SIFAT G-KONVERGEN DAN G-CAUCHY PADA BARISAN DI RUANG G-METRIK

SKRIPSI

OLEH
AINUN CHABIBULLOH HILALUDDIN
NIM. 17610026

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2024

SIFAT G-KONVERGEN DAN G-CAUCHY PADA BARISAN DI RUANG G-METRIK

SKRIPSI

OLEH
AINUN CHABIBULLOH HILALUDDIN
NIM. 17610026

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2024

SIFAT G-KONVERGEN DAN G-CAUCHY PADA BARISAN DI RUANG G-METRIK

SKRIPSI

Diajukan Kepada
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Oleh
AINUN CHABIBULLOH HILALUDDIN
NIM. 17610026

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2024

SIFAT G-KONVERGEN DAN G-CAUCHY PADA BARISAN DI RUANG G-METRIK

SKRIPSI

Oleh
Ainun Chabibulloh Hilaluddin
NIM. 17610026

Telah Disetujui Untuk Diuji

Malang, 26 Juni 2024

Dosen Pembimbing I	Dosen Pembimbing II
Dian Maharani, M.Si	Erna Herawati, M.Pd
NIP. 19940217 202012 2 001	NIPPPK. 19760723 202321 2 006

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

SIFAT G-KONVERGEN DAN G-CAUCHY PADA BARISAN DI RUANG G-METRIK

SKRIPSI

Oleh

Ainun Chabibulloh Hilaluddin

NIM. 17610026

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Matematika (S.Mat)

Malang 28 Juni 2024

Ketua Penguji	Prof. Dr. H. Turmudi, M.Si, Ph.D.	....
Anggota Penguji 1	Dr. Elly Susanti, M.Sc.	....
Anggota Penguji 2	: Dian Maharani, M.Si.	....
Anggota Penguji 3	: Erna Herawati, M.Pd.	....

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc
NIP. 19741129 200012 2 005

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Ainun Chabibulloh Hilaluddin

NIM : 17610026

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Judul Skripsi : Sifat G-Konvergen dan G-Cauchy pada Barisan di Ruang G-Metrik

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya sendiri, bukan merupakan hasil tulisan atau fikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau fikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar rujukan. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 28 Juni 2024

Yang membuat pernyataan

Ainun Chabibulloh Hilaluddin

NIM. 17610026

MOTTO

"Walaupun memiliki tujuan yang sama, setiap individu bisa saja menempuh jalan yang berbeda. Tidak bersama saat di dalam perjalanan bukan berarti tidak bersama juga saat sampai di tujuan"

PERSEMBAHAN

Dengan rasa syukur kepada Allah Swt, dengan segala kerendahan hati penulis persembahkan skripsi ini kepada:

Almh. nenek Fudillah dan alm. Bapak Ahasanul Kholiqin yang sudah merawat saya dari kecil dan yang saya sayangi dan saya cintai ibu kandung saya ibu Siti Mu’as Shomah yang senantiasa dengan mendoakan, memberikan semangat, cinta, dan kasih sayang, serta seluruh keluarga besar dan teman-teman terdekat yang selalu membantu, mendukungan, memberi semangat, dan doa terbaik kepada penulis.

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Puja dan Puji Syukur kepada Allah SWT. Dzat penguasa segalanya. Berkat segala kuasa, pertolongan, dan kasih saying-Nya Penulis dapat menyelesaikan tugas akhir yang berjudul "*Sifat G-Konvergen dan G-Cauchy pada Barisan di Ruang G-Metrik*".

Shalawat serta salam tetap tercurahkan pada nabi akhir zaman Muhammad SAW. yang telah membimbing umat manusia dari zaman kegelapan menuju zaman yang terang benderang yaitu agama Islam.

Tidak lupa, ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya penulis berikan kepada beberapa pihak sebagai berikut:

1. Prof. Dr. H. M. Zainuddin, M.A., selaku rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
2. Prof. Dr. Hj. Sri Harini, M.Si, selaku dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
3. Dr. Elly Susanti, S.Pd., M.Sc, selaku ketua Program Studi Matematika, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
4. Dian Maharani, M.Si, selaku dosen pembimbing I yang sudah dengan sabar membimbing dan mendampingi penulis dalam mengerjakan penelitian ini hingga akhir.
5. Erna Herawati, M.Pd, selaku dosen pembimbing II dan pembimbing agama yang telah memberikan banyak waktudan tenaga untuk membimbing penulis dalam mengerjakan tugas akhir ini.
6. Seluruh dosen Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
7. Keluarga tercinta, Ibunda Siti Mu'as Shomah, almarhum paman Ahsanul Kholiqin, dan almarhumah nenek Fudillah sebagai pendukung doa, motivasi, dan materi selama menempuh pendidikan hingga tahap pengerjaan tugas akhir ini.
8. Kawan-kawan mahasiswa Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim angkatan 2017, 2018, dan

2020 yang telah memberikan semangat kepada penulis dalam mengerjakan tugas akhir ini.

9. Pihak-pihak di luar yang disebutkan penulis sebelumnya dan tentunya tidak dapat disebutkan satu persatu.

Penulis berharap semoga tugas akhir ini dapat bermanfaat bagi penulis sendiri pada umumnya dan bagi pembaca serta banyak pihak lain pada umumnya.

Wassalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Malang, 28 Juni 2024

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR SIMBOL

$\lvert x \rvert$	: Nilai mutlak dari x
X	: Sembarang himpunan
(x_n)	: Sembarang barisan
d	: Fungsi jarak
(X, d)	: Ruang metrik
$B(x, r)$	: Bola di ruang metrik dengan pusat x dan jari-jari r
G	: Fungsi jarak diperumum (G-metrik)
(X, G)	: Ruang metrik diperumum (ruang G-metrik)
$B_G(x_0, r)$	: Bola di ruang metrik diperumum dengan pusat x_0 dan jari-jari r

ABSTRAK

Hilaluddin, Ainun Chabibulloh. 2024. Sifat-Sifat Barisan di Ruang G-Metrik. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Pembimbing: (1) Dian Maharani, M.Si (2) Erna Herawati, M.Pd.

Kata Kunci: Ruang Metrik, Barisan Konvergen, Barisan Cauchy, Ruang G-Metrik, Barisan G-Konvergen, Barisan G-Cauchy.

Ruang G-metrik merupakan salah satu bentuk perumuman dari ruang metrik dasar yang dipelajari di dalam analisis fungsional. Barisan G-konvergen merupakan barisan konvergen di ruang G-metrik, dan barisan G-Cauchy merupakan barisan Cauchy di ruang G-metrik. Pada skripsi ini, penulis bertujuan untuk membahas hubungan antara ruang metrik dengan ruang G-metrik, barisan konvergen di ruang metrik dengan barisan G-konvergen, dan barisan Cauchy di ruang metrik dengan barisan G-Cauchy. Penelitian yang akan dilakukan adalah dengan membuktikan terlebih dahulu bahwasannya setiap G-metrik dan membuktikan bahwasannya setiap ruang G-metrik merupakan ruang metrik. Kemudian setelah kedua pernyataan tersebut terbukti, akan dibuktikan bahwasannya setiap barisan konvergen di ruang metrik merupakan barisan G-konvergen dan sertiap barisan Cauchy di ruang metrik merupakan barisan G-Cauchy. Sebagai hasilnya, penulis dapat membuktikan sifat-sifat barisan G-konvergen dan barisan G-Cauchy.

