KETAKSAMAAN TIPE LEMAH UNTUK OPERATOR INTEGRAL FRAKSIONAL K_α^n PADA RUANG MORREY TAK HOMOGEN YANG DIPERUMUM DI RUANG KUASI METRIK

SKRIPSI

OLEH
CINDY NOVITA SARI
NIM. 17610078

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2024

KETAKSAMAAN TIPE LEMAH UNTUK OPERATOR INTEGRAL FRAKSIONAL K_α^n PADA RUANG MORREY TAK HOMOGEN YANG DIPERUMUM DI RUANG KUASI METRIK

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
Cindy Novita Sari
NIM. 17610078

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2024

KETAKSAMAAN TIPE LEMAH UNTUK OPERATOR INTEGRAL FRAKSIONAL K_α^n PADA RUANG MORREY TAK HOMOGEN YANG DIPERUMUM DI RUANG KUASI METRIK

SKRIPSI

Oleh
Cindy Novita Sari
NIM. 17610078

Telah Disetujui untuk Diuji

Malang, 25 Juni 2024

Dosen Pembimbing I	Dosen Pembimbing II
Dr. Hairur Rahman, M.Si.	Erna Herawati, M.Pd.
NIP. 19800429 200604 1 003	NIPPPK. 19760723 202321 2 006

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005

KETAKSAMAAN TIPE LEMAH UNTUK OPERATOR INTEGRAL FRAKSIONAL K_α^n PADA RUANG MORREY TAK HOMOGEN YANG DIPERUMUM DI RUANG KUASI METRIK

SKRIPSI

Oleh
Cindy Novita Sari
NIM. 17610078

Telah Dipertahankan di Depan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelr Sarjana Matematika (S Mat)

Tanggal 28 Juni 2024

Ketua Penguji	: Dr. Elly Susanti, M.Sc.	....
Anggota Penguji 1	: Dian Maharani, M.Si.	....
Anggota Penguji 2	: Dr. Hairur Rahman, M.Si	....
Anggota Penguji 3	: Erna Herawati, M.Pd.	....

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama	: Cindy Novita Sari
NIM	: 17610078
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Sains dan Teknologi
Judul Skripsi	: Ketaksamaan Tipe Lemah untuk Operator Integral Fraksional K_{α}^{n} pada Ruang Morrey Tak Homogen yang Diperumum di Ruang Kuasi Metrik.

Mengatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilan data, tulisan, atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan dan pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila dikemudian hari terbukti atau dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 28 Juni 2024

Yang membuat pernyataan,

METERAI TEMPEL

Cindy Novita Sari

NIM. 17610078

HALAMAN MOTTO

"Ambisi dan mimpimu adalah samudera. Meski kdang terjadi pasang surut, tapi takkan pernah surut airnya"

(Anne Ahira)

وَلَا تَهِنُوْا وَلَا تَحْزَنُوْا وَاَنْتُمُ الْاَعْلَوْنَ اِنْ كُنْتُمْ مُّؤْمِنِيْنَ

"Dan janganlah kamu (merasa) lemah, dan jangan (pula) bersedih hati, sebab kamu paling tinggi (derajatnya), jika kamu orang beriman."

(Q.S Ali Imran; 139)

HALAMAN PERSEMBAHAN

Skripsi ini penulis persembahkan untuk:

Kedua orang tua saya Alm. Bapak Rintik Asmoro dan Ibu Tutik Muzaiyanah yang selalu menyayangi, mendoakan, dan menanti keberhasilan saya. Kedua adik saya Muhammad Asmoro Khondy dan Alm. Muhammad Regal Sadewa yang menjadi motivasi saya untuk terus melakukan hal baik dan bertahan.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Segala puji bagi Allah Swt. atas rahmat, taufik serta hidayah-Nya, sehingga penulis mampu menyelesaikan penyusunan skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana dalam bidang matematika di Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, penulis banyak mendapat bimbingan dan arahan dari berbagai pihak. Untuk itu ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya dan penghargaan yang setinggi-tingginya penulis sampaikan terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M.A., selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Sri Harini, M.Si., selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Dr. Elly Susanti, S.Pd., M.Sc., selaku Ketua Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Dian Maharani, M.Si., selaku penguji 1 yang telah membantu dan memberikan arahan dan motivasi kepada saya selama dalam pengerjaan skripsi.
5. Dr. Hairur Rahman, M.Si., selaku dosen pembimbing I yang telah banyak memberikan arahan, nasihat, ilmu dan bimbingan kepada penulis.
6. Erna Herawati, M.Pd., selaku dosen pembimbing II yang telah banyak memberikan arahan, motivasi, dan berbagi ilmunya kepada penulis.
7. Segenap sivitas akademika Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang terutama seluruh dosen, terima kasih atas segala ilmu dan bimbingannya.
8. Kedua orang tua, ayah dan mama serta keluarga tercinta yang selalu memberikan doa, kasih sayang, semangat, serta motivasi kepada penulis hingga saat ini.
9. Seluruh teman-teman di Jurusan Matematika angkatan 2017, terutama Tiara Setyo yang berjuang bersama-sama mulai dari awal hingga semester akhir.

Teman seperbimbingan, Ima dan Safira yang selalu berbagi informasi, terima kasih atas kenangan bersama dalam perkuliahan.

10. Fitri Ana yang selalu mendukung karir saya dan Cindy Novita yaitu diriku sendiri yang sedang selalu berusaha berdamai dengan dirinya sendiri dan segala kondisi yang telah dilalui.
11. Semua pihak yang tidak mungkin penulis sebut seluruhnya, terima kasih atas doa, motivasi, dan bantuan dalam menyelesaikan skripsi ini baik moril maupun materiil.

Akhirnya penulis berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi penulis dan bagi pembaca.

Wassalamu'alaikum Wr. Wb

Malang, 28 Juni 2024

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Sari, Cindy Novita. 2024. **Ketaksamaan Tipe Lemah Operator Integral pada Ruang Morrey Tak Homogen yang Diperumum Di Ruang Kuasi Metrik**. Skripsi. Progam Studi Matematika, Fakultas Sains Dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (I) Dr. Hairur Rahman, M.Si. (II) Erna Herawati, M.Pd.

Kata kunci: Operator Integral Fraksional, Ruang Morrrey Tak Homogen Yang Diperumum

Operator Integral Fraksional merupakan salah satu operator dalam perkembangan ilmu analisis. Operator ini memetakan sebarang fungsi bernilai real ke dalam bentuk integral dari fungsi integral fraksional. Ruang Morrey adalah bentuk perumuman atas ruang Lebesgue. Ruang Morrey pada domain tak homogen yang merupakan ruang fungsi-fungsi terintegralkan lokal yang konvergen terhadap norma Morrey tak homogen diperumum. Pada penelitian ini akan membahas mengenai ketaksamaan tipe lemah operator integral fraksional pada ruang Morrey tak homogen yang diperumum di ruang kuasi metrik. Pembuktian ketaksamaan tersebut akan menggunakan ketaksamaan Chebyshev.

ABSTRACT

Sari, Cindy Novita. 2024. **A Weak Type Inequality for FractionL Integral Operator on Generalized Non-Homogeneus Morrey Spaces on Quasi Metric Spaces**. Thesis. Mathematic Department, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University, Malang. Advisors: (I) Dr. Hairur Rahman, M.Si. (II) Erna Herawati, M.Pd.

Keywords: Fractional Integral Operators, Generalized Non-Homogeneus Morrey Spaces On Quasi Metric Spaces

The Fractional Integral Operator is one of teh operators in the developtment of analytical science. The operator maps any real-valued fungtion into the integral of fractional integral function. Morrey spaces is a generalization of Lebesgue spaces. The Morrey spaces on nonhomogeneus domain which is the spaces of locally integrated functions that converge to the generelized nonhomogeneus norm Morrey spaces. In this study, we will discuss a weak type inequality for fractional integral operator on generalized non-homogeneus Morrey spaces on quasi metric spaces. We proved of this inequality using the Chebyshev inequality.

مستخلص البحث

ساري، سيندي نوفيتا. 2024. المتباينة الضعيفة من النوع الضعيف للمشغل التكاملي على فضاء موري المتجانس المعمم في الفضاء شبه المتري. البحث العلمي. قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج. المشرف الأوّل:(1) د. خير الرحمن، الماجستير. المشرفة الثانية (2) إيرنا هيراواتي، الماجستيرة.

الكلمات المفتاحية : المشغل التكاملي الكسري، فضاء الموري غير المتجانس المعمم

المشغل التكاملي الكسري هو أحد المشغلات في تطور علم التحليل. يحوّل هذا المشغل في أي دالة الذي له قيمة حقيقية إلى الصورة التكاملية لدّالة تكاملية كسرية. فضاء الموري هو الصورة المعممة من الفضاء ليبيسج. فضاءات الموري على المجالات غير المتجانسة هي فضاءات للدوال القابلة للتكامل محليًا والتي تتقارب إلى معيار الموري غير المتجانس المعمم. ناقشت هذه الورقة البحثية المتباينة من النوع الضعيف المشغل التكامل الكسري على فضاء الموري غير المتجانس المعمم في الفضاء شبه المتري. وإستخدام الإثبات لمتباينة التشيبيشيف.

.

.

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Operator merupakan suatu pemetaan dari ruang bernorma yang satu ke ruang bernorma lainnya. Menurut Royden, H.L dan Fitzpatrick (2010) mendefinisikan, misalkan X dan Y adalah ruang bernorma, dengan T suatu operator terbatas dari ruang bernorma X ke Y jika terdapat $C > 0$, sedemikian sehingga

$$\|T(f): Y\| \leq C\|f : X\| \text{untuk setiap } f \in X ,$$

di mana $\|f : X\|$ menotasikan norma f di ruang bernorma X. Jika untuk ruang bernorma $X = Y$ dan T merupakan suatu operator terbatas, maka dapat dikatakan bahwa T terbatas di ruang bernorma X.

Salah satu objek kajian yang menjadi bahan penelitian pada perkembangan analisis modern adalah teori operator integral fraksional. Operator integral fraksional sering disebut sebagai potensial Riesz yang dikenalkan pada tahun 1886. Operator ini dipelajari pertama kali oleh Hardy, Littlewood, dan Sobolev pada sekitar tahun 1920-an dan 1930-an. Operator integral fraksional ini memetakan sebarang fungsi bernilai real ke dalam bentuk integral dari fungsi integral fraksional.

