ANALISIS PENYELESAIAN ANALITIK DAN NUMERIK PERSAMAAN SINYAL PENGIRIMAN PESAN

SKRIPSI

oleh:
LUTFIATUL AINI
NIM. 07610003

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2011

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

ANALISIS PENYELESAIAN ANALITIK DAN NUMERIK PERSAMAAN SINYAL PENGIRIMAN PESAN

SKRIPSI

Diajukan kepada:
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan Dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

oleh:
LUTFIATUL AINI
NIM. 07610003

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
2011

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

ANALISIS PENYELESAIAN ANALITIK DAN NUMERIK PERSAMAAN SINYAL PENGIRIMAN PESAN

SKRIPSI

oleh:
LUTFIATUL AINI
NIM. 07610003

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji:
Tanggal, 22 Juli 2011

Pembimbing I	Pembimbing II
Ari Kusumastuti, S.Si., M.Pd	**Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag**
NIP.19770521 200501 2 004	**NIP.19720420 200212 1 003**

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP.19751006 200312 1 001

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

ANALISIS PENYELESAIAN ANALITIK DAN NUMERIK PERSAMAAN SINYAL PENGIRIMAN PESAN

SKRIPSI

oleh:
LUTFIATUL AINI
NIM. 07610003

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal, 22 Juli 2011

Susunan Dewan Penguji		Tanda Tangan
1. Penguji Utama	:Abdul Aziz, M.Si NIP. 19760318 200604 1 002	( )
2. Ketua	:Drs. H. Turmudi, M.Si NIP. 19571005 198203 1 006	( )
3. Sekretaris	:Ari Kusumastuti, S.Si., M.Pd NIP. 19770521 200501 2 004	( )
4. Anggota	:Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag NIP. 19720420 200212 1 003	( )

Mengetahui dan Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP.19751006 200312 1 001

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Lutfiatul Aini

NIM : 07610003

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiblakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 15 Juli 2011

Yang membuat pernyataan,

Lutfiatul Aini

NIM. 07610003

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

MOTTO

بِسۡمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحۡمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ ﴿١﴾

إِنَّ ٱللَّهَ لَا يُغَيِّرُ مَا بِقَوۡمٍ حَتَّىٰ يُغَيِّرُواْ مَا بِأَنفُسِهِمۡۗ

Sesungguhnya Allah tidak merubah keadaan suatu kaum sehingga mereka

Merubah keadaan yang ada pada diri mereka sendiri

(Q.S. Ar, Ra'd: 11)

"There is a will, there is a way"

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

PERSEMBAHAN

Untuk yang tersayang dan tercinta

Mama Hj. Badi'ah

Bapak H. Musta'in Ali dan

Adik Haris Maulana

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Syukur alhamdulillah penulis haturkan ke hadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan hidayat-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan studi di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang sekaligus penulisan skripsi ini dengan baik.

Selanjutnya penulis haturkan ucapan terima kasih seiring do'a harapan *jazakumullah ahsanul jaza'* kepada semua pihak yang telah membantu selesainya skripsi ini. Ucapan terima kasih ini penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Drs. Sutiman B. Sumitro, SU.,DSc, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
4. Ari Kusumastuti, S.Si., M.Pd, sebagai pembimbing dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Atas bimbingan, arahan, saran, motivasi dan kesabarannya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik, penulis sampaikan *jazakumullah Ahsanul Jaza'*.
5. Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag, sebagai pembimbing dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Atas bimbingan, arahan, saran, motivasi dan kesabarannya,

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik, penulis sampaikan *jazakumullah Ahsanul Jaza'*.

6. Seluruh dosen Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, yang telah mendidik, membimbing, mengajarkan dan mencurahkan ilmu-ilmunya kepana penulis. Semoga Allah membalas amal kebaikannya.
7. Kepada orang tua tercinta, Hj. Badi'ah dan H. Musta'in Ali yang telah mencurahkan cinta dan kasih-sayang teriring do'a, motivasi, dan materi, sehingga penulis selalu optimis dalam menghadapi kesuksesan hidup.
8. Adik Haris Maulana tersayang yang telah memberikan dukungan, do'a dan motivasi bagi penulis.
9. Sahabat-sahabat terbaik Fitrianti Rumfot, Silva Ahmad Adini, Sefti Faradila, Madinatus Zuhro, dan seluruh penghuni kos Sunan Ampel 1 serta seluruh penghuni kamar 21(tahun 2007-2008) Ma'had Ummu Salamah terima kasih atas do'a, semangat, kebersamaan, dan kenangan indah selama ini.
10. Seluruh temen-temen Jurusan Matematika khususnya angkatan 2007 yang telah berjuang bersama-sama untuk mencapai kesuksesan yang diimpikan. Terima kasih atas segala pengalaman dan kenangan yang telah terukir saat menuntut ilmu bersama.
11. Semua pihak yang tidak mungkin penulis sebutkan satu persatu, terima kasih atas keiklasan bantuan moral dan spiritual yang sedah diberikan pada penulis.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Penulis menyadari bahwa dalam penyusunan skripsi ini masih terdapat kekurangan, dan penulis berharap semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat kepada para pembaca khususnya bagi penulis secara pribadi. Amin Ya Rabbal Alamin

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Malang, 15 Juli 2011

penyusun

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL i
HALAMAN PENGAJUAN ii
HALAMAN PERSETUJUAN iii
HALAMAN PENGESAHAN iv
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN v
MOTTO vi
HALAMAN PERSEMBAHAN vii
KATA PENGANTAR viii
DAFTAR ISI xi
DAFTAR GAMBAR xiii
DAFTAR TABEL xv
DAFTAR SIMBOL xvi
ABSTRAK xvii

BAB I PENDAHULUAN
1.1 Latar Belakang 1
1.2 Rumusan Masalah 8
1.3 Tujuan Penelitian 8
1.4 Batasan Masalah 9
1.5 Manfaat Penelitian 9
1.6 Metode Penelitian 10
1.7 Sistematika Penulisan 11

BAB II KAJIAN PUSTAKA
2.1 Persamaan Diferensial Parsial 13
2.2 Persamaan Diferensial Parsial Linier dan Nonlinier 15
2.3 Orde Persamaan Diferensial Parsial 15
2.4 Klasifikasi Persamaan Diferensial Parsial 17
2.5 Bentuk Kanonik Persamaan Sinyal Pengiriman Pesan . 20
2.6 Penyelesaian Analitik Persamaan Diferensial Parsial …. 22
2.6.1 Mekanisme Kerja Sinyal ……..... 22
2.6.2 Masalah Nilai Awal Dan Masalah Nilai …….. 24
2.6.3 Metode Pemisahan Variabel ……..……..... 27
2.6.4 Nilai Eigen Dan Fungsi Eigen ……..... 30
2.6.5 Persamaan Linier Homogeny Dengan Koefisien Konstanta ……..……..... 31
2.7 Penyelesaian Numerik Persamaan Diferensial Parsial 35
2.7.1 Metode Euler Eksplisit …..……..... 35
2.7.2 Metode Numerik ……..……..... 36

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

2.7.3 Matriks Tridiagonal……..…….... 39
2.8 Batas Kemampuan Manusia Dalam Al-Qur'an……..…… 40

BAB III PEMBAHASAN
3.1 Analisis Brownian Motion Persamaan Sinyal Pengiriman pesan 47
3.2 Bentuk Kanonik Persamaan Sinyal Pengiriman Pesan ... 54
3.3 Penyelesaiaan Analitik Persamaan Sinyal Pengiriman Pesan 61
3.3.1 Penyelesaian Partikular Masalah Nilai Awal Persamaan Sinyal Pengiriman Pesan 61
3.3.2 Penyelesaian Partikular Masalah Nilai Batas Persamaan Sinyal Pengiriman Pesan 65
3.4 Penyelesaiaan Numerik Persamaan Sinyal Pengiriman Pesan 77
3.5 Simulasi Data Dan Analisis Galat Untuk Penyelesaian Numerik Terhadap Penyelesaian Analitik Sinyal Pengiriman Pesan..... 81
3.6 Sinyal Pengiriman Pesan Dalam Al-Qur'an 86

BAB IV PENUTUP
4.1 Kesimpulan 91
4.2 Saran 95

DAFTAR PUSTAKA 96
LAMPIRAN-LAMPIRAN 98

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Contoh Sinyal Suara..... 22

Gambar 2.2 Stensil Skema Euler Eksplisit..... 35

Gambar 3.1 Alur Pengiriman Pesan ……..... 47

Gambar 3.2 Reperentasi Skematis dari Resistansi 48

Gambar 3.3 Reperentasi Skematis dari Kapasitans..... 49

Gambar 3.4 Reperentasi Skematis dari Induktans..... 50

Gambar 3.5 Grafik Solusi Nilai Batas Bidang Gelombang dari Persamaan Sinyal Pengiriman Pesan (x, u)..... 76

Gambar 3.6 Grafik Solusi Nilai Batas Bidang Gelombang dari Persamaan Sinyal Pengiriman Pesan (t, u) 76

Gambar 3.7 Grafik Solusi Nilai Batas Bidang Gelombang dari Persamaan Sinyal Pengiriman Pesan (x, t, u)..... 77

Gambar 3.8 Molekul Komputasi dari Metode Beda Hingga Sederhana..... 79

Gambar 3.9 Perambatan Sinyal Satu Dimensi Searah Sumbu *x* 81

Gambar 3.10 Partisi Sistem pada Level Waktu 83

Gambar 3.11 Flowchart Secara Umum 85

Gambar 3.12 Proses Turunnya Al-Qur'an 89

Gambar 3.13 Alur Pengiriman Pesan dari Otak Ke Seluruh Tubuh 89

Gambar 4.1 Grafik Penyelesaian Nilai Batas Bidang Gelombang dari Persamaan Sinyal Pengiriman Pesan (x, u)..... 92

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Gambar 4.2 Grafik Garis Singgung Bidang Gelombang dari Persamaan Sinyal Pengiriman Pesan (t, u) 93

Gambar 4.3 Grafik Solusi Nilai Batas Bidang Gelombang dari Persamaan Sinyal Pengiriman Pesan (u, x, t) 93

Gambar 4.4 Penampang Gelombang Sinyal Secara Numerik di Semua Titk Grid pada Persamaan Sinyal Pengiriman Pesan di Sumbu (u, x, t) 94

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

DAFTAR TABEL

Tabel 3.1 Nilai Awal di Semua Titik Grid 82

Tabel 4.1 Perbandingan Galat Error Penampang Gelombang Analitik dan Numerik 94

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

DAFTAR SIMBOL

Simbol-simbol yang digunakan dalam skripsi ini adalah:

R : Hambatan pada kabel sinyal pengiriman pesan

L : Induktans pada kabel sinyal pengiriman pesan

C : Kapasitas pada kabel sinyal pengiriman pesan

G : Konduktans pada kabel sinyal pengiriman pesan

δx : Panjang pada kabel sinyal pengiriman pesan

δt : Waktu sinyal pengiriman pesan

u : Amplitudo gelombang

$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}$: Kecepatan sepanjang sumbu x dan sumbu t

$\partial_t u = \frac{\partial u}{\partial t}$: Kecepatan gelombang

$\partial_x u = \frac{\partial u}{\partial x}$: Turunan-turunan tinggi parsial untuk gelombang (turunan tinggat I terhadap sumbu x)

$\partial_{tt} u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$: Turunan-turunan tinggi parsial untuk gelombang (turunan tinggat II terhadap sumbu t)

$\partial_{xx} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$: Turunan-turunan tinggi parsial untuk gelombang (turunan tinggat II terhadap sumbu x)

Δx : Perubahan perpindahan sinyal

Δt : Perubahan waktu

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

ABSTRAK

Aini, Lutfiatul. 2011. **Analisis Penyelesaian Analitik dan Numerik Persamaan Sinyal Pengiriman pesan**. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: (I) Ari Kusumastuti, S.Si., M.Pd
(II) Dr. H. Muirul Abidin, M.Ag

Sistem persamaan sinyal pengiriman pesan adalah persamaan diferensial parsial linear yang didapatkan dengan analisis *Brownian Motion* yang dapat dikerjakan pada kasus sinyal pesan. Persamaan sinyal adalah persamaan gelombang. Dalam penelitian ini persamaan sinyal diimplementasikan di rangkaiaan listrik yang merambat 1D terhadap sumbu x. Penelitian ini berupaya untuk memperoleh penyelesaian masalah nilai awal dan masalah nilai batas yang diasumsikan pada sinyal pesan 1D. Dalam hal ini penyelesaian d'Alembert adalah penyelesaian partikulir masalah nilai awal. Penyelesaian masalah nilai batas pada persamaan diferensial parsial. Sinyal Pengiriman Pesan dikerjakan dengan pemisahan variabel untuk mendapatkan penyelesaian umum pada masalah nilai batasnya. Dalam hal ini batas-batas didefinisikan $0 \leq x \leq l, \forall\, l = 10$. Solusi bentuk kanonik juga dibahas dalam penelitian ini yang merupakan bentuk lain, dimana varibel x, t diganti dengan ξ, η.

Dalam penelitian ini dipilih penyelesaian numerik dengan menggunakan metode *Euler Eksplisit* dalam memformulasikan penyelesaian-penyelesaian di semua titik grid dari objek persegi. Software MATLAB untuk program yang dikonstruksi dapat menjelaskan penyelesaian u dari waktu ke waktu dengan dipilih $t = [1,10]$. Amplitudo gelombang sinyal baru untuk t yang berjalan selanjutnya dapat divisualisasikan dalam grafik 2D dan 3D agar dapat dikaji lebih mendalam pola penampang gelombang.

Kata Kunci: Persamaan Sinyal Pengiriman Pesan, *Brownian Motion*, Bentuk Kanonik, Penyelesaian Analitik, Penyelesaian Numerik.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

ABSTRACT

Aini, Lutfiatul. 2011. **Analysis Analytical and Numerical Solution of Signal to Send Text Message Equations.** Thesis. Mathematics Department, Science and Technology Faculty, Islamic State University Maulana Malik Ibrahim Malang.

Adviser: (I) Ari Kusumastuti, S.Si., M.Pd
(II) Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag

System of signal to send text massage equations are linear partial differential equations obtained by analysis of Brownian Motion can be done in case massage signal. Signal equation is the wave equation. The study of signal equation implemented in electrical circuit which creeped 1D to axis x. This research aims to find solutions to initial value problem and assumed boundary value problems in 1D signal massage. In this case the d'Alembert's solution is a characteristic solution to the initial value problem. Problem solving boundary value problem is partial differential equation of signal to send text massage equation by separation of variables further carried out to obtain a general solution for boundary value problems. In $0 \leq x < l, \forall\, l = 10$. Solution of canonical form is also discussed in this reasearch, which is another form, where the variables x, t is replaced by ξ, η.

In this research, numerical solution with Euler Explicit method is choosen to formulate solutions in every grid spot from rectangle object. Software MATLAB that has been explain u solution with from time to time with the selected $t = [1,10]$. The amplitude of the signal wave that runs for a new t can then be visualized in 2D and 3D graphics can be studied more in depth cross section of the wave pattern.

Key Words: Signal to Send Text Massage Equation, Brownian Motion, Canonical Form, Analytical Solution, Numerical Solution.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Persamaan diferensial parsial merupakan kajian matematika yang sangat fundamental yang dapat menterjemahkan fenomena alam ke dalam bentuk yang sistematis. Fakta dari suatu objek yang akan diamati akan menjadi logis dan jelas dengan menampilkan model dari fakta ini, yang pada umumnya berbentuk persamaan diferensial parsial atau bahkan sistem diferensial parsial.

Persamaan diferensial parsial melibatkan serangkaian kajian yang mendalam atas solusi analitik atau bahkan solusi numerik dari model yang dihadapi. Solusi analitik atau *exact solution* adalah solusi yang sesungguhnya, yaitu solusi yang memiliki galat (*error*) sama dengan nol dari suatu persamaan diferensial parsial yang merupakan penentuan solusi yang terdefinisi atau sahih dalam sistem yang dihadapi. Penyelesaian secara analitik diperoleh dengan menggunakan perhitungan secara sistematis dan solusi yang diperoleh berupa nilai eksak. Akan tetapi, metode analitik hanya unggul untuk sejumlah persoalan yang terbatas, yaitu persoalan yang memiliki tafsiran geometri sederhana serta bermatra rendah. Dalam pembahasan solusi analitik, suatu persamaan diferensial parsial umumnya mengkaji masalah nilai awal dengan menggunakan *d'Alembert's Solution* dan untuk masalah nilai batas menggunakan pemisahan variabel. Sehingga solusi analitik yang dimaksud harus terdefinisi dalam sistem atau pada batas-batas sistem. Akan tetapi solusi analitik bukanlah proses yang

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

mudah karena melibatkan serangkaian prosedur yang rumit, oleh karena itu biasanya digunakan solusi numerik yang terkatagori sebagai prosedur yang masuk akal untuk dilalui oleh semua peneliti, terutama bagi mereka yang tidak terlalu mendalami prosedur matematik secara mendalam. Solusi numerik adalah hanya solusi pendekatan, yang digunakan untuk memformulasikan persoalan matematika sehingga dapat dipecahkan dengan operasi aritmatika biasa (Munir, 2006). Sehingga solusi analitik memegang kendali dalam mengontrol keakuratan dari solusi pendekatannya. Tetapi tidak dapat dipungkiri bahwa kadangkala ada beberapa masalah dalam suatu model yang hampir tidak mungkin ditentukan solusi analitiknya.

Masalah nilai batas tidak hanya terdapat dalam matematika, dalam Al-Qur'an pun telah di jelaskan tentang masalah batasan misalnya pada ayat (Q.S al-Baqarah: 286)

لَا يُكَلِّفُ ٱللَّهُ نَفْسًا إِلَّا وُسْعَهَا ۚ لَهَا مَا كَسَبَتْ وَعَلَيْهَا مَا ٱكْتَسَبَتْ ۗ رَبَّنَا لَا تُؤَاخِذْنَآ إِن
نَّسِينَآ أَوْ أَخْطَأْنَا ۚ رَبَّنَا وَلَا تَحْمِلْ عَلَيْنَآ إِصْرًا كَمَا حَمَلْتَهُۥ عَلَى ٱلَّذِينَ مِن قَبْلِنَا ۚ
رَبَّنَا وَلَا تُحَمِّلْنَا مَا لَا طَاقَةَ لَنَا بِهِۦ ۖ وَٱعْفُ عَنَّا وَٱغْفِرْ لَنَا وَٱرْحَمْنَآ ۚ أَنتَ مَوْلَىٰنَا
فَٱنصُرْنَا عَلَى ٱلْقَوْمِ ٱلْكَٰفِرِينَ ﴿٢٨٦﴾

Artinya: *Allah tidak membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya. ia mendapat pahala (dari kebajikan) yang diusahakannya dan ia mendapat siksa (dari kejahatan) yang dikerjakannya. (mereka berdoa): "Ya Tuhan kami, janganlah Engkau hukum kami jika kami lupa atau kami tersalah. Ya Tuhan kami, janganlah Engkau bebankan kepada kami beban yang berat sebagaimana Engkau bebankan kepada orang-orang sebelum kami. Ya Tuhan kami, janganlah Engkau pikulkan kepada kami apa yang tak sanggup kami memikulnya. beri ma'aflah*

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Kami; ampunilah Kami; dan rahmatilah kami. Engkaulah penolong kami, Maka tolonglah kami terhadap kaum yang kafir."

Dalam ayat ini Allah SWT, mengatakan bahwa seseorang dibebani hanyalah sesuai denga batas kesanggupannya. Karena memang apabila kita dibebani di luar dari batas kemampuan kita, pastilah kita tidak akan sanggup menjalani beban itu. Agama Islam adalah agama yang tidak memberatkan manusia dengan beban yang berat dan sukar. Mudah, ringan dan tidak seMpit adalah asa pokok dari agama Islam.

Dari penjelasan di atas sehubungan dengan model matematika, kita definisikan bahwa model matematika adalah suatu usaha untuk menguraikan beberapa bagian yang berhubungan dengan dunia nyata ke dalam bentuk matematika. model merupakan suatu representasi dari suatu sistem yang sedang kita pelajari (dapat berupa obyek, kejadian, proses atau suatu sistem) dan digunakan sebagai alat untuk meramalkan dan mengontrol. Fungsi utama dari model ialah kemampuanya untuk menjelaskan (*explanatory*) dan bukan deskriptif. Model merupakan suatu kesatuan (*entity*) yang terdiri dari bagian-bagian atau komponen-komponen yang satu sama lain saling berkaitan. Model bukanlah hal yang sesungguhnya terjadi, akan tetapi hanya suatu pencerminan dari suatu kenyataan hidup (*a reflection of reality*) (Supranto, 1988:53).

Allah berfirman:

وَلَقَدْ ضَرَبْنَا لِلنَّاسِ فِي هَـٰذَا ٱلْقُرْءَانِ مِن كُلِّ مَثَلٍ لَّعَلَّهُمْ يَتَذَكَّرُونَ ﴿٢٧﴾

Artinya: Sesungguhnya Telah kami buatkan bagi manusia dalam Al Quran Ini setiap macam perumpamaan supaya mereka dapat pelajaran.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Allah SWT menjelaskan dalam ayat ini bahwa Allah telah membuatkan bermacam-macam contoh dalam Al-Qu'ran seperti menerangkan sejarah beberapa umat yang dahulu yang mengingkari Tuhan dan malapetaka yang mereka alami. Contoh dan perumpamaan itu dikemukakan kepada mereka agar mereka mengambil pelajaran darinya, baik yang berhubungan dengan kehidupan dunia maupun yang berhubungan dengan kehidupan di akhirat nanti.

Salah satu hikmah yang dapat diambil dari ayat di atas secara praktis sebagai saintis terutama dalam bidang matematika adalah jika ingin mendapatkan pelajaran dari suatu fenomena alam, maka sebaiknya kita harus memodelkannya agar dapat dipelajari dengan baik.

Dalam penelitian ini, peneliti menggunakan suatu model rujukan yaitu persamaan sinyal peengiriman pesan yang berawal dari persamaan telegraf untuk mencari bentuk kanonik, solusi analitik untuk menentukan masalah nilai awal dan masalah nilai batas, dan solusi numerik. Persamaan yang merupakan kombinasi dari persamaan potensial dan arus pada kabel pengiriman pesan jarak jauh terhadap waktu. Persamaan telegraf adalah persaman yang mendeskripsikan bagaimana pancaran sinyal pengiriman dan penerimaan pesan jarak jauh. Telegraf merupakan sebuah mesin atau alat untuk mengirim dan menerima pesan dari jarak jauh. Kata telegraf yang sering didengar saat ini, secara umum merupakan telegraf elektrik. Telegraf ditemukan oleh seorang warga Amerika Serikat bernama Samuel F.B. Morse bersama dengan asistennya Alexander Bain. Persamaan Telagraf pada mulanya

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

berasal dari hukum Ohm pertama yang menyatakan $V = I.R$, dimana V tegangan dalam volt (V), I arus listrik dalam Amper (A), R hambatan dalam Ohm (Ω), tetapi karena digunakan pada kabel pengiriman pesan maka hukum Ohm berubah tergantung pada jarak tujuan pengiriman dari kabel. Dengan asumsi bahwa kabel terisolasi secara tidak sempurna sehingga terdapat kapasitas dan kebocoran arus ke tanah (Lock, 2011). Pesan pada telegraf dikirim oleh telegraf (*telegrapher*) menggunakan kode Morse yang dikenal dengan nama "telegram" atau "kabelgram" dan sering disingkat dengan pesan kabel atau kawat. Dimana kode Morse yang digunakan merupakan suatu metode dalam pengiriman standar data pengiriman nada atau suara, cahaya dengan membedakan kekuatan *dash* dan *dot* dari pesan kalimat, kata huruf, angka dan tanda baca (Anonymous, 2011).

Selanjutnya menurut Lock (2011) yang telah dikonstruksi persamaan sinyal pengiriman pesan dapat dinyatakan dalam bentuk sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \frac{1}{LC}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = -\left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C}\right)\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{GR}{LC}u(x,t) + \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x},\mathbf{t})$$

dimana:

R = hambatan pada kabel sinyal pengiriman pesan (Ω)

L = induksi pada kabel sinyal pengiriman pesan

C = kapasitas pada kabel sinyal pengiriman pesan

G = konduksi pada kabel sinyal pengiriman pesan

δx = panjang pada kabel sinyal pengiriman pesan

$\boldsymbol{\Phi}$ = amplitudo gelombang

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Merujuk pada persamaan Helmholtz, yaitu:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \lambda^2 p = -\Phi(x, y, z)$$

Persamaan ini dikatakan homogen jika $\Phi = 0$ dan non homogen jika $\Phi \neq \mathbf{0}$. Nilai batas homogen merupakan masalah nilai batas persamaan homogen dengan syarat batas homogen, $w = 0$ adalah solusi khusus dari suatu masalah nilai batas homogen (Polyanin, 2002). Pada saat menganalisa suatu persamaan, kita perlu menggambarkan suatu medium yang homogen diseluruh ruang analisa. Definisi dari medium homogen, bila dalam suatu ruang analisa ada satu titik, maka medium di sekeliling titik tersebut mempunyai tetapan medium yang sama di segala arah. Bila tetapan medium berbeda di setiap arah dari titik pengamatan, maka medium ini disebut sebagai medium tak homogen (Herbert, 2009:23).

Menurut Zauderer (2006) persamaan sinyal pengiriman pesan di atas, tergolong dalam persamaan diferensial linier satu dimensi ordo dua dengan koefisien konstanta. Bentuk umum dari persamaan diferensial parsial linier dua dimensi, ordo dua sebagai berikut :

$$A(x,y)u_{xx}(x,y) + 2B(x,y)u_{xy} + C(x,y)u_{yy}(x,y) + D(x,y)u_x(x,y)$$
$$+ E(x,y)u_y(x,y) + F(x,y)u(x,y) = G(x,y)$$

Linieritas dari persamaan diferensial persial ditentukan oleh fungsional dari koefisien.

$$A(x,y), B(x,y), C(x,y), E(x,y), F(x,y), dan\ G(x,y).$$

Jika koefisien-koefisien tersebut konstanta atau hanya tergantung pada variabel bebas, $[F(x,y) = 0]$, maka persamaan diferensial persial tersebut adalah linier. Jika

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

koefisien-koefisien merupakan fungsi dari turunan partama dan kedua $[F(x, y, u, u_x, u_{y,} u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}) = 0]$, maka PDP tersebut adalah non linier (Zauderer, 2006:102).

