A_{14}, \forall a \in A_{14}, g \in D_{14}$. *Normalizer* subgrup di grup *dihedral*-14 adalah sebagai berikut:

Tabel 3.6: Tabel *Normalizer* Subgrup di Grup *Dihedral*-14 $(D_{14},\circ)$

A_{14}	$N_{D_{14}}(A_{14})$
$\{1\}$	$\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6\}$
$\{1, s\}$	$\{1, s\}$
$\{1, sr\}$	$\{1, sr\}$
$\{1, sr^2\}$	$\{1, sr^2\}$
$\{1, sr^3\}$	$\{1, sr^3\}$
$\{1, sr^4\}$	$\{1, sr^4\}$
$\{1, sr^5\}$	$\{1, sr^5\}$
$\{1, sr^6\}$	$\{1, sr^6\}$
$\{1, r, r^2\}$	$\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6\}$
$\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6\}$	$\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6\}$

Berdasarkan tabel tersebut dapat disimpulkan bahwa :

1. *Normalizer* subgrup yang terdiri dari 2 elemen, yaitu elemen identitas dan elemen yang memuat *s* di grup *dihedral*-14 $(D_{14},\circ)$ adalah subgrup itu sendiri, yaitu:

$$N_{D_{14}}(\{1, s\}) = \{1, s\}$$

$$N_{D_{14}}(\{1, sr\}) = \{1, sr\}$$

$$N_{D_{14}}(\{1, sr^2\}) = \{1, sr^2\}$$

$$N_{D_{14}}(\{1, sr^3\}) = \{1, sr^3\}$$

$$N_{D_{14}}(\{1, sr^4\}) = \{1, sr^4\}$$

$$N_{D_{14}}(\{1, sr^5\}) = \{1, sr^5\}$$

$$N_{D_{14}}(\{1, sr^6\}) = \{1, sr^6\}.$$

2. *Normalizer* subgrup selain terdiri dari 2 elemen di grup *dihedral*-14 adalah semua elemen *dihedral*-14, yaitu:

$N_{D_{14}}(\{1\}) = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6\}$

$N_{D_{14}}(\{1, r, r^2, r^3, r^4\}) = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6\}$

$N_{D_{14}}(\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6\})$

$= \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6\}$.

3.1.4 Grup *Dihedral-2n* $(D_{2n}, \circ)$ dengan $n \geq 3, n$ Bilangan Prima

Secara umum, elemen-elemen dari grup *dihedral-2n* adalah

$$D_{2n} = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, \dots, sr^{n-1}\}$$

Subgrup-subgrup dari grup *dihedral-2n* $(D_{2n}, \circ)$ adalah:

$$(\{1\}, \circ)$$

$$(\{1, s\}, \circ)$$

$$(\{1, sr\}, \circ)$$

$$\vdots$$

$$(\{1, sr^{n-1}\}, \circ)$$

$$(\{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}\}, \circ)$$

$$(\{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, \dots, sr^{n-1}\}, \circ)$$

Berdasarkan subgrup-subgrup tersebut dapat disimpulkan bahwa pada grup *dihedral-2n* terdapat:

1. Sebanyak 1 subgrup yang terdiri dari 1 elemen yaitu elemen identitas, yaitu $(\{1\}, \circ)$.
2. Sebanyak n subgrup yang terdiri dari 2 elemen yaitu elemen identitas dan elemen yang memuat s, yaitu $(\{1, s\}, \circ)$, $(\{1, sr\}, \circ)$, ..., $(\{1, sr^{n-1}\}, \circ)$.
3. Sebanyak 1 subgrup yang terdiri dari n elemen yaitu elemen identitas dan semua elemen r, yaitu $(\{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}\}, \circ)$.

4. Sebanyak 1 subgrup yang terdiri dari $2n$ elemen yaitu semua elemen D_{2n}, yaitu $(\{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, \dots, sr^{n-1}\}, \circ)$.

Misalkan A_{2n} adalah subgrup dari grup *dihedral-2n*. *Centralizer* A_{2n} di grup *dihedral-2n* dapat didefinisikan sebagai himpunan elemen-elemen di grup *dihedral-2n* yang komutatif dengan setiap elemen dari subgrupnya yaitu A_{2n}. *Centralizer* subgrup di grup *dihedral-2n* adalah sebagai berikut:

Tabel 3.7: Tabel *Centralizer* Subgrup di Grup *Dihedral-2n*

A_{2n}	$C_{D_{2n}}(A_{2n})$
$\{1\}$	$\{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, \dots, sr^{n-1}\}$
$\{1, s\}$	$\{1, s\}$
$\{1, sr\}$	$\{1, sr\}$
$\vdots$	$\vdots$
$\{1, sr^{n-1}\}$	$\{1, sr^{n-1}\}$
$\{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}\}$	$\{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}\}$
$\{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, \dots, sr^{n-1}\}$	$\{1\}$

Berdasarkan tabel tersebut dapat disimpulkan bahwa :

1. *Centralizer* identitas di grup *dihedral-2n* adalah semua elemen D_{2n}, yaitu $C_{D_{2n}}(\{1\}) = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, \dots, sr^{n-1}\}$.
2. *Centralizer* semua elemen grup *dihedral-2n* di grup *dihedral-2n* adalah elemen identitas, yaitu $C_{D_{2n}}(D_{2n}) = \{1\}$.
3. Subgrup dari grup *dihedral-2n* yang sejati adalah subgrup yang terdiri dari 2 elemen yaitu elemen identitas dan elemen yang memuat *s*, dan subgrup yang memuat semua elemen *r*. Karena elemen r komutatif dengan semua elemen r, maka *centralizer* semua elemen *r* di grup *dihedral-2n* adalah semua elemen *r*. Sedangkan elemen sr^i dengan $0 \leq i \leq n-1$ hanya komutatif dengan elemen identitas dan elemen yang sr^i itu sendiri karena $(sr^i) = sr^i$ dan jika $sr^i \circ$

$(sr^i)^{-1} = (sr^i)^{-1} \circ sr^i = 1$, sedangkan elemen identitas komutatif dengan semua elemen grup *dihedral-2n*. Jadi, *centralizer* subgrup dari grup *dihedral-2n* yang sejati adalah subgrup itu sendiri. yaitu:

$$C_{D_{2n}}(\{1,s\}) = \{1,s\}$$

$$C_{D_{2n}}(\{1,sr\}) = \{1,sr\}$$

$$\vdots$$

$$C_{D_{2n}}(\{1,sr^{n-1}\},\circ) = \{1,sr^{n-1}\}$$

$$C_{D_{2n}}(\{1,r,r^2,\ldots,r^{n-1}\}) = \{1,r,r^2,\ldots,r^{n-1}\}$$

Center dari grup *dihedral-2n* merupakan himpunan elemen-elemen grup *dihedral-2n* yang komutatif dengan setiap elemen grup *dihedral-2n*. Dengan kata lain, *center* grup *dihedral-2n* adalah *centralizer* D_{2n} di D_{2n}. Jadi, *center* dari grup *dihedral-2n* adalah elemen identitas, yaitu $Z(D_{2n}) = 1$.

Misalkan A_{2n} adalah subgrup dari grup *dihedral-2n*. *Normalizer* A_{2n} di grup *dihedral-2n* dapat didefinisikan sebagai himpunan dari elemen-elemen grup *dihedral-2n* yang memenuhi $g \circ a \circ g^{-1} \in A_{2n}, \forall a \in A_{2n}, g \in D_{2n}$. *Normalizer* subgrup di grup *dihedral-2n* adalah sebagai berikut:

Tabel 3.8: Tabel *Normalizer* Subgrup di Grup *Dihedral-2n*

A_{2n}	$N_{D_{2n}}(A_{2n})$
$\{1\}$	$\{1,r,r^2,\ldots,r^{n-1},s,sr,\ldots,sr^{n-1}\}$
$\{1,s\}$	$\{1,s\}$
$\{1,sr\}$	$\{1,sr\}$
$\vdots$	$\vdots$
$\{1,sr^{n-1}\}$	$\{1,sr^{n-1}\}$
$\{1,r,r^2\}$	$\{1,r,r^2,\ldots,r^{n-1},s,sr,\ldots,sr^{n-1}\}$
$\{1,r,r^2,\ldots,r^{n-1},s,sr,\ldots,sr^{n-1}\}$	$\{1,r,r^2,\ldots,r^{n-1},s,sr,\ldots,sr^{n-1}\}$

Berdasarkan tabel tersebut dapat disimpulkan bahwa :

1. *Normalizer* subgrup yang terdiri dari 2 elemen, yaitu elemen identitas dan elemen yang memuat s di grup *dihedral-2n* adalah subgrup itu sendiri, yaitu:

$$N_{D_{2n}}(\{1,s\}) = \{1,s\}$$

$$N_{D_{2n}}(\{1,sr\}) = \{1,sr\}$$

$$\vdots$$

$$N_{D_{2n}}(\{1,sr^{n-1}\}) = \{1,sr^{n-1}\}.$$

2. *Normalizer* subgrup selain terdiri dari 2 elemen di grup *dihedral-2n* adalah:

$N_{D_{2n}}(\{1\}) = \{1,r,r^2,\dots,r^{n-1},s,sr,\dots,sr^{n-1}\}$

$N_{D_{2n}}(\{1,r,r^2,\dots,r^{n-1}\}) = \{1,r,r^2,\dots,r^{n-1},s,sr,\dots,sr^{n-1}\}$

$N_{D_{2n}}(D_{2n}) = \{1,r,r^2,\dots,r^{n-1},s,sr,\dots,sr^{n-1}\}.$

3.2 Grup *Dihedral-2n* $(D_{2n},\circ), n \geq 3, n$ Bilangan Komposit

Bilangan komposit adalah bilangan-bilangan selain bilangan prima. Jika p_i habis membagi *n*, dinyatakan $p_i|n$, maka n dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$n = p_i \times q_i$$

Dimana p_i adalah pembagi-pembagi positif dari n, $p_i = p_1, p_2, \dots, p_m$; $q_i = q_1, q_2, \dots, q_m$; $m = 1,2,\dots$

Misalnya $4 = 1 \times 4$

$= 2 \times 2$

$= 4 \times 1$

Maka $n = 4$ mempunyai 3 pembagi positif yaitu 1,2, dan 4. Jadi, untuk $n = 4$ dapat dinyatakan dengan $4 = p_i \times q_i$; $i = 1,2,3$ dengan $p_1 = 1,\ p_2 = 2,\ p_3 = 4,$ $q_1 = 4,\ q_2 = 2,\ q_3 = 1.$

3.2.1 Grup *Dihedral*-8 $(D_8,\circ)$

Elemen-elemen grup *dihedral-2n* dengan $n = 4$ yaitu grup *dihedral*-8 adalah $D_8 = \{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$. Sub-sub himpunan yang memenuhi aksioma-aksioma grup yaitu subgrup dari grup *dihedral*-8 adalah:

1. $(\{1\},\circ)$
2. $(\{1, r, r^2, r^3\},\circ)$
3. $(\{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\},\circ)$
4. $(\{1, s\},\circ)$
5. $(\{1, sr\},\circ)$
6. $(\{1, sr^2\},\circ)$
7. $(\{1, sr^3\},\circ)$
8. $(\{1, r^2\},\circ)$
9. $(\{1, r^2, s, sr^2\},\circ)$
10. $(\{1, r^2, sr, sr^3\},\circ)$

Berdasarkan subgrup-subgrup tersebut dapat disimpulkan bahwa pada grup *dihedral*-8 terdapat:

5. Sebanyak 1 subgrup yang terdiri dari 1 elemen yaitu elemen identitas, yaitu $(\{1\},\circ)$.

6. Sebanyak 4 subgrup yang terdiri dari 2 elemen yaitu elemen identitas dan elemen yang memuat s, yaitu $(\{1, s\}, \circ)$, $(\{1, sr\}, \circ)$, $(\{1, sr^2\}, \circ)$ dan $(\{1, sr^3\}, \circ)$.
7. Sebanyak 1 subgrup yang terdiri dari 4 elemen yaitu elemen identitas dan semua elemen r, yaitu $(\{1, r, r^2, r^3\}, \circ)$.
8. Sebanyak 1 subgrup yang terdiri dari 8 elemen yaitu semua elemen D_8, yaitu $(\{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}, \circ)$.
9. Sebanyak 1 subgrup yang terdiri dari 2 elemen yaitu elemen identitas dan elemen $r^{\frac{4}{2}} = r^2$, yaitu $(\{1, r^2\}, \circ)$.
10. Sebanyak 2 subgrup yang terdiri dari 4 elemen yaitu elemen identitas, elemen $r^{\frac{4}{2}} = r^2$, dan 2 elemen yang memuat s, yaitu $(\{1, r^2, s, sr^2\}, \circ)$ dan $(\{1, r^2, sr, sr^3\}, \circ)$