Hardy, Littlewood dan Sobolev telah mengatakan bahwa operator integral fraksional merupakan operator terbatas dari ruang Lebesgue. Pada tahun 1930-an, Sergei Sobolev menyempurnakan keterbatasan operator K_α menggunakan operator maksimal pada ruang Lebesgue yang dikenal dengan ketaksamaan Hardy

Littlewood Sobolev. Ketaksamaan tersebut disebut juga dengan ketaksamaan tipe kuat untuk K_α di ruang Lebesgue. Namun, ketaksamaan ini tidak berlaku untuk $p = 1$, dan sebagai gantinya berlaku ketaksamaan tipe lemah untuk operator integral fraksional. Ketaksamaan Hardy Littlewood Sobolev dan ketaksamaan tipe lemah dapat dibuktikan dengan menggunakan ketaksamaan tipe lemah dan tipe kuat untuk operator maksimal Hardy Littlewood.

Pada tahun 1938, sebagai perluasan dari ruang Lebesgue, seorang ahli matematika C.B. Morrey mendefinisikan suatu ruang yang disebut dengan ruang Morrey. Kemudian E. Nakai (1994)l memperkenalkan ruang Morrey diperumum, di mana Nakai mendefinisikan ruang Morrey diperumum sebagai ruang fungsi-fungsi yang diintegralkan lokal yang memenuhi norma Morrey diperumum-(p, q) dan memenuhi kondisi doubling dengan konstanta penggandaan C. Selanjutnya, Nakai membuktikan ketaksamaan tipe kuat untuk operator integral fraksional pada ruang Morrey diperumum. Lebih lanjut, Gunawan, H., Eridani (2009) juga membahas mengenai keterbatasan operator integral fraksional pada ruang Morrey diperumum dengan p memenuhi kondisi doubling. Lalu, Eridani dkk (2009) mengganti p dari kondisi doubling menjadi *growth* dengan tetap mempertahankan keterbatasan operator integral fraksional di ruang yang sama. Hal tersebutlah juga yang mendasari terciptanya istilah ruang tak homogen.

Ruang tak homogen merupakan ruang $\mathbb{R}^d$ yang dilengkapi dengan ukuran Borel tak negatif μ yang memenuhi kondisi *growth.* Berbeda dengan ruang homogen yang dilengkapi oleh ukuran μ yang memenuhi kondisi *doubling.* Dengan menggunakan pengertian ke-tak homogenan tersebut. Kelanjutannya, diperkenalkan ruang Morrey diperumum untuk domain tak homogen yang merupakan ruang fungsi-fungsi terintegralkan lokal yang konvergen terhadap norma Morrey tak homogen diperumum. Ketaksamaan tipe kuat untuk operator I_α pada ruang Morrrey tak homogen diperumum juga telah dibuktikan oleh, Sihwaningrum dkk. Hasil dalam Sihwaningrum (2012) mengatakan Ketaksamaan tipe lemah untuk operator I_α pada ruang Lebesgue tak homogen dapat diperumum dalam konteks ruang Morrey tak homogen diperumum.

Kajian operator integral fraksional dengan memperkenalkan operator integral fraksional yang diperumum juga telah dikembangkan oleh E. Nakai (1994). Erdani dkk juga telah membuktikan ketaksamaan tipe lemah untuk operator integral fraksional yang diperumum pada ruang Morrey yang diperumum dengan menggunakan ketaksamaan tipe Hedberg dan ketaksamaan tipe lemah untuk operator maksimal Hardy Littlewood. Sebagai perluasan dari hasil-hasil tersebut, pada penelitian ini, ketaksamaan tipe lemah dapat dibuktikan dengan menggunakan ketaksamaan tipe lemah dan tipe kuat untuk operator maksimal Hardy Littlewood, dengan begitu akan dibuktikan ketaksamaan tipe lemah untuk operator integral fraksional pada ruang morrey tak homogen yang diperumum dengan memeperluas hasil dalam Sihwaningrum, dkk. (2012) dengan menggunakan ketaksamaan Chebyshev. Pemahaman terkait ketaksamaan operator integral fraksional pada ruang Morrey tak homogen yang diperumum memiliki signifikasi untuk mengetahui ketaksamaan dan sebagai perluasan hasil dari penelitian-penelitian yang ada.

Bagaimanapun juga, pada hakikatnya mamusia sendiri adalah makhluk yang diciptakan dengan berbagai ketaksamaan didalamnya. Begitupun makhluk hidup dan alam semesta ini diciptakan dengan berbagai ketaksamaan. Allah SWT berfirman dalam surah Al-Hujurat ayat 13 (Agama, Departemen. 1985),

يَا أَيُّهَا النَّاسُ إِنَّا خَلَقْنَاكُمْ مِنْ ذَكَرٍ وَأُنْثَىٰ وَجَعَلْنَاكُمْ شُعُوبًا وَقَبَائِلَ لِتَعَارَفُوا ۚ إِنَّ أَكْرَمَكُمْ عِنْدَ اللَّهِ أَتْقَاكُمْ ۚ إِنَّ اللَّهَ عَلِيمٌ خَبِيرٌ ﴿١٣﴾

’’Wahai sekalian manusia, sesungguhnya kami telah menciptakan kalian dari laki-laki dan perempuan dan telah kami jadikan kalian berbangsa-bangsa dan bersuku-suku supaya terjadi saling kenal mengenal di antara kalian. Sesungguhnya yang paling mulia di sisi Allah SWT adalah orang yang paling bertakwa di antara kalian. Sesungguhnya Allah SWT Maha mengetahui juga Maha mengenal’’

Ayat diatas jelas menunjukkan bagaimana manusia diciptakan dengan berbagai ketaksamaan agar saling mengenal. Allah SWT menciptakan ketaksamaan dan perbedaan sebagai suatu kondisi yang harus dijadikan pelajaran yang sangat berharga. Keseimbangan alam semesta bergantung pada bagaimana kita hidup secara berdampingan tanpa saling mengeksploitasi satu sama lain.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang diatas, adapun rumusan masalah dalam penelitian ini adalah: Bagaimana pembuktian ketaksamaan tipe lemah untuk operator integral fraksional K_α^n pada ruang Morrey tak homogen diperumum di ruang kuasi metrik menggunakan ketaksamaan Chebysev?

1.3 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan penelitian ini adalah untuk mengetahui bagaimana pembuktian ketaksamaan tipe lemah untuk operator integral fraksional K_α^n pada ruang Morrey tak homogen diperumum di ruang kuasi metrik menggunakan ketaksamaan Chebysev.

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan informasi pembuktian ketaksamaan tipe lemah operator integral fraksional pada ruang Morrey tak homogen yang diperumum di ruang kuasi metrik.

1.5 Batasan Masalah

Dalam penelitian ini, akan dibuktikan ketaksamaan tipe lemah untuk operator integral fraksional pada ruang Morrey tak homogen yang diperumum di ruang kuasi metrik dan bukan ruang lainnya. Serta, pembuktiannya akan menggunakan ketaksamaan Chebysev.

1.6 Metode Penelitian

Penenlitian ini adalah penelitian pustaka (*library research*) yang dilakukan dengan melakukan kajian terhadap buku-buku analisis harmonik, teori ukuran, jurnal serta sumber lainnya yang berkaitan dengan teori yang dibahas. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah menggunakan metode pembuktian secara induktif. Di mana pembuktian dimulai dengan pembuktian teorema yang umum menuju pada akibat khusus. Berikut langkah penelitian secara garis besar:

1. Membuktikan ketaksamaan operator maksimal Hardy Littlewood pada ruang Morrey tak homogen yang diperumum.
2. Membuktikan ketaksamaan tipe lemah untuk K_α^n pada ruang Morrey tak homogen diperumum melalui teorema Hardy Littlewood Sobolev dan memanfaatkan ketaksamaan Holder serta Chebyshev.

BAB 2

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Ruang Lebesgue

Ruang Lebesgue merupakan ruang dasar dalam ruang fungsi pada analisis fungsional yang didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.1.1

Misalkan untuk $\mathbb{R}^d$ merupakan himpunan terukur, maka $1 < p < \infty$, dan suatu fungsi f di $\mathbb{R}^d$ didefinisikan sebagai

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty \tag{2.1}$$

(Royden dan Fitzpatrick, 2010)

Definisi 2.1.2

Ruang Lebesgue lemah $L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ didefinisikan sebagai semua fungsi terukur $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ yang memenuhi

$$\int_K |f(x)|^p \; dx < \infty \tag{2.2}$$

Untuk setiap subhimpunan kompak $K \subseteq \mathbb{R}^n$. (Mu'tazili, 2019)

2.2 Ruang Lebesgue Lokal

Ruang Lebesgue lokal didefinisikan dengan fungsi terukur $1 \leq p < \infty$ yang disimbolkan $L^p_{loc} = L^p_{loc}(\mathbb{R}^d)$ merupakan kumpulan kelas-kelas ekuivalen f sedemikian sehingga untuk sub himpunan kompak $S \in R^n$ berlaku $\int_S |f|^p < \infty$. (Bartle, 1995)

2.3 Ruang Lebesgue Tak Homogen

Definisi 2.3.1

Untuk fungsi terukur $1 \leq p < \infty$, ruang Lebesgue tak homogen didefinisikan dengan $L^p(\mu) = L^p(\mathbb{R}^d, \mu)$ sedemikian sehingga

$$\|f\|_{L^p(\mu)} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p \, d\mu x\right)^{\frac{1}{p}} < \infty \qquad (2.3)$$

(Ivanal, 2013).

2.4 Ruang Ukuran Pada Ruang Kuasi Metrik

Pada sub bab ini akan dibahas mengenai ruang ukuran pada ruang kuasi metrik. Eridani dkk pada tahun 2009 mendefinisikan dengan definisi berikut. Misalkan *support* fungsi $f : X \to R$ didefinisikan oleh

$$supp\ (f) = \{x \in X : f(x) \neq 0\}.$$

Misalkan pula $X \coloneqq (X, d, \mu)$ merupakan ruang topologi di mana μ adalah ukuran lengkap. Sehingga ruang fungsi kontinu dengan *support* kompak adalah padat dalam $L^1(X, \mu)$ dan $d : X \times X \to [0, \infty)$ merupakan ruang kuasi metrik, yaitu fungsi yang memenuhi kondisi berikut:

1. Untuk semua $x \in X$, $d(x, x) = 0$
2. Untuk semua $x, y \in X$ dengan $x \neq y$, $d(x, y) > 0$
3. Terdapat konstanta $K_1 > 1$ sehingga untuk setiap $x, y \in X$ maka $d(x, y) \leq K_1\, d(y, x)$.
4. Terdapat konstanta $K_2 > 1$ sehingga untuk setiap $x, y, z \in X$ maka $d(x, z) \leq K_2\big(d(x, y) + d(y, z)\big)$.