Keadaan aliran sinyal pengiriman pesan berdasarkan ilmu fisika bahwa, apabila pola aliran sinyal dalam suatu aliran tidak berubah di setiap arah aliran sinyal atau dalam kata lain jarak aliran sama dengan kecepan aliran, maka dikatakan aliran sinyal seragam (*uniform flow*), sedangkan jika keadaan aliran sinyal berubah dan pola kecepatan berubah maka dikatakan aliran sinyal tidak seragam (*non uniform flow*). Selanjutnya jika sinyal-sinyal seolah-olah bergerak menuju lintasan tertentu atau lurus, maka aliran sinyal pengiriman pesan tersebut dikatakan laminar. Sedangkan jika sinyal bergerak menuju lintasan yang tidak teratur, tidak lancar, maupun tidak tetap, walupun sinyal tersebut tetap menunjukkan gerak maju dalam aliran keseluruhan, maka sinyal tersebut beraliran turbulen (Anonymous, 2011).

Selanjutnya penelitian ini berupaya menekan analisis pemecahan analitik dan numerik bagi model gelombang sinyal pengiriman pesan dalam kabel. Pemecahan analitik digunakan untuk mengontrol penyelesaian dengan menggunakan pemecahan secara numerik, dengan menggunakan kondisi awal yang telah ditentukan sebelumnya oleh operator program. Dari pemecahan tersebut dapat dipakai untuk analisis tingkat pengaruh kecepatan sinyal pengiriman pesan dan juga dapat bermanfaat untuk pengiriman pesan sinyal suara terutama pada telekomunikasi telefon genggam (Lock, 2011).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Dari paparan di atas, maka penelitian ini menjadi penting untuk dilakukan karena akan sangat menguntungkan pengamatan lebih lanjut mengenai sinyal pengiriman pesan jarak jauh, dengan melihat masalah nilai awal dan masalah nilai batas yang telah diberikan dalam penelitian ini. Oleh karena itu, peneliti menuangkan gagasan tersebut dalam skripsi ini dan memberikan judul: *"Analisis Penyelesaian Analitik dan Numerik Persamaan Sinyal Pengiriman Pesan"*.

1.2 Rumusan Masalah

Berangkat dari uraian di atas, maka dalam penelitian ini akan difokuskan pada masalah berikut:

1. Bagaimana konstruksi persamaan sinyal pengiriman pesan?
2. Bagaimana bentuk kanonik persamaan sinyal pengiriman pesan?
3. Bagaimana solusi analitik persamaan sinyal pengiriman pesan?
4. Bagaimana solusi numerik persamaan sinyal pengiriman pesan?
5. Bagaimana analisis galat untuk solusi numerik persamaan sinyal pengiriman pesan?

1.3 Tujuan Penulisan

Bersadarkan rumusan masalah di atas maka tujuan penulisan skripsi sebagai berikut:

1. Mengetahui konstruksi persamaan sinyal pengiriman pesan.
2. Mengetahui bentuk kanonik persamaan sinyal pengiriman pesan.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

3. Mengetahui solusi analitik persamaan sinyal pengiriman pesan.
4. Mengetahui solusi numerik persamaan sinyal pengiriman pesan.
5. Mengetahui analisis galat untuk solusi numerik persamaan sinyal pengiriman pesan.

1.4 Batasan Masalah

1. Menggunakan persaman pengiriman pesan satu dimensi (variabel x digunakan untuk parameter kuota data pesan).
2. Mendefinisikan kondisi awal $v(x,0) = f(x), \frac{\partial v}{\partial t}(x,0) = g(x,0)$ dan $v(x,0) = v(\tau,0) = f(\tau)\ dimana\ x = \tau$.
3. Mendefinisikan kondisi batas $v(0,t) = v(l,t) = 0\ dimana\ t \geq 0$ dan $v(x,0) = f(x)$ untuk $0 \leq x \leq l$.
4. Sinyal bersifat tak tampak (*Steady State*).
5. Menggunakan metode Euler Ekplisit.

1.5 Manfaat Penelitian

1. Bagi Penulis

   Sebagai sarana tolak ukur kemampuan dan kreatifitas keilmuan selama masa kuliah untuk diterapkan pada permasalahan di lapangan.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

2. Bagi Lembaga Pendidikan

   Untuk pengembangan keilmuan khususnya matematika terapan dan metode numerik.

3. Bagi Masyarakat

   Diharapkan penelitian ini di jadikan referensi dan dilanjutkan untuk ditemukan tindakan preventif dalam perkembangan sinyal pengiriman pesan.

1.6 Metode Penelitian

Metode penelitian untuk solusi analitik dan numerik untuk persamaan pengiriman pesan dilakukan dengan teknik analisis secara literatur atau studi kasus. Tahapan-tahapan penelitian diuraikan sebagai berikut:

4. Konstruksi persamaan pengiriman pesan yang dilakukan dengan asumsi bahwa persamaan tersebut berasal dari hukum Ohm. Sehingga diperoleh model persamaan pengiriman pesan.
5. Konstruksi bentuk kanonik dari model persamaan pengiriman pesan.
   1. Menentukan tipe persamaan sinyal pengiriman pesan
   2. Mencari akar-akar persamaan dari persamaan sinyal pengiriman pesan.
   3. Menentukan koordinat karakteristik.
   4. Menentukan bentuk kanonik persamaan sinyal pengiriman pesan.
3. Menentukan solusi analitik dari model rujukan persamaan pengiriman pesan.
   1. Menentukan model persamaan pengiriman pesan.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

2. Menganalisis untuk memperoleh masalah nilai awal dengan menggunakan *d'Alembert's Solution*.
3. Menganalisis untuk memperoleh masalah nilai batas dengan menggunakan pemisahan variabel.
4. Menentukan solusi analitiknya.

4. Menentukan solusi numerik persamaan pengiriman pesan.
   1. Mentransformasi persamaan sinyal pengiriman pesan ke bentuk persamaan diskrit dengan menggunakan metode beda hingga sederhana.
   2. Merancang model iterasi penyelesaian persamaan diferensial parsial model gelombang, yang dibangkitkan dari model persamaan sinyal pengiriman pesan pada objek kabel pengiriman pesan berbentuk persegi.
   3. Didefinisikan kondisi awal dan kondisi batas pada semua grid.
   4. Dibuat matriks-matriks untuk menyelesaikan persamaan dengan menggunakan *software* MATLAB.
   5. Merancang algoritma pemprograman dari model iterasi yang telah dibuat untuk model gelombang.
5. Melakukan simulasi hasil program dan menganalisis galat model gelombang terhadap solusi eksak.

1.7 Sistematika Penulisan

Untuk memudahlan pembahasan dalam skripsi ini, peneliti membagi kedalam empat bab, yaitu:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Bab I: Bab I membahas latar belakang, rumusan masalah, tujuan penulisan, batasan masalah, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

Bab II: Bab II membahas beberapa teori pendukung yaitu persamaan diferensial parsial linier dan nonlinier, ordo persamaan diferensial parsial, klasifikasi persamaan diferensial parsial, bentuk kanonik persamaan diferensial parsial, penyesesaiaan analitik persamaan diferensial parsial, metode Euler Eksplisit, metode numerik, metode beda hingga, matriks tridiagonal dan batas kemampuan manusia dalam Al-Qur'an.

Bab III: Bab III membahas analisis *Brownian Motion* persamaan sinyal pengiriman pesan, bentuk kanonik persamaan sinyal pengiriman pesan, penyelesaian analitik persamaan sinyal pengiriman pesan, penyelesaian numeric persamaan sinyal pengiriman pesan, dan sinyal pengiriman pesan dalam Al-Qur'an.

Bab IV: Bab IV membahas penutup yang berisi kesimpulan dan saran.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Diferensial Parsial

Dalam persamaan diferensial parsial muncul turunan parsial yang menyatakan hukum fisika tertentu. Misalnya persamaan diferensial parsial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2.1}$$

yang menggambarkan gerak bentuk gelombang, dapat berbentuk gelombang samudera, gelombang suara, gelombang cahaya dan gelombang yang lainnya.

Definisi 2.1

Persamaan diferensial adalah persamaan yang menyangkut turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu atau lebih variabel bebas.

Berdasarkan jumlah variabel bebasnya, persamaan diferensial dikelompokkan menjadi persamaan diferensial biasa (PDB) atau *Ordinary Differential Equation (ODE)* dan persamaan diferensial parsial (PDP) atau *Partial Differential Equation (PDE)* (Ross, 1984:3).

Definisi 2.2

Persamaan diferensial parsial (PDP) adalah persamaan diferensial yang menyangkut turunan parsial dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu atau lebih variabel bebas.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Contoh 1:

1) $\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} = v$ adalah fungsi dalam dua variabel, yaitu s dan t.

2) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ adalah fungsi dalam tiga variabel, yaitu x, y dan z.

Variabel bebas pada contoh 1 adalah *s* dan *t* sedangkan variabel tak bebasnya adalah *v*. Selanjutnya pada contoh 2 variabel *x*, *y* dan *z* adalah variabel bebasnya, sedangkan variabel *u* adalah variabel tak bebasnya (Ross, 1984:4).

Persamaan diferensial parsial dapat dikatakan sebagai persamaan yang mengandung satu atau lebih turunan-turunan parsial. Persamaan tersebut merupakan laju perubahan terhadap dua atau lebih variabel bebas, yang dikatakan dengan waktu dan jarak (ruang) (Triatmojo, 2002:199).

Ketika ada sebuah fungsi $s(x, y)$ yang bergantung pada dua variabel bebas x dan y, dan jika diturunkan terhadap x maka y bernilai konstan dan jika diturunkan terhadap y, x bernilai konstan. Adapun notasi pelambangannya secara berturut – urut adalah $\frac{\partial w}{\partial x}$ dan $\frac{\partial w}{\partial y}$, dengan simbol ∂ menunjukkan turunan parsialnya. Notasi itu dapat dipakai untuk pengerjaan turunan orde dua. Turunan terhadap x dari $\frac{\partial w}{\partial x}$ dilambangkan dengan $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ dan turunan terhadap y dari $\frac{\partial w}{\partial x}$ adalah $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ dan seterusnya. Turunan parsial x dapat dituliskan berupa w_x (Levine, 1997:4).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

2.2 Persamaan Diferensial Parsial Linier Dan Tidak Linier

Persamaan diferensial parsial (PDP) diklasifikasikan menjadi PDP linier dan tak linier.

$$A(x,y)u_{xx}(x,y) + 2B(x,y)u_{xy}(x,y) + C(x,y)u_{yy}(x,y) + D(x,y)u_x(x,y) + E(x,y)u_y(x,y) + F(x,y)u(x,y) = G(x,y) \quad (2.2)$$

Linieristas dari PDP ditentukan oleh fungsional dari koefisien $A(x,y)$, $B(x,y)$, $C(x,y)$, $D(x,y)$, $E(x,y)$, $F(x,y)$, dan $G(x,y)$. Jika koefisien-koefisien tersebut konstanta atau hanya tergantung pada variabel bebas, $[F(x,y) = 0]$, maka PDP tersebut adalah linier (Zauderer, 2006:66). Jika koefisien-koefisien merupakan fungsi dari turunan pertama dan kedua $\left[F\left(x,y,u,u_x,u_y,u_{xx},u_{yy},u_{xy}\right) = 0\right]$, maka PDP adalah tidak linier (Zauderer, 2006:102). Untuk lebih jelasnya perhatikan beberapa PDP berikut:

a. $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (PDP Linier)

b. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u = \sin x$ (PDP Linier)

c. $\frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} y + u = 1$ (PDP Tidak Linier)

d. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u^2 = 0$ (PDP Tidak Linier)

2.3 Orde Persamaan Diferensial Parsial

Ordo/orde suatu persamaan diferensial adalah orde turunan tertinggi yang muncul dalam persamaan tersebut (Stewart, 2003:5).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Persamaan diferensial parsial dengan dua variabel bebas dikatakan berorde satu jika turunan tertinggi dari variabel terikatnya adalah satu. Bentuk umum persamaan diferensial parsial linier dan non liner berorde satu adalah:

$$a(x,t)\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} + b(x,t)\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = c(x,t)v(x,t) + d(x,t) \qquad (2.3)$$

di mana $a, b, c,$ dan d adalah fungsi dan di setiap titik (x,t) merupakan vektor $[a(x,t), b(x,t)]$ yang terdefinisi dan tidak nol. Persamaan (2.3) dapat ditulis dalam bentuk:

$$F\big(x,t,v(x,t),v_x(x,t),v_t(x,t)\big) = 0$$

di mana $v_x(x,t) = \frac{\partial v(x,t)}{\partial x}$ dan $v_t(x,t) = \frac{\partial v(x,t)}{\partial t}$ (Zauderer, 2006:63).

Demikian halnya dengan persamaan diferensial parsial dengan dua variabel bebas dikatakan berorde dua, tiga, empat hingga berorde *m* jika turunan tertinggi dari variabel terikatnya adalah dua, tiga, empat atau *m*. Bentuk umum persamaan diferensial parsial linier dan non liner berorde dua, tiga, empat dan berorde *n* berturut-turut sebagai berikut:

a. Persamaan diferensial persial linier orde dua dengan varaiabel *n*

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu + d = 0$$

b. Persamaan diferensial persial linier orde tiga dengan varaiabel n

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ijk}\frac{\partial^3 u}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + du + e = 0$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

c. Persamaan diferensial persial linier orde empat dengan varaiabel n

$$\sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\sum_{i_3=1}^{n}\sum_{i_4}^{n} a_{i_1 i_2 i_3 i_4}\frac{\partial^4 u}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\partial x_{i_3}\partial x_{i_4}}$$

$$+\sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\sum_{i_3=1}^{n} b_{i_1 i_2 i_3}\frac{\partial^3 u}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\partial x_{i_3}}$$

$$+\sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n} c_{i_1 i_2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}}+\sum_{i=1}^{n} d_{i_1}\frac{\partial u}{\partial x_{i_1}}+eu+f=0$$

d. Persamaan diferensial persial linier orde n dengan varaiabel n

$$\sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\dots\sum_{i_m=1}^{n}\sum_{i_4}^{n} a_{i_1,i_2,i_3,\dots,i_m}\frac{\partial^m u}{\partial x_{i_1}\dots\partial x_{i_m}}+\dots+0$$

(2.4) (Zauderer, 2006:137)

2.4 Klasifikasi Persamaan Diferensial Parsial

Suatu klasifikasi penting dalam PDP adalah terdiri dari tipe parabolik, hiperbolik, dan eliptik. Persamaan diferensial parsial linier orde dua atau persamaan (2.2) diklasifikasikan berdasarkan aturan berikut ini:

a. Persamaan Ellips: $B^2-4AC<0$

Pada tipe eliptik, kita tentukan persamaan diferensial parsial sebagai berikut:

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial y^2}+Lu(x,y)=0, \qquad x\in G, \quad 0<y<l$$

dengan kondisi batas seperti pada tipe hiperbolik dan kondisi awal adalah

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$u(x,0) = f(x), \quad u(x,l) = g(x), \qquad x \in G$$

Dengan memisalkan $u(x,t) = M(x)N(t)$, maka persamaan diferensial parsial di atas akan menjadi bentuk $-\frac{N''(y)}{N(y)} = -\frac{LM(x)}{\rho()M(x)}$. Selanjutnya dihasilkan $LM(x) = \lambda\rho(x)M(x)$ dan dihasilkan pemisahan variabel dalam persamaan diferensial di atas, yaitu $N''(y) - \lambda N(y) = 0$ (Zauderer, 2006:180-183).

Contoh: Persamaan Poisson

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + g = 0$$

dan Persamaan Laplace

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0$$

b. Persamaan Parabola: $B^2 - 4AC = 0$

Pada tipe parabolik, kita tentukan persamaan diferensial parsial sebagai berikut:

$$\rho(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + Lu(x,t) = 0, \qquad x \in G, \quad t > 0$$

dengan kondisi batas seperti pada tipe hiperbolik dan kondisi awal adalah

$$u(x,0) = f(x), \qquad x \in G$$

Dengan memisalkan $u(x,t) = M(x)N(t)$, maka persamaan diferensial parsial di atas akan menjadi bentuk $\frac{N'(t)}{N(t)} = -\frac{LM(x)}{\rho(x)M(x)}$. Selanjutnya dihasilkan $LM(x) = \lambda\rho(x)M(x)$ dan dihasilkan pemisahan variabel dalam persamaan diferensial di atas, yaitu $N'(t) + \lambda\rho(t) = 0$ (Zauderer, 2006:180-183).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Contoh: Persamaan Perambatan Panas

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

c. Persamaan Hiperbola: $B^2 - 4AC > 0$

Pada tipe hiperbolik, kita tentukan persamaan diferensial parsial homogen:

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + Lu(x,t) = 0, \qquad x \in G, \quad t > 0$$

dengan kondisi batas

$$\alpha(x)u(x,t) + \beta(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial n}\bigg|_{\partial G} = 0, \qquad t > 0$$

$$\alpha_1 u(0,t) - \beta_1 u_x(0,t) = 0, \qquad \alpha_2 u(l,t) + \beta_2 u_x(l,t) = 0, \quad t > 0$$

dan kondisi awal

$$u(x,o) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x), \qquad x \in G.$$

Dengan memisalkan $u(x,t) = M(x)N(s)$, maka persamaan diferensial parsial di atas akan menjadi bentuk $\frac{N''(t)}{N(t)} = -\frac{LM(x)}{\rho(x)M(x)}$. Selanjutnya dihasilkan $LM(x) = \lambda\rho(x)M(x)$ dan dihasilkan pemisahan variabel dalam persamaan diferensial di atas, yaitu $N''(t) + \lambda N(t) = 0$ (Zauderer, 2006:180-183).

Contoh: Persamaan Gelombang (Triatmojo, 2002:201)

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = C^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

2.5 Bentuk Kanonik Persamaan Diferensial Parsial

Bentuk kanonik persamaan diferensial parsial adalah bentuk lain dari persamaan diferensial parsial dimana variabel x dan y dapat dinyatakan kembali dalam bentuk variabel $\xi(x,y)$ dan $\eta(x,y)$.

Bentuk umum persamaan diferensial parsial orde dua adalah:

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + 2B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x,y) + C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) + D(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + E(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + F(x,y)u(x,y) + G(x,y) = 0 \quad (2.5)$$

dimana *A, B, … , G* adalah fungsi bernilai riil.

Persamaan 2.2 mengandung turunan kedua dari *u*, dapat diubah oleh perubahan variabel independen dalam bentuk yang mirip dengan difusi, gelombang dan persamaan Laplace. Sehingga persamaan ini sebenarnya merupakan prototipe persamaan linier orde dua dari bentuk 2.8. versi mengubah persamaan ini disebut *bentuk kanonik* (Zauderer, 2006:124).

Dari bagi persamaan (2.5) dengan *A (x,y)* sehingga diperoleh:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2B}{A}(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{C}{A}(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (2.6)$$

Dengan faktorisasi operator, maka persamaan (2.6) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2B}{A}(x,y)\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{C}{A}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x} - w^+(x,y)\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - w^-(x,y)\frac{\partial}{\partial y}\right) \quad (2.7)$$

dimana $w^+(x,y) + w^-(x,y) = -\frac{2B}{A}(x,y)$ dan $w^+(x,y)w^-(x,y) = -\frac{C}{A}(x,y)$.

Selanjutnya, solusi untuk $w^{\pm}$ dinyatakan sebagai berikut:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\frac{-B(x,y) \pm \sqrt{B^2(x,y) - A(x,y)C(x,y)}}{A(x,y)}$$

Di mana, $w^+(x,y)$ dan $w^-(x,y)$ adalah sebarang fungsi riil yang diberikan.

Dengan memandang diskriminannya, diperoleh bahwa tipe-tipe dasar persamaan diferensial parsial harus memenuhi syarat berikut:

1. Jika $B^2 - 4AC < 0$ disebut bentuk Persamaan Eliptik
2. Jika $B^2 - 4AC = 0$ disebut bentuk Persamaan Parabolik
3. Jika $B^2 - 4AC > 0$ disebut bentuk Persamaan Hiperbolik

Jika didefinisikan koordinat karakteristik yaitu $\xi(x,y)$ dan $\eta(x,y)$ pada vektor singgung kurva karakteristik $\frac{dy}{dx} = -w^{\pm}(x,y)$. Maka diperoleh bentuk kanonik secara umum dari tipe-tipe dasar persamaan diferensial parsial yaitu sebagai berikut:

1. Eliptik: $u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} + a(\alpha,\beta)u_\alpha + b(\alpha,\beta)u_\beta + c(\alpha,\beta)u = d(\alpha,\beta)$ dengan $\xi = \alpha + i\beta$ dan $\eta = \alpha - i\beta$
2. Parabolik: $u_{\eta\eta}(\xi,\eta) + a(\xi,\eta)u_\xi(\xi,\eta) + b(\xi,\eta)u_\eta(\xi,\eta) + c(\xi,\eta)u(\xi,\eta) = d(\xi,\eta)$
3. Hiperbolik: $u_{\xi\eta}(\xi,\eta) + a(\xi,\eta)u_\xi(\xi,\eta) + b(\xi,\eta)u_\eta(\xi,\eta) + c(\xi,\eta)u(\xi,\eta) = d(\xi,\eta)$

(Zauderer, 2006:126-128).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

2.6 Penyelesaian Analitik Persamaan Diferensial Parsial

2.6.1 Mekanisme Kerja Sinyal

Sinyal adalah suatu besaran *fisis* yang persamaannya merupakan fungsi ruang, waktu atau beberapa variabel.

Besaran fisis, misalnya tegangan listrik, intensitas cahaya, simpangan getaran/gelombang dan lain sebagainya.

Berdasarkan variabelnya, maka sinyal dapat dikatagorikan sebagai berikut:

a. Sinyal yang dapat didefinisikan dengan fungsi matematika yang jelas. Contoh:
   1. $S\,(t) = 10t + 2$ sinyal merupakan fungsi linier
   2. $S\,(t) = 10t^2 + t$ sinyal merupakan fungsi kuadrat
   3. $S\,(x,t) = 10\,Sin\,2p\left(\frac{x}{l}+\frac{t}{T}\right)$ sinyal merupakan fungsi Ruang *x* dan waktu *t*

b. Sinyal yang *tidak* dapat didefinisikan dengan fungsi matematika secara jelas dan bahkan sangat komplek. Contoh sinyal gempa, sinyal pembicaraan manusia seperti gambar 5.

Gambar 2.1: Contoh sinyal suara

Sinyal pada gambar 1 tersebut merupakan kumpulan dari gelombang sinus dengan amplitudo dan frekuensi yang berbeda-beda yang merupakan fungsi waktu, atau dapat dinyatakan sebagai:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\sum_{i=1}^{i=N} A_i(t)\sin(2\pi f_i(t) + \theta_i)$$

Berdasarkan persaman sinyal tersebut, maka informasi yang dapat diamati adalah dgn mengukur :

- Amplitudo
- frekuensi
- perubahan fasa
- noise

Berdasarkan jenis/datanya sinyal dapat dikelompokan sebagai berikut:

a. Sinyal Analog (*continue*)

Sinyal analog adalah sinyal data dalam bentuk gelombang yang kontinue, yang membawa informasi dengan mengubah karakteristik gelombang. Dua parameter atau katakteristik terpenting yang dimiliki oleh isyarat analog adalah amplitudo dan frekuensi. Isyarat analog biasanya dinyatakan dengan gelombang sinus, mengingat gelombang sinus merupakan dasar untuk semua bentuk isyarat analog. Hal ini didasarkan kenyataan bahwa bardasarkan analisis fourier, suatu sinyal analog dapat diperoleh dari perpaduan sejumlah gelombang sinus. Dengan menggunakan sinyal analog, maka jangkauaan transmisi data dapat mencapai jarak jauh, tetapi sinyal ini mudah terpengaruh oleh *noise*. Gelombang pada sinyal analog umumnya berbentuk gelombang sinus tiga dimensi yaitu:

1. *Amplitudo*, merupakan ukuran tinggi rendahnya dari sinyal analog.
2. *Frekuensi*, merupakan jumlah gelombang sinyal analog dalam satuan detik.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

3. *Phase*, merupakan besar sudut dari sinyal analog pada saat tertentu.

(Ahmad Fauzi, 2011)

b. Sinyal digital

Sinyal digital merupakan sinyal data dalam bentuk pulsa yang dapat mengalami perubahan yang tiba-tiba dan mempunyai besaran 0 dan 1. Sinyal digital hanya memiliki dua keadaan, yaitu 0 dan 1, sehingga tidak mudah terpengaruh oleh derau, tetapi transmisi dengan sinyal digital hanya mencapai jarak jangkau pengiriman data yang relatif dekat. Biasanya sinyal ini juga dikenal dengan sinyal diskret. Sinyal yang mempunyai dua keadaan ini biasa disebut dengan bit. Bit merupakan istilah khas pada sinyal digital. Sebuah bit dapat berupa nol (0) atau satu (1). Kemungkinan nilai untuk sebuah bit adalah 2 buah (21). Kemungkinan nilai untuk 2 bit adalah sebanyak 4 (22), berupa 00, 01, 10, dan 11. Secara umum, jumlah kemungkinan nilai yang terbentuk oleh kombinasi n bit adalah sebesar $2n$ buah (Ahmad Fauzi, 2011).

2.6.2 Masalah Nilai Awal dan Masalah Nilai Batas

Penyelesaian dari persamaan diferensial adalah suatu fungsi tanpa turunan-turunan yang memenuhi persamaan tersebut (Soehardjo, 1996: 93). Dalam penyelesaian persamaan diferensial parsial dikenal istilah penyelesaian umum dan penyelesaian khusus. Penyelesaian umum adalah suatu penyelesaian yang terdiri dari sejumlah fungsi bebas sembarang yang jumlahnya sesuai dengan orde persamaannya.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Sedangkan penyelesaian khusus adalah penyelesaian yang bisa didapatkan dari penyesaiaan umumnya dengan pilihan khusus dari fungsi sebarang (Spiegel, 1983: 2). Sebagai contoh $u = x^2y - \frac{1}{2}xy^2 + F(x) + G(y)$ merupakan penyelesaian dari persamaan $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2x - y$. Penyelesaian ini disebut sebagai penyelesaian umum karena terdiri dari dua fungsi bebas sembarang yaitu *F*(*x*) dan *G*(*y*).