Misalkan A_8 adalah subgrup dari grup *dihedral*-8. *Centralizer* A_8 di grup *dihedral*-8 dapat didefinisikan sebagai himpunan elemen-elemen di grup *dihedral*-8 yang komutatif dengan setiap elemen dari subgrupnya yaitu A_8. *Centralizer* subgrup di grup *dihedral*-8 adalah sebagai berikut:

Tabel 3.9: Tabel *Centralizer* Subgrup di Grup *Dihedral*-8

A_8	$C_{D_8}(A_8)$
$\{1\}$	$\{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$
$\{1, s\}$	$\{1, r^2, s, sr^2\}$
$\{1, sr\}$	$\{1, r^2, sr, sr^3\}$
$\{1, sr^2\}$	$\{1, r^2, s, sr^2\}$
$\{1, sr^3\}$	$\{1, r^2, sr, sr^3\}$
$\{1, r^2\}$	$\{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$
$\{1, r^2, s, sr^2\}$	$\{1, r^2, s, sr^2\}$
$\{1, r^2, sr, sr^3\}$	$\{1, r^2, sr, sr^3\}$
$\{1, r, r^2, r^3\}$	$\{1, r, r^2, r^3\}$
$\{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$	$\{1, r^2\}$

Berdasarkan tabel tersebut dapat disimpulkan bahwa :

4. *Centralizer* identitas dan subgrup yang terdiri dari 2 elemen yaitu elemen identitas dan elemen $r^{\frac{4}{2}} = r^2$ di grup *dihedral*-8 adalah semua elemen D_8, yaitu $C_{D_8}(\{1\}) = \{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$ dan $C_{D_8}(\{1, r^2\}) = \{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$.
5. *Centralizer* semua elemen grup *dihedral*-8 di grup *dihedral*-8 adalah terdiri dari 2 elemen yaitu elemen identitas dan elemen $r^{\frac{4}{2}} = r^2$, yaitu $C_{D_8}(\{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}) = \{1, r^2\}$.
6. *Centralizer* subgrup yang terdiri dari elemen identitas dan semua elemen r adalah subgrup itu sendiri, yaitu
$$C_{D_8}(\{1, r, r^2, r^3\}) = \{1, r, r^2, r^3\}.$$
7. *Centralizer* subgrup yang terdiri dari 2 elemen yaitu elemen identitas dan elemen yang memuat s dan subgrup yang terdiri dari 4 elemen yaitu elemen identitas, elemen $r^{\frac{4}{2}} = r^2$, dan 2 elemen yang memuat s di grup *dihedral*-8 adalah terdiri dari 4 elemen yaitu elemen identitas, elemen r^2, dan 2 elemen s yang memuat elemen s yang dimaksud, yaitu:
$C_{D_8}(\{1, s\}) = \{1, r^2, s, sr^2\}$
$C_{D_8}(\{1, sr\}) = \{1, r^2, sr, sr^3\}$
$C_{D_8}(\{1, sr^2\}) = \{1, r^2, s, sr^2\}$
$C_{D_8}(\{1, sr^3\}) = \{1, r^2, sr, sr^3\}$
$C_{D_8}(\{1, r^2, s, sr^2\}) = \{1, r^2, s, sr^2\}$

$C_{D_8}(\{1, r^2, sr, sr^3\}) = \{1, r^2, sr, sr^3\}$.

Center dari grup *dihedral*-8 merupakan himpunan elemen-elemen grup *dihedral*-8 yang komutatif dengan setiap elemen *dihedral*-8. Dengan kata lain, *center* grup *dihedral*-8 adalah *centralizer* D_8 di D_8. Jadi, *center* dari grup *dihedral*-8 adalah elemen identitas dan elemen $r^{\frac{4}{2}} = r^2$, yaitu $Z(\{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}) = \{1, r^2\}$.

Misalkan A_8 adalah subgrup dari grup *dihedral*-8. *Normalizer* A_8 di grup *dihedral*-8 dapat didefinisikan sebagai himpunan dari elemen-elemen grup *dihedral*-8 yang memenuhi $g \circ a \circ g^{-1} \in A_8, \forall a \in A_8, g \in D_8$. *Normalizer* subgrup di grup *dihedral*-8 adalah sebagai berikut:

Tabel 3.10: Tabel *Normalizer* Subgrup di Grup *Dihedral*-8

A_8	$N_{D_8}(A_8)$
$\{1\}$	$\{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$
$\{1, s\}$	$\{1, r^2, s, sr^2\}$
$\{1, sr\}$	$\{1, r^2, sr, sr^3\}$
$\{1, sr^2\}$	$\{1, r^2, s, sr^2\}$
$\{1, sr^3\}$	$\{1, r^2, sr, sr^3\}$
$\{1, r^2\}$	$\{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$
$\{1, r^2, s, sr^2\}$	$\{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$
$\{1, r^2, sr, sr^3\}$	$\{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$
$\{1, r, r^2, r^3\}$	$\{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$
$\{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$	$\{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$

Berdasarkan tabel tersebut dapat disimpulkan bahwa *normalizer* subgrup yang terdiri dari 2 elemen, yaitu elemen identitas dan elemen yang memuat s di grup *dihedral*-8 adalah terdiri dari 4 elemen yaitu elemen identitas, elemen $r^{\frac{4}{2}} = r^2$, dan 2 elemen s yang memuat s yang dimaksud, yaitu:

$N_{D_8}(\{1, s\}) = \{1, r^2, s, sr^2\}$

$N_{D_8}(\{1, sr^2\}) = \{1, r^2, s, sr^2\}$

$N_{D_8}(\{1, sr\}) = \{1, r^2, sr, sr^3\}$

$N_{D_8}(\{1, sr^3\}) = \{1, r^2, sr, sr^3\}$.

Sedangkan *normalizer* subgrup selain terdiri dari 2 elemen yaitu elemen identitas dan elemen yang memuat s di grup *dihedral*-8 adalah semua elemen *dihedral*-8, yaitu:

$N_{D_8}(\{1\}) = \{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$

$N_{D_8}(\{1, r^2\}) = \{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$

$N_{D_8}(\{1, r^2, s, sr^2\}) = \{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$

$N_{D_8}(\{1, r^2, sr, sr^3\}) = \{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$

$N_{D_8}(\{1, r, r^2, r^3\}) = \{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$

$N_{D_8}(\{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}) = \{1, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}$.

3.2.2 Grup *Dihedral*-12 (D_{12},∘)

Elemen-elemen dari grup *dihedral-2n* dengan $n = 6$ yaitu grup *dihedral*-12 adalah $D_{12} = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5\}$. Sub-sub himpunan yang memenuhi aksioma-aksioma grup yaitu subgrup dari grup *dihedral*-12 adalah:

1. $(\{1\}, \circ)$
2. $(\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5\}, \circ)$
3. $(\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5\}, \circ)$
4. $(\{1, s\}, \circ)$
5. $(\{1, sr\}, \circ)$
6. $(\{1, sr^2\}, \circ)$

7. $(\{1, sr^3\},\circ)$
8. $(\{1, sr^4\},\circ)$
9. $(\{1, sr^5\},\circ)$
10. $(\{1, r^3\},\circ)$
11. $(\{1, r^3, s, sr^3\},\circ)$
12. $(\{1, r^3, sr, sr^4\},\circ)$
13. $(\{1, r^3, sr^2, sr^5\},\circ)$
14. $(\{1, r^2, r^4\},\circ)$
15. $(\{1, r^2, r^4, s, sr^2, sr^4\},\circ)$
16. $(\{1, r^2, r^4, sr, sr^3, sr^5\},\circ)$

Berdasarkan subgrup-subgrup tersebut dapat disimpulkan bahwa pada grup *dihedral*-12 terdapat:

1. Sebanyak 1 subgrup yang terdiri dari 1 elemen yaitu elemen identitas, yaitu $(\{1\},\circ)$.
2. Sebanyak 6 subgrup yang terdiri dari 2 elemen yaitu elemen identitas dan elemen yang memuat s, yaitu $(\{1, s\},\circ)$, $(\{1, sr\},\circ)$, $(\{1, sr^2\},\circ)$, $(\{1, sr^3\},\circ)$, $(\{1, sr^4\},\circ)$, dan $(\{1, sr^5\},\circ)$.
3. Sebanyak 1 subgrup yang terdiri dari 6 elemen yaitu elemen identitas dan semua elemen r, yaitu $(\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5\},\circ)$.
4. Sebanyak 1 subgrup yang terdiri dari 12 elemen yaitu semua elemen D_{12}, yaitu $(\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5\},\circ)$.
5. Sebanyak 1 subgrup yang terdiri dari 2 elemen yaitu elemen identitas dan elemen $r^{\frac{6}{2}} = r^3$, yaitu $(\{1, r^3\},\circ)$.

6. Sebanyak 3 subgrup yang terdiri dari 4 elemen yaitu elemen identitas, elemen $r^{\frac{6}{2}} = r^3$, dan 2 elemen yang memuat s, yaitu $(\{1, r^3, s, sr^3\}, \circ)$, $(\{1, r^3, sr, sr^4\}, \circ)$ dan $(\{1, r^3, sr^2, sr^5\}, \circ)$.
7. Sebanyak 1 subgrup yang terdiri dari 3 elemen yaitu elemen identitas dan elemen yang memuat $r^{\frac{6k}{3}} = r^{2k}, k = 1,2$, yaitu $(\{1, r^2, r^4\}, \circ)$.
8. Sebanyak 2 subgrup yang terdiri dari 6 elemen yaitu elemen identitas, elemen $r^{\frac{6k}{3}} = r^{2k}, k = 1,2$, dan 2 elemen yang memuat s, yaitu $(\{1, r^2, r^4, s, sr^2, sr^4\}, \circ)$ dan $(\{1, r^2, r^4, sr, sr^3, sr^5\}, \circ)$.

Misalkan A_{12} adalah subgrup dari grup *dihedral*-12. *Centralizer* A_{12} di grup *dihedral*-12 dapat didefinisikan sebagai himpunan elemen-elemen di grup *dihedral*-12 yang komutatif dengan setiap elemen dari subgrupnya yaitu A_{12}. *Centralizer* subgrup di grup *dihedral*-12 adalah sebagai berikut:

Tabel 3.11: Tabel *Centralizer* Subgrup di Grup *Dihedral*-12

A_{12}	$C_{D_{12}}(A_{12})$
$\{1\}$	$\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5\}$
$\{1, s\}$	$\{1, r^3, s, sr^3\}$
$\{1, sr\}$	$\{1, r^3, sr, sr^4\}$
$\{1, sr^2\}$	$\{1, r^3, sr^2, sr^5\}$
$\{1, sr^3\}$	$\{1, r^3, s, sr^3\}$
$\{1, sr^4\}$	$\{1, r^3, sr, sr^4\}$
$\{1, sr^5\}$	$\{1, r^3, sr^2, sr^5\}$
$\{1, r^3\}$	$\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5\}$
$\{1, r^3, s, sr^3\}$	$\{1, r^3, s, sr^3\}$
$\{1, r^3, sr, sr^4\}$	$\{1, r^3, sr, sr^4\}$
$\{1, r^3, sr^2, sr^5\}$	$\{1, r^3, sr^2, sr^5\}$
$\{1, r^2, r^4\}$	$\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5\}$
$\{1, r^2, r^4, s, sr^2, sr^4\}$	$\{1, r^3\}$
$\{1, r^2, r^4, sr, sr^3, sr^5\}$	$\{1, r^3\}$
$\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5\}$	$\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5\}$
$\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5\}$	$\{1, r^3\}$

Berdasarkan tabel tersebut dapat disimpulkan bahwa :

1. *Centralizer* identitas dan subgrup yang terdiri dari 2 elemen yaitu elemen identitas dan elemen $r^{\frac{6}{2}} = r^3$ di grup *dihedral*-12 adalah semua elemen D_{12}, yaitu $C_{D_{12}}(\{1\}) = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5\}$ dan $C_{D_{12}}(\{1, r^3\}) = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5\}$.
2. *Centralizer* subgrup yang terdiri dari elemen identitas dan elemen yang memuat r, selain subgrup yang terdiri dari elemen identitas dan elemen $r^{\frac{6}{2}} = r^3$, adalah terdiri dari elemen identitas dan semua elemen r, yaitu $C_{D_{12}}(\{1, r^2, r^4\}) = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5\}$ dan $C_{D_{12}}(\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5\}) = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5\}$.
3. *Centralizer* subgrup yang terdiri dari 2 elemen yaitu elemen identitas dan elemen yang memuat s dan subgrup yang terdiri dari 4 elemen yaitu elemen identitas, elemen $r^{\frac{6}{2}} = r^3$, dan 2 elemen yang memuat s di grup *dihedral*-12 adalah terdiri dari 4 elemen yaitu elemen identitas, elemen $r^{\frac{6}{2}} = r^3$, dan 2 elemen s yang memuat elemen s yang dimaksud, yaitu:

   $C_{D_{12}}(\{1, s\}) = \{1, r^3, s, sr^3\}$

   $C_{D_{12}}(\{1, sr\}) = \{1, r^3, sr, sr^4\}$

   $C_{D_{12}}(\{1, sr^2\}) = \{1, r^3, sr^2, sr^5\}$

   $C_{D_{12}}(\{1, sr^3\}) = \{1, r^3, s, sr^3\}$

   $C_{D_{12}}(\{1, sr^4\}) = \{1, r^3, sr, sr^4\}$

   $C_{D_{12}}(\{1, sr^5\}) = \{1, r^3, sr^2, sr^5\}$

   $C_{D_{12}}(\{1, r^3, s, sr^3\}) = \{1, r^3, s, sr^3\}$

$C_{D_{12}}(\{1, r^3, sr, sr^4\}) = \{1, r^3, sr, sr^4\}$

$C_{D_{12}}(\{1, r^3, sr^2, sr^5\}) = \{1, r^3, sr^2, sr^5\}$.