ABSTRACT

Hilaluddin, Ainun Chabibulloh. 2024. Properties of Sequences in G-Metric Space. Thesis. Mathematics Department, Science and Technology Faculty, Universitas Islam Negeri Maualana Malik Ibrahim Malang. Advisors: (1) Dian Maharani, M.Si (2) Erna Herawati, M.Pd.

Keywords: Metric Spaces, Convergent Sequences, Cauchy Sequences, G-Metric Spaces, G-Convergent Sequences, G-Cauchy Sequences.

G-metric spaces are a generalized form of the basic metric space in functional analysis. G-convergent sequences are convergent sequences in G-metric spaces, and G-Cauchy sequences are Cauchy sequences in G-metric spaces. In this paper, the author intends to discuss the relationship between metric spaces and G-metric spaces, convergent sequences in metric spaces and G-convergent sequences, and Cauchy sequences in metric spaces and G-Cauchy sequences. The research will begin by proving that every metric space is a G-metric space and proving that all G-metric spaces are metric spaces too. Then, after both statements are proven, it will be shown that every convergent sequence in a metric space is a G-convergent sequence and every Cauchy sequence in a metric space is a G-Cauchy sequence. As a result, the author can prove the properties of G-convergent sequences and G-Cauchy sequences.

مستخلص البحث

هلال الدين، عين حبيب الله. ٢٠٢٤. خصائص السلاسل في الفضاء المتري G. البحث الجامعي.قسم الرياضيات، كلية العلوم والتكنولوجيا، جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية، مالانج.
المشرفة الأولى: ديان مهاراني، الماجستيرة,المشرفة الثانية: إيرنا هيراواتي، الماجستيرة.

الكلمات المفتاحية:الفضاءات المترية, الخطوط المتقاربة, الخطوط الكاوشي, الفضاءات G – المترية, الخطوط G –المتقاربة, الخطوط G –الكاوشي.

الفضاءات–G المترية هي إحدى الصور المعممة للفضاءات المترية الأساسية التي تُدرس في التحليل الوظيفي. الخطوط G –المتقاربة هي الخطوط المتقاربة في الفضاءات G –المترية ، الخطوط G –الكاوشي هي الخطوط الكاوشي في الفضاءG –المترية. يهدف المؤلف في هذا البحث إلى مناقشة العلاقة بين الفضاءات المترية والفضاءات G –المترية، والخطوط المتقاربة في الفضاءات المترية مع الخطوط G –المتقاربة، وخطوط كاوشي في الفضاءات المترية مع الخطوط G –الكاوشي. وتم إجراء البحث من خلال إثبات أن كل الفضاءات المترية هي الفضاءات G – المترية وإثبات أن كل الفضاءات G –المترية هي الفضاءات المترية. ثم بعد الإثبات كلتا العبارتين، تم إثبات أن كل الخطوط المتقاربة في الفضاءات المترية هي الخطوط G –المتقاربة وكل الخطوط الكاوشي في الفضاءات المترية هي الخطوط G–الكاوشي. والنتيجة، يمكن للمؤلف إثبات خصائص الخطوط G –المتقاربة والخطوط G –الكاوشي.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pada awal abad ke-20, seorang matematikawan Prancis bernama Fréchet meneliti tentang fungsi jarak di antara sembarang dua objek pada himpunan tak kosong. Fungsi jarak ini harus memenuhi syarat-syarat yang antara lain adalah nilai fungsi tersebut tak negatif, bernilai nol jika kedua sembarang objek yang didefinisikan jaraknya menggunakan fungsi tersebut merupakan satu objek yang sama, jarak objek pertama menuju objek kedua akan sama nilainya dengan jarak objek kedua menuju objek pertama atau biasa disebut dengan sifat simetris, serta apabila diambil sembarang objek ketiga, maka jarak objek pertama menuju objek kedua akan bernilai kurang dari atau sama dengan penjumlahan jarak objek pertama menuju objek ketiga dengan jarak objek ketiga menuju objek kedua. Syarat terakhir tersebut biasa disebut dengan konsep ketaksamaan segitiga yang sama dengan salah satu sifat dari nilai mutlak. Hausdorff menamakan konsep fungsi jarak tersebut dengan nama metrik. Kemudian Shirali dan Vasudeva menjelaskan definisi dari ruang metrik sebagai pasangan sembarang himpunan tak kosong X dengan metrik d yang berlaku di himpunan tersebut dan menyimbolkannya dengan (X, d) (Shirali & Vasudeva, 2006).

Pada tahun 2009, Aphane menjelaskan konsep barisan Cauchy sekaligus juga barisan konvergen pada ruang metrik. Shirali dan Vasudeva juga menuliskan konsep ruang metrik lengkap di mana setiap barisan Cauchy di ruang metrik tersebut harus konvergen pada suatu titik di ruang metrik yang sama. Selain itu, di buku yang sama juga dijelaskan konsep bola pada ruang metrik yang mana merupakan suatu himpunan titik-titik di sekitar suatu titik yang dalam hal ini disebut titik pusat dengan jarak dari titik pusat tersebut kurang dari suatu bilangan riil positif yang disebut sebagai jari-jari.

Mustafa dan Sims kemudian menjelaskan bentuk perluasan dan perumuman dari metrik yang disebut dengan G-metrik. Pada dasarnya, G-metrik ini dijelaskan sebagai fungsi jarak dari sembarang tiga objek pada himpunan tak kosong X dengan kodomain yang merupakan bilangan riil tak negatif. Fungsi ini akan bernilai nol jika ketiga titik tersebut merupakan titik yang sama, bernilai positif jika setidaknya salah satu dari ketiga titik tersebut merupakan titik yang berbeda, nilainya akan sama atau dapat disebut simetri jika diberlakukan fungsi permutasi pada fungsi jarak tersebut, serta menjelaskan ketaksamaan segiempat sebagai salah satu syaratnya juga. Mustafa dan Sims juga menjelaskan definisi ruang metrik diperumum yang mereka sebut dengan ruang G-metrik sebagai pasangan sembarang himpunan tak kosong X dengan fungsi G-metrik yang berlaku di himpunan tersebut dan menyimbolkannya dengan (X, G) (Mustafa & Sims, 2006).