(X, d, μ) disebut ruang kuasi metrik. Jika μ memenuhi kondisi *doubling*, dinotasikan dengan $\mu \in (DC)$, yaitu $x \in (DC)$ jika untuk semua $x \in X$ dan seluruh konstanta $r > 0$ terdapat konstanta $C > 1$ sehingga $\mu\big(B(x, 2r)\big) \leq C\mu\big(B(x, r)\big)$, maka (X, d, μ) disebut ruang tipe homogen. Jika suatu kondisi *doubling* tidak terpenuhi, maka X disebut ruang tipe tak homogen. (Eridani dkk, 2009)

2.5 Operator Integral Fraksional

Definisi 2.5.1

Misalkan f adalah fungsi terukur bernilai riil pada $\mathbb{R}^n, n \geq 1$, dan misalkan $0 < \alpha < n$. Integral fraksional dalam orde-α didefinisikan sebagai

$$I_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}} dy, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

dengan syarat integral ini ada. (Wheeden, 2015)

Menurut Wheeden, dengan membiarkan f untuk bervariasi, pemetaan yang didefinisikan sebagai $I_\alpha : f \rightarrow I_\alpha f$ di mana I_α merupakan fungsi yang memetakan $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ menuju $I_\alpha f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Definisi 2.5.2

Operator integral fraksional di ruang kuasi metrik tak homogen $\mathbb{R}^n$ yang dinotasikan dengan K_α^n didefinisikan sebagai

$$K_\alpha^n f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{d(x,y)^{1-\alpha}} d\mu(y)$$

dengan $0 < \alpha < 1$ dan fungsi f yang didefinisikan pada $\mathbb{R}^n$ (Utoyo, 2012).

Contoh 1.

Misalkan suatu bola $B = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$, dan fungsi $f_{\chi_B}(x)$ merupakan fungsi karakteristik pada bola. Maka operator integral fraksional dari f adalah

$$\begin{aligned} I_\alpha f(y) &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x)}{|x-y|^{n-\alpha}} dx \\ &= \int_B \frac{f(x)}{|x-y|^{n-\alpha}} dx + \int_{B^c} \frac{f(x)}{|x-y|^{n-\alpha}} dx \end{aligned}$$

$$= \int_B \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}}\,dx + \int_{B^c} \frac{0}{|x-y|^{n-\alpha}}\,dx$$

$$= \int_B \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}}\,dx$$

$$= \int_{\|x\|<1} \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}}\,dx\ .$$

Untuk $y = 0$, maka

$$I_\alpha\, f(0) = \int_{\|x\|<1} \frac{1}{|x|^{n-\alpha}}\,dx$$

$$= \int_{\|x\|<1} |x|^{\alpha-1}\,dx\ .$$

Misalkan $|x| = r$ maka $dx = dr$, sedemikian sehingga

$$I_\alpha\, f(0) = C\int_0^1 r^{n-1}\, r^{\alpha-n}\,dr$$

$$= C\int_0^1 r^{\alpha-1}\ dr$$

$$= C\, r^\alpha \Big|_0^1$$

$$= C\ .$$

Untuk $y \in \mathbb{R}$,

$$I_\alpha\, f(y) = \int_{\|x\|<1} \frac{1}{|x-y|^{1-\alpha}}\,dx$$

$$= \int_{\|x\|<1} |x-y|^{\alpha-1}\ dx$$

$$\le \int_{\|x\|<1} |x|^{\alpha-1}\ dx - \int_{\|x\|<1} |y|^{\alpha-1}\ dx$$

$$= C - |y|^{\alpha-1}|B|$$

$$= C - C_1|y|^{\alpha-1} .$$

Karena $\|y\| > 0$dan $\alpha - n < 0$, sedemikian sehingga

$$I_\alpha f(y) = C - C_1|y|^{\alpha-1}$$

$$= C - \frac{C_1}{|y|^{1-\alpha}} .$$

(Nurjannah, 2018).

2.6 Fungsi Operator Maksimal

Definisi 2.6.1

Misalkan $f = f(x)$ dengan $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ yaitu fungsi terintegralkan lokal pada $\mathbb{R}^n$. Fungsi $Mf = Mf(x)$ didefinisikan dengan

$$Mf(x) \coloneqq \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|\, d(y).$$

Dalam hal ini $B(x,r)$ menyatakan bola dengan pusat di $x \in \mathbb{R}^n$ radius $r > 0$ dan $|B(x,r)|$ menyatakan volumenya. (Gunawan, 2006)

2.7 Operator Integral Fraksional Pada Ruang Tak Homogen

Operator integral fraksional pada ruang tak homogen juga terkait dengan operator maksimal Hardy Littlewood pada ruang tak homogen. Untuk $1 \le p < \infty$ dan ukuran μ yang memenuhi kondisi *growth*, ruang Lebesgue tak homogen lokal $L^p_{loc}(\mu) = L^p_{loc}(\mathbb{R}^d, \mu)$ didefinisikan sebagai ruang semua fungsi terukur f yang memenuhi

$$\int_K |f(y)|^p \, d\mu(y) < \infty$$

untuk setiap subhimpunan terbatas K dari $\mathbb{R}^d$. Kemudian untuk fungsi $f \in L^p_{loc}(\mu)$operator maksimal Hardy Littlewood pada ruang tak homogen didefinisikan sebagai

$$M\,f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\mu\big(B(x,r)\big)} \int_{B(x,r)} |f(y)| d\mu(y) \qquad (2.5.1)$$

di mana $B(x,r)$ adalah sebarang bola yang berpusat di $x \in \mathbb{R}^d$ dan berjari-jari $r > 0$. (Eridani dkk, 2004)

2.8 Ketaksamaan Tipe Lemah

Misalkan didefinisikan operator $K : L^p \to L^p, 1 \leq p < \infty$ dapat dikatakan memenuhi ketaksamaan tipe lemah (p,p) jika terdapat $c > 0$ sedemikian sehingga

$$|A_\lambda| \leq \left(\frac{c\|f\|_{L^p}}{\lambda}\right)^p \text{, untuk setiap } \lambda > 0, f \in L^p \text{ ,}$$

di mana dengan $A_\lambda \coloneqq \{y \in R : |Kf(y)| > \lambda\} = \bigcup_{k=1}^{\infty}(a_k, b_k)$ dan $|A_\lambda| \leq \sum_{k=1}^{\infty}(b_k - a_k)$, $a_k, b_k \in R$. Untuk $p = \infty$, operator K dikatakan memenuhi ketaksamaan tipe lemah (∞, ∞) jika ada $c > 0$ sedemikian sehingga $\|Kf\|_{L^\infty} \leq c\|f\|_{L^\infty}$. (Duoandikoetxes, 2001)

2.9 Ruang Morrey dan Ruang Morrey Diperumum

Definisi 2.9.1

Ruang morrey yang dinotasikan sebagai $L^{p,\lambda}(\mu)$ adalah himpunan fungsi di $L^p_{loc}(\mu)$ yang konvergen terhadap norma $\|f : L^{p,\lambda}\|$ didefinisikan sebagai

$$\|f : L^{p,\lambda}(\mu)\| \coloneqq \sup_{B=B(x,r)} \left(\frac{1}{\mu\big(B(x,2r)\big)^\lambda} \int_B |f(y)|^p \, d\mu(y)\right)^{\frac{1}{p}}$$

Di mana $B(x,r) \subseteq \mathbb{R}^d$ adalah bola pada ruang $\mathbb{R}^d$ dengan jari-jari r dan berpusat di $x \in \mathbb{R}^d$. (Sihwaningrum, 2016)

Ruang Morrey yang diperumum didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.9.2

Misalkan diberikan ukuran v pada $X, \lambda \geq 0, 1 \leq p < \infty$ dan fungsi $\phi :$ $(0,\infty) \to (0,\infty)$. Ruang morrey diperumum $L_\phi^p(X,v,\mu)$ didefinisikan sebagai himpunan semua fungsi $f \in L_{loc}^p(X,v)$, sedemikian sehingga

$$\left\| f \, : \, L_\phi^p(X,v,\mu) \right\| = \sup_B \frac{1}{\phi(\mu(B))} \left(\frac{1}{\mu(B)} \int_B \, |f(y)|^p dv(y) \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \, .$$

Di mana supremum tersebut dicari atas semua bola $B \coloneqq B(x,r)$yaitu sebarang bola terbuka dalam$X$. Jika $= \mu$, maka $L_\phi^p(X,v,\mu) = L_\phi^p(X,\mu)$. (Utoyo, 2012)

2.10 Kondisi Doubling

Definisi 2.10.1

Andaikan $\phi: (0,\infty) \to (0,\infty)$ dan asumsikan jika ϕ memenuhi syarat yaitu terdapat $C_1 > 1$ sedemikian sehingga untuk setiap $s, v > 0$ berlaku,

$$\frac{1}{C_1} \leq \frac{\phi(s)}{\phi(v)} \leq C_1 \text{ , untuk setiap } \; s \in \left[\frac{r}{2}, 2v\right]$$

$$\int_r^\infty \frac{\phi(s)}{s} ds \leq C_1 \phi(v)$$

Maka fungsi ϕ dapat dikatakan memenuhi kondisi *doubling*. (Eridani, dkk, 2004)

2.11 Kondisi Growth

Definisi 2.11.1

Misalkan $\rho: (0, \infty) \to (0, \infty)$. Apabila terdapat konstanta k_1 dan k_2 yang memenuhi $0 < 2k_1 < k_2 < \infty$ dan konstanta $C > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap $r > 0$ berlaku,

$$\sup_{\frac{r}{2}<s\leq r} \rho(s) \leq C \int_{k_1 r}^{k_2 r} \frac{\rho(t)}{t} dt$$

Fungsi $\rho: (0, \infty) \to (0, \infty)$ dikatakan kondisi *growth*. (Ivanal, 2013)

2.12 Ketaksamaan Chebyshev

Definisi 2.12.1

Misalkan μ adalah ukuran Borel pada $\mathbb{R}^d$ dan $E \subseteq \mathbb{R}^d$ merupakan himpunan terukur. Apabila fungsi f adalah fungsi yang diintegralkan pada E, maka untuk setiap $\gamma > 0$ berlaku

$$\mu(\{x \in E : |f(x)| > \gamma\}) \leq \frac{1}{\gamma} \int_E |f(x)| \, d\mu(x)$$

Ketaksamaan Chebyshev ini dibahas oleh Royden dan Fitzpatrick (2010).