4. *Centralizer* semua elemen *dihedral*-12 dan subgrup yang terdiri dari elemen identitas, elemen yang memuat $r^{\frac{6k}{3}} = r^{2k}$, dan elemen yang memuat s di grup *dihedral*-12 adalah terdiri dari 2 elemen yaitu elemen identitas dan elemen $r^{\frac{6}{2}} = r^3$, yaitu:

   $C_{D_{12}}(\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5\}) = \{1, r^3\}$

   $C_{D_{12}}(\{1, r^2, r^4, s, sr^2, sr^4\}) = \{1, r^3\}$

   $C_{D_{12}}(\{1, r^2, r^4, sr, sr^3, sr^5\}) = \{1, r^3\}$.

Center dari grup *dihedral*-12 merupakan himpunan elemen-elemen grup *dihedral*-12 yang komutatif dengan setiap elemen grup *dihedral*-12. Dengan kata lain, *center* grup *dihedral*-12 adalah *centralizer* D_{12} di D_{12}. Jadi, *center* dari grup *dihedral*-12 adalah elemen identitas dan elemen $r^{\frac{6}{2}} = r^3$, yaitu $Z(\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5\}) = \{1, r^3\}$.

Misalkan A_{12} adalah subgrup dari grup *dihedral*-12. *Normalizer* A_{12} di grup *dihedral*-12 dapat didefinisikan sebagai himpunan dari elemen-elemen grup *dihedral*-12 yang memenuhi $g \circ a \circ g^{-1} \in A_{12}, \forall a \in A_{12}, g \in D_{12}$. *Normalizer* subgrup di grup *dihedral*-12 sebagai berikut:

Tabel 3.12: Tabel *Normalizer* Subgrup di Grup *Dihedral*-12

A_{12}	$N_{D_{12}}(A_{12})$
$\{1\}$	$\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5,$ $s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5\}$
$\{1, s\}$	$\{1, r^3, s, sr^3\}$
$\{1, sr\}$	$\{1, r^3, sr, sr^4\}$
$\{1, sr^2\}$	$\{1, r^3, sr^2, sr^5\}$

$\{1, sr^3\}$	$\{1, r^3, s, sr^3\}$
$\{1, sr^4\}$	$\{1, r^3, sr, sr^4\}$
$\{1, sr^5\}$	$\{1, r^3, sr^2, sr^5\}$
$\{1, r^3\}$	$\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5,$ $s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5\}$
$\{1, r^3, s, sr^3\}$	$\{1, r^3, s, sr^3\}$
$\{1, r^3, sr, sr^4\}$	$\{1, r^3, sr, sr^4\}$
$\{1, r^3, sr^2, sr^5\}$	$\{1, r^3, sr^2, sr^5\}$
$\{1, r^2, r^4\}$	$\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5,$ $s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5\}$
$\{1, r^2, r^4, s, sr^2, sr^4\}$	$\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5,$ $s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5\}$
$\{1, r^2, r^4, sr, sr^3, sr^5\}$	$\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5,$ $s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5\}$
$\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6\}$	$\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5,$ $s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5\}$
$\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5,$ $s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5\}$	$\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5,$ $s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5\}$

Berdasarkan tabel tersebut dapat disimpulkan bahwa *normalizer* subgrup yang terdiri dari 2 elemen, yaitu elemen identitas dan elemen yang memuat s dan subgrup yang terdiri dari 4 elemen yaitu elemen identitas, elemen $r^{\frac{6}{2}} = r^3$, dan 2 elemen yang memuat s di grup *dihedral*-12 adalah subgrup yang terdiri dari 4 elemen yaitu elemen identitas, elemen $r^{\frac{6}{2}} = r^3$, dan 2 elemen yang memuat s yang dimaksud yaitu:

$N_{D_{12}}(\{1, s\}) = \{1, r^3, s, sr^3\}$

$N_{D_{12}}(\{1, sr\}) = \{1, r^3, sr, sr^4\}$

$N_{D_{12}}(\{1, sr^2\}) = \{1, r^3, sr^2, sr^5\}$

$N_{D_{12}}(\{1, sr^3\}) = \{1, r^3, s, sr^3\}$

$N_{D_{12}}(\{1, sr^4\}) = \{1, r^3, sr, sr^4\}$

$N_{D_{12}}(\{1, sr^5\}) = \{1, r^3, sr^2, sr^5\}$

$N_{D_{12}}(\{1, r^3, s, sr^3\}) = \{1, r^3, s, sr^3\}$

$N_{D_{12}}(\{1, r^3, sr, sr^4\}) = \{1, r^3, sr, sr^4\}$

$N_{D_{12}}(\{1, r^3, sr^2, sr^5\}) = \{1, r^3, sr^2, sr^5\}$.

Sedangkan *normalizer* subgrup selain terdiri dari 2 tipe subgrup tersebut di grup *dihedral*-12 adalah semua elemen grup *dihedral*-12, yaitu:

$N_{D_{12}}(\{1\}) = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5\}$

$N_{D_{12}}(\{1, r^3\}) = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5\}$

$N_{D_{12}}(\{1, r^2, r^4\}) = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5\}$

$N_{D_{12}}(\{1, r^2, r^4, s, sr^2, sr^4\}) = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5\}$

$N_{D_{12}}(\{1, r^2, r^4, sr, sr^3, sr^5\}) = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5\}$

$N_{D_{12}}(\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5\}) = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5\}$

$N_{D_{12}}(\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5\})$

$= \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5\}$

3.2.3 Grup *Dihedral*-16 (D_{16},∘)

Elemen-elemen dari grup *dihedral-2n* dengan $n = 8$ yaitu grup *dihedral*-16 adalah $D_{16} = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7\}$. Sub-sub himpunan yang memenuhi aksioma-aksioma grup yaitu subgrup dari grup *dihedral*-16 adalah:

1. $(\{1\}, \circ)$
2. $(\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7\}, \circ)$
3. $(\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7\}, \circ)$
4. $(\{1, s\}, \circ)$

5. $(\{1, sr\},\circ)$
6. $(\{1, sr^2\},\circ)$
7. $(\{1, sr^3\},\circ)$
8. $(\{1, sr^4\},\circ)$
9. $(\{1, sr^5\},\circ)$
10. $(\{1, sr^6\},\circ)$
11. $(\{1, sr^7\},\circ)$
12. $(\{1, r^4\},\circ)$
13. $(\{1, r^4, s, sr^4\},\circ)$
14. $(\{1, r^4, sr, sr^5\},\circ)$
15. $(\{1, r^4, sr^2, sr^6\},\circ)$
16. $(\{1, r^4, sr^3, sr^7\},\circ)$
17. $(\{1, r^2, r^4, r^6\},\circ)$
18. $(\{1, r^2, r^4, r^6, s, sr^2, sr^4, sr^6\},\circ)$
19. $(\{1, r^2, r^4, sr, sr^3, sr^5, sr^7\},\circ)$

Berdasarkan subgrup-subgrup tersebut dapat disimpulkan bahwa pada grup *dihedral*-16 terdapat:

1. Sebanyak 1 subgrup yang terdiri dari 1 elemen yaitu elemen identitas, yaitu $(\{1\},\circ)$.
2. Sebanyak 8 subgrup yang terdiri dari 2 elemen yaitu elemen identitas dan elemen yang memuat s, yaitu $(\{1, s\},\circ)$, $(\{1, sr\},\circ)$, $(\{1, sr^2\},\circ)$, $(\{1, sr^3\},\circ)$, $(\{1, sr^4\},\circ)$, $(\{1, sr^5\},\circ)$, $(\{1, sr^6\},\circ)$, dan $(\{1, sr^7\},\circ)$.

3. Sebanyak 1 subgrup yang terdiri dari 8 elemen yaitu elemen identitas dan semua elemen r, yaitu $(\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7\}, \circ)$.
4. Sebanyak 1 subgrup yang terdiri dari 16 elemen yaitu semua elemen D_{16}, yaitu $\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7\}$.
5. Sebanyak 1 subgrup yang terdiri dari 2 elemen yaitu elemen identitas dan elemen $r^{\frac{8}{2}} = r^4$, yaitu $(\{1, r^4\}, \circ)$.
6. Sebanyak 4 subgrup yang terdiri dari 4 elemen yaitu elemen identitas, elemen $r^{\frac{8}{2}} = r^4$, dan 2 elemen yang memuat s, yaitu:

   $(\{1, r^4, s, sr^4\}, \circ)$, $(\{1, r^4, sr, sr^5\}, \circ)$, $(\{1, r^4, sr^2, sr^6\}, \circ)$, dan $(\{1, r^4, sr^3, sr^7\}, \circ)$.
7. Sebanyak 1 subgrup yang terdiri dari 4 elemen yaitu elemen identitas dan elemen yang memuat $r^{\frac{8k}{4}} = r^{2k}, k = 1,2,3$, yaitu $(\{1, r^2, r^4, r^6\}, \circ)$.
8. Sebanyak 2 subgrup yang terdiri dari 8 elemen yaitu elemen identitas, elemen $r^{\frac{8k}{4}} = r^{2k}, k = 1,2,3$, dan 2 elemen yang memuat s, yaitu

   $(\{1, r^2, r^4, r^6, s, sr^2, sr^4, sr^6\}, \circ)$ dan $(\{1, r^2, r^4, r^6, sr, sr^3, sr^5, sr^7\}, \circ)$.

Misalkan A_{16} adalah subgrup dari grup *dihedral-16* $(D_{16}, \circ)$. *Centralizer* A_{16} di grup *dihedral*-16 dapat didefinisikan sebagai himpunan elemen-elemen di grup *dihedral*-16 yang komutatif dengan setiap elemen dari subgrupnya yaitu A_{16}. *Centralizer* subgrup di grup *dihedral*-16 adalah sebagai berikut:

Tabel 3.13: Tabel *Centralizer* Subgrup di Grup *Dihedral*-16

A_{16}	$C_{D_{16}}(A_{16})$
$\{1\}$	$\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7\}$
$\{1, s\}$	$\{1, r^4, s, sr^4\}$
$\{1, sr\}$	$\{1, r^4, sr, sr^5\}$
$\{1, sr^2\}$	$\{1, r^4, sr^2, sr^6\}$
$\{1, sr^3\}$	$\{1, r^4, sr^3, sr^7\}$
$\{1, sr^4\}$	$\{1, r^4, s, sr^4\}$
$\{1, sr^5\}$	$\{1, r^4, sr, sr^5\}$
$\{1, sr^6\}$	$\{1, r^4, sr^2, sr^6\}$
$\{1, sr^7\}$	$\{1, r^4, sr^3, sr^7\}$
$\{1, r^4\}$	$\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7\}$
$\{1, r^4, s, sr^4\}$	$\{1, r^4, s, sr^4\}$
$\{1, r^4, sr, sr^5\}$	$\{1, r^4, sr, sr^5\}$
$\{1, r^4, sr^2, sr^6\}$	$\{1, r^4, sr^2, sr^6\}$
$\{1, r^4, sr^3, sr^7\}$	$\{1, r^4, sr^3, sr^7\}$
$\{1, r^2, r^4, r^6\}$	$\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7\}$
$\{1, r^2, r^4, r^6, s, sr^2, sr^4, sr^8\}$	$\{1, r^4\}$
$\{1, r^2, r^4, r^6, sr, sr^3, sr^5, sr^7\}$	$\{1, r^4\}$
$\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7\}$	$\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7\}$
$\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7\}$	$\{1, r^4\}$

Berdasarkan tabel tersebut dapat disimpulkan bahwa :

1. *Centralizer* identitas dan subgrup yang terdiri dari 2 elemen yaitu elemen identitas dan elemen $r^{\frac{8}{2}} = r^4$ di grup *dihedral*-16 adalah semua elemen D_{16}, yaitu:

   $C_{D_{16}}(\{1\}) = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7\}$ dan

   $C_{D_{16}}(\{1, r^4\}) = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7\}$.