Pada ruang metrik terdapat konsep barisan Cauchy (x_n) yang merupakan barisan yang suku-sukunya memiliki metrik yang semakin kecil. Secara definisi barisan (x_n) di ruang metrik (X, d) dengan metrik $d(x, y)$ dikatakan sebagai barisan Cauchy jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan asli N sedemikian sehingga untuk setiap bilangan asl n, m yang lebih besar atau sama dengan N menyebabkan $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. Kusumaningati menjelaskan bahwa pada ruang G-metrik terdapat barisan (x_n) yang memenuhi definisi untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan asli N sedemikian sehingga untuk setiap bilangan asl n, m, l yang lebih besar atau sama dengan N menyebabkan $G(x_n, x_m, x_l) < \varepsilon$. (x_n) merupakan barisan Cauchy di ruang G-metrik yang disebut dengan barisan G-Cauchy. Selain itu, jika barisan (x_n) memenuhi definisi untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan asli N sedemikian sehingga untuk setiap bilangan asl n, m yang lebih besar atau sama dengan N menyebabkan $G(x_n, x_m, x) < \varepsilon$. (x_n) merupakan barisan yang konvergen ke x di ruang G-metrik atau dapat disebut bahwa (x_n) G-konvergen ke x (Kamal & Rizk, 2023).

Dalam ajaran Islam, terdapat konsep yang serupa dengan barisan Cauchy dan barisan konvergen yaitu konsep ikhtiar. Allah SWT. memerintahkan hamba-Nya untuk berusaha semaksimal mungkin dalam menggapai apa yang diinginkannya. Konsep ikhtiar ini lebih tepatnya serupa dengan konsep barisan Cauchy yang suku-sukunya saling mendekat satu sama lain, di mana manusia berusaha mendekati apa yang diinginkannya semaksimal mungkin. Allah SWT. sebagai penguasa segalanya akan membalas usaha tersebut dengan balasan terbaik yang mana ini serupa dengan konsep konvergen di mana suatu barisan ini menuju pada suatu titik. Seperti di dalam al-Qur’an di surat an-Najm ayat ke 39-42, yang isinya sebagai berikut:

وَأَن لَّيْسَ لِلْإِنسَٰنِ إِلَّا مَا سَعَىٰ ﴿٣٩﴾ وَأَنَّ سَعْيَهُۥ سَوْفَ يُرَىٰ ﴿٤٠﴾ ثُمَّ يُجْزَىٰهُ ٱلْجَزَآءَ ٱلْأَوْفَىٰ ﴿٤١﴾ وَأَنَّ إِلَىٰ رَبِّكَ ٱلْمُنتَهَىٰ ﴿٤٢﴾

Artinya:

“*Dan tidaklah manusia memperoleh sesuatu kecuali apa yang telah diusahakannya (39). Dan sesungguhnya apa yang telah diusahakannya itu kelak akan diperlihatkan (kepadanya) (40). Kemudian akan dibalaskan kepadanya dengan balasan yang sempurna (41). Dan sesungguhnya kepada Tuhanmulah kesudahan (dari segala sesuatu) (42)” (QS. An-Najm/53:39-42).*

Hal ini serupa dengan konsep barisan Cauchy dan barisan konvergen.

Dari penjabaran tersebut, diketahui bahwa terdapat beberapa penelitian yang berkaitan dengan ruang G-metrik, namun belum ada penelitian mengenai sifat G-konvergen dan G-Cauchy pada barisan di ruang G-metrik. Oleh karena itu, pada tugas akhir ini akan dibahas sifat G-konvergen dan G-Cauchy pada barisan di ruang G-metrik.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasar pada latar belakang tersebut, permasalahan yang akan dibahas pada penelitian ini adalah:

1. bagaimana bukti sifat-sifat barisan G-konvergen?
2. bagaimana bukti sifat-sifat barisan G-Cauchy?

1.3 Tujuan Penelitian

Dari rumusan masalah tersebut, tujuan dari penelitian ini adalah:

1. untuk membuktikan apakah setiap barisan konvergen di ruang metrik merupakan barisan G-konvergen,
2. dan untuk membuktikan setiap barisan Cauchy di ruang metrik merupakan barisan G-Cauchy.

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat membantu penelitian yang akan datang mengenai sifat-sifat barisan di ruang metrik diperumum.

1.5 Batasan Masalah

Adapun batasan masalah pada penelitian ini, penulis hanya akan membuktikan bahwa setiap ruang metrik adalah ruang G-metrik dan sebaliknya, setiap barisan konvergen di ruang metrik adalah barisan G-konvergen, serta setiap barisan Cauchy di ruang metrik adalah barisan G-Cauchy.

1.6 Definisi Istilah

Terdapat beberapa istilah yang digunakan penulis pada penelitian ini, antara lain:

Barisan Cauchy di $\mathbb{R}$	:	*Barisan bilangan riil* (x_n) *disebut barisan Cauchy jika untuk setiap* $\varepsilon > 0$ *terdapat bilangan asli* $H(\varepsilon)$ *sedemikian hingga untuk setiap bilangan asli* $n, m \geq H(\varepsilon)$, *terdapat* x_n, x_m *yang memenuhi* $\lvert x_n - x_m \rvert < \varepsilon$.
Konvergen	:	*Barisan* $X = (x_n) \in \mathbb{R}$ *disebut konvergen ke* $x \in \mathbb{R}$, *jika untuk setiap* $\varepsilon > 0$ *terdapat bilangan asli* $K(\varepsilon)$ *sedemikian hingga untuk setiap* $n \geq K(\varepsilon)$ *yang memenuhi* $\lvert x_n - x \rvert < \varepsilon$.
Metrik	:	*Diberikan sebarang himpunan* X *tak kosong. Misal* $x, y, z \in X$. *Fungsi* $d: X \times X \to \mathbb{R}$ *disebut Metrik (fungsi jarak) di* X. *Jika memenuhi:* M-1) $d(x, y) \geq 0$; M-2) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$; M-3) $d(x, y) = d(y, x)$ *(Simetris);* M-4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *(Triangle Inequality).*

Ruang metrik : *Pasangan* (X, d), *dengan* X *merupakan sebarang himpunan tak kosong dan* d *merupakan fungsi yang memenuhi semua syarat metrik.*

Bola : *Diberikan ruang metrik* (X, d) *dan bilangan real* $r > 0$. *Bola buka di ruang metrik* (X, d) *dengan jari-jari* r *dan berpusat di* $x \in X$ *didefinisikan dengan*

$$B(x, r) = \{y \in X : d(x, r) < r\}.$$

Ruang metrik lengkap : *Ruang metrik* (X, d) *disebut lengkap jika setiap barisan Cauchy di* X *konvergen ke suatu titik di* X.

G-metrik : *Diberikan himpunan tak kosong* X *dan* $x, y, z, a \in X$. *Diberikan* $G: X \times X \times X \to [0, \infty)$, *merupakan fungsi yang memuhi kondisi:*

G-1) $G(x, y, z) = 0$ *jika* $x = y = z$;

G-2) $0 < G(x, x, y)$; *jika* $x \neq y$;

G-3) $G(x, x, y) \leq G(x, y, z)$; *jika* $z \neq y$;

G-4) $G(x, y, z) = G\big(p(x, y, z)\big)$ *(simetri untuk ketiga variabel), di mana* p *merupakan fungsi permutasi;*

G-5) $G(x, y, z) \leq G(x, a, a) + G(a, y, z)$; *(ketaksamaan segiempat*).

Ruang G-metrik : *Pasangan* (X, G), *dengan* X *merupakan sebarang himpunan tak kosong dan* G *merupakan fungsi yang memenuhi semua syarat* G*-metrik.*

BAB II

KAJIAN TEORI

2.1 Teori Pendukung

2.1.1 Limit Barisan Bilangan Riil

Untuk memambantu penelitian mengenai kelengkapan, akan dijelaskan terlebih dahulu definisi barisan Cauchy dan barisan konvergen.