Sehingga untuk mendapatkan penyelesaian analitik dari persamaan diferensial parsial, maka harus ditentukan terlebih dahulu adalah penyelesaian masalah nilai awal dengan menggunakan metode *d'Alembret's Solution* dan menentukan penyelesaian masalah nilai batas dengan menggunakan metode pamisahan variabel.

Masalah nilai batas (MNB) melibatkan suatu persamaan diferensial parsial dan semua penyelesain yang memenuhi syarat yang dinamakan syarat batas (Spiegel, 1983:276).

Misal persamaan diferensial linier orde dua

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \qquad (2.8)$$

dimana koefisien-koefisien $a_2(x), a_1(x), a_0(x)$ dan fungsi $f(x)$ merupakan fungsi-fungsi yang kontinu di dalam selang $a \leq x \leq b$ dengan $a_2(x) \neq 0$ di dalam selang ini. Menentukan penyelesaian $y(x)$ dari persamaan diferensial (2.8) pada sebuah titik $x = x_0$ di dalam selang $a \leq x \leq b$ dan memenuhi dua syarat awal yang diberikan

$$y(x_0) = y_0 \text{ dan } y'(x_0) = y_1 \qquad (2.9)$$

merupakan suatu *masalah nilai awal* (MNA). Dalam banyak MNA variabel bebas *x* dari persamaan diferensial pada umumnya menyatakan waktu, x_0 menyatakan waktu

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

awal dan y_0 dan y_1 menyatakan syarat awal. Bila variabel *x* bebas merupakan variabel yang menyatakan tempat (*space variable*), maka mencari suatu penyelesaian $y(x)$ dari persamaan diferensial yang memenuhi syarat pada titik akhir dari selang $a \leq x \leq b$

$y(a) = A$ dan $y(b) = B$ (2.10)

dengan A dan B dua buah konstanta, disebut *syarat batas.* Persamaan diferensial (2.8), bersama-sama dengan syarat batas (2.10), merupakan suatu *masalah nilai batas* (MNB). Bentuk dari syarat batas pada titik akhir dapat sangat berbeda-beda (Finizio dan Ladas, 1982:244). Ada beberapa bentuk khusus syarat batas yang digunakan dalam aplikasi, yaitu:

Separated : $a_1 y(a) + a_2 y'(a) = c_1,$

$b_1 y(b) + b_2 y'(b) = c_2,$

Dirichlet : $y(a) = c_1,\ y(b) = c_2$

Neumann : $y'^{(a)} = c_1, y'(b) = c_2$

Periodic : $y(-T) = y(T),\ y'(-T) = y'(T)$

$y(0) = y(2T), y'(0) = y'(2T)$

dimana periodenya adalah *2T*. bentuk Dirichlet dan Neumann adalah syarat batas yang khusus digunakan pada masalah nilai batas (Nagle, 1996: 612).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

2.6.3 Metode Pemisahan Variabel

Pada persamaan sinyal pengiriman pesan (2.29), untuk menentukan solusi partikular masalah nilai batas dengan asumsi nilai awal adalah $v(0,t) = v(l,t) = 0$ untuk $t \geq 0$ dan $0 \leq x \leq l$ dan dengan menggunakan metode *separation of variabel*.

Persamaan diferensial parsial linier tingkat tinggi dengan beberapa keistimewaan, dapat diselesaikan dengan metode pemisahan variabel.

Bentuk umum persamaan diferensial parsial tersebut adalah sebagai berikut:

$$a_0 u + a_1 \frac{\partial u}{\partial x} + a_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cdots + a_n \frac{\partial^n u}{\partial x^n} +$$

$$c_0 u + c_1 \frac{\partial u}{\partial t} + c_2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \cdots + c_k \frac{\partial^k u}{\partial t^k} = 0 \qquad (2.11)$$

dengan keistimewaan :

1. tidak terdapat derivatif parsial terhadap lebih dari satu variabel bebas.
2. $a_i (i = 1,2,3, \ldots, n)$, yaitu koefisien dari turunan parsial terhadap x, merupakan fungsi dari x saja atau konstanta.

   $c_i (i = 1,2,3, \ldots, k)$, yaitu koefisien dari turunan parsial terhadap t, merupakan fungsi dari t saja atau konstanta (Soehardjo, 1996: 4-8).

Penyelesaian persamaan diferensial parsial (2.11) dapat dimisalkan sebagai berikut:

$$U(x,t) = X(x)T(t) \qquad (2.12)$$

jika persamaan (2.12) disubsitusikan ke persamaan (2.11) diperoleh:

$$a_0 XT + a_1 X'T + a_2 X"T + \cdots + a_n X^n T +$$

$$c_0 XT + c_1 XT' + c_2 XT" + \cdots + c_l XT^l = 0$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

dan jika ini dibagi dengan $U = XT$ diperoleh:

$$a_0 + a_1 \frac{X'}{X} + a_2 \frac{X''}{X} + \cdots + a_n \frac{X^n}{X} +$$

$$c_0 + c_1 \frac{T'}{T} + c_2 \frac{T''}{T} + \cdots + c_l \frac{T^l}{T} = 0 \qquad (2.13)$$

Perhatikan bahwa :

$$X' = \frac{dX}{dx}; X'' = \frac{d^2X}{dx^2}; \ldots; X^n = \frac{d^nX}{dx^n}$$

$$T' = \frac{dT}{dt}; T'' = \frac{d^2T}{dt^2}; \ldots; T^l = \frac{d^lT}{dt^l}$$

Jika persamaan (2.13) berturut-turut didefinisikan terhadap variabel $x \; dan \; t$, maka diperoleh:

$$\frac{d}{dx}\left(a_0 + a_1 \frac{X'}{X} + a_2 \frac{X''}{X} + \cdots + a_n \frac{X^n}{X}\right) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(c_0 + c_1 \frac{T'}{T} + c_2 \frac{T''}{T} + \cdots + c_l \frac{T^l}{T}\right) = 0$$

Hal ini berarti bahwa :

$$a_0 + a_1 \frac{X'}{X} + a_2 \frac{X''}{X} + \cdots + a_n \frac{X^n}{X} = k_1$$

$$c_0 + c_1 \frac{T'}{T} + c_2 \frac{T''}{T} + \cdots + c_l \frac{T^l}{T} = k_2 \qquad (2.14)$$

dimana k_1, k_2 adalah konstanta sembarang dan dengan melihat persamaan (2.13) haruslah

$$k_1 + k_2 = 0$$

jelas bahwa persamaan (2.14) adalah suatu system persamaan diferensial biasa yang ekuivalen dengan persamaan diferensial (2.11).

Misalkan selesaian yang bebas linier dari sistem (2.14) berturut-turut adalah:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$X_i(x, k_1), i = 1,2,3, \dots, n:$$

dan

$$T_s(t, k_2), s = 1,2,3, \dots, l.$$

maka selesaian umum dari persamaan diferensial parsial (2.11)

$$w = \sum_{i=1}^{n} X_i(x, k_1). \sum_{s=1}^{l} T_s(t, k_2)$$

(Soehardjo, 1996:4-8)

Metode pemisahan variabel adalah teknik klasik yang efektif pada solusi beberapa tipe persamaan diperensial parsial, menyatakan penyelesaian $u(x,t)$ untuk persamaan diferensial parsial sebagai kombinasi linier tak terbatas dari komponen fungsi sederhana $u_n(x,t), n = 1,2,3, \dots$ yang memenuhi persamaan diferensial parsial, kondisi batas, linier dan homogen. Untuk menentukan solusi $u_n(x,t)$ kita asumsikan dengan variabel terpisah sehingga $u_n(x,t) \approx u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t)$.

Selanjutnya dipisahkan antara variabel x dan t sehingga didapatkan dua fungsi persamaan diferensial biasa dengan menggunakan kondisi batas untuk $X_n(x)$ dan $T_n(x,t)$. Subsitusikan bentuk $u_n(x,t)$ dari solusi persamaan diferensial parsial. Dengan demikian kita telah menemukan solusi persamaan diferensial parsial untuk masalah nilai batas yang melibatkan satu variabel (Negle, 1996: 536-539).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

2.6.4 Nilai Eigen dan Fungsi Eigen

Dalam bahasa Jerman "eigen" dapat diartikan dengan sebenarnya atau karakteristik. Oleh karena itu nilai eigen dapat juga dinamakan nilai sebenarnya atau nilai karakteristik (Anton, 1987:277). Semua nilai eigen λ adalah riil (Folland, 1992 dalam Sutrima).

Jika A adalah matriks *n* x *n*, maka vektor tak nol *x* di dalam R^n dinamakan vektor eigen dari A, jika A*x* adalah kelipatan skalar dari *x*, yaitu $Ax = \lambda x$ untuk suatu skalar λ. Skalar λ dinamakan nilai eigen dari A dan *x* dikatakan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ (Anton, 1987: 277).

Untuk mencari nilai eigen matriks A yang berukuran *n* x *n*, maka $Ax = \lambda x$ dituliskan sebagai $Ax = \lambda Ix$ atau $(\lambda I - A)x = 0$. Supaya λ menjadi nilai eigen, maka harus ada pemecahan tak nol dari persamaan $(\lambda I - A)x = 0$. Akan tetapi karena $\det(A) \neq 0$, maka persamaan $(\lambda I - A)x = 0$ akan mempunyai pemecahan tak nol jika dan hanya jika

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

yang dinamakan dengan persamaan karakteristik A. Skalar yang memenuhi persamaan ini adalah nilai eigen dari A.

Bila diperluas, maka $\det(\lambda I - A) = 0$ adalah polinom λ yang dinamakan polinom karakteristik dari A, yaitu

$$\det(\lambda I - A) = \lambda'' + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_n \qquad \text{(Anton, 1987:278)}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Jika A adalah matriks *n* x *n* maka pernyataan-pernyataan berikut ekivalen satu sama lain:

1. λ adalah nilai eigen dari A
2. Sistem persamaan $(\lambda I - A)x = 0$ mempunyai pemecahan tak trivial
3. Ada vektor tak nol *x* di dalam R^n sehingga $Ax = \lambda x$
4. λ adalah pemecahan riil dari persamaan karakteristik $\det(\lambda I - A) = 0$

(Anton, 1987:280).

2.6.5 Persamaan Linier Homogen dengan Koefisien Konstanta

Persamaan umum diferensial parsial linier (2.2) disebut homogen jika $G = 0$ untuk x dan y, sedangkan $G \neq 0$ disebut nonhomogen.

Suatu persamaan diferensial linier homogen orde dua dengan koefisien konstan:

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad (2.15)$$

Dimana $a(\neq 0), b,$ dan , c adalah konstanta riil. Maka solusi umum dari persamaan (2.15) adalah

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

dimana c_1 dan c_2 konstan.

Selanjutnya jika $y = e^{rx}$ disubstitusikan ke persamaan (2.15) maka diperoleh

$ar^2 e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0$ dan

$e^{rx}(ar^2 + br + c) = 0$.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Karena e^{rx} tidak mungkin dama dengan nol, maka kita bisa membagi persamaan di atas dengan e^{rx}, sehingga kita peroleh

$$ar^2 + br + c = 0 \qquad (2.16)$$

Akibatnya $y = e^{rx}$ adalah solusi untuk persamaan (2.15) jika dan hanya jika r memenuhi persamaan (2.16). Persamaan (2.16) disebut *auxiliary equation* yang dihubungkan dengan persamaan homogen.

Di sini *auxiliary equation* adalah kuadratik, dan akar-akarnya adalah sebagai berikut:

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad \text{dan } r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ketika $b^2 - 4ac > 0$, akar $r_1$dan r_2 adalah riil dan nyata. Jika $b^2 - 4ac = 0$, maka akar-akarnya riil dan sama. Ketika $b^2 - 4ac < 0$ maka akar-akarnya adalah bilangan kompleks konjugat.

a. *distinct reeal roots*

Jika *auxiliary equation* mempunyai akar-akar riil r_1 dan r_2, maka $e^{r_1 x}$ dan $e^{r_2 x}$ adalah solusi untuk persamaan (2.15). Oleh karena itu, solusi umum dari persamaan (2.15) adalah

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$$

dimana $c_1$dan c_2 konstan.

b. repeated root

Jika *auxiliary equation* mempunyai akar kembar r, maka solusi untuk persamaan (2.15) adalah e^{rx} dan xe^{rx}, dan solusi umumnya adalah

$$y(x) = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

dimana c_1 dan c_2 konstan.

c. *complex conjugate roots*

Jika *auxiliary equation* mempunyai akar-akar kompleks $\alpha \pm i\beta$, maka solusi untuk persamaan (2.15) adalah

$$e^{\alpha x}\cos\beta x \quad \text{dan} \quad e^{\alpha x}\sin\beta x$$

dan solusi umumnya adalah

$$y(x) = c_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + c_2 e^{\alpha x}\cos\beta x$$

dimana c_1 dan c_2 konstan (Nagle, 1993:153-162).

Contoh 1: Tentukan solusi umum persamaan $y'' - 3y' + 2y = 0$

Jawab :

Persamaan karakterisrik $r_2 - 3r + 2 = 0$

$$(r-1)(r-2) = 0$$

$$r = 1, r = 2$$

Solusi basisnya : $Y_1 = e^x, Y_2 = e^{2x}$

Solusi umumnya : $Y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$

Contoh 2: Tentukan solusi masalah nilai awal $y'' - 8y' + 16y = 0$

Jawab:

Persamaan karakteristik : $r^2 - 8r + 16y = 0$

$$(r-4)(r-4) = 0$$

$$r_1 = r_2 = 4$$

Solusi basisnya : $Y_1 = e^{4x}, Y_2 = xe^{4x}$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Solusi umumnya : $Y = C_1 e^{4x} + C_2 x e^{4x} = e^{4x}(C_1 + C_2 x)$

Contoh 3: Tentukan solusi umum dari $y'' - 4y' + 13y = 0$

jawab:

persamaan karakteristik : $r^2 - 4r + 13 = 0$

$$r_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{16 - 52}}{2}$$

$$= 2 \pm 3i, \alpha = 2, \beta = 3$$

Solusi basisnya : $Y_1 = e^{(2+3i)x}$ dan $Y_2 = e^{(2-3i)x}$

Dari rumus euler, $e^{3ix} = \cos 3x + i \sin 3x$, maka solusi basisnya menjadi

$Y_1 = e^{2x} + e^{3ix}$

$= e^{2x} . e^{3ix}$

$= e^{2x}(\cos 3x + i \sin 3x)$

$Y_2 = e^{2x} - e^{3ix}$

$= e^{2x}(\cos 3x + i \sin(-3x))$

$= e^{2x}(\cos 3x - i \sin 3x)$

Solusi umum yang berkaitan dengan akar-akar komplek ini adalah :

$Y = c_1 e^{2x}(\cos 3x + i \sin 3x) + c_2 e^{2x}(\cos 3x - i \sin 3x)$

$= e^{2x}\big((c_1 + c_2)\cos 3x + i(c_1 - c_2)\sin 3x\big)$

$Y = e^{2x}(C \cos 3x + D \sin 3x)$

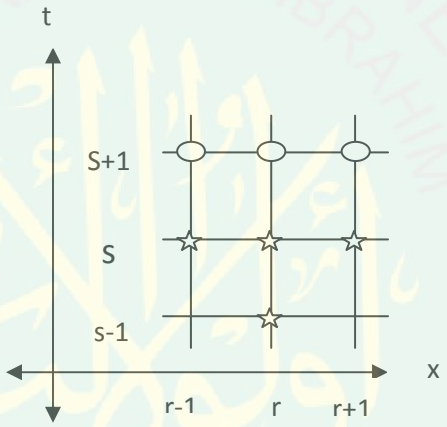
dimana $C = c_1 + c_2, D = i(c_1 + c_2)$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

2.7 Penyelesaian Numerik Persamaan Diferensial Parsial

2.7.1 Metode Euler Eksplisit

Metode euler eksplisit merupakan pengembangan dari metode euler, karena skema tersebut menggunakan dua interval waktu untuk mendapatkan nilai titik yang beru seperti gamabar 2,2. Metode ini merupakan modifikasi dari FTCS (*Forward Time-Centered Space*) dimana untuk turunan temporal didekati dengan beda maju dan turunan spasial didekati dengan beda pusat.



Gambar 2.2 stensil skema euler eksplisit

Jelas bahwa skema tersebut memiliki orde kesalahan pemotongan $(\Delta t^2, \Delta x^2)$, eksplisit, dua langkah, sehingga memerlukan perlakuan khusus untuk memulai, yaitu untuk menghitung nilai-nilai di tingkat waktu kedua (u^2) diperlukan nilai-nilia u^0 dan u^1. Padahal yang diberikan biasanya hanya u^0. Nilai awal tambahan u^1 harus ditentukan dengan menggunakan skema satu langkah (Suryanto, 2005).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

2.7.2 Metode Numerik

Metode numerik adalah teknik yang digunakan untuk memformulasikan persoalan matematik sehingga dapat dipecahkan dengan operasi perhitungan atau aritmatika biasa (tambah, kurang, kali, dan bagi). Metode artinya cara, sedangkan numerik artinya angka. Jadi metode numerik secara harfiah berarti cara berhitung dengan menggunakan angka-angka.perbedaan atara metode numerik dengan metode analitik terletak ada dua hal, yaitu:

1. Penyelesaian dengan menggunakan metode numerik selalu berbentuk angka, sedangkan untuk metode analitik menghasilkan soluai dalam bentuk fungsi matematik yang selanjutnya dievaluasi untuk menghasilkan nilai dalam bentuk angka.
2. Metode numerik hanya memperoleh solusi yang menghampiri atau mendekati solusi sejati sehingga dinamakan solusi hampiran (*approximation*), namun solusi hampiran dapat dibuat seteliti mungkin. Solusi hampiran jelas tidak tepat sama dengan solusi sejati, sehingga ada selisih antara keduanya. Selisih inilah yang disebut dengan galat (*error*) (Munir, 2006).

Pada penyelesaian numerik, kita menggunakan metode beda hingga, dimana metode beda hingga adalah metode yang memanfatkan deret Taylor untuk mendekati nilai turunannya. Pendekatan turunan menggunakan rumusan beda hingga yang dapat dilakukan dari kiri, kanan atau tengah yang akan digunakan untuk menentukan nilai fungsi pada titik tertentu yang dikenal dengan beda maju, beda mundur dan beda pusat (Ross, 1984).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

1. Pendekatan Beda Maju untuk Turunan Pertama

Misalkan u adalah suatu fungsi dari variabel spasial x dan variabel temporal t, dengan $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ adalah turunan parsial u terhadap x, maka deret Taylor dari u di titik $x_0 + h$ adalah sebagai berikut:

$u(x_0 + h, t) =$

$$u(x_0, t) + hu_x(x_0, t) + \frac{h^2}{2!}u_{xx}(x_0, t) + \frac{h^3}{3!}u_{xxx}(x_0, t) + \frac{h^4}{4!}u_{xxxx}(\xi, t) \quad (2.17)$$

Untuk suatu $x_0 < \xi < x_0 + h$

Berdasarkan persamaan (2.17), u_x dapat dinyatakan sebagai

$$u_x(x_0, t) = \frac{u(x_0+h,t)-u(x_0,t)}{h} - \frac{h}{2}u_{xx}(\xi, t) \quad (2.18)$$

Jika diambil suatu grid r untuk variabel spasial x, grid s untuk variabel temporal t, $h = \Delta x$ dan $u(x = r\Delta x, t = s\Delta t) = u_r^s$ maka pesamaan (2.18) menjadi

$$(u_x)_r^s = \frac{(u_{r+1}^s - u_r^s)}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2}u_{xx}(\xi) \quad (2.19)$$

Jika Δx semakin mengecil maka

$$(u_x)_r^s \approx \frac{u_{r+1}^s - u_r^s}{\Delta x} \quad (2.20)$$

Persamaan (2.20) adalah pentuk pendekatan beda maju untuk turunan pertama dengan kesalahan pemotongan Δx (Sahid, 2004).

2. Pendekatan Beda Mundur untuk Turunan Pertama

Jika pendekatan peda maju di atas didapatkan dari ekspansi deret Taylor nilai fungsi u di titik $x_0 + h$ akan menghasilkan suatu pendekatan beda mundur

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$u(x_0 - h, t) = u(x_0, t) - hu(x_0, t) + \frac{h^2}{2!}u_{xx}(x_0, t) + \frac{h^3}{3!}u_{xxx}(x_0, t) + \frac{h^4}{4!}u_{xxxx}(\xi, t)$$

(2.21)

Untuk suatu $x_0 - h \leq \xi \leq x_0$

Berdasarkan persamaan (2.21), u_x dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$u_x(x_0, t) = \frac{u(x_0,t) - u(x_0 - h,t)}{2} + \frac{h}{2}u_{xx}(\xi, t) \quad (2.22)$$

Dengan cara seperti pada beda maju maka didapatkan suatu pendekatan turunan pertama yang dikenal dengan pendekatan mundur dengan kesalahan pemotongan berorde Δx, yaitu

$$(u_x)_r^s \approx \frac{u_r^s - u_{r-1}^s}{\Delta x}. \quad (2.23)$$

3. Pendekatan Beda Pusat untuk Turunan Pertama

Pendekatan beda pusat terhadap turunan pertama diperoleh dengan cara mengurangkan persamaan (2.17) dengan persamaan (2.23) yaitu:

$$u(x_0 + h, t) - u(x_0 - h, t) = 2hu_x(x_0, t) + \frac{h^3}{3!}u_{xxx}(\xi, t) \quad (2.24)$$

Berdasarkan persamaan (2.22), u_x dapat dinyatakan sebagai

$$u_x(x_0, t) = \frac{u_x(x_0+h,t) - u(x_0 - h,t)}{2h} + \frac{h^2}{3!}u_{xxx}(\xi, t) \quad (2.25)$$

Dengan pelakuan yang sama , diperoleh

$$(u_x)_r^s = \frac{u_{r+1}^s - u_{r-1}^s}{2\Delta x} + \frac{\Delta x^2}{3}u_xxx(\xi) \quad (2.26)$$

Untuk Δx yang kecil, didapatkan pendekatan beda pusat untuk turunan pertama dengan orde kesalahan pemotongan Δx^2, yaitu

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$(u_x)_r^s \approx \frac{u_{r+1}^s - u_{r-1}^s}{2\Delta x}. \quad (2.27)$$

2.7.3 Matiks Tridiagonal

Matiks tridiagonal adalah matiks bujursangkar yang seluruh elemn bukan 0 (nol) berada di sekitar elemen diagonal, sementara alemen lainnya bernilai 0 (nol). Sebagi contoh diberikan matiks *A* sebagai berikut

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 8 & -7 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

Salah satu algoritma yang digunakan dalam penyelesaian bentuk matiks adalah algoritma Thomas. Algoritma Thomas sangat cocok untuk menyelesaikan persamaan linier simultan yang dapat dibentuk menjadi matiks tridiagonal.

Algoritma proses dekomposisis athomas:

1. Mendapatkan matiks [L] dan [U]
2. Menyelesaikan [L]{y}={b}
3. Menyelesaikan [U]{x}={z}

Berdasarkan sistem persamaan linier (SPL):

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23} = b_2$

$a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34} = b_3$

$a_{43}x_3 + a_{44}x_4 + a_{45} = b_4$

$\ddots \quad \vdots$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$a_{nn-1}x_{n-1} + a_{nn} = b_n \tag{2.28}$$

Dengan mengunakan notasi matiks, sistem persamaan di atas (2.28) dapat dituliskan:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1n_2} & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & a_{nn-1} & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix} \tag{2.29}$$

Pada sistem tridiagonal di atas tampak bahwa mayoritas dari elemen pada koefisien matiksnya adalah nol. Untuk sistem tridiagonal ini, digunakan tiga vaektor a, d dan c untuk menyimpan nilai elemen yang bukan nol sepanjang diagonal mayor dan sub-diagonalnya sehingga matiks di atas menjadi:

$$\begin{bmatrix} d_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & d_2 & c_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & d_3 & c_3 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & d_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & a_n & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix} \tag{2.30}$$

A $\quad$ x $\quad$ b

2.8 Batas Kemampuan Manusia dalam Al-Qur'an

Dalam Al-Qur'an surah al-Baqarah ayat 286 Allah SWT berfirman:

لَا يُكَلِّفُ ٱللَّهُ نَفْسًا إِلَّا وُسْعَهَا ۚ لَهَا مَا كَسَبَتْ وَعَلَيْهَا مَا ٱكْتَسَبَتْ ۗ رَبَّنَا لَا تُؤَاخِذْنَآ إِن نَّسِينَآ أَوْ أَخْطَأْنَا ۚ رَبَّنَا وَلَا تَحْمِلْ عَلَيْنَآ إِصْرًا كَمَا حَمَلْتَهُۥ عَلَى ٱلَّذِينَ مِن

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

قَبۡلِنَاۚ رَبَّنَا وَلَا تُحَمِّلۡنَا مَا لَا طَاقَةَ لَنَا بِهِۦۖ وَٱعۡفُ عَنَّا وَٱغۡفِرۡ لَنَا وَٱرۡحَمۡنَآۚ أَنتَ

مَوۡلَىٰنَا فَٱنصُرۡنَا عَلَى ٱلۡقَوۡمِ ٱلۡكَٰفِرِينَ ٢٨٦

Artinya: *Allah tidak membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya. ia mendapat pahala (dari kebajikan) yang diusahakannya dan ia mendapat siksa (dari kejahatan) yang dikerjakannya. (mereka berdoa): "Ya Tuhan kami, janganlah Engkau hukum kami jika kami lupa atau kami tersalah. Ya Tuhan kami, janganlah Engkau bebankan kepada kami beban yang berat sebagaimana Engkau bebankan kepada orang-orang sebelum kami. Ya Tuhan kami, janganlah Engkau pikulkan kepada kami apa yang tak sanggup kami memikulnya. beri ma'aflah Kami; ampunilah Kami; dan rahmatilah kami. Engkaulah penolong kami, Maka tolonglah kami terhadap kaum yang kafir."*(Q.S.al-Baqarah: 286)

Penekanan tentang batas kemampuan manusia terletak pada awal ayat tersebut yaitu,

لَا يُكَلِّفُ ٱللَّهُ نَفۡسًا إِلَّا وُسۡعَهَاۚ

Artinya: *Allah tidak membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya*

Dalam tafsir al-Maragi kata *at-Takliif* (التكلف) diartikan kewajiban yang mempunyai beban atau bobot dan kata *al-Wus'u* (الو سع) diartikan batas kekuatan manusia tanpa menyusahkan atau merepotkan dirinya. Oleh karena itu dikatakan bahwa ayat ini menerangkan bahwa Allah tidak membebani seorang melainkan hanya sebatas kemampuannya, yang mungkin dilakukan olehnya (Al-Maragi, 1974: 143-148). Hal ini merupakan karunia dan rahmat Allah. Ayat yang maknanya sama adalah firman Allah:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

يُرِيدُ ٱللَّهُ بِكُمُ ٱلْيُسْرَ وَلَا يُرِيدُ بِكُمُ ٱلْعُسْرَ.