2. *Centralizer* subgrup yang terdiri dari elemen identitas dan elemen yang memuat r, selain subgrup yang terdiri dari elemen identitas dan elemen

$r^{\frac{8}{2}} = r^4$, adalah terdiri dari elemen identitas dan semua elemen yang memuat r, yaitu $C_{D_{16}}(\{1, r^2, r^4, r^6\}) = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7\}$ dan $C_{D_{16}}(\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7\}) = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7\}$.

3. *Centralizer* subgrup yang terdiri dari 2 elemen yaitu elemen identitas dan elemen yang memuat s dan subgrup yang terdiri dari 4 elemen yaitu elemen identitas, elemen $r^{\frac{8}{2}} = r^4$, dan 2 elemen yang memuat s di grup *dihedral*-16 adalah terdiri dari 4 elemen yaitu elemen identitas, elemen $r^{\frac{8}{2}} = r^4$, dan 2 elemen s yang memuat elemen s yang dimaksud, yaitu:

   $C_{D_{16}}(\{1, s\}) = \{1, r^4, s, sr^4\}$

   $C_{D_{16}}(\{1, sr\}) = \{1, r^4, sr, sr^5\}$

   $C_{D_{16}}(\{1, sr^2\}) = \{1, r^4, sr^2, sr^6\}$

   $C_{D_{16}}(\{1, sr^3\}) = \{1, r^4, sr^3, sr^7\}$

   $C_{D_{16}}(\{1, sr^4\}) = \{1, r^4, s, sr^4\}$

   $C_{D_{16}}(\{1, sr^5\}) = \{1, r^4, sr, sr^5\}$

   $C_{D_{16}}(\{1, sr^6\}) = \{1, r^4, sr^2, sr^6\}$

   $C_{D_{16}}(\{1, sr^7\}) = \{1, r^4, sr^3, sr^7\}$

   $C_{D_{16}}(\{1, r^4, s, sr^4\}) = \{1, r^4, s, sr^4\}$

   $C_{D_{16}}(\{1, r^4, sr, sr^5\}) = \{1, r^4, sr, sr^5\}$

   $C_{D_{16}}(\{1, r^4, sr^2, sr^6\}) = \{1, r^4, sr^2, sr^6\}$

   $C_{D_{16}}(\{1, r^4, sr^3, sr^7\}) = \{1, r^4, sr^3, sr^7\}$.

4. *Centralizer* semua elemen grup *dihedral*-16 dan subgrup yang terdiri dari elemen identitas, elemen yang memuat $r^{\frac{8k}{4}} = r^{2k}$, dan elemen yang memuat s di grup *dihedral*-16 adalah terdiri dari 2 elemen yaitu elemen identitas dan elemen $r^{\frac{8}{2}} = r^4$, yaitu:

   $C_{D_{16}}(\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7\}) = \{1, r^4\}$

   $C_{D_{16}}(\{1, r^2, r^4, r^6, s, sr^2, sr^4, sr^6\}) = \{1, r^4\}$

   $C_{D_{16}}(\{1, r^2, r^4, sr, sr^3, sr^5, sr^7\}) = \{1, r^4\}$.

Center dari grup *dihedral*-16 merupakan himpunan elemen grup *dihedral*-16 yang komutatif dengan setiap elemen *dihedral*-16. Dengan kata lain, *center* grup *dihedral*-16 adalah *centralizer* D_{16} di D_{16}. Jadi, *center* dari grup *dihedral*-16 adalah elemen identitas dan elemen $r^{\frac{8}{2}} = r^4$, yaitu

$$Z(\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7\}) = \{1, r^4\}.$$

Misalkan A_{16} adalah subgrup dari grup *dihedral*-16. *Normalizer* A_{16} di grup *dihedral*-16 dapat didefinisikan sebagai himpunan dari elemen-elemen grup *dihedral*-16 yang memenuhi $g \circ a \circ g^{-1} \in A_{16}, \forall a \in A_{16}, g \in D_{16}$. *Normalizer* subgrup di grup *dihedral*-16 adalah sebagai berikut:

Tabel 3.14: Tabel *Normalizer* Subgrup di Grup *Dihedral-16*

A_{16}	$N_{D_{16}}(A_{16})$
$\{1\}$	$\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7,$ $s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7\}$
$\{1, s\}$	$\{1, r^4, s, sr^4\}$
$\{1, sr\}$	$\{1, r^4, sr, sr^5\}$
$\{1, sr^2\}$	$\{1, r^4, sr^2, sr^8\}$
$\{1, sr^3\}$	$\{1, r^4, sr^3, sr^7\}$
$\{1, sr^4\}$	$\{1, r^4, s, sr^4\}$
$\{1, sr^5\}$	$\{1, r^4, sr, sr^5\}$
$\{1, sr^8\}$	$\{1, r^4, sr^2, sr^8\}$

$\{1, sr^7\}$	$\{1, r^4, sr^3, sr^7\}$
$\{1, r^4\}$	$\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7\}$
$\{1, r^4, s, sr^4\}$	$\{1, r^4, s, sr^4\}$
$\{1, r^4, sr, sr^5\}$	$\{1, r^4, sr, sr^5\}$
$\{1, r^4, sr^2, sr^8\}$	$\{1, r^4, sr^2, sr^8\}$
$\{1, r^4, sr^3, sr^7\}$	$\{1, r^4, sr^3, sr^7\}$
$\{1, r^2, r^4, r^8\}$	$\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7\}$
$\{1, r^2, r^4, r^8, s, sr^2, sr^4, sr^8\}$	$\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7\}$
$\{1, r^2, r^4, r^8, sr, sr^3, sr^5, sr^7\}$	$\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7\}$
$\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^8, r^7\}$	$\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7\}$
$\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7\}$	$\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7\}$

Berdasarkan tabel tersebut dapat disimpulkan bahwa *normalizer* subgrup yang terdiri dari 2 elemen, yaitu elemen identitas dan elemen yang memuat s dan subgrup yang terdiri dari 4 elemen yaitu elemen identitas, elemen $r^{\frac{8}{2}} = r^4$, dan 2 elemen yang memuat s di grup *dihedral*-16 adalah subgrup yang terdiri dari 4 elemen yaitu elemen identitas, elemen $r^{\frac{8}{2}} = r^4$, dan 2 elemen s yang memuat s yang dimaksud yaitu:

$N_{D_{16}}(\{1, s\}) = \{1, r^4, s, sr^4\}$

$N_{D_{16}}(\{1, sr\}) = \{1, r^4, sr, sr^5\}$

$N_{D_{16}}(\{1, sr^2\}) = \{1, r^4, sr^2, sr^6\}$

$N_{D_{16}}(\{1, sr^3\}) = \{1, r^4, sr^3, sr^7\}$

$N_{D_{16}}(\{1, sr^4\}) = \{1, r^4, s, sr^4\}$

$N_{D_{16}}(\{1, sr^5\}) = \{1, r^4, sr, sr^5\}$

$N_{D_{16}}(\{1, sr^6\}) = \{1, r^4, sr^2, sr^6\}$

$N_{D_{16}}(\{1, sr^7\}) = \{1, r^4, sr^3, sr^7\}$

$N_{D_{16}}(\{1, r^4, s, sr^4\}) = \{1, r^4, s, sr^4\}$

$N_{D_{16}}(\{1, r^4, sr, sr^5\}) = \{1, r^4, sr, sr^5\}$

$N_{D_{16}}(\{1, r^4, sr^2, sr^6\}) = \{1, r^4, sr^2, sr^6\}$

$N_{D_{16}}(\{1, r^4, sr^3, sr^7\}) = \{1, r^4, sr^3, sr^7\}$

Sedangkan *normalizer* subgrup selain terdiri dari 2 tipe subgrup tersebut di grup *dihedral*-16 adalah semua elemen grup *dihedral*-16, yaitu:

$N_{D_{16}}(\{1\}) = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7\}$

$N_{D_{16}}(\{1, r^4\}) = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7\}$

$N_{D_{16}}(\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5\})$

$= \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7\}$

$N_{D_{16}}(\{1, r^2, r^4, r^6\}) = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7\}$

$N_{D_{16}}(\{1, r^2, r^4, r^6, s, sr^2, sr^4, sr^6\})$

$= \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7\}$

$N_{D_{16}}(\{1, r^2, r^4, sr, sr^3, sr^5, sr^7\})$

$= \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7\}$

$N_{D_{16}}(\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7\})$

$= \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7\}.$

3.2.4 Grup *Dihedral*-18 (D_{18},∘)

Elemen-elemen dari grup *dihedral-2n* dengan $n = 9$ yaitu grup *dihedral*-18 adalah

$$D_{18} = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, r^8, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7, sr^8\}.$$

Sub-sub himpunan yang memenuhi aksioma-aksioma grup yaitu subgrup dari grup *dihedral*-18 adalah:

1. $(\{1\},\circ)$
2. $(\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, r^8\},\circ)$
3. $(\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, r^8, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7, sr^8\},\circ)$
4. $(\{1, s\},\circ)$
5. $(\{1, sr\},\circ)$
6. $(\{1, sr^2\},\circ)$
7. $(\{1, sr^3\},\circ)$
8. $(\{1, sr^4\},\circ)$
9. $(\{1, sr^5\},\circ)$
10. $(\{1, sr^6\},\circ)$
11. $(\{1, sr^7\},\circ)$
12. $(\{1, sr^8\},\circ)$
13. $(\{1, r^3, r^6\},\circ)$
14. $(\{1, r^3, r^6, s, sr^3, sr^6\},\circ)$
15. $(\{1, r^3, r^6, sr, sr^4, sr^7\},\circ)$
16. $(\{1, r^3, r^6, sr^2, sr^5, sr^8\},\circ)$

Berdasarkan subgrup-subgrup tersebut dapat disimpulkan bahwa pada grup *dihedral*-18 terdapat:

1. Sebanyak 1 subgrup yang terdiri dari 1 elemen yaitu elemen identitas, yaitu $(\{1\},\circ)$.

2. Sebanyak 9 subgrup yang terdiri dari 2 elemen yaitu elemen identitas dan elemen yang memuat s, yaitu $(\{1, s\}, \circ)$, $(\{1, sr\}, \circ)$, $(\{1, sr^2\}, \circ)$, $(\{1, sr^3\}, \circ)$, $(\{1, sr^4\}, \circ)$, $(\{1, sr^5\}, \circ)$, $(\{1, sr^6\}, \circ)$, $(\{1, sr^7\}, \circ)$, dan $(\{1, sr^8\}, \circ)$.
3. Sebanyak 1 subgrup yang terdiri dari 9 elemen yaitu elemen identitas dan semua elemen r, yaitu $(\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, r^8\}, \circ)$.
4. Sebanyak 1 subgrup yang terdiri dari 18 elemen yaitu semua elemen D_{18}, yaitu $\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, r^8, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7, sr^8\}$.
5. Sebanyak 1 subgrup yang terdiri dari 3 elemen yaitu elemen identitas dan elemen yang memuat $r^{\frac{9k}{3}} = r^{3k}, k = 1,2$, yaitu $(\{1, r^3, r^6\}, \circ)$.
6. Sebanyak 3 subgrup yang terdiri dari 6 elemen yaitu elemen identitas, elemen $r^{\frac{9k}{3}} = r^{3k}, k = 1,2$, dan 2 elemen yang memuat s, yaitu: $(\{1, r^3, r^6, s, sr^3, sr^6\}, \circ)$, $(\{1, r^3, r^6, sr, sr^4, sr^7\}, \circ)$, dan $(\{1, r^3, r^6, sr^2, sr^5, sr^8\}, \circ)$.