Definisi 2.1. (Bartle & Sherbert, 2011)

Barisan bilangan riil $X = (x_n)$ *disebut* ***barisan Cauchy*** *jika untuk setiap* $\varepsilon > 0$ *terdapat bilangan asli* $H(\varepsilon)$ *sedemikian hingga untuk setiap bilangan asli* $n, m \geq H(\varepsilon)$*, terdapat* x_n, x_m *yang memenuhi* $|x_n - x_m| < \varepsilon$*.*

Kemudian akan dipaparkan definisi dari limit barisan.

Definisi 2.2. (Bartle & Sherbert, 2011)

Barisan $X = (x_n) \in \mathbb{R}$ *disebut konvergen ke* $x \in \mathbb{R}$*, atau* x *disebut* ***limit*** *dari barisan* (x_n) *jika untuk setiap* $\varepsilon > 0$ *terdapat bilangan asli* $K(\varepsilon)$ *sedemikian hingga untuk setiap* $n \geq K(\varepsilon)$ *yang memenuhi* $|x_n - x| \leq \varepsilon$*.*

Dari definisi tersebut dapat dikatakan bahwa barisan yang memiliki limit disebut barisan **konvergen**, dan jika tidak memiliki limit maka disebut **divergen**.

2.1.2 Ruang Metrik

Sebelum membahas tentang konsep ruang metrik diperumum, akan dibahas definisi dari konsep ruang metrik se bagai berikut.

Definisi 2.3. (Shirali & Vasudeva, 2006)

Diberikan sebarang himpunan tak kosong X*. Misal* $x, y, z \in X$*. Fungsi* $d: X \times X \to \mathbb{R}$ *disebut* ***metrik (fungsi jarak)*** *di* X*. Jika memenuhi:*

M-1) $d(x, y) \geq 0$;

M-2) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

M-3) $d(x, y) = d(y, x)$ *(Simetris);*

M-4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *(Triangle Inequality);*

pasangan (X, d) *disebut sebagai* ***ruang metrik***.

Untuk lebih memperjelas definisi tersebut, berikut akan diberikan contoh dari ruang metrik.

Contoh 2.4. (Shirali & Vasudeva, 2006)

Diberikan himpunan bilangan riil $\mathbb{R}$, untuk $x, y, z \in X$ dan didefinisikan $d(x, y) = |x - y|$, maka $(\mathbb{R}, d)$ adalah ruang metrik.

Bukti.

Untuk $x, y, z \in \mathbb{R}$:

M-1) Akan dibuktikan $d(x, y) \geq 0$

Berdasarkan definisi dari nilai mutlak maka jelas $d(x, y) \geq 0$ baik untuk $x \neq y$ atau $x = y$;

M-2) Akan dibuktikan $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

$\Rightarrow$ $d(x, y) = 0$

$|x - y| = 0$

$x = y$

$\Leftarrow$ $x = y$ maka

$$
\begin{aligned}
d(x, y) &= |x - y| \\
&= |x - x| \\
&= 0
\end{aligned}
$$

M-3) Akan dibuktikan $d(x, y) = d(y, x)$

$$
\begin{aligned}
d(x,y) &= |x-y| \\
&= |y-x| \\
&= d(y,x)
\end{aligned}
$$

M-4) Akan dibuktikan $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

$$
\begin{aligned}
d(x,y) &= |x-y| \\
&= |x-z+z-y| \\
&\leq |x-z| + |z-y| \\
&= d(x,z) + d(z,y)
\end{aligned}
$$

Definisi 2.5. (Aphane, 2009)

Diberikan ruang metrik (X,d) *dan bilangan real* $r > 0$. ***Bola buka*** *di ruang metrik* (X,d) *dengan jari-jari* r *dan berpusat di* $x \in X$ *didefinisikan dengan*

$$B(x,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}.$$

Untuk lebih memperjelas definisi tersebut, berikutnya akan diberikan contoh dari bola buka di ruang metrik.

Contoh 2.6. (Aphane, 2009)

Dengan menggunakan contoh ruang metrik yang dijelaskan sebelumnya, jika dipilih $x = 2$, dan $r = 1$, dengan didefinisikan ruang metrik $(\mathbb{R}, d)$ dan $d(x,y) = |x-y|$, maka dari bola buka $B(2,1)$, didapatkan

$$B(2,1) = \{y \in \mathbb{R} : d(2,y) < 1\}$$

sehingga

$$
\begin{gathered}
|2-y| < 1 \\
-1 < 2-y < 1 \\
-1-2 < 2-y-2 < 1-2 \\
-3 < -y < -1
\end{gathered}
$$

$$1 < y < 3$$

sehingga didapatkan bola buka $B(2,1)$ adalah interval terbuka $(1,3)$.

2.1.3 Kelengkapan Ruang Metrik

Pada subbab ini akan dijelaskan sifat-sifat kelengkapan dan kekonvergenan ruang metrik.

Definisi 2.7. (Aphane, 2009)

Diberikan ruang metrik (X, d), (x_n) *barisan di* X *dan* $x \in X$, (x_n) ***konvergen*** *ke* x *jika untuk setiap* $\varepsilon > 0$ *terdapat bilangan asli* N *sehingga* $d(x_n, x) < \varepsilon$ *untuk* $n \geq N$.

Untuk lebih menjelaskan definisi tersebut, berikut akan diberikan contoh dari barisan konvergen di ruang metrik.

Contoh 2.8.

Diberikan ruang metrik $(\mathbb{R}, d)$ dengan metrik d yang sama dengan contoh 2.4., barisan $(x_n) = \frac{1}{n}$ merupakan barisan yang konvergen ke 0 di ruang metrik $(\mathbb{R}, d)$.

Bukti.

Berdasarkan definisi barisan konvergen pada ruang metrik, untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $n \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk bilangan asli $n \geq N$.

Jika (x_n) konvergen ke 0, maka jika diberikan $\varepsilon > 0$, akan dicari N sedemikian hingga $d(x_n, x) = |x_n - 0| < \varepsilon$.

Karena $n \geq N$, maka $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N}$. Kemudian akan dipilih N;

$$\begin{aligned} |x_n - 0| &= |x_n| \\ &= \left|\frac{1}{n}\right| \\ &\leq \frac{1}{N}; \end{aligned}$$

sehingga dipilih

$$\frac{1}{N} < \varepsilon$$

atau dapat kita pilih

$$N > \frac{1}{\varepsilon};$$

Maka untuk sebarang $\varepsilon > 0$ dan untuk setiap $n \geq N$, didapatkan $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N}$ yang menyebabkan

$$\begin{aligned} d(x_n, 0) \quad &= |x_0 - 0| \\ &= |x_n| \\ &= \left|\frac{1}{n}\right| \\ &\leq \frac{1}{N} \\ &< \varepsilon; \end{aligned}$$

Sehingga terbukti bahwa barisan $(x_n) = \frac{1}{n}$ konvergen ke 0 di ruang metrik $(\mathbb{R}, d)$ dengan $d(x, y) = |x - y|$.