2.13 Kajian Integerasi Topik dengan Al-Qur'an/Hadits

Dalam sub bab ini membahas mengenai ketaksamaan dan ketaqwaan dalam Al-Qur'an. Dalam hal ini mengibaratkan manusia memiliki ketaksamaan. Ketaksamaan tersebut dapat mencakup berbagai hal dalam berkehidupan. Ketaksamaan ini adalah rahmat Allah SWT yang akan selalu ditemukan di setiap ciptaan-Nya. Bukan serta merta untuk menjadikan suatu perbandingan, melainkan supaya manusia belajar untuk saling melengkapi satu sama lain. Hal ini merupakan salah satu bentuk kekuasaan Allah SWT semata untuk manusia kembali pada Allah

SWT dan mendekatkan diri kepada-Nya. Sebagaimana difirmankan dalam Al-Quran surat Hujurat ayat 13.

يَا أَيُّهَا النَّاسُ إِنَّا خَلَقْنَاكُمْ مِنْ ذَكَرٍ وَأُنْثَىٰ وَجَعَلْنَاكُمْ شُعُوبًا وَقَبَائِلَ لِتَعَارَفُوا ۚ إِنَّ أَكْرَمَكُمْ عِنْدَ اللَّهِ أَتْقَاكُمْ ۚ إِنَّ اللَّهَ عَلِيمٌ خَبِيرٌ ﴿١٣﴾

''Wahai sekalian manusia, sesungguhnya kami telah menciptakan kalian dari laki-laki dan perempuan dan telah kami jadikan kalian berbangsa-bangsa dan bersuku-suku supaya terjadi saling kenal mengenal di antara kalian. Sesungguhnya yang paling mulia di sisi Allah SWT adalah orang yang paling bertakwa di antara kalian. Sesungguhnya Allah SWT Maha mengetahui juga Maha mengenal''. (Agama, Departemen. 1985)

Ayat ini menjelaskan bahwa Allah SWT menciptakan manusia dengan penuh keberagaman dan ketaksamaan suku, bangsa, kelompok, umat, kabilah agar dapat saling mengenal. Ketaksamaan atau perbedaan itu merupakan keniscayaan universal yang harus disikapi dengan lapang dada. Ayat tersebut juga menjelaskan bahwa yang paling mulia di sisi Allah SWT adalah yang paling bertakwa bukan siapa dari bangsa tertentu, kaum tertentu, maupun lainnya.

Ada banyak perbedaan dalam kehidupan di dunia, namun hal tersebut menjadikan keseimbangan dalam berkehidupan yang harmonis. Petunjuk lain untuk menguatkan ayat sebelumnya yang terdapat dalam Al-Quran mengenai ketaksamaan yakni dalam Surah Ar-Rum ayat 22.

وَمِنْ آيَاتِهِ خَلْقُ السَّمَاوَاتِ وَالْأَرْضِ وَاخْتِلَافُ أَلْسِنَتِكُمْ وَأَلْوَانِكُمْ إِنَّ فِي ذَٰلِكَ لَآيَاتٍ لِلْعَالِمِينَ ﴿٢٢﴾

"dan di antara tanda-tanda kekuasaan-Nya adalah penciptaan langit dan bumi dan berlain-lainan bahasamu dan warna kulitmu. Sesungguhnya pada yang demikian itu benar-benar terdapat tand-tanda bagi orang-orang yang mengetahui" (Agama, Departemen. 1985)

Melalui ayat tersebut Allah SWT menjelaskan dan mengingatkan sejatinya ketaksamaan merupakan tanda kebesaran-Nya. Jika menghendaki, Allah SWT sangat mampu menciptakan ciptaannya menjadi satu keseragaman. Namun yang di inginkan-Nya adalah keberagaman yang bewarna sebagai bentuk rahmat dan kasih sayang bagi umat-Nya. Hal ini menunjukkan sempurnanya kekuasaan-Nya dan berlakunya kehendak-Nya. Sesungguhnya Dia menetapkan adanya ketaksamaan itu agar tidak terjadi kekacauan namun keharmonisan.

2.14 Kajian Topik dengan Teori Pendukung Al-Qur'an/Hadits

Ketaksamaan dalam matematika diartikan sebagai kalimat pernyataan yang menyatakan hubungan tak sama. Biasanya akan ditandai dengan tanda hubung lebih kecil, lebih besar, lebih kecil atau sama dengan, dan lainnya. Ketaksamaan ini bentuk Rahmat Allah SWT sebagaimana terkandung dalam Al-Qur'an surah Al-Hujurat ayat 13 (Agama, Departemen. 1985),

"Wahai sekalian manusia, sesungguhnya kami telah menciptakan kalian dari laki-laki dan perempuan dan telah kami jadikan kalian berbangsa-bangsa dan bersuku-suku supaya terjadi saling kenal mengenal di antara kalian. Sesungguhnya yang paling mulia di sisi Allah SWT adalah orang yang paling bertakwa di antara kalian. Sesungguhnya Allah SWT Maha mengetahui juga Maha mengenal".

Dalam tafsir Ath Thobari (2009) menjelaskan tentang ayat ini bahwa sesungguhnya orang yang paling mulia di anatara manusia disisi Tuhan adalah orang yang paling bertakwa kepada-Nya, dengan menunaikan segala kewajiban yang diwajibkan-Nya dan menjauhi segala kemaksiatan yang dilarang-Nya. Bukan orang yang paling besar rumahnya dan paling banyak keluarganya.

Pada ayat tersebut Said Nursi (2003) menafsirkan, menjelaskan, dan memberikan penekanan bahwa keberagaman yang sengaja diberikan Allah SWT kepada manusia agar mereka sadar akan tugas kemanusiaan merekauntuk saling melengkapi, dengan begitu manusia dapat saling mengenal dan membantu satu sama lain.

Said Nursi (2003) juga memberikan keterangan bahwa pada ayat ini khusus membahas tentang kehidupan sosial, yang mana didalamnya terdapat ketaksamaan dan juga suatu keharmonisan apabila dapat memahaminya dengan baik. Maka dianjurkan untuk manusia agar saling mengenal dan memahami, sehingga dapat menjalin relasi dan saling membantu.

Begitu pula dengan Quraish Shihab (1992), yang mengatakan bahwa ayat ini berbicara mengenai prinsip dasar hubungan antar manusia. Pada ayat ini penekanan yang ditonjolkan Quraish Shihab adalah dengan menghilangkan ketaksamaan yang di sengaja oleh Allah SWT sebagai *rahmat*, tidak ada perbedaan dari segi derjat, suku, atau warna kulit. Menurut beliau yang membedakan hanyalah ketakwaan seseorang dihadapan Allah SWT.

2.15 Kajian Topik dengan Teori Pendukung

Dalam pembahasan artikel *Weak-*$(p,)$ *Inequality for Fractional Integral Operators on Generalized Morrey Spaces of Non-Homogeneous Type* oleh Ivanal, D., dan H. Gunawan (2013) yang telah membuktikan bahwa,

Lemma 2.15.1

Misalkan $f \in L^1_{loc}(\mu)$ maka untuk sebarang bola $B(x,R)$ pada $\mathbb{R}^d$ berlaku

$$\int\limits_{B(x,R)} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} d\mu(y) \leq C\, R^{\alpha} M^{n} f(x) \qquad (2.15.1)$$

Bukti. Dengan menguraikan dekomposisi suatu bola $B(x,R)$ dan berdasarkan definisi operator maksimal serta fakta bahwa $\sum_{j=-\infty}^{-1} 2^{j\alpha}$ adalah konvergen, maka untuk sebarang bola $B(x,R) \subseteq \mathbb{R}^d$ berlaku

$$\int_{B(x,R)} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} d\mu(y) = \sum_{j=-\infty}^{-1} \int_{B(x,2^{j+1}R \setminus B(x,2^{j}R)} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} d\mu(y)$$

$$\leq \sum_{j=-\infty}^{-1} \frac{1}{(2^j R)^{n-\alpha}} \int_{B(x,2^{j+1}R)} |f(y)| d\mu(y)$$

$$\leq 2^n R^\alpha M^n f(x) \sum_{j=-\infty}^{-1} 2^{j\alpha}$$

$$\leq 2^j R^\alpha M\, f(x) \sum_{j=-\infty}^{-1} 2^{j\alpha}$$

$$\leq C\, R^\alpha M\, f(x).$$

BAB 3

METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Penelitian ini menggunakan metode penelitian kualitatif, di mana teknik pengumpulan data diperoleh dengan studi pustaka. Studi pustaka tersebut didapatkan dengan cara menghimpun berbagai referensi yang berhubungan dengan topik penelitian yakni melalui buku maupun jurnal.

3.2 Pra Penelitian

Penelitian ini dilakukan dengan cara menghimpun berbagai referensi yang sesuai dengan penelitian yang akan dilakukan pembuktiannya yakni dari buku, jurnal, dan artikel. Pada penelitian ini, penulis menggunakan beberapa rujukan, berikut beberapa rujukan:

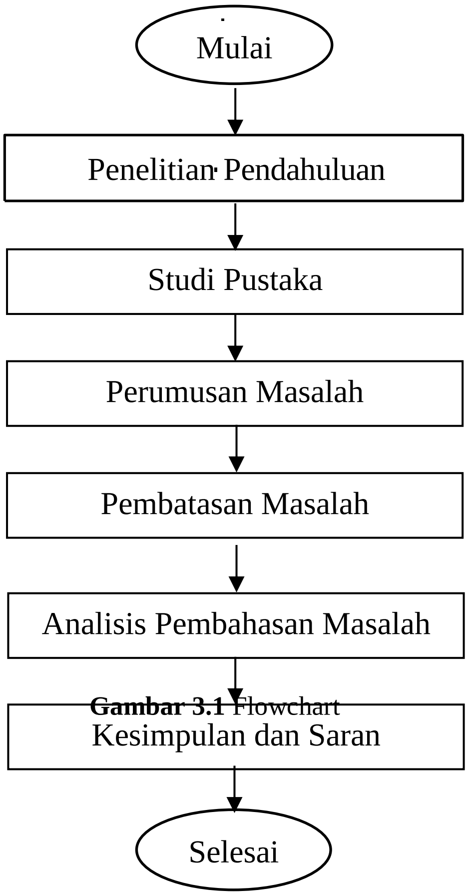
Rujukan pertama dari Denny Ivanal Hakim dan Hendra Gunawan pada tahun 2013 yang berjudul *Weak*-(p,q) *Inequality for Fractional Integrals Operator On Generalized Morrey Spaces of Non-Homogeneous Type*. Penelitian ini membahas ketaksaman lemah untuk operator integral fraksional terhadap perumuman Ruang Morrey melalui ketaksamaan Chebyshev.