Misalkan A_{18} adalah subgrup dari grup *dihedral*-18. *Centralizer* A_{18} di grup *dihedral*-18 dapat didefinisikan sebagai himpunan elemen-elemen di grup *dihedral*-18 yang komutatif dengan setiap elemen dari subgrupnya yaitu A_{18}. *Centralizer* subgrup di grup *dihedral*-18 adalah sebagai berikut:

Tabel 3.15: Tabel *Centralizer* Subgrup di Grup *Dihedral*-18

A_{18}	$C_{D_{18}}(A_{18})$
$\{1\}$	$\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, r^8,$ $s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7, sr^8\}$
$\{1, s\}$	$\{1, s\}$
$\{1, sr\}$	$\{1, sr\}$
$\{1, sr^2\}$	$\{1, sr^2\}$
$\{1, sr^3\}$	$\{1, sr^3\}$

$\{1, sr^4\}$	$\{1, sr^4\}$
$\{1, sr^5\}$	$\{1, sr^5\}$
$\{1, sr^6\}$	$\{1, sr^6\}$
$\{1, sr^7\}$	$\{1, sr^7\}$
$\{1, sr^8\}$	$\{1, sr^8\}$
$\{1, r^3, r^6\}$	$\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, r^8\}$
$\{1, r^3, r^6, s, sr^3, sr^6\}$	$\{1\}$
$\{1, r^3, r^6, sr, sr^4, sr^7\}$	$\{1\}$
$\{1, r^3, r^6, sr^2, sr^5, sr^8\}$	$\{1\}$
$\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, r^8\}$	$\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, r^8\}$
$\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, r^8,$ $s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7, sr^8\}$	$\{1\}$

Berdasarkan tabel tersebut dapat disimpulkan bahwa :

1. *Centralizer* identitas di grup *dihedral*-18 adalah semua elemen D_{18}, yaitu $C_{D_{18}}(\{1\}) = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, r^8, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7, sr^8\}$.
2. *Centralizer* subgrup yang terdiri dari elemen identitas dan elemen yang memuat r adalah terdiri dari elemen identitas dan semua elemen yang memuat r, yaitu $C_{D_{18}}(\{1, r^3, r^6\}) = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, r^8\}$ dan $C_{D_{18}}(\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, r^8\}) = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, r^8\}$.
3. *Centralizer* subgrup yang terdiri dari 2 elemen yaitu elemen identitas dan elemen yang memuat s di grup *dihedral*-18 adalah subgrup itu sendiri, yaitu:

   $C_{D_{18}}(\{1, s\}) = \{1, s\}$

   $C_{D_{18}}(\{1, sr\}) = \{1, sr\}$

   $C_{D_{18}}(\{1, sr^2\}) = \{1, sr^2\}$

   $C_{D_{18}}(\{1, sr^3\}) = \{1, sr^3\}$

   $C_{D_{18}}(\{1, sr^4\}) = \{1, sr^4\}$

   $C_{D_{18}}(\{1, sr^5\}) = \{1, sr^5\}$

   $C_{D_{18}}(\{1, sr^6\}) = \{1, sr^6\}$

$C_{D_{18}}(\{1, sr^7\}) = \{1, sr^7\}$

$C_{D_{18}}(\{1, sr^8\}) = \{1, sr^8\}$.

4. *Centralizer* semua elemen grup *dihedral*-18 dan subgrup yang terdiri dari elemen identitas, elemen yang memuat $r^{\frac{9k}{3}} = r^3$, dan elemen yang memuat s di grup *dihedral*-18 adalah elemen identitas, yaitu:

   $C_{D_{18}}(\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, r^8, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7, sr^8\}) = \{1\}$

   $C_{D_{18}}(\{1, r^3, r^6, s, sr^3, sr^6\}) = \{1\}$

   $C_{D_{18}}(\{1, r^3, r^6, sr, sr^4, sr^7\}) = \{1\}$

   $C_{D_{18}}(\{1, r^3, r^6, sr^2, sr^5, sr^8\}) = \{1\}$.

Center dari grup *dihedral*-18 merupakan himpunan elemen-elemen grup *dihedral*-18 yang komutatif dengan setiap elemen grup *dihedral*-18. Dengan kata lain, *center* grup *dihedral*-18 adalah *centralizer* D_{18} di D_{18}. Jadi, *center* dari grup *dihedral-18* adalah elemen identitas, yaitu

$$Z(\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, r^8, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7, sr^8\}) = \{1\}.$$

Misalkan A_{18} adalah subgrup dari grup *dihedral*-18. *Normalizer* A_{18} di grup *dihedral*-18 dapat didefinisikan sebagai himpunan dari elemen-elemen *dihedral*-18 yang memenuhi $g \circ a \circ g^{-1} \in A_{18}, \forall a \in A_{18}, g \in D_{18}$. *Normalizer* subgrup di grup *dihedral*-18 adalah sebagai berikut:

Tabel 3.16: Tabel *Normalizer* Subgrup di Grup *Dihedral*-18

A_{18}	$N_{D_{18}}(A_{18})$
$\{1\}$	$\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, r^8,$ $s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7, sr^8\}$
$\{1, s\}$	$\{1, s\}$
$\{1, sr\}$	$\{1, sr\}$
$\{1, sr^2\}$	$\{1, sr^2\}$
$\{1, sr^3\}$	$\{1, sr^3\}$

$\{1, sr^4\}$	$\{1, sr^4\}$
$\{1, sr^5\}$	$\{1, sr^5\}$
$\{1, sr^6\}$	$\{1, sr^6\}$
$\{1, sr^7\}$	$\{1, sr^7\}$
$\{1, sr^8\}$	$\{1, sr^8\}$
$\{1, r^3, r^6\}$	$\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, r^8, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7, sr^8\}$
$\{1, r^3, r^6, s, sr^3, sr^6\}$	$\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, r^8, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7, sr^8\}$
$\{1, r^3, r^6, sr, sr^4, sr^7\}$	$\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, r^8, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7, sr^8\}$
$\{1, r^3, r^6, sr^2, sr^5, sr^8\}$	$\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, r^8, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7, sr^8\}$
$\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, r^8\}$	$\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, r^8, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7, sr^8\}$
$\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, r^8, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7, sr^8\}$	$\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, r^8, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7, sr^8\}$

Berdasarkan tabel tersebut dapat disimpulkan bahwa *normalizer* subgrup yang terdiri dari 2 elemen, yaitu elemen identitas dan elemen yang memuat *s* di grup *dihedral*-18 adalah subgrup itu sendiri, yaitu:

$N_{D_{18}}(\{1, s\}) = \{1, s\}$

$N_{D_{18}}(\{1, sr\}) = \{1, sr\}$

$N_{D_{18}}(\{1, sr^2\}) = \{1, sr^2\}$

$N_{D_{18}}(\{1, sr^3\}) = \{1, sr^3\}$

$N_{D_{18}}(\{1, sr^4\}) = \{1, sr^4\}$

$N_{D_{18}}(\{1, sr^5\}) = \{1, sr^5\}$

$N_{D_{18}}(\{1, sr^6\}) = \{1, sr^6\}$

$N_{D_{18}}(\{1, sr^7\}) = \{1, sr^7\}$

$N_{D_{18}}(\{1, sr^8\}) = \{1, sr^8\}$.

Sedangkan *normalizer* subgrup selain terdiri dari 2 tipe subgrup tersebut di grup *dihedral*-18 adalah semua elemen grup *dihedral*-18, yaitu:

$N_{D_{18}}(\{1\}) = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, r^8, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7, sr^8\}$

$N_{D_{18}}(\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, r^8\})$

$= \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, r^8, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7, sr^8\}$

$N_{D_{18}}(\{1, r^3, r^6\})$

$= \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, r^8, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7, sr^8\}$

$N_{D_{18}}(\{1, r^3, r^6, s, sr^3, sr^6\})$

$= \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, r^8, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7, sr^8\}$

$N_{D_{18}}(\{1, r^3, r^6, sr, sr^4, sr^7\})$

$= \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, r^8, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7, sr^8\}$

$N_{D_{18}}(\{1, r^3, r^6, sr^2, sr^5, sr^8\})$

$= \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, r^8, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7, sr^8\}$

$N_{D_{18}}(\{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, r^8, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7, sr^8\})$

$= \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6, r^7, r^8, s, sr, sr^2, sr^3, sr^4, sr^5, sr^6, sr^7, sr^8\}$.

3.2.5 Grup *Dihedral-2n* $(D_{2n}, \circ)$ dengan $n \geq 3, n$ Bilangan Komposit

Secara umum, grup *dihedral-2n* dengan $n \geq 3, n$ bilangan komposit adalah $D_{2n} = \{r, r^2, r^3, \ldots, r^n, s, sr, sr^2, \ldots, sr^{n-1}\}$. Subgrup-subgrup dari grup *dihedral-2n* $(D_{2n}, \circ)$ adalah:

$$\left(\left\{1, r^{\frac{kn}{p_i}}\right\}, \circ\right)$$

$$\left(\left\{1, r^{\frac{kn}{p_i}}, sr^0, sr^{\frac{kn}{p_i}+0}\right\}, \circ\right) = \left(\left\{1, r^{\frac{kn}{p_i}}, s, sr^{\frac{kn}{p_i}}\right\}, \circ\right)$$

$$\left(\left\{1, r^{\frac{kn}{p_i}}, sr^1, sr^{\frac{kn}{p_i}+1}\right\}, \circ\right) = \left(\left\{1, r^{\frac{kn}{p_i}}, sr, sr^{\frac{kn}{p_i}+1}\right\}, \circ\right)$$

$$\left(\left\{1, r^{\frac{kn}{p_i}}, sr^2, sr^{\frac{kn}{p_i}+2}\right\}, \circ\right) = \left(\left\{1, r^{\frac{kn}{p_i}}, sr^2, sr^{\frac{kn}{p_i}+2}\right\}, \circ\right)$$

$$\vdots$$

$$\left(\left\{1, r^{\frac{kn}{p_i}}, sr^{n-1}, sr^{\frac{kn}{p_i}+n-1}\right\}, \circ\right) = \left(\left\{1, r^{\frac{kn}{p_i}}, sr^{n-1}, sr^{\frac{kn}{p_i}-1}\right\}, \circ\right)$$

Dengan $sr^{\frac{kn}{p_i}+n-1} = sr^{\frac{kn}{p_i}} r^n r^{-1} = sr^{\frac{kn}{p_i}} r^{-1} = sr^{\frac{kn}{p_i}-1}$.

Dengan p_i adalah pembagi-pembagi positif dari n, $i = 1,2,3, \dots$, dan $k = 1,2,3, \dots$

Berdasarkan subgrup-subgrup tersebut dapat disimpulkan bahwa pada grup *dihedral-2n*, misalkan p_i , $i = 1,2, \dots$ adalah pembagi-pembagi positif dari n, $a(n)$ adalah banyaknya pembagi positif dari n, dan $b(n)$ adalah jumlah pembagi positif dari n yaitu $b(n) = p_1 + p_2 + p_3 + \cdots$, maka terdapat:

1. Sebanyak $a(n)$ subgrup yang terdiri dari $\frac{n}{p_i}$ elemen yaitu elemen identitas, elemen $r^{\frac{kn}{p_i}}$, $k = 1,2,3, \dots$, yaitu $\left(\left\{1, r^{\frac{kn}{p_i}}\right\}, \circ\right)$.
2. Sebanyak $b(n)$ subgrup yang terdiri dari $\frac{2n}{p_i}$ elemen yaitu elemen identitas, elemen $r^{\frac{kn}{p_i}}$, $k = 1,2,3, \dots$, dan elemen yang memuat s, yaitu:

$$\left(\left\{1, r^{\frac{kn}{p_i}}, s, sr^{\frac{kn}{p_i}}\right\}, \circ\right), \left(\left\{1, r^{\frac{kn}{p_i}}, sr, sr^{\frac{kn}{p_i}+1}\right\}, \circ\right), \dots, \left(\left\{1, r^{\frac{kn}{p_i}}, sr^{n-1}, sr^{\frac{kn}{p_i}-1}\right\}, \circ\right).$$

Jika $p_i = 1$ maka subgrup-subgrupnya yang adalah $(\{1, r^{kn}\}, \circ)$. Karena $r^{kn} = 1$ maka subgrupnya adalah $(\{1\}, \circ)$. Sedangkan subgrup yang memuat elemen r dan s adalah

$$(\{1, r^{kn}, s, sr^{kn}\}, \circ)$$

$$(\{1, r^{kn}, sr, sr^{kn+1}\}, \circ)$$

$$(\{1, r^{kn}, sr^2, sr^{kn+2}\}, \circ)$$

$$\vdots$$

$$(\{1, r^{kn}, sr^{n-1}, sr^{kn-1}\}, \circ)$$

Karena $r^{kn} = 1$ maka subgrupnya adalah $(\{1, s\}, \circ)$, $(\{1, sr\}, \circ)$, $(\{1, sr^2\}, \circ)$ ... , $(\{1, sr^{n-1}\}, \circ)$.