Definisi 2.9. (Aphane, 2009)

Barisan titik-titik (x_n) *di ruang metrik* (X, d) *disebut* ***barisan Cauchy*** *jika untuk setiap* $\varepsilon > 0$ *terdapat bilangan asli* N *sedemikian hingga* $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ *untuk* $n, m \geq N$.

Untuk lebih menjelaskan definisi tersebut, berikut akan diberikan contoh dari barisan konvergen di ruang metrik.

Contoh 2.10.

Diberikan ruang metrik $(\mathbb{R}, d)$ dengan metrik d yang sama dengan contoh 2.4., barisan $(x_n) = \frac{1}{2n}$ merupakan barisan Cauchy di ruang metrik $(\mathbb{R}, d)$.

Bukti.

Berdasarkan definisi barisan Cauchy pada ruang metrik, untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $m, n \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk bilangan asli $n, m \geq N$ menyebabkan $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Karena $n, m \geq N$, maka $2n, 2m \geq 2N$, sehingga $\frac{1}{2n}, \frac{1}{2m} \leq \frac{1}{2N}$. Kemudian akan dipilih N;

$$
\begin{aligned}
|x_n - x_m| &= \left|\frac{1}{2n} - \frac{1}{2m}\right| \\
&= \left|\frac{m-n}{2nm}\right| \\
&\leq \left|\frac{m}{2nm}\right| + \left|\frac{n}{2nm}\right| \\
&= \left|\frac{1}{2n}\right| + \left|\frac{1}{2m}\right| \\
&\leq \frac{1}{2N} + \frac{1}{2N}; \\
&= \frac{2}{2N} \\
&= \frac{1}{N};
\end{aligned}
$$

sehingga dipilih

$$\frac{1}{N} < \varepsilon$$

atau dapat kita pilih

$$N > \frac{1}{\varepsilon};$$

Maka untuk sebarang $\varepsilon > 0$ dan untuk setiap $n, m \geq N$, didapatkan $\frac{1}{n}, \frac{1}{m} \leq \frac{1}{N}$ yang menyebabkan

$$
\begin{aligned}
d(x_n, x_m) &= |x_n - x_m| \\
&= \left|\frac{1}{2n} - \frac{1}{2m}\right|
\end{aligned}
$$

$$= \left|\frac{m-n}{2nm}\right|$$

$$\leq \left|\frac{m}{2nm}\right| + \left|\frac{n}{2nm}\right|$$

$$= \left|\frac{1}{2n}\right| + \left|\frac{1}{2m}\right|$$

$$\leq \frac{1}{2N} + \frac{1}{2N};$$

$$= \frac{2}{2N}$$

$$= \frac{1}{N}$$

$$< \varepsilon;$$

Sehingga terbukti bahwa barisan $(x_n) = \frac{1}{2n}$ merupakan barisan Cauchy di ruang metrik $(\mathbb{R}, d)$ dengan $d(x, y) = |x - y|$.

Definisi 2.11. (Shirali & Vasudeva, 2006)

*Ruang metrik (X, d) disebut **lengkap** jika setiap barisan Cauchy di X konvergen ke suatu titik di X.*

Definisi 2.12. (Shirali & Vasudeva, 2006)

*Diberikan $(x_n)_{n\geq 1}$ suatu barisan di (X, d) dan $(n_k)_{k\geq 1}$ barisan bilangan bulat positif sedemikian hingga $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$, maka barisan $\left(x_{n_k}\right)_{k\geq 1}$ disebut subbarisan dari $(x_n)_{n\geq 1}$. Jika $\left(x_{n_k}\right)_{k\geq 1}$ konvergen, maka limitnya disebut **limit subbarisan** dari $(x_n)_{n\geq 1}$.*

Proposisi 2.13. (Shirali & Vasudeva, 2006)

Jika suatu barisan Cauchy di ruang metrik (X, d) memuat subbarisan konvergen, maka barisan tersebut konvergen ke limit yang sama dengan subbarisan tersebut.

Bukti.

Ambil sebarang barisan Cauchy $(x_n)_{n\geq 1}$ di (X, d). Maka untuk setiap $\varepsilon > 0$

terdapat bilangan bulat $n_0(\varepsilon)$ sedemikian hingga

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon \text{ untuk } m, n \geq n_0(\varepsilon),$$

Lalu ambil sebarang (x_{n_k}) subbarisan konvergen dari $(x_n)_{n\geq 1}$ dan memiliki limit x, maka

$$d(x_{n_m}, x_n) < \varepsilon \text{ untuk } m, n \geq n_0(\varepsilon),$$

Karena (n_k) barisan bilangan asli positif yang *strictly increasing*. Maka,

$$d(x, x_n) \leq d(x, x_{n_m}) + d(x_{n_m}, x_n) < d(x, x_{n_m}) + \varepsilon \text{ untuk } m, n \geq n_0(\varepsilon)$$

Ambil $m \to \infty$, maka diperoleh

$$d(x, x_n) \leq \varepsilon \text{ untuk } n \geq n_0(\varepsilon),$$

sehingga barisan $(x_n)_{n\geq 1}$ konvergen ke x.

Proposisi 2.14. (Shirali & Vasudeva, 2006).

Ruang metrik $X = \mathbb{R}^n$ *dengan metrik yang didefinisikan dengan*

$$d_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}, p \geq 1,$$

Dengan $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ dan $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ di $\mathbb{R}^n$ adalah ruang metrik lengkap.

Bukti.

Ambil sebarang $(x^{(m)})_{m\geq 1}$, dengan $x^{(m)} = \left(x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \dots, x_n^{(m)}\right)$, ambil suatu barisan Cauchy di (X, d), sehingga $d_p\left(x^{(m)}, x^{(m')}\right) \to 0$ dengan $m, m' \to \infty$. Sehingga, untuk $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan bulat $n_0(\varepsilon)$ sedemikian hingga

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \left| x_k^{(m)} - x_k^{(m')} \right|^p \right)^{1/p} < \varepsilon \quad \text{Untuk setiap } m, m' \geq n_0(\varepsilon). \quad (2.\ 1)$$

Karena $\left|x_k^{(m)} - x_k^{(m')}\right| < \varepsilon$, untuk setiap $m, m' \geq n_0(\varepsilon)$ dan untuk setiap $k = 1,2,\dots,n$. Dengan menggunakan prinsip kekonvergenan Cauchy, maka $\left(x_k^{(m)}\right)_{m\geq 1}$ konvergen ke x_k, jadi dapat dituliskan $\lim_{m\to\infty} x_k^{(m)} = x_k$. Misal $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ dan $m \geq n_0(\varepsilon)$. berdasarkan persamaan di atas maka

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|x_k^{(m)} - x_k^{(m')}\right|^p < \varepsilon^p \qquad (2.\ 2)$$

Untuk setiap $m' \geq n_0(\varepsilon)$. Ambil $m' \to \infty$. Berdasarkan persamaan di atas maka diperoleh

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|x_k^{(m)} - x_k\right|^p < \varepsilon^p$$

Untuk setiap $m \geq n_0(\varepsilon)$ sehingga $x^{(m)}$ konvergen ke x di (X, d).