Rujukan kedua diambil dari Idha Sihwaningrum pada tahun 2016 yang berjudul Ketaksamaan Tipe Lemah untuk Operator Integral Fraksional di Ruang Morrey Atas Ruang Metrik Tak Homogen. Penelitian ini membahas tentang perumuman dari ketaksamaan tipe lemah untuk operator integral fraksional di ruang Lebesgue atas ruang metrik tak homogen.

Penelitian selanjutnya adalah penelitian skripsi yang berjudul "Ketaksamaan Tipe Lemah untuk Operator Integral Fraksional pada Ruang Morrey Tak Homogen yang Diperumum di Ruang Metrik".

3.3 Tahapan Penelitian

Tahapan penelitian yang ada sesuai dengan penelitian yaitu penelitian kualitatif berikut tahapan-tahapan penelitiannya:



Gambar 3.1 Flowchart

BAB 4

PEMBAHASAN

4.1 Ketaksamaan Operator Integral Fraksional pada Ruang Morrey Tak Homogen yang Diperumum

Sebelum membuktikan ketaksamaan operator integral fraksional pada ruang morrey tak homogen yang diperumum, akan ditunjukkan ketaksamaan operator integral fraksional di ruang kuasi metrik tak homogen.

Untuk membuktikan ketaksamaan tersebut diperoleh dengan membagi integral pada definisi K_α^n menjadi bagian lokal yang ditaksir oleh operator maksimal M^n yang membutuhkan lemma berikut.

Lemma 4.1.1

Untuk $\alpha > 0$, misalkan $f \in L_{loc}^1(\mu)$ maka untuk sebarang bola $B(x,R)$ pada $\mathbb{R}^d$ berlaku

$$\int_{B(x,R)} \frac{|f(y)|}{d(x,y)^{1-\alpha}}\, d\mu(y) \leq C\, R^\alpha M^n f(x) \tag{4.1}$$

Bukti. Dengan menguraikan bola $B(x,R)$ dan berdasarkan definisi operator maksimal serta fakta bahwa $\sum_{j=-\infty}^{-1} 2^{j\alpha}$ adalah konvergen, maka untuk sebarang bola $B(x,R) \subseteq \mathbb{R}^d$ berlaku

$$\int_{B(x,R)} \frac{|f(y)|}{d(x,y)^{1-\alpha}}\, d\mu(y) \leq \int_{d(x,y)\leq\frac{1}{2}R} \frac{|f(y)|}{d(x,y)^{1-\alpha}}\, d\mu(y)$$

$$+ \int_{\frac{1}{2}R\leq d(x,y)<R} \frac{|f(y)|}{d(x,y)^{1-\alpha}}\, d\mu(y)$$

$$= \int_{d(x,y)<\frac{1}{4}R} \frac{|f(y)|}{d(x,y)^{1-\alpha}} d\mu(y)$$

$$+ \int_{\frac{1}{4}R \le d(x,y)<\frac{1}{2}R} \frac{|f(y)|}{d(x,y)^{1-\alpha}} d\mu(y)$$

$$+ \int_{\frac{1}{2}R \le d(x,y)<R} \frac{|f(y)|}{d(x,y)^{1-\alpha}} d\mu(y)$$

$$\le \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{2^j}R \le d(x,y)<\frac{1}{2^{j+1}}R} \frac{|f(y)|}{d(x,y)^{1-\alpha}} d\mu(y)$$

$$\le \sum_{j=1}^{\infty} \int_{2^jR \le d(x,y)<2^{j+1}R} \frac{|f(y)|}{d(x,y)^{1-\alpha}} d\mu(y)$$

$$= \sum_{j=-\infty}^{-1} \int_{d(x,y)\le 2^{j+1}R} \frac{|f(y)|}{d(x,y)^{1-\alpha}} d\mu(y)$$

$$\le \sum_{j=-\infty}^{-1} \int_{B(2^{j+1}R)} \frac{|f(y)|}{d(x,y)^{1-\alpha}} d\mu(y)$$

$$\le \sum_{j=-\infty}^{-1} \frac{1}{(2^jR)^{1-\alpha}} \int_{B(x,2^{j+1}R)} |f(y)| d\mu(y)$$

$$\le \sum_{j=-\infty}^{-1} \left(2^jR\right)^{\alpha} \frac{1}{(2^jR)} \int_{B(x,2^{j+1}R)} |f(y)| d\mu(y)$$

$$\le 2^n R^{\alpha} M^n f(x) \sum_{j=-\infty}^{-1} 2^{j\alpha}$$

$$\le 2^j R^{\alpha} M\, f(x) \sum_{j=-\infty}^{-1} 2^{j\alpha}$$

$$\le C\, R^{\alpha} M\, f(x).$$

Kemudian dengan menggunakan Lemma 4.1.1 dapat diperoleh dua ketaksamaan yang diberikan sebagai berikut.

Akibat 4.1.2

Misalkan $B(x,R)$ merupakan bola dengan pusat di $x \in \mathbb{R}^d$ dan berjari-jari $R > 0$, maka

$$\int_{B(x,R)} \frac{1}{d(x,y)^{1-\alpha}}\, d\mu(y) \geq C\, R^{\alpha} \tag{4.2}$$

dan untuk sebarang bola $B(a,r) \subseteq \mathbb{R}^d$ berlaku bahwa

$$\int_{B(x,R)} \frac{\chi_{B(a,r)}(y)}{d(x,y)^{1-\alpha}}\, d\mu(y) \leq C\, R^{\alpha} M^{n} \chi_{B(a,r)}(x) \tag{4.3}$$

Bukti. Untuk akibat (4.2), ambil sebarang bola $B(a,r) \subseteq \mathbb{R}^d$. Didefinisikan $f(y) = 1$ untuk setiap $y \in B(x,R)$.

$$\begin{aligned}
\int_{B(x,R)} \frac{|f(y)|}{d(x,y)^{1-\alpha}}\, d\mu(y) &\leq \int_{d(x,y)\leq\frac{1}{2}R} \frac{|f(y)|}{d(x,y)^{1-\alpha}}\, d\mu(y) \\
&\quad + \int_{\frac{1}{2}R\leq d(x,y)<R} \frac{|f(y)|}{d(x,y)^{1-\alpha}}\, d\mu(y) \\
&= \int_{d(x,y)<\frac{1}{4}R} \frac{|f(y)|}{d(x,y)^{1-\alpha}}\, d\mu(y) \\
&\quad + \int_{\frac{1}{4}R\leq d(x,y)<\frac{1}{2}R} \frac{|f(y)|}{d(x,y)^{1-\alpha}}\, d\mu(y) \\
&\quad + \int_{\frac{1}{2}R\leq d(x,y)<R} \frac{|f(y)|}{d(x,y)^{1-\alpha}}\, d\mu(y) \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{2^j}R\leq d(x,y)<\frac{1}{2^{j+1}}R} \frac{|f(y)|}{d(x,y)^{1-\alpha}}\, d\mu(y)
\end{aligned}$$

$$\leq \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{2^j}R \leq d(x,y) < \frac{1}{2^{j+1}}R} \frac{|f(y)|}{d(x,y)^{1-\alpha}} d\mu(y)$$

$$\leq \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{2^j}R \leq d(x,y) < \frac{1}{2^{j+1}}R} \frac{|f(y)|}{d(x,y)^{1-\alpha}} d\mu(y)$$

$$\leq \sum_{j=-\infty}^{-1} \int_{2^jR \leq d(x,y) < 2^{j+1}R} \frac{|f(y)|}{d(x,y)^{1-\alpha}} d\mu(y)$$

$$\leq \sum_{j=-\infty}^{-1} \int_{d(x,y) < 2^{j+1}R} \frac{|f(y)|}{d(x,y)^{1-\alpha}} d\mu(y)$$

$$\leq \sum_{j=-\infty}^{-1} \int_{B(x,2^{j+1}R)} \frac{|f(y)|}{d(x,y)^{1-\alpha}} d\mu(y)$$

$$\leq \sum_{j=-\infty}^{-1} \frac{1}{(2^jR)^{1-\alpha}} \int_{B(x,2^{j+1}R)} 1 \, d\mu(y)$$

$$\leq \sum_{j=-\infty}^{-1} \left(2^jR\right)^{\alpha} \frac{1}{(2^jR)} \int_{B(x,2^{j+1}R)} 1 \, d\mu(y)$$

$$\leq 2\, R^{\alpha}$$

$$\leq C\, R^{\alpha}$$

Untuk akibat (4.3), ambil sebarang bola $B(a,r) \subseteq \mathbb{R}^d$. Didefinisikan $f(y) = \chi_{B(a,r)}(y)$ untuk setiap $y \in B(x,R)$

$$\int_{B(x,R)} \frac{|f(y)|}{d(x,y)^{1-\alpha}} d\mu(y) \leq \int_{d(x,y) \leq \frac{1}{2}R} \frac{|f(y)|}{d(x,y)^{1-\alpha}} d\mu(y)$$

$$+ \int_{\frac{1}{2}R \leq d(x,y) < R} \frac{|f(y)|}{d(x,y)^{1-\alpha}} d\mu(y)$$

$$= \int_{d(x,y)\le \frac{1}{4}R} \frac{|f(y)|}{d(x,y)^{1-\alpha}} d\mu(y)$$

$$+ \int_{\frac{1}{4}R\le d(x,y)<\frac{1}{2}R} \frac{|f(y)|}{d(x,y)^{1-\alpha}} d\mu(y)$$

