PENERAPAN *LEMMA GOURSAT*
PADA GRUP *DIRECT PRODUCT RANK* DUA

SKRIPSI

oleh:
HUSNUL KHOTIMAH
NIM : 06510022

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2012

PENERAPAN *LEMMA GOURSAT* PADA GRUP *DIRECT PRODUCT RANK* DUA

SKRIPSI

diajukan kepada:
Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

oleh:
HUSNUL KHOTIMAH
NIM : 06510022

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2012

PENERAPAN *LEMMA GOURSAT*
PADA GRUP *DIRECT PRODUCT RANK* DUA

SKRIPSI

oleh:
HUSNUL KHOTIMAH
NIM : 06510022

Telah Disetujui untuk Diuji:
Malang, 20 Agustus 2011

Dosen Pembimbing I,	Dosen Pembimbing II,
Evawati Alisah, M. Pd	**Abdul Aziz, M.Si**
NIP. 19720604 199903 2 001	**NIP. 19760318 200604 1 002**

Mengetahui,

Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PENERAPAN *LEMMA GOURSAT* PADA GRUP *DIRECT PRODUCT RANK* DUA

SKRIPSI

Oleh:
HUSNUL KHOTIMAH
NIM : 06510022

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal:
12 September 2011

Susunan Dewan Penguji:			**Tanda Tangan**
1.	Penguji Utama	: Wahyu Henky Irawan, M.Pd NIP. 19710420 200003 1 003	( )
2.	Ketua	: Hairur Rahman, M.Si NIP. 19800429 200604 1 003	( )
3.	Sekretaris	: Evawati Alisah, M. Pd NIP. 19720604 199903 2 001	( )
4.	Anggota	: Abdul Aziz, M.Si NIP. 19760318 200604 1 002	( )

Mengetahui dan Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

SURAT PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Husnul Khotimah

NIM : 06510022

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil penelitian saya sendiri, bukan merupakan pengambil alihan data, tulisan atau pikiran orang lain, kecuali yang secara tertulis dikutip dalam naskah ini dan disebutkan dalam sumber kutipan dan daftar pustaka.

Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia mempertanggungjawabkan, serta diproses sesuai peraturan yang berlaku.

Malang, 18 Agustus 2011
Yang Membuat Pernyataan,

Husnul Khotimah
NIM. 06510022

MOTTO

فَإِنَّ مَعَ ٱلۡعُسۡرِ يُسۡرًا ۝٥

إِنَّ مَعَ ٱلۡعُسۡرِ يُسۡرًا ۝٦

“Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan,

Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan.”

PERSEMBAHAN

Karya sederhana ini penulis persembahkan kepada:

Bapak dan Ibu, Satam dan Insijatin.

Terima kasih atas kasih sayang yang tak pernah henti, doa yang selalu mendampingi penulis menuntut ilmu, serta pendidikan agar penulis menjadi manusia yang utuh dan tak salah langkah.

Kakak-kakak Abdurrohman, Fitroh Anis Sa'adah, Siti Mubarokah, dan Sodiq. Terima kasih atas dukungan dan motivasi agar penulis selalu bersemangat dan belajar bertanggungjawab serta melakukan yang terbaik.

Pak Sudjak (Alm),

yang telah memberikan arahan terhadap cita-cita penulis.

KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Assalaamu 'alaikum Wr. Wb.

Segala puji bagi Allah SWT karena atas rahmat, taufiq dan hidayah-Nya, penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si) dalam bidang Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang. Penulis menyadari bahwa banyak pihak yang telah berpartisipasi dan memberi dukungan dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Untuk itu, iringan doa dan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya penulis sampaikan kepada :

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku Rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Drs. Sutiman Bambang Sumitro, SU.D.Sc, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Evawati Alisah, M.Pd, yang telah bersedia meluangkan waktunya untuk memberikan bimbingan dan pengarahan selama penulisan skripsi di bidang Matematika.
5. Abdul Aziz, M.Si, yang telah bersedia meluangkan waktunya untuk memberikan bimbingan dan pengarahan selama penulisan skripsi di bidang Agama.

6. Seluruh Dosen serta seluruh karyawan dan staf Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang, khususnya Wahyu Hengky Irawan, M.Pd, yang telah memberikan ilmu pengetahuan kepada penulis selama di bangku perkuliahan.
7. Kedua orang tua tercinta, yang selalu mendidik, mencintai, serta selalu memberi dukungan baik moril maupun spirituil sehingga penulisan skripsi ini dapat terselesaikan.
8. Kakak-kakak penulis Abdurrohman, Fitroh Anis Sa'adah, Siti Mubarokah, dan Sodiq. Terima kasih atas dukungan dan motivasi agar selalu bersemangat dan belajar bertanggungjawab serta melakukan yang terbaik.
9. Teman-teman penulis Ummul Choiroh dan Arfi Asta A. (IT '06), Irma Agrica, Farida Ulfa, dan Iqlillah (Math '06), serta Sulthon F dan Choirul Atho'. Terima kasih atas dukungan motivasi, semangat dan doa yang telah diberikan.
10. Seluruh teman-teman Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang angkatan 2006, serta seluruh pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Dalam penyusunan skripsi ini tentunya masih terdapat banyak kekurangan, sehingga kritik dan saran penulis harapkan demi perbaikan skripsi ini. Akhirnya, semoga skripsi ini dapat bermanfaat dan menambah khasanah ilmu pengetahuan.

Wassalaamu 'alaikum Wr. Wb.

Malang, 20 Agustus 2011

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL .... **i**
HALAMAN PERSETUJUAN .... **ii**
HALAMAN PENGESAHAN .... **iii**
SURAT PERNYATAAN .... **iv**
MOTTO .... **v**
HALAMAN PERSEMBAHAN .... **vi**
KATA PENGANTAR .... **vii**
DAFTAR ISI .... **ix**
DAFTAR TABEL .... **xi**
DAFTAR GAMBAR .... **xii**
DAFTAR SIMBOL .... **xiii**
ABSTRAK .... **xiv**

BAB I PENDAHULUAN **1**
1.1. Latar Belakang 1
1.2. Rumusan Masalah 8
1.3. Batasan Masalah 8
1.4. Tujuan Penelitian 8
1.5. Manfaat Penulisan 8
1.6. Metode Penelitian 9
1.7. Sistematika Penulisan 12

BAB II KAJIAN TEORI **13**
2.1 Operasi Biner 13
2.2 Grup 16
2.3 Subgrup 23
2.4 Subgrup Normal 27
2.5 Grup Faktor 31
2.6 Grup Siklik 33

2.7 Grup Bilangan Bulat Modulo *n* 36
2.8 Homomorfisme dan Isomorfisme Grup 40
2.9 *Direct Product* 49
2.10 Kajian Subgrup dalam Konsep Islam 51

BAB III PEMBAHASAN **59**

BAB IV PENUTUP **93**
4.1. Kesimpulan 93
4.2. Saran 93

DAFTAR PUSTAKA **94**

DAFTAR TABEL

Tabel 2.5.1 Grup Faktor dari $(G, +) = \mathbb{Z}_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ terhadap $(H, +) = \{0, 2, 4\}$ 33

Tabel 3.1 Subgrup dari $G_1 = \mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ dan $G_2 = \mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ 77

Tabel 3.2 Subgrup dari $G_1 = \mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ dan $G_2 = \mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$ 79

Tabel 3.3 Subgrup dari $G_1 = \mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ dan $G_2 = \mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ 81

Tabel 3.4 Subgrup dari $G_1 = \mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ dan $G_2 = \mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$.......... 84

Tabel 3.5 Subgrup dari $G_1 = \mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ dan $G_2 = \mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ 87

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.8.1 Fungsi 40
Gambar 2.8.2 Fungsi Injektif 41
Gambar 2.8.3 Fungsi Surjektif 41
Gambar 2.8.4 Fungsi Bijektif 42
Gambar 2.10.1 Himpunan Malaikat 53
Gambar 2.10.2 Himpunan Hewan 53
Gambar 2.10.3 Operasi Biner pada Manusia..................................... 54
Gambar 2.10.4 Operasi Biner pada Hewan 54
Gambar 2.10.5 Grup Ulul Albab 57
Gambar 2.10.6 Sistem Organ dalam Tubuh Manusia sebagai Sub-Tubuh Gabungan Beberapa Organ Tubuh yang Bekerja Sama 58
Gambar 3.1 Diagram *Lattice* $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 79
Gambar 3.2 Diagram *Lattice* $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ 80
Gambar 3.3 Diagram *Lattice* $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ 83
Gambar 3.4 Diagram *Lattice* $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$ 87
Gambar 3.5 Diagram *Lattice* $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$ 92

DAFTAR SIMBOL

No	Simbol	Keterangan
1.	$(G,*)$	Grup G dengan operasi biner $*$
2.	$(G,\circ)$	Grup G dengan operasi biner $\circ$
3.	$\times$	Direct Product
4.	$a \in G$	a elemen G
5.	$a \notin G$	a bukan elemen G
6.	I_*	Identitas terhadap operasi $*$
7.	a^{-1}	Invers dari a
8.	G_n	Grup ke n
9.	N_n	Subgrup Normal dari G_n
10.	G_n/N_n	Himpunan Semua Koset / Grup Faktor dari G_n terhadap N_n
11.	$\subseteq$	Sub Himpunan dari
12.	$\leq$	Subgrup dari
13.	$\trianglelefteq$	Subgrup Normal dari
14.	$\simeq$	Homomorfik
15.	$\cong$	Isomorfik
16.	$< a >$	Grup yang dibangkitkan oleh a
17.	$\mathbb{Z}_n$	Grup bilangan bulat modulo n
18.	ρ	Rho
19.	μ	Mu
20.	φ	Phi
21.	ker	Kernel
27.	$\Rightarrow$	Jika maka
22.	$\Leftrightarrow$	Jika dan hanya jika
23.	$\forall$	Untuk semua, untuk setiap, untuk sebarang
24.	$\exists$	Terdapat
25.	$f: G \to H$	Fungsi f dari G ke H

ABSTRAK

Khotimah, Husnul. 2012. **Penerapan *Lemma Goursat* pada Grup *Direct Product Rank* Dua**. Skripsi, Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Pembimbing : I. Evawati Alisah, M.Pd.
II. Abdul Aziz, M.Si.

Kata Kunci : *Lemma Goursat*, Grup *Direct Product*, *Rank* Dua

Lemma Goursat berperan penting dalam pendeskripsikan subgrup dari *direct product* dalam bentuk subgrup normalnya secara individu. *Lemma Goursat* memungkinkan suatu cara menemukan semua subgrup darigrup *direct product*, bahkan untuk kasus generator sama yang tidak dapat dilakukan oleh *direct product* secara langsung.

Permasalahan yang muncul adalah “Bagaimana penerapan *Lemma Goursat* pada grup *direct product rank* dua?” Karena itu, tujuan dari penulisan skripsi ini adalah untuk mengetahui penerapan *Lemma Goursat* pada grup *direct product rank* dua.

Dengan menerapkan *Lemma Goursat* terhadap grup *direct product rank* dua atau $G_1 \times G_2$ yang disusun dari grup $(G_1,*)$ dan $(G_2,\circ)$ di mana $N_1 \trianglelefteq G_1$ dan $N_2 \trianglelefteq G_2$, maka diperoleh bayangan $H \leq G_1 \times G_2$ adalah $G_1/N_1 \times G_2/N_2$, dan diperoleh hubungan G_1/N_1 dan G_2/N_2 sesuai dengan fungsi isomorfisme $\varphi: G_1/N_1 \rightarrow G_2/N_2$. Sehingga H subgrup dari $G_1 \times G_2$ dapat direpresentasikan oleh $G_1/N_1 \times G_2/N_2$, di mana $G_1/N_1 \cong G_2/N_2$. Misal H_φ suatu himpunan yang direpresentasikan oleh fungsi isomorfisme φ, di mana $H_\varphi = \{(a,b) \in G_1 \times G_2 | \varphi(a * N_1) = b \circ N_2; a \in G_1; b \in G_2\}$, maka H subgrup dari $G_1 \times G_2$ dapat dicari dengan mencari himpunan H_φ yang sesuai dengan banyaknya isomorfisme yang terjadi dari G_1/N_1 ke G_2/N_2. Hal ini dapat ditunjukkan lebih jelas pada contoh grup *direct product* untuk kasus dengan generator grup penyusun yang berbeda-beda.

ABSTRACT

Khotimah, Husnul. 2012. **Implementation of Goursat's Lemma on Group of Direct Product Rank Two**. Thesis, Mathematics Department of Science and Technology Faculty of Islamic State University Maulana Malik Ibrahim of Malang.

Advisor : I. Evawati Alisah, M.Pd.
II. Abdul Aziz, M.Si.

Key Word : Goursat's Lemma, Group of Direct Product, Rank Two

Goursat's Lemma has essential role to describes subgroup of direct product in terms of its normal subgroup of the individual groups. Goursat's Lemma enables a way to find all subgroup of direct product of group, even in case at same generator that can't be done by direct product directly.

The problem that appear is "How to Implement Goursat's Lemma on Group of Direct Product Rank Two?" In consequence, the purpose of this thesis is to be know implementation of Goursat's Lemma on group of direct product rank two.

By implementing Goursat's Lemma on group of direct product rank two or $G_1 \times G_2$ that is arranged from group $(G_1,*)$ and $(G_2,\circ)$ where $N_1 \trianglelefteq G_1$ and $N_2 \trianglelefteq G_2$, then the image $H \leq G_1 \times G_2$ is$G_1/N_1 \times G_2/N_2$, and the relationship of G_1/N_1 and G_2/N_2 according to isomorphism $\varphi: G_1/N_1 \rightarrow G_2/N_2$. So H subgroup of $G_1 \times G_2$ can be described by $G_1/N_1 \times G_2/N_2$, where $G_1/N_1 \cong G_2/N_2$. Let H_φ is a set that described by isomorphism φ, where $H_\varphi = \{(a,b) \in G_1 \times G_2 | \varphi(a * N_1) = b \circ N_2; a \in G_1; b \in G_2\}$, then H can be found by looking for H_φ one that accord to isomorphism of G_1/N_1 to G_2/N_2. It can be pointed out clear on examples of group of direct product with different case of generator.

المستخلص البحث

خاتمة ،حسنول. ٢٠١١. تطبيق Lemma Goursat في المرتبة الثانية مجموعة المنتجات مباشرة. البحث العلمى، قسم الرياضيات بكلية العلوم والتكنولوجيا الجامعة الحكومية الإسلامية مولانا مالك ابراهيم مالانج.

المشرف:(١) إيفاواتي أليسة الماجستير

(٢) عبد العزيز الماجستير

الكلمات الرئيسية : Lemma Goursat، المجموعة المنتجات مباشرة، الرتبة الثانية.

Lemma Goursat يلعب دوراها ما في وصف مجموعات فرعية من المنتجات مباشرة في شك لمجموعات فرعية طبيعية بشك لفردي Lemma Goursat يتيح وسيلة للبحث عن كافة المجموعات الفرعية للمنتج المجموعة مباشرة، حتى بالنسبة لحالة المولد نفسه الذي لا يمكن عمله من قبل المنتجات مباشرة مباشرة.

المشكلة الذي يطرح نفسه هو: "كيف تطبيق Lemma Goursat للمجموعة المنتجات مباشرة من الرتبة الثانية؟" لذلك، فإن الغرض من كتابة هذه الرسالة هو للتحقيق في تطبيق Lemma Goursat للمجموعة المنتجات مباشرة من الرتبة الثانية.

و من خلال تطبيق المرتبة Lemma Goursat للمجموعة المنتجات مباشرة لاثنين أو $G_1 \times G_2$ التي تم تجميعها من المجموعة $(G_2,\circ)$ و $(G_1,*)$ وحيث $N_1 \trianglelefteq G_1$ و $N_2 \trianglelefteq G_2$، والحصول على $H \leq G_1 \times G_2$ الصورة $G_1/N_1 \times G_2/N_2$، وحصل على علاقات G_1/N_1 و G_2/N_2 و ظائف وفق الا لتماثل : $\varphi: G_1/N_1 \rightarrow G_2/N_2$. بحيث تكون ممثلة للمجموعات H فرعية $G_1 \times G_2$ بواسطة $G_1/N_1 \times G_2/N_2$، حيث $G_1/N_1 \cong G_2/N_2$. على سبيل المثال H_φ مجموعة من الوظائ في مثلها φ التماثل، حيث

$H_\varphi = \{(a,b) \in G_1 \times G_2 | \varphi(a * N_1) = b \circ N_2; a \in G_1; b \in G_2\}$، ثم مجموعات فرعية H ويمكن البحث $G_1 \times G_2$ من خلال إيجاد مجموعة H_φ المقابلة لعدد من التماثل التي تحدث من G_1/N_1 الى G_2/N_2. يمكن أن تظهر بشك لأكثر وضوحا في المثال المجموعة المنتجات مباشرة لحالة المولدات مع مجموعة من المجمعين مختلفة.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika mempunyai peran yang sangat penting dalam kehidupan manusia. Sumardyono (2004) menyebutkan matematika dapat dipandang sebagai struktur yang terorganisir, alat, pola pikir deduktif, cara bernalar, bahasa artificial, serta seni yang kreatif. Sedangkan Mangroo (2003) menyebutkan bahwa melalui penalaran, ilmu matematika dikembangkan dari pencacahan, penghitungan, pengukuran, dan pengkajian sistematik terhadap bentuk dan gerak objek-objek dari fenomena sehari-hari. Pembelajaran matematika akan melatih kemampuan berpikir kreatif, kritis, logis, analitis, dan sistematis.

Namun peran matematika tidak hanya sebatas pada hal tersebut. Pada masa sekarang, ilmu matematika digunakan di seluruh dunia sebagai alat penting dalam berbagai bidang, seperti ilmu eksak (kimia, fisika, dan teknik), ilmu hidup dan kesehatan (biologi, psikologi, apotik dan keperawatan), ilmu social (antropologi, komunikasi, ekonomi, bahasa, dan geografi), ilmu teknik (komputer, jaringan, pengembanagn perangkat lunak), serta bisnis dan perdagangan (Gouba, 2008).

Keilmuan matematika yang lebih mendalam dikaji dalam matematika murni, atau matematika untuk perkembangan matematika itu sendiri. Secara umum, semakin kompleks suatu gejala, semakin kompleks pula alat yang melalui berbagai perumusan (model matematikanya) diharapkan mampu untuk mendapatkan atau menjadi pendekatan penyelesaian eksak secara lebih akurat. Di sinilah matematika murni memegang peranannya. Salah satu cabang matematika murni yang dapat dicirikan sebagai generalisasi adalah aljabar. Mangroo (2003) menyebutkan bahwa aljabar memungkinkan pengujian pola, urutan dan hubungan dalam matematika yang memuat variable, kondisi, ekspresi linear dan kuadratik, serta penyederhanaan, subtitusi dan faktorisasi untuk membentuk suatu generalisasi yang dapat digunakan sebagai suatu strategi kuat dalam pemecahan masalah dalam matematika.

Aljabar abstrak secara dasar mempelajari tentang struktur-struktur aljabar beserta sifat-sifatnya. Dalam aljabar abstrak, suatu struktur aljabar terdiri dari satu himpunan tertutup atau lebih dengan satu operasi atau lebih serta memenuhi beberapa aksioma. Aljabar abstrak menekankan pada metode aksiomatik, definisi, teorema, dan bukti (Clark, 1998).

Grup merupakan bagian dari kajian dalam aljabar abstrak yang penting untuk dipelajari, karena banyak sekali obyek yang dipelajari dalam matematika berupa grup. Teori grup menduduki posisi sentral dalam matematika. Teori grup memungkinkan sifat-sifat dari sistem-sistem ini dan berbagai sistem lain untuk dipelajari dalam lingkup yang umum, dan hasilnya dapat diterapkan secara luas. Saat ini grup mempunyai peran penting dalam teori kode, simetri, berbagai bidang biologi, kimia serta fisika (Judson, 1997).

Raisinghania dan Aggarwal (1980) menyebutkan bahwa suatu himpunan G dengan operasi biner "*" disebut grup jika memenuhi tiga aksioma, yaitu: asosiatif, mempunyai identitas, dan mempunyai invers.

Dengan demikian grup mempunyai tiga penyusun, yaitu himpunan, operasi biner, dan aturan atau aksioma yang harus dipenuhi agar menjadi suatu grup.

Perhatikan dua ayat Al-Qur’an surat Al-Faathir ayat 1 dan surat An-Nuur ayat 45 sebagai berikut:

ٱلۡحَمۡدُ لِلَّهِ فَاطِرِ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلۡأَرۡضِ جَاعِلِ ٱلۡمَلَٰٓئِكَةِ رُسُلًا أُوْلِيٓ أَجۡنِحَةٖ مَّثۡنَىٰ
وَثُلَٰثَ وَرُبَٰعَۚ يَزِيدُ فِي ٱلۡخَلۡقِ مَا يَشَآءُۚ إِنَّ ٱللَّهَ عَلَىٰ كُلِّ شَيۡءٖ قَدِيرٞ ١

Artinya:

“Segala puji bagi Allah Pencipta langit dan bumi, yang menjadikan Malaikat sebagai utusan-utusan (untuk mengurus berbagai macam urusan) yang mempunyai sayap, masing-masing (ada yang) dua, tiga dan empat. Allah menambahkan pada ciptaan-Nya apa yang dikehendaki-Nya. Sesungguhnya Allah Maha Kuasa atas segala sesuatu.”

وَٱللَّهُ خَلَقَ كُلَّ دَآبَّةٖ مِّن مَّآءٖۖ فَمِنۡهُم مَّن يَمۡشِي عَلَىٰ بَطۡنِهِۦ وَمِنۡهُم مَّن يَمۡشِي
عَلَىٰ رِجۡلَيۡنِ وَمِنۡهُم مَّن يَمۡشِي عَلَىٰٓ أَرۡبَعٖۚ يَخۡلُقُ ٱللَّهُ مَا يَشَآءُۚ إِنَّ ٱللَّهَ عَلَىٰ كُلِّ
شَيۡءٖ قَدِيرٞ ٤٥

Artinya:

“Dan Allah telah menciptakan semua jenis hewan dari air, Maka sebagian dari hewan itu ada yang berjalan di atas perutnya dan sebagian berjalan dengan dua kaki sedang sebagian (yang lain) berjalan dengan empat kaki. Allah menciptakan apa yang dikehendaki-Nya, Sesungguhnya Allah Maha Kuasa atas segala sesuatu.”

Pada kedua ayat di atas, pertama, dalam QS Al-Faathir ayat 1 dijelaskan makhluk yang disebut malaikat. Malaikat ini terbagi menjadi tiga kelompok, yaitu kelompok malaikat dengan dua sayap, malaikat dengan tiga sayap, dan malaikat dengan empat sayap. Sedangkan dalam QS An-Nuur ayat 45 dijelaskan makhluk yang disebut hewan, yang kemudian terbagi menjadi tiga kelompok, yaitu hewan yang berjalan di atas perutnya, hewan yang berjalan dengan dua kaki, dan hewan yang berjalan empat kaki. Abdussyakir (2007) menjelaskan dalam kedua ayat di atas, yaitu QS Al-Faathir ayat 1 dan QS An-Nuur ayat 45, terdapat konsep matematika yang terkandung di dalamnya, yaitu sekumpulan atau sekelompok objek-objek yang mempunyai ciri-ciri yang sangat jelas. Inilah yang dalam matematika dinamakan dengan himpunan.

Kemudian perhatikan ayat Al-Qur'an surat An-Najm ayat 45 dan Adz-Dzaariyat ayat 49 sebagai berikut:

وَأَنَّهُۥ خَلَقَ ٱلزَّوْجَيْنِ ٱلذَّكَرَ وَٱلْأُنثَىٰ ﴿٤٥﴾

Artinya:

"Dan bahwasanya Dialah yang menciptakan berpasang-pasangan pria dan wanita."

وَمِن كُلِّ شَىْءٍ خَلَقْنَا زَوْجَيْنِ لَعَلَّكُمْ تَذَكَّرُونَ ﴿٤٩﴾

Artinya:

"Dan segala sesuatu Kami ciptakan berpasang-pasangan supaya kamu mengingat kebesaran Allah."

Surat An-Najm ayat 45 menjelaskan bahwa manusia diciptakan berpasang-pasangan, yaitu sepasang pria dan wanita. Kemudian surat Adz-Dzaariyat ayat 49 menjelaskan lebih jauh bahwa bukan hanya manusia yang diciptakan berpasangan, tetapi segala sesuatu di dunia ini juga diciptakan Allah secara berpasang-pasangan. Sehingga dalam QS An-Najm ayat 45 dan QS Adz-Dzaariyat ayat 49 tersebut terdapat konsep matematika yang terkandung di dalamnya, yaitu fungsi yang memetakan satu himpunan ke himpunan yang lain, yang dalam hal ini interaksi antar makhluk sejenis, berupa berpasang-pasangan. Inilah yang dalam matematika dikenal sebagai operasi biner.