Jika $p_i = 2$ maka subgrup-subgrupnya yang adalah $\left(\left\{1, r^{\frac{kn}{2}}\right\}, \circ\right)$. Sedangkan subgrup yang memuat elemen r dan s adalah

$$\left(\left\{1, r^{\frac{kn}{2}}, s, sr^{\frac{kn}{2}}\right\}, \circ\right)$$

$$\left(\left\{1, r^{\frac{kn}{2}}, sr, sr^{\frac{kn}{2}+1}\right\}, \circ\right)$$

$$\left(\left\{1, r^{\frac{kn}{2}}, sr^2, sr^{\frac{kn}{2}+2}\right\}, \circ\right)$$

$$\vdots$$

$$\left(\left\{1, r^{\frac{kn}{2}}, sr^{n-1}, sr^{\frac{kn}{2}-1}\right\}, \circ\right).$$

Karena untuk $k = 2, r^{\frac{kn}{2}} = r^{\frac{2n}{2}} = r^n = 1,$ maka khusus untuk $p_i = 2$ ini subgrupnya adalah:

$$\left(\left\{1, r^{\frac{n}{2}}, s, sr^{\frac{n}{2}}\right\}, \circ\right)$$

$$\left(\left\{1, r^{\frac{n}{2}}, sr, sr^{\frac{n}{2}+1}\right\}, \circ\right)$$

$$\left(\left\{1, r^{\frac{n}{2}}, sr^2, sr^{\frac{n}{2}+2}\right\}, \circ\right)$$

$$\vdots$$

$$\left(\left\{1, r^{\frac{n}{2}}, sr^{n-1}, sr^{\frac{n}{2}-1}\right\}, \circ\right).$$

Jika $p_i = n$ maka subgrup-subgrupnya yang adalah $\left(\left\{1, r^{\frac{kn}{n}}\right\}, \circ\right) = (\{1, r^k\}, \circ)$. Karena $k = 1,2,3, \ldots$ maka subgrupnya adalah $(\{1, r, r^2, \ldots, r^{n-1}\}, \circ)$. Sedangkan subgrup yang memuat elemen r dan s adalah

$$\left(\left\{1, r^{\frac{kn}{n}}, s, sr^{\frac{kn}{n}}\right\}, \circ\right) = (\{1, r^k, s, sr^k\}, \circ)$$

Karena $k = 1,2,3, \ldots$ maka subgrupnya adalah $(\{1, r, r^2, \ldots, s, sr, \ldots, sr^{n-1}\}, \circ)$.

Misalkan A_{2n} adalah subgrup dari grup *dihedral-2n*. *Centralizer* A_{2n} di grup *dihedral-2n* dapat didefinisikan sebagai himpunan elemen-elemen di grup *dihedral-2n* yang komutatif dengan setiap elemen dari subgrupnya yaitu A_{2n}. *Centralizer* subgrup di grup *dihedral-2n* sebagai berikut:

Tabel 3. 17: Tabel *Centralizer* Subgrup di Grup *Dihedral-2n*

A_{2n}	$C_{D_{2n}}(A_{2n})$
$\{1\}$	$\{1, r, r^2, \ldots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \ldots, sr^{n-1}\}$
$\{1, s\}$	$\{1, r^{\frac{n}{2}}, s, sr^{\frac{n}{2}}\}$
$\{1, sr\}$	$\{1, r^{\frac{n}{2}}, sr, sr^{\frac{n}{2}+1}\}$
$\{1, sr^2\}$	$\{1, r^{\frac{n}{2}}, sr^2, sr^{\frac{n}{2}+2}\}$
$\vdots$	$\vdots$
$\{1, sr^{n-1}\}$	$\{1, r^{\frac{n}{2}n}, sr^{\frac{n}{2}-1}, sr^{n-1}\}$
$\{1, r^{\frac{n}{2}}\}$	$\{1, r, r^2, \ldots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \ldots, sr^{n-1}\}$
$\{1, r^{\frac{n}{2}}, s, sr^{\frac{n}{2}}\}$	$\{1, r^{\frac{n}{2}}, s, sr^{\frac{n}{2}}\}$
$\{1, r^{\frac{n}{2}}, sr, sr^{\frac{n}{2}+1}\}$	$\{1, r^{\frac{n}{2}}, sr, sr^{\frac{n}{2}+1}\}$
$\vdots$	$\vdots$
$\{1, r^{\frac{n}{2}}, sr^{n-1}, sr^{\frac{n}{2}-1}\}$	$\{1, r^{\frac{n}{2}}, sr^{n-1}, sr^{\frac{n}{2}-1}\}$
$\{1, r^{\frac{kn}{p_i}}\}$	$\{1, r, r^2, \ldots, r^{n-1}\}$

$\{1, r^{\frac{kn}{p_i}}, s, sr^{\frac{kn}{p_i}}\}$	$\{1, r^{\frac{n}{2}}\}$
$\vdots$	$\vdots$
$\{1, r^{\frac{kn}{p_i}}, sr^{n-1}, sr^{\frac{kn}{p_i}-1}\}$	$\{1, r^{\frac{n}{2}}\}$
$\{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}\}$	$\{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}\}$
$\{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$	$\{1, r^{\frac{n}{2}}\}$

Berdasarkan tabel tersebut dapat disimpulkan bahwa :

1. *Centralizer* identitas atau subgrup yang terdiri dari 2 elemen yaitu elemen identitas dan elemen $r^{\frac{n}{2}}$ di grup *dihedral-2n* adalah semua elemen D_{2n}, yaitu $C_{D_{2n}}(\{1\}) = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$ dan $C_{D_{2n}}\left(\left\{1, r^{\frac{n}{2}}\right\}\right) = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$. Hal tersebut karena elemen 1 dan $r^{\frac{n}{2}}$ komutatif dengan semua elemen grup *dihedral-2n*.
2. *Centralizer* subgrup yang terdiri dari elemen identitas dan elemen yang memuat r, selain subgrup yang terdiri dari elemen identitas dan elemen $r^{\frac{n}{2}}$, adalah terdiri dari elemen identitas dan semua elemen yang memuat r, yaitu: $C_{D_{2n}}\left(\left\{1, r^{\frac{kn}{p_i}}\right\}\right) = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}\}$ dan $C_{D_{2n}}(\{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}\}) = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}\}$. Hal tersebut karena elemen 1 dan r komutatif dengan semua elemen r di grup *dihedral-2n*.
3. *Centralizer* subgrup yang terdiri dari 2 elemen yaitu elemen identitas dan elemen yang memuat s dan subgrup yang terdiri dari 4 elemen yaitu elemen identitas, elemen $r^{\frac{n}{2}}$, dan 2 elemen yang memuat s di grup *dihedral-2n* adalah terdiri dari 4 elemen yaitu elemen identitas, elemen $r^{\frac{n}{2}}$, dan 2 elemen yang

memuat elemen s yang dimaksud, jika $2 \nmid n$, maka *centralizer*-nya terdiri dari 2 elemen yaitu subgrup itu sendiri yaitu:

$$C_{D_{2n}}(\{1, s\}) = \{1, r^{\frac{n}{2}}, s, sr^{\frac{n}{2}}\}$$

$$C_{D_{2n}}(\{1, sr\}) = \left\{1, r^{\frac{n}{2}}, sr, sr^{\frac{n}{2}+1}\right\}$$

$$\vdots$$

$$C_{D_{2n}}(\{1, sr^{n-1}\}) = \left\{1, r^{\frac{n}{2}}, sr^{n-1}, sr^{\frac{n}{2}-1}\right\}$$

$$C_{D_{2n}}\left(\left\{1, r^{\frac{n}{2}}, s, sr^{\frac{n}{2}}\right\}\right) = \left\{1, r^{\frac{n}{2}}, s, sr^{\frac{n}{2}}\right\}$$

$$C_{D_{2n}}\left(\left\{1, r^{\frac{n}{2}}, sr, sr^{\frac{n}{2}+1}\right\}\right) = \left\{1, r^{\frac{n}{2}}, sr, sr^{\frac{n}{2}+1}\right\}$$

$$\vdots$$

$$C_{D_{2n}}\left(\left\{1, r^{\frac{n}{2}}, sr^{\frac{n}{2}-1}, sr^{n-1}\right\}\right) = \left\{1, r^{\frac{n}{2}}, sr^{\frac{n}{2}-1}, sr^{n-1}\right\}$$

Hal tersebut karena elemen 1 dan $r^{\frac{n}{2}}$ komutatif dengan semua elemen grup *dihedral-2n*. Sedangkan elemen $sr^j, 0 \leq j \leq n-1$ hanya komutatif dengan elemen-elemen 1, $r^{\frac{n}{2}}$, sr^j, dan sr^{j+2}. Jadi, elemen-elemen yang komutatif dengan elemen-elemen subgrup tersebut adalah elemen-elemen 1, $r^{\frac{n}{2}}$, $sr^{\frac{n}{2}}$, dan $sr^{\frac{n}{2}+2}$.

4. *Centralizer* semua elemen grup *dihedral-2n* dan subgrup yang merupakan gabungan elemen identitas, elemen yang memuat $r^{\frac{kn}{p_i}}$, $p_i \neq 2$, dan elemen yang memuat s di grup *dihedral-2n* adalah terdiri dari 2 elemen yaitu elemen identitas dan elemen $r^{\frac{n}{2}}$, yaitu

$$C_{D_{2n}}(\{1, r, r^2, \ldots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \ldots, sr^{n-1}\}) = \{1, r^{\frac{n}{2}}\}$$

$$C_{D_{2n}}\left(\{1, r^{\frac{kn}{p_i}}, s, sr^{\frac{kn}{p_i}}\}\right) = \{1, r^{\frac{n}{2}}\}$$

$$\vdots$$

$$C_{D_{2n}}\left(\{1, r^{\frac{kn}{p_i}}, sr^{\frac{kn}{p_i}-1}, sr^{n-1}\}\right) = \left\{1, r^{\frac{n}{2}}\right\}.$$

Hal tersebut karena elemen 1 dan $r^{\frac{n}{2}}$ komutatif dengan semua elemen grup *dihedral-2n* sehingga pasti komutatif dengan elemen-elemen subgrup tersebut.

Center dari grup *dihedral-2n* merupakan himpunan elemen-elemen grup *dihedral-2n* yang komutatif dengan setiap elemen grup *dihedral-2n*. Dengan kata lain, *center* grup *dihedral-2n* adalah *centralizer* D_{2n} di D_{2n}. Jadi, *center* dari grup *dihedral-2n* adalah elemen identitas dan elemen $r^{\frac{n}{2}}$, yaitu $Z(D_{2n}) = \{1, r^{\frac{n}{2}}\}$.

Misalkan A_{2n} adalah subgrup dari grup *dihedral-2n. Normalizer* A_{2n} di grup *dihedral-2n* dapat didefinisikan sebagai himpunan dari elemen-elemen grup *dihedral-2n* yang memenuhi $g \circ a \circ g^{-1} \in A_{2n}, \forall a \in A_{2n}, g \in D_{2n}$. *Normalizer* subgrup di grup *dihedral-2n* sebagai berikut:

Tabel 3.25: Tabel *Normalizer* Subgrup di Grup *Dihedral-2n*

A_{2n}	$N_{D_{2n}}(A_{2n})$
$\{1\}$	$\{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$
$\{1, s\}$	$\{1, r^{\frac{n}{2}}, s, sr^{\frac{n}{2}}\}$
$\{1, sr\}$	$\{1, r^{\frac{n}{2}}, sr, sr^{\frac{n}{2}+1}\}$
$\{1, sr^2\}$	$\{1, r^{\frac{n}{2}}, sr^2, sr^{\frac{n}{2}+2}\}$
$\vdots$	$\vdots$
$\{1, sr^{n-1}\}$	$\{1, r^{\frac{n}{2}}, sr^{\frac{n}{2}-1}, sr^{n-1}\}$
$\left\{1, r^{\frac{n}{2}}\right\}$	$\{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$
$\left\{1, r^{\frac{n}{2}}, s, sr^{\frac{n}{2}}\right\}$	$\{1, r^{\frac{n}{2}}, s, sr^{\frac{n}{2}}\}$
$\left\{1, r^{\frac{n}{2}}, sr, sr^{\frac{n}{2}+1}\right\}$	$\{1, r^{\frac{n}{2}}, sr, sr^{\frac{n}{2}+1}\}$
$\vdots$	$\vdots$

$\left\{1, r^{\frac{n}{2}}, sr^{n-1}, sr^{\frac{n}{2}-1}\right\}$	$\{1, r^{\frac{n}{2}}, sr^{n-1}, sr^{\frac{n}{2}-1}\}$
$\left\{1, r^{\frac{kn}{p_i}}\right\}, p_i \neq 2$	$\{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$
$\left\{1, r^{\frac{kn}{p_i}}, s, sr^{\frac{kn}{p_i}}\right\}$	$\{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$
$\vdots$	$\vdots$
$\left\{1, r^{\frac{kn}{p_i}}, sr^{n-1}, sr^{\frac{kn}{p_i}-1}\right\}$	$\{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$
$\{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}\}$	$\{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$
$\{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$	$\{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$