Artinya: *Allah menghendaki kemudahan bagimu, dan tidak menghendaki kesukaran bagimu.*(Q.S.al-Baqarah: 185)

Dalam tafsir al-Qurthubi lebih lengkap dijelaskan bahwa kata *at-Takliif* (التكلف) (pembebanan) adalah suatu yang memberatkan seseorang. Terbebani sesuatu artinya adalah menanggung atau menahan beban terebut. Makna ini disampaikan oleh al Jauhari. Sedangkan kata وسعها adalah kesungguhan, kemampuan dan kesanggupan. Sehingga pada ayat ini dijelaskan bahwasanya Allah memberitahukan bahwa dari awal diturunkannya ayat pertama, hamba-hambanya tidak pernah dibebani dengan suatu ibadah, entah ini yang dilakuakn dengan anggota badan yang terlihat ataupun yang tidak terlihat, kecuali pembebanan itu masih dapat dilakukan oleh mereka. Untuk kata يككف , sebenarnya kata ini memerlukan dua objek (*maf'ul*) sekaligus, namun pada ayat ini salah satu objek tersebut tidak disebutkan. Perkiraan yang seharusnya adalah: Allah SWT tidak membebani seseorang dengan ibadah ataupun yang lainnya. Karena Allah dengan kenikmatan dan kasih saying-Nya kepada hamba-Nya (Al-Qurthubi, 2008: 959-956).

Dalam tafsir ibnu Katsir ditambahkan bahwa ayat inlah yang menghapus berat beban yang dirasakan oleh para sahabat Nabi, yaitu ayat (وان تبدوا مافي انضكم اوتخفوه يحاسيكم به الله) *"Dan jika kamu melahirkan apa yang ada dalam hatimu atau kamu menyembunyikan, niscaya Allah membuat perhitungan denganmu tentang perbuatan itu."* Maksudnya, meskipun Dia menghisab dan

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

meminta pertanggungjawaban, namun Allah tidak mengadzab melainkan kemampuan untuk menolak bisikan atau godaan syaitan. Apabila manusia tidak mempunyai kemampuan itu maka beban itu tidak akan diberiakn kepada manusia (al-Mubarak, 2006: 102-103). Atau dengan kata lain, seperti yang dijelaskan pada tafsir al-Qur'anul Majid an-Nur, bahwa Allah hanya akan mengadzab seseorang yang diberikan pekerjaan tetapi tidak dikerjakan (ash-Shiddieqy, 2000: 513).

Tafsir al-Aisar menyatakan bahwa ayat ini menerangkan dalam mencapai tujuan hidup itu manusia diberi beban oleh Allah SWT sesuai batas kesanggupannya, mereka diberi pahala lebih dari yang telah diusahakannnya dan mendapat siksa seimbang dengan kejahatan yang telah dilakukannya. Agama Islam adalah agama yang tidak memberati manusia dengan beban yang berat dan sukar. Mudah, ringan dan tidak sempit adalah asa pokok dari agama Islam. Hal ini merupakan saah satu dari lemah-lembut serta kasih-sayang-Nya kepada makhluk-Nya (al-Jazairi, 2006: 488-491). Sesuai dengan firman Allah:

وَمَا جَعَلَ عَلَيۡكُمۡ فِي ٱلدِّينِ مِنۡ حَرَجٖ

Artinya: *.....dia sekali-kali tidak menjadikan untuk kamu dalam agama suatu kesempitan.....*

Dan firman Allah SWT:

يُرِيدُ ٱللَّهُ أَن يُخَفِّفَ عَنكُمۡۚ وَخُلِقَ ٱلۡإِنسَٰنُ ضَعِيفٗا

Artinya: *Allah hendak memberikan keringanan kepadamu[286], dan manusia dijadikan bersifat lemah.*

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Dalam tafsir *fi-zhilalil qur'an* dikatakan bahwa setiap tugas yang diberikan oleh Allah adalah sesuai dengan batas kemampuan manusia. Walaupun aka nada saat di mana manusia merasa berat melaksanakannya, tetapi itu bukanlah karena baban terebut berat. Tetapi itu merupakan kelemahan dari manusia itu sendiri. Dengan melipatgandakan semangat dan meningkatkan tekad, semua itu akan dapat diatasi. Sebab, semua tugas dibebankan masih dalam lingkup kemampuan (Qutb, 2001: 141).

Ditambahkan dari tafsir Al-Maragi bahwa ayat ini mendorong manusia agar mengerjakan perbuatan yang baik serta menunaikan kewajiban-kewajiaban yang telah ditetapkan oleh agama. Ayat ini member peringatan bahwa perbuatan baik itu adalah perbuatan yang mudah dikerjakan manusia karena sesuai dengan watak dan tabiatnya, karena ada kegembiraan dan kebahagiaan dalam mengerjakannya, sedang perbuatan yang jahat adalah perbuatan yang sukar dikerjakan menusia karena tidak sesuai dengan watak dan tabiatnya, karena ada keberatan dan kesusahan dalam mengerjakannya (al-Maragi, 1974: 148).

Masalah nilai batas dalam matematika adalah dengan melibatkan suatu batas untuk suatu persamaan diferensial parsial atau sistem persamaan diferensial parsial baik linier atau tidak linier dalam suatu batas daerah tertentu (bounded region). Dalam hal ini batas-batas daerah dinyatakan dalam suatu interval$0 \leq x \leq l$, jika masalah yang dihadapi adalah kasus satu dimensi. Solusi awal dan solusi umum persamaan diferensial parsial harus terdefinisi atau sahih di dalam atau pada batas

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

sistem atau daerah. Sehingga baik solusi analitik atau solusi numerik secara keseluruhan harus terdefinisi dengan baik pada batas dan syarat batas sistem.

Selanjutnya telah diketahui bahwa manusia mempunyai kemampuan terbatas sesuai dengan ukuran yang diberikan oleh Allah kepadanya. Makhluk ini, misalnya, tidak dapat terbang. Ini merupakan salah satu ukuran atau batas kemampuan yang dianugerahkan Allah kepadanya. Ia tidak mampu melampauinya, kecuali jika ia menggunakan akalnya untuk menciptakan satu alat, namun akalnya pun, mempunyai ukuran yang tidak mampu dilampaui. Sebagaimana diterangkan pada firman Allah berikut

فَلَآ أُقۡسِمُ بِمَا تُبۡصِرُونَ ٣٨ وَمَا لَا تُبۡصِرُونَ ٣٩

Artinya: *Maka Aku bersumpah dengan apa yang kamu lihat. Dan dengan apa yang tidak kamu lihat. (Q.S. al-Haqqah: 38-39)*

Di sisi lain, manusia berada di bawah hukum-hukum Allah sehingga segala yang dilakukan pun tidak terlepas dari hukum-hukum yang telah mempunyai kadar dan ukuran tertentu. Hanya saja karena hukum-hukum tersebut cukup banyak, dan manusia diberi kemampuan memilih maka manusia dapat memilih yang mana di antara takdir yang ditetapkan Tuhan terhadap alam yang dipilihnya. Di sinilah pentingnya pengetahuan dan perlunya ilham atau petunjuk Ilahi.

Dari paparan di atas, maka dapat dilihat bahwa ada korelasi antara ayat 286 dari surah al-Baqarah yang membahas tentang batas kemampuan manusia dengan

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

bahasan masalah nilai batas pada matematika. Suatu permasalahan pada matematika, tidak dapat mengerjakan tanpa batasan. Karena interpretasinya akan sulit diperoleh jika permasalahan tersebut tidak terdefinisi dengan jelas begitu juga dengan manusia, Allah memberikan ujian sesuai dengan kemampuannya karena jika tidak terdefinisi dengan jelas dalam artian tidak diketahui dengan jelas karena telah sampai pada batas kemampuan manusia, maka ujian tersebut akan sulit untuk diselesaikan.

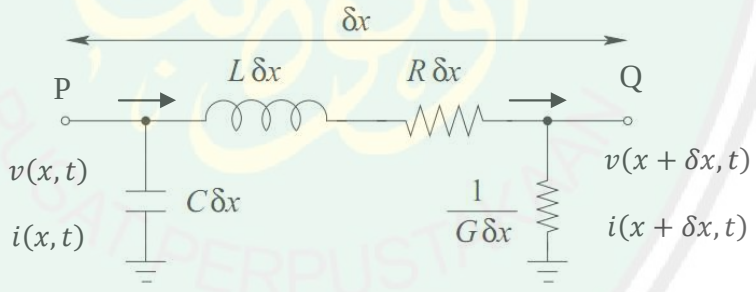
CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Analisis Brownian Motion Persamaan Sinyal Pengiriman Pesan

Model persamaan sinyal pengiriman pesan, dapat dikonstruksi dengan asumsi-asumsi bahwa δx merupakan panjang elektrikal kabel, dimana R satua (Ω) merupakan hambatan per unit pada panjang elektrikal kabel dan L satuan $(Henry)$ merupakan induktans per unit pada panjang elektrikal kabel. Serta, aliran akan mengalir pada daerah pengiriman pesan dielektrikal kabel, dimana terdapat C satuan $(farad)$ yang merupakan kapasitas per unit pada panjang elektrikal kabel dan $G = \frac{1}{R}$ satuan $(\mho)$ merupakan konduktansi per unit pada panjang elektrikal kabel.

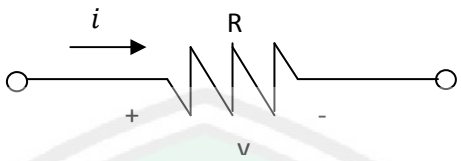


Gambar 3.1: alur pegiriman pesan.

Elemen rangkaiaan yang digunakan untuk menyatakan disipasi tenaga paling lazim dijelaskan dengan mengharuskan tegangan yang melalui elemen tersebut adalah berbanding langsung dengan arus yang melalui elemen tersebut, yang dinyatakan sebagai berikut:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$v = i \cdot R \tag{3.1}$$



Gambar 3.2: reperentasi skematis dari resistansi

dimana:

$i(x,t)$ = arus yang dinyatakan dalam Ampere dengan $i = j\frac{\delta x}{A}$ dan i fungsi dalam x dan t.

R = hambatan dalam ohm (Ω) dengan $R = \rho\frac{\delta x}{A}$

$v(x,t)$ = tegangan merupakan fungsi dalam x dan t.

ρ = tahanan jenis

j = rapat arus listrik

Persamaan (2.4) memberikan tegangan yang melalui sebuah resistansi yang dinyatakan dalam arusnya. Hubungan sebaliknya yang memberikan arus yang dinyatakan dalam tegangan seringkali sama atau lebih besar gunanya (atau nilainya) dalam kasus khas. Hukum Ohm seringkali dinyatakan sebagai:

$$i = G \cdot v \tag{3.2}$$

dimana $G = \frac{1}{R}$

Kebalikan resistansi G dinamakan konduktansi dan diukur dalam *mho* ($\mho$).

Selanjutnya, pengaliran arus listrik kawat tahanan sepanjang δx gambar 1, mengakibatkan persamaan (3.1) dan (3.2) dapat dinyatakan kembali sebagai berikut:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$V = i \cdot R\delta x \tag{3.3}$$

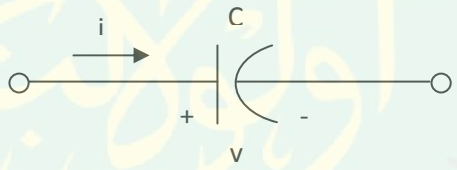
$$i = v \cdot G\delta x \tag{3.4}$$

Elemen rangkaiaan listrik yang digunakan untuk menyatakan penyimpanan muatan dan, karenanya maka digunakan untuk menyatakan tenaga yang tersimpan dalam muatan listrik, maka arus yang melalui elemen tersebut adalah sebanding dengan turunan tegangan melalui elemen tersebut sehingga dapat dijelaskan sebagai berikut:

$$i = C\frac{dv}{dt}. \tag{3.5}$$

Dengan memecahkan persamaan (3.5) diperoleh:

$$\frac{1}{C}\int idt = v. \tag{3.6}$$



Gambar 3.3: reperentasi skematis dari kapasitans

dimana:

i = arus dalam Ampere

C = kapasitas (sifat penyimpanan muatan satuan *farad* (F))

Selanjutnya dengan cara analog, maka pengaliran arus listrik kawat tahanan sepanjang δx gambar 1, mengakibatkan persamaan (3.6) dapat dinyatakan kembali sebagai berikut:

$$i = C\frac{dv}{dt} \cdot \delta x. \tag{3.7}$$

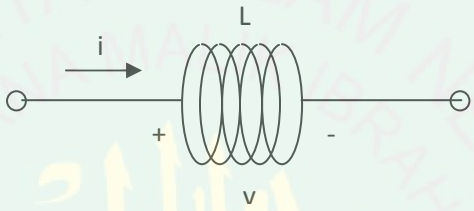
CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Elemen rangkaiaan yang digunakan untuk menyatakan tenaga yang tersimpan dalam sebuah magnet akan didefinisikan oleh hubungan

$$v = L\frac{di}{dt}. \tag{3.8}$$

Dengan memecahakan persamaan (3.8), maka diperoleh:

$$\frac{1}{L}\int vdt = i. \tag{3.9}$$



Gambar 3.4: reperentasi skematis dari induktans

dimana :

$L =$ induktansi dalam *Henry* (H)

Tegangan v dalam persamaan (3.8) adalah penurunan tegangan dalam arus dan dapat dianggap melawan pertambahan arus.

Selanjutnya, pengaliran arus listrik kawat tahanan sepanjang δx gambar 1, berakibat pada persamaan (3.8) yaitu:

$$v = L\frac{di}{dt}\cdot \delta x. \tag{3.10}$$

Dengan memperhatikan gambar 1, maka persamaan $v(x,t)$ pada suatu partikel yang bergerak ke kanan sebesar δx dan yang dipengaruhi oleh:

1. Hambatan: $i \cdot R\delta x$ (3.3)
2. Induksi: $\frac{\partial i}{\partial t}\cdot L\delta x$ (3.10)

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Sehinggap potensial listrik dari titik P pada $v(x,t)$ ke titik Q pada $v(x+\delta x,t)$ dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$v(x+\delta x,t) \approx v(x,t) - i \cdot R\delta x - \frac{\partial i}{\partial t} \cdot L\delta x \qquad (3.11)$$

Persamaan (3.9) diturunkan terhadap x dan menganggap δx adalah jarak tak nol bernilai $\delta x \to 0$ didapatkan:

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{v(x+\delta x,t)-v(x,t)}{\delta x} = -\lim_{\delta x \to 0} i \cdot R\delta x - \lim_{\delta x \to 0} \frac{\partial i}{\partial t} \cdot L\delta x$$

Sehingga diperoleh:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -Ri - L\frac{\partial i}{\partial t} \qquad (3.12)$$

Persamaan (3.10) diturunkan terhadap x diperoleh:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -R\frac{\partial i}{\partial x} - L\frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} \qquad (3.13)$$

Persamaan (3.10) diturunkan terhadap t diperoleh:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} = -R\frac{\partial i}{\partial t} - L\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \qquad (3.14)$$

Dengan memperhatikan gambar 1, maka persamaan $i(x,t)$ pada suatu partikel yang bergerak ke kanan sebesar δx dan yang dipengaruhi oleh:

1. Capasitas: $\frac{\partial v}{\partial t} \cdot C\delta x$ (3.7)
2. Konduksi: $v \cdot G\delta x$

(3.4)

Sehinggap potensial listrik dari titik P pada $i(x,t)$ ke titik Q pada $i(x+\delta x,t)$ dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$i(x+\delta x,t) \approx i(x,t) - v \cdot G\delta x - \frac{\partial v}{dt} \cdot C\delta x \qquad (3.15)$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Persamaan (3.15) diturunkan terhadap x dan lim $\delta x \to 0$ sehingga menghasilkan:

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{i(x+\delta x,t)-i(x,t)}{\delta x} = -\lim_{\delta x \to 0} v \cdot G\delta x - \lim_{\delta x \to 0} \frac{\partial v}{\partial t} \cdot C\delta x$$

Sehingga diperoleh:

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -Gv - C\frac{\partial v}{\partial t}. \tag{3.16}$$

Persamaan (3.16) diturunkan terhadap x diperoleh:

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = -G\frac{\partial v}{\partial x} - C\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t}. \tag{3.17}$$

Persamaan (3.16) diturunkan terhadap t diperoleh:

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} = -G\frac{\partial v}{\partial t} - C\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \tag{3.18}$$

Jika $\frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t}$ pada persamaan (3.18) disubsitusikan pada persamaan (3.13) maka diperoleh:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -R\frac{\partial i}{\partial x} - L\left(-G\frac{\partial v}{\partial t} - C\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right) \tag{3.19}$$

Dan jika $\frac{\partial i}{\partial x}$ pada persamaan (3.16) disubsitusikan pada persamaan (3.19) maka:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -R\left(-Gv - C\frac{\partial v}{\partial t}\right) - L\left(-G\frac{\partial v}{\partial t} - C\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right)$$

$$= RGv + RC\frac{\partial v}{\partial t} + LG\frac{\partial v}{\partial t} + LC\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

yakni:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = (GR)v + (RC + GL)\frac{\partial v}{\partial t} + LC\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \tag{3.20}$$

Jika $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t}$ pada persamaan (3.14) disubsitusikan pada persamaan (3.17) maka :

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = -G\frac{\partial v}{\partial x} - C\left(-R\frac{\partial i}{\partial t} - L\frac{\partial^2 i}{\partial t^3}\right). \tag{3.21}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Dan jika $\frac{\partial v}{\partial x}$ pada persamaan (3.12) disubsitusikan pada persamaan (3.21) maka :

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = -G\left(-Ri - L\frac{\partial i}{\partial t}\right) - C\left(-R\frac{\partial i}{\partial t} - L\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}\right)$$

$$= GRi + GL\frac{\partial i}{\partial t} + CR\frac{\partial i}{\partial t} + CL\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}$$

yakni:

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = (GR)i + (RC + GL)\frac{\partial i}{\partial t} + LC\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}. \tag{3.22}$$

Jadi persamaan (3.20) dan persamaan (3.22) dibuat dalam bentuk sistem matiks, sebagai berikut:

$$\begin{cases} LC\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -(RC + GL)\frac{\partial v}{\partial t} - (GR)v \\ LC\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = -(RC + GL)\frac{\partial i}{\partial t} - (GR)i \end{cases} \tag{3.23}$$

Dengan menganggap fungsi $u = u(v, i)^T$ dan bentuk matiks dari kedua persamaan (3.23) didapatkan:

$$\begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\left(\begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix}\right)\frac{\partial u}{\partial t} - \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}u \tag{3.24}$$

$$LC\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -(RC + GL)\frac{\partial u}{\partial t} - GRu. \tag{3.25}$$

Pada Persamaan (3.25) semua ruas dikalikan dengan $\frac{1}{LC}$, sehingga menghasilkan persamaan pengiriman pesan yaitu:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{LC}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C}\right)\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{GR}{LC}u \tag{3.26}$$

yang merupakan persamaan sinyal linier orde dua.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

3.2 Bentuk Kanonik Persamaan Sinyal Pengiriman Pesan

Dengan memperhatikan kaidah-kaidah umum persamaan kanonik di atas maka dapat dikonstruksi pola untuk persamaan sinyal pengiriman pesan.

Pandang persamaan sinyal pengiriman pesan sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{LC}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C}\right)\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{GR}{LC}u \tag{3.26}$$

Persamaan pengiriman pesan memenuhi syarat tipe hiperbolik, karena:

Dari persamaan di atas dapat diketahui bahwa:

$A = -\frac{1}{LC}$

$B = 0$

$C = 1$

Maka : $B^2(x,t) - A(x,t)C(x,t) = 0 - \left(-\frac{1}{LC}\right)(1) = \frac{1}{LC}$ (tipe hiperbolik)

Selanjutnya dicari $\omega^+(x,t)$ dan $\omega^-(x,t)$ yang merupakan akar persamaan tersebut dimana $\omega^+(x,t) \neq \omega^-(x,t)$ sehingga dapat dinyatakan:

$$\omega^{\pm}(x,t) = \frac{-B(x,t) \pm \sqrt{B^2(x,t) - A(x,t)C(x,t)}}{A(x,t)} \tag{3.27}$$

Persamaan (3.27) dapat ditulis kembali sebagai berikut:

$$\omega^{\pm}(x,t) = \frac{0 \pm \sqrt{\frac{1}{LC}}}{-\frac{1}{LC}} = \pm\left(-LC\sqrt{\frac{1}{LC}}\right) \tag{3.28}$$

sehingga:

$$\omega^{+} = LC\sqrt{\frac{1}{LC}} \tag{3.29}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\omega^{-} = -LC\sqrt{\frac{1}{LC}} \tag{3.30}$$

dan persamaan (3.29) dan (3.30) dapat diturunkan terhadap x dan t sehingga diperoleh:

$$\omega_x^{+} = 0, \omega_t^{+} = 0 \tag{3.31}$$

$$\omega_x^{-} = 0, \omega_t^{-} = 0 \tag{3.32}$$

dan dengan asumsi bahwa

$\frac{dt}{dx} = -\omega^{\pm}(x,t)$

maka persamaan (3.28) menjadi:

$-\omega^{\pm}(x,t) = \pm\left(LC\sqrt{\frac{1}{LC}}\right)$ sehingga $\frac{dt}{dx} = \pm\left(LC\sqrt{\frac{1}{LC}}\right)$

dan mengakibatkan

$$-\omega^{+}(x,t) = -LC\sqrt{\frac{1}{LC}} \tag{3.33}$$

$$-\omega^{-}(x,t) = LC\sqrt{\frac{1}{LC}} \tag{3.34}$$

Selanjutnya menentukan $\xi(x,t)$ dan $\eta(x,t)$ yaitu:

1. Menentukan $\xi(x,t)$

Untuk menentukan $\xi(x,t)$ maka dapat diasumsikan bahwa:

$$\frac{dt}{dx} = -\omega^{+}(x,t) \tag{3.35}$$

dengan menggunakan persamaan (3.33) maka:

$$\frac{dt}{dx} = -LC\sqrt{\frac{1}{LC}} \tag{3.36}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

sehingga:

$$dt = -LC\sqrt{\frac{1}{LC}}\,dx \tag{3.37}$$

maka:

$$dt + LC\sqrt{\frac{1}{LC}}\,dx = 0 \tag{3.38}$$

kemudian kedua ruas diintegralkan terhadap x sehingga didapatkan:

$$\int dt + \int LC\sqrt{\frac{1}{LC}}\,dx = \int 0$$

$$t + LC\sqrt{\frac{1}{LC}}\,x = \xi(x,t). \tag{3.39}$$

Maka persamaan (3.39) dapat diturunkan terhadap x diperoleh:

$$\xi_x = LC\sqrt{\frac{1}{LC}} \tag{3.40}$$

sehingga persamaan (3.39) dapat diturunkan terhadap t diperoleh:

$$\xi_t = 1 \tag{3.41}$$

dimana $\xi(x,t)$ adalah konstanta.

2. Menentukan $\eta(x,t)$

Untuk menentukan $\eta(x,t)$maka dapat diasumsikan bahwa:

$$\frac{dt}{dx} = -\omega^{-}(x,t) \tag{3.42}$$

Dengan menggunakan persamaan (3.36) maka:

$$\frac{dt}{dx} = LC\sqrt{\frac{1}{LC}} \tag{3.43}$$

sehingga:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$dt = LC\sqrt{\frac{1}{LC}}\,dx \tag{3.44}$$

maka:

$$dt - LC\sqrt{\frac{1}{LC}}\,dx = 0 \tag{3.45}$$

kemudian kedua ruas diintegralkan terhadap x sehingga didapatkan:

$$\int dt - \int LC\sqrt{\frac{1}{LC}}\,dx = \int 0$$

yakni:

$$t - LC\sqrt{\frac{1}{LC}}\,x = \eta(x,t). \tag{3.46}$$

Maka persamaan (3.46) dapat diturunkan terhadap x dan diperoleh:

$$\eta_x = -LC\sqrt{\frac{1}{LC}} \tag{3.47}$$

sehingga persamaan (3.46) dapat diturunkan terhadap t dan diperoleh:

$$\eta_t = 1 \tag{3.48}$$

dimana $\eta(x,t)$adalah konstanta.