Selanjutnya perhatikan ayat Al-Qur'an surat Ali Imron ayat 190-191 sebagai berikut:

إِنَّ فِي خَلْقِ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضِ وَٱخْتِلَٰفِ ٱلَّيْلِ وَٱلنَّهَارِ لَأَيَٰتٍ لِّأُوْلِي ٱلْأَلْبَٰبِ
١٩٠ ٱلَّذِينَ يَذْكُرُونَ ٱللَّهَ قِيَٰمًا وَقُعُودًا وَعَلَىٰ جُنُوبِهِمْ وَيَتَفَكَّرُونَ فِي خَلْقِ
ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضِ رَبَّنَا مَا خَلَقْتَ هَٰذَا بَٰطِلًا سُبْحَٰنَكَ فَقِنَا عَذَابَ ٱلنَّارِ
١٩١

Artinya:

> *"Sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi, dan silih bergantinya malam dan siang terdapat tanda-tanda bagi orang-orang yang berakal. (yaitu) Orang-orang yang mengingat Allah sambil berdiri atau duduk atau dalam keadan berbaring dan mereka memikirkan tentang penciptaan langit dan bumi (seraya berkata): "Ya Tuhan Kami, Tiadalah Engkau menciptakan ini dengan sia-sia, Maha suci Engka, Maka peliharalah Kami dari siksa neraka."*

Dari ayat Al-Qur'an surat Ali Imron ayat 190-191 di atas, dijelaskan mengenai sekelompok manusia yang disebut *Ulul Albab* (orang-orang yang berakal). Kelompok ini bisa disebut sebagai *Ulul Albab* jika orang-orang dalam kelompok tersebut memenuhi beberapa sifat, yaitu senantiasa mengingat Allah, baik dalam keadaan beriri, duduk, atau berbaring, dan memikirkan tentang penciptaan langit dan bumi dengn keyakinan bahwa semua itu tidaklah sia-sia.

Dengan demikian dalam ayat Al-Qur'an surat Ali Imron ayat 190-191 di atas, terdapat konsep matematika yang terkandung di dalamnya, yaitu sifat yang harus dipenuhi agar suatu kelompok dapat disebut suatu kelompok yang tertentu atau lebih khusus lagi. Inilah yang dalam matematika dikenal sebagai aturan atau aksioma yang harus dipenuhi agar suatu kelompok atau himpunan dapat dikatakan sebagai suatu grup.

Kemudian perhatikan ayat Al-Qur'an surat Al-Infithar ayat 7 berikut:

ٱلَّذِى خَلَقَكَ فَسَوَّىٰكَ فَعَدَلَكَ ۝٧

Artinya:

"Yang telah menciptakan kamu lalu menyempurnakan kejadianmu dan menjadikan (susunan tubuh)mu seimbang."

Ayat di atas, yaitu QS Al-Infithar ayat 7 menjelaskan bahwa tubuh manusia terdiri dari penyusun-penyusun yang seimbang. Lebih jauh, Wibowo (2008) menyebutkan bahwa penyusun tubuh manusia ini berupa sistem-sistem organ, dan jumlahnya ada 12 sistem. Sistem-sistem organ ini mempunyai sifat yang sama dengan tubuh secara umum, yaitu merupakan unsur penunjang aktifitas manusia. Sehingga dalam QS Al-Infithar ayat 7 terdapat konsep matematika yang terkandung di dalamnya, yaitu sub-kelompok yang juga memenuhi sifat-sifat kelompok induknya. Inilah yang dalam matematika dikenal dengan subgrup.

Pembahasan mengenai subgrup dari *direct product* banyak dilakukan oleh ilmuan matematika, di antaranya Delsarte, Djubjuk, dan Yeh mengenai jumlah subgrup pada tahun 1948, yang selanjutnya dikemas dalam satu paket dan dihubungkan dengan fungsi simetrik oleh L. Butter pada tahun 1994 (Calugareanu, 2009).

Macdonald (1998) menyebutkan aplikasi dari teori fungsi simetrik diawali oleh P. Hall pada tahun 1950an, dengan membuktikan bahwa jumlah subgrup H bertipe μ dari suatu p-grup bertipe λ sehingga G/H bertipe v adalah sebuah polinomial di p dengan koefisien bilangan bulat, yang dikenal sebagai polinomial Hall $g_{\mu v}^{\lambda}$. Selain itu, Hall juga menemukan derajat dan koefisiennya, serta menunjukkan bahwa $g_{\mu v}^{\lambda} = g_{v\mu}^{\lambda}$. Selanjutnya Calugareanu (2009), memperkenalkan kembali sebagaimana Goursat pada tahun 1890, suatu metode untuk mengkonstruksi subgrup *lattice* dari *direct sum* dan semua isomorfisme yang terjadi.

Lemma Goursat mendeskripsikan subgrup dari *direct product* dalam bentuk subgrup normalnya secara individu, sehingga dapat digunakan untuk mencari subgrup dari grup hasil *direct product*, khususnya untuk *direct product* grup siklik dengan generator sama, yang mana tidak dapat dicari dengan menggunakan teorema suzuki. Pada tahun 2009, Dan Anderson mengaplikasikan *Lemma Goursat* dan menggeneralisasikannya. Sedangkan Kristina Kublik (2009) membahas mengenai generalisasi dari Teorema Goursat untuk suatu grup terhadap ring komutatif dan modul.

Berdasarkan latar belakang di atas mengenai banyaknya topik penelitian yang membahas subgrup dari *direct product*, maka penulis tertarik untuk melakukan penelitian mengenai penerapan *Lemma Goursat* terhadap *grup direct product rank* dua, serta mengkhususkan pada *direct product* dari grup siklik. Oleh karena itu, penulis menggunakan judul "Penerapan *Lemma Goursat* pada Grup *Direct Product Rank* Dua".

1.1 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, permasalahan yang akan dibahas adalah bagaimana penerapan *Lemma Goursat* pada grup *direct product rank* dua?

1.2 Batasan Masalah

Pada penelitian ini diberikan batasan sebagai berikut:

1. Grup yang di*direct product* adalah grup bilangan bulat modulo *n* ($\mathbb{Z}_n$) yang merupakan grup siklik.
2. Unsur yang dikaji meliputi: homomorfisme dan isomorfisme, penentuan himpunan, dan pendefinisian fungsi.

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari dilakukannya penelitian ini adalah untuk melakukan penerapan *Lemma Goursat* terhadap grup *direct product* dari grup siklik *rank* dua.

1.4 Manfaat Penelitian

Di antara manfaat yang dapat diambil dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Bagi Peneliti

   Sebagai sarana untuk menuangkan ilmu yang telah didapat selama perkuliahan serta memperdalam dan menambah wawasan keilmuan matematika bidang aljabar abstrak khususnya mengenai penerapan *Lemma Goursat* pada grup *direct product rank* dua.

2. Bagi Pembaca

   Sebagai bahan pustaka untuk mempelajari aljabar abstrak.

3. Bagi Lembaga

   Sebagai tambahan bahan rujukan di perpustakaan dalam bidang aljabar abstrak.

1.6 Metode Penelitian

1. Jenis dan Pendekatan Penelitian

Jenis penelitian yang digunakan adalah penelitian deskriptif kualitatif. Penelitian deskriptif berusaha menggambarkan suatu gejala yang terjadi. Dengan demikian, penelitian ini bertujuan untuk menggambarkan sifat sesuatu yang tengah berlangsung pada saat studi. Metode kualitatif ini memberikan informasi yang mutakhir sehingga bermanfaat bagi perkembangan ilmu pengetahuan serta lebih banyak dapat diterapkan pada berbagai masalah.

Adapun pendekatan yang digunakan adalah pendekatan kualitatif dengan memakai bentuk kajian literatur. Metode yang digunakan adalah metode kajian literatur atau penelitian kepustakaan, yakni dengan mengumpulkan informasi dari buku, jurnal, dokumen, catatan serta bahan-bahan yang berkaitan dengan kajian yang terdapat dari berbagai sumber kepustakaan. Pendekatan ini bertujuan untuk mempertahankan keutuhan *(wholeness)* dari obyek, artinya data yang dikumpulkan dalam rangka studi kasus dipelajari sebagai suatu keseluruhan yang terintegrasi, di mana tujuannya adalah untuk memperkembangkan pengetahuan yang mendalam mengenai obyek yang bersangkutan yang berarti harus disifatkan sebagai penelitian yang eksploratif dan deskriptif.

2. Sumber Kajian

Sumber Kajian diperoleh dari berbagai perpustakaan, meliputi buku-buku dan jurnal-jurnal yang berkaitan. Literatur utama yang digunakan antara lain: *Abstract Algebra* (Dummit dan Foote, 2004), *Modern Algebra* (Raisinhania dan Aggarwal, 1980), *Elementary Abstract Algebra* (Edwin W. Clark, 1998), *The Total Number of Subgroup of A Finite Group* (Grigore Calugareanu, 2009), *Generalizations and Applications of Goursat's Lemma* (D. Anderdon, 2009), *Subgroups of Direct Products of Groups, Ideals and Subring of Direct Products of Rings, and Goursat's Lemma*. (D. Anderson dan V. Camillo, 2009), dan *Generalizations of Goursat Theorem for Group* (Kristina Kublik, 2009). Sedangkan Literatur pendukung digunakan antara lain: *Element of Abstract Algebra* (E. H. Connel, 1999), *Intro Abstract Algebra* (Paul Garret, 1997), *Schaum's Outline of Theory and Problems of Abstract Algebra* (Llyod R. Jaisingh, 2004), *Abstract Algebra: Theory and Application* (Thomas W. Judson, 1997), *Notes for Undergraduate* (P. Hs. Kropholler, 2004), *Pengantar Struktur Diskrit* (Suryadi, 1996), *Dasar-Dasar Teori Bilangan* (Gatot Muhsetyo,1997), serta dari jurnal-jurnal, internet dan berbagai sumber yang berkaitan dengan penelitian.

3. Definisi Operasional

Pada penelitian ini grup yang di*direct product* berupa grup bilangan bulat modulo n ($\mathbb{Z}_n$) dengan bentuk berupa grup *rank* dua. Grup *rank* dua adalah grup dengan bentuk $\mathbb{Z}_{p^m} \times \mathbb{Z}_{q^n}$, dengan p, q bilangan prima dan m, n bilangan bulat positif.

4. Langkah-Langkah Penelitian

Langkah-langkah penelitian yang ditempuh adalah sebagai berikut:

1) Menguraikan *Lemma Goursat.*
2) Pembuktian *Lemma Goursat.*
3) Menentukan kondisi yang harus dipenuhi oleh suatu grup terhadap *Lemma Goursat.*
4) Menerapkan *Lemma Goursat* terhadap grup *direct product* $\mathbb{Z}_n$ *rank* dua, meliputi homomorfisme dan isomorfisme yang mungkin terjadi.
5) Penulisan himpunan.
6) Pendefinisian fungsi.
7) Menunjukkan fungsi tersebut terdefinisi dengan baik dan memenuhi kondisi *Lemma Goursat.*
8) Memberikan contoh.
9) Menarik kesimpulan.

1.7 SISTEMATIKA PENULISAN

Sistematika penulisan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

BAB I : PENDAHULUAN

Dalam bab ini diuraikan tentang latar belakang masalah, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II : KAJIAN TEORI

Dalam bab ini akan diberikan teori-teori yang mendukung pembahasan masalah, meliputi grup, subgrup, subgrup normal, grup siklik, grup bilangan bulat modulo *n*, homomorfisme grup, kernel, koset, grup faktor, isomorfisme dan teori isomorfisme grup, serta *direct product*.

BAB III : PEMBAHASAN

Dalam bab ini akan diulas mengenai penerapan *Lemma Goursat* terhadap grup *direct product* rank dua, dilanjutkan pemberian contoh untuk beberapa kasus yang berbeda-beda.

BAB IV : PENUTUP

Bab ini berisikan kesimpulan dari pembahasan masalah dan saran untuk penelitian lebih lanjut.

BAB II

KAJIAN TEORI

2.1 Operasi Biner

Definisi 2.1.1 (Operasi Biner)

Misal S suatu himpunan tak kosong dan $a, b \in S$. Suatu operasi biner "$*$" pada himpunan S merupakan pemetaan yang didefinisikan sebagai $*: S \times S \rightarrow S$ sehingga $*(a, b) = a * b$ dengan $(a, b) \in S \times S$, dan $a * b \in S$ untuk setiap $a, b \in S$ (Ayres dan Jaisingh, 2004:23).

Dari definisi di atas, agar suatu operasi "$*$" pada suatu himpunan tak kosong S dapat dikatakan opersai biner, harus dipenuhi dua kondisi, yaitu:

1. Operasi "$*$" tertutup di S, yaitu untuk setiap $a, b \in S$ maka $a * b \in S$.
2. Operasi "$*$" terdefinisi dengan baik pada S, yaitu untuk setiap pasangan berurutan $(a, b) \in S \times S$ dapat dioperasikan dan dipetakan dengan tepat satu nilai $a * b$.

Contoh 2.1.1.1

Diketahui $\mathbb{Z}$ himpunan semua bilangan bulat. Didefinisikan operasi $*$ pada $\mathbb{Z}$ dengan syarat untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$, $a * b = a + b$. Akan ditunjukkan operasi $*$ merupakan operasi biner pada $\mathbb{Z}$.

Pertama, akan ditunjukkan bahwa operasi $*$ merupakan operasi yang tertutup. Sesuai dengan sifat bilangan bulat, maka penjumlahan dua bilangan bulat akan menghasilkan bilangan bulat juga. Sehingga $a * b = a + b \in \mathbb{Z}$. Jadi, terbukti operasi $*$ merupakan operasi yang tertutup.

Kedua, akan ditunjukkan bahwa operasi $*$ merupakan operasi yang terdefinisi dengan baik. Didefinisikan operasi $*$ pada $\mathbb{Z}$ yaitu $a * b = a + b$ untuk $\forall a, b \in \mathbb{Z}$. Misal $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ dengan $a = c$ dan $b = d$, maka harus ditunjukkan $a + b = c + d$.

Karena diketahui $a = c$ dan $b = d$, maka berlaku

$a * b = c * d$

sehingga $a + b = c + d$

Jadi terbukti operasi $*$ merupakan operasi yang terdefinisi dengan baik. Dengan demikian terbukti bahwa operasi $*$ pada $\mathbb{Z}$ dengan $a * b = a + b$ untuk $a, b \in \mathbb{Z}$ merupakan operasi biner pada $\mathbb{Z}$.

Contoh 2.1.1.2

Didefinisikan operasi $*$ pada $\mathbb{Z}$ dengan syarat untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$, $a * b = \sqrt{a \cdot b}$. Akan ditunjukkan bahwa operasi $*$ bukan merupakan operasi biner pada $\mathbb{Z}$.

Perhatikan bahwa jika $a = 1$ dan $b = 2$ maka berakibat $a * b = 1 * 2 = \sqrt{1 \cdot 2} = \sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$. Jadi, operasi $*$ tidak memenuhi kondisi tertutup. Perhatikan juga bahwa jika $a = 1$ dan $b = 1$ maka berakibat $a * b = \sqrt{1 \cdot 1} = \sqrt{1} = \pm 1$. Jadi terdapat satu nilai a, b tetapi menghasilkan dua nilai yang berbeda yaitu 1 dan -1, di mana $1 \neq -1$. Jadi operasi $*$ tidak memenuhi kondisi terdefinisi dengan baik, artinya $*$ pada $\mathbb{Z}$ dengan $a * b = \sqrt{a \cdot b}$ untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$ bukan merupakan operasi biner pada $\mathbb{Z}$.

Lemma 2.1.2 (Clark, 1998:1)

Suatu operasi biner " $*$ " pada suatu himpunan S merupakan suatu aturan yang mengkombinasikan dua elemen di S untuk menghasilkan suatu elemen di S. Aturan ini harus memenuhi kondisi berikut:

a. S tertutup terhadap " $*$ " , yaitu untuk $a, b \in S$ maka $a * b \in S$

b. Hukum substitusi berlaku, yaitu untuk semua $a, b, c, d \in S$

$$a = c \text{ dan } b = d \Rightarrow \ a * b = c * d$$

c. Untuk semua $a, b, c \in S$

$$a = b \Rightarrow a * c = b * c$$

d. Untuk semua $a, c, d \in S$

$$c = d \Rightarrow a * c = a * d$$

Bukti:

a.) $S \times S$ memuat himpunan semua pasangan terurut (a, b) di mana $a, b \in S$. Persamaan pasangan terurut ini didefinisikan dengan

$$a = c \text{ dan } b = d \Leftrightarrow (a, b) = (c, d)$$

$*: S\ X\ S \rightarrow S$ sehingga $*\,(a, b) = a * b$. Sekarang, jika $a, b \in S$ maka $(a, b) \in S\ X\ S$. Sehingga aturan $*$ memetakan (a, b) ke $a * b \in S$. Jadi jelas $a * b$ tertutup di S.

b.) Karena untuk semua $a, b, c, d \in S$, jika $a = c$ dan $b = d$, maka berakibat $(a, b) = (c, d) \Rightarrow \ a * b = c * d$.

Karena berlaku $a = c$ dan $b = d \Leftrightarrow (a, b) = (c, d)$, sehingga terbukti

$a = c$ dan $b = d \ \Rightarrow a * b = c * d$.

c.) Misal $a = b$ dan untuk semua $c \in S$, $c = c$. Maka diperoleh

$a = b$ dan $c = c \Leftrightarrow (a, c) = (b, c) \Rightarrow a * c = b * c$.

d.) Misal $a = a$ dan untuk semua $c, d \in S$, $c = d$. Maka diperoleh

$a = a$ dan $c = d \Leftrightarrow (a, c) = (a, d) \Rightarrow a * c = a * d$.

2.2 Grup

Definisi 2.2.1 (Grup) (Raisinghania dan Aggarwal, 1980:31)

Suatu himpunan G tak kosong dengan operasi biner " $*$ " ditulis sebagai $(G,*)$ disebut Grup jika memenuhi kondisi berikut:

a. Operasi biner " $*$ " bersifat assosiatif di G, yaitu $(a * b) * c = a * (b * c)$, $\forall a, b, c \in G$.

b. Terdapat elemen identitas (I) di G sehingga $a * I = I * a = a$, $\forall a \in G$.

c. Setiap anggota G punya invers di G, yaitu $\forall a \in G, \exists a^{-1} \in G$ sehingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = I$.

Contoh 2.2.1.1

$(\mathbb{Z}, +)$ merupakan grup, dengan $\mathbb{Z}$ adalah himpunan bilangan bulat dan $+$ operasi penjumlahan.

Bukti:

i. Ambil $a, b \in \mathbb{Z}$ maka $a + b \in \mathbb{Z}$. Jadi $\mathbb{Z}$ tertutup pada operasi penjumlahan.

ii. Ambil $a, b, c \in \mathbb{Z}$ maka $(a + b) + c = a + (b + c)$. Jadi operasi penjumlahan assosiatif di $\mathbb{Z}$.

iii. Terdapat $0 \in \mathbb{Z}$ sehingga $a + 0 = 0 + a = a$, $\forall a \in \mathbb{Z}$. Jadi terdapat identitas operasi penjumlahan di $\mathbb{Z}$ yaitu 0.

iv. Untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$ terdapat $(-a) \in \mathbb{Z}$ sehingga $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

Jadi setiap $a \in \mathbb{Z}$ memiliki invers di $\mathbb{Z}$ yaitu $(-a)$.

Karena keempat kondisi dipenuhi, maka $(\mathbb{Z}, +)$ merupakan grup.

Contoh 2.2.1.2

$(S, +)$ dengan $S = \{x \in S | -10 < x < 10\}$ bukan suatu grup.

Bukti:

Ambil $5 \in S$ maka $5 + 5 = 10 \notin S$, sehingga "+" tidak tertutup di S. Karena $(S, +)$ tidak memenuhi salah satu syarat grup, maka $(S, +)$ bukan suatu grup.

Teorema 2.2.2 (Ketunggalan Identitas)

Elemen identitas suatu grup adalah tunggal

(Raisinghania dan Aggarwal, 1980:75).

Bukti:

Misal $(G,*)$ grup dan misal I dan I' elemen identitas di G.

Karena I elemen identitas di G, maka $I * I' = I' * I = I'$

Karena I' elemen identitas di G, maka $I' * I = I * I' = I$

Dari kedua pernyataan di atas, maka diperoleh

$I' = I * I' = I' * I = I$

Sehingga $I' = I$

Dengan demikian terbukti bahwa elemen identitas di G adalah tunggal.

Teorema 2.2.3 (Ketunggalan Invers)

Masing-masing elemen suatu grup mempunyai invers tunggal

(Raisinghania dan Aggarwal, 1980:75).

Bukti:

Misal $(G,*)$ grup dan I identitas di G. Misal a sebarang elemen di G dan b, c invers dari a di G.

Karena b invers dari a, maka $b * a = a * b = I$ .... (2.2.3.1)

Karena c invers dari a, maka $c * a = a * c = I$ .... (2.2.3.2)

$b * (a * c) = b * I$ [dari (2.2.3.2)]

$= b$ [$\because$ I identitas di G]

Sehingga diperoleh $b * (a * c) = b$ .... (2.2.3.3)

Selanjutnya $(b * a) * c = I * c$ [$\because$dari (2.2.3.1)]

$= c$ [$\because$ I identitas di G]

Sehingga diperoleh $(b * a) * c = c$ .... (2.2.3.4)

Dari hukum assosiatif grup diperoleh $b * (a * c) = (b * a) * c$

Dari (2.2.3.3) dan (2.2.3.4) didapatkan $b = c$. Dengan demikian terbukti bahwa elemen a mempunyai invers tunggal.

Teorema 2.2.4

Invers dari invers elemen suatu grup adalah elemen itu sendiri

(Raisinghania dan Aggarwal, 1980:75-76).

Bukti:

Misal $(G,*)$ grup, I elemen identitas di G, dan a sebarang elemen di G. Akan ditunjukkan bahwa $(a^{-1})^{-1} = a$.

$a * a^{-1} = I$

$(a * a^{-1}) * (a^{-1})^{-1} = I * (a^{-1})^{-1}$

$a * (a^{-1} * (a^{-1})^{-1}) = (a^{-1})^{-1}$

$a * I = (a^{-1})^{-1}$

$a = (a^{-1})^{-1}$

Teorema 2.2.5 (Hukum Kanselasi kiri dan Kanselasi Kanan)

Misal $(G,*)$ grup dan a, b, c sebarang elemen di G

Jika $a * c = a * b$, maka $c = b$. [Hukum kanselasi kiri]

Jika $c * a = b * a$, maka $c = b$. [Hukum kanselasi kanan]

(Raisinghania dan Aggarwal, 1980:76).

Bukti:

Misal $(G,*)$ grup dan a, b, c sebarang elemen di G

(i) Hukum kanselasi kiri

$a * c = a * b$

$a^{-1} * (a * c) = a^{-1} * (a * b)$

$(a^{-1} * a) * c = (a^{-1} * a) * b$

$I * c = I * b$

$c = b$

(ii) Hukum kanselasi kiri

$c * a = b * a$

$(c * a) * a^{-1} = (b * a) * a^{-1}$

$c * (a * a^{-1}) = b * (a * a^{-1})$

$c * I = b * I$

$c = b$

Teorema 2.2.6 (Hukum Kebalikan Invers Operasi Elemen)

Invers dari operasi terhadap dua elemen suatu grup adalah operasi terbalik terhadap invers masing-masing elemen tersebut

(Raisinghania dan Aggarwal, 1980:76-77).

Bukti:

Misal $(G,*)$ grup dan $a, b \in G$

Akan ditunjukkan $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$

Karena ingin ditunjukkan invers dari $a * b$ adalah $b^{-1} * a^{-1}$, maka ini sama halnya dengan menunjukkan

$(a * b) * (b^{-1} * a^{-1}) = (b^{-1} * a^{-1}) * (a * b) = I$ dengan I identitas di G.

$$
\begin{aligned}
(a * b) * (b^{-1} * a^{-1}) &= [(a * b) * b^{-1}] * a^{-1} \\
&= [a * (b * b^{-1})] * a^{-1} \\
&= (a * I) * a^{-1} \\
&= a * a^{-1} \\
&= I
\end{aligned}
$$

Sehingga $(a * b) * (b^{-1} * a^{-1}) = I$ .... (2.2.6.1)

Sementara itu

$$
\begin{aligned}
(b^{-1} * a^{-1}) * (a * b) &= (a^{-1} * b^{-1}) * (b * a) \\
&= [(a^{-1} * b^{-1}) * b] * a \\
&= [a^{-1} * (b * b^{-1})] * a \\
&= (a^{-1} * I) * a \\
&= a^{-1} * a \\
&= I
\end{aligned}
$$

Sehingga $(b^{-1} * a^{-1}) * (a * b) = I$ .... (2.2.6.2)

Dengan demikian, dari (2.2.6.3) dan (2.2.6.4), diperoleh

$$(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$$

Teorema 2.2.7

Misal $(G,*)$ grup. Jika a, b sebarang elemen di G, maka persamaan $a * x = b$ mempunyai solusi unik x di G (Raisinghania dan Aggarwal, 1980:77-78).

Bukti:

Misal $(G,*)$ grup dan $a, b \in G$, akan ditunjukkan $a * x = b$ mempunyai solusi $x = a^{-1} * b$ di G.