Berdasarkan tabel tersebut dapat disimpulkan bahwa *normalizer* subgrup yang terdiri dari 2 elemen, yaitu elemen identitas dan elemen yang memuat s dan subgrup yang terdiri dari 4 elemen yaitu elemen identitas, elemen $r^{\frac{n}{2}}$, dan 2 elemen yang memuat s di grup *dihedral-2n* adalah subgrup yang terdiri dari 4 elemen yaitu elemen identitas, elemen $r^{\frac{n}{2}}$, dan 2 elemen yang memuat s yang dimaksud, yaitu:

$$N_{D_{2n}}(\{1, s\}) = \{1, r^{\frac{n}{2}}, s, sr^{\frac{n}{2}}\}$$

$$N_{D_{2n}}(\{1, sr\}) = \left\{1, r^{\frac{n}{2}}, sr, sr^{\frac{n}{2}+1}\right\}$$

$$\vdots$$

$$N_{D_{2n}}(\{1, sr^{n-1}\}) = \left\{1, r^{\frac{n}{2}}, sr^{n-1}, sr^{\frac{n}{2}-1}\right\}.$$

Jika $2 \nmid n$, maka *normalizer* subgrup tersebut adalah subgrup itu sendiri, yaitu

$$N_{D_{2n}}(\{1, s\}) = \{1, s\}$$

$$N_{D_{2n}}(\{1, sr\}) = \{1, sr\}$$

$$\vdots$$

$$N_{D_{2n}}(\{1, sr^{n-1}\}) = (\{1, sr^{n-1}\}).$$

Sedangkan *normalizer* subgrup selain terdiri dari 2 tipe subgrup tersebut yaitu $p_i \neq 2$ di grup *dihedral-2n* adalah semua elemen grup *dihedral-2n*, yaitu:

$N_{D_{2n}}(\{1\}) = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$

$N_{D_{2n}}(\{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}\}) = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$

$N_{D_{2n}}\left(\{1, r^{\frac{kn}{p_i}}, s, sr^{\frac{kn}{p_i}}\}\right) = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$

$N_{D_{2n}}\left(\left\{1, r^{\frac{kn}{p_i}}, sr, sr^{\frac{kn}{p_i}+1}\right\}\right) = \{1, r, r^2, \dots,, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$

$$\vdots$$

$N_{D_{2n}}\left(\left\{1, r^{\frac{kn}{p_i}}, sr^{n-1}, sr^{\frac{kn}{p_i}-1}\right\}\right) = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$

$N_{D_{2n}}(\{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\})$

$$= \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}.$$

3.3 Pola-pola Umum Subgrup, *Centralizer*, *Center*, dan *Normalizer* Subgrup di Grup *Dihedral-2n* $(D_{2n}, \circ)$

Berdasarkan keterangan di atas, dapat dibuat suatu teorema tentang banyaknya subgrup, tipe *centralizer*, *center*, dan *normalizer* subgrup di grup *dihedral-2n* yaitu:

Teorema 3.1

Banyaknya subgrup dari grup *dihedral-2n*, $n \geq 3$, n bilangan prima adalah sebanyak $n + 3$ subgrup.

Bukti:

Subgrup-subgrup dari grup *dihedral-2n* $(D_{2n}, \circ), n \geq 3, n$ bilangan prima adalah:

5. Sebanyak 1 subgrup yang terdiri dari 1 elemen yaitu elemen identitas.
6. Sebanyak n subgrup yang terdiri dari 2 elemen yaitu $\{1, sr^i\}$, $0 \leq i \leq n-1$.
7. Sebanyak 1 subgrup yang terdiri dari n elemen yaitu elemen identitas dan semua elemen r.
8. Sebanyak 1 subgrup yang terdiri dari *2n* elemen yaitu semua elemen D_{2n}.

Jadi, total banyaknya subgrup dari grup *dihedral-2n* $(D_{2n},\circ), n \geq 3, n$ bilangan prima adalah $1 + n + 1 + 1 = n + 3$ subgrup.

Teorema 3.2

Jika $p_i|n$, p_i pembagi-pembagi positif dari n, misalkan $a(n)$ adalah banyaknya pembagi positif dari n dan $b(n)$ adalah jumlah pembagi-pembagi positif dari n, maka banyaknya subgrup dari grup *dihedral-2n*, $n \geq 3$, n bilangan komposit adalah $a(n) + b(n)$ subgrup.

Bukti:

Pada grup *dihedral-2n* $(D_{2n},\circ), n \geq 3, n$ bilangan komposit, misalkan $p_i, i = 1,2,3, \ldots$ adalah pembagi-pembagi positif dari n, $a(n)$ adalah banyaknya pembagi positif dari n, dan $b(n)$ adalah jumlah pembagi-pembagi positif dari n yaitu $b(n) = p_1 + p_2 + p_3 + \cdots$, maka banyaknya subgrup:

1. Sebanyak $a(n)$ subgrup yang terdiri dari $\frac{n}{p_i}$ elemen yaitu elemen identitas dan elemen $r^{\frac{kn}{p_i}}, k = 1,2,3, \ldots$, yaitu $\left(\left\{1, r^{\frac{kn}{p_i}}\right\},\circ\right)$.
2. Sebanyak $b(n)$ subgrup yang terdiri dari $\frac{2n}{p_i}$ elemen yaitu elemen identitas, elemen $r^{\frac{kn}{p_i}}, k = 1,2,3, \ldots$, dan elemen yang memuat s, yaitu:

$$\left(\left\{1, r^{\frac{kn}{p_i}}, s, sr^{\frac{kn}{p_i}}\right\}, \circ\right), \left(\left\{1, r^{\frac{kn}{p_i}}, sr, sr^{\frac{kn}{p_i}+1}\right\}, \circ\right), \dots, \left(\left\{1, r^{\frac{kn}{p_i}}, sr^{n-1}, sr^{\frac{kn}{p_i}-1}\right\}, \circ\right).$$

Jadi, total banyaknya subgrup dari grup *dihedral-2n* $(D_{2n}, \circ), n \geq 3, n$ bilangan komposit adalah $a(n) + b(n)$ subgrup.

Teorema 3.3

Jika A subgrup dari grup *dihedral-2n* $(D_{2n}, \circ)$, n bilangan prima, $n \geq 3$, maka:

$$C_{D_{2n}}(A) = \begin{cases} D_{2n} & , A = \{1\} \\ \{1\} & , A = D_{2n} \\ A & , A \leq D_{2n} ; A \neq \{1\}; A \neq D_{2n} \end{cases}$$

Bukti :

Centralizer subgrup di grup *dihedral-2n* $(D_{2n}, \circ), n \geq 3, n$ bilangan prima adalah:

4. *Centralizer* identitas di grup *dihedral-2n* adalah semua elemen D_{2n}, yaitu $C_{D_{2n}}(\{1\}) = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, \dots, sr^{n-1}\}$.
5. *Centralizer* semua elemen grup *dihedral-2n* di grup *dihedral-2n* adalah elemen identitas, yaitu $C_{D_{2n}}(D_{2n}) = \{1\}$.
6. Subgrup sejati dari grup *dihedral-2n* adalah subgrup yang terdiri dari 2 elemen yaitu elemen identitas dan elemen yang memuat *s,* dan subgrup yang memuat semua elemen *r*. Karena elemen r komutatif dengan semua elemen *r,* maka *centralizer* semua elemen r di grup *dihedral-2n* adalah semua elemen *r*. Sedangkan elemen sr^i dengan $0 \leq i \leq n-1$ hanya komutatif dengan elemen identitas dan elemen yang sr^i itu sendiri karena $(sr^i) = sr^i$ dan jika $sr^i \circ (sr^i)^{-1} = (sr^i)^{-1} \circ sr^i = 1$, sedangkan elemen identitas komutatif dengan semua elemen grup *dihedral-2n.* Jadi, *centralizer* subgrup sejati dari grup *dihedral-2n* adalah subgrup itu sendiri, yaitu:

$$C_{D_{2n}}(\{1,s\}) = \{1,s\}$$

$$C_{D_{2n}}(\{1,sr\}) = \{1,sr\}$$

$$\vdots$$

$$C_{D_{2n}}(\{1,sr^{n-1}\}) = \{1,sr^{n-1}\}$$

$$C_{D_{2n}}(\{1,r,r^2,\dots,r^{n-1}\}) = \{1,r,r^2,\dots,r^{n-1}\}.$$

Teorema 3.4

Jika A subgrup dari grup *dihedral-2n* $(D_{2n},\circ)$, $n \geq 3, n$ bilangan komposit, maka:

(i) $C_{D_{2n}}(\{1\}) = D_{2n}$

(ii) $C_{D_{2n}}(\{1,r,r^2,\dots,r^{n-1}\}) = C_{D_{2n}}\left(\left\{1,r^{\frac{kn}{p_m}}\right\}\right) = \{1,r,r^2,\dots,r^{n-1}\};$

$k = 1,2,\dots,n-1$

(iii) $C_{D_{2n}}(\{1,sr^i\}) = C_{D_{2n}}(A) = A$; $A = \left\{1,r^{\frac{n}{2}},sr^i,sr^j\right\}; 0 \leq i \leq n-1; j = i+\frac{n}{2}$

Sedangkan untuk A selain tipe-tipe subgrup tersebut, $C_{D_{2n}}(A) = \{1,r^{\frac{n}{2}}\}$.

Bukti:

Centralizer subgrup di grup *dihedral-2n* $(D_{2n},\circ)$, $n \geq 3, n$ bilangan komposit adalah:

1. *Centralizer* identitas atau subgrup yang terdiri dari 2 elemen yaitu elemen identitas dan elemen $r^{\frac{n}{2}}$ di grup *dihedral-2n* adalah semua elemen D_{2n}, yaitu $C_{D_{2n}}(\{1\}) = \{1,r,r^2,\dots,r^{n-1},s,sr,sr^2,\dots,sr^{n-1}\}$ dan $C_{D_{2n}}\left(\left\{1,r^{\frac{n}{2}}\right\}\right) = \{1,r,r^2,\dots,r^{n-1},s,sr,sr^2,\dots,sr^{n-1}\}$. Hal tersebut karena elemen 1 dan $r^{\frac{n}{2}}$ komutatif dengan semua elemen grup *dihedral-2n*.

2. *Centralizer* subgrup yang terdiri dari elemen identitas dan elemen yang memuat r, selain subgrup yang terdiri dari elemen identitas dan elemen $r^{\frac{n}{2}}$, adalah terdiri dari elemen identitas dan semua elemen yang memuat r, yaitu:

   $C_{D_{2n}}\left(\left\{1, r^{\frac{kn}{p_i}}\right\}\right) = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}\}$

   $C_{D_{2n}}(\{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}\}) = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}\}$

   Hal tersebut karena elemen 1 dan r komutatif dengan semua elemen r di grup *dihedral-2n*.

3. *Centralizer* subgrup yang terdiri dari 2 elemen yaitu elemen identitas dan elemen yang memuat s dan subgrup yang terdiri dari 4 elemen yaitu elemen identitas, elemen $r^{\frac{n}{2}}$, dan 2 elemen yang memuat s di grup *dihedral-2n* adalah terdiri dari 4 elemen yaitu elemen identitas, elemen $r^{\frac{n}{2}}$, dan 2 elemen yang memuat elemen s yang dimaksud, jika $2 \nmid n$, maka *centralizer*-nya terdiri dari 2 elemen yaitu subgrup itu sendiri yaitu:

$$C_{D_{2n}}(\{1, s\}) = \left\{1, r^{\frac{n}{2}}, s, sr^{\frac{n}{2}}\right\}$$

$$C_{D_{2n}}(\{1, sr\}) = \left\{1, r^{\frac{n}{2}}, sr, sr^{\frac{n}{2}+1}\right\}$$

$$\vdots$$

$$C_{D_{2n}}(\{1, sr^{n-1}\}) = \left\{1, r^{\frac{n}{2}}, sr^{n-1}, sr^{\frac{n}{2}-1}\right\}$$

$$C_{D_{2n}}\left(\left\{1, r^{\frac{n}{2}}, s, sr^{\frac{n}{2}}\right\}\right) = \left\{1, r^{\frac{n}{2}}, s, sr^{\frac{n}{2}}\right\}$$

$$C_{D_{2n}}\left(\left\{1, r^{\frac{n}{2}}, sr, sr^{\frac{n}{2}+1}\right\}\right) = \left\{1, r^{\frac{n}{2}}, sr, sr^{\frac{n}{2}+1}\right\}$$

$$\vdots$$

$$C_{D_{2n}}\left(\left\{1, r^{\frac{n}{2}}, sr^{\frac{n}{2}-1}, sr^{n-1}\right\}\right) = \left\{1, r^{\frac{n}{2}}, sr^{\frac{n}{2}-1}, sr^{n-1}\right\}$$

Hal tersebut karena elemen 1 dan $r^{\frac{n}{2}}$ komutatif dengan semua elemen grup *dihedral-2n*. Sedangkan elemen $sr^j, 0 \leq j \leq n-1$ hanya komutatif dengan elemen-elemen 1, $r^{\frac{n}{2}}$, sr^j, dan sr^{j+2}. Jadi, elemen-elemen yang komutatif dengan elemen-elemen subgrup tersebut adalah elemen-elemen 1, $r^{\frac{n}{2}}$, $sr^{\frac{n}{2}}$, dan $sr^{\frac{n}{2}+2}$.