Selanjutnya kita akan menghitung turunan dari $\xi'(x,t)$ dan $\eta'(x,t)$ dengan mensubsitusikan persamaan (3.40), (3.41), (3.47), dan (3.48) sehingga akan didapatkan:

1. $\xi'(x,t) \quad = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial t} \cdot \frac{dt}{dx} = 0$

$$= LC\sqrt{\frac{1}{LC}} + 1\frac{dt}{dx} = 0$$

$$= LC\sqrt{\frac{1}{LC}} + \frac{dt}{dx} = 0 \tag{3.49}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

2. $\eta'(x,t) \quad = \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \cdot \frac{dt}{dx} = 0$

$$= -LC\sqrt{\frac{1}{LC}} + 1\frac{dt}{dx} = 0$$

$$= -LC\sqrt{\frac{1}{LC}} + \frac{dt}{dx} = 0 \qquad (3.50)$$

Jika diberikan koordinat karakteristik $\xi(x,t), \eta(x,t)$ dan Jika $u = u(\xi, \eta) = u\big(\xi(x,t), \eta(x,t)\big)$ maka dapat dihitung:

1. Perhitungan untuk $\frac{\partial u}{\partial x}$ sehingga:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \left(LC\sqrt{\frac{1}{LC}}\right) + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \left(-LC\sqrt{\frac{1}{LC}}\right)$$

$$= \left(LC\sqrt{\frac{1}{LC}}\frac{\partial u}{\partial \xi} - LC\sqrt{\frac{1}{LC}}\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) \qquad (3.51)$$

2. Perhitungan untuk $\frac{\partial u}{\partial t}$ sehingga:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot (1) + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot (1)$$

$$= \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \qquad (3.52)$$

3. Perhitungan untuk $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ sehingga:

Karena diketahui $\frac{\partial u}{\partial x} = \left(LC\sqrt{\frac{1}{LC}}\frac{\partial u}{\partial \xi} - LC\sqrt{\frac{1}{LC}}\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$, maka:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(LC\sqrt{\frac{1}{LC}}\frac{\partial u}{\partial \xi} - LC\sqrt{\frac{1}{LC}}\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(LC\sqrt{\frac{1}{LC}}\frac{\partial}{\partial \xi} - LC\sqrt{\frac{1}{LC}}\frac{\partial}{\partial \eta}\right)\cdot u$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(LC\sqrt{\frac{1}{LC}}\frac{\partial}{\partial \xi} - LC\sqrt{\frac{1}{LC}}\frac{\partial}{\partial \eta}\right)$$

$$= \left(LC\sqrt{\frac{1}{LC}}\frac{\partial u}{\partial \xi} - LC\sqrt{\frac{1}{LC}}\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\cdot\left(LC\sqrt{\frac{1}{LC}}\frac{\partial}{\partial \xi} - LC\sqrt{\frac{1}{LC}}\frac{\partial}{\partial \eta}\right)$$

$$= LC\,\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - LC\,\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - LC\,\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + LC\,\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

$$= LC\,\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2LC\,\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + LC\,\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

$$= LC\,u_{\xi\xi} - 2LC\,u_{\xi\eta} + LC\,u_{\eta\eta} \qquad (3.53)$$

4. Perhitungan untuk $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ sehingga:

   Karena diketahui $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}$, maka:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}\right)\cdot u$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

$$= u_{\xi\xi} - 2\,u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} \qquad (3.54)$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Subsitusikan persamaan (3.51), (3.52), (3.53) dan (3.54) ke persamaan sinyal pengiriman pesan (3.26) agar diperoleh bentuk kanonik persamaan pengiriman pesan tersebut maka:

Pandang persamaan sinyal pengiriman pesan (3.26)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{LC}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C}\right)\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{GR}{LC}u.$$

Maka didapatkan:

$$\left(u_{\xi\xi} - 2\,u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}\right) - \frac{1}{LC}\left(LC\,u_{\xi\xi} - 2LC\,u_{\xi\eta} + LC\,u_{\eta\eta}\right) =$$

$$-\left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C}\right)\left(u_{\xi} + u_{\eta}\right) - \frac{GR}{LC}u(\xi,\eta). \qquad (3.55)$$

Persamaan (3.55) di atas dapat dijabarkan sebagai berikut:

$$u_{\xi\xi} - 2\,u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta} - u_{\xi\xi} + 2\,u_{\xi\eta} - u_{\eta\eta} =$$

$$-\left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C}\right)\left(u_{\xi} + u_{\eta}\right) - \frac{GR}{LC}u(\xi,\eta). \qquad (3.56)$$

Dengan menjabarkan persamaan (3.56) dipeloleh:

$$-\left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C}\right)\left(u_{\xi} + u_{\eta}\right) - \frac{GR}{LC}u(\xi,\eta) = 0. \qquad (3.57)$$

Jadi bentuk kanonik persamaan sinyal pengiriman pesan adalah:

$$-\left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C}\right)\left(u_{\xi} + u_{\eta}\right) - \frac{GR}{LC}u(\xi,\eta) = 0. \qquad (3.58)$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

3.3 Penyelesaian Analitik Persamaan Sinyal Pengiriman Pesan

3.3.1 Penyelesaian Partikular Masalah Nilai Awal Persamaan Sinyal Pengiriman Pesan

Pada persamaan sinyal pengiriman pesan (3.26), untuk menentukan solusi partikular masalah nilai awal dengan asumsi nilai awal adalah $v(x,0) = f(x)$ dan $\frac{\partial v}{\partial t}(x,0) = g(x)$ dan dengan menggunakan metode *d'Alembret's Solution* maka di dapatkan solusi masalah nilai awal dari persamaan sinyal pengiriman pesan adalah:

Pandang persamaan pengiriman pesan berikut:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \frac{1}{LC}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + \left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C}\right)\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \left(\frac{GR}{LC}\right)u(x,t) = 0 \qquad (3.26)$$

Dalam hal ini persamaan (3.26) merupakan persamaan diferensial parsial hiperbolik, selanjutnya dengan prosedur faktorisasi operator untuk persamaan gelombang ruas kirinya dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \sqrt{\frac{1}{LC}}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \sqrt{\frac{1}{LC}}\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,t) = -\left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C}\right)\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \left(\frac{GR}{LC}\right)u \qquad (3.59)$$

dari persamaan (3.59) dapat dibuat fungsi sebarang $w(x,t)$ yaitu:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \sqrt{\frac{1}{LC}}\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,t) = w(x,t). \qquad (3.60)$$

Subsitusikan persamaan (3.60) ke persamaan (3.26), maka dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan (3.60) tersebut sebagai berikut:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \sqrt{\frac{1}{LC}}\frac{\partial}{\partial x}\right)w(x,t) = -\left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C}\right)\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \left(\frac{GR}{LC}\right)u. \qquad (3.61)$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Proses tersebut di atas akan menghasilkan sistem persamaan diferensial orde satu yaitu:

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} - \sqrt{\frac{1}{LC}}\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x,t) = w(x,t) \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \sqrt{\frac{1}{LC}}\frac{\partial}{\partial x}\right) w(x,t) = -\left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C}\right)\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \left(\frac{GR}{LC}\right) u \end{cases} \quad (3.62)$$

Pada kondisi awal (ketika $t = 0$), diberikan $u(x,0) = f(x,0) = f(x)$ dan $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x,0) = g(x)$ untuk suatu fungsi-fungsi $f(x), g(x)$ sebarang. Hal ini mengakibatkan persamaan (3.60) dapat dinyatakan kembali sebagai berikut:

$$g(x) - \sqrt{\frac{1}{LC}} f'(x) = w(x,t)$$

sehingga:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \sqrt{\frac{1}{LC}}\frac{\partial u}{\partial x}\right) = g(x) - \sqrt{\frac{1}{LC}} f'(x). \quad (3.63)$$

Jika pada kondisi awal gelombang diasumsikan *turbulen* dalam fungsi sin τ sehingga secara parametric dapat dinyatakan sebagai berikut:

$x_1 = \sin \tau$

Sehingga ketika $t = 0$ maka dapat dinyatakan

$$u(x,0) = u(\sin \tau, 0) = f(\sin \tau) \quad (3.64)$$

dengan memperhatikan kembali persamaan (3.64), dimana persamaan tersebut merupakan persamaan diferensial parsial orde satu, maka dapat disimpulkan bahwa:

$$\frac{dt}{ds} = 1 \text{ dan } \frac{dx}{ds} = -\sqrt{\frac{1}{LC}} \text{ dan } \frac{du}{ds} = g(x) - \sqrt{\frac{1}{LC}} f'(x) \quad (3.65)$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

dengan mengintegralkan semua komponen persamaan (3.65) diperoleh:

$$t = s,\ x = -\sqrt{\frac{1}{LC}}s, \text{ dan } U = \int_{s=0}^{s}\left(g(x) - \sqrt{\frac{1}{LC}}f'(x)\right)ds. \qquad (3.66)$$

Oleh karena itu bersama dengan kondisi awalnya, diperoleh:

$$x_2 = \sin\tau - \sqrt{\frac{1}{LC}}s \text{ atau } \sin\tau = x_2 + \sqrt{\frac{1}{LC}}s \qquad (3.67)$$

sehingga dari persamaan (3.67) diperoleh:

$$u(x,0) = u(\tau,0) = f(\sin\tau) = f\left(x_2 + \sqrt{\frac{1}{LC}}s\right) \qquad (3.68)$$

selanjutnya jika kedua ruas peersamaan (3.67) di tambah dengan $-\sqrt{\frac{1}{LC}}s$, maka:

$$x_2 - \sqrt{\frac{1}{LC}}s = \sin\tau - \sqrt{\frac{1}{LC}}s - \sqrt{\frac{1}{LC}}s$$

$$x_2 - \sqrt{\frac{1}{LC}}s = \sin\tau - 2\sqrt{\frac{1}{LC}}s \qquad (3.69)$$

karena telah diketahui pada persamaan (3.66) bahwa $t = s$ maka persamaan (3.69) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$x_2 - \sqrt{\frac{1}{LC}}t = \sin\tau - 2\sqrt{\frac{1}{LC}}t \qquad (3.70)$$

dari persamaan (3.66) untuk $U = \int_{s=0}^{s}\left(g(x) - \sqrt{\frac{1}{LC}}f'(x)\right)ds$, maka

$$U = \int_{t_1=0}^{t_2=t=s}\left(g(x_1) - \sqrt{\frac{1}{LC}}f'(x_1)\right)ds + f(x_2). \qquad (3.71)$$

Subsitusikan persamaan (3.64) dan (3.70) ke persamaan (3.71) sehingga diperoleh:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$U = \int_{t_1=0}^{t_2=t=s} \left(g(\sin\tau) - \sqrt{\frac{1}{LC}} f'(\sin\tau) \right) ds + f\left(\sin\tau - 2\sqrt{\frac{1}{LC}} t \right). \quad (3.72)$$

Jika diasumsikan $\lambda = \sin\tau - 2\sqrt{\frac{1}{LC}} t$, mengakibatkan $\frac{d\lambda}{dt} = -2\sqrt{\frac{1}{LC}}$

maka mengakibatkan $dt = \frac{d\lambda}{-2\sqrt{\frac{1}{LC}}}$ maka $-2\sqrt{\frac{1}{LC}} dt = d\lambda$

sehingga persamaan (3.72) dapat dinyatakan kembali sebagai berikut:

$$U = \int_{t_1=0}^{t_2=t=s} \left(g(\sin\tau) - \sqrt{\frac{1}{LC}} f'(\sin\tau) \right) dt + f\left(\sin\tau - 2\sqrt{\frac{1}{LC}} t \right). \quad (3.73)$$

Persamaan (3.73) di atas dapat dijabarkan sebagai berikut:

$$U = -\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{LC}}} \int_{\lambda_1=0}^{\lambda_2=\sin\tau-2\sqrt{\frac{1}{LC}}t} g(\sin\tau) d\lambda + \frac{1}{2} \int_{\lambda_1=0}^{\lambda_2=\sin\tau-2\sqrt{\frac{1}{LC}}t} f'(\sin\tau) d\lambda +$$

$$f\left(\sin\tau - 2\sqrt{\frac{1}{LC}} t \right) \quad (3.74)$$

dengan menjabarkan persamaan (3.74) didapatkan:

$$U = -\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{LC}}} G(\lambda) + \frac{1}{2} f(\lambda) \Bigg|_{\substack{\lambda_2 = \sin\tau - 2\sqrt{\frac{1}{LC}}t \\ \lambda_1 = 0}} + f\left(\sin\tau - 2\sqrt{\frac{1}{LC}} t \right) \quad (3.75)$$

$$U = -\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{LC}}} \left[G \sin\left(\tau - 2\sqrt{\frac{1}{LC}} t \right) - G(\sin 0) \right] + \frac{1}{2} \left[f \sin\left(\tau - 2\sqrt{\frac{1}{LC}} t \right) - \right.$$

$$\left. f(\sin 0) \right] + f\left(\sin\tau - 2\sqrt{\frac{1}{LC}} t \right) \quad (3.76)$$

atau

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$U = -\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{LC}}} G\left(\sin\tau - 2\sqrt{\frac{1}{LC}}t\right) + \frac{3}{2} f\left(\sin\tau - 2\sqrt{\frac{1}{LC}}t\right) \quad (3.77)$$

yang merupakan penyelesaian masalah nilai awal bidang gelombang pada saat $t = 0$ disumbu x.

3.3.2 Penyelesaian Partikular Masalah Nilai Batas Persamaan Sinyal Pengiriman Pesan

Sehingga pada persamaan sinyal pengiriman pesan yang konstan pada saat $t = 0$. Maka bentuk penyelesaian partikular masalah nilai batas dari persamaan sinyal pengiriman pesan sebagai berikut:

Persamaan sinyal pengiriman pesan:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \frac{1}{LC}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = -\left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C}\right)\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{GR}{LC}u(x,t) \quad (3.26)$$

Dengan memberikan syarat batas

$u(0,t) = u(l,t) = 0, \forall t \geq 0$ dan syarat awal $u(x,0) = f(x)$ dan $\forall 0 \leq x \leq l$

Misal $u(x,t) = X(x)T(t)$ maka persamaan (3.26) dapat dinyatakan dalam bentuk sebagai berikut:

$$X(x)T\,(t)'' - \frac{1}{LC}\,X''(x)T(t) = -\left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C}\right)X(x)T'(t) - \left(\frac{GR}{LC}\right)X(x)T(t) \quad (3.78)$$

Persamaan (3.78) dibagi dengan $u(x,t) = X(x)T(t)$, menjadi:

$$\frac{T''(t)}{T(t)} - \frac{1}{LC}\,\frac{X''(x)}{X(x)} = -\left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C}\right)\frac{T'(t)}{T(t)} - \left(\frac{GR}{LC}\right)$$

atau

$$\frac{T''(t)}{T(t)} + \left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C}\right)\frac{T'(t)}{T(t)} + \left(\frac{GR}{LC}\right) = \frac{1}{LC}\,\frac{X''(x)}{X(x)} \quad (3.79)$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Kedua ruas dari persamaan (3.79) pasti bernilai sama yaitu konstanta k sehingga dapat dipisah sebagai fungsi dalam x saja dan t saja, yaitu:

$$\frac{1}{LC}\frac{X"(x)}{X(x)} = k \tag{3.80}$$

$$\frac{T"(t)+\left(\frac{R}{L}+\frac{G}{C}\right)T'(t)+\left(\frac{GR}{LC}\right)T(t)}{T(t)} = k \tag{3.81}$$

Persamaan (3.80) dapat ditulis kembali menjadi:

$$X"(x) - kLCX(x) = 0 \tag{3.82}$$

Persamaan (3.82) ekuivalen dengan bentuk:

$m^2 - kLC = 0$

Atau

$$m^2 = klc \tag{3.83}$$

Sehingga akar-akar kerakteristik dari persamaan (3.83) yaitu:

$$m_{12} = \pm\sqrt{kLC} \tag{3.84}$$

Kasus 1, ketika akar-akar sama, yaitu peda saat $k = 0$ mengakibatkan solusi umum pada persamaan (3.84) yaitu:

$$X(x) = d_1 e^{\sqrt{kLC}\,x} + x d_2 e^{-\sqrt{kLC}\,x} \tag{3.85}$$

Dengan memperhatikan syarat batas untuk $0 \leq x \leq l$, sehingga diperoleh:

$X(0) = d_1 e^{\sqrt{kLC}\,x} + x d_2 e^{-\sqrt{kLC}\,x} = 0$

$= d_1 e^0 = 0$

$= d_1 = 0$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Maka didapatkan:

$$d_1 = 0 \tag{3.86}$$

$$X(l) = d_1 e^{\sqrt{kLC}\,x} + x d_2 e^{-\sqrt{kLC}\,x} = 0$$

$$= d_1 e^0 + l d_2 e^0 = 0$$

$$= d_1 + l d_2 = 0 \tag{3.87}$$

Subsitusikan persamaan (3.86) ke persamaan (3.87) maka diperoleh:

$$l d_2 = 0$$

atau

$$d_2 = 0 \tag{3.88}$$

Oleh karena itu, dari persamaan (3.86) dan (3.88) maka dapat disimpulakan bahwa jika $k = 0$ maka $d_1 = d_2 = 0$, artinya $X(x)$ identik dengan 0 (nol). Pada kasus ini, maka dapat disimpulakan bahwa tidak terdapat solusi *nontrivial* pada kasus ini.

Kasus 2, ketika akar-akar berbeda, untuk $k > 0$ mengakibatkan solusi umum pada persamaan (3.84) yaitu:

$$X(x) = d_1 e^{\sqrt{kLC}\,x} + d_2 e^{-\sqrt{kLC}\,x} \tag{3.89}$$

Dengan memperhatikan syarat batas untuk $0 \leq x \leq l$, sehingga diperoleh:

$$X(0) = d_1 e^{\sqrt{kLC}\,x} + d_2 e^{-\sqrt{kLC}\,x} = 0$$

$$= d_1 e^0 + d_2 e^0 = 0$$

$$= d_1 + d_2 = 0$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Maka didapatkan:

$$d_2 = -d_1 \tag{3.90}$$

$$X(l) = d_1 e^{\sqrt{kLC}\,x} + d_2 e^{-\sqrt{kLC}\,x} = 0$$

$$= d_1 e^{\sqrt{kLC}\,l} + d_2 e^{-\sqrt{kLC}\,l} = 0 \tag{3.91}$$

Subsitusikan persamaan (3.90) ke persamaan (3.91) maka didapatkan:

$$X(l) = d_1 e^{\sqrt{kLC}\,l} - d_1 e^{-\sqrt{kLC}\,l} = 0$$

$$= d_1 \left(e^{\sqrt{kLC}\,l} - e^{-\sqrt{kLC}\,l}\right) = 0 \tag{3.92}$$

Dari persamaan (3.92) diperoleh dua kesimpulan, yaitu:

$$d_1 = 0 \tag{3.93}$$

atau

$$e^{\sqrt{kLC}\,l} - e^{-\sqrt{kLC}\,l} = 0 \tag{3.94}$$

Persamaan (3.94) dapat dijabarkan menjadi:

$$e^{\sqrt{kLC}\,l} = e^{-\sqrt{kLC}\,l}$$

$$e^{\sqrt{kLC}\,l} = \frac{1}{e^{\sqrt{kLC}\,l}}$$

$$e^{2\sqrt{kLC}\,l} = 1$$

Sehingga didapatkan:

$$2\sqrt{kLC}\,l = 0 \tag{3.95}$$

Oleh karena itu dari persamaan (3.90) dan (3.89) dapat disimpulkan bahwa tidak terdapat solusi *nontrivial* pada kasus ini.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Kasus 3: ketika akar-akar kompleks, untuk $k < 0$ mengakibatkan solusi umum pada persamaan (3.84) yaitu:

Pandang persamaan (3.84):

$m_{12} = \pm\sqrt{kLC}$

Sehingga mengakibatkan:

$m_1 = \sqrt{-kLC}$ maka $m_1 = kLCi$ (3.96)

$$X_1 = e^{(kLCi)x} \quad (3.97)$$

Dengan menggunakan rumus *euler*,

$$e^{(kLCi)\,x} = \cos kLC\ x + i \sin kLC\ x \quad (3.98)$$

Subsitusikan persamaan (3.98) ke persamaan (3.97) didapatkan:

$$X_1 = \cos kLC\ x + i \sin kLC\ x \quad (3.99)$$

Dengan cara yang analog,

$m_2 = -\sqrt{-kLC}$ maka $m_2 = -kLCi$ (3.100)

$$X_2 = e^{(-kLCi)x} \quad (3.101)$$

Dengan menggunakan rumus *euler*,

$$e^{(-kLCi)\,x} = \cos kLC\ x - i \sin kLC\ x \quad (3.102)$$

Subsitusikan persamaan (3.101) ke persamaan (3.102) didapatkan:

$$X_2 = \cos kLC\ x - i \sin kLC\ x \quad (3.103)$$

Sehingga solusi umum untuk akar-akar kompleks yaitu:

$$X(x) = c_1X_1 + c_2X_2 \quad (3.104)$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Subsitusikan persamaan (3.103) dan (3.99) ke persamaan (3.104) maka diperoleh:

$$X(x) = c_1(\cos kLC\ x + i \sin kLC\ x) + c_2(\cos kLC\ x - i \sin kLC\ x) \quad (3.105)$$

Persamaan (3.105) dapat dijabarkan sebagai berikut:

$$X(x) = (c_1 + c_2)\cos kLC\ x + i(c_1 - c_2)\sin kLC\ x \quad (3.106)$$

Misalkan:

$c_1 + c_2 = d_1$

$i(c_1 - c_2) = d_2$

Maka persamaan (3.106) dapat ditulis kembali sebagai berikut:

$$X(x) = d_1 \cos kLC\ x + d_2 \sin kLC\ x \quad (3.107)$$

Dengan memperhatikan syarat batas untuk $0 \leq x \leq l$, sehingga diperoleh:

$X(0) = d_1 \cos kLC\ x + d_2 \sin kLC\ x = 0$

$= d_1 \cos 0 + d_2 \sin 0 = 0$

$= d_1(1) + d_2(0) = 0$

$= d_1 = 0$

Maka didapatkan:

$$d_1 = 0 \quad (3.108)$$

$X(l) = d_1 \cos kLC\ x + d_2 \sin kLC\ x = 0$

$$= d_1 \cos kLC\ l + d_2 \sin kLC\ l = 0 \quad (3.109)$$

Subsitusikan persamaan (3.108) ke persamaan (3.109) maka didapatkan:

$X(l) = (0)\cos kLC\ l + d_2 \sin kLC\ l = 0$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$= d_2 \sin kLC\ l = 0$

Maka didapatkan:

$$d_2 \sin kLC\ l = 0 \quad (3.110)$$

Dari persamaan (3.110) diperoleh:

$$d_2 = 0 \quad (3.111)$$

atau

$$\sin kLC\ l = 0 \quad (3.112)$$

Artinya $kLC\ l = n\pi$ diamana $\forall\ n = 0,1,2, \ldots$

Sedangkan $X(x)$ adalah solusi *nontrivial* pada persamaan (3.84) jika $d_2 \neq 0$ maka:

$k = \frac{n\pi}{LC\ l},\ \forall\ n = 0,1,2, \ldots$ disebut nilai eigen (3.113)

Sehingga solusi untuk persamaan (3.84) yaitu:

$$X_n(x) = a_n \sin \frac{n\pi x}{LCl}, \quad (3.114)$$

Dan sedangkan jika $d_1 \neq 0$ maka tidak ada solusi nontrivial pada $X(x)$.