$$+ \int_{\frac{1}{2}R\le d(x,y)<R} \frac{|f(y)|}{d(x,y)^{1-\alpha}} d\mu(y)$$

$$\le \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{2^j}R\le d(x,y)<\frac{1}{2^{j+1}}R} \frac{|f(y)|}{d(x,y)^{1-\alpha}} d\mu(y)$$

$$\le \sum_{j=-\infty}^{-1} \int_{2^jR\le d(x,y)<2^{j+1}R} \frac{|f(y)|}{d(x,y)^{1-\alpha}} d\mu(y)$$

$$\le \sum_{j=-\infty}^{-1} \int_{d(x,y)<2^{j+1}R} \frac{|f(y)|}{d(x,y)^{1-\alpha}} d\mu(y)$$

$$\le \sum_{j=-\infty}^{-1} \int_{B(x,2^{j+1}R)} \frac{|f(y)|}{d(x,y)^{1-\alpha}} d\mu(y)$$

$$\le \sum_{j=-\infty}^{-1} \frac{1}{(2^jR)^{1-\alpha}} \int_{B(x,2^{j+1}R)} \left|\chi_{B(a,r)}(y)\right| d\mu(y)$$

$$\le \sum_{j=-\infty}^{-1} (2^jR) \frac{1}{(2^jR)} \int_{B(x,2^{j+1}R)} \chi_{B(a,r)}(y)\, d\mu(y)$$

$$\le 2\, R^{\alpha} M\chi_{B(a,r)}(y)$$

$$\le C\, R^{\alpha} M\chi_{B(a,r)}(y)$$

Dalam penelitian Sihwaningrum dkk (2012) bukti ketaksamaan tipe lemah untuk M^n pada ruang Morrey tak homogen yang diperumum diasumsikan bahwa fungsi ϕ memenuhi kondisi integral, yaitu $\int_r^{\infty} \frac{\phi(t)}{t} dt \le C\phi(r),\ \forall r > 0$. Dengan mengasumsikan kondisi integral untuk fungsi ϕ^p untuk $1 \leq p < \infty$, juga dapat dibuktikan suatu ketaksamaan untuk M^n yang diberikan dalam lemma berikut. (Ivanal dan Gunawan, 2013 dan Sihwaningrum dkk, 2010)

Lemma 4.1.3

Misalkan $1 \leq p < \infty$ dan jika fungsi ϕ memenuhi kondisi integral

$$\int_r^\infty \frac{\phi(t)^p}{t} dt \leq C\phi(r)^p, \text{untuk setiap } r > 0$$

maka untuk sebarang bola $B(a,r) \subseteq \mathbb{R}^d$ dan untuk setiap fungsi $f \in L^{p,\phi}(\mu)$ berlaku

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|^p \, M^n \chi_{B(a,r)}(y) d\mu(y) \leq Cr^n \phi(r)^p \|f\|_{L^{p,\phi}(\mu)}^p. \qquad (4.4)$$

Bukti. Kita amati sebarang bola $B(a,r) \subseteq \mathbb{R}^d$. Dengan menguraikan $\mathbb{R}^d$, maka dapat diperoleh

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|^p \, M^n \chi_{B(a,r)}(y) d\mu(y) \\ &\qquad \leq \int_{B(a,2r)} |f(y)|^p M^n \chi_{B(a,r)}(y) d\mu(y) \\ &\qquad + \sum_{j=1}^{\infty} \int_{B(a,2^{j+1}) \setminus B(a,2^j r)} |f(y)|^p M^n \chi_{B(a,r)}(y) d\mu(y). \end{aligned}$$

Karena untuk setiap $y \in B(a, 2r)$ dan $R > 0$ berlaku

$$\begin{aligned} \frac{1}{R^n} \int_{B(y,R)} \chi_{B(a,r)}(x) d\mu(x) &= \frac{\mu\big(B(a,r) \cap B(y,R)\big)}{R^n} \\ &\leq \frac{\mu\big(B(y,R)\big)}{R^n} \\ &\leq C_\mu \end{aligned}$$

maka untuk setiap $y \in B(a,2r)$ berlaku bahwa $M^n\chi_{B(a,r)}(y) \leq C_\mu$. Karena untuk setiap $y \in B\left(a,2^{j+1}r\right) \setminus B\left(a,2^j r\right)$ dengan $j \in \mathbb{N}$ dan $\forall R > 0$ berlaku

$$\int_{B(y,\mathcal{R})} \frac{\chi_{B(a,r)}(x)}{R^n} = \frac{\mu\big(B(a,r) \cap B(y,R)\big)}{R^n}$$

$$\leq \frac{\mu\big(B(a,r)\big)}{(2^j r + r)^n}$$

$$\leq \frac{C_\mu}{2^{jn}},$$

dengan demikian $M^n\chi_{B(a,r)}(y) \leq \frac{C_\mu}{2^j}$ untuk $y \in B\left(a,2^{j+1}r\right) \setminus B(a,2^j r)$ dengan $j \in \mathbb{N}$.

Berdasarkan kedua taksiran diatas untuk $M\chi_{B(a,r)}(y)$ yang diberikan sebelumnya, serta $\|f\|_{L^{p,\phi}(\mu)}$ dan kondisi *doubling* dari ϕ^p, maka dapat diperoleh

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|^p M^n\chi_{B(a,r)}(y)d\mu(y)$$

$$\leq \int_{B(a,2r)} |f(y)|^p M^n\chi_{B(a,r)}(y)d\mu(y)$$

$$+ \sum_{j=1}^{\infty} \int_{B\left(a,2^{j+1}r\right)\setminus B\left(a,2^j r\right)} |f(y)|^p M^n\chi_{B(a,r)}(y)d\mu(y)$$

$$\leq C\left(\int_{B(a,2r)} |f(y)|^p d\mu(y) + \sum_{j=1}^{\infty} \int_{B\left(a,2^{j+1}r\right)\setminus B\left(a,2^j r\right)} \frac{|f(y)|^p}{2^{jn}} d\mu(y)\right)$$

$$\leq C\left((2r)^n\phi(2r)^p\|f\|_{L_{p,\phi}(\mu)}^p + \sum_{j=1}^{\infty}\left(2^{j+1}r\right)^n \phi\left(2^{j+1}r\right)^p \frac{\|f\|_{L_{p,\phi}(\mu)}^p}{2^{jn}}\right)$$

$$\leq Cr^n\|f\|_{L_{p,\phi}(\mu)}^p \sum_{j=0}^{\infty} \phi\left(2^{j+1}r\right)^p$$

$$\leq Cr^n \|f\|_{L_{p,\phi}(\mu)}^p \sum_{j=0}^{\infty} \int_{2^j r}^{2^{j+1} r} \frac{\phi(t)^p}{t} dt$$

$$\leq Cr^n \|f\|_{L_{p,\phi}(\mu)}^p \int_r^{\infty} \frac{\phi(t)^p}{t} dt$$

$$\leq Cr^n \, \phi\,(r)^p \|f\|_{L_{p,\phi}(\mu)}^p ,$$

di mana hasil tersebut merupakan ketaksamaan yang diinginkan.

4.2 Ketaksamaan Tipe Lemah untuk K_α^n pada Ruang Morrey Tak Homogen yang Diperumum

Ketaksamaan Chebyshev menjelaskan bahwa jika sebuah fungsi non-negatif melebihi atau lebih besar dari konstanta positif di suatu himpunan, maka ukuran himpunan tersebut selalu lebih kecil atau sama dengan (didominasi) hasil bagi dari integral fungsi tersebut terhadap seluruh interval dengan konstanta positif tersebut. Ketaksamaan Chebishev lebih lengkapnya diberikan dalam teorema berikut.

Teorema 4.2.1

Anggaplah μ adalah ukuran Borel pada $\mathbb{R}^d$ dan $E \subseteq \mathbb{R}^d$ merupakan himpunan terukur. Jika f fungsi yang diintegralkan pada E, maka untuk setiap $\gamma > 0$ berlaku

$$\mu(\{x \in E : |f(x)| > \gamma\}) \leq \frac{1}{\gamma} \int_E |f(x)|\, d\mu(x).$$

Bukti. Teroema diatas dapat dilihat pembuktiaanya pada Royden dan Fitzpatrick (2010). Didefinisikan bahwa $E_\gamma = \{x \in E : |f(x)| > \gamma\}$ untuk setiap $\gamma > 0$. Karena $E_\gamma \subseteq E$, maka didapatkan

$$\frac{1}{\gamma} \int_E |f(x)|\, d\mu(x) \geq \frac{1}{\gamma} \int_{E_\gamma} |f(x)|\, d\mu(x)$$

$$\geq \int_{E_\gamma} d\mu(x)$$

$$= \mu(E_\gamma)\,.$$

Anggaplah $B(a,r)$ sebagai sebarang bola di $\mathbb{R}^d$ dan γ sebarang bilangan riil positif. Dalam bukti ketaksamaan tipe lemah untuk K_α untuk mengaitkan ketaksamaan M^n dalam akibat 4.1.2 dan lemma 4.1.3 digunakan ketaksamaan Chebyshev dengan ukuran himpunan berikut:

$$\left\{x \in B(a,r) : \int_{B(x,R)} \frac{|f(y)|^p}{d(x,y)^{1-\alpha}} d\mu(y) > \gamma\right\}.$$

Lebih lanjut, ketaksamaan tipe lemah untuk K_α^n pada ruang Morrey tak homogen yang diperumum diberikan dalam teorema berikut.

Teorema 4.2.2.