Akibat 2.15. (Shirali & Vasudeva, 2006)

Diberikan $X = \mathbb{R}^n$ *dan* $d_\infty(x,y) = \max\{|x_k - y_k| : 1 \leq k \leq n\}$. *Maka* (X, d_∞) *merupakan ruang metrik lengkap.*

Proposisi 2.16. (Shirali & Vasudeva, 2006)

ruang metrik (X, d), *jika* X *dinotasikan sebagai ruang dari setiap barisan bilangan riil* $x = (x_1, x_2, \dots)$ *dengan* $(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p)^{1/p} < \infty (p \geq 1)$ *dan diberikan metrik*

$$d_p(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^p\right)^{1/p} \; ; \; x, y \in X$$

Merupakan ruang metrik lengkap.

Selanjutnya akan dijelaskan tentang pelengkap dari ruang metrik.

Definisi 2.17. (Shirali & Vasudeva, 2006) *diberikan sebarang ruang metrik* (X, d)*. Ruang metrik lengkap* (X^*, d^*) *disebut* ***pelengkap*** *dari* (X, d) *jika*

(i) X adalah subruang dari X^*;

(ii) Setiap titik di X merupakan limit dari suatu barisan di X.

Definisi 2.18. (Shirali & Vasudeva, 2006)

Diberikan (X, d) *dan* (X', d') *dua ruang metrik. Pemetaan* f *dari* X *ke* X' *disebut isometri jika*

$$d'\big(f(x), f(y)\big) = d(x, y).$$

Teorema 2.19. (Shirali & Vasudeva, 2006)

Setiap ruang metrik punya pelengkap dan sebarang dua pelengkap isometri satu sama lain.

Bukti.

Ambil sebarang ruang metrik (X, d) dan $\hat{X}$ adalah himpunan semua barisan Cauchy di X. Lalu didefinisikan dua barisan Cauchy (x_n) dan (y_n) di X ekuivalen jika $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$ sehingga dapat ditulis $(x_n)\sim(y_n)$. Akan ditunjukkan bahwa ekuivalensi tersebut terbukti reflektif, simetris, dan transitif di $\hat{X}$.

- Reflektif ($(x_n)\sim(x_n)$)

  $d(x_n, x_n) = 0$ untuk setiap n, jadi $\lim_{n\to\infty}(x_n, x_n) = 0$

- Simetris ($(x_n)\sim(y_n) = (y_n)\sim(x_n)$)

  Jika $(x_n)\sim(y_n)$ maka $\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = 0$, karena $d(x_n, y_n) = d(y_n, x_n)$ untuk setiap n, maka $\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = 0$, sehingga $(y_n)\sim(x_n)$

- Transitif (Jika $(x_n)\sim(y_n)$ dan $(y_n)\sim(x_n)$ maka $\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = 0$ dan $\lim_{n\to\infty}(y_n, z_n) = 0$)

Akan ditunjukkan bahwa $\lim_{n\to\infty}(x_n, z_n) = 0$. Karena

$$0 \leq d(x_n, z_n) \leq d(x_n, y_n) + d(y_n, z_n)$$

Untuk setiap n, sehingga

$$0 \leq \lim_{n\to\infty}(x_n, z_n) \leq \lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) + \lim_{n\to\infty}(y_n, z_n) = 0,$$

2.1.4 Ruang Metrik Diperumum

Pada subbab ini akan dijelaskan definisi dari konsep ruang G-metrik

Definisi 2.20. (Hammad et al., 2023)

Diberikan himpunan tak kosong X, dan diberikan $G: X \times X \times X \to [0, \infty)$, merupakan fungsi yang memuhi kondisi

G-1) $G(x, y, z) = 0$ *jika* $x = y = z$;

G-2) $0 < G(x, x, y)$; *untuk setiap* $x, y \in X$, *jika* $x \neq y$;

G-3) $G(x, x, y) \leq G(x, y, z)$, *untuk setiap* $x, y, z \in X$, *jika* $z \neq y$;

G-4) $G(x, y, z) = G\big(p(x, y, z)\big)$ *(simetri untuk ketiga variabel), di mana p merupakan fungsi permutasi;*

G-5) $G(x, y, z) \leq G(x, a, a) + G(a, y, z)$, *untuk setiap* $x, y, z, a \in X$, *(ketaksamaan segiempat*).

*Fungsi G disebut **metrik diperumum** atau lebih singkat disebut **G-metrik** dan pasangan (X, G) disebut **ruang metrik diperumum** atau **ruang G-metrik**.*

Untuk lebih memahami konsep tersebut, berikut ini akan diberikan salah satu contoh dari ruang G-metrik.

Contoh 2.21. (Hammad et al., 2023)

Diberikan $X = [0, \infty)$ dengan $G: X \times X \times X \to [0, \infty)$ yang didefinisikan dengan $G(x, y, z) = d(x, y) + d(y, z) + d(z, x), \forall x, y, z \in X$ dan d didefinisikan dengan $d(x, y) = |x - y|$ yang memenuhi sifat-sifat metrik.

G merupakan G-metrik.

Bukti.

Akan dibuktikan G memenuhi semua syarat G-metrik.

Jelas bahwa G1-G4 terpenuhi

Untuk G5, ambil sembarang $a \in X$, maka

$$\begin{aligned}
G(x,y,z) &= d(x,y) + d(y,z) + d(z+x) \\
&\leq d(x,a) + d(a,y) + d(y,z) + d(z,a) + d(a,x) \\
&= d(x,a) + d(a,y) + d(y,z) + d(z,a) + d(a,x) + d(a,a) \\
&= \big(d(x,a) + d(a,a) + d(a+x)\big) \\
&\quad +\big(d(a,y) + d(y,z) + d(z+a)\big) \\
&= G(x,a,a) + G(a,y,z)
\end{aligned}$$

Kemudian, akan didefinisikan juga bola pada ruang G-metrik sebagai berikut.

Definisi 2.22. (Kusumaningati et al., 2023)

Diberikan ruang G-metrik (X,G) maka untuk $x_0 \in X$, $r > 0$, ***bola-G*** *dengan pusat x_0 dan jari-jari r didefinisikan dengan*

$$B_G(x_0,r) = \{y \in X : G(x_0,y,y) < r\}.$$

Untuk lebih memperjelas definisi tersebut, berikutnya akan diberikan contoh dari bola-G dengan menggunakan contoh G-metrik yang sudah dibuktikan sebelumnya.

Contoh 2.23.