Pandang persamaan (3.81) yaitu:

$$\frac{T''(t)+\left(\frac{R}{L}+\frac{G}{C}\right)T'(t)+\left(\frac{GR}{LC}\right)T(t)}{T(t)} = k$$

Subsitusikan persamaan (3.113) ke persamaan (3.81) maka didaptkan sebagai berikut:

$$\frac{T''(t)+\left(\frac{R}{L}+\frac{G}{C}\right)T'(t)+\left(\frac{GR}{LC}\right)T(t)}{T(t)} = \frac{n\pi}{LCl} \quad (3.115)$$

Dengan menjabarkan persamaan (3.115) diperoleh:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$T''(t) + \left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C}\right) T'(t) + \left(\frac{GR}{LC}\right) T(t) = \frac{n\pi}{LCl} T(t)$$

atau

$$T''(t) + \left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C}\right) T'(t) + \left(\left(\frac{GR}{LC}\right) - \frac{n\pi}{LCl}\right) T(t) = 0 \quad (3.116)$$

Persamaan (3.116) ekuivalen dengan bentuk sebagai berikut:

$$m^2 + \left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C}\right) m + \left(\left(\frac{GR}{LC}\right) - \frac{n\pi}{LCl}\right) = 0 \quad (3.117)$$

Maka akar-akar karakteristik dari persamaan (3.117) yaitu:

$$m_{12} = \frac{-\left(\frac{R}{L}+\frac{G}{C}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{R}{L}+\frac{G}{C}\right)^2 - 4\,(1)\left(\left(\frac{GR}{LC}\right) - \frac{n\pi}{LCl}\right)}}{2(1)} \quad (3.118)$$

Dengan menjabarkan persamaan (3.118) diperoleh:

$$m_{12} = \frac{-\left(\frac{R}{L}+\frac{G}{C}\right) \pm \sqrt{\frac{R^2}{L^2} - 2\frac{GR}{LC} + \frac{G^2}{C^2} + 4\frac{n\pi}{LCl}}}{2} \quad (3.119)$$

Sehingga solusi umum dari persamaan (3.119) sebagai berikut:

$$T_n(x,t) = d_3 \cos\left(\frac{-\left(\frac{R}{L}+\frac{G}{C}\right) + \sqrt{\frac{R^2}{L^2} - 2\frac{GR}{LC} + \frac{G^2}{C^2} + 4\frac{n\pi}{LCl}}}{2}\right) t$$

$$+ d_4 \sin\left(\frac{-\left(\frac{R}{L}+\frac{G}{C}\right) - \sqrt{\frac{R^2}{L^2} - 2\frac{GR}{LC} + \frac{G^2}{C^2} + 4\frac{n\pi}{LCl}}}{2}\right) t \quad (3.120)$$

Dengan mensubsitusikan persamaan (3.114) dan (3.120) maka diperoleh:

$$u_n(x,t) = X_n(x) T_n(t)$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$u_n(x,t) = a_n \sin\frac{n\pi x}{LCl}\left[d_3 \cos\left(\frac{-\left(\frac{R}{L}+\frac{G}{C}\right)+\sqrt{\frac{R^2}{L^2}-2\frac{GR}{LC}+\frac{G^2}{C^2}+4\frac{n\pi}{LCl}}}{2}\right)t\right]$$

$$+b_n \sin\frac{n\pi x}{LCl}\left[d_4 \sin\left(\frac{-\left(\frac{R}{L}+\frac{G}{C}\right)-\sqrt{\frac{R^2}{L^2}-2\frac{GR}{LC}+\frac{G^2}{C^2}+4\frac{n\pi}{LCl}}}{2}\right)t\right] \quad (3.121)$$

dimana:

$$b_n = a_n d_3 \quad (3.122)$$

$$c_n = a_n d_4 \quad (3.123)$$

Dengan menjabarkan persamaan (3.121), dan mensubsitusikan persamaan (3.122) dan (3.123) maka didapatkan:

$$u_n(x,t) = \left(b_n \cos\left(\frac{-\left(\frac{R}{L}+\frac{G}{C}\right)+\sqrt{\frac{R^2}{L^2}-2\frac{GR}{LC}+\frac{G^2}{C^2}+4\frac{n\pi}{LCl}}}{2}\right)t\right)\sin\frac{n\pi x}{LCl}$$

$$+\left(c_n \sin\left(\frac{-\left(\frac{R}{L}+\frac{G}{C}\right)-\sqrt{\frac{R^2}{L^2}-2\frac{GR}{LC}+\frac{G^2}{C^2}+4\frac{n\pi}{LCl}}}{2}\right)t\right)\sin\frac{n\pi x}{LCl} \quad (3.124)$$

Berdasarkan fakta kombinasi linier dari solusi untuk persamaan pengiriman pesan dan kondisi batas terhadap solusi ini, kita anggap jumlah infinite dari fungsi di atas maka:

$$u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[b_n \cos\left(\frac{-\left(\frac{R}{L}+\frac{G}{C}\right)+\sqrt{\frac{R^2}{L^2}-2\frac{GR}{LC}+\frac{G^2}{C^2}+4\frac{n\pi}{LCl}}}{2}\right)t\right]\cdot \sin\frac{n\pi x}{LCl}$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[c_n \sin\left(\frac{-\left(\frac{R}{L}+\frac{G}{C}\right)+\sqrt{\frac{R^2}{L^2}-2\frac{GR}{LC}+\frac{G^2}{C^2}+4\frac{n\pi}{LCl}}}{2}\right)t\right]\cdot \sin\frac{n\pi x}{LCl} \quad (3.125)$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[-b_n \frac{-\left(\frac{R}{L}+\frac{G}{C}\right)+\sqrt{\frac{R^2}{L^2}-2\frac{GR}{LC}+\frac{G^2}{C^2}+4\frac{n\pi}{LCl}}}{2} \sin\left(\frac{-\left(\frac{R}{L}+\frac{G}{C}\right)+\sqrt{\frac{R^2}{L^2}-2\frac{GR}{LC}+\frac{G^2}{C^2}+4\frac{n\pi}{LCl}}}{2}\right)t + c_n \frac{-\left(\frac{R}{L}+\frac{G}{C}\right)+\sqrt{\frac{R^2}{L^2}-2\frac{GR}{LC}+\frac{G^2}{C^2}+4\frac{n\pi}{LCl}}}{2} \cos\left(\frac{-\left(\frac{R}{L}+\frac{G}{C}\right)+\sqrt{\frac{R^2}{L^2}-2\frac{GR}{LC}+\frac{G^2}{C^2}+4\frac{n\pi}{LCl}}}{2}\right)t\right] \sin\frac{n\pi x}{LCl} \quad (3.126)$$

Dengan memperhatikan kondisi awal dan kondisi batas untuk persamaan (3.125) dan (3.126), maka didapatkan:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{LCl} = f(x),\ 0 \le x \le l \quad (3.127)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\left(\frac{R}{L}+\frac{G}{C}\right)+\sqrt{\frac{R^2}{L^2}-2\frac{GR}{LC}+\frac{G^2}{C^2}+4\frac{n\pi}{LCl}}}{2}\right) c_n \sin\frac{n\pi x}{LCl} = g(x), \quad (3.128)$$

Sekarang kita mempunyai solusi masalah pada persamaan pengiriman sinyal pesan pada kondisi awal dan kondisi batas, ke penentuan masalah ekspektasi deret Fourier ke dalam bentuk persamaan (3.127) dan (3.128)

Misal:

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n \sin\frac{n\pi x}{LCl} \quad (3.129)$$

Dalam deret Faurier, dengan periode $T = 2l$ didapatkan:

$$z_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} h(x) \sin\frac{n\pi x}{LCl}\,dx \quad (3.130)$$

$$z_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} h(x) \sin\frac{n\pi x}{LCl}\,dx \quad (3.131)$$

Jika $h(x) = f(x)$, maka $z_n = b_n$ Jadi $b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x) \sin\frac{n\pi x}{LCl}\,dx$. (3.132)

Sedangkan jika $h(x) = g(x)$, maka $z_n = c_n\left(\frac{-\left(\frac{R}{L}+\frac{G}{C}\right)+\sqrt{\frac{R^2}{L^2}-2\frac{GR}{LC}+\frac{G^2}{C^2}+4\frac{n\pi}{LCl}}}{2}\right)$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

sehingga:

$$c_n\left(\frac{-\left(\frac{R}{L}+\frac{G}{C}\right)+\sqrt{\frac{R^2}{L^2}-2\frac{GR}{LC}+\frac{G^2}{C^2}+4\frac{n\pi}{LCl}}}{2}\right)=\frac{2}{l}\int_0^l g(x)\sin\frac{n\pi x}{LCl}\,dx \qquad (3.133)$$

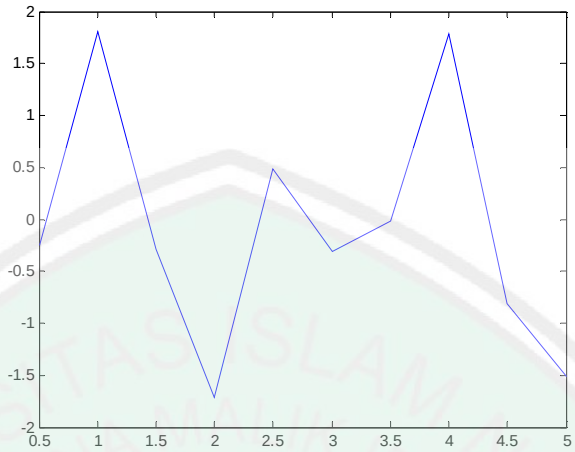
Dengan menjabarkan persamaan (3.133) didapatkan:

$$c_n=\frac{4}{\left(-\left(\frac{R}{L}+\frac{G}{C}\right)+\sqrt{\frac{R^2}{L^2}-2\frac{GR}{LC}+\frac{G^2}{C^2}+4\frac{n\pi}{LCl}}\right)l}\int_0^l g(x)\sin\frac{n\pi x}{LCl}\,dx \qquad (3.134)$$

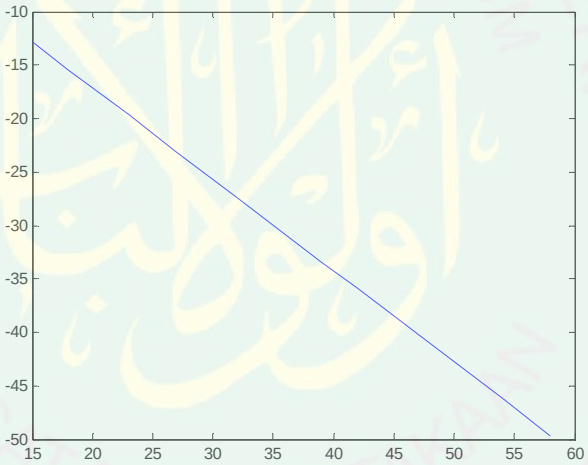
Jika kita memilih b_n dan c_n sehingga persamaan untuk kondisi awal maka ekspansi untuk $u(x,t)$ merupakan solusi formal untuk persamaan pengiriman pesan, masalah nilai awal dan masalah nilai batas. Jika ekspensi konvergen ke fungsi kontinu kedua turunan persial, maka solusi formal merupakan solusi sebenarnya.

Untuk mengetahui gambar dari solusi analitik persamaan sinyal pengiriman pesan, maka diimputkan pada MATLAB sebagai berikut: pada sumbu (u,t) untuk gambar 3.5 dan pada sumbu (u,t) untuk gambar 3.6, menghasilkan gambar di bawah ini:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG



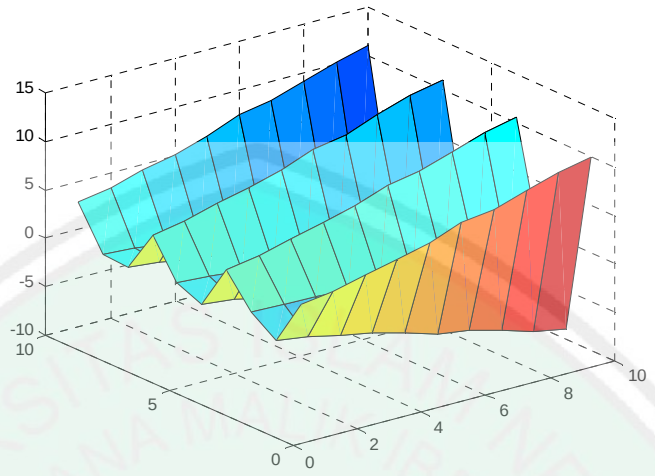
Gambar 3.5. Grafik solusi nilai batas bidang gelombang dari persamaan sinyal pengiriman pesan pada sumbu (x, u)



Gambar 3.6 Grafik solusi nilai batas bidang gelombang dari persamaan sinyal pengiriman pesan pada sumbu (t, u)

Sedangkan untuk gambar penampang gelombang pada sumbu (x, t, u) diimputkan *source cod*e pada MATLAB sebagai berikut:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG



Gambar 3.7 Grafik Solusi Batas Bidang Gelombang Dari Persamaan Sinyal Pengiriman Pesan Pada (u, x, t)

3.4 Penyelesaian Numerik Persamaan Sinyal Pengiriman Pesan

Pada persamaan sinyal pengiriman pesan (3.26) yang merupakan persamaan diferansial parsial satu dimensi orde dua dengan koefisien konstanta, akan dikonstruksi menjadi model sinyal pengiriman pesan terdiskritisasi dengan menggunakan metode *Euler Eksplisit*, dimana pada metode ini diterapkan metode beda hingga pusat dan maju, sehingga persamaan (3.26) akan menjadi:

Langkah 1

Menggunakan metode beda hingga sederhana yang merupakan pengembangan dari deret Taylor yang sudah dijelaskan pada sub bab sebelumnya yakni menurunkan persamaan (3.26).

Pandang persamaan sinyal pengiriman pesan:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x,t) - \frac{1}{LC}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,t) + \left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C}\right)\frac{\partial v}{\partial t}(x,t) - \left(\frac{GR}{LC}\right)v(x,t) = 0 \qquad (3.26)$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Maka konstruksi persamaan terdiskritisasi dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\frac{v_i^{m+1}-2v_i^m+v_i^{m-1}}{\Delta t^2}-\frac{1}{2LC}\left[\frac{v_{i-1}^{m+1}-2v_i^{m+1}+v_{i+1}^{m+1}}{\Delta x^2}+\frac{v_{i-1}^{m}-2v_i^{m}+v_{i+1}^{m}}{\Delta x^2}\right]+\left(\frac{R}{L}+\frac{G}{C}\right)\frac{v_i^{m+1}-V_i^{m-1}}{2\Delta t}-$$

$$\left(\frac{GR}{LC}\right)(v_i^{m+1}+v_i^m)=0 \qquad (3.135)$$

Dengan demikian, didapatkan pola terdeskritisasi dari persamaan (3.26) sebagai berikut:

$$v_i^{m+1}\left(\frac{1}{\Delta t^2}+\frac{1}{LC\Delta x^2}+\frac{\left(\frac{R}{L}+\frac{G}{C}\right)}{2\Delta t}+\frac{GR}{LC}\right)+v_i^m\left(-\frac{2}{\Delta t^2}+\frac{1}{LC\Delta x^2}+\frac{GR}{LC}\right)+v_i^{m-1}\left(\frac{1}{\Delta t^2}-\frac{\left(\frac{R}{L}+\frac{G}{C}\right)}{2\Delta t}\right)+$$

$$v_{i-1}^{m+1}\left(-\frac{1}{2LC\Delta x^2}\right)+v_{i+1}^{m+1}\left(-\frac{1}{2LC\Delta x^2}\right)+v_{i-1}^{m}\left(-\frac{1}{2LC\Delta x^2}\right)+v_{i+1}^{m}\left(-\frac{1}{2LC\Delta x^2}\right)=0 \quad (3.136)$$

dengan:

$$A=\frac{1}{\Delta t^2}-\frac{\left(\frac{R}{L}+\frac{G}{C}\right)}{2\Delta t}$$

$$B=-\frac{1}{2LC\Delta x^2}$$

$$C=-\frac{2}{\Delta t^2}+\frac{1}{LC\Delta x^2}+\frac{GR}{LC}$$

$$D=-\frac{1}{2LC\Delta x^2}$$

$$E=-\frac{1}{2LC\Delta x^2}$$

$$F=\frac{1}{\Delta t^2}+\frac{1}{LC\Delta x^2}+\frac{\left(\frac{R}{L}+\frac{G}{C}\right)}{2\Delta t}+\frac{GR}{LC}$$

$$G=-\frac{1}{2LC\Delta x^2}$$

Persamaan (3.136) dapat ditulis kembali menjadi:

$$Fv_i^{m+1}+Cv_i^m+Av_i^{m-1}+Ev_{i-1}^{m+1}+Gv_{i+1}^{m+1}+Bv_{i-1}^m+Dv_{i+1}^m=0 \qquad (3.137)$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

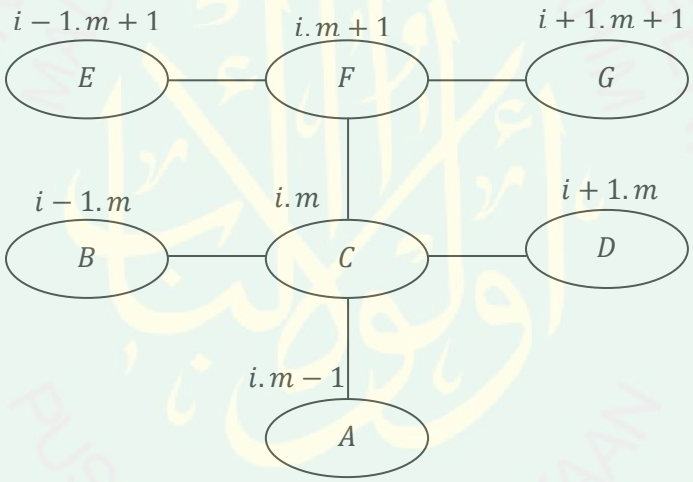
Sehingga didapatkan bentuk terdiskritisasi dari persamaan sinyal pengiriman pesan (3.26) yaitu:

$$Fv_i^{m+1}+Cv_i^m + Av_i^{m-1} + Ev_{i-1}^{m+1} + Gv_{i+1}^{m+1} + Bv_{i-1}^m + Dv_{i+1}^m = 0$$

Langkah 2

Menentukan pola iterasi pada persamaan (3.137) sehingga terbentuk suatu sistem persamaan diferensial biasa dalam bentuk matriks tridiagonal

Dari persamaan (3.137) dibuat pola perhitungan sebagi berikut:



Gambar 3.8 Molekul Komputasi Dari Metode Beda Hingga Sederhana.

Pada gambar 3.8 yang merukapan pola model sinyal pengiriman pesan yang telah didiskritisasi dapat dibentuk matiks tridiagonal sebagai berikut:

Penerapan persamaan (3.137) yang membentuk pola iterasi seperti gambar 2.2 pada suatu sistem berbentuk 8×8 $(\Delta x = 0{,}125)$ pada $i = 0,1,2,\dots,n-1,n$ akan memberikan suatu sistem persamaan diferensial biasa yaitu:

$$i = 0\ maka\ Au_0^{m-1} + Cu_0^m + Du_1^m = Fu_0^{m+1} + Gu_1^{m+1}$$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

$$i = 1\ maka\ Au_1^{m-1} + Bu_0^m + Cu_1^m + Du_2^m = Eu_0^{m+1} + Fu_1^{m+1} + Gu_2^{m+1}$$

$$i = 2\ maka\ Au_2^{m-1} + Bu_1^m + Cu_2^m + Du_3^m = Eu_1^{m+1} + Fu_2^{m+1} + Gu_3^{m+1}$$

$$i = 3\ maka\ \ Au_3^{m-1} + Bu_2^m + Cu_3^m + Du_4^m = Eu_2^{m+1} + Fu_3^{m+1} + Gu_4^{m+1}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$i = n-2\ maka\ \ Au_{n-2}^{m-1} + Bu_{n-3}^m + Cu_{n-2}^m + Du_{n-1}^m = Eu_{n-3}^{m+1} + Fu_{n-2}^{m+1} + Gu_{n-1}^{m+1}$$

$$i = n-1\ maka\ Au_{n-1}^{m-1} + Bu_{n-2}^m + Cu_{n-1}^m + Du_n^m = Eu_{n-2}^{m+1} + Fu_{n-1}^{m+1} + Gu_n^{m+1}$$

$$i = n\ maka\ Au_n^{m-1} + Bu_{n-1}^m + Cu_n^m = Eu_{n-1}^{m+1} + Fu_n^{m+1} \qquad (3.138)$$

Kemudian sistem persamaan tersebut dapat ditulis dalam bentuk matriks tridiagonal sebagai berikut:

$$A\begin{pmatrix} u_0^{m-1} \\ u_1^{m-1} \\ u_2^{m-1} \\ u_3^{m-1} \\ \vdots \\ u_{n-2}^{m-1} \\ u_{n-1}^{m-1} \\ u_n^{m-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C & D & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B & C & D & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B & C & D & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B & C & D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B & C & D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B & C & D \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0^m \\ u_1^m \\ u_2^m \\ u_3^m \\ \vdots \\ u_{n-2}^m \\ u_{n-1}^m \\ u_n^m \end{pmatrix} =$$

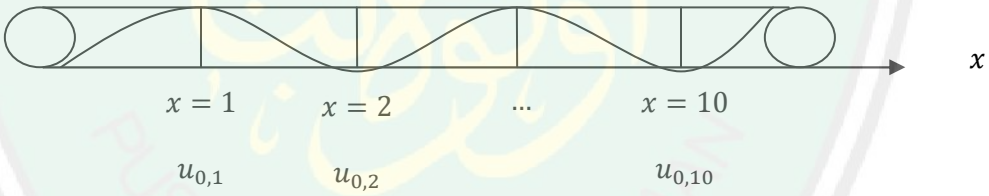
$$\begin{pmatrix} F & G & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E & F & G & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & F & G & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & F & G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E & F & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & F & G \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0^{m+1} \\ u_1^{m+1} \\ u_2^{m+1} \\ u_3^{m+1} \\ \vdots \\ u_{n-2}^{m+1} \\ u_{n-1}^{m+1} \\ u_n^{m+1} \end{pmatrix} \qquad (3.139)$$

Program untuk mensimulasikan persamaan (3.139) dapat dilihat di lampiran 4.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

3.5 Simulasi Data dan Analisis Galat untuk Penyelesaian Numerik Terhadap Penyelesaian Analitik Persamaan Sinyal Pengiriman Pesan

Untuk mensimulasikan persamaan sinyal pengiriman pesan jarak jauh (3.26) secara numerik dengan menggunakan metode *Euler Ekplisit* sehingga didapatkan persamaan (3.139), maka dalam skripsi ini diperlukan objek berbentuk layer. Selanjutnya pola iterasi dijalankan terhadap waktu (t) sehingga sistem terpartisi atas $\Delta x \to 0$ dan $\Delta t \to 0$. Oleh karena itu sistem terdefinisi sebagai persegi berukuran $m \times n, \forall\, m = n$ dengan m banyak partisi di sumbu x dan n banyak partisi waktu (t) dalam dimensi satu. Hal ini berarti diasumsikan gelombang sinyal merambat secara horizontal searah sumbu x pada level kurva *t*. Selanjutnya ditinjau pada suatu waktu (hanya untuk suatu level iterasi), kasus yang dimaksud dapat digambarkan sebagai berikut :



Gambar 3.9. Perambatan Sinyal satu dimensi searah sumbu x

Pada kasus di atas, simulasi program didasarkan pada pemberian nilai awal di semua titik grid pada suatu waktu tertentu (dalam hal ini $t = 0$). Data empirik diperoleh melalui simulasi ponsel dengan cara pengiriman pesan berdasarkan besar kapasitas pesan (dalam satuan kilo Bite, kB) yang dikirim dan durasi waktu *t* (dalam satuan detik) terkirimnya pesan tersebut. Dalam hal ini data diambil dengan besar

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

kapasitas pesan $\Delta x = 0.5$ kB dengan waktu yang diukur dalam detik yang bisa dilihat pada informasi pesan.

Untuk selanjutnya didefinisikan $\Delta x = u_i - u_{i-1}$, $\forall i = 1,2,\dots,10$. Selanjutnya hasil simulasi pengambilan data nilai awal u_i, $\forall\, i = 1,2,3,\dots,10$ dengan $t = 0$ dapat disajikan oleh tabel sebagai berikut:

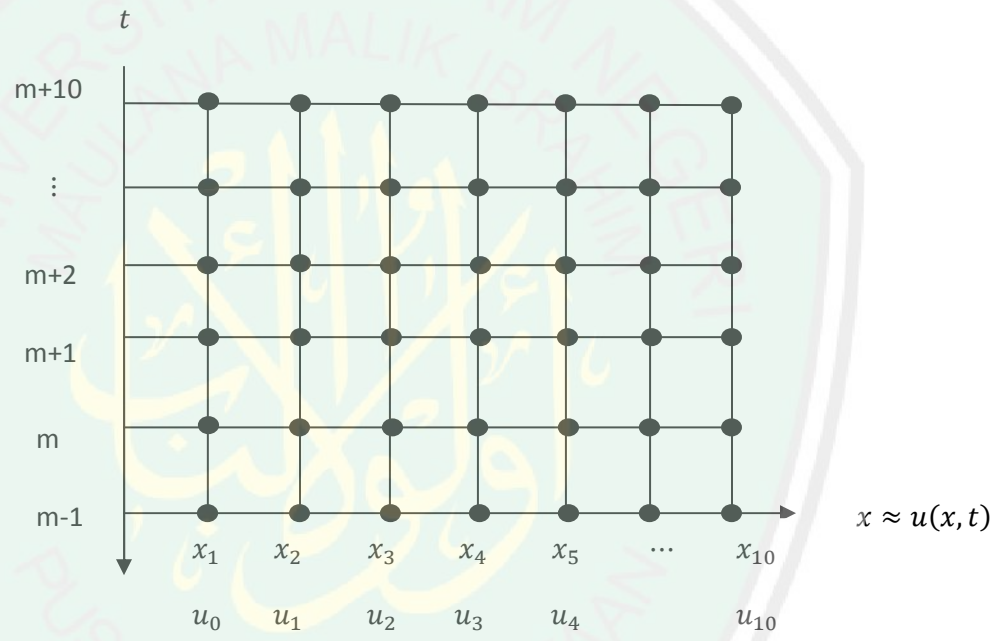
Tabel 3.1. Nilai Awal Di Semua Titik Grid

Iterasi ke-	Kuota data Δx (kB)	Durasi waktu t (detik)
1.	0.5	15
2.	1.0	18
3.	1.5	23
4.	2.0	27
5.	2.5	32
6.	3.0	39
7.	3.5	42
8.	4.0	48
9.	4.5	54
10.	5.0	58

Selanjutnya dengan mempertimbangkan iterasi dari waktu ke waktu (dengan menjalankan t), dan didefinisikan level waktu $t = [1,10]$ dalam detik. Dalam

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

simulasi pengambilan data pada penelitian ini didefinisikan $\Delta t = 1$ detik. Selanjutnya juga didefinisikan hambatan (R), kapasitas (C), konduktans (G) dan induktans (L) berturut-turut adalah $R = 0{,}12\ \Omega$, $C = 0{,}13\ F$, $G = 0{,}14\ \mho$ dan $L = 0{,}15\ H$. Sedangkan untuk nilai batas didefinisikan $u(1,t) = u(10,t) = 0$ maka kasus pada gambar 3.1 dapat diperluas sebagai berikut:



Gambar 3.10. Partisi Sistem Berdasarkan Level Waktu t

Kondisi awal yang dimaksud dalam skripsi ini adalah u_i yang secara fisis merupakan amplitudo penampang gelombang sinyal, sedangkan kondisi batas adalah nilai-nilai awal yang diberikan pada batas sistem.

Adapun asumsi yang digunakan dalam penyelesaian masalah untuk mencari amplitudo adalah pada kondisi awal diberikan amplitudo pada semua titik grid.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Gambaran permasalahan sinyal pengiriman pesan yang ditulis dalam skripsi ini untuk menghitung komponen-komponen amplitudo (u^{m+1}) dimana $m+1$ menunjukkan level (tingkat) iterasi.