4. *Centralizer* semua elemen grup *dihedral-2n* dan subgrup yang merupakan gabungan elemen identitas, elemen yang memuat $r^{\frac{kn}{p_i}}$, $p_i \neq 2$, dan elemen yang memuat s di grup *dihedral-2n* adalah terdiri dari 2 elemen yaitu elemen identitas dan elemen $r^{\frac{n}{2}}$, yaitu

$$C_{D_{2n}}(\{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}) = \{1, r^{\frac{n}{2}}\}$$

$$C_{D_{2n}}\left(\left\{1, r^{\frac{kn}{p_i}}, s, sr^{\frac{kn}{p_i}}\right\}\right) = \{1, r^{\frac{n}{2}}\}$$

$$\vdots$$

$$C_{D_{2n}}\left(\left\{1, r^{\frac{kn}{p_i}}, sr^{\frac{kn}{p_i}-1}, sr^{n-1}\right\}\right) = \left\{1, r^{\frac{n}{2}}\right\}.$$

Hal tersebut karena elemen 1 dan $r^{\frac{n}{2}}$ komutatif dengan semua elemen grup *dihedral-2n* sehingga pasti komutatif dengan elemen-elemen subgrup tersebut.

Teorema 3.5

Center dari grup *dihedral-2n*, $n \geq 3$, dinotasikan dengan $Z(D_{2n})$ adalah:

$$Z(D_{2n}) = \begin{cases} \{1\} & ; n \text{ bilangan prima} \\ \left\{1, r^{\frac{n}{2}}\right\} & ; n \text{ bilangan komposit} \end{cases}$$

Bukti:

Center grup *dihedral-2n* adalah *centralizer* D_{2n} di D_{2n}. *Centralizer* semua elemen grup *dihedral-2n* di grup *dihedral-2n*, n bilangan prima adalah elemen identitas, yaitu $C_{D_{2n}}(D_{2n}) = \{1\}$. Jadi, *center* dari grup *dihedral-2n*, n bilangan prima adalah elemen identitas, yaitu $Z(D_{2n}) = 1$. Sedangkan *centralizer* semua elemen grup *dihedral-2n* di grup *dihedral-2n*, n bilangan komposit adalah terdiri dari 2 elemen yaitu elemen identitas dan elemen $r^{\frac{n}{2}}$, yaitu $C_{D_{2n}}(D_{2n}) = \{1, r^{\frac{n}{2}}\}$. Jadi, *center* dari grup *dihedral-2n*, n bilangan prima adalah elemen identitas, yaitu $Z(D_{2n}) = \{1, r^{\frac{n}{2}}\}$

Teorema 3.6

Jika A subgrup dari grup *dihedral-2n* $(D_{2n}, \circ)$, $n \geq 3, n$ bilangan prima, maka:

$$N_{D_{2n}}(A) = \begin{cases} A & ; A = \{1, sr^i\}; 0 \leq i \leq n-1 \\ D_{2n} & ; \mathrm{A} \leq D_{2n}, A \neq \{1, sr^i\} \end{cases}$$

Bukti:

Normalizer subgrup di grup *dihedral-2n* $(D_{2n}, \circ)$, $n \geq 3, n$ bilangan prima adalah:

1. *Normalizer* subgrup yang terdiri dari 2 elemen, yaitu elemen identitas dan elemen yang memuat s di grup *dihedral-2n* adalah subgrup itu sendiri yaitu $N_{D_{2n}}(\{1, s\}) = \{1, s\}$, $N_{D_{2n}}(\{1, sr\}) = \{1, sr\}$, ..., $N_{D_{2n}}(\{1, sr^{n-1}\}) = \{1, sr^{n-1}\}$.

2. *Normalizer* subgrup selain terdiri dari 2 elemen yaitu elemen identitas dan elemen yang memuat s di grup *dihedral-2n* adalah semua elemen grup *dihedral-2n*, yaitu:

   $N_{D_{2n}}(\{1\}) = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, \dots, sr^{n-1}\}$

   $N_{D_{2n}}(\{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}\}) = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, \dots, sr^{n-1}\}$

   $N_{D_{2n}}(D_{2n}) = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, \dots, sr^{n-1}\}$.

Teorema 3.7

Jika A subgrup dari grup *dihedral-2n* $(D_{2n}, \circ)$, $n \geq 3, n$ bilangan komposit, maka:

$$N_{D_{2n}}(A) = \begin{cases} \left\{1, r^{\frac{n}{2}}, sr^i, sr^j\right\} & ; A = \{1, sr^i\}; A = \left\{1, r^{\frac{n}{2}}, sr^i, sr^j\right\}; 0 \leq i \leq n-1;\ j = i + \frac{n}{2} \\ D_{2n} & ; A \leq D_{2n}, A \neq \{1, sr^i\}, A \neq \left\{1, r^{\frac{n}{2}}, sr^i, sr^j\right\} \end{cases}$$

Bukti:

Normalizer subgrup yang terdiri dari 2 elemen, yaitu elemen identitas dan elemen yang memuat s dan subgrup yang terdiri dari 4 elemen yaitu elemen identitas, elemen $r^{\frac{n}{2}}$, dan 2 elemen yang memuat s di grup *dihedral-2n* adalah subgrup yang terdiri dari 4 elemen yaitu elemen identitas, elemen $r^{\frac{n}{2}}$, dan 2 elemen yang memuat s yang dimaksud, yaitu:

$$N_{D_{2n}}(\{1, s\}) = \{1, r^{\frac{n}{2}}, s, sr^{\frac{n}{2}}\}$$

$$N_{D_{2n}}(\{1, sr\}) = \left\{1, r^{\frac{n}{2}}, sr, sr^{\frac{n}{2}+1}\right\}$$

$$\vdots$$

$$N_{D_{2n}}(\{1, sr^{n-1}\}) = \left\{1, r^{\frac{n}{2}}, sr^{n-1}, sr^{\frac{n}{2}-1}\right\}.$$

Jika $2 \nmid n$, maka *normalizer* subgrup tersebut adalah subgrup itu sendiri, yaitu

$$N_{D_{2n}}(\{1, s\}) = \{1, s\}$$

$$N_{D_{2n}}(\{1, sr\}) = \{1, sr\}$$

$$\vdots$$

$$N_{D_{2n}}(\{1, sr^{n-1}\}) = (\{1, sr^{n-1}\}).$$

Sedangkan *normalizer* subgrup selain terdiri dari 2 tipe subgrup tersebut yaitu $p_i \neq 2$ di grup *dihedral-2n* adalah semua elemen grup *dihedral-2n*, yaitu:

$N_{D_{2n}}(\{1\}) = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$

$N_{D_{2n}}(\{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}\}) = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$

$N_{D_{2n}}\left(\{1, r^{\frac{kn}{p_i}}, s, sr^{\frac{kn}{p_i}}\}\right) = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$

$N_{D_{2n}}\left(\left\{1, r^{\frac{kn}{p_i}}, sr, sr^{\frac{kn}{p_i}+1}\right\}\right) = \{1, r, r^2, \dots, , r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$

$$\vdots$$

$N_{D_{2n}}\left(\left\{1, r^{\frac{kn}{p_i}}, sr^{n-1}, sr^{\frac{kn}{p_i}-1}\right\}\right) = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$

$N_{D_{2n}}(\{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\})$

$= \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}.$

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada bab sebelumnya, maka dapat disimpulkan :

1. Banyaknya subgrup dari grup *dihedral-2n*, $n \geq 3$, adalah:

   (i) $n+3$ jika n bilangan prima

   (ii) $a(n)+b(n)$ jika n bilangan komposit, dengan

   $a(n)$ adalah banyaknya pembagi positif dari n,

   $b(n)$ adalah jumlah pembagi positif dari n.

2. Jika A subgrup dari grup *dihedral-2n* $(D_{2n},\circ)$, n bilangan prima, $n \geq 3$, maka:

$$C_{D_{2n}}(A) = \begin{cases} D_{2n} & , A = \{1\} \\ \{1\} & , A = D_{2n} \\ A & , A \leq D_{2n}\ ; A \neq \{1\}; A \neq D_{2n} \end{cases}$$

   Jika n bilangan komposit, maka:

   (iv) $C_{D_{2n}}(\{1\}) = D_{2n}$

   (v) $C_{D_{2n}}(\{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}\}) = C_{D_{2n}}\left(\left\{1, r^{\frac{kn}{p_m}}\right\}\right) = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}\}$;

   $k = 1,2, \dots, n-1$

   (vi) $C_{D_{2n}}(\{1, sr^i\}) = C_{D_{2n}}(A) = A\ ;\ A = \left\{1, r^{\frac{n}{2}}, sr^i, sr^j\right\}; 0 \leq i \leq n-1; j = i + \frac{n}{2}$

   Sedangkan untuk A selain tipe-tipe subgrup tersebut, $C_{D_{2n}}(A) = \{1, r^{\frac{n}{2}}\}$.

3. Center dari grup *dihedral-2n*, $n \geq 3$, dinotasikan dengan $Z(D_{2n})$ adalah:

$$Z(D_{2n}) = \begin{cases} \{1\} & ; n \text{ bilangan prima} \\ \left\{1, r^{\frac{n}{2}}\right\} & ; n \text{ bilangan komposit} \end{cases}$$

4. Jika A subgrup dari grup *dihedral-2n* $(D_{2n}, \circ)$, n bilangan prima, $n \geq 3$, maka:

$$N_{D_{2n}}(A) = \begin{cases} A & ; A = \{1, sr^i\}; 0 \leq i \leq n-1 \\ D_{2n} & ; \mathrm{A} \leq D_{2n}, A \neq \{1, sr^i\} \end{cases}$$

Jika n bilangan komposit, maka:

$$N_{D_{2n}}(A) = \begin{cases} \left\{1, r^{\frac{n}{2}}, sr^i, sr^j\right\} & ; A = \{1, sr^i\}; A = \left\{1, r^{\frac{n}{2}}, sr^i, sr^j\right\}; 0 \leq i \leq n-1;\ j = i + \frac{n}{2} \\ D_{2n} & ; \mathrm{A} \leq D_{2n}, A \neq \{1, sr^i\}, A \neq \left\{1, r^{\frac{n}{2}}, sr^i, sr^j\right\} \end{cases}$$

4.2 Saran

Dari penelitian ini, masih perlu adanya pengembangan keilmuan. Diharapkan penelitian selanjutnya dapat lebih mengembangkan pembahasan pada grup yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir. 2007. *Ketika Kiai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press

Arifin, Achmad. 2000. *Aljabar*. Bandung : ITB Bandung

Dummit, David S. dan Foote, Richard M. 1991. *Abstract Algebra*. New Jersey: Prentice-Hall, Inc

Herstein, I. N. 1975. *Topiccs in Algebra.* New york: John Wiley & Sons.

Imani, Allamah Kamal Faqih. 2006. *Tafsir Nurul Quran Jilid 1.* Jakarta: Al-Huda

Muhsetyo, Gatot. 1997. *Teori Bilangan*. Jakarta: PGSM

Purwanto, Agus. 2008. *Ayat-ayat Semesta*. Bandung: Mizan

Raisinghania, M. D dan Aggarwal, R. S. 1980. *Modern Algebra.* New Delhi: Ram Nagar

Sukirman. 2005. *Pengantar Aljabar Abstrak*. Malang: UM Press

Sulandra, I Made. 1996. *Struktur Aljabar I (Edisi Revisi)*. Malang: IKIP Malang

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Dinoyo Malang (0341)551345
Fax. (0341)572533

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Emma Provita Rahma
NIM : 07610009
Fakultas/ Jurusan : Sains dan Teknologi/ Matematika
Judul Skripsi : Centralizer, Center, dan Normalizer Subgrup di Grup Dihedral-$2n$ $(D_{2n},\circ)$
Pembimbing I : Evawati Alisah, M.Pd
Pembimbing II : Abdul Aziz, M.Si

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	28 Januari 2011	ACC Masalah	1.
2.	11 Februari 2011	Konsultasi BAB I	2.
3.	18 Februari 2011	Konsultasi BAB II	3.
4.	25 Februari 2011	Revisi BAB II dan Konsultasi BAB III	4.
5.	9 Maret 2011	Revisi BAB III	5.
6.	9 Maret 2011	Keagamaan	6.
7.	10 Maret 2011	Revisi Keagamaan	7
8.	11 Maret 2011	Revisi BAB III	8.
9.	11 Maret 2011	ACC Keagamaan	9.
10.	16 Maret 2011	Konsultasi BAB IV	10.
11.	18 Maret 2011	Revisi BAB IV dan Konsultasi Keseluruhan	11.
12.	25 Maret 2011	ACC Keseluruhan	12.

Malang, 25 Maret 2011
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001