Diketahui $a \in G, b \in G$ maka $a^{-1} \in G, b \in G$

Jadi $a^{-1} * b \in G$.

Substitusi x dengan $a^{-1} * b$, maka

$$\begin{aligned} a * x &= a * (a^{-1} * b) \\ &= (a * a^{-1}) * b \\ &= I * b \\ &= b \end{aligned}$$

Dengan demikian $x = a^{-1} * b$ memenuhi persamaan $a * x = b$. Ini menunjukkan bahwa $x = a^{-1} * b$ adalah solusi dari $a * x = b$ di G. Selanjutnya akan ditunjukkan solusi ini unik.

Misal $x = x_1$ dan $x = x_2$ adalah dua solusi dari persamaan $a * x = b$ di G, maka

$a * x_1 = b$ dan $a * x_2 = b$

Tetapi kenyataannya

$a * x_1 = b$, $a * x_2 = b$

$a * x_1 = a * x_2$

$(a^{-1} * a) * x_1 = (a^{-1} * a)x_2$

$I * x_1 = I * x_2$

$x_1 = x_2$

Dengan demikian jelas $a * x = b$ mempunyai solusi unik $x = a^{-1} * b$ di G.

Definisi 2.2.8 (Grup Abelian)

Suatu grup $(G,*)$ disebut Grup Abelian atau Grup Komutatif jika pada operasi biner " $*$ " berlaku sifat komutatif, yaitu $a * b = b * a$ untuk setiap $a, b \in G$ (Raisinghania dan Aggarwal,1980:31).

Contoh 2.2.8.1

$(\mathbb{Z}, +)$ merupakan grup abelian, dengan $\mathbb{Z}$ adalah himpunan bilangan bulat dan $+$ operasi penjumlahan.

Bukti:

i. Ambil $a, b \in \mathbb{Z}$ maka $a + b \in \mathbb{Z}$. Jadi $\mathbb{Z}$ tertutup pada operasi penjumlahan.

ii. Ambil $a, b, c \in \mathbb{Z}$ maka $(a + b) + c = a + (b + c)$. Jadi operasi penjumlahan assosiatif di $\mathbb{Z}$.

iii. Terdapat $0 \in \mathbb{Z}$ sehingga $a + 0 = 0 + a = a$, $\forall a \in \mathbb{Z}$. Jadi terdapat identitas operasi penjumlahan di $\mathbb{Z}$ yaitu 0.

iv. Untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$ terdapat $(-a) \in \mathbb{Z}$ sehingga $a + (-a) = (-a) + a = 0$. Jadi setiap $a \in \mathbb{Z}$ memiliki invers di $\mathbb{Z}$ yaitu $(-a)$.

v. Untuk semua $a, b \in \mathbb{Z}$ maka $a + b = b + a \in \mathbb{Z}$.

Karena $(\mathbb{Z}, +)$ memenuhi semua kondisi grup dan komutatif terhadap operasi penjumlahan, maka $(\mathbb{Z}, +)$ merupakan grup abelian.

Contoh 2.2.8.2

$(M_{2\times 2},\times)$ dengan $M_{2\times 2} = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid \forall a,b,c,d \in \mathbb{Z}\right\}$ dan $\times$ operasi perkalian matriks, bukan grup abelian. Hal ini dapat dilihat pada contoh berikut:

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 18 & 11 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 9 & 14 \end{bmatrix}$

Jelas bahwa $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

Sehingga $(M_{2\times 2},\times)$ bukan grup abelian.

Definisi 2.2.9 (Order Grup)

Jika $(G,*)$ suatu grup, maka order dari G adalah banyaknya elemen di G dan dinotasikan dengan $|G|$ (Fraleigh, 2003:50).

Contoh 2.2.9:

$\mathbb{Z}_2$ merupakan grup bilangan bulat modulo 2 dengan $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0},\bar{1}\}$. Maka order dari $\mathbb{Z}_2$ adalah 2.

2.3. Subgrup

Definisi 2.3.1 (Subgrup) (Judson, 1997:46-48)

Diketahui $(G,*)$ merupakan grup. Himpunan $H \subseteq G$ disebut subgrup dari G jika dan hanya jika memenuhi kedua aksioma berikut:

1. H bukan merupakan himpunan kosong.
2. $(H,*)$ merupakan grup.

Contoh 2.3.1

$(C,\times)$ merupakan suatu grup, di mana C adalah himpunan bilangan kompleks tanpa nol dan " $\times$ " operasi perkalian. Misal $H = \{1, -1, i, -i\}$ sub himpunan dari C. Karena:

1. H tak kosong.
2. " $\times$ " tertutup di H, yaitu:

   $1 \times (-1) = -1 \in H$

   $1 \times i = i \in H$

   $1 \times (-i) = -i \in H$

   $(-1) \times i = -i \in H$

   $(-1) \times (-i) = i \in H$

   $i \times (-i) = 1 \in H$
3. 1 merupakan unsur identitas di H terhadap operasi perkalian dan setiap elemen di H mempunyai invers, yaitu untuk setiap $x \in H$ mengakibatkan $x^{-1} \times x = I \in H$:

   $(1)^{-1} = 1$ karena $1 \times 1 = 1$

   $(-1)^{-1} = -1$ karena $(-1) \times (-1) = 1$

   $(i)^{-1} = -i$ karena $(-i) \times i = 1$

   $(-i)^{-1} = i$ karena $i \times (-i) = 1$

   Jadi $(H,\times)$ memenuhi kondisi grup, sehingga jelas bahwa $(H,\times)$ merupakan subgrup dari $(C,\times)$.

Definisi 2.3.2 (Subgrup Trivial dan Subgrup Sejati)

Diketahui $(G,*)$ merupakan grup dan $H \subseteq G$ merupakan subgrup dari G. Subgrup H disebut subgrup trivial jika dan hanya jika $H = \{I\}$, dengan $I \in G$ merupakan elemen identitas. Subgrup H disebut subgrup sejati jika dan hanya jika $H \neq G$ (Fraleigh, 2003:51).

Teorema 2.3.3 (Sifat-sifat Subgrup) (Fraleigh, 2003:52)

Diketahui $(G,*)$ merupakan grup dan H subgrup dari G, maka kedua pernyataan berikut berlaku:

1. Elemen identitas $I \in G$ juga merupakan elemen identitas pada H.
2. Untuk setiap $a \in H$ berlaku $a^{-1} \in H$ dengan a^{-1} merupakan invers elemen a.

Bukti:

Diketahui $(G,*)$ merupakan grup dan H subgrup dari G dengan I elemen identitas di G.

1. Andaikan terdapat $I_H \in H$, dengan $I_H * a = a * I_H = a$ untuk setiap $a \in H$. Karena $H \subseteq G$, maka untuk setiap $a \in H$ berlaku $a \in G$. Karena G merupakan grup, maka berlaku $I * a = a * I = a$. Dengan demikian diperoleh $a * I_H = a * I$ dan menggunakan teorema kanselasi kiri diperoleh $I_H = I$. Jadi, terbukti bahwa $I \in H$.
2. Karena H merupakan grup terhadap operasi biner "$*$" dan $I_H = I$, maka untuk setiap $a \in H$ berlaku $a * a^{-1} = a^{-1} * a = I_H$. Sehingga jelas bahwa untuk setiap $a \in H$ terdapat $a^{-1} \in H$.

Teorema 2.3.4

Diketahui $(G,*)$ merupakan grup dan $H \subseteq G$. Himpunan H merupakan subgrup dari G jika dan hanya jika $H \neq \emptyset$ dan untuk setiap $a, b \in H$ berlaku $a * b^{-1} \in H$, dengan b^{-1} merupakan invers elemen b (Dummit dan Foote, 2004:47).

Bukti:

Karena H subgrup dari G, untuk $a, b \in H$ maka menurut Teorema 2.3.3 terdapat $b^{-1} \in H$ dan dengan demikian $a * b^{-1} \in H$.

Akan ditunjukkan H merupakan subgrup dari G. Karena $H \subseteq G$ maka sifat assosiatif operasi "$*$" pada G juga berlaku pada H. Jika dipilih $b = a$, akan diperoleh $a * b^{-1} = a * a^{-1} = I \in H$. Dengan demikian H memuat elemen identitas dan menunjukkan $H \neq \emptyset$. Selanjutnya, jika dipilih $a = I$, akan diperoleh $a * b^{-1} = I * b^{-1} = b^{-1} \in H$ untuk setiap $b \in H$. Dengan demikian H memuat invers dari setiap elemennya. Jadi, terbukti bahwa H merupakah subgrup dari G.

Teorema 2.3.5

Diketahui $(G,*)$ merupakan grup dan H, K merupakan subgrup-subgrup dari G, maka $H \cap K$ juga merupakan subgrup atas G

(Raisinghania dan Aggarwal, 1980:178).

Bukti:

Karena G merupakan grup dan misal I identitas di G. Karena H, K subgrup dari G, maka pasti $I \in H$ dan $I \in K$ sehingga $I \in H \cap K \subseteq G$.

Dengan demikian jelas bahwa $H \cap K \neq \emptyset$.

Ambil sebarang $a, b \in H \cap K$, akibatnya $a, b \in H$ dan $a, b \in K$. Karena H merupakan subgrup maka menurut Teorema 2.3.4 berlaku $a * b^{-1} \in H$. Karena K juga merupakan subgrup maka menurut Teorema 2.3.4 juga berlaku $a * b^{-1} \in K$.

Akibatnya $a * b^{-1} \in H \cap K$, dan menurut Teorema 2.3.4 berakibat $H \cap K$ merupakan subgrup atas G.

2.4 Subgrup Normal

Definisi 2.4.1 (Koset)

Misalkan $(G,*)$ suatu grup, H subgrup dari G dan a adalah sebarang elemen dari G. Himpunan

$H * a = \{h * a : h \in H\}$ disebut *Koset Kanan* dari H. Analog dengan itu,

$a * H = \{a * h : h \in H\}$ disebut *Koset Kiri* dari H

(Fraleigh, 2003:97).

Contoh 2.4.1

Misal $(\mathbb{Z}_n,+)$ suatu grup dan $H = \{\ldots, -10, -5, 0, 5, 10, \ldots\}$ subgrup dari $\mathbb{Z}_n$, yang berisi semua kelipatan 5. Akan ditentukan koset dari H pada $\mathbb{Z}_n$.

Terdapat lima koset yang berbeda dari H pada $\mathbb{Z}_n$, sebagai berikut:

$O + H = H = \{\ldots, -10, -5, 0, 5, 10, \ldots\}$

$1 + H = \{\ldots, -9, -4, 1, 6, 11, \ldots\}$

$2 + H = \{\ldots, -8, -3, 2, 7, 12, \ldots\}$

$3 + -H = \{\ldots, -7, -2, 3, 8, 13, \ldots\}$

$4 + H = \{\ldots, -6, -1, 4, 9, 14, \ldots\}$

Koset yang lain $n + H$ akan sama dengan salah satu koset di atas.

Definisi 2.4.2 (Subgrup Normal)

Subgrup $(N,*)$ dari grup $(G,*)$ disebut subgrup normal dari G, jika untuk setiap $g \in G$ dan untuk setiap $n \in N$ berlaku $g * N = N * g$ (Fraleigh, 2003:132).

Contoh 2.4.2

Dalam setiap grup G, subgrup trivial $\{e\}$ dan G sendiri merupakan subgrup normal.

Teorema 2.4.3 (Robinson, 2003:60)

Misal $(G,*)$ grup dan $(H,*)$ subgrup dari G, maka pernyataan berikut ekuivalen:

1. $g * H = H * g$ untuk semua $g \in G$.
2. $g * h * g^{-1} \subseteq H$ di mana $h \in H$ dan $g \in G$.

Bukti:

(i) Misal $h \in H$ dan $g \in G$, maka $g * h \in g * H = H * g$ sehingga untuk $h_1 \in H$ berlaku

$g * h = h_1 * g$

$g * h * g^{-1} = h_1 * g * g^{-1}$

$g * h * g^{-1} = h_1 * I$

$g * h * g^{-1} = h_1 \in H$

Dengan demikian terbukti $g * h * g^{-1} \subseteq H$.

(ii) Misal $h \in H$ dan $g \in G$, maka untuk $h_1 \in H$ berlaku

$g * h * g^{-1} = h_1 \in H$

$g * h * g^{-1} * g = h_1 * g$

$g * h * I = h_1 * g$

$g * h = h_1 * g \in H * g$

sehingga $g * H \subseteq H * g$. Selanjutnya misal $h_2 \in H$ maka

$$g^{-1} * h_2 * g = g^{-1} * h_2 * (g^{-1})^{-1}$$

$$= g^{-1} * h_2 * g$$

$$= g^{-1} * g * h_2$$

$= I * h_2$

$= h_2 \in H$

yang menunjukkan bahwa $h * g = g * h_2$ sehingga $H * g \subseteq g * H$.

Dengan demikian karena $g * H \subseteq H * g$ dan $H * g \subseteq g * H$, maka terbukti $g * H = H * g$.

Teorema 2.4.4

Setiap subgrup dari grup abelian adalah normal.

Bukti:

Misal $(G,*)$ grup abelian dan $(H,*)$ subgrup dari G. Misal h sebarang elemen dari H dan g sebarang elemen dari G. Maka

$g * h * g^{-1} = h * g * g^{-1}$ [∵ abelian]

$= h * I_G$

$= h * I_H$ [∵ identitas subgrup sama dengan identitas grupnya]

$= h \in H$

Dengan demikian, karena $g * h * g^{-1} \in H$ untuk $\forall g \in G$ dan $\forall h \in H$, maka H merupakan subgrup normal di G.

Teorema 2.4.5

Misal $(G,*)$ grup. Jika H subgrup dari G dan K subgrup normal dari G, maka $H \cap K$ subgrup normal dari H (Raisinghania dan Aggarwal, 1980:216).

Bukti:

Karena H dan K subgrup dari G, maka menurut Teorema 2.3.5 $H \cap K$ adalah subgrup dari G. Karena $H \cap K$ subgrup dari G dan pasti $H \cap K \subseteq H$, maka $H \cap K$ adalah subgrup dari H.

Selanjutnya harus ditunjukkan $H \cap K$ normal di H. Akan ditunjukkan untuk $\forall h \in H$ dan $a \in H \cap K$ berlaku $h * a * h^{-1} \in H \cap K$.

$a \in H \cap K$ berarti bahwa $a \in H$ dan $a \in K$.

K normal, maka untuk $\forall h \in H$ dan $a \in K$, $(h \in H \Rightarrow h \in G)$, berlaku $h * a * h^{-1} \in K$ .... (2.4.5.1)

Karena H subgrup, maka untuk $h \in H$ dan $a \in H$ berlaku

$h * a * h^{-1} \in H$ .... (2.4.5.2)

Sehingga dari 2.4.5.1 dan 2.4.5.2 diperoleh

$h * a * h^{-1} \in H \cap K$ untuk $\forall h \in H$ dan $a \in H \cap K$.

Dengan demikian $H \cap K$ merupakan subgrup normal di H.

Teorema 2.4.6

Jika H subgrup normal dari G dan K subgrup dari G sedemikian hingga $H \subseteq K \subseteq G$, maka H pasti normal di K. Tetapi jika H normal di K , H belum tentu normal di G (Raisinghania dan Aggarwal, 1980:218).

Bukti:

Misal $(G,*)$ grup. H subgrup normal dari G dan K subgrup dari G dengan $H \subseteq K \subseteq G$. Akan dibuktikan H subgrup normal dari K. Akan ditunjukkan untuk $\forall k \in K$ dan $h \in H$ berlaku $k * h * k^{-1} \in K$.

Pertama, akan ditunjukkan H subgrup dari K. Karena H subgrup normal di G, berarti H subgrup dari G. Sedangkan K juga subgrup dari G dengan $H \subseteq K$. Maka pasti H subgrup dari K.

Selanjutnya akan ditunjukkan H normal di K. Misal ambil k sebarang elemen di K dan h sebarang elemen di H, maka

$$k \in G, h \in H \quad [\because K \subseteq G]$$

Karena H normal di G, maka berlaku

$$k * h * k^{-1} \in H$$

Selanjutnya, karena H subgrup dari K, maka

$$k * h * k^{-1} \in H \text{ berlaku untuk } \forall k \in K \text{ dan } h \in H.$$

Dengan demikian H merupakan subgrup normal di K.

2.5 Grup Faktor

Definisi 2.5.1 (Grup Faktor)

Bila N adalah Subgrup Normal dari grup $(G,*)$, maka himpunan dari koset-koset $G/N = \{g * N | g \in G\}$ membentuk grup $(G/N,*)$ yang didefinisikan oleh $(g1 * N) * (g2 * N) = (g1 * g2) * N$ yang disebut Grup Faktor G oleh N.

Order dari Grup Faktor $(G/N,*)$ adalah banyaknya koset-koset dari N dalam G, sehingga:

$$|G/N| = |G:N| = \frac{|G|}{|N|}$$

(Robinson, 2003:62).

Contoh 2.5.1

Misalkan $G = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} = \mathbb{Z}_6$ Grup dan $H = \{0, 2, 4\}$ adalah subgrup dari G. Maka akan ditunjukkan grup faktor G/H. Pertama, akan ditunjukkan bahwa H merupakan subgrup normal, di mana koset kiri sama dengan koset kanan. $G = \mathbb{Z}_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, generatornya adalah $0, 1, 2, 3, 4,$ dan 5

Koset kiri:

$$0 + H = 0 + \{0, 2, 4\} = \{0, 2, 4\}$$

$$1 + H = 1 + \{0, 2, 4\} = \{1, 3, 5\}$$

$$2 + H = 2 + \{0, 2, 4\} = \{2, 4, 0\}$$

$$3 + H = 3 + \{0, 2, 4\} = \{3, 5, 1\}$$

$$4 + H = 4 + \{0, 2, 4\} = \{4, 0, 2\}$$

$$5 + H = 5 + \{0, 2, 4\} = \{5, 1, 3\}$$

Koset kanan:

$$H + 0 = \{0, 2, 4\} + 0 = \{0, 2, 4\}$$

$$H + 1 = \{0, 2, 4\} + 1 = \{1, 3, 5\}$$

$$H + 2 = \{0, 2, 4\} + 2 = \{2, 4, 0\}$$

$$H + 3 = \{0, 2, 4\} + 3 = \{3, 5, 1\}$$

$$H + 4 = \{0, 2, 4\} + 4 = \{4, 0, 2\}$$

$$H + 5 = \{0, 2, 4\} + 5 = \{5, 1, 3\}$$

Sehingga:

$$0 + H = H + 0 = \{0, 2, 4\}$$

$$1 + H = H + 1 = \{1, 3, 5\}$$

$$2 + H = H + 2 = \{2, 4, 0\}$$

$$3 + H = H + 3 = \{3, 5, 1\}$$

$$4 + H = H + 4 = \{4, 0, 2\}$$

$$5 + H = H + 5 = \{5, 1, 3\}$$

Karena diperoleh koset kiri = koset kanan, maka H merupakan subgrup normal.

Banyaknya unsur yang membentuk grup faktor G/H adalah

$$\left|\frac{G}{H}\right| = |G:H| = \frac{|G|}{|N|} = \frac{6}{3} = 2$$

Misal diambil koset kiri:

$$0 + H = \{0, 2, 4\}$$

$$1 + H = \{1, 3, 5\}$$

$$2 + H = \{2, 4, 0\}$$

$$3 + H = \{3, 5, 1\}$$

$$4 + H = \{4, 0, 2\}$$

$$5 + H = \{5, 1, 3\}$$

Maka:

$$0 + H = 2 + H = 4 + H = \{0, 2, 4\}$$

$$1 + H = 3 + H = 5 + H = \{1, 3, 5\}$$

Sehingga unsur dari grup faktornya ada 2, yaitu: $0 + H = \{0, 2, 4\} = H$ dan $1 + H = \{1, 3, 5\}$ dengan tabel sebagai berikut:

Tabel 2.5.1 Grup Faktor dari $(G, +)\mathbb{Z}_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ Terhadap $(H, +) = \{0, 2, 4\}$

$+$	$\boldsymbol{H}$	$\boldsymbol{1 + H}$
$\boldsymbol{H}$	H	$1 + H$
$\boldsymbol{1 + H}$	$1 + H$	H

2.6. Grup Siklik

Definisi 2.6.1 (Pembangun)

Diketahui $(G,*)$ merupakan grup, $a \in G$, dan $H = \{a^n | n \in \mathbb{Z}\}$. Elemen a disebut pembangun grup H dan dinotasikan $< a > = H$.

Contoh 2.6.1

Pembangun dan subgrup dari $(\mathbb{Z}_{10}, +)$ adalah sebagai berikut:

$\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\} = < 1 > = < 3 > = < 7 > = < 9 > = \mathbb{Z}_{10}$

$\{0,2,4,6,8\} = < 2 > = < 4 > = < 6 > = < 8 >$

$\{0,5\} = < 5 >$

Dari perhitungan didapat pembangun dari $\mathbb{Z}_{10}$ yaitu 1,3,7, dan 9. Sedangkan subgrupnya yaitu $< 2 >, < 4 >, < 5 >, < 6 >$ dan $< 8 >$.

Definisi 2.6.2 (Grup Siklik)

Diketahui $(G,*)$ merupakan grup. Jika terdapat $a \in G$ sehingga $< a > = G$ maka G disebut grup siklik (Dummit dan Foote, 2004:54).

Contoh 2.6.2

Diketahui $(\mathbb{Z}, +)$ merupakan grup dengan $\mathbb{Z}$ himpunan bilangan bulat. Grup $(\mathbb{Z}, +)$ merupakan grup siklik karena $< 1 > = \mathbb{Z}$ dan $< -1 > = \mathbb{Z}$.

Teorema 2.6.3

Setiap grup siklik adalah abelian (Fraleigh, 2003:59).

Bukti:

Misal $(G,*)$ grup siklik yang dibangkitkan oleh elemen a. Misal x, y sebarang elemen G, maka $x = a^n$ dan $y = a^m$ dengan $n, m \in \mathbb{Z}$.

Sehingga $x * y = a^n * a^m$

$$= a^{n+m}$$

$$= a^{m+n}$$

$$= a^m * a^n$$

$$= y * x$$

Demikian terbukti bahwa $x * y = y * x$, sehingga $(G,*)$ abelian.

Teorema 2.6.4

Jika a generator dari suatu grup siklik $(G,*)$, maka a^{-1} juga generator dari $(G,*)$ (Raisinghania dan Aggarwal, 1980:98-99).

Bukti:

Misal grup siklik $(G,*)$ dibangkitkan oleh $a \in G$, maka dari definisi diketahui bahwa $G = < a >$. Selanjutnya $a^n = a^{-(-n)} = (a^{-1})^{-n}$.

Karena n adalah bilangan bulat, maka $-n$ juga bilangan bulat. Sehingga berlaku $G = < a^{-1} >$.

Teorema 2.6.5

Subgrup dari suatu grup siklik merupakan grup siklik (Fraleigh, 2003:61).

Bukti:

Misalkan G merupakan grup siklik yang dibangun oleh a dan H subgrup dari G. Akan ditunjukkan bahwa H merupakan grup siklik. Jika $H = \{I\}$, jelas bahwa $I = H$ sehingga H merupakan grup siklik. Jika $H \neq \{I\}$, maka terdapat elemen $x \in H$ dengan $x \neq e$. Karena H merupakan subgrup dari G, maka $x \in G$ dan berakibat $x = a^n \in H$ untuk suatu $n \in \mathbb{Z}^+$. Pilih bilangan $m \in \mathbb{Z}^+$ sebagai bilangan yang terkecil sehingga $a^m \in H$.

Akan ditunjukkan bahwa $< a^m > = H$. Diambil sebarang $y \in H$ dan karena H merupakan subgrup dari G, maka $y \in G$ dan berakibat $y = a^z \in H$ untuk suatu $z \in \mathbb{Z}^+$. Diperhatikan bahwa $m \leq z$ dan dari algoritma pembagian pada $\mathbb{Z}$ diperoleh $z = mq + r$ untuk suatu $q, r \in \mathbb{Z}$ dan $0 \leq r < m$. Dengan demikian diperoleh:

$$a^z = a^{mq+r} = a^{mq}a^r$$

dan

$$a^r = (a^m)^{-q}a^z$$

Karena $a^m, a^z \in H$ dan H merupakan grup, akibatnya $((a^m)^{-q} \in H$ dan $(a^m)^{-q}a^z \in H$. Dengan demikian diperoleh $a^r = (a^m)^{-q}a^z \in H$. Karena m

merupakan bilangan yang terkecil sehingga $a^m \in H$ dan karena $0 \leq r < m$, dengan kata lain $r = 0$ sehingga $a^r = a^0 = I$ dan diperoleh:

$$a^z = a^{mq+r} = (a^m)^q$$

Jadi, karena untuk sebarang $y \in H$ berlaku $y = (a^m)^q$, maka $< a^m > = H$ dan dengan kata lain H merupakan grup siklik.