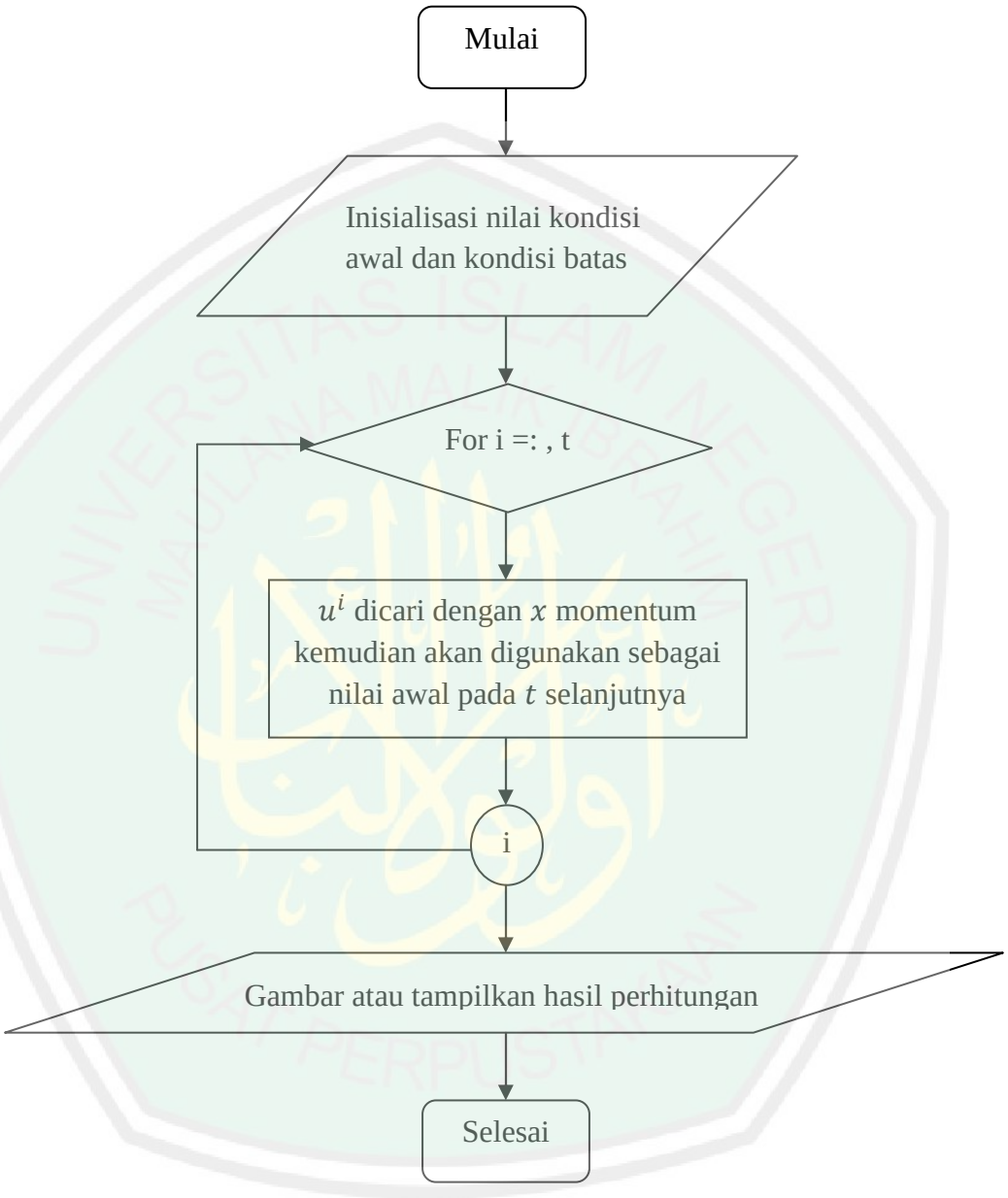
Prosedur iterasi dilakuakan dengan menjalankan pola itersi pada semua titik grid di gambar 3.2. Amplitudo pada batas-batas diasumsikan bernilai antara 0,5 kB sampai 5,0 kB, maka banyaknya pnyelesaiaan untuk amplitudo yang harus dihitung adalah komponen amplitudo sepanjang sumbu x yaitu u,

Berdasarkan penjelasan di atas, maka dapat konstruksi prosedur tahap-tahap iterasi untuk mendapatkan u_i^{m+1} dimana $m+1$ menunjukakn level waktu (tingkat) itersi di semua titik grid sebagai berikut:

1. Dibuat bentuk persamaan diskrit dari persamaan yang dipilih dengan metode beda hingga secara sederhana.
2. Didefinisikan kondisi awal dan kondisi batas pada semua titik grid.
3. Dibuat pola iterasinya di *surface* 2D.
4. Dibuat matriks-matriks untuk menyelesaikan persamaan tersebut dengan software MATLAB.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Flowchart secara umumnya adalah sebagai gambar berikut:



Gambar 3.11. *Flowchart* secara umum

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Listing program iterasi ditulis pada lampiran 4 diakhir pembahasan untuk melihat karakteristik u_i^m, $\forall\, m, i = 1,2,3,\ldots,10$ dapat dilihat hasil simulasi pada lampiran 1 beserta galat error pada lampiran 2.

3.6 Sinyal Pengiriman Pesan dalam Al-Qur'an

Sinyal pengiriman pesan adalah proses pengiriamn pesan yang bersifat tidak tampak dari titik A ke titik B yang disampaikan melalui perantara sinyal, dimana dalam proses tersebut dipengaruhi oleh hambatan (R), inductor (L), kapasitor (C) dan resistor (G) pada proses tersebut bergantung pada benyak sedikitnya pesan yang akan dikirim serta bergantung terhadap waktu.

Dalam Al-Qur'an tidak tergambar secara jelas tentang sinyal pengiriman pesan. Oleh karena itu, dapat kita gambarkan sinyal pengiriman pesan dalam Al-Qur'an surah asy-Syuara ayat 192-194 tentang proses turunnya Al-Qur'an, Allah SWT berfirman:

وَإِنَّهُۥ لَتَنزِيلُ رَبِّ ٱلۡعَٰلَمِينَ ١٩٢ نَزَلَ بِهِ ٱلرُّوحُ ٱلۡأَمِينُ ١٩٣ عَلَىٰ قَلۡبِكَ لِتَكُونَ مِنَ ٱلۡمُنذِرِينَ ١٩٤ بِلِسَانٍ عَرَبِيّٖ مُّبِينٖ ١٩٥ وَإِنَّهُۥ لَفِي زُبُرِ ٱلۡأَوَّلِينَ ١٩٦

Artinya: *Dan Sesungguhnya Al Quran Ini benar-benar diturunkan oleh* **Tuhan** *semesta Alam, Dia dibawa turun oleh Ar-Ruh Al-Amin (Jibril), Ke dalam hatimu (Muhammad) agar kamu menjadi salah seorang di antara orang-orang yang memberi peringatan,dengan bahasa Arab yang jelas, dan sesungguhnya Al-Qur'an itu benar-benar (tersebut) dalam kitab-kitab terdahulu* (Q.S. asy-Syuara: 192-194)

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Penekanan tentang sinyal pengiriman pesan tertelak pada ayat tersebut yaitu:

نَزَلَ بِهِ ٱلرُّوحُ ٱلۡأَمِينُ ﴿١٩٣﴾ عَلَىٰ قَلۡبِكَ

Artinya: "*Dan di bawa turun oleh Ar-Ruh Al-Amin (Jibril). Ke dalam* ***hatimu*** *(Muhammad).*

Dalam tafsir al-Qurthubi dijelaskan, *" Nazala dengan takhfiif (tanpa tasydid), demikian qira'ah Nafi', Ibnu Katsir dan Abu Amru.* Ulama lainnya membaca, "*Nazzala"* dengan *tasydid* بِهِ ٱلرُّوحُ ٱلۡأَمِين Dalam kedudukan *nashab* dan ini adalah pilihan Abu Hatim dan Abu Ubaid berdasarkan firman-Nya وَإِنَّهُۥ لَتَنزِيلُ yang menjadi mashda dari *nazala* .Bukti dari alasan (tertolaknya pendapat) bagi siapa yang membacanya *takhfiif* dengan alasan bahwa kaliamat ini tidak mengandung lafazh *muqaddar* (yang tersimpan), sebab, makna ayat adalah: sesungguhnya Al-Qur'an diturunkan oleh *Rabbul 'Alamiin* yang di bawa turun oleh Jibril kepada-mu (ya Muhammad) . Sebagimana firman Allah SWT,

قُلۡ مَن كَانَ عَدُوّٗا لِّجِبۡرِيلَ فَإِنَّهُۥ نَزَّلَهُۥ عَلَىٰ قَلۡبِكَ

"Katakanlah, Barangsiapa yang menjadi musuh Jibril, maka Jibril itu telah menurunkan (Al-Qur'an) ke dalam hatimu. Yakni, membacakannya kepadamu dan kemudian tersimpan di hatimu. Ada yang mengatakan, "Untuk membuat hatimu konsisten" (al-Qurthubi, 2009: 343-344).

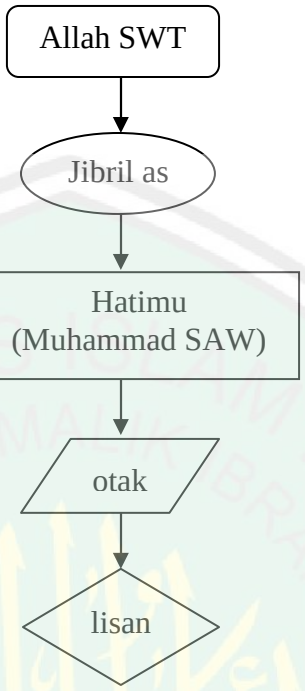
CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Selanjutnya telah kita ketahui bahwa kata "*nazzala"*yang berarti diturunkan sehingga dalam sinyal pengiriman pesan dapat ditafsirkan dengan kata disampaikan. Sedangkan untuk kata "*Arruhul Amin"* maksudnya Malaikat Jibril as yang membawa turunnya Al-Qur'an maka dapat ditafsirkan sebagai sinyal pengiriman pesan. Dalam hal ini pesan adalah wahyu Al-Qur'an dan kata "*ngala qalbika"* yang berarti kedalam hatimu Muhammad SAW.

Sehingga proses sinyal pengiriman pesan dari titik A ke titik B dapat ditafsilkan sebagai proses turunnya Al-Qur'an dari Allah SWT kepada Muhammad SAW melalui perantara Malaikat Jibril as, dengan berbagai cara seperti, proses turunnya Al-Qur'an di Guo Hira dimana malaikat Jibril as menampakkan wujud aslinya, langsung kedalam hati Muhammad SAW dan juga Jibril as menurinkan Al-Qur'an kedalam mimpinya Nabi Muhammad SAW.

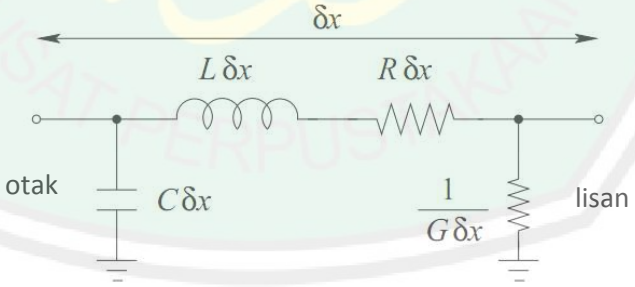
Dari kutipan di atas, masalah pengiriman pesan sudah Allah SWT siratkan menjadi suatu hikmah atau pelajaran bahwa proses pengiriman pesan sudah terlebih dahulu Allah SWT ajarkan sebelum teknologi pengiriman pesan saat ini. Dalam tubuh manusia tersusun ats system jaringan listrik yang sangat rumit dan detail untuk mengirim ribuan sinyal-sinyal pesan. Kalau ditinjau secara spesifik pengiriman sinyal dari ayat di atas, maka dapat digambarkan alur sebagi berikut:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG



Gambar 3.12 Proses Turunnya Al-Qur'an

Jika kita tinjau secara spesifik pengiriman pesan dari otak ke seluruh tubuh (dalam hal ini lisan), maka dapat digambarkan miniatur sistem seperti pada kajian sebelumnya yaitu:



Gambar 3.13 Alur Pengiriman Pesan Dari Otak Keseluruh Tubuh

Dalam miniature di atas, konteks hambatan (R), kapasitas (C), induktans (L), dan konduktans (G) pasti ada (error kecil untuk ukuran Nabi SAW) oleh karena itu Allah SWT sentiasa memperkecil $R, C, G,$ dan L dengan selalu menjaga hati Muhammad

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

SAW. Oleh karena itu pada penelitian secara teoritik dapat disimpulakan bahwa untuk proses pengiriman turunnya wahyu Al-Qur'an dipastikan tidak tedapat $R, C, G,$ dan L, atau bernilai nol (0).

Dalam penelitian sebelumnya, apa yang dikerjakan untuk memaknai kejadian pengiriman pesan hanya berupaya memperkecil error (dengan mensimulasi $\Delta x \to 0$ dan $\Delta t \to 0$). Dalam penelitian ini, hikmah atau pesan yang mampu ditarik adalah bahwa tidak ada satupun proses pengiriman pesan yang menyamai proses pengiriman pesan yang teleh diciptakan Allah SWT dan Allah maha cepat hitungannya: yang bisa kita lakukan adalah membeca Firman Allah SWT dan implementasi di sekitar nilai mutlak (nilai Allah SWT).

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Dari paparan pembahasan di atas dapat disimpulkan untuk penyelesaian analitik dan numerik persamaan sinyal pengiriman pesan sebagai berikut:

1. Persamaan sinyal pengiriman pesan melalui konstruksi *Brownian Motion* yaitu:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{LC}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C}\right)\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{GR}{LC}u$$

2. Bentuk kanonik persamaan sinyal pengiriman pesan sebagai berikut:

$$-\left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C}\right)(u_\xi + u_\eta) - \frac{GR}{LC}u(\xi, \eta) = 0$$

3. Penyelesaian analitik persamaan sinyal pengiriman pesan,
   1. Masalah nilai awal model gelombang persamaan sinyal pengiriman pesan di sumbu x dengan *d'Alembert Solution* sebagai berikut:

$$U = -\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{LC}}}G\left(\sin\tau - 2\sqrt{\frac{1}{LC}}t\right) + \frac{3}{2}f\left(\sin\tau - 2\sqrt{\frac{1}{LC}}t\right)$$

   2. Masalah nilai batas model gelombang persamaan sinyal pengiriman pesan dengan metode pemisahan variabel dengan langkah-langkah sebagi berikut:
      1. diberikan persamaan umum: $(x, t, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{tt}, \dots) = 0$. Hal ini digunakan untuk mencari penyelesaian secara umum.
      2. Didefinisikann struktur penyelesaian sebagai berikut $u = X(x)T(t)$ yang selanjutnya akan disubsitusiakan ke persamaan umum.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

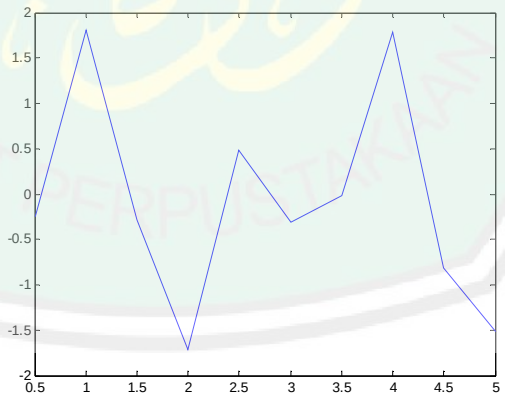
3. Menulis kembali persamaan sinyal pengiriman pesan yang selanjutnya dikerjakan dengan prosedur pemisahan.
4. Menghasilakan persamaan diferensial biasa.
5. Menyelesaikan persamaan diferensial biasa sehingga diperoleh $X_n(x)$ dan $T_n(t)$.

Hasil dari pemisahan veriabel pada persamaan sinyal pengiriman pesan adalah sebagai berikut:

$$u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[b_n \cos\left(\frac{-\left(\frac{R}{L}+\frac{G}{C}\right)+\sqrt{\frac{R^2}{L^2}-2\frac{GR}{LC}+\frac{G^2}{C^2}+4\frac{n\pi}{LCl}}}{2}\right)t\right]\sin\frac{n\pi x}{LCl}$$

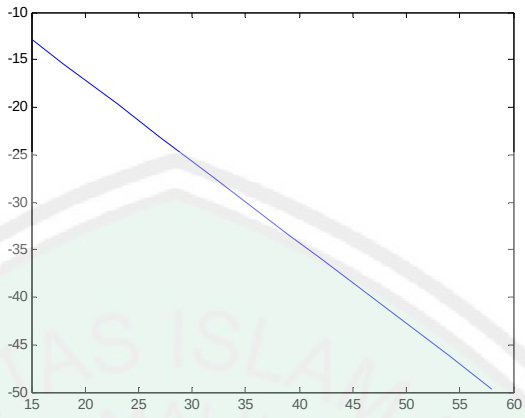
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[c_n \sin\left(\frac{-\left(\frac{R}{L}+\frac{G}{C}\right)+\sqrt{\frac{R^2}{L^2}-2\frac{GR}{LC}+\frac{G^2}{C^2}+4\frac{n\pi}{LCl}}}{2}\right)t\right]\sin\frac{n\pi x}{LCl}$$

Sehingga gambar penampang gelombang dua dimensi dan tiga dimensi adalah:

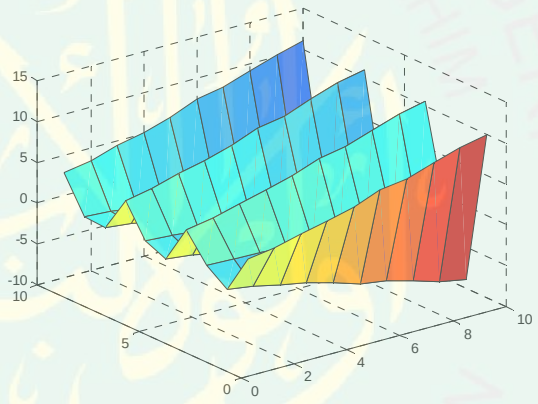


Gambar 4.1 Grafik Penyelesaian Nilai Batas Bidang Gelombang Persamaan Sinyal Pengiriman Pesan Pada Sumbu (u, x)

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG



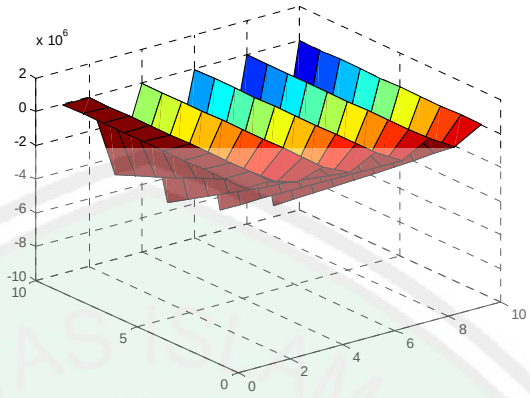
Gambar 4.2 Grafik Garis Singgung Bidang Gelombang Persamaan Sinyal Pengiriman Pesan pada Sumbu (u, t)



Gambar 4.3 Grafik Penyelesaian Nilai Batas Bidang Gelombang Persamaan Sinyal Pengiriman Pesan pada Sumbu (u, x, t)

4. Penyelesaian numerik persamaan sinyal pengiriman pesan dengan metode Euler Eksplisit, maka penampang gelombangnya dapat digambarkan sebagai berikut:

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG



Gambar 4.4 Penampang Gelombang Sinyal Secara Numerik di Semua Titk Grid pada Persamaan Sinyal Pengiriman Pesan di Sumbu (u, x, t)

5. Simulasi data dan analisis galat untuk penyelesaian analitik dan numerik

Tabel 4.1 Galat Error antara Analitik dan Numerik

Iterasi ke-	Analitik	Numerik	Error
1.	$3{,}04 \times 10^6$	$6{,}78 \times 10^6$	$3{,}73 \times 10^6$
2.	$3{,}04 \times 10^6$	$6{,}78 \times 10^6$	$3{,}73 \times 10^6$
3.	$5{,}20 \times 10^6$	$2{,}07 \times 10^6$	3.13×10^6
4.	$3{,}93 \times 10^6$	$2{,}62 \times 10^6$	$1{,}31 \times 10^6$
5.	$6{,}73 \times 10^6$	$3{,}44 \times 10^6$	$3{,}28 \times 10^6$
6.	$4{,}90 \times 10^6$	$4{,}00 \times 10^6$	$0{,}90 \times 10^6$
7.	$7{,}39 \times 10^6$	$4{,}8 \times 10^6$	$2{,}59 \times 10^6$
8.	$9{,}00 \times 10^6$	$5{,}67 \times 10^6$	$3{,}33 \times 10^6$
9.	$10{,}10 \times 10^6$	$6{,}22 \times 10^6$	$3{,}87 \times 10^6$
10.	$12{,}01 \times 10^6$	$6{,}89 \times 10^6$	$5{,}12 \times 10^6$

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

4.2 Saran

1. Implementasi pengiriman pesan dapat dikerjakan pada data selain data pesan sms.
2. Penelitian dapat dilanjutkan pada analisis error dan perbandingan terhadap teori fisika yang melatarbelakanginya serta kriteria peminimalan error.
3. Analisis *noise* dan kriteria-kriteria klasifikasi *noise* untuk amplitudo gelombang.
4. Penelitian dapat dilanjutkan pada analisis pengaruh, analisis sistem dinamik dan analisis potret fase grafiknya.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

DAFTAR PUSTAKA

Al Maragi, A. M. 1974. *Tafsir Al Maragi.* Terjemah Bahrun Abubakar, Lc, K. Anshori Umar Sitanggal dan Drs. Henry Noer Aly. 1993. Semarang: CV. Toha Putra Semarang.

Al Qurthubi, S. I. 2008. *Tafsir Al Qurthubi*. Terjemah athurrahman, Ahmad Hotib, dan Dudi Rasyadi. Jakarta: Pustaka Azzam.

Anton, Howard. 1987. *Elementary Linear Algebra.* Terjemahan Pantur Silaban ITB.1997. Jakarta: Erlangga.

Finizio, N dan Ladaz G. 1982. *Ordinary Differential Equations, with Modern Applications.*Terjemahan Widiarti Santoso ITB. 1988. Erlangga: Jakarta.

Fitzgerald, A.E.1981. *Dasar-Dasar Elektronika jilid 1*. Terjemah Pantur Silaban ITB. 1981. Jakarta: Erlangga.

Hoffman, J.D. 2001. *Numerical for Engineers and Scientists. 2th Edition Revised and Expanded.* Marcel Dekker, Inc. New York.

Kaplan, W. 1963. *Advance Calculus:First Edition.* Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

Munir, Rinaldi. 2006. *Metode Numerik*. Bandung: Informatika.

Nagle, Kent R dan Saff, Edward B. 1996. *Fundamentals of differential equations and boundary value problems*. University of South Florida.

Ross, Shepley L. 1984. *Differential Equations.* Third Edition. New York: John Wiley&Sons. Inc.

Sahid. 2004. *Pengantar Komputasi Numerik dengan Matlab*. FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta. Yogyakarta.

Spiegel, Murray R. 1983. *Advanced Mathematics for Engineer and Scientists.* Terjemahan oleh Koko Martono. 1994. Jakarta: Erlangga.

Soeharjo. 1996. *Matematika IV*. Diktat ITS

Stewart, James. 2003. *Kalkulus jilid 2.* Terjemahan oleh I Nyoman Susila, Hendra Gunawan. 2003. Jakarta: Erlangga.

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Suryanto, A. 2005. *Diktat Kuliah Persamaan Diferensial Parsial Numerik*. Universitas Brawijaya. Malang.

Sutrima. 2004. *Representasi Sprektal dari Operator Strum-Liouville Berparameter*. Jurnal Jurusan Matematika: FMIPA UNS. MIPA vol 14:17.

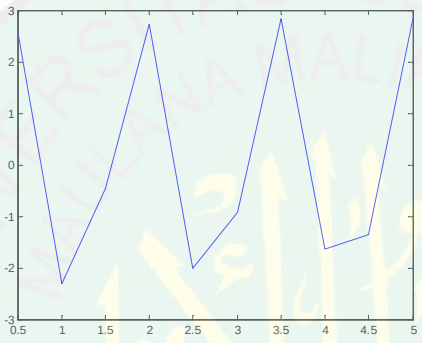
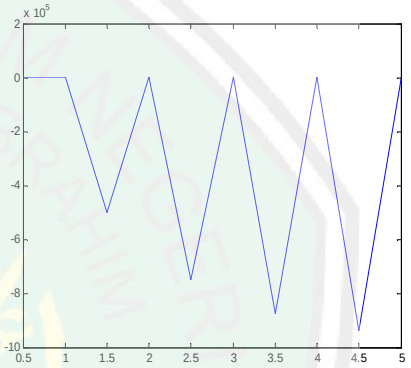
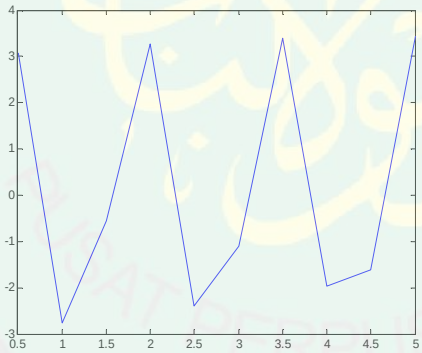
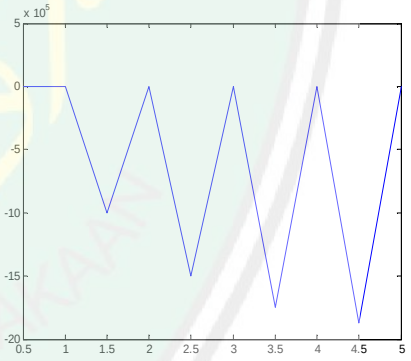
Triatmodjo, Bambang. 2002. *Metode Numerik Dilengkapi Dengan Program Komputer*. Yogyakarta: Beta Offest.