Misalkan $1 \leq p < q < \infty$, perhatikan bahwa $\inf_{r>0} \phi(r) = 0$, $\sup_{r>0} \phi(r) = \infty$, dan jika fungsi ϕ memenuhi

$$\int_r^\infty \frac{\phi(t)^p}{t} dt \leq C\phi(r)^p$$

dan

$$r^\alpha \phi(r) + \int_r^\infty t^{\alpha-1}\phi(t)\, dt \leq C\phi(r)^{\frac{p}{q}}$$

untuk setiap $r > 0$, maka sebarang bola $B(a,r) \subseteq \mathbb{R}^d$ dan untuk setiap $f \in L^{p,\phi}(\mu)$ berlaku

$$\mu(\{x \in B(a,r) : |K_\alpha f(x)| > \gamma\}) \leq Cr^n\phi(r)^p \left(\frac{\|f\|_{L^{p,\phi}(\mu)}}{\gamma}\right)^q, \forall \gamma > 0. \qquad (4.5)$$

Bukti. Pandang bahwa sebarang bola $B(a,r) \subseteq \mathbb{R}^d$. Untuk setiap $x \in B(a,r)$ tulis $K_\alpha f(x) = K_1(x) + K_2(x)$ di mana

$$K_1(x) = \int_{B(x,R)} \frac{f(y)}{d(x,y)^{1-\alpha}} d\mu(y)$$

dan

$$K_2(x) = \int_{\mathbb{R}^d \backslash B(x,R)} \frac{f(y)}{d(x,y)^{1-\alpha}} d\mu(y)$$

untuk sebarang $R > 0$ yang tertentu. Berdasarkan ketaksamaan Holder dan dengan menguraikan $\mathbb{R}^d \backslash B(x,R)$ secara dipartisi, kondisi *growth* dari μ, serta definisi dari $\|f\|_{L^{p,\phi}(\mu)}$, didapatkan

$$\begin{aligned}
|K_2(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^d \backslash B(x,R)} \frac{f(y)}{d(x,y)^{1-\alpha}} d\mu(y) \\
&\leq \sum_{j=0}^{\infty} \int_{B(x,2^{j+1}R) \backslash B(x,2^j R)} \frac{f(y)}{d(x,y)^{1-\alpha}} d\mu(y) \\
&\leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2^j R)^{1-\alpha}} \int_{B(x,2^{j+1}R)} |f(y)| d\mu(y) \\
&\leq \frac{2^1}{2^\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(2^{j+1}R\right)^\alpha}{(2^{j+1}R)^1} \left(\int_{B(x,2^{j+1}R)} |f(y)|^p d\mu(y) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\mu\left(B\left(x, 2^{j+1}R\right)\right) \right)^{1-\frac{1}{p}} \\
&\leq C \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(2^{j+1}R\right)^\alpha}{(2^{j+1}R)^1} \left(\int_{B(x,2^{j+1}R)} |f(y)|^p d\mu(y) \right)^{\frac{1}{p}} \left(2^{j+1}R\right)^{1-\frac{1}{p}} \\
&\leq C \sum_{j=0}^{\infty} \left(2^{j+1}R\right)^\alpha \left(\frac{1}{(2^{j+1}R)^1} \int_{B(x,2^{j+1}R)} |f(y)|^p d\mu(y) \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq C \|f\|_{L^{p,\phi}(\mu)} \sum_{j=0}^{\infty} \left(2^{j+1}R\right)^\alpha \phi\left(2^{j+1}R\right).
\end{aligned}$$

Karena fungsi $t \to t^\alpha \phi(t)$ memenuhi kondisi doubling, maka

$$|K_2(x)| \leq C \|f\|_{L^{p,\phi}(\mu)} \sum_{j=0}^{\infty} \int_{2^j R}^{2^{j+1}R} t^{\alpha-1} \phi(t) dt$$

$$= C\|f\|_{L^{p,\phi}(\mu)}\int_R^\infty t^{\alpha-1}\phi(t)dt$$

$$\leq C_0\|f\|_{L^{p,\phi}(\mu)}(R)^{\frac{p}{q}}.$$

Ambil sebarang $\gamma > 0$. Misalkan $\bar{\gamma} = \left(\frac{\gamma}{2C_0\|f\|_{L^{p,\phi}(\mu)}}\right)^{\frac{q}{p}}$, karena diasumsikan fungsi ϕ memenuhi $\inf_{r>0}\phi(r) < \bar{\gamma} < \sup_{r>0}\phi(r)$, maka terdapat $k_0 \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga untuk suatu $R_1, R_2 \in [2^{k_0}, 2^{k_0+1}]$ maka berlaku

$$\phi(R_1) \leq \bar{\gamma} \leq \phi(R_2).$$

Karena $\frac{1}{2} \leq \frac{R_1}{R_2} \leq 2$, maka terdapat $C > 0$ sedemikian sehingga $\phi(R_2) \leq C\phi(R_1)$. Akibatnya

$$\phi(R_1) \leq \bar{\gamma} \leq \phi(R_2)\,. \tag{4.6}$$

Dengan demikian, untuk $R = R_1$maka berlaku

$$|K_2(x)| \leq C_0\|f\|_{L^{p,\phi}(\mu)}\phi(R_1)^{\frac{p}{q}}$$

$$\leq C_0\|f\|_{L^{p,\phi}(\mu)}\bar{\gamma}^{\frac{p}{q}}$$

$$= \frac{\gamma}{2}.$$

Didefinisikan bahwa $E_\lambda = \{x \in B(a,r) : |K_\alpha^1 f(x)| > \gamma\}$. Karena untuk setiap $x \in B(a,r)$ berlaku

$$|K_\alpha^1 f(x)| \leq |K_1(x)| + |K_2(x)| \leq |K_1(x)| + \frac{\gamma}{2},$$

maka kita memiliki

$$\mu(E_\lambda) \leq \mu\left(\left\{x \in B(a,r) : |K_1(x)| > \frac{\gamma}{2}\right\}\right).$$

Dengan menggunakan ketaksamaan Holder dan ketaksamaan (3.2), diperoleh

$$|K_1(x)| \leq \left(\int_{B(x,R_1)} \frac{|f(y)|^p}{d(x,y)^{1-\alpha}} d\mu(y)\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B(x,R_1)} \frac{1}{d(x,y)^{1-\alpha}} d\mu(y)\right)^{1-\frac{1}{p}}$$

$$\leq C_1 R_1^{\alpha\left(1-\frac{1}{p}\right)} \left(\int_{B(x,R_1)} \frac{|f(y)|^p}{d(x,y)^{1-\alpha}} d\mu(y)\right).$$

Kemudian berdasarkan ketaksamaan terakhir, ketaksamaan Chebyshev, dan dengan menggunakan ketaksamaan (4.3), (4.4), dan (4.6) serta kondisi untuk fungsi ϕ yaitu $r^\alpha \phi(r) \leq C\phi(r)^{\frac{p}{q}}$ untuk setiap $r > 0$, maka diperoleh

$$\mu(E_\gamma) \leq \mu\left(\left\{x \in B(a,r) : \int_{B(x,R_1)} \frac{|f(y)|^p}{d(x,y)^{1-\alpha}} d\mu(y) > \left(\frac{\gamma}{2C_1 R_1^{\alpha\left(1-\frac{1}{p}\right)}}\right)^p\right\}\right)$$

$$\leq \frac{2^p C_1^p R_1^{\alpha p\left(1-\frac{1}{p}\right)}}{\gamma^p} \int_{B(a,r)} \int_{B(x,R_1)} \frac{|f(y)|^p}{d(x,y)^{1-\alpha}} d\mu(y)\, d\mu(x).$$

$$\leq \frac{C}{\gamma^p} R_1^{\alpha(p-1)} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{B(x,R_1)} \frac{|f(y)|^p}{d(x,y)^{1-\alpha}} \chi_{B(a,r)}(x) d\mu(y) d\mu(x)$$

$$= \frac{C}{\gamma^p} R_1^{\alpha(p-1)} \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|^p \int_{B(y,R_1)} \frac{\chi_{B(a,r)}(x)}{d(x,y)^{1-\alpha}} d\mu(x) d\mu(y)$$

$$\leq \frac{C}{\gamma^p} R_1^{\alpha p} \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|^p M^n \chi_{B(a,r)}(y) d\mu(y)$$

$$\leq \frac{C}{\gamma^p} \phi(R_1)^{\frac{p^2}{q}-p} r^n \phi(r)^p \|f\|_{L^{p,\phi}(\mu)}^p$$

$$\leq \frac{C}{\gamma^p} \bar{\gamma}^{\frac{p^2}{q}-p} r^n \phi(r)^p \|f\|_{L^{p,\phi}(\mu)}^p$$

$$\leq C r^n \phi(r)^p \left(\frac{\|f\|_{L^{p,\phi}(\mu)}^p}{\gamma}\right)^q,$$

di mana ketaksamaan tersebut merupakan ketaksamaan yang diinginkan.

Perhatikan bahwa $\phi(r) = r^{-\frac{1}{p}}$ dan $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{1}$ memenuhi hipotesis Teorema (4.6). Karena untuk $\phi(r) = r^{-\frac{1}{p}}$ berlaku $L^{p,\phi}(\mu) = L^p(\mu)$, maka untuk setiap fungsi $f \in L^p(\mu)$ dan sebarang bola $B(a,r) \subseteq \mathbb{R}^d$ berlaku

$$\mu(\{x \in B(a,r) : |K_\alpha f(x)| > \gamma\}) \leq C\left(\frac{\|f\|_{L^{p,\phi}(\mu)}^p}{\gamma}\right)^q \qquad (4.7)$$

untuk setiap $\gamma > 0$. Karena pada ketaksamaan (4.7) diatas berlaku bahwa untuk sebarang bola $B(a,r)$ pada $\mathbb{R}^d$, maka untuk sebarang $f \in L^p(\mu)$ berlaku

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^d : |K_\alpha f(x)| > \gamma\}) \leq C\left(\frac{\|f\|_{L^{p,\phi}(\mu)}^p}{\gamma}\right)^q, \forall\gamma > 0$$

terbukti bahwa teorema (4.6) merupakan perumuman teorema berikut,

.Jika $1 \leq p < \frac{n}{\alpha}$ dan $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$, maka terdapat konstanta $C > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap $f \in L^p(\mu)$ dan $\gamma > 0$ berlaku

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^d : |K_\alpha^n f(x)| > \gamma\}) \leq C\left(\frac{\|f\|_{L^p(\mu)}}{\gamma}\right)^q$$

Kemudian kita subtitusikan$\frac{1}{q} = 1 - \frac{\alpha}{1-\chi}$ untuk suatu $\lambda \in [0, n-\alpha)$ pada ketaksamaan $r^\alpha \phi(r) \leq C\phi(r)^{\frac{1}{q}}$, didapatkan

$$\phi(r) \leq C_r^{\lambda-1}, \qquad \forall r > 0.$$

Berdasarkan ketaksamaan terakhir, maka dideroleh

$$\int_r^\infty t^{\alpha-1}\,\phi(t)dt \leq Cr^{\lambda+\alpha-1}, \qquad \forall r > 0$$

yang merupakan kondisi untuk fungsi ϕ dalam Teorema 4.5. hal ini menunjukkan bahwa Teorema 4.2 merupakan perluasan Teorema 4.5.