2.7 Grup Bilangan Bulat Modulo *n*

Definisi 2.7.1 (Ekuivalen) (Raisinghania dan Aggarwal, 1980:11-13)

Suatu relasi $\parallel$ pada himpunan A disebut relasi ekuivalen bila memenuhi sifat-sifat berikut:

a. $a \parallel a$ berlaku untuk $\forall a \in A$ (Sifat Refleksif).

b. $a \parallel b$ maka berlaku $b \parallel a$ untuk $\forall a, b \in A$ (Sifat Simetris).

c. $a \parallel b$ dan $b \parallel c$, maka berlaku $a \parallel c$ untuk $\forall a, b, c \in A$ (Sifat Transitif).

Definisi 2.7.2 (Relasi Modulo *n*)

Diketahui $\mathbb{Z}$ merupakan himpunan seluruh bilangan bulat dan $n \in \mathbb{Z}$. Didefinisikan juga relasi $\sim$ pada $\mathbb{Z}$ sebagai berikut. Diketahui $a, b \in \mathbb{Z}$, maka $a \sim b$ jika dan hanya jika $a - b = qn$ untuk suatu $q \in \mathbb{Z}$. Relasi $\sim$ tersebut dinamakan relasi modulo n (Dummit dan Foote, 2004:8).

Contoh 2.7.2

Misalkan diketahui $n = 4$, maka untuk sebarang bilangan $a \in \mathbb{Z}$ jika dibagi dengan 4 menggunakan algoritma pembagian akan menghasilkan sisa pembagian berupa bilangan $0, 1, 2$ dan 3. Lebih lanjut, diperhatikan bahwa:

$\bar{0} = \{a \in \mathbb{Z} | a \sim 0\} = \{0, \pm 4, \pm 8, \dots\}$

$\bar{1} = \{a \in \mathbb{Z} | a \sim 1\} = \{\dots, -7, -3, 1, 5, 9, \dots\}$

$\overline{2} = \{a \in \mathbb{Z} | a \sim 2\} = \{\dots, -6, -2, 2, 6, 10, \dots\}$

$\overline{3} = \{a \in \mathbb{Z} | a \sim 3\} = \{\dots, -5, -3, 3, 7, 11, \dots\}$

Teorema 2.7.3

Relasi modulo n merupakan relasi ekuivalen (refleksif, simetris, dan transitif) (Ayres dan Jaisingh, 2004:63).

Bukti:

Akan ditunjukkan bahwa relasi modulo n merupakan relasi ekuivalen. Diambil sebarang $\in \mathbb{Z}$, maka:

a. Untuk sebarang $a \in \mathbb{Z}$ berlaku $a - a = 0 = 0n$, dengan demikian $a \sim a$ dan dengan kata lain relasi modulo n merupakan relasi refleksif.

b. Diambil sebarang $a, b \in \mathbb{Z}$ dengan $a \sim b$, yaitu $a - b = qn$ untuk suatu $q \in \mathbb{Z}$. Perhatikan bahwa $-(a - b) = -(qn) \Leftrightarrow b - a = (-q)n$. Karena $q \in \mathbb{Z}$ maka $-q \in \mathbb{Z}$, sehingga berlaku $b \sim a$. Dengan kata lain relasi modulo n merupakan relasi simetris.

c. Diambil sebarang $a, b, c \in \mathbb{Z}$ dengan $a \sim b$ dan $b \sim c$. Karena $a \sim b$, maka berlaku $a - b = qn$ untuk suatu $q \in \mathbb{Z}$ dan karena juga $b \sim c$, maka berlaku $b - c = rn$ untuk suatu $r \in \mathbb{Z}$. Diperhatikan bahwa:

$$
\begin{aligned}
a - c &= (a - b) + (b - c) \\
&= qn + rn \\
&= (q + r)n
\end{aligned}
$$

Karena $q, r \in \mathbb{Z}$, akibatnya $q + r \in \mathbb{Z}$ dan dengan demikian berlaku $a \sim c$. Dengan kata lain relasi modulo n merupakan relasi transitif.

Jadi, terbukti bahwa relasi modulo n merupakan relasi ekuivalen.

Teorema 2.7.4

Diketahui $n \in \mathbb{Z}$, maka himpunan $G = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1}\}$ merupakan grup terhadap operasi $*$ yang didefinisikan $\bar{a} * \bar{b} = \overline{a+b}$. Grup ini disebut *grup bilangan bulat modulo* n atau dinotasikan dengan $\mathbb{Z}_n$ (Judson, 1997:36-37).

Bukti:

Akan ditunjukkan bahwa operasi $*$ merupakan operasi biner. Pertama, akan ditunjukkan bahwa operasi $*$ merupakan operasi yang tertutup. Ambil sebarang $a, b \in G$ dan diperhatikan bahwa $a + b \in \mathbb{Z}$. Dengan demikian menurut algoritma pembagian pada $\mathbb{Z}$ diperoleh $a + b = qn + r$ untuk suatu $q, r \in \mathbb{Z}$ dan $0 \leq r < n$. Diperhatikan bahwa $a + b = qn + r \Leftrightarrow (a + b) - r = qn$, dengan kata lain $(a + b) \sim r$ sesuai definisi relasi modulo n. Karena $(a + b) \sim r$, maka $a + b \in r$ dan dengan demikian $\overline{a+b} = \bar{r}$. Jadi operasi $*$ merupakan operasi yang tertutup.

Kedua, akan ditunjukkan bahwa operasi $*$ merupakan operasi yang terdefinisi dengan baik. Untuk sebarang $\bar{a}, \bar{b} \in G$, berlaku $a + b \in \mathbb{Z}$. Dengan demikian sebarang elemen pada G dapat dioperasikan, dengan kata lain operasi $*$ merupakan operasi yang terdefinisi dengan baik. Jadi, operasi $*$ merupakan operasi biner.

Selanjutnya akan ditujukkan bahwa $(G,*)$ merupakan grup. Jelas bahwa G bukan merupakan himpunan kosong. Akan ditunjukkan bahwa G memenuhi sifat assosiatif.

Untuk sebarang $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in G$, diperhatikan bahwa:

$$
\begin{aligned}
(\bar{a} * \bar{b}) * \bar{c} &= \overline{a+b} * \bar{c} \\
&= \overline{(a+b)+c}
\end{aligned}
$$

$$= \overline{a + (b + c)}$$

$$= \bar{a} * \overline{(b + c)}$$

$$= \bar{a} * (\bar{b} * \bar{c})$$

Jadi, terbukti bahwa sifat assosiatif berlaku.

Jika dipilih elemen $\bar{0} \in G$, maka untuk setiap $\bar{a} \in G$ akan berlaku:

$$\bar{0} * \bar{a} = \overline{0 + a}$$

$$= \bar{a}$$

$$= \overline{a + 0}$$

$$= \bar{a} * \bar{0}$$

Jadi, $\bar{0} \in G$ merupakan elemen identitas pada G.

Untuk sebarang $\bar{a} \in G$ dipilih elemen $\overline{n - a} \in G$. Karena $n \sim 0$, akibatnya $\bar{n} = \bar{0}$ dan diperhatikan bahwa:

$$\bar{a} * \overline{n - a} = \overline{a + n - a} \qquad \text{dan} \qquad \overline{n - a} * \bar{a} = \overline{n - a + a}$$

$$= \bar{n} \qquad\qquad\qquad = \bar{n}$$

$$= \bar{0} \qquad\qquad\qquad = \bar{0}$$

Jadi, setiap elemen $\bar{a} \in G$ memiliki elemen invers terhadap operasi $*$ yaitu $\overline{n - a} \in G$. Karena keempat aksioma berlaku maka G merupakan grup terhadap operasi $*$.

Teorema 2.7.5

Grup $\mathbb{Z}_n$ merupakan grup siklik.

Bukti:

Jika $n = 0$ maka $\mathbb{Z}_n = \{\bar{0}\}$ dan jika $n \neq 0$, maka dapat dipilih $\bar{1} \in \mathbb{Z}_n$ sehingga $< \bar{1} > = \mathbb{Z}_n$.

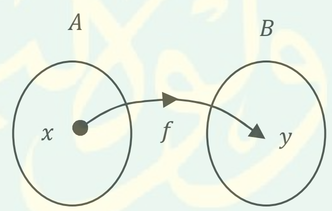
2.8 Homomorfisme dan Isomorfisme Grup

Agar lebih mudah memahami definisi homomorfisme dan isomorfisme, terlebih dahulu akan diberikan definisi mengenai fungsi, fungsi injektif, surjektif, serta fungsi bijektif.

Definisi 2.8.1 (Fungsi)

Misal A dan B adalah himpunan. Suatu fungsi atau pemetaan dari A ke B, dituliskan sebagai $f: A \rightarrow B$, merupakan suatu aturan yang memasangkan tiap elemen x di A dengan tepat satu elemen $f(x) = y$ di B.

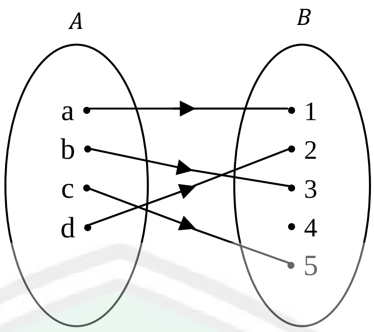
Himpunan A disebut *domain* dan himpunan B disebut *kodomain*. Sedangkan *bayangan* dari fungsi f adalah $Im(x) = \{f(x) | x \in A\}$, yang merupakan sub himpunan dari B. Bayangan dari f disebut juga dengan daerah hasil (*range*) (Munir, 2005:128-129).



Gambar 2.8.1 *Fungsi*

Definisi 2.8.2 (Fungsi injektif / Satu-satu)

Fungsi $f: A \rightarrow B$ disebut injektif jika semua elemen A mempunyai bayangan di B dan tidak ada dua elemen A yang memiliki bayangan sama. Yaitu $\forall x_1, x_2 \in A$ dan $f(x_1) = f(x_2)$ maka berakibat $x_1 = x_2$ atau $\forall x_1, x_2 \in A$ dan $x_1 \neq x_2$ maka berakibat $f(x_1) \neq f(x_2)$ (Munir, 2005:131).



Gambar 2.8.2 *Fungsi Injektif*

Contoh2.8.2

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ di mana $f(x) = 2x$ merupakan fungsi injektif.

Bukti:

Ambil $x, y \in \mathbb{R}$ sedemikian hingga

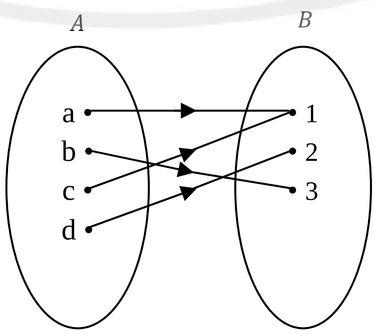
$$f(x) = f(y)$$

$$2x = 2y$$

$$x = y$$

Definisi 2.8.3 (Fungsi Surjektif / Onto)

Fungsi $f: A \rightarrow B$ disebut surjektif jika setiap elemen himpunan B merupakan bayangan dari satu atau lebih elemen himpunan A. Yaitu $\forall y \in B, \exists x \in A \ni y = f(x)$ (Munir, 2005:132).



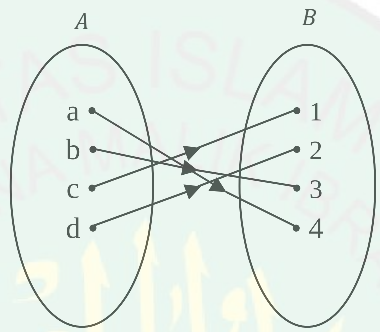
Gambar 2.8.3 *Fungsi Surjektif*

Contoh 2.8.3

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di mana $f(x) = 4x$ merupakan fungsi surjektif.

Definisi 2.8.4 (Fungsi Bijektif / Satu-Satu dan Onto)

Fungsi $f: A \to B$ disebut bijektif jika merupakan fungsi injektif dan juga surjektif (Munir, 2005:133).



Gambar 2.8.4 *Fungsi Bijektif*

Contoh 2.8.4

1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di mana $f(x) = x^3$ merupakan fungsi bijektif.
2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di mana $f(x) = x^2$ bukan fungsi injektif dan bukan fungsi surjektif.

Definisi 2.8.5 (Homomorfisme)

Misal $(G,*)$ dan $(H,\circ)$ grup. Suatu pemetaan $\varphi : G \to H$ sedemikian hingga $\varphi(x * y) = \varphi(x) \circ \varphi(y)$, untuk semua $x, y \in G$ disebut *homomorfisme* (Dummit dan Foote, 2004:36).

Teorema 2.8.6 (Sifat Homomorfisme) (Raisinghania dan Aggarwal, 1980:98-99)

Misal $(G,*)$ dan $(H,\circ)$ grup dan $\varphi : G \to H$ suatu homomorfisme, maka

1. Bayangan homomorfik dari identitas di G adalah identitas di H.
2. Bayangan homomorfik dari invers sebarang elemen a di G adalah invers dari bayangan a.
3. Jika a merupakan sebarang elemen berorder hingga di G, maka order dari bayangan a juga berhingga dan merupakan pembagi dari order a.

Bukti:

1. Misal $(G,*)$ dan $(H,\circ)$ grup dan $\varphi : G \to H$ suatu homomorfisme, akan ditunjukkan untuk I_G elemen identitas di G, maka $\varphi(I_G)$ adalah elemen identitas di H.

   Misal I_G elemen identitas di G dan I_H elemen identitas di H, dan misal a sebarang elemen G sedemikian hingga $\varphi(a) \in H$, maka didapatkan

   $$\varphi(a) \circ I_H = \varphi(a)$$

   Selanjutnya

   $\varphi(a) \circ I_H = \varphi(a)$

   $\varphi(a) \circ I_H = \varphi(a * I_G)$

   $\varphi(a) \circ I_H = \varphi(a) \circ \varphi(I_G)$

   $I_H = \varphi(I_G)$ [kanselasi kiri]

   Dengan demikian $\varphi(I_G)$ adalah identitas di H.

2. Misal $(G,*)$ dan $(H,\circ)$ grup dan $\varphi : G \to H$ suatu homomorfisme dan misal a^{-1} invers elemen a di G, akan ditunjukkan $\varphi(a^{-1})$ merupakan invers elemen $\varphi(a)$ di H.

   Misal a sebarang elemen G dan I_G elemen identitas di G.

   Maka $a * a^{-1} = I_G = a^{-1} * a$

   Selanjutnya

$a * a^{-1} = I_G$

$\varphi(a * a^{-1}) = \varphi(I_G)$

$\varphi(a) \circ \varphi(a^{-1}) = \varphi(I_G)$

Dan

$a^{-1} * a = I_G$

$\varphi(a^{-1} * a) = \varphi(I_G)$

$\varphi(a^{-1}) \circ \varphi(a) = \varphi(I_G)$

Sehingga $\varphi(a) \circ \varphi(a^{-1}) = \varphi(a^{-1}) \circ \varphi(a) = \varphi(I_G)$

Sebagaimana diketahui sebelumnya I_G identitas di G, dengan bayangan homomorfik dari I_G adalah $\varphi(I_G)$, yang merupakan identitas di H. Dengan demikian, karena $\varphi(I_G) = I_H = \varphi(a) \circ \varphi(a^{-1})$.

Maka $\varphi(a^{-1}) = [\varphi(a)]^{-1}$. Jadi terbukti bahwa bayangan homomorfik dari invers a adalah invers dari $\varphi(a)$.

3. Misal $(G,*)$ dan $(H,\circ)$ grup dan $\varphi : G \to H$ suatu homomorfisme. Misal $a \in G$ dengan $a^m = I_G$ dan $\varphi(a) \in H$ dengan $[\varphi(a)]^n = I_H$. Akan ditunjukkan n membagi m atau $m = nq$ dengan m, n, q bilangan bulat.

$a^m = I_G$

$\varphi(a^m) = \varphi(I_G)$

$\varphi(\underbrace{a * a * \ldots * a}_{\text{sebanyak } m}) = \varphi(I_G)$

$\underbrace{\varphi(a) \circ \varphi(a) \circ \ldots \circ \varphi(a)}_{\text{sebanyak } m} = \varphi(I_G)$

$\varphi(a)^m = \varphi(I_G)$

Karena I_G identitas di G, di mana bayangan homomorfiknya adalah $\varphi(I_G)$ elemen identitas di H. Sehingga berakibat order $\varphi(a) \leq m$.

Jadi order $\varphi(a)$ berhingga bila order a juga berhingga.

Misal order $\varphi(a) = n$, maka $n \leq m$, di mana n bilangan bulat positif terkecil yang memenuhi $[\varphi(a)]^n = \varphi(I_G)$

Selanjutnya, menurut algoritma pembagian, terdapat bilangan bulat q dan r sedemikian hingga $m = nq + r$ di mana $0 \leq r < n$. Selanjutnya,

$[\varphi(a)]^m = \varphi(I_G)$

$[\varphi(a)]^{nq+r} = \varphi(I_G)$

$[[\varphi(a)]^n]^q \circ [\varphi(a)]^r = \varphi(I_G)$

$[\varphi(I_G)]^q \circ [\varphi(a)]^r = \varphi(I_G)$ $\quad [\therefore (\varphi(a))^n = \varphi(I_G)]$

$[\varphi(a)]^r = \varphi(I_G)$ $\quad [\therefore \varphi(I_G) = I_H]$

Karena $0 \leq r < n$ dan order $\varphi(a) = n$, maka hanya ada kemungkinan $r = 0$ dan dengan demikian $m = nq$. Jadi terbukti bahwa n membagi m.

Definisi 2.8.7 (Kernel)

Misal$(G,*)$ dan $(H,\circ)$ grup, jika $\varphi : G \to H$ adalah suatu homomorfisme, maka kernel dari φ adalah himpunan K yang didefinisikan dengan

$$K = \{k \in G | \varphi(k) = I_G\}$$

dan ditulis dengan $ker\ \varphi$, dengan I_G elemen identitas di G

(Dummit dan Foote, 2004:75).

Teorema 2.8.8 (Kernel)

Misal$(G,*)$ dan $(H,\circ)$ grup, jika $\varphi : G \to H$ adalah suatu homomorfisme, maka kernel dari φ adalah suatu subgrup normal di G

(Raisinghania dan Aggarwal, 1980:261).

Bukti:

Misal$(G,*)$ dan $(H,\circ)$ grup dan $\varphi : G \to H$ adalah suatu homomorfisme. Misal I_G elemen identitas di G dan I_H elemen identitas di H. Misal K kernel dari φ dengan $K = \{x \in G; \varphi(x) = I_H\}$.

Pertama, akan ditunjukkan K adalah subgrup dari G. Karena bayangan identitas di G adalah identitas di H, maka $\varphi(I_G) = I_H$. Akibatnya $I_G \in K$ dan dengan demikian K tidak kosong. Misal $a, b \in K$ maka $\varphi(a) = I_H$ dan $\varphi(b) = I_H$ sehingga

$$\begin{aligned}
\varphi(a * b^{-1}) &= \varphi(a) \circ \varphi(b^{-1}) \\
&= \varphi(a) \circ [\varphi(b)]^{-1} && [\because \varphi(b^{-1}) = [\varphi(b)]^{-1}\,] \\
&= I_H \circ [I_H]^{-1} \\
&= I_H \circ I_H && [\because [I_H]^{-1} = I_H] \\
&= I_H
\end{aligned}$$

Dengan demikian $a * b^{-1} \in K$. Sehingga K subgrup dari G.

Selanjutnya, akan ditunjukkan K normal di G. Misal x sebarang elemen di G dan k sebarang elemen di K, maka $\varphi(k) = I_H$. Oleh karena itu,

$$\begin{aligned}
\varphi(x * k * x^{-1}) &= \varphi(x) \circ \varphi(k) \circ \varphi(x^{-1}) \\
&= \varphi(x) \circ I_H \circ [\varphi(x)]^{-1} \\
&= \varphi(x) \circ [\varphi(x)]^{-1} \\
&= I_H \in K
\end{aligned}$$

Maka $x * k * x^{-1} \in K$.

Dengan demikian, karena $x * k * x^{-1} \in K$ untuk $\forall x \in G$ dan $\forall k \in K$, maka K merupakan subgrup normal di G.

Definisi 2.8.9 (Isomorfisme) (Dummit dan Foote, 2004:37)

Pemetaan $\varphi : G \to H$ disebut suatu *isomorfisme* dan G dan H dikatakan *isomorfik* atau mempunyai tipe isomorfisme yang sama, ditulis $G \cong H$, jika

1. φ adalah suatu homomorfisme.
2. φ adalah fungsi bijektif.

Contoh 2.8.9

1. Untuk sebarang grup G, terdapat isomorfisme dari G ke dirinya sendiri, atau ditulis $G \cong G$.
2. Pemetaan eksponensial $exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ didefinisikan sebagai $exp(x) = e^x$erupakan suatu isomorfisme dari $(\mathbb{R}, +)$ ke $(\mathbb{R}^+, \times)$, karena $exp(x + y) = exp(x)exp(y)$ maka $e^{x+y} = e^x e^y$.

Teorema 2.8.10 (Teorema Isomorfisme Pertama)

Setiap bayangan homomorfik dari suatu grup, isomorfik dengan grup faktornya. Sebaliknya, setiap grup faktor dari suatu grup adalah bayangan homomorfik dari grup tersebut (Raisinghania dan Aggarwal, 1980:264).

Bukti:

Misal$(G,*)$ dan $(H,\circ)$ grup, jika $\varphi : G \to H$ adalah suatu homomorfisme, sehingga $H = \varphi(G)$. Misal I_G elemen identitas di G dan I_H elemen identitas di H. Misal $K = ker\,\varphi$, sehingga $\varphi(K) = I_H$, maka menurut teorema 2.8.8, $ker\,\varphi$ adalah subgrup normal dari G sedemikian hingga G/K adalah grup faktor dari G oleh K. Akan ditunjukkan bahwa $G/K \cong H$. Misal $\mu : G/K \to H$ dengan $\mu(K * a) = \varphi(a)$ untuk $\forall a \in G$. Akan ditunjukkan μ suatu isomorfisme.

Pertama, akan ditunjukkan μ terdefinisi dengan baik. Untuk itu, harus ditunjukkan bahwa bayangan setiap elemen $K * a$ di φ adalah sama. Dengan kata lain, bayangan setiap elemen koset $K * a$ dari G/K di H adalah sama. Dengan demikian, untuk sebarang $k * a \in K * a$ sedemikian hingga $k \in K$, maka $\varphi(k * a) = \varphi(k) \circ \varphi(a) = I_H \circ \varphi(a) = \varphi(a)$. Dengan demikian terbukti μ terdefinisi dengan baik.

Selanjutnya akan ditunjukkan μ fungsi satu-satu.

$\mu(K * a) = \mu(K * b)$

$\varphi(a) = \varphi(b)$

$\varphi(a) \circ \varphi(b)^{-1} = \varphi(b) \circ \varphi(b)^{-1}$ [$\because$ kedua ruas dikali $\varphi(b)^{-1}$]

$\varphi(a) \circ \varphi(b)^{-1} = I_H$

$\varphi(a * b^{-1}) = I_H$

$a * b^{-1} \in K$ [$\because$ definisi $ker\varphi$]

$K * a = K * b$ [$\because K * a = K * b \Leftrightarrow a * b^{-1} \in K$]

Dengan demikian μ merupakan fungsi satu-satu.

Selanjutnya akan ditunjukkan μ onto. Karena untuk $a \in G$, setiap elemen H selalu berbentuk $\varphi(a)$. Dan oleh karena itu, untuk setiap elemen $K * a$ elemen G/K sedemikian hingga $\mu(K * a) = \varphi(a)$, maka jelas bahwa μ onto.

Selanjutnya, misal $K * a$ dan $K * b$ elemen koset di G/K, maka

$$\begin{aligned} \mu[(K * a) * (K * b)] &= \mu(K * a * b) \\ &= \varphi(a * b) \\ &= \varphi(a) \circ \varphi(b) \\ &= \mu(K * a) \circ \mu(K * b) \end{aligned}$$

Maka, jelas μ suatu homomorfisme. Karena μ homomorfisme, satu-satu dan onto, maka μ merupakan isomorfisme. Sehingga terbukti $G/K \cong H$.

Sebaliknya, misal N subgrup normal dari G sedemikian hingga G/N adalah grup faktor, akan ditunjukkan bahwa $G \simeq G/N$.

Dengan demikian, akan ditunjukkan pemetaan $\delta : G \to G/N$ dengan $\delta(a) = N * a$ untuk $\forall a \in G$ suatu homomorfisme. Misal a, b sebarang elemen G, maka

$$\begin{aligned}\delta(a * b) &= N * a * b \\ &= (N * a) * (N * b) \\ &= \delta(a) * \delta(b)\end{aligned}$$

Jadi, δ merupakan fungsi homomorfisme. Dan lagi, jika $N * a$ sebarang elemen G/N, maka untuk setiap $a \in G$ berlaku $\delta(a) = N * a$. Dengan demikian δ onto. Dengan demikian, G/N adalah bayangan homomorfik dari G. Sehingga secara umum, setiap grup faktor dari suatu grup adalah bayangan homomorfik dari grup tersebut.

2.9 *Direct Product*

Definisi 2.9.1 (*Direct Product*)

Direct product dari dua grup abelian $(A,*)$ dan $(B,\circ)$ dengan operasi $\times$ merupakan himpunan semua pasangan terurut (a, b), dengan $a \in A$ dan $b \in B$ yang diberikan oleh

$$(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) = (a_1 * a_2, b_1 \circ b_2)$$

(Cameron, 2004:2).