Zauderer, Erich.2006. *Partial Differential Equations of Applied Mathematics*. New Jersey: John Willey & Sons, Inc

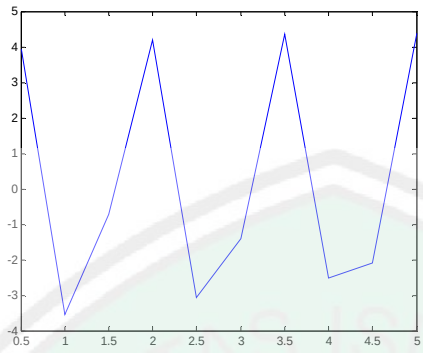
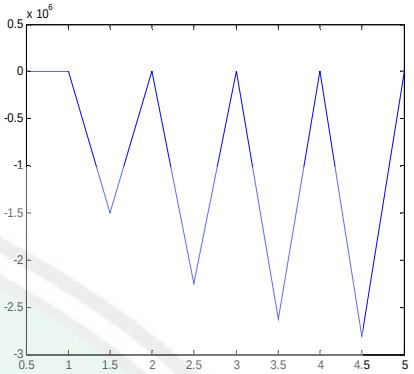
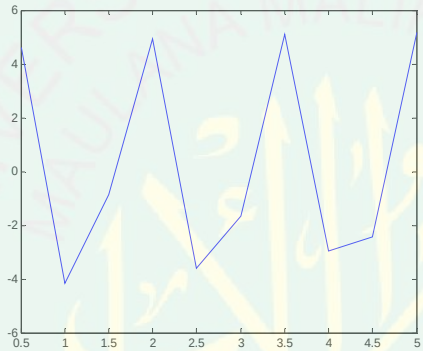
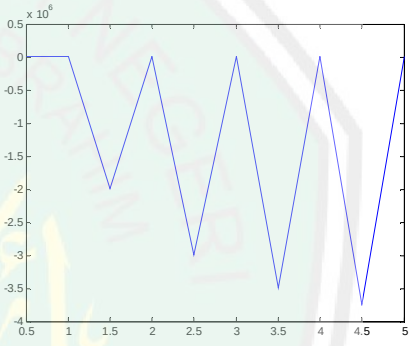
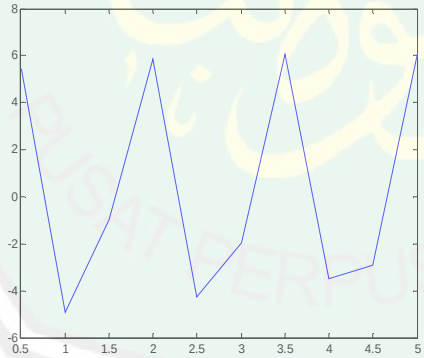
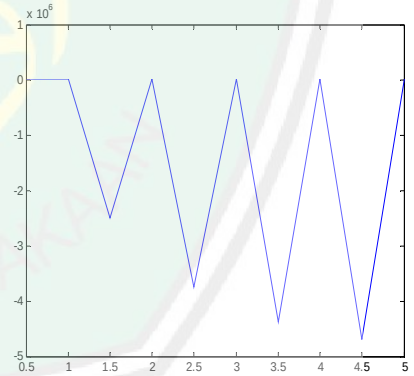
CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

LAMPIRAN-LAMPIRAN

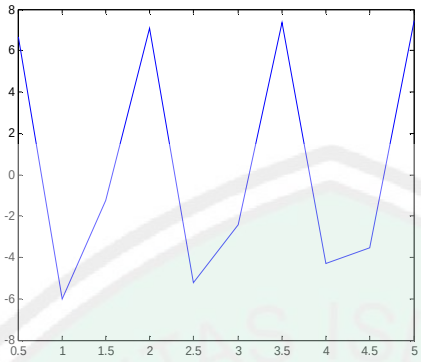
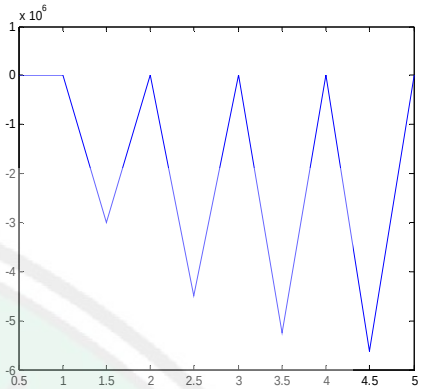
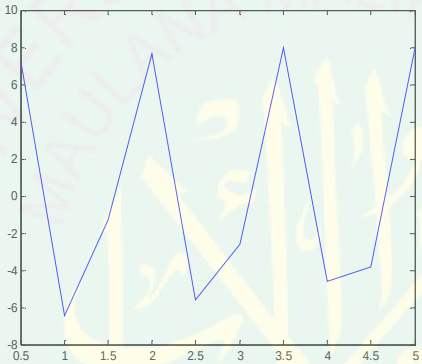
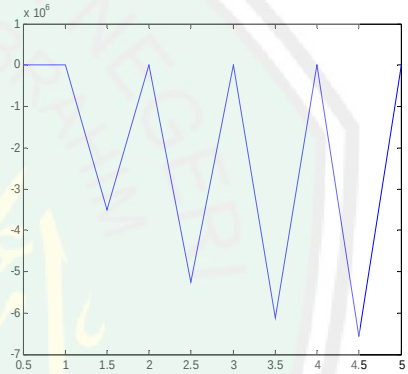
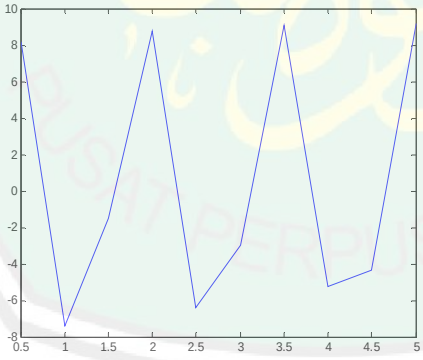
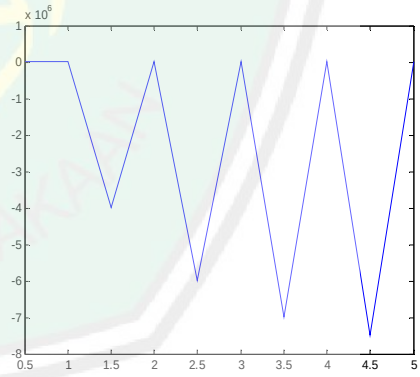
Lampiran 1: Perbandingan Penampang Gelombang Secara Analitik dan Numerik

Iterasi Ke-	Analitik (2D)	Numerik (2D)
1.		
2.		

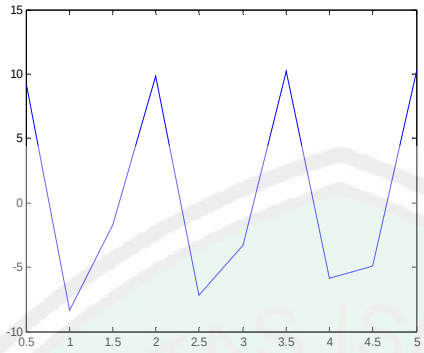
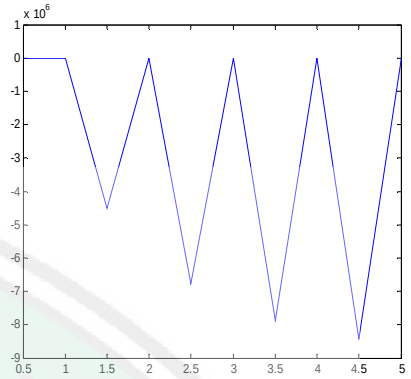
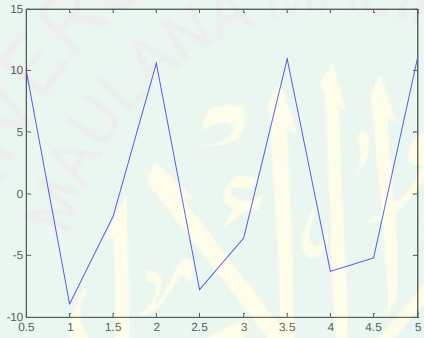
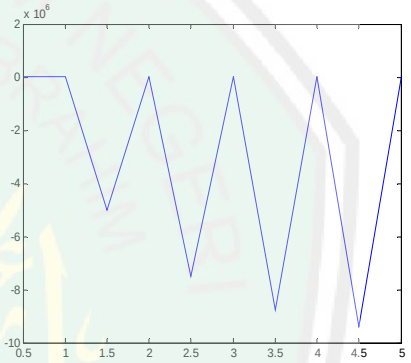
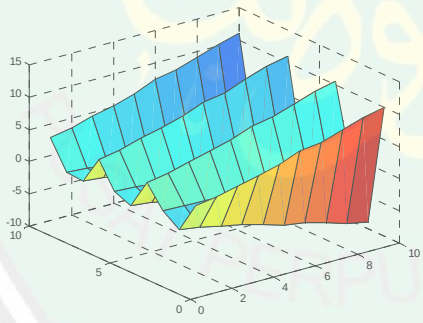
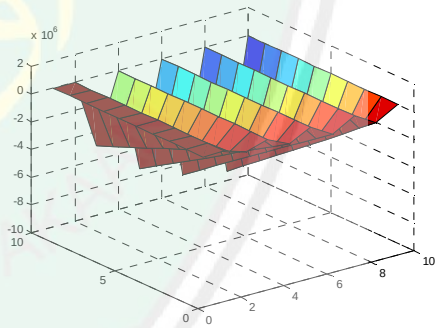
CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

3.		
4.		
5.		

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

6.		
7.		
8.		

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

9		
10.		
(3D))		

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Lampiran 2: Tabel Galat Error

Iterasi Ke-	Analitik (A)		Numerik (B)		Error
	Titik grid	$\|X_1 - X_{i-1}\|$	Titik grid	$\|X_1 - X_{i-1}\|$	$\|A - B\|$
1.	X_0		X_0		
	X_1	-	X_1	-	-
	X_2	5,0	X_2	0	5,0
	X_3	1,7	X_3	5,0	3,3
	X_4	2,0	X_4	5,0	3,0
	X_5	4,5	X_5	7,0	2,5
	X_6	1,0	X_6	7,0	6,0
	X_7	3,8	X_7	9,0	5,2
	X_8	4,6	X_8	9,0	4,4
	X_9	0,3	X_9	9,5	9,2
	X_{10}	4,5	X_{10}	9,5	5,0
2.	X_0		X_0		
	X_1	-	X_1	-	-
	X_2	5,0	X_2	0	5,0
	X_3	1,7	X_3	5,0	3,3
	X_4	2,0	X_4	5,0	3,0
	X_5	4,5	X_5	7,0	2,5
	X_6	1,0	X_6	7,0	6,0
	X_7	3,8	X_7	9,0	5,2
	X_8	4,6	X_8	9,0	4,4
	X_9	0,3	X_9	9,5	9,2
	X_{10}	4,5	X_{10}	9,5	5,0
3.	X_0		X_0		
	X_1	-	X_1	-	-

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

	X_2	7,5	X_2	0	7,5
	X_3	2,5	X_3	1,5	1,0
	X_4	5,0	X_4	1,5	3,5
	X_5	7,0	X_5	2,3	4,7
	X_6	4,5	X_6	2,3	2,2
	X_7	6,0	X_7	2,7	3,3
	X_8	7,0	X_8	2,7	4,3
	X_9	0,3	X_9	2,8	2,5
	X_{10}	7,0	X_{10}	2,8	4,2
4.	X_0		X_0		
	X_1	-	X_1	-	-
	X_2	8,9	X_2	0	8,9
	X_3	1,2	X_3	2.0	1,2
	X_4	3,7	X_4	2,0	3,7
	X_5	5,4	X_5	3,0	5,4
	X_6	1,5	X_6	3,0	1,5
	X_7	3,7	X_7	3,5	3,7
	X_8	4,7	X_8	3,5	4,7
	X_9	3,0	X_9	3,3	3,0
	X_{10}	4,3	X_{10}	3,3	4,3
5.	X_0		X_0		
	X_1	-	X_1	-	-
	X_2	11,0	X_2	0	11,0
	X_3	4,0	X_3	2,5	1,5
	X_4	6,8	X_4	2,5	4,3
	X_5	9,8	X_5	3,8	6,0

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

	X_6	2,0	X_6	3,8	1,8
	X_7	8,0	X_7	4,4	3,6
	X_8	9,5	X_8	4,4	5,1
	X_9	0,3	X_9	4,8	4,5
	X_{10}	9,2	X_{10}	4,8	4,4
6.	X_0		X_0		
	X_1	-	X_1	-	-
	X_2	12,5	X_2	0	12,5
	X_3	4,5	X_3	3,0	1,5
	X_4	8,5	X_4	3,0	5,5
	X_5	1,5	X_5	4,5	8,0
	X_6	3,0	X_6	4,5	1,5
	X_7	9,5	X_7	5.0	4,5
	X_8	1,0	X_8	5,0	6,0
	X_9	0,3	X_9	5,5	5,2
	X_{10}	3,3	X_{10}	5,5	2,2
7.	X_0		X_0		
	X_1	-	X_1	-	-
	X_2	13,5	X_2	0	13,5
	X_3	5,0	X_3	3,5	1,5
	X_4	8,5	X_4	3,5	5,0
	X_5	13,0	X_5	5,3	7,7
	X_6	2,5	X_6	5,3	3,2
	X_7	10,0	X_7	6,3	3,7
	X_8	12,0	X_8	6,3	5,7
	X_9	0,3	X_9	6,5	6,2
	X_{10}	1,7	X_{10}	6,5	5,2

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

8.	X_0		X_0		
	X_1	-	X_1	-	-
	X_2	15,0	X_2	0	15,0
	X_3	6,0	X_3	4,0	2,0
	X_4	8,0	X_4	4,0	4,0
	X_5	13,5	X_5	6,0	7,5
	X_6	3,5	X_6	6,0	2,5
	X_7	10,0	X_7	7,0	3,0
	X_8	12,5	X_8	7,0	5,5
	X_9	0,3	X_9	8,5	8,2
	X_{10}	12,2	X_{10}	8,5	3,7
9.	X_0		X_0		
	X_1	-	X_1	-	-
	X_2	17,0	X_2	0	17,0
	X_3	3,0	X_3	4,5	1,5
	X_4	11,0	X_4	4,5	6,5
	X_5	16,0	X_5	7,0	9,0
	X_6	2,0	X_6	7,0	5,0
	X_7	14,0	X_7	8,0	6,0
	X_8	15,0	X_8	8,0	7,0
	X_9	0,3	X_9	8,5	8,2
	X_{10}	12,7	X_{10}	8,5	4,2
10.	X_0		X_0		
	X_1	-	X_1	-	-
	X_2	19,0	X_2	0	19,0
	X_3	6,0	X_3	5,0	1,0
	X_4	13,0	X_4	5,0	8,0

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

	X_5	18,0	X_5	7,5	10,5
	X_6	3,0	X_6	7,5	4,5
	X_7	15,0	X_7	9,0	6,0
	X_8	17,0	X_8	9,0	8,0
	X_9	0,3	X_9	9,5	9,2
	X_{10}	16,8	X_{10}	9,5	7,3

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Lampiran 3: Output Program

```
##########################################################
#  persamaan sinyal pengiriman pesan (steady state)      #
#  asumsi :                                              #
#   u(x)=0 | x = bondary condition                       #
##########################################################
Delta_x = 0.5000
Delta_t =1.0000e-003
Mat_A =1.0e+006 *
Columns 1 through 5
-2.0000   -0.0000         0         0         0
-0.0000   -2.0000   -0.0000         0         0
       0   -0.0000   -2.0000   -0.0000         0
       0         0   -0.0000   -2.0000   -0.0000
       0         0         0   -0.0000   -2.0000
       0         0         0         0   -0.0000
       0         0         0         0         0
       0         0         0         0         0
       0         0         0         0         0
       0         0         0         0         0
Columns 6 through 10
       0         0         0         0         0
       0         0         0         0         0
       0         0         0         0         0
       0         0         0         0         0
```

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

-0.0000	0	0	0	
-2.0000	-0.0000	0	0	0
-0.0000	-2.0000	-0.0000	0	0
0	-0.0000	-2.0000	-0.0000	0
0	0	-0.0000	-2.0000	-0.0000
0	0	0	-0.0000	-2.0000

Mat_B =1.0e+006 *

Columns 1 through 5

1.0000	-0.0000	0	0	0
-0.0000	1.0000	-0.0000	0	0
0	-0.0000	1.0000	-0.0000	0
0	0	-0.0000	1.0000	-0.0000
0	0	0	-0.0000	1.0000
0	0	0	0	-0.0000
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

Columns 6 through 10

0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
-0.0000	0	0	0	0

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

1.0000	-0.0000	0	0	0
-0.0000	1.0000	-0.0000	0	0
0	-0.0000	1.0000	-0.0000	0
0	0	-0.0000	1.0000	-0.0000
0	0	0	-0.0000	1.0000

u1 =1.0e+006 *

Columns 1 through 5

0.0000	0.0000	-0.5000	0.0000	-0.7500
0.0000	0.0000	-1.0000	0.0000	-1.5000
0.0000	0.0000	-1.5000	0.0000	-2.2500
0.0000	0.0000	-2.0000	0.0000	-3.0000
0.0000	0.0000	-2.5000	0.0000	-3.7500
0.0000	0.0000	-3.0000	0.0000	-4.5000
0.0000	0.0000	-3.5000	0.0000	-5.2500
0.0000	0.0000	-4.0000	0.0000	-6.0000
0.0000	0.0000	-4.5000	0.0000	-6.7500
0.0000	0.0000	-5.0000	0.0000	-7.5000

Columns 6 through 10

0.0000	-0.8750	0.0000	-0.9375	0.0000
0.0000	-1.7500	0.0000	-1.8750	0.0000
0.0000	-2.6250	0.0000	-2.8125	0.0000

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

0.0000	-3.5000	0.0000	-3.7500	0.0000
0.0000	-4.3750	0.0000	-4.6875	0.0000
0.0000	-5.2500	0.0000	-5.6250	0.0000
0.0000	-6.1250	0.0000	-6.5625	0.0000
0.0000	-7.0000	0.0000	-7.5000	0.0000
0.0000	-7.8750	0.0000	-8.4375	0.0000
0.0000	-8.7500	0.0000	-9.3750	0.0000

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

Lampiran 4: Listing Program

Selesaian analitik pada sumbu (u, x)

```
clc, clear
x=1:8;
t=2;
l=10;
R=.12;
C=.13;
G=.14;
L=.15;
phi=22/7;

x=zeros(1,10)
x(1)=0.5;
x(2)=1.0;
x(3)=1.5;
x(4)=2.0;
x(5)=2.5;
x(6)=3.0;
x(7)=3.5;
x(8)=4.0;
x(9)=4.5;
x(10)=5.0;

Bn=zeros(1,10);
Bn(1)=.2;
Bn(2)=.3;
Bn(3)=.4;
Bn(4)=.5;
Bn(5)=.6;
Bn(6)=.7;
Bn(7)=.8;
Bn(8)=.9;
Bn(9)=.10;
Bn(10)=.11;

Cn=zeros(1,10);
Cn(1)=.12;
Cn(2)=.13;
Cn(3)=.14;
Cn(4)=.15;
Cn(5)=.16;
Cn(6)=.17;
Cn(7)=.18;
Cn(8)=.19;
Cn(9)=.20;
Cn(10)=.21;
```

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

```
%u=(Bn*cos(((-(R/L+G/C)+((R^2/L^2)-
2*(G*R/L*C)+(G^2/C^2)+(4*(n*phi/(L*C*l))))^1/2))/2)*t+Cn*sin(((-
(R/L+G/C)+((R^2/L^2)-
2*(G*R/L*C)+(G^2/C^2)+(4*(n*phi/(L*C*l))))^1/2))/2)*t)*sin(n*phi*x/L
*C*l)

for n=1:10
    u(n,:)=(Bn(n)*cos(((-(R/L+G/C)+((R^2/L^2)-
2*(G*R/L*C)+(G^2/C^2)+(4*(n*phi/(L*C*l))))^1/2))/2)*t+Cn(n)*sin(((-
(R/L+G/C)+((R^2/L^2)-
2*(G*R/L*C)+(G^2/C^2)+(4*(n*phi/(L*C*l))))^1/2))/2)*t)*sin(n*phi*x/L
*C*l);
end

hsl=sum(u);
plot(x,hsl)
```

Selesaian analitik pada sumbu (u,t)

```
clc, clear
t=1:8;
Bn=0.001;
Cn=0.002;
n=1;
x=2;
l=10;
R=.12;
C=.13;
G=.14;
L=.15;
phi=22/7;

t=zeros(1,10);
t(1)=15;
t(2)=18;
t(3)=23;
t(4)=27;
t(5)=32;
t(6)=39;
t(7)=42;
t(8)=48;
t(9)=54;
t(10)=58;

Bn=zeros(1,10);
Bn(1)=.2;
Bn(2)=.3;
Bn(3)=.4;
Bn(4)=.5;
Bn(5)=.6;
```

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

```
Bn(6)=.7;
Bn(7)=.8;
Bn(8)=.9;
Bn(9)=.10;
Bn(10)=.11;

Cn=zeros(1,10);
Cn(1)=.12;
Cn(2)=.13;
Cn(3)=.14;
Cn(4)=.15;
Cn(5)=.16;
Cn(6)=.17;
Cn(7)=.18;
Cn(8)=.19;
Cn(9)=.20;
Cn(10)=.21;

for n=1:10
    u(n,:)=(Bn(n)*cos(((-(R/L+G/C)+((R^2/L^2)-
2*(G*R/L*C)+(G^2/C^2)+(4*(n*phi/(L*C*l))))^1/2))/2)*t+Cn(n)*sin(((-
(R/L+G/C)+((R^2/L^2)-
2*(G*R/L*C)+(G^2/C^2)+(4*(n*phi/(L*C*l))))^1/2))/2)*t)*sin(n*phi*x/L
*C*l);
end

hsl=sum(u);
plot(t,hsl)
```

Selesaian analitik pada sumbu (u, x, t)

```
clc, clear
t=1:10;
x=1:10;

l=10;
R=.12;
C=.13;
G=.14;
L=.15;
phi=22/7;

x=zeros(1,10)
x(1)=0.5;
x(2)=1.0;
x(3)=1.5;
x(4)=2.0;
x(5)=2.5;
x(6)=3.0;
```

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

```
x(7)=3.5;
x(8)=4.0;
x(9)=4.5;
x(10)=5.0;

t=zeros(1,10);
t(1)=15;
t(2)=18;
t(3)=23;
t(4)=27;
t(5)=32;
t(6)=39;
t(7)=42;
t(8)=48;
t(9)=54;
t(10)=58;

Bn=zeros(1,10);
Bn(1)=.2;
Bn(2)=.3;
Bn(3)=.4;
Bn(4)=.5;
Bn(5)=.6;
Bn(6)=.7;
Bn(7)=.8;
Bn(8)=.9;
Bn(9)=.10;
Bn(10)=.11;

Cn=zeros(1,10);
Cn(1)=.12;
Cn(2)=.13;
Cn(3)=.14;
Cn(4)=.15;
Cn(5)=.16;
Cn(6)=.17;
Cn(7)=.18;
Cn(8)=.19;
Cn(9)=.20;
Cn(10)=.21;

for i=1:10
    for j=1:10
        for n=1:10
        u(i,j)=(Bn(n)*cos(((-(R/L+G/C)+((R^2/L^2)-
2*(G*R/L*C)+(G^2/C^2)+(4*(n*phi/(L*C*l))))^1/2))/2)*t(j)+Cn(n)*sin((
(-(R/L+G/C)+((R^2/L^2)-
2*(G*R/L*C)+(G^2/C^2)+(4*(n*phi/(L*C*l))))^1/2))/2)*t(j))*sin(n*phi*
x(i)/L*C*l);
        end
    end
```

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

```
end
hsl=sum(u)
surf(u)

%plot(x,u(:,1))
```

Selesaian numerik pada sumbu (u, x, t)

```
clc, clear;
disp '#########################################################'
disp '#  persamaan sinyal pengiriman pesan (steady state)  #'
disp '#  asumsi :                                           #'
disp '#   u(x)=0 | x = bondary condition                    #'
disp '#########################################################'
disp ' '
format short

partisi=9; %0 sampai 1 dengan parttisi 8

X=linspace(0.5,5,partisi+1);
Delta_x=X(2)-X(1);
Delta_t=0.001;
Delta_x,Delta_t

t=10;
R=.12;C=.13;G=.14;L=.15;

   Aa=1/Delta_t^2-((R/L+G/C)/2*Delta_t);
   Bb=-1/2*L*C*Delta_x^2;
   Cc=(-2/Delta_t^2)+(1/L*C*Delta_x^2)+(G*R/L*C);
   Dd=Bb;
   Ee=Bb;

Ff=(1/Delta_t^2)+(1/L*C*Delta_x^2)+((R/L+G/C)/2*Delta_t)+(G*R/L*C);
   Gg=Bb;


%% disp '====== inputan matrik u1 ====='

u1(1,1)=0.5;
u1(2,1)=1.0;
u1(3,1)=1.5;
u1(4,1)=2.0;
u1(5,1)=2.5;
u1(6,1)=3.0;
u1(7,1)=3.5;
u1(8,1)=4.0;
u1(9,1)=4.5;
u1(10,1)=5.0;
```

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

```
% u1=(1:10);

%% Membuat matrik baris x kolom

Mat_A=zeros(partisi+1,partisi+1);
for i=1:partisi+1
    for j=1:partisi+1
        if i==j
            Mat_A(i,j)=Cc;
        end
        if i==j+1
            Mat_A(i,j)=Bb;
        end
        if i==j-1
            Mat_A(i,j)=Dd;
        end
    end
end
Mat_A

Mat_B=zeros(partisi+1,partisi+1);
for i=1:partisi+1
    for j=1:partisi+1
        if i==j
            Mat_B(i,j)=Ff;
        end
        if i==j+1
            Mat_B(i,j)=Ee;
        end
        if i==j-1
            Mat_B(i,j)=Gg;
        end
    end
end
Mat_B

%% u baru :
uBaru=inv(Mat_A)*-(Aa*u1(:,1));
    for i=1 : partisi+1
        u1(i,2)=uBaru(i,1);
    end
for k=3:10

    if mod(k,2)==0
        uBaru=inv(Mat_A)*-(Aa*u1(:,k-2));
    elseif mod(k,2)==1
        uBaru=inv(Mat_B)*+(Aa*u1(:,k-2))+Mat_A*u1(:,k-1);
    end

    for i=1 : partisi+1
        u1(i,k)=uBaru(i,1);
```

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG

```
    end
end

u1;

%hasil simulasi dalam 3D
% X=1:partisi+1
% plot(X,u1(1,:))


% axis tight%([1 10 -10 2])
% set(gca,'nextplot','replacechildren');
% % Record the movie
% for j = 1:partisi+1
%   plot(X,u1(j,:))
%   F(j) = getframe;
% end
% % Play the movie ten times
% movie(F,1,1)

% for i=1:partisi+1
%     subplot(10,1,i);plot(X,u1(i,:))
% end%hasil simulasi dalam 2D
%  subplot(10,2,2);
 surf(u1)
```

CENTRAL LIBRARY OF MAULANA MALIK IBRAHIM STATE ISLAMIC UNIVERSITY OF MALANG