4.3 Analisis Integrasi Topik dengan Kajian Islam

Ketaksamaan dalam matematika adalah kalimat atau pernyataan yang menunjukkan perbandingan ukuran dua objek atau lebih. Dalam hal ini ketaksamaan biasa di notasikan dengan tanda hubung lebih kecil, lebih besar, lebih kecil sama dengan, lebih besar sama dengan, tidak sama dengan, dan lainnya. Dalam matematika khususnya matematikawan sering menggunakan ketaksamaan untuk jumlah terikat yang rumus eksaknya tidak dapat dihitung dengan mudah. Beberapa ketaksamaan seperti itu sering digunakan sehingga memiliki nama dari peneliti seperti ketaksamaan Bernoulli, Chebysev, dan lainnya. Pada segala aspek kehidupan manusia juga tidak lepas dari ketaksamaan atau perbedaan. Sebagaimana ketaksamaan yang di bahas dalam Al-Qur’an surah Al-Hujurat ayat 13.

يَا أَيُّهَا النَّاسُ إِنَّا خَلَقْنَاكُمْ مِنْ ذَكَرٍ وَأُنْثَىٰ وَجَعَلْنَاكُمْ شُعُوبًا وَقَبَائِلَ لِتَعَارَفُوا ۚ إِنَّ أَكْرَمَكُمْ عِنْدَ اللَّهِ أَتْقَاكُمْ ۚ إِنَّ اللَّهَ عَلِيمٌ خَبِيرٌ ﴿١٣﴾

Ayat tersebut menjelaskan bahwa ketaksamaan adalah rahmat Allah SWT yang akan selelu ditemukan dalam ciptaan-Nya untuk saling belajar dan melengkapi satu sama lain. Allah SWT menciptakan keberagaman dan ketaksamaan bukan untuk menjadi perbandingan, namun agar supaya manusia mendekatkan diri kepada-Nya. Dalam ayat tersebut juga menjadi pedoman bahwa yang kemuliaan diukur dari tingkat ketakwaan terhadap Allah SWT. Adanya ketaksamaan dalam kehidupan menjadikan keseimbangan yang harus disikaapi dengan lapang dada.

BAB 5
PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan pada penelitian ini, maka penulis dapat menyimpulkan bahwa ketaksamaan tipe lemah operator integral fraksional pada ruang morrey yang diperumum tak homogen di ruang metrik yaitu $\mu\left(E_\gamma\right) \leq Cr^n\phi(r)^p\left(\frac{\|f\|_{L^{p,\phi}(\mu)}^p}{\gamma}\right)^q$.

Dalam kajian keislaman dapat disimpulkan bahwa ketaksamaan menjadi bentuk tolak ukur ketaqwaan terhadap-Nya. Ketaksamaan menjadi solusi sekaligus rahmat bagi suatu permasalahan dalam berkehidupan demi menciptakan keharmonisan.

5.2 Saran

Penelitian yang dilakukan penulis pada skripsi ini menggunakan ketaksamaan operator integral pada ruang morrey tak homogen di ruang metrik. Penulis menyarankan untuk penelitian selanjutnya yaitu dengan melalukan penelitian ketaksamaan dengan ketaksamaan tipe kuat pada operator integral fraksional dan ketaksamaan-ketaksamaan lainnya. Penulis juga menyarankan untuk menggunakan ruang fungsi lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Agama, Departemen. 1985. *Muqaddimah Al-Qur'an dan Tafsirnya*. Jakarta: Departemen Agama

Bartle, Robert G. 1995. *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*. John Willey & Sans, Inc., New York.

Duoandikoetxea. 2001. *Fourier Analysis*. American Mathematical Society: Providence, Rhode Island.

Eridani, H. Gunawan, E. Nakai, dan Y. Sawano. 2009. *Characterizations For The Generalized Fractional Integral Operators On Morrey Spaces*. Math Ineq. Appl.

Eridani, Gunawan, H., Nakai, E. 2004. *On Generalized Fractional Integral Operators*. Scientiae mathematicae Japanicae Online.

E. Nakai. 1994. *Hardy-Littlewood Maximal Operator, Singular Integral Operators, And The Riesz Potentials On Generalized Morrey Spaces*. Math. Nachr.

Gunawan, H., Eridani. 2009. *Fractional Integrals and Generalized Olsen Inequalities*. J Math.

Gunawan, G., dan H. Gunawan. 2006. Keterbatasan Operator Riesz di Ruang Morrey.

Ivanal, D., H. Gunawan. 2013. *Weak (p, q) Inequalities for Fractional Integral Operators on Generalized Morrey Spaces of NonHomogeneous type*. Mathematica Acterna.

Mu'tazili, A. 2019. *Sifat Inklusi dan Beberapa Konstanta Geometri untuk Ruang Morrey Kecil*. Tesis Program Magister. Institut Teknologi Bandung.

Royden, H. L. dan Fitzpatrick, P. M. 2010. *Real Analysis*, Fourt Edition. China Machine Press : China

Said Nursi, Baiduzzaman. 2003. *Menjawab Yang Tak Terjawab Menjelaskan Yang Tak Terjelaskan*. Jakarta. PT. Raja Grafindo.

Shihab, M Quraish. 1992. *Membumikan Alquran*. Bandung. Mizan.

Sihwaningrum, I., Maryani, S., dan Gunawan, H. 2012. *Weak Type Inequalities for Fractio Integral Operators on Generalized Non-Homogeneous Morrey Spaces*. Anal. Theory Appl.

Sihwaningrum, I. 2016. *Ketaksamaan Tipe Lemah untuk Operator Integral Fraksional di Ruang Morrey Atas Ruang Metrik Tak Homogen*. Konferensi Nasional Penelitian Matematika dan Pembelajarannya (KNPMP I). Universitas Muhammadiyah Surakarta.

Thabari, Abu Ja'far Muhammad bin Jarir Ath. 2009. *Tafsir Ath Thabari (Jilid 23)*. Jakarta. Pustaka Azzam.

Utoyo, M. I. 2012. *Fractional Integral Operator and Olsen Inequalities in Wighted Morrey Space on Non-Homogeneous Spaces*. Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS).

Wheeden, R. L. 2015. *Measure and Integral: An Introduction to Real Analysis*. CRC Press.

RIWAYAT HIDUP

Cindy Novita Sari, lahir di Sidoarjo pada tanggal 11 April 1998, bertempat tinggal di Kabupaten Sidoarjo, Kecamatan Wonoayu, Jawa Timur. Anak pertama dari dua bersaudara, putri Alm. Bapak rintik Asmoro dan Ibu Tutik Muzaiyanah.

Menempuh pendidikan dasar di SD Negeri Ketimang dan lulus pada tahun 2011. Selanjutnya melanjutkan pendidikan sekolah menengah pertama di SMP Negeri 1 Wonoayu dan lulus tahun 2014. Kemudian melanjutkan pendidikan sekolah menengah atas di MAN 1 Sidoarjo dan lulus pada tahun 2017. Pendidikan berikutnya ditempuh di Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang dengan mengambil program studi Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi.

Selama menjadi mahasiswa, cukup berperan aktif pada organisasi dan kepanitiaan. Diantaranya tergabung dalam anggota Koperasi Mahasiswa (Kopma) Padang Bulan UIN Malang pada tahun 2018, tergabung sebagai volunteer Empowering Indonesia pada tahun 2019, serta berperan sebagai asisten praktikum statistika elementer pada semester ganjil Tahun Akademik 2019/2020. Selama perjalanan menyelesaikan perkuliahan juga aktif sebagai tutor privat, magang sebagai kasir toko di tahun 2018-2019, dan bekerja sebagai administrasi keuangan di tahun 2022 hingga sekarang.

KEMENTERIAN AGAMA
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
Jalan Gajayana Nomor 50, Telepon (0341)551354,
Fax. (0341) 572533 Website: http://www.uin-malang.ac.id Email: info@uin-malang.ac.id

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama : Cindy Novita Sari
NIM : 17610078
Fakultas : Sains dan Teknologi
Program Studi : Matematika
Judul Skripsi : Ketaksamaan Tipe Lemah untuk Operator Integral Fraksional K_α^n pada Ruang Morrey yang Diperumum di Ruang Kuasi Metrik
Dosen Pembimbing 1 : Dr. Hairur Rahman, M.Si.
Dosen Pembimbing 2 : Erna Herawati, M.Pd.

No	Tanggal Bimbingan	Hal	Tanda Tangan
1.	26 Juni 20221	Setor dn Konsultasi Judul	1.
2.	30 Januari 2022	Konsultasi Bab I dan Bab II	2.
3.	18 Maret 2022	Revisi Bab I dan II serta Konsultasi Bab III	3.
4.	06 Mei 2022	Revisi Bab III	4
5.	06 Mei 2022	Konsultasi Kajian Islam pada Bab I dan Bab II	5.
6.	26 Agustus 2022	Revisi Kajian Islam pada Bab I dan Bab II	6
7.	29 Agustus 2022	ACC Bab I dan Bab II	7.
8.	08 September 2022	ACC Bab I, II, dan III	8.
9.	22 November 2022	ACC Kajian Islam pada Bab I dan Bab II	9.
10.	29 April 2023	Revisi Seminar Proposal	10.
11.	17 Mei 2023	Konsultasi Bab IV dan Bab V	11.
12.	27 Mei 2023	Konsultasi Kajian Islam pada Bab IV	12.
13.	29 Agustus 2023	ACC Seminar Hasil	13.
14	02 April 2024	ACC Bab IV dan Bab V	14.

KEMENTERIAN AGAMA
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
Jalan Gajayana Nomor 50, Telepon (0341)551354,
Fax. (0341) 572533 Website: http://www.uin-malang.ac.id Email: info@uin-malang.ac.id

15	16 Mei 2024	ACC Kajian Islam pada Bab IV	15
16	27 Mei2024	Revisi Seminar Hasil	16
17	06 Juni 2024	ACC Matriks Revisi Seminar Hasil	17
18	12 Juni 2024	Revisi Kajian Agama	18
19	25 Juni 2024	ACC Sidang Skripsi	19
20	28 Juni 2024	ACC Akhir Keseluruhan Bab	20

Malang, 28 Juni 2024
Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005