Teorema 2.9.2

Jika G suatu grup abelian berhingga dengan order setidaknya dua, maka G isomorfik dengan *direct product* dari grup siklik dengan bentuk

$$G \cong \mathbb{Z}_{{p_1}^{n_1}} \times \mathbb{Z}_{{p_2}^{n_2}} \times \dots \times \mathbb{Z}_{{p_s}^{n_s}}$$

di mana untuk setiap i, p_i prima dan n_i bilangan bulat positif.

Jika grup G mempunyai order n, maka

$$n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_s^{n_s}$$

(Clark, 1998:53-54 dan Judson, 1997:193).

Catatan: p_i saling relatif prima.

Jadi p_i bisa diperoleh dari faktorisasi prima dari order grup G.

Contoh 2.9.2

Misal $G = \{0,1,2,3,4,5\}$ himpunan bilangan bulat dengan operasi $+ \, modulo\ 6$ sedemikian hingga $G = \mathbb{Z}_6$ merupakan grup abelian berorder $6 = 2 \cdot 3$. Maka akan ditunjukkan G isomorfik dengan grup $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ sebagai berikut:

Didefinisikan $f: \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ dengan $f(a) = (a \bmod 2, a \bmod 3)$ untuk $\forall a \in \mathbb{Z}_6$. Akan ditunjukkan $f(a) = (a \bmod 2, a \bmod 3)$ terdefinisi dengan baik. Misal $a, b \in \mathbb{Z}_6$ dan $a = b$, harus ditunjukkan $(a \bmod 2, a \bmod 3) = (b \bmod 2, b \bmod 3)$. Karena diketahui $a = b$ maka berlaku

$$f(a) = f(b)$$

$$(a \bmod 2, a \bmod 3) = (b \bmod 2, b \bmod 3)$$

Sehingga f terdefinisi dengan baik.

Selanjutnya akan ditunjukkan $f(a) = (a \bmod 2, a \bmod 3)$ untuk $\forall a \in \mathbb{Z}_6$ merupakan homomorfisme. Misal $a, b \in \mathbb{Z}_6$. Akan ditunjukkan $f(a+b) = f(a) + f(b)$.

$$\begin{aligned} f(a+b) &= ((a+b) \bmod 2, (a+b) \bmod 3) \\ &= (a \bmod 2 + b \bmod 2, a \bmod 3 + b \bmod 3) \\ &= (a \bmod 2, a \bmod 3) + (b \bmod 2, b \bmod 3) \\ &= f(a) + f(b) \end{aligned}$$

Jadi f homomorfisme.

Selanjutnya $f: \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ dengan $f(a) = (a \, mod \, 2, a \, mod \, 3)$ untuk $\forall a \in \mathbb{Z}_6$ diperoleh:

$f(0) = (0 \, mod \, 2{,}0 \, mod \, 3) = (0{,}0)$

$f(1) = (1 \, mod \, 2{,}1 \, mod \, 3) = (1{,}1)$

$f(2) = (2 \, mod \, 2{,}2 \, mod \, 3) = (0{,}2)$

$f(3) = (3 \, mod \, 2{,}3 \, mod \, 3) = (1{,}0)$

$f(4) = (4 \, mod \, 2{,}4 \, mod \, 3) = (0{,}1)$

$f(5) = (5 \, mod \, 2{,}5 \, mod \, 3) = (1{,}2)$

sehingga f merupakan fungsi satu-satu onto dan elemen $\mathbb{Z}_6$ ekuivalen dengan elemen $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$. Dengan demikian, $\mathbb{Z}_6$ isomorfik dengan $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$.

2.10 Kajian Subgrup dalam Konsep Islam

Suatu himpunan G dengan operasi biner "*" atau ditulis $(G,*)$ disebut grup jika memenuhi empat aksioma, yaitu: tertutup, assosiatif, mempunyai identitas, dan mempunyai invers. Sehingga dengan demikian, grup mempunyai tiga penyusun, yaitu himpunan, operasi biner, dan aturan atau aksioma yang harus dipenuhi agar menjadi suatu grup.

Perhatikan dua ayat Al-Qur'an surat Al-Faathir ayat 1 dan surat An-Nuur ayat 45 sebagai berikut:

ٱلْحَمْدُ لِلَّهِ فَاطِرِ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضِ جَاعِلِ ٱلْمَلَٰٓئِكَةِ رُسُلًا أُو۟لِىٓ أَجْنِحَةٍ مَّثْنَىٰ
وَثُلَٰثَ وَرُبَٰعَ ۚ يَزِيدُ فِى ٱلْخَلْقِ مَا يَشَآءُ ۚ إِنَّ ٱللَّهَ عَلَىٰ كُلِّ شَىْءٍ قَدِيرٌ ١

Artinya:

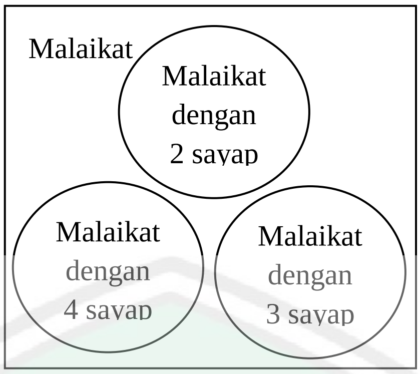
> *"Segala puji bagi Allah Pencipta langit dan bumi, yang menjadikan Malaikat sebagai utusan-utusan (untuk mengurus berbagai macam urusan) yang mempunyai sayap, masing-masing (ada yang) dua, tiga dan empat. Allah menambahkan pada ciptaan-Nya apa yang dikehendaki-Nya. Sesungguhnya Allah Maha Kuasa atas segala sesuatu."*

وَٱللَّهُ خَلَقَ كُلَّ دَآبَّةٍ مِّن مَّآءٍ ۖ فَمِنْهُم مَّن يَمْشِى عَلَىٰ بَطْنِهِۦ وَمِنْهُم مَّن يَمْشِى عَلَىٰ رِجْلَيْنِ وَمِنْهُم مَّن يَمْشِى عَلَىٰٓ أَرْبَعٍ ۚ يَخْلُقُ ٱللَّهُ مَا يَشَآءُ ۚ إِنَّ ٱللَّهَ عَلَىٰ كُلِّ شَىْءٍ قَدِيرٌ ﴿٤٥﴾

Artinya:

> *"Dan Allah telah menciptakan semua jenis hewan dari air, Maka sebagian dari hewan itu ada yang berjalan di atas perutnya dan sebagian berjalan dengan dua kaki sedang sebagian (yang lain) berjalan dengan empat kaki. Allah menciptakan apa yang dikehendaki-Nya, Sesungguhnya Allah Maha Kuasa atas segala sesuatu."*

Pada kedua ayat di atas, pertama, dalam QS Al-Faathir ayat 1 dijelaskan makhluk yang disebut malaikat. Malaikat ini terbagi menjadi tiga kelompok, yaitu kelompok malaikat dengan dua sayap, malaikat dengan tiga sayap, dan malaikat dengan empat sayap. Sedangkan dalam QS An-Nuur ayat 45 dijelaskan makhluk yang disebut hewan, yang kemudian terbagi menjadi tiga kelompok, yaitu hewan yang berjalan di atas perutnya, hewan yang berjalan dengan dua kaki, dan hewan yang berjalan empat kaki. Kedua kelompok tersebut dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 2.10.1 *Himpunan Malaikat*

Gambar 2.10.2 *Himpunan Hewan*

Abdussyakir (2007) menjelaskan dalam kedua ayat di atas, yaitu QS Al-Faathir ayat 1 dan QS An-Nuur ayat 45, terdapat konsep matematika yang terkandung di dalamnya, yaitu sekumpulan atau sekelompok objek-objek yang mempunyai ciri-ciri yang sangat jelas. Inilah yang dalam matematika dinamakan dengan himpunan.

Kemudian perhatikan ayat Al-Qur’an surat An-Najm ayat 45 dan Adz-Dzaariyat ayat 49 sebagai berikut:

وَأَنَّهُۥ خَلَقَ ٱلزَّوۡجَيۡنِ ٱلذَّكَرَ وَٱلۡأُنثَىٰ ﴿٤٥﴾

Artinya:

"Dan bahwasanya Dialah yang menciptakan berpasang-pasangan pria dan wanita."

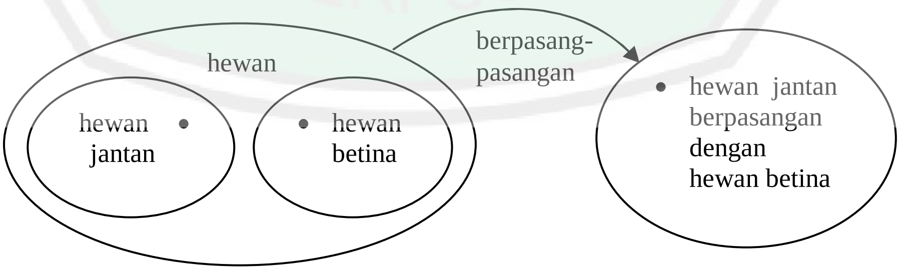
وَمِن كُلِّ شَيْءٍ خَلَقْنَا زَوْجَيْنِ لَعَلَّكُمْ تَذَكَّرُونَ ﴿٤٩﴾

Artinya:

"Dan segala sesuatu Kami ciptakan berpasang-pasangan supaya kamu mengingat kebesaran Allah."

Surat An-Najm ayat 45 menjelaskan bahwa manusia diciptakan berpasang-pasangan, yaitu sepasang pria dan wanita. Kemudian surat Adz-Dzaariyat ayat 49 menjelaskan lebih jauh bahwa bukan hanya manusia yang diciptakan berpasangan, tetapi segala sesuatu di dunia ini juga diciptakan Allah secara berpasang-pasangan. Hubungan ini dapat digambarkan sebagai berikut:

Gambar 2.10.3 *Operasi Biner pada Manusia*



Gambar 2.10.4 *Operasi Biner pada Hewan*

Hubungan ini jika ditulis secara matematis menjadi:

(pria,wanita) = pria berpasangan dengan wanita

(jantan,betina) = jantan berpasangan dengan betina

Dalam matematika, hubungan atau relasi ini secara lebih umum ditulis sebagai $*(a,b) = a * b$, di mana " * " merupakan fungsi yang memetakan (a,b) anggota suatu himpunan A ke $a * b$ anggota himpunan $A \, X \, A$. Sehingga dalam QS An-Najm ayat 45 dan QS Adz-Dzaariyat ayat 49 tersebut terdapat konsep matematika yang terkandung di dalamnya, yaitu fungsi yang memetakan satu himpunan ke himpunan yang lain, yang dalam hal ini interaksi antar makhluk sejenis, berupa berpasang-pasangan. Inilah yang dalam matematika dikenal sebagai operasi biner.

Selanjutnya perhatikan ayat Al-Qur'an surat Ali Imron ayat 190-191 sebagai berikut:

إِنَّ فِي خَلۡقِ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلۡأَرۡضِ وَٱخۡتِلَٰفِ ٱلَّيۡلِ وَٱلنَّهَارِ لَأٓيَٰتٖ لِّأُوْلِي ٱلۡأَلۡبَٰبِ
١٩٠ ٱلَّذِينَ يَذۡكُرُونَ ٱللَّهَ قِيَٰمٗا وَقُعُودٗا وَعَلَىٰ جُنُوبِهِمۡ وَيَتَفَكَّرُونَ فِي خَلۡقِ
ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلۡأَرۡضِ رَبَّنَا مَا خَلَقۡتَ هَٰذَا بَٰطِلٗا سُبۡحَٰنَكَ فَقِنَا عَذَابَ ٱلنَّارِ ١٩١

Artinya:

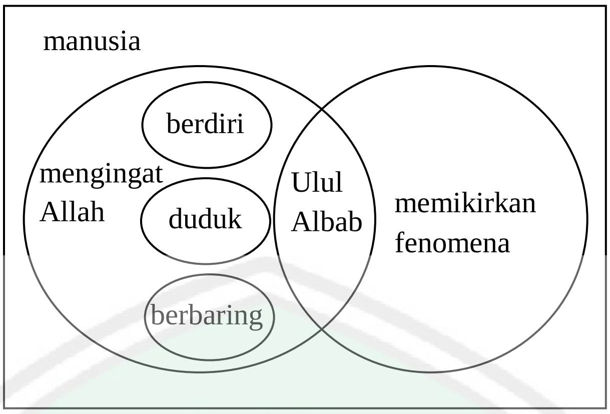
"Sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi, dan silih bergantinya malam dan siang terdapat tanda-tanda bagi orang-orang yang berakal. (yaitu) Orang-orang yang mengingat Allah sambil berdiri atau duduk atau dalam keadan berbaring dan mereka memikirkan tentang penciptaan langit dan bumi (seraya berkata): "Ya Tuhan Kami, Tiadalah Engkau menciptakan ini dengan sia-sia, Maha suci Engka, Maka peliharalah Kami dari siksa neraka."

Dari ayat A-Qur'an surat Ali Imron ayat 190-191 di atas, dijelaskan mengenai sekelompok manusia yang disebut *Ulul Albab* (orang-orang yang berakal). Kelompok ini bisa disebut sebagai *Ulul Albab* jika orang-orang dalam kelompok tersebut memenuhi beberapa sifat, yaitu senantiasa mengingat Allah, baik dalam keadaan berdiri, duduk, atau berbaring, dan memikirkan tentang penciptaan langit dan bumi dengn keyakinan bahwa semua itu tidaklah sia-sia.

Dengan demikian dalam ayat Al-Qur'an surat Ali Imron ayat 190-191 di atas, terdapat konsep matematika yang terkandung di dalamnya, yaitu sifat yang harus dipenuhi agar suatu kelompok dapat disebut suatu kelompok yang tertentu atau kelompok uang lebih khusus lagi. Inilah yang dalam matematika dikenal sebagai aturan atau aksioma yang harus dipenuhi agar suatu kelompok atau himpunan dapat dikatakan sebagai suatu grup.

Dari ketiga uraian di atas, yaitu mengenai himpunan, operasi biner, dan aturan atau aksioma suatu grup tertentu, jika ketiganya dipenuhi maka jadilah suatu grup tertentu tersebut. Sebagai contoh sebagaimana disebutkan sebelumnya yaitu grup *ulul albab*.

Ulul albab awalnya merupakan himpunan manusia yang saling berinteraksi. Namun di samping berinteraksi sebagaimana manusia lainnya, mereka juga senantiasa mengingat Allah, baik dalam keadaan berdiri, duduk, atau berbaring, dan memikirkan tentang penciptaan langit dan bumi dengan keyakinan bahwa semua itu tidaklah sia-sia. Inilah yang membedakan mereka dengan manusia lain, sehingga mereka dapat disebut ulul albab, sebagaimana digambarkan sebagai berikut:



Gambar 2.10.5 *Grup Ulul Albab*

Dengan demikian dapat dilihat perbedaan sifat yang jelas antara Ulul Albab dengan manusia biasa pada umumnya. Karena seseorang yang senantiasa mengingat Allah belum tentu merupakan seorang Ulul Albab, begitu juga seseorang yang memikirkan fenomena belum tentu dia termasuk Ulul Albab. Tetapi seseorang yang sudah disebut Ulul Albab pasti juga orang yang senantiasa mengingat Allah dan memikirkan fenomena.

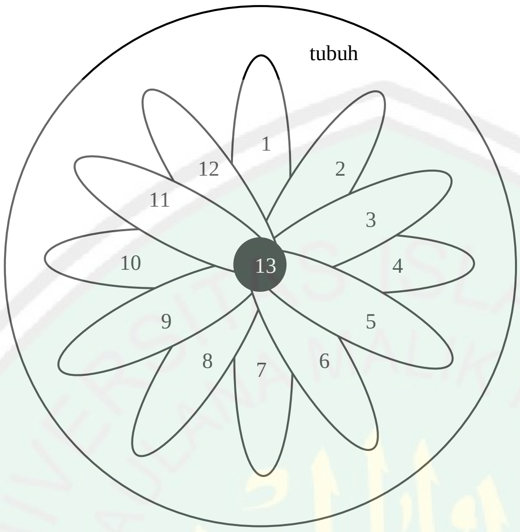
Kemudian perhatikan ayat Al-Qur'an surat Al-Infithar ayat 7 berikut:

ٱلَّذِى خَلَقَكَ فَسَوَّىٰكَ فَعَدَلَكَ ۝٧

Artinya:

> *"Yang telah menciptakan kamu lalu menyempurnakan kejadianmu dan menjadikan (susunan tubuh)mu seimbang."*

Ayat di atas, yaitu QS Al-Infithar ayat 7 menjelaskan bahwa tubuh manusia terdiri dari penyusun yang seimbang. Lebih jauh, Wibowo (2008) menyebutkan bahwa penyusun tubuh manusia ini terdiri dari berbagai organ. Di mana organ-organ yang berbeda akan bekerja sama membantuk sistem-sistem organ. Sistem organ dalam tubuh manusia ini ada 12 macam dan dapat digambarkan sebagai berikut:



Ket:
1 = sistem otot
2 = sistem kulit
3 = sistem hormon
4 = sistem ekskresi
5 = sistem reproduksi
6 = sistem pernapasan
7 = sistem peredaran darah
8 = sistem peredaran limfa
9 = sistem imun
10 = sistem pencernaan
11 = sistem rangka
12 = sistem saraf
13 = gen (elemen sama yang menyusun semua sistem)

Gambar 2.10.6 *Sistem Organ dalam Tubuh Manusia sebagai Sub-Tubuh, Gabungan Beberapa Organ Tubuh yang Bekerja Sama*

Tiap sistem organ sebagai sub-tubuh tersebut mempunyai sifat yang sama dengan tubuh secara umum, yaitu merupakan unsur penunjang aktifitas manusia. Dengan demikian, dalam QS Al-Infithar ayat 7 terdapat konsep matematika yang terkandung di dalamnya, yaitu sub-kelompok yang juga memenuhi sifat kelompok induknya. Inilah yang dalam matematika dikenal dengan subgrup.

BAB III

PEMBAHASAN

Lemma Goursat mendeskripsikan subgrup dari *direct product* dalam bentuk subgrup normalnya secara individu. Sebelum dibahas mengenai *Lemma Goursat*, terlebih dahulu akan ditunjukkan *direct product* grup $G_1 \times G_2$ merupakan suatu grup.

Akan ditunjukkan bahwa untuk $(G_1,*)$ dan $(G_2,\circ)$ grup, maka $(G_1 \times G_2, \square)$ merupakan grup. Di mana untuk setiap $a_1, a_2 \in G_1$ maka $a_1 * a_2 \in G_1$, dan untuk setiap $b_1, b_2 \in G_2$ maka $b_1 \circ b_2 \in G_2$, dengan didefinisikan $G_1 \times G_2 = \{(a,b) | a \in G_1; b \in G_2\}$.

Didefinisikan operasi $\square$ pada $G_1 \times G_2$ yaitu $(a_1, b_1)\square(a_{\,2}, b_2) = (a_1 * a_2, b_1 \circ b_2)$. Sebelumnya, akan ditunjukkan bahwa $(a_1, b_1)\square(a_2, b_2) = (a_1 * a_2, b_1 \circ b_2)$ terdefinisi dengan baik. Harus ditunjukkan bahwa $f: (G_1 \times G_2) \,\square\, (G_1 \times G_2) \to G_1 \times G_2$ merupakan suatu fungsi. Misal $(a_1, b_1)\square(a_2, b_2), (a_1', b_1')\square(a_2', b_2') \in (G_1 \times G_2) \,\square\, (G_1 \times G_2)$ dengan $(a_1, b_1)\square(a_2, b_2) = (a_1', b_1')\square(a_2', b_2')$, maka harus ditunjukkan $f[(a_1, b_1)\square(a_2, b_2)] = f[(a_1', b_1')\square(a_2', b_2')]$

Dengan menggunakan definisi f dan karena

$(a_1, b_1)\square(a_2, b_2) = (a_1', b_1')\square(a_2', b_2')$

$$(a_1 * a_2, b_1 \circ b_2) = (a_1' * a_2', b_1' \circ b_2')$$

$[(a_1, b_1)\square(a_2, b_2)] = f[(a_1', b_1')\square(a_2', b_2')]$

Dengan demikian $\square$ merupakan suatu fungsi, sehingga $\square$ terdefinisi dengan baik di $G_1 \times G_2$.

Untuk menunjukkan bahwa $G_1 \times G_2$ merupakan suatu grup, pertama akan ditunjukkan untuk $G_1 \times G_2$tertutup terhadap operasi □ di $G_1 \times G_2$.

Diketahui untuk setiap $a_1, a_2 \in G_1$ maka $a_1 * a_2 \in G_1$, dan untuk setiap $b_1, b_2 \in G_2$ maka $b_1 \circ b_2 \in G_2$. Misal (a_1, b_1) dan$(a_2, b_2) \in G_1 \times G_2$, akan ditunjukkan $(a_1, b_1)□(a_2, b_2) \in G_1 \times G_2$. Karena

$$\begin{aligned}(a_1, b_1)□(a_2, b_2) &= [(a_1 * a_2), (b_1 \circ b_2)] \\ &= (a_1 * a_2, b_1 \circ b_2) \in G_1 \times G_2\end{aligned}$$

Dengan demikian □ tertutup di $G_1 \times G_2$.

Kedua, akan ditunjukkan□assosiatif di $G_1 \times G_2$. Misal $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$ dan $(a_3, b_3) \in G_1 \times G_2$. Akan ditunjukkan

$$(a_1, b_1)□(a_2, b_2)]□(a_3, b_3) = (a_1, b_1)□[(a_2, b_2)□(a_3, b_3)].$$

Karena

$$\begin{aligned}[(a_1, b_1)□(a_2, b_2)]□(a_3, b_3) &= [(a_1 * a_2), (b_1 \circ b_2)]□(a_3, b_3) \\ &= [(a_1 * a_2 * a_3), (b_1 \circ b_2 \circ b_3)] \\ &= (a_1, b_1)□[(a_2 * a_3), (b_2 \circ b_3)] \\ &= (a_1, b_1)□[(a_2, b_2)□(a_3, b_3)]\end{aligned}$$

Dengan demikian, □ assosiatif di $G_1 \times G_2$.

Ketiga, akan ditunjukkan bahwa terdapatelemen identitas terhadap □ di $G_1 \times G_2$. Misal $(a, b) \in G_1 \times G_2$ dan misal I_* elemen identitas di G_1,dan $I_\circ$ elemen identitas di G_2. Akan ditunjukkan terdapat elemen identitas $I_□ = (I_*, I_\circ)$ di $G_1 \times G_2$ yang memenuhi $(a, b)□I_□ = I_□□(a, b) = (a, b)$.

I_* elemen identitas di G_1, berarti untuk $\forall a \in G_1$berlaku

$a * I_* = I_* * a = a$ .... (3.1)

$I_\circ$ elemen identitas di G_2, berarti untuk $\forall b \in G_2$ berlaku

$b \circ I_\circ = I_\circ \circ b = b$ .... (3.2)

Karena elemen $G_1 \times G_2$ merupakan pasangan terurut dan karena G_1, G_2 grup, maka untuk $\forall a \in G_1, b \in G_2$, dengan melihat persamaan (3.1) dan (3.2), maka berlaku

$(a,b) = (a * I_*, b \circ I_\circ)$

$= (a,b)\square(I_*, I_\circ)$ .... (3.3)

dan berlaku

$(a,b) = (I_* * a, I_\circ \circ b)$

$= (I_*, I_\circ)\square(a,b)$ .... (3.4)

Sehingga dari (3.3) dan (3.4) diperoleh

$$(a,b) = (a,b)\square(I_*, I_\circ) = (I_*, I_\circ)\square(a,b)$$

Dengan demikian diperoleh $(I_*, I_\circ) = I_\square$. Sehingga terdapat $I_\square = (I_*, I_\circ)$ sebagai identitas di $G_1 \times G_2$.

Keempat, akan ditunjukkan bahwa setiap elemen punya invers di $G_1 \times G_2$. Misal $(a,b) \in G_1 \times G_2$. Misal I_* elemen identitas di G_1sehingga a^{-1} invers dari a terhadap $*$ di G_1, dan $I_\circ$ elemen identitas di G_2 sehingga b^{-1} invers dari b terhadap $\circ$ di G_2. Akan ditunjukkan terdapat $(a,b)^{-1}$ invers sebarang elemen (a,b) di $G_1 \times G_2$ sehingga dipenuhi $(a,b)\square(a,b)^{-1} = I_\square$.