Jika dipilih $x_0 = 0$, dan $r = \frac{1}{2}$, dengan didefinisikan ruang G-metrik (X,G) dan $G(x,y,z) = d(x,y) + d(y,z) + d(z,x), \forall x,y,z \in X$ dan $d(x,y) = |x-y|$, maka dari bola-G $B_G\left(0,\frac{1}{2}\right)$, didapatkan

$$B_G\left(0, \frac{1}{2}\right) = \left\{y \in X: G(0, y, y) < \frac{1}{2}\right\}$$

$$G(0, y, y) < \frac{1}{2}$$

$$d(0, y) + d(y, y) + d(y, 0) < \frac{1}{2}$$

Berdasarkan syarat metrik M-2) dan M-3) didapatkan

$$d(0, y) + 0 + d(0, y) < \frac{1}{2}$$

$$2d(0, y) < \frac{1}{2}$$

$$d(0, y) < \frac{1}{2} : 2$$

$$d(0, y) < \frac{1}{4}$$

$$|0 - y| < \frac{1}{4}$$

$$-\frac{1}{4} < 0 - y < \frac{1}{4}$$

$$-\frac{1}{4} < -y < \frac{1}{4}$$

$$-\frac{1}{4} < y < \frac{1}{4}$$

sehingga didapatkan bola-G $B_G\left(0, \frac{1}{2}\right)$ adalah interval terbuka $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

2.2 Kajian KeIslaman

Secara bahasa, Ikhtiar artinya pencarian hasil yang lebih baik. Secara etimologi, ikhtiar artinya memilih pilihan yang terbaik Secara umum, ikhtiar adalah usaha yang dilakukan secara sungguh-sungguh oleh manusia untuk meraih apa yang diinginkannya. Usaha yang dilakukan ini merupakan usaha aktif dalam memenuhi segala aspek kehidupannya dan bukan hanya berdiam diri dan berpasrah dengan apa yang sedang terjadi, sehingga memperoleh keberhasilan baik di dunia maupun di akhirat (Hakim et al., 2023).

Dalam al-Qur'an terdapat beberapa ayat yang menjelaskan perintah Allah SWT. kepada manusia untuk berikhtiar, salah satunya ada pada surat Ar-Ra'du ayat ke 11 sebagai berikut.

لَهُۥ مُعَقِّبَٰتٌ مِّنۢ بَيۡنِ يَدَيۡهِ وَمِنۡ خَلۡفِهِۦ يَحۡفَظُونَهُۥ مِنۡ أَمۡرِ ٱللَّهِۗ إِنَّ ٱللَّهَ لَا يُغَيِّرُ مَا بِقَوۡمٍ حَتَّىٰ يُغَيِّرُواْ مَا بِأَنفُسِهِمۡۗ
وَإِذَآ أَرَادَ ٱللَّهُ بِقَوۡمه سُوٓءًا فَلَا مَرَدَّ لَهُۥۚ وَمَا لَهُم مِّن دُونِهِۦ مِن وَالٍ ١١

Artinya:

"*Bagi manusia ada malaikat-malaikat yang selalu mengikutinya bergiliran, di muka dan di belakangnya, mereka menjaganya atas perintah Allah. Sesungguhnya Allah tidak merubah keadaan sesuatu kaum sehingga mereka merubah keadaan yang ada pada diri mereka sendiri. Dan apabila Allah menghendaki keburukan terhadap sesuatu kaum, maka tak ada yang dapat menolaknya; dan sekali-kali tak ada pelindung bagi mereka selain Dia.*" *(QS. Ar-Ra'du/13:11).*

Selain pada ayat tersebut, dalam kitab hadits yang disusun oleh Abdul Baqi pada salah satu hadits nabi lebih tepatnya nomor 1695 yang diriwayatkan oleh Bukhori dan Muslim juga disebutkan konsep ikhtiar yang diperintahkan kepada manusia untuk mendekat kepada Allah SWT. dan menggapai surga-Nya (Baqi, 2017).

عَنْ أَبِي عَبْدِ الرَّحْمَنِ عَبْدِ اللهِ بنِ مَسْعُوْدٍ رَضِيَ اللهُ عَنْهُ قَالَ : حَدَّثنَا رَسُوْلُ اللهِ صَلَّى اللهُ عليه وسلم وَهُوَ الصَّادِقُ الْمَصْدُوْق : إِنَّ أَحَدَكُمْ يُجْمَعُ خَلْقُهُ فِي بَطْنِ أُمِّهِ أَرْبَعِيْنَ يوماً نُطْفَةً, ثُمَّ يَكُوْنُ عَلَقَةًمِثْلَ ذَلِكَ, ثُمَّ يَكُوْنُ مُضْغَةً مِثْلَ ذَلِكَ, ثُمَّ يرُسَلُ إِلَيْهِ الْمَلَكُ فَيَنْفُخُ فِيْهِ الرُّوْحَ, وَيؤُمَرُ بِأَرْبَعِ كَلِمَاتٍ: بِكَتْبِ رِزْقِهِ وَأَجَلِهِ وَعَمَلِهِ وَشَقِي أَوْ سَعِيْدٌ. فَوَاللهِ الَّذِي لا إِلَهَ غيْرُه إِنَّ أَحَدَكُمْ لَيَعْمَلُ بِعَمَلِ أَهْلِ الْجَنَّةِ حَتَّى مَا يَكُوْنُ بينَهُ وَبينَهَا إِلّاَ ذِرَاعٌ فَيَسْبِقُ عَلَيْهِ الْكِتَابُ فَيَعْمَلُ بِعَمَلِ أَهْلِ النَّارِفَيَدْخُلُهَا, وَإِنَّ أَحَدَكُمْ لَيَعْمَلُ بِعَمَلِ أَهْلِ النَّارِ حَتَّى مَا يَكُوْنُ بينَهُ وَبينَهَا إِلَّا ذِرَاعٌ فَيَسْبِقُ عَلَيْهِ الْكِتَابُ فَيَعْمَلُ بِعَمَلِ أَهْلِ الْجَنَّةِ (روا البخاري ومسلم)

Artinya:

"Dari Abu Abdurrahman Abdullah bin Mas'ud ra, beliau berkata: Rasulullah SAW. menyampaikan kepada kami dan beliau adalah orang yang benar dan dibenarkan: Sesungguhnya setiap kalian dikumpulkan penciptaannya di perut ibunya sebagai setetes mani selama empat puluh hari, kemudian berubah menjadi setetes darah selama empat puluh hari, kemudian menjadi segumpal daging selama

empat puluh hari. Kemudian diutus kepadanya seorang malaikat lalu ditiupkan padanya ruh dan dia diperintahkan untuk menetapkan empat perkara: menetapkan rizkinya, ajalnya, amalnya dan kesengsaraan atau kebahagiaannya. Demi Allah SWT. yang tidak ada Tuhan selain-Nya, sesungguhnya di antara kalian ada yang melakukan perbuatan ahli surga hingga jarak antara dirinya dan surga tinggal sehasta akan tetapi telah ditetapkan baginya ketentuan, dia melakukan perbuatan ahli neraka maka masuklah dia ke dalam neraka. sesungguhnya di antara kalian ada yang melakukan perbuatan ahli neraka hingga jarak antara dirinya dan neraka tinggal sehasta akan tetapi telah ditetapkan baginya ketentuan, dia melakukan perbuatan ahli surga maka masuklah dia ke dalam surga." (Riwayat Bukhori dan Muslim).