Telah diketahui sebelumnya bahwa $I_{\square} = (I_*, I_\circ)$. Maka

$(a,b)\square(a,b)^{-1} = I_{\square}$ .... (3.5)

Selanjutnya,

$(a,b)\square(a^{-1},b^{-1}) = (a * a^{-1}, b \circ b^{-1})$

$= (I_*, I_\circ)$

$= I_{\square}$ .... (3.6)

Sehingga dari (3.5) dan (3.6), dengan menggunakan hukum kanselasi kiri diperoleh

$(a,b)\square(a,b)^{-1} = (a,b)\square(a^{-1},b^{-1})$

Jadi $(a,b)^{-1} = (a^{-1},b^{-1})$. Sementara itu,

$(a,b)^{-1}\square(a,b) = I_{\square}$ .... (3.7)

Selanjutnya,

$(a^{-1},b^{-1})\square\,(a,b) = (a * a^{-1}, b \circ b^{-1})$

$= (I_*, I_\circ)$

$= I_{\square}$ .... (3.8)

Sehingga dari (3.7) dan (3.8), dengan menggunakan hukum kanselasi kanan diperoleh

$(a,b)^{-1}\square(a,b) = (a^{-1},b^{-1})\square\,(a,b)$

Jadi $(a,b)^{-1} = (a^{-1},b^{-1})$.

Dengan demikian, terdapat invers dari setiap elemen (a,b) di $G_1 \times G_2$ yaitu (a^{-1},b^{-1}). Karena keempat aksioma terpenuhi, maka $G_1 \times G_2$ merupakan suatu grup.

Selanjutnya akan diselidiki apakah $G_1 \times G_2$ merupakan grup abelian. Karena dalam penelitian ini dibatasi setiap grup penyusun grup *direct product* $G_1 \times G_2$ merupakan grup siklik, maka jelas bahwa setiap grup penyusunnya merupakan grup abelian. Selanjutnya akan diselidiki apakah untuk $(G_1,*), (G_2,\circ)$ grup abelian, maka $(G_1 \times G_2, \square)$ juga merupakan grup abelian. Di mana untuk setiap $a_1, a_2 \in G_1$ maka $a_1 * a_2 = a_2 * a_1 \in G_1$, dan untuk setiap $b_1, b_2 \in G_2$ maka $b_1 \circ b_2 = b_2 \circ b_1 \in G_2$.

Misal $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in G_1 \times G_2$ akan ditunjukkan bahwa $(a_1, b_1)\square(a_2, b_2) = (a_2, b_2)\square\,(a_1, b_1)$. Karena

$$
\begin{aligned}
(a_1, b_1)\square(a_2, b_2) &= (a_1 * a_2, b_1 \circ b_2) \\
&= (a_2 * a_1, b_2 \circ b_1) \\
&= (a_2, b_2)\square\,(a_1, b_1)
\end{aligned}
$$

Dengan demikian terbukti bahwa $G_1 \times G_2$ merupakan grup abelian.

Lemma3.1 ***LemmaGoursat***

Misal G_1, G_2 grup, dan misal H subgrup dari $G_1 \times G_2$ sedemikian hingga kedua fungsi $p_1: H \to G_1$ dan $p_2: H \to G_2$ surjektif. Misal N_1 kernel dari p_2 dan N_2 kernel dari p_1. Sehingga dapat diidentifikasi N_1 sebagai subgrup normal dari G_1 dan N_2 sebagai subgrup normal dari G_2. Maka bayangan H adalah $G_1/N_1 \times G_2/N_2$ yang merupakan graf isomorfisme $G_1/N_1 \cong G_2/N_2$ (D. Anderson, 2009:1).

Bukti :

Bukti dari *Lemma Goursat* akan dibahas bersamaan dengan penerapannya pada grup $G_1 \times G_2$ sebagai berikut.

Misal $(G_1,*)$ dan $(G_2,\circ)$ grup, $(G_1 \times G_2, \square)$ grup hasil *direct product* dari G_1 dan G_2, $H \leq G_1 \times G_2$ dengan $H = \{(a, b) | a \in G_1; b \in G_2\}$.

Diberikan fungsi

$\rho_1 : H \to G_1$ dengan $\rho_1(a,b) = a$ onto, $ker\ \rho_1 = N_2 \trianglelefteq G_2$.

$\rho_2 : H \to G_2$ dengan $\rho_2(a,b) = b$ onto, $ker\ \rho_2 = N_1 \trianglelefteq G_1$.

$ker\ \rho_1 = N_2 \trianglelefteq G_2$ berarti untuk $\forall b \in G_2$ berlaku $b \circ N_2 = N_2 \circ b$

$ker\ \rho_2 = N_1 \trianglelefteq G_1$ berarti untuk $\forall a \in G_1$ berlaku $a * N_1 = N_1 * a$

Dengan demikian

$\rho_1(H) = G_1$ .... (3.9)

$\rho_1(N_2) = I_*$ .... (3.10)

$\rho_2(H) = G_2$ .... (3.11)

$\rho_2(N_1) = I_\circ$ .... (3.12)

Akan ditunjukkan bayangan H adalah $G_1/N_1 \times G_2/N_2$.

Sebelumnya akan ditunjukkan ρ_1 dan ρ_2 merupakan homomorfisme. Pertama, akan ditunjukkan ρ_1 dan ρ_2 merupakan fungsi yang terdefinisi dengan baik. Misal $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in H$ dengan $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$. Harus ditunjukkan $\rho_1(a_1, b_1) = \rho_1(a_2, b_2)$.

$(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in H$ berarti $a_1, a_2 \in G_1$. Karena G_1 grup, maka terdapat ${a_2}^{-1} \in G_1$ sehingga berlaku $a_1 * {a_2}^{-1} \in G_1$. Karena $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$, ini berarti bahwa untuk I_* elemen identitas di G_1 berlaku

$a_1 * {a_2}^{-1} = I_*$

$a_1 * {a_2}^{-1} * a_2 = I_* * a_2$

$a_1 * I = I_* * a_2$

$a_1 = a_2$

$\rho_1(a_1, b_1) = \rho_1(a_2, b_2)$

Sehingga ρ_1 terdefinisi dengan baik.

Sedangkan untuk menunjukkan ρ_2 terdefinisi dengan baik, untuk $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in H$ dengan $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$, harus ditunjukkan $\rho_2(a_1, b_1) = \rho_2(a_2, b_2)$.

$(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in H$ berarti $b_1, b_2 \in G_2$. Karena G_2 grup, maka terdapat ${b_2}^{-1} \in G_2$ sehingga berlaku $b_1 \circ {b_2}^{-1} \in G_2$. Karena $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$, ini berarti bahwa untuk $I_\circ$ elemen identitas di G_2 berlaku

$b_1 \circ {b_2}^{-1} = I_\circ$

$b_1 \circ {b_2}^{-1} \circ b_2 = I_\circ \circ b_2$

$b_1 \circ I_\circ = I_\circ \circ b_2$

$b_1 = b_2$

$\rho_2(a_1, b_1) = \rho_2(a_2, b_2)$

Dengan demikian ρ_2 juga terdefinisi dengan baik.

Selanjutnya akan ditunjukkan ρ_1 dan ρ_2 homomorfisme. Misal $a_1, a_2 \in G_1$ dan $b_1, b_2 \in G_2$. Karena G_1 grup, maka $a_1 * a_2 \in G_1$ dan karena G_2 grup, maka $b_1 \circ b_2 \in G_2$. Dengan demikian berlaku

$$
\begin{aligned}
\rho_1[(a_1, b_1)\square(a_2, b_2)] &= \rho_1(a_1 * a_2, b_1 \circ b_2) \\
&= a_1 * a_2 \\
&= \rho_1(a_1, b_1) * \rho_1(a_2, b_2) \text{ , dan}
\end{aligned}
$$

$$\rho_2[(a_1, b_1)\square(a_2, b_2)] = \rho_2(a_1 * a_2, b_1 \circ b_2)$$
$$= b_1 \circ b_2$$
$$= \rho_2(a_1, b_1) \circ \rho_2(a_2, b_2)$$

Jadi ρ_1 dan ρ_2 merupakan homomorfisme.

Karena ρ_1 homomorfisme dan $ker\ \rho_1 = N_2$, berdasarkan teorema kernel (2.8.8) maka N_2 normal di H yang berarti bahwa untuk setiap $(a, b) \in H$ berlaku

$$(a, b)\square N_2 = N_2\square(a, b)$$

yang juga berarti bahwa N_2 normal di $G_1 \times G_2$ untuk setiap $a \in G_1$ dan $b \in G_2$. Dan juga karena ρ_2 homomorfisme dan $ker\ \rho_2 = N_1$, berdasarkan teorema kernel (2.8.8) maka N_1 normal di H, yang berarti untuk setiap $(a, b) \in H$ berlaku

$$(a, b)\square N_1 = N_1\square(a, b)$$

yang juga berarti bahwa N_1 normal di $G_1 \times G_2$ untuk setiap $a \in G_1$ dan $b \in G_2$.

Dengan demikian menurut Teorema Isomorfisme Pertama, karena $\rho_1 : H \to G_1$ homomorfisme dengan $H \leq G_1 \times G_2$, dan N_2 normal di $G_1 \times G_2$ sehingga $(G_1 \times G_2)/N_2$ merupakan grup faktor, maka diperoleh

$(G_1 \times G_2)/N_2 \cong G_1$ .... (3.13)

Dan karena $\rho_2 : H \to G_2$ homomorfisme dengan $H \leq G_1 \times G_2$, dan N_1 normal di $G_1 \times G_2$ sehingga $(G_1 \times G_2)/N_1$ merupakan grup faktor, maka diperoleh

$(G_1 \times G_2)/N_1 \cong G_2$.. (3.14)

Sementara itu, untuk $\forall a \in G_1; \forall b \in G_2$, I_* elemen identitas di G_1, dan $I_\circ$ elemen identitas di G_2. Untuk $N_1 \times I_\circ \leq G_1 \times G_2$ berlaku

$$(N_1, I_\circ)\square(a, b) = (N_1 * a, I_\circ \circ b) = (a * N_1, b \circ I_\circ) = (a, b)\square(N_1, I_\circ)$$

sehingga $N_1 \times I_\circ$ normal di $G_1 \times G_2$.

Dan untuk $I_* \times N_2 \leq G_1 \times G_2$ berlaku

$$(I_*, N_2)\square(a, b) = (I_* * a, N_2 \circ b) = (a * I_*, b \circ N_2) = (a, b)\square(I_*, N_2)$$

sehingga $I_* \times N_2$ normal di $G_1 \times G_2$.

Akan diselidiki apakah $N_1 \times I_\circ \cong N_1$ serta $I_* \times N_2 \cong N_2$ dengan menyelidiki apakah μ_1 dan μ_2 berikut merupakan isomorfisme di mana

$\mu_1 : N_1 \times I_\circ \to N_1$ yang didefinisikan dengan $\mu_1(n_1, I_\circ) = n_1; \forall n_1 \in N_1$

$\mu_2 : I_* \times N_2 \to N_2$ yang didefinisikan dengan $\mu_2(I_*, n_2) = n_2; \forall n_2 \in N_2$

Pertama, diselidiki lebih dulu $\mu_1 : N_1 \times I_\circ \to N_1$ dengan $\mu_1(n_1, I_\circ) = n_1; \forall n_1 \in N_1$. Misal $(n_{11}, I_\circ), (n_{12}, I_\circ) \in N_1 \times I_\circ$ dengan $(n_{11}, I_\circ) = (n_{12}, I_\circ)$.

Karena $(n_{11}, I_\circ) = (n_{12}, I_\circ)$ berarti bahwa

$n_{11} * {n_{12}}^{-1} = I_*$

$n_{11} = n_{12}$

$\mu_1(n_{11}, I_\circ) = \mu_1(n_{12}, I_\circ)$

sehingga μ_1 terdefinisi dengan baik. Dan karena untuk $\forall n_1 \in N_1$ terdapat $(n_1, I_\circ) \in N_1 \times I_\circ$ sedemikian hingga $\mu_1(n_1, I_\circ) = n_1$, maka μ_1 onto. Kemudian misal $n_{11}, n_{12} \in N_1$. Karena N_1 subgrup normal dari G_1 maka $n_{11} * n_{12} \in N_1$, sehingga untuk $(n_{11}, I_\circ), (n_{12}, I_\circ) \in N_1 \times I_\circ$ berlaku

$$\begin{aligned}\mu_1[(n_{11}, I_\circ)\square(n_{12}, I_\circ)] &= \mu_1(n_{11} * n_{12}, I_\circ \circ I_\circ)\\ &= \mu_1(n_{11} * n_{12}, I_\circ)\\ &= n_{11} * n_{12}\\ &= \mu_1(n_{11}, I_\circ) * \mu_1(n_{12}, I_\circ)\end{aligned}$$

Sehingga μ_1 homomorfisme. Karena μ_1 homomorfisme untuk

$\mu_1(n_{11}, I_\circ), \mu_1(n_{12}, I_\circ) \in N_1$ di mana $\mu_1(n_{11}, I_\circ) = \mu_1(n_{12}, I_\circ)$ maka

$\mu_1(n_{11}, I_\circ) = \mu_1(n_{12}, I_\circ)$

$n_{11} = n_{12}$

$n_{11} * {n_{12}}^{-1} = I_{N_1} \in \mu_1(ker\ \mu_1); I_{N_1}$ elemen identitas di N_1

${\mu_1}^{-1}(n_{11} * {n_{12}}^{-1}) = I_{N_1 \times I_\circ}; I_{N_1 \times I_\circ}$ elemen identitas di $N_1 \times I_\circ$

$(n_{11} * {n_{12}}^{-1}, I_\circ) = I_{N_1 \times I_\circ}$

$(n_{11}, I_\circ) \square ({n_{12}}^{-1}, I_\circ) = I_{N_1 \times I_\circ}$

$(n_{11}, I_\circ) \square (n_{12}, I_\circ)^{-1} = I_{N_1 \times I_\circ}$

$(n_{11}, I_\circ) \square (n_{12}, I_\circ)^{-1} \square (n_{12}, I_\circ) = I_{N_1 \times I_\circ} \square (n_{12}, I_\circ)$

$(n_{11}, I_\circ) \square\ I_{N_1 \times I_\circ} = I_{N_1 \times I_\circ} \square (n_{12}, I_\circ)$

$(n_{11}, I_\circ) = (n_{12}, I_\circ)$

Dengan demikian μ_1 fungsi satu-satu. Karena $\mu_1$homomorfisme, onto dan satu-satu maka $\mu_1 : N_1 \times I_\circ \rightarrow N_1$ dengan $\mu_1(n_1, I_\circ) = n_1; \forall n_1 \in N_1$ merupakan isomorfisme dan diperoleh

$N_1 \times I_\circ \cong N_1$ .... (3.15)

Selanjutnya diselidiki $\mu_2 : I_* \times N_2 \rightarrow N_2$ yang dengan $\mu_2(I_*, n_2) = n_2; \forall n_2 \in N_2$. Misal $(I_*, n_{21}), (I_*, n_{22}) \in I_* \times N_2$ dengan $(I_*, n_{21}) = (I_*, n_{22})$.

Karena $(I_*, n_{11}) = (I_*, n_{12})$ berarti bahwa

$n_{21} \circ {n_{22}}^{-1} = I_\circ$

$n_{21} = n_{22}$

$\mu_2(I_*, n_{21}) = \mu_2(I_*, n_{22})$

sehingga μ_2 terdefinisi dengan baik. Dan karena untuk $\forall n_2 \in N_2$ terdapat $(I_*, n_2) \in I_* \times N_2$ sedemikian hingga $\mu_2(I_*, n_2) = n_2$, maka μ_2 onto. Kemudian misal $n_{21}, n_{22} \in N_2$. Karena N_2 subgrup normal dari G_2 maka $n_{21} \circ n_{22} \in N_2$, sehingga untuk $(I_*, n_{21}), (I_*, n_{22}) \in I_* \times N_2$ berlaku

$$
\begin{aligned}
\mu_2[(I_*, n_{21})I_*, n_{22}] &= \mu_2(I_* * I_*, n_{21} \circ n_{22}) \\
&= \mu_2(I_*, n_{21} \circ n_{22}) \\
&= n_{21} \circ n_{22} \\
&= \mu_2(I_*, n_{21}) * \mu_2(I_*, n_{22})
\end{aligned}
$$

Sehingga μ_2 homomorfisme. Dan untuk $\mu_2(I_*, n_{21}) * \mu_2(I_*, n_{22}) \in N_2$ di mana $\mu_2(I_*, n_{21}) = \mu_2(I_*, n_{22})$ maka berlaku

$\mu_2(I_*, n_{21}) = \mu_2(I_*, n_{22})$

$n_{21} = n_{22}$

$n_{21} \circ {n_{22}}^{-1} = I_{N_2} \in \mu_2(ker\ \mu_2); I_{N_2}$ elemen identitas di N_2

${\mu_2}^{-1}(n_{21} \circ {n_{22}}^{-1}) = I_{I_* \times N_2}; I_{I_* \times N_2}$ elemen identitas di $I_* \times N_2$

$(I_*, n_{21} \circ {n_{22}}^{-1}) = I_{I_* \times N_2}$

$(I_*, n_{21}) \square (I_*, {n_{22}}^{-1}) = I_{I_* \times N_2}$

$(I_*, n_{21}) \square (I_*, n_{22})^{-1} = I_{I_* \times N_2}$

$(I_*, n_{21}) \square (I_*, n_{22})^{-1} \square (I_*, n_{22}) = I_{I_* \times N_2} \square (I_*, n_{22})$

$(I_*, n_{21}) \square I_{I_* \times N_2} = I_{I_* \times N_2} \square (I_*, n_{22})$

$(I_*, n_{21}) = (I_*, n_{22})$

Dengan demikian μ_2 fungsi satu-satu. Karena μ_2 homomorfisme, onto dan satu-satu maka $\mu_2 : I_* \times N_2 \to N_2$ yang dengan $\mu_2(I_*, n_2) = n_2 ; \forall n_2 \in N_2$ merupakan isomorfisme dan diperoleh

$I_* \times N_2 \cong N_2$ .... (3.16)

Selanjutnya perhatikan kembali (3.13) dan (3.14). Misal $(a, b) \in G_1 \times G_2$ berarti $a \in G_1$ dan $b \in G_2$. Karena G_1, G_2 grup abelian maka untuk setiap $a_1, a_2 \in G_1$ terdapat ${a_2}^{-1} \in G_1$ sehingga $a_1 * {a_2}^{-1} = {a_2}^{-1} * a_1 \in G_1$ dan untuk setiap $b_1, b_2 \in G_2$ terdapat ${b_2}^{-1} \in G_2$ sehingga $b_1 \circ {b_2}^{-1} = {b_2}^{-1} \circ b_1 \in G_2$. Sehingga dengan demikian berlaku

$$
\begin{aligned}
(G_1 \times G_2)/N_2 &= (a, b)\square N_2 \\
&\cong (a, b)\square(I_*, N_2) \\
&\cong (a * I_*, b \circ N_2) \\
&\cong (a, b \circ N_2) \\
&\cong G_1 \times (G_2/N_2) \quad \text{.................. (3.17)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(G_1 \times G_2)/N_1 &= (a, b)\square N_1 \\
&\cong (a, b)\square(N_1, I_\circ) \\
&\cong (a * N_1, b \circ I_\circ) \\
&\cong (a * N_1, b) \\
&\cong (G_1/N_1) \times G_2 \quad \text{.................. (3.18)}
\end{aligned}
$$

Dari (3.13) dan (3.17) diperoleh

$G_1 \times (G_2/N_2) \cong G_1$ .... (3.19)

Dan dari (3.14) dan (3.18) diperoleh

$(G_1/N_1) \times G_2 \cong G_2$ .... (3.20)

Perhatikan lagi (3.19)

$G_1 \times (G_2/N_2) \cong G_1$

$G_1 \times (G_2/N_2) \times I_\circ \cong G_1 \times I_\circ$ [∵ mengalikan kedua ruas dengan $I_\circ$]

$G_1 \times ((G_2/N_2) \circ I_\circ) \cong G_1 \times I_\circ$

$G_1 \times (G_2/N_2) \cong G_1 \times I_\circ$

$G_2/N_2 \cong I_\circ$ [∵ hukum kanselasi kiri]

Dengan demikian diperoleh

$G_2/N_2 \cong I_\circ$ .... (3.21)

Perhatikan juga (3.20)

$(G_1/N_1) \times G_2 \cong G_2$

$I_* \times (G_1/N_1) \times G_2 \cong I_* \times G_2$ [∵ kedua ruas dikalikan dengan I_*]

$(I_* * (G_1/N_1)) \times G_2 \cong I_* \times G_2$

$(G_1/N_1) \times G_2 \cong I_* \times G_2$

$G_1/N_1 \cong I_*$ [∵ hukum kanselasi kanan]

Dengan demikian diperoleh

$G_1/N_1 \cong I_*$ .... (3.22)

Dari (3.10) dan (3.22) diperoleh

$$\left.\begin{aligned} \rho_1(N_2) &= I_* \\ G_1/N_1 &\cong I_* \end{aligned}\right\} G_1/N_1 \cong \rho_1(N_2) \le G_1 \qquad (3.23)$$

Dan dari (3.12) dan (3.21) diperoleh

$$\left.\begin{array}{l}\rho_2(N_1) = I_\circ \\ G_2/N_2 \cong I_\circ\end{array}\right\} G_2/N_2 \cong \rho_2(N_1) \leq G_2 \quad \text{.......... (3.24)}$$

Sehingga dari (3.23) dan (3.24) diperoleh

$$\left.\begin{array}{l}G_1/N_1 \leq G_1 \\ G_2/N_2 \leq G_2\end{array}\right\} (G_1/N_1) \times (G_2/N_2) \leq G_1 \times G_2 \quad \text{.......... (3.25)}$$

Dengan demikian H subgrup dari $G_1 \times G_2$ dapat direpresentasikan oleh $G_1/N_1 \times G_2/N_2$.

Selanjutnya akan diselidiki hubungan antara G_1/N_1 dan G_2/N_2. Didefinisikan suatu fungsi $\varphi: G_1/N_1 \to G_2/N_2$ dengan $\varphi(a * N_1) = b \circ N_2$; $\forall a \in G_1, b \in G_2$. Akan diselidiki apakah φ merupakan suatu isomorfisme.

Pertama, akan ditunjukkan $\varphi: G_1/N_1 \to G_2/N_2$ dengan $\varphi(a * N_1) = b \circ N_2$ merupakan fungsi yang terdefinisi dengan baik. Sebelumnya misal terdapat suatu fungsi $f: G_1 \to G_2$ homomorfisme dengan $f(a) = b; \forall a \in G_1, b \in G_2$ di mana untuk $\forall a_1, a_2 G_1; b_1, b_2 \in G_2$ berlaku $f(a_1 * a_2) = b_1 \circ b_2 = f(a_1) \circ f(a_2)$. Misal $a_1 * N_1, a_2 * N_1 \in G_1/N_1$ di mana $a_1 * N_1 = a_2 * N_1$ dan misal $b_1, b_2 \in G_2$. Akan ditunjukkan $\varphi(a_1 * N_1) = \varphi(a_2 * N_1)$. Karena

$a_1 * N_1 = a_2 * N_1$

$a_1 * a_2{}^{-1} = I_* \in ker\ f$

$f(a_1 * a_2{}^{-1}) = I_\circ$

$f(a_1) \circ f(a_2{}^{-1}) = I_\circ$ [$\because f$ homomorfisme]

$f(a_1) \circ [f(a_2)]^{-1} = I_\circ$

$b_1 \circ (b_2)^{-1} = I_\circ$

$b_1 \circ (b_2)^{-1} \circ b_2 = I_\circ \circ b_2$

$b_1 \circ [(b_2)^{-1} \circ b_2] = I_\circ \circ b_2$

$b_1 \circ I_\circ = I_\circ \circ b_2$

$b_1 = b_2$

$b_1 \circ N_2 = b_2 \circ N_2$[$\because$ kedua ruas dioperasikan terhadap N_2]

$\varphi(a_1 * N_1) = \varphi(a_2 * N_1)$

Dengan demikian φ terdefinisi dengan baik. Dan karena untuk $\forall b \circ N_2 \in G_2/N_2$ terdapat $a * N_1 \in G_1/N_1$ sedemikian hingga $\varphi(a * N_1) = b \circ N_2$, maka φ onto.

Selanjutnya misal $a_1 * N_1, a_2 * N_1 \in G_1/N_1$ dan $b_1 \circ N_2, b_2 \circ N_2 \in G_2/N_2$ berlaku

$$\begin{aligned}\varphi[(a_1 * N_1) * (a_2 * N_1)] &= \varphi[(a_1 * a_2) * N_1] \\ &= (b_1 \circ b_2) \circ N_2 \\ &= (b_1 \circ N_2) \circ (b_2 \circ N_2) \\ &= \varphi(a_1 * N_1) \circ \varphi(a_2 * N_1)\end{aligned}$$

Dengan demikian φ merupakan homomorfisme.

Selanjutnya misal $a_1 * N_1, a_2 * N_1 \in G_1/N_1$ dan $\varphi(a_1 * N_1), \varphi(a_2 * N_1) \in G_2/N_2$ di mana $\varphi(a_1 * N_1) = \varphi(a_2 * N_1)$. Untuk menunjukkan φ merupakan fungsi satu-satu, maka harus ditunjukkan $a_1 * N_1 = a_2 * N_1$. Sebelumnya misal terdapat suatu fungsi $f: G_1 \rightarrow G_2$ homomorfisme dengan $f(a) = b; \forall a \in G_1, b \in G_2$. Karena berlaku

$\varphi(a_1 * N_1) = \varphi(a_2 * N_1)$

$b_1 \circ N_2 = b_2 \circ N_2$

$b_1 \circ {b_2}^{-1} = I_\circ \in f(ker\ f)$

$f^{-1}(b_1 \circ {b_2}^{-1}) = I_*$

$f^{-1}(b_1) * f^{-1}({b_2}^{-1}) = I_*$ [$\because f$ homomorfisme]

$[f(b_1)]^{-1} * [f({b_2}^{-1})]^{-1} = I_*$

$[f(b_1)]^{-1} * [[f(b_2)]^{-1}]^{-1} = I_*$

$[f(b_1)]^{-1} * f(b_2) = I_*$

${a_1}^{-1} * a_2 = I_*$

$a_1 * {a_1}^{-1} * a_2 = a_1 * I_*$

$(a_1 * {a_1}^{-1}) * a_2 = a_1 * I_*$

$I_* * a_2 = a_1 * I_*$

$a_2 = a_1$

$a_1 = a_2$

$a_1 * N_1 = a_2 * N_1$ [$\because$ kedua ruas dioperasikan terhadap N_1]

Sehingga φ merupakan fungsi satu-satu. Karena φ onto, homomorfisme, dan satu-satu, maka $\varphi: G_1/N_1 \to G_2/N_2$ dengan $\varphi(a * N_1) = b \circ N_2;\ \forall a \in G_1, b \in G_2$ merupakan fungsi isomorfisme. Dengan kata lain $G_1/N_1 \cong G_2/N_2$.

Karena H subgrup dari $G_1 \times G_2$ dapat direpresentasikan oleh $G_1/N_1 \times G_2/N_2$, dan hubungan G_1/N_1 dan G_2/N_2 dapat dinyatakan dengan $G_1/N_1 \cong G_2/N_2$, dengan demikian H dapat dicari dengan mencari himpunan yang sesuai dengan banyaknya isomorfisme yang terjadi dari G_1/N_1 ke G_2/N_2.

Berikutnya, didefinisikan suatu himpunan H_φ yang merepresentasikan isomorfisme yang terjadi dari G_1/N_1 ke G_2/N_2, dengan

$$H_\varphi = \{(a,b) \in G_1 \times G_2 | \varphi(a * N_1) = b \circ N_2; a \in G_1; b \in G_2\}$$

Akan diselidiki H_φ merupakan subgrup dari $G_1 \times G_2$.

Sebelumnya akan ditunjukkan bahwa H_φ tidak kosong. Karena H_φ merupakan pasangan terurut (a,b) di mana $a \in G_1; b \in G_2$. Karena

G_1 grup maka $I_* \in G_1$

Jadi $G_1 \neq \emptyset$

G_2 grup maka $I_\circ \in G_2$

Jadi $G_2 \neq \emptyset$

Karena $G_1 \neq \emptyset$ dan $G_2 \neq \emptyset$, maka $H_\varphi = \{(a,b) \in G_1 \times G_2\} \neq \emptyset$. Dengan demikian H_φ bukan himpunan kosong.

Untuk menunjukkan H_φ subgrup dari $G_1 \times G_2$, maka harus ditunjukkan H_φ memenuhi kondisi perlu dan cukup bagi $G_1 \times G_2$. Misal $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in H_\varphi$ berarti $a_1, a_2 \in G_1$ dan $b_1, b_2 \in G_2$. Karena G_1 grup, maka terdapat ${a_2}^{-1} \in G_1$ sehingga $a_1 * {a_2}^{-1} \in G_1$. Dan karena G_2 grup, maka terdapat ${b_2}^{-1} \in G_2$ sehingga $b_1 \circ {b_2}^{-1} \in G_2$, sehingga berlaku

$$\begin{aligned}
\varphi[(a_1 * {a_2}^{-1}) * N_1] &= \varphi[(a_1 * N_1) * ({a_2}^{-1} * N_1)] \\
&= \varphi(a_1 * N_1) \circ \varphi({a_2}^{-1} * N_1) \\
&= \varphi(a_1 * N_1) \circ \varphi[(a_2 * N_1)^{-1}] \\
&= \varphi(a_1 * N_1) \circ [\varphi(a_2 * N_1)]^{-1} \\
&= (b_1 \circ N_2) \circ \ (b_2 \circ N_2)^{-1}
\end{aligned}$$

$$= (b_1 \circ N_2) \circ (\, {b_2}^{-1} \circ N_2)$$

$$= (b_1 \circ \; {b_2}^{-1}) \circ N_2$$

Dengan demikian terbukti bahwa H_φ subgrup dari $G_1 \times G_2$.

Berdasarkan pembahasan *Lemma Goursat* di atas, ada dua kondisi yang dideskripsikan *Lemma Goursat* terhadap grup $G_1 \times G_2$ sebagai berikut:

Misal $(G_1,*)$ dan $(G_2,\circ)$ grup dan $N_1 \trianglelefteq G_1$ dan $N_2 \trianglelefteq G_2$, maka

1. Misal $H \leq G_1 \times G_2$

   $p_1 : H \to G_1$ dengan $p_1(H) = G_1$ onto di mana $ker\ p_1 = N_2; N_2 \trianglelefteq G_2$

   $p_2 : H \to G_2$ dengan $p_2(H) = G_2$ onto di mana $ker\ p_2 = N_1; N_1 \trianglelefteq G_1$

   Maka bayangan H adalah $G_1/N_1 \times G_2/N_2$.

2. Hubungan G_1/N_1 dan G_2/N_2 dapat dinyatakan oleh fungsi isomorfisme $\varphi: G_1/N_1 \to G_1/N_1$ dengan $\varphi(a * N_1) = b \circ N_2$ untuk $\forall a \in G_1; b \in G_2$. Sehingga H dapat dinyatakan oleh himpunan yang merepresentasikan isomorfisme dari G_1/N_1 ke G_2/N_2, yaitu $H_\varphi = \{(a,b) \in G_1 \times G_2 | \varphi(a * N_1) = b \circ N_2; a \in G_1; b \in G_2\}$ subgrup dari $G_1 \times G_2$. Di mana elemen H_φ ekuivalen dengan elemen $G_1/N_1 \times G_2/N_2$, sehingga semua subgrup dari $G_1 \times G_2$ yaitu H termuat dalam bentuk H_φ.

Selanjutnya akan diberikan beberapa contoh penerapan *Lemma Goursat* untuk grup *direct product* rank dua dengan penyusun berupa grup siklik untuk kasus generator yang berbeda-beda.

Contoh 3.1 :

Kasus $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

Misal $G_1 = \mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ dan $G_2 = \mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ merupakan grup bilangan bulat modulo 2.

Tabel 3.1 Subgrup dari $G_1 = \mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ dan $G_2 = \mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$

Subgrup dari $G_1 = \mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$			
G_1	N_1	G_1/N_1	Order
$\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$	$\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$	$\mathbb{Z}_2/\mathbb{Z}_2 = \{\{\bar{0}, \bar{1}\}\}$	1
$\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$	$\{\bar{0}\}$	$\mathbb{Z}_2/\{\bar{0}\} = \{\{\bar{0}\}, \{\bar{1}\}\}$	2
$\{\bar{0}\}$	$\{\bar{0}\}$	$\{\bar{0}\}/\{\bar{0}\} = \{\bar{0}\}$	1
Subgrup dari $G_2 = \mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$			
G_2	N_2	G_2/N_2	Order
$\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$	$\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$	$\mathbb{Z}_2/\mathbb{Z}_2 = \{\{\bar{0}, \bar{1}\}\}$	1
$\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$	$\{\bar{0}\}$	$\mathbb{Z}_2/\{\bar{0}\} = \{\{\bar{0}\}, \{\bar{1}\}\}$	2
$\{\bar{0}\}$	$\{\bar{0}\}$	$\{\bar{0}\}/\{\bar{0}\} = \{\bar{0}\}$	1

Sumber: Kristina Kublik, 2009, diolah.

Dengan demikian, isomorfisme yang terjadi dari G_1/N_1 ke G_2/N_2 adalah sebagai berikut:

Isomorfisme grup faktor ber-order satu yaitu:

(i) $\varphi_1 : \mathbb{Z}_2/\mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2/\mathbb{Z}_2$

di mana $\varphi_1 : [\bar{0}, \bar{1}] \to [\bar{0}, \bar{1}]$

Sehingga subgrup $H_{\varphi_1} = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{1})\} = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

(ii) $\varphi_2 : \mathbb{Z}_2/\mathbb{Z}_2 \to \{\bar{0}\}/\{\bar{0}\}$

di mana $\varphi_2 : [\bar{0}, \bar{1}] \to [\bar{0}]$

Sehingga subgrup $H_{\varphi_2} = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{0})\} = (< \bar{1} >, 0)$

(iii) $\varphi_3 : \{\bar{0}\}/\{\bar{0}\} \to \mathbb{Z}_2/\mathbb{Z}_2$

di mana $\varphi_3 : [\bar{0}] \to [\bar{0}, \bar{1}]$

Sehingga subgrup $H_{\varphi_3} = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1})\} = (\bar{0}, < \bar{1} >)$

(iv) $\varphi_4 : \{\bar{0}\}/\{\bar{0}\} \to \{\bar{0}\}/\{\bar{0}\}$

di mana $\varphi_4 : [\bar{0}] \to [\bar{0}]$

Sehingga subgrup $H_{\varphi_4} = \{(\bar{0}, \bar{0})\}$

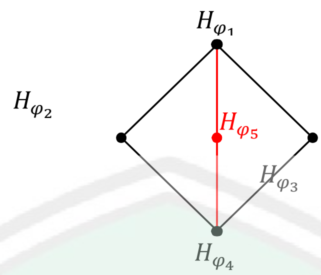
Sedangkan isomorfisme grup faktor ber-order dua yaitu:

$\varphi_5 : \mathbb{Z}_2/\{\bar{0}\} \to \mathbb{Z}_2/\{\bar{0}\}$

di mana $\varphi_5 : \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \end{bmatrix}$

Sehingga subgrup $H_{\varphi_5} = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{1})\}$

Dengan demikian, terdapat satu buah subgrup yang diperoleh yaitu $H_{\varphi_5} = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{1})\}$, yang tidak akan dapat diperoleh dengan menggunakan *direct product* langsung Diagram *Lattice* $\mathbb{Z}_2$ dan $\mathbb{Z}_2$. Sehingga Diagram *Lattice* dari $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ adalah sebagai berikut:



Gambar 3.1 *Diagram Lattice* $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

Contoh 3.2 :

Kasus$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$

Misal $G_1 = \mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ merupakan grup bilangan bulat modulo 2 dan $G_2 = \mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$ merupakan grup bilangan bulat modulo 3.

Tabel 3.2 Subgrup dari $G_1 = \mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ dan $G_2 = \mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$

Subgrup dari $G_1 = \mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$			
G_1	N_1	G_1/N_1	Order
$\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$	$\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$	$\mathbb{Z}_2/\mathbb{Z}_2 = \{\{\bar{0}, \bar{1}\}\}$	1
$\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$	$\{\bar{0}\}$	$\mathbb{Z}_2/\{\bar{0}\} = \{\{\bar{0}\}, \{\bar{1}\}\}$	2
$\{\bar{0}\}$	$\{\bar{0}\}$	$\{\bar{0}\}/\{\bar{0}\} = \{\bar{0}\}$	1
Subgrup dari $G_2 = \mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$			
G_2	N_2	G_2/N_2	Order
$\mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$	$\mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$	$\mathbb{Z}_3/\mathbb{Z}_3 = \{\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}\}$	1
$\mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$	$\{\bar{0}\}$	$\mathbb{Z}_3/\{\bar{0}\} = \{\{\bar{0}\}, \{\bar{1}\}, \{\bar{2}\}\}$	3
$\{\bar{0}\}$	$\{\bar{0}\}$	$\{\bar{0}\}/\{\bar{0}\} = \{\bar{0}\}$	1

Sumber: Kristina Kublik, 2009, diolah.

Jadi, isomorfisme yang terjadi dari G_1/N_1 ke G_2/N_2 adalah sebagai berikut:

Isomorfisme grup faktor ber-order satu yaitu:

(i) $\varphi_1 : \mathbb{Z}_2/\mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_3/\mathbb{Z}_3$

di mana $\varphi_1 : [\bar{0}, \bar{1}] \rightarrow [\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}]$

Sehingga subgrup $H_{\varphi_1} = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{2})\} = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$

(ii) $\varphi_2 : \mathbb{Z}_2/\mathbb{Z}_2 \rightarrow \{\bar{0}\}/\{\bar{0}\}$

di mana $\varphi_2 : [\bar{0}, \bar{1}] \rightarrow [\bar{0}]$

Sehingga subgrup $H_{\varphi_2} = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{0})\}$

(iii) $\varphi_3 : \{\bar{0}\}/\{\bar{0}\} \rightarrow \mathbb{Z}_3/\mathbb{Z}_3$

di mana $\varphi_3 : [\bar{0}] \rightarrow [\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}]$

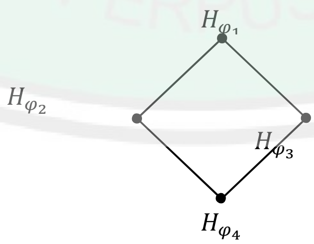
Sehingga subgrup $H_{\varphi_3} = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2})\}$

(iv) $\varphi_4 : \{\bar{0}\}/\{\bar{0}\} \rightarrow \{\bar{0}\}/\{\bar{0}\}$

di mana $\varphi_4 : [\bar{0}] \rightarrow [\bar{0}]$

Sehingga subgrup $H_{\varphi_4} = \{(\bar{0}, \bar{0})\}$

Dengan demikian Diagram *Lattice* dari $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ sebagai berikut:



Gambar. 3.2 *Diagram Lattice* $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$

Dari gambar di atas, ternyata Diagram *Lattice* yang diperoleh sama dengan hasil perolehan *direct product* Diagram *Lattice* $\mathbb{Z}_2$ dan $\mathbb{Z}_3$. Jadi terlihat bahwa penggunaan *Lemma Goursat* berlaku juga untuk *direct product* grup dengan generator berfaktor pembagi prima.

Contoh 3.3 :

Kasus $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$

Misal $G_1 = \mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ merupakan grup bilangan bulat modulo 2, dan $G_2 = \mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$merupakan grup bilangan bulat modulo 4.

Tabel 3.3 Subgrup dari $G_1 = \mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ dan $G_2 = \mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$

Subgrup dari $G_1 = \mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$			
G_1	N_1	G_1/N_1	Order
$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2/\mathbb{Z}_2 = \{\{\bar{0}, \bar{1}\}\}$	1
$\mathbb{Z}_2$	$\{\bar{0}\}$	$\mathbb{Z}_2/\{\bar{0}\} = \{\{\bar{0}\}, \{\bar{1}\}\}$	2
$\{\bar{0}\}$	$\{\bar{0}\}$	$\{\bar{0}\}/\{\bar{0}\} = \{\bar{0}\}$	1
Subgrup dari $G_2 = \mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$			
G_2	N_2	G_2/N_2	Order
$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_4/\mathbb{Z}_4 = \{\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}\}$	1
$\mathbb{Z}_4$	$< \bar{2} > = \{\bar{0}, \bar{2}\}$	$\mathbb{Z}_4/< \bar{2} >= \{\{\bar{0}, \bar{2}\}, \{\bar{1}, \bar{3}\}\}$	2
$\mathbb{Z}_4$	$\{\bar{0}\}$	$\mathbb{Z}_4/\{\bar{0}\} = \{\{\bar{0}\}, \{\bar{1}\}, \{\bar{2}\}, \{\bar{3}\}\}$	4
$< \bar{2} >$	$< \bar{2} >$	$< \bar{2} >/< \bar{2} >= \{\bar{0}, \bar{2}\}$	1
$< \bar{2} >$	$\{\bar{0}\}$	$< \bar{2} >/\{\bar{0}\} = \{\{\bar{0}\}, \{\bar{2}\}\}$	2
$\{\bar{0}\}$	$\{\bar{0}\}$	$\{\bar{0}\}/\{\bar{0}\} = \{\bar{0}\}$	1

Sumber: Kristina Kublik, 2009, diolah.

Jadi, isomorfisme yang terjadi dari G_1/N_1 ke G_2/N_2 adalah sebagai berikut:

Isomorfisme grup faktor ber-order satu yaitu:

(i) $\varphi_1 : \mathbb{Z}_2/\mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_4/\mathbb{Z}_4$

$\varphi_1 : [\bar{0}, \bar{1}] \to [\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}]$

Sehingga subgrup $H_{\varphi_1} = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{1}, \bar{3})\}$

$= \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$

(ii) $\varphi_2 : \mathbb{Z}_2/\mathbb{Z}_2 \to < \bar{2} > / < \bar{2} >$

di mana $\varphi_2 : [\bar{0}, \bar{1}] \to [\bar{0}, \bar{2}]$

Sehingga subgrup $H_{\varphi_2} = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{2})\}$

(iii) $\varphi_3 : \mathbb{Z}_2/\mathbb{Z}_2 \to \{\bar{0}\}/\{\bar{0}\}$

di mana $\varphi_3 : [\bar{0}, \bar{1}] \to [\bar{0}]$

Sehingga subgrup $H_{\varphi_3} = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{0})\}$

(iv) $\varphi_4 : \{\bar{0}\}/\{\bar{0}\} \to \mathbb{Z}_4/\mathbb{Z}_4$

di mana $\varphi_4 : [\bar{0}] \to [\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}]$

Sehingga subgrup $H_{\varphi_4} = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3})\}$

(v) $\varphi_5 : \{\bar{0}\}/\{\bar{0}\} \to < \bar{2} > / < \bar{2} >$

di mana $\varphi_5 : [\bar{0}] \to [\bar{0}, \bar{2}]$

Sehingga subgrup $H_{\varphi_5} = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{2})\}$

(vi) $\varphi_6 : \{\bar{0}\}/\{\bar{0}\} \to \{\bar{0}\}/\{\bar{0}\}$

di mana $\varphi_6 : [\bar{0}] \to [\bar{0}]$

Sehingga subgrup $H_{\varphi_6} = \{(\bar{0}, \bar{0})\}$

Sedangkan isomorfisme grup faktor ber-order dua yaitu:

(i) $\varphi_7 : \mathbb{Z}_2/\{0\} \rightarrow \mathbb{Z}_4/<\bar{2}>$

$\varphi_7 : \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \bar{0}, \bar{2} \\ \bar{1}, \bar{3} \end{bmatrix}$

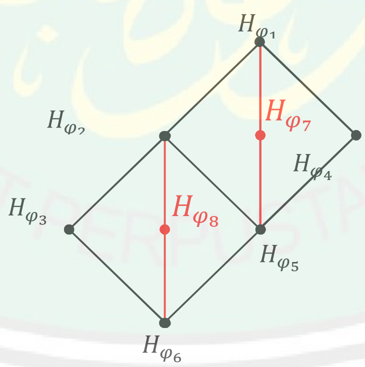
Sehingga subgrup $H_{\varphi_7} = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{3})\}$

(ii) $\varphi_8 : \mathbb{Z}_2/\{\bar{0}\} \rightarrow < \bar{2} >/\{\bar{0}\}$

$\varphi_8 : \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{2} \end{bmatrix}$

Sehingga subgrup $H_{\varphi_8} = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{2})\}$

Dengan demikian, terdapat diperoleh dua buah subgrup yang tidak dapat diperoleh dengan menggunakan *direct product* Diagram *Lattice* $\mathbb{Z}_2$ dan $\mathbb{Z}_4$, yaitu $H_{\varphi_7} = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{3})\}$ dan $H_{\varphi_8} = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{2})\}$, Sehingga Diagram *Lattice* dari $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ adalah sebagai berikut:



Gambar. 3.3 *Diagram Lattice* $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$

Contoh 3.4 :

Kasus $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$

Misal $G_1 = \mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ merupakan grup bilangan bulat modulo 2 dan $G_2 = \mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$ merupakan grup bilangan bulat modulo 6.

Tabel 3.4 Subgrup dari $G_1 = \mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ dan $G_2 = \mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$

Subgrup dari $G_1 = \mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$			
G_1	N_1	G_1/N_1	Order
$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2/\mathbb{Z}_2 = \{\{\bar{0}, \bar{1}\}\}$	1
$\mathbb{Z}_2$	$\{\bar{0}\}$	$\mathbb{Z}_2/\{\bar{0}\} = \{\{\bar{0}\}, \{\bar{1}\}\}$	2
$\{\bar{0}\}$	$\{\bar{0}\}$	$\{\bar{0}\}/\{\bar{0}\} = \{\bar{0}\}$	1
Subgrup dari $G_2 = \mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$			
G_2	N_2	G_2/N_2	Order
$\mathbb{Z}_6$	$\mathbb{Z}_6$	$\mathbb{Z}_6/\mathbb{Z}_6 = \{\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}\}$	1
$\mathbb{Z}_6$	$< \bar{2} > = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$	$\mathbb{Z}_6/< 2b >= \{\{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}, \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}\}\}$	2
$\mathbb{Z}_6$	$< \bar{3} > = \{\bar{0}, \bar{3}\}$	$\mathbb{Z}_6/< 3b > = \{\{\bar{0}, \bar{3}\}, \{\bar{1}, \bar{4}\}, \{\bar{2}, \bar{5}\}\}$	3
$\mathbb{Z}_6$	$\{\bar{0}\}$	$\mathbb{Z}_6/\{\bar{0}\} = \{\{\bar{0}\}, \{\bar{1}\}, \{\bar{2}\}, \{\bar{3}\}, \{\bar{4}\}, \{\bar{5}\}\}$	6
$< \bar{2} >$	$< \bar{2} >= \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$	$< \bar{2} >/< \bar{2} >= \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$	1
$< \bar{2} >$	$\{\bar{0}\}$	$< \bar{2} >/\{\bar{0}\} = \{\{\bar{0}\}, \{\bar{2}\}, \{\bar{4}\}\}$	3
$< \bar{3} >$	$< \bar{3} > = \{\bar{0}, \bar{3}\}$	$< \bar{3} >/< \bar{3} >= \{\bar{0}, \bar{3}\}$	1
$< \bar{3} >$	$\{\bar{0}\}$	$< \bar{3} >/\{\bar{0}\} = \{\{\bar{0}\}, \{\bar{3}\}\}$	2
$\{\bar{0}\}$	$\{\bar{0}\}$	$\{\bar{0}\}/\{\bar{0}\} = \{\bar{0}\}$	1

Sumber: Kristina Kublik, 2009, diolah.

Jadi, isomorfisme yang terjadi dari G_1/N_1 ke G_2/N_2 adalah sebagai berikut:

Isomorfisme grup faktor ber-order satu yaitu:

(i) $\varphi_1: \mathbb{Z}_2/\mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_6/\mathbb{Z}_6$

$\varphi_1: [\bar{0}, \bar{1}] \to [\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}]$

Sehingga subgrup $H_{\varphi_1} = \{(\bar{0},\bar{0}), (\bar{1},\bar{0}), (\bar{0},\bar{1}), (\bar{1},\bar{1}), (\bar{0},\bar{2}), (\bar{1},\bar{2}), (\bar{0},\bar{3}),$ $(\bar{1},\bar{3}), (\bar{0},\bar{4}), (\bar{1},\bar{4}), (\bar{0},\bar{5}), (\bar{1},\bar{5})\} = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$

(ii) $\varphi_2: \mathbb{Z}_2/\mathbb{Z}_2 \to < \bar{2} >/< \bar{2} >$

di mana $\varphi_2: [\bar{0}, \bar{1}] \to [\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}]$

Sehingga subgrup $H_{\varphi_2} = \{(\bar{0},\bar{0}), (\bar{1},\bar{0}), (\bar{0},\bar{2}), (\bar{1},\bar{2}), (\bar{0},\bar{4}), (\bar{1},\bar{4})\}$

(iii) $\varphi_3: \mathbb{Z}_2/\mathbb{Z}_2 \to < \bar{3} >/< \bar{3} >$

di mana $\varphi_3: [\bar{0}, \bar{1}] \to [\bar{0}, \bar{3}]$

Sehingga subgrup $H_{\varphi_3} = \{(\bar{0},\bar{0}), (\bar{1},\bar{0}), (\bar{0},\bar{3}), (\bar{1},\bar{3})\}$

(iv) $\varphi_4: \mathbb{Z}_2/\mathbb{Z}_2 \to \{\bar{0}\}/\{\bar{0}\}$

di mana $\varphi_4: [\bar{0}, \bar{1}] \to [\bar{0}]$

Sehingga subgrup $H_{\varphi_4} = \{(\bar{0},\bar{0}), (\bar{1},\bar{0})\}$

(v) $\varphi_5: \{\bar{0}\}/\{\bar{0}\} \to \mathbb{Z}_6/\mathbb{Z}_6$

di mana $\varphi_5: [\bar{0}] \to [\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}]$

Sehingga subgrup $H_{\varphi_5} = \{(\bar{0},\bar{0}), (\bar{0},b), (\bar{0},\bar{2}), (\bar{0},\bar{3}), (\bar{0},\bar{4}), (\bar{0},\bar{5})\}$

(vi) $\varphi_6: \{\bar{0}\}/\{\bar{0}\} \to < \bar{2} >/< \bar{2} >$

di mana $\varphi_6: [\bar{0}] \to [\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}]$

Sehingga subgrup $H_{\varphi_6} = \{(\bar{0},\bar{0}), (\bar{0},\bar{2}), (\bar{0},\bar{4})\}$

(vii) $\varphi_7: \{\bar{0}\}/\{\bar{0}\} \to < \bar{3} >/< \bar{3} >$

di mana $\varphi_7: [\bar{0}] \to [\bar{0}, \bar{3}]$

Sehingga subgrup $H_{\varphi_7} = \{(\bar{0},\bar{0}),(\bar{0},\bar{3})\}$

(viii) $\varphi_8: \{\bar{0}\}/\{\bar{0}\} \to \{\bar{0}\}/\{\bar{0}\}$

di mana $\varphi_8: [\bar{0}] \to [\bar{0}]$

Sehingga subgrup $H_{\varphi_8} = \{(\bar{0},\bar{0})\}$

Sedangkan isomorfisme grup faktor ber-order dua yaitu:

(ix) $\varphi_9: \mathbb{Z}_2/\{\bar{0}\} \to \mathbb{Z}_6/< \bar{2} >$

$\varphi_9: \begin{bmatrix}\bar{0}\\ \bar{1}\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}\bar{0},\bar{2},\bar{4}\\ \bar{1},\bar{3},\bar{5}\end{bmatrix}$

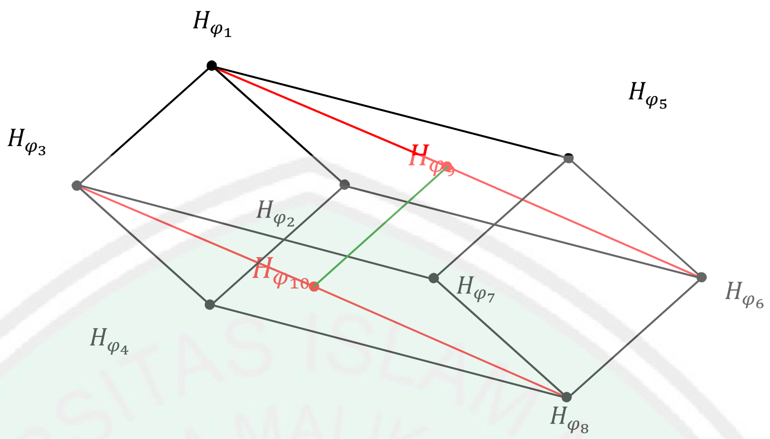
Sehingga subgrup $H_{\varphi_9} = \{(\bar{0},\bar{0}),(\bar{0},\bar{2}),(\bar{0},\bar{4}),(\bar{1},b),(\bar{1},\bar{3}),(\bar{1},\bar{5})\}$.

(x) $\varphi_{10}: \mathbb{Z}_2/\{\bar{0}\} \to < \bar{3} >/\{\bar{0}\}$

$\varphi_{10}: \begin{bmatrix}\bar{0}\\ \bar{1}\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}\bar{0}\\ \bar{3}\end{bmatrix}$

Sehingga subgrup $H_{\varphi_{10}} = \{(\bar{0},\bar{0}),(\bar{1},\bar{3})\}$

Dengan demikian, terdapat diperoleh dua buah subgrup yang tidak dapat diperoleh dengan menggunakan *direct product* Diagram *Lattice* $\mathbb{Z}_2$ dan $\mathbb{Z}_6$, yaitu $H_{\varphi_9} = \{(\bar{0},\bar{0}),(\bar{0},\bar{2}),(\bar{0},\bar{4}),(\bar{1},\bar{1}),(\bar{1},\bar{3}),(\bar{1},\bar{5})\}$ dan $H_{\varphi_{10}} = \{(\bar{0},\bar{0}),(\bar{1},\bar{3})\}$, Sehingga Diagram *Lattice* dari $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$ adalah sebagai berikut:



Gambar. 3.4 *Diagram Lattice* $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_6$

Contoh 3.5 :

Kasus $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$

Misal $G_1 = \mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ dan $G_2 = \mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ merupakan grup bilangan bulat modulo 4.

Tabel 3.5 Subgrup dari $G_1 = \mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ dan $G_2 = \mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$

Subgrup dari $G_1 = \mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$			
G_1	N_1	G_1/N_1	Order
$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_4/\mathbb{Z}_4 = \{\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}\}$	1
$\mathbb{Z}_4$	$< \bar{2} >= \{\bar{0}, \bar{2}\}$	$\mathbb{Z}_4/< \bar{2} > = \{\{\bar{0}, \bar{2}\}, \{\bar{1}, \bar{3}\}\}$	2
$\mathbb{Z}_4$	$\{\bar{0}\}$	$\mathbb{Z}_4/\{\bar{0}\} = \{\{\bar{0}\}, \{\bar{1}\}, \{\bar{2}\}, \{\bar{3}\}\}$	4
$< \bar{2} >= \{\bar{0}, \bar{2}\}$	$< \bar{2} >= \{\bar{0}, \bar{2}\}$	$< \bar{2} >/< \bar{2} > = \{\{\bar{0}, \bar{2}\}\}$	1
$< \bar{2} >= \{\bar{0}, \bar{2}\}$	$\{\bar{0}\}$	$< \bar{2} >/\{\bar{0}\} = \{\{\bar{0}\}, \{\bar{2}\}\}$	2
$\{\bar{0}\}$	$\{\bar{0}\}$	$\{\bar{0}\}/\{\bar{0}\} = \{\bar{0}\}$	1

Subgrup dari $G_2 = \mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$			
G_2	N_2	G_2/N_2	Order
$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_4/\mathbb{Z}_4 = \{\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}\}$	1
$\mathbb{Z}_4$	$< \bar{2} >= \{\bar{0}, \bar{2}\}$	$\mathbb{Z}_4/< \bar{2} > = \{\{\bar{0}, \bar{2}\}, \{\bar{1}, \bar{3}\}\}$	2
$\mathbb{Z}_4$	$\{\bar{0}\}$	$\mathbb{Z}_4/\{\bar{0}\} = \{\{\bar{0}\}, \{\bar{1}\}, \{\bar{2}\}, \{\bar{3}\}\}$	4
$< \bar{2} >= \{\bar{0}, \bar{2}\}$	$< \bar{2} >= \{\bar{0}, \bar{2}\}$	$< \bar{2} >/< \bar{2} > = \{\{\bar{0}, \bar{2}\}\}$	1
$< \bar{2} >= \{\bar{0}, \bar{2}\}$	$\{\bar{0}\}$	$< \bar{2} >/\{\bar{0}\} = \{\{\bar{0}\}, \{\bar{2}\}\}$	2
$\{\bar{0}\}$	$\{\bar{0}\}$	$\{\bar{0}\}/\{\bar{0}\} = \{\bar{0}\}$	1

Sumber: Kristina Kublik, 2009, diolah.

Jadi, isomorfisme yang terjadi dari G_1/N_1 ke G_2/N_2 adalah sebagai berikut:

Isomorfisme grup faktor ber-order satu yaitu:

(i) $\varphi_1: \mathbb{Z}_4/\mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_4/\mathbb{Z}_4$

$\varphi_1: [\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}] \to [\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}]$

Sehingga $H_{\varphi_1} = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{1}), (\bar{2}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{2}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{2}), (\bar{2}, \bar{2}),$ $(\bar{3}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{3}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{3}), (\bar{3}, \bar{2}), (\bar{2}, \bar{3}), (\bar{3}, \bar{3})\} = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$

(ii) $\varphi_2: \mathbb{Z}_4/\mathbb{Z}_4 \to < 2b >/< 2b >$

di mana $\varphi_2: [\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}] \to [\bar{0}, \bar{2}]$, sehingga

$H_{\varphi_2} = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{1}, \bar{2}), (\bar{2}, \bar{2}), (\bar{3}, \bar{0}), (\bar{3}, \bar{2})\}$

(iii) $\varphi_3: \mathbb{Z}_4/\mathbb{Z}_4 \to \{\bar{0}\}/\{\bar{0}\}$

di mana $\varphi_3: [\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}] \to [\bar{0}]$

Sehingga $H_{\varphi_3} = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{0}), (\bar{3}, 0)\}$

(iv) $\varphi_4: < \bar{2} >/< \bar{2} > \to \mathbb{Z}_4/\mathbb{Z}_4$

di mana $\varphi_4: [\bar{0}, \bar{2}] \to [\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}]$

Sehingga $H_{\varphi_4} = \{(\bar{0},\bar{0}),(\bar{0},\bar{1}),(\bar{2},\bar{0}),(\bar{2},\bar{1}),(\bar{0},\bar{2}),(\bar{2},\bar{2}),(\bar{0},\bar{3}),(\bar{2},\bar{3})\}$

(v) $\varphi_5 :< \bar{2} >/< \bar{2} >\rightarrow< \bar{2} >/< \bar{2} >$

di mana $\varphi_5 : [\bar{0},\bar{2}] \rightarrow [\bar{0},\bar{2}]$

Sehingga $H_{\varphi_5} = \{(\bar{0},\bar{0}),(\bar{2},\bar{0}),(\bar{0},\bar{2}),(\bar{2},\bar{2})\}$

(vi) $\varphi_6 :< \bar{2} >/< \bar{2} >\rightarrow \{\bar{0}\}/\{\bar{0}\}$

di mana $\varphi_6 : [\bar{0},\bar{2}] \rightarrow [\bar{0}]$

Sehingga $H_{\varphi_5} = \{(\bar{0},\bar{0}),(\bar{2},\bar{0})\}$

(vii) $\varphi_7 : \{\bar{0}\}/\{\bar{0}\} \rightarrow \mathbb{Z}_4/\mathbb{Z}_4$

di mana $\varphi_7 : [\bar{0}] \rightarrow [\bar{0},\bar{1},\bar{2},\bar{3}]$

Sehingga subgrup $H_{\varphi_7} = \{(\bar{0},\bar{0}),(\bar{0},\bar{1}),(\bar{0},\bar{2}),(\bar{0},\bar{3})\}$

(viii) $\varphi_8 : \{\bar{0}\}/\{\bar{0}\} \rightarrow< \bar{2} >/< \bar{2} >$

di mana $\varphi_8 : [\bar{0}] \rightarrow [\bar{0},\bar{2}]$

Sehingga subgrup $H_{\varphi_8} = \{(\bar{0},\bar{0}),(\bar{0},\bar{2})\}$

(ix) $\varphi_9 : \{\bar{0}\}/\{\bar{0}\} \rightarrow \{\bar{0}\}/\{\bar{0}\}$

di mana $\varphi_9 : [\bar{0}] \rightarrow [\bar{0}]$

Sehingga subgrup $H_{\varphi_9} = \{(\bar{0},\bar{0})\}$

Sedangkan isomorfisme grup faktor ber-order dua yaitu:

(i) $\varphi_{10} : \mathbb{Z}_4/< \bar{2} >\rightarrow \mathbb{Z}_4/< \bar{2} >$

di mana $\varphi_{10} : \begin{bmatrix} \bar{0},\bar{2} \\ \bar{1},\bar{3} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \bar{0},\bar{2} \\ \bar{1},\bar{3} \end{bmatrix}$

Sehingga $H_{\varphi_{10}} = \{(\bar{0},\bar{0}),(\bar{2},\bar{0}),(\bar{0},\bar{2}),(\bar{2},\bar{2}),(\bar{1},\bar{1}),(\bar{1},\bar{3}),(\bar{3},\bar{1}),(\bar{3},\bar{3})\}$

(ii) $\varphi_{11}: \mathbb{Z}_4/<\bar{2}> \to <\bar{2}>/\{\bar{0}\}$

di mana $\varphi_{11}: \begin{bmatrix} \bar{0}, \bar{2} \\ \bar{1}, \bar{3} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{2} \end{bmatrix}$

Sehingga $H_{\varphi_{11}} = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{2}), (\bar{3}, \bar{2})\}$

(iii) $\varphi_{12}: <\bar{2}>/\{\bar{0}\} \to \mathbb{Z}_4/<\bar{2}>$

di mana $\varphi_{12}: \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{2} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \bar{0}, \bar{2} \\ \bar{1}, \bar{3} \end{bmatrix}$

Sehingga $H_{\varphi_{12}} = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{2}, \bar{1}), (\bar{2}, \bar{3})\}$

(iv) $\varphi_{13}: <2a>/\{\bar{0}\} \to <2b>/\{\bar{0}\}$

di mana $\varphi_{13}: \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{2} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{2} \end{bmatrix}$

Sehingga $H_{\varphi_{13}} = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{2})\}$

Sedangkan isomorfisme grup faktor ber-order empat yaitu:

$\varphi_{14}: \mathbb{Z}_4/\{\bar{0}\} \to \mathbb{Z}_4/\{\bar{0}\}$

di mana $\varphi_{14}: \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \\ \bar{2} \\ \bar{3} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \\ \bar{2} \\ \bar{3} \end{bmatrix}$

Pada kasus ini, pemetaan φ_{14} satu-satu onto yang mungkin dengan mempertahankan adanya identitas $(\bar{0}, \bar{0})$ ada 6 sebagai berikut, misal A himpunan hasil pemetaan tersebut, maka:

$A\varphi_{14-1} = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{1}), (\bar{2}, \bar{2}), (\bar{3}, \bar{3})\} = <\bar{1}, b>$

$A\varphi_{14-2} = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{1}), (\bar{2}, \bar{3}), (\bar{3}, \bar{2})\}$ tidak memenuhi aksioma grup karena

$(\bar{1}, \bar{1}) + (\bar{2}, \bar{3}) = (\bar{3}, \bar{0}) \notin A\varphi_{14-2}$

$A\varphi_{14-3} = \{(\bar{0},\bar{0}),(\bar{1},\bar{2}),(\bar{2},\bar{1}),(\bar{3},\bar{3})\}$ tidak memenuhi aksioma grup karena

$(\bar{1},\bar{2}) + (\bar{3},\bar{3}) = (\bar{0},\bar{1}) \notin A\varphi_{14-3}$

$A\varphi_{14-4} = \{(\bar{0},\bar{0}),(\bar{1},\bar{2}),(\bar{2},\bar{3}),(\bar{3},\bar{1})\}$ tidak memenuhi aksioma grup karena

$(\bar{1},\bar{2}) + (\bar{3},\bar{1}) = (\bar{0},\bar{3}) \notin A\varphi_{14-4}$

$A\varphi_{14-5} = \{(\bar{0},\bar{0}),(\bar{1},\bar{3}),(\bar{2},\bar{1}),(\bar{3},\bar{2})\}$ tidak memenuhi aksioma grup karena

$(\bar{1},\bar{3}) + (\bar{3},\bar{2}) = (\bar{0},\bar{1}) \notin A\varphi_{14-5}$

$A\varphi_{14-6} = \{(\bar{0},\bar{0}),(\bar{1},\bar{3}),(\bar{2},\bar{2}),(\bar{3},\bar{1})\} = <\bar{1},\bar{3}>$

Namun dari kemungkinan di atas, yang memenuhi aksioma grup hanya ada dua, yaitu $A\varphi_{14-1}$ dan $A\varphi_{14-6}$. Sehingga diperoleh

$H_{\varphi_{14-1}} = \{(\bar{0},\bar{0}),(\bar{1},\bar{1}),(\bar{2},\bar{2}),(\bar{3},\bar{3})\}$ dan

$H_{\varphi_{14-2}} = \{(\bar{0},\bar{0}),(\bar{1},\bar{3}),(\bar{2},\bar{2}),(\bar{3},\bar{1})\}$

Dengan demikian, terdapat diperoleh enam subgrup yang tidak dapat diperoleh dengan menggunakan *direct product* langsung Diagram *Lattice* $\mathbb{Z}_4$ dan $\mathbb{Z}_4$, yaitu:

$H_{\varphi_{10}} = \{(\bar{0},\bar{0}),(\bar{2},\bar{2}),(\bar{1},\bar{1}),(\bar{3},\bar{3}),(\bar{0},\bar{2}),(\bar{2},\bar{0}),(\bar{1},\bar{3}),(\bar{3},\bar{1})\}$

$H_{\varphi_{11}} = \{(\bar{0},\bar{0}),(\bar{1},\bar{2}),(\bar{2},\bar{0}),(\bar{3},\bar{2})\}$

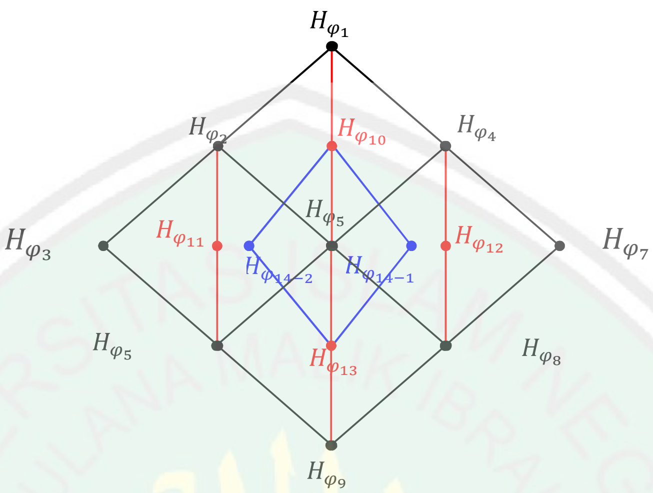
$H_{\varphi_{12}} = \{(\bar{0},\bar{0}),(\bar{2},\bar{1}),(\bar{0},\bar{2}),(\bar{2},\bar{3})\}$

$H_{\varphi_{13}} = \{(\bar{0},\bar{0}),(\bar{2},\bar{2})\}$

$H_{\varphi_{14-1}} = \{(\bar{0},\bar{0}),(\bar{1},\bar{1}),(\bar{2},\bar{2}),(\bar{3},\bar{3})\}$

$H_{\varphi_{14-2}} = \{(\bar{0},\bar{0}),(\bar{1},\bar{3}),(\bar{2},\bar{2}),(\bar{3},\bar{1})\}$

Sehingga Diagram *Lattice* dari $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$ adalah sebagai berikut:



Gambar. 3.5 *Diagram Lattice* $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$

Dari beberapa contoh kasus di atas, terlihat bahwa H subgrup dari $G_1 \times G_2$ dapat dicari dengan mencari himpunan H_φ yang sesuai dengan banyaknya isomorfisme yang terjadi dari G_1/N_1 ke G_2/N_2, dengan $H_\varphi = \{(a,b) \in G_1 \times G_2 | \varphi(a * N_1) = b \circ N_2; a \in G_1; b \in G_2\}$ di mana $\varphi: G_1/N_1 \to G_2/N_2$ suatu isomorfisme.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Dengan menerapkan *Lemma Goursat* terhadap grup *direct product rank* dua atau $G_1 \times G_2$ yang disusun dari grup $(G_1,*)$ dan $(G_2,\circ)$ di mana $N_1 \trianglelefteq G_1$ dan $N_2 \trianglelefteq G_2$, maka diperoleh bayangan $H \leq G_1 \times G_2$ adalah $G_1/N_1 \times G_2/N_2$, dan diperoleh hubungan G_1/N_1 dan G_2/N_2 sesuai dengan fungsi isomorfisme $\varphi: G_1/N_1 \to G_2/N_2$. Sehingga H subgrup dari $G_1 \times G_2$ dapat direpresentasikan oleh $G_1/N_1 \times G_2/N_2$, di mana $G_1/N_1 \cong G_2/N_2$. Misal H_φ suatu himpunan yang mereprentasikan fungsi isomorfisme φ, di mana $H_\varphi = \{(a,b) \in G_1 \times G_2 | \varphi(a * N_1) = b \circ N_2; a \in G_1; b \in G_2\}$, maka H subgrup dari $G_1 \times G_2$dapat dicari dengan mencari himpunan H_φ yang sesuai dengan banyaknya isomorfisme yang terjadi dari G_1/N_1 ke G_2/N_2.

4.2 Saran

1. Penelitian ini hanya terbatas pada grup *direct product rank* dua, untuk selanjutnya dapat dilakukan penerapan *Lemma Goursat* pada grup *direct product* dengan *rank-n* hingga dan *rank*-∞ tak hingga.
2. Dalam skripsi ini dibahas kajian aljabar mengenai penerapan *Lemma Goursat* untuk mencari subgrup *direct product*, untuk selanjutnya dapat dilakukan penelitian mengenai pembuatan programnya.

DAFTAR PUSTAKA

Abdussyakir,M.Pd. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika.* Malang: UIN-Malang Press.

Abdussyakir,M.Pd. 2006. *Ada Matematika Dalam Al-Qur'an.* Malang: UIN-Malang Press.

Anderson, D. Dan V. Camillo. 2009. *Subgroups of Direct Products of Groups, Ideals and Subring of Direct Products of Rings, and Goursat's Lemma.* American Mathematical Society.

Anderson, D. 2009. *Generalizations and Applications of Goursat's Lemma.*University of Iowa.

Ayres, FrankdanJaisingh, Lloyd R. 2004. *Schaum's Outline of Theory and Problems of Abstract Algebra Second Edition*. New York : McGraw-Hill Companies, Inc.

Berkovich, Ya. G. dan E. M. Zhmud. 1999. *Characters of Finite Groups.* American Mathematical Society.

Calugareanu, Grigore. 2009. *The Total Number of Subgroups of A Finite Abelian Group.* JAMS.

Clark, W. Edwin. 1998. *Elementary Abstract Algebra.* Florida : University of South Florida.

Connel, E.H. 1999. *Element of Abstract and Linear Algebra.* Florida: University of Miami.

Dummit, David S. danFoote, Richard M. 2004. *Abstract Algebra : Third Edition.* London :John Wiley & Sons, Inc.

Fraleigh, JB. 2003. *A First Course In Abstract Algebra: Seventh Edition.* University of Rhode Island.

Garrett, Paul. 1997. *Intro Abstract Algebra.*http://www.math.umn.edu/~garrett/

Judson, Thomas W. 1997. *Abstract Algebra: Theory and Application.* Stephen F. Austin State University.

Kropholler, Peter Hendrikus. 2004. *Notes for Undergraduate : 3H Groups, Rings and Fields.* United Kingdom : University of Glasgow.

Kublik, Kristina. 2009. *Generalizations of Goursat Theorem for Groups.*Department of Mathematics and Computer Science, Mount Allison University.

Mangroo, Sharon. 2003. *Secondary School CurriculumForm Three Mathematics.*Republic of Trinidad and Tobago Ministry of Education.

Muhsetyo, Gatot. 1997. *Dasar-Dasar Teori Bilangan.* Jakarta: PGSM.

Munir, Rinaldi. 2005. *Matematika Diskrit.* Bandung : Informatika.

Ngcibi, Sakhile Leonard. 2005. *Studies of equivalent fuzzy subgroups of Finite Abelian p-Groups of Rank Two and Their Subgroup Lattices.* Rhodes University.

Raisinghania dan Aggarwal. 1980. *Modern Algebra*. Ram Nagar, New Delhi : S. Chand and Company LTD.

Robinson, Derek J. 2003. *An Introduction to Abstract Algebra.* New York : Walter de Gruyter.

Sumardyono, S.Pd. 2004.*KarakteristikMatematikadanImplikasinyaterhadapPembelajaranMatematika.*Yogyakarta :DepartemenPendidikanNasionalDirektoratJenderalPendidikanDasar dan MenengahPusatPengembanganPenataranGuruMatematika.

Suryadi. 1996. *Pengantar Struktur Diskrit.* Jakarta : Gunadarma.

Yahya, Harun. 1999. *Menyingkap Rahasia Alam Semesta.* London: Ta-Ha Publishers Ltd.

Yatim, Wildan. 1996. *Biologi Modern : Histologi.* Bandung : PT Tarsito.

Wibowo, Daniel S. 2008. *Anatomi Tubuh Manusia.* Jakarta: PT Gramedia Widiasarana Indonesia.

KEMENTERIAN AGAMA
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No. 50 Malang 65144 Telp. / Fax. (0341) 558933

BUKTI KONSULTASI

Nama : **Husnul Khotimah**
NIM : **06510022**
Jurusan : **Matematika**
Pembimbing I : **Evawati Alisah, M.Pd**
Pembimbing II : **Abdul Aziz, M.Si**
Judul : **Penerapan *Lemma Goursat* Pada Grup *Direct Product Rank* Dua dan Tiga**

No.	Tanggal	Keterangan	Paraf
1.	11 Agustus 2010	Permasalahan	1.
2.	25 Agustus 2010	Bab I dan Bab II	2.
3.	30 Agustus 2010	Revisi Bab I dan Bab II	3.
4.	20 Oktober 2010	Bab III	4.
5.	24 November 2010	Keagamaan Bab I dan Bab II	5.
6.	24 November 2010	Revisi Bab III	6.
7.	6 Desember 2010	Revisi Keagamaan Bab I & II	7.
8.	19 Januari 2011	Revisi Bab III	8.
9.	8 Maret 2011	Revisi Bab III	9.
10.	19 Mei 2011	Revisi Bab III	10.
11.	15 Juli 2011	ACC Keseluruhan	11.
12.	18 Agustus 2011	ACC Keagamaan Keseluruhan	12.

Malang, 18 Agustus 2011
Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001