Pada kutipan ayat beserta hadits tersebut menggambarkan barisan Cauchy sebagaimana setiap usaha yang dilakukan oleh manusia untuk mendekat dan memperoleh sesuatu yang diinginkannya. Selain itu, ayat tersebut juga berisi penggambaran barisan konvergen sebagaimana Allah SWT. membalas usaha yang dilakukan manusia tersebut dengan balasan yang sesuai. Hal ini serupa dengan konsep ruang lengkap di mana setiap barisan Cauchy konvergen ke suatu titik di ruang yang sama di mana penggambaran ini sesuai dengan penjelasan sebelumnya yaitu setiap usaha yang dilakukan manusia untuk mendapatkan sesuatu akan dibalas oleh Allah SWT. dengan balasan yang sesuai.

Imam Al-Ghazali menjelaskan konsep *khauf* dan *raja'* sebagai Ikhtiar yang ditempuh manusia dalam memperoleh sesuatu khususnya untuk mendekatkan dirinya kepada Allah SWT. *Khauf* merupakan rasa takut yang muncul dari diri seseorang karena telah melakukan larangan Allah SWT. Dengan tertanamnya rasa *khauf* manusia akan lebih menyadari bahwa hanya Allah SWT satu-satunya Dzat yang Maha kuasa dan tiada yang lain selain-Nya. Dengan *khauf* ini, manusia akan sadar untuk berhati-hati dalam segala tindakannya dengan tujuan untuk tidak terjerumus dalam perbuatan dosa dan maksiat. Sedangkan *raja'* merupakan harapan berlebih yang perlu dilakukan untuk memperkuat hati dalam ketaatan dan ibadah kepada Allah SWT. serta untuk menghadapi segala macam cobaan. *Raja'* dapat menimbulkan rasa bahagia dan membangkitkan semangat. Imam Al-Ghazali berpendapat bahwa *raja'* sangat diperlukan untuk memotivasi hati agar senantiasa taat dan konsisten dalam beribadah untuk membuat manusia lebih mudah dalam menghadapi segala macam kesulitan (Utami et al., 2023).

Dari penjelasan tersebut, konsep *khauf* yang mengajarkan untuk senantiasa memiliki rasa takut kepada Allah SWT. dalam melakukan segala tindakan dengan tujuan untuk semakin dekat kepada-Nya dapat disamakan dengan konsep barisan Cauchy yang sudah dijelaskan sebelumnya. Sedangkan konsep *raja'* yang mengajarkan untuk selalu memiliki harapan yang kuat untuk memperoleh balasan dari Allah SWT serupa dengan konsep barisan konvergen yang juga sudah dijelaskan sebelumnya. Kedua konsep tersebut jika dilaksanakan akan dikatakan lengkap karena ketakutan manusia kepada Allah SWT. yang mendekatkan kepada-Nya harus disertai dengan harapan kuat untuk mendapat balasan dari-Nya.

Konsep *khauf* dan *raja'* ini memiliki beberapa esensi seperti takut yang menjadi dorongan untuk menghindari maksiat dan menjauhkan dari segala sesuatu yang haram. Takut juga dapat menumbuhkan sifat santun dan tawadhu. Selain itu, harapan dapat memotivasi seseorang untuk taat kepada Allah SWT. dengan disertai amal dan kerja keras. Harapan juga hanya bagi orang yang takut, bukan bagi orang-orang yang merasa aman. Menurut imam Al-Ghazali, konsep tentang *khauf* dan *raja'* mengandung beberapa nilai Pendidikan akhlak seperti senantiasa menjauhi larangan Allah SWT. dengan alasan takut akan segala murka-Nya, senantiasa melakukan kebaikan dengan rasa gembira, tidak mudah berputus asa, serta menjadi insan yang bertawakkal kepada Allah SWT (Utami et al., 2023).

Umat islam diperintahkan untuk melaksanakan kedua konsep tersebut sebagai penanda optimisme setiap muslim dalam menjalani kehidupan di dunia ini. Sifat optimis ini dilandasi dengan adanya keimanan yang kuat dari setiap individu kepada Allah SWT. sebagai syarat mutlak untuk menumbuhkannya (Wahidin, 2023).

2.3 Kajian Topik Dengan Teori Pendukung

Sebagaimana ruang metrik dasar yang sudah diketahui sebelumnya, pada ruang G-metrik juga terdapat konsep barisan Cauchy dan barisan konvergen. Sehingga dapat didefiniskan juga ruang G-metrik lengkap. Pada subbab ini, akan dijelaskan definisi dari barisan Cauchy dan barisan konvergen pada ruang G-metrik.

Definisi 2.24. (Kusumaningati et al., 2023)

Diberikan (X, G) *ruang* G*-Metrik, maka barisan* $(x_n) \subseteq X$ *disebut* G*-Cauchy jika untuk setiap* $\varepsilon > 0$ *terdapat* $N \in \mathbb{N}$ *sedemikian hingga* $G(x_n, x_m, x_l) < \varepsilon$ *untuk setiap* $n, m, l \geq N$.

Untuk lebih memahaminya, akan diberikan contoh dari barisan G-konvergen.

Contoh. 2.25.

Diberikan ruang G-metrik $(\mathbb{R}, G)$ dengan $G(x, y, z) = |x - y| + |y - z| + |z - x|$ yang sudah dibuktikan pada contoh 2.21., barisan $(x_n) = \frac{1}{n}$ merupakan barisan G-konvergen ke 0 di ruang G-metrik $(\mathbb{R}, G)$.

Bukti.

Jika (x_n) G-konvergen ke 0, maka jika diberikan $\varepsilon > 0$, akan dicari N sedemikian hingga $G(x_n, x_m, 0) = |x_n - x_m| + |x_m - 0| + |0 - x_n| < \varepsilon$.

Karena $n, m \geq N$, maka $\frac{1}{n}, \frac{1}{m} \leq \frac{1}{N}$

$$\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| + \left|\frac{1}{m} - 0\right| + \left|0 - \frac{1}{n}\right| = \left|\frac{m-n}{nm}\right| + \left|\frac{1}{m}\right| + \left|-\frac{1}{n}\right|$$

$$\leq \left|\frac{m}{mn}\right| + \left|\frac{n}{mn}\right| + \left|\frac{1}{m}\right| + \left|\frac{1}{n}\right|$$

$$= \left|\frac{1}{n}\right| + \left|\frac{1}{m}\right| + \left|\frac{1}{m}\right| + \left|\frac{1}{n}\right|$$

$$= 2\left(\left|\frac{1}{n}\right| + \left|\frac{1}{m}\right|\right)$$

$$\leq 2\left(\frac{1}{N} + \frac{1}{N}\right)$$

$$= \frac{4}{N};$$

sehingga dipilih

$$\frac{4}{N} < \varepsilon;$$

atau dapat kita pilih

$$N > \frac{4}{\varepsilon};$$

Maka untuk sebarang $\varepsilon > 0$ dan untuk setiap $n, m \geq N$, didapatkan $\frac{1}{n}, \frac{1}{m} \leq \frac{1}{N}$ yang menyebabkan

$$\begin{aligned}
G(x_n, x_m, 0) &= |x_n - x_m| + |x_m - 0| + |0 - x_n| \\
&= \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| + \left|\frac{1}{m} - 0\right| + \left|0 - \frac{1}{n}\right| \\
&= \left|\frac{m-n}{nm}\right| + \left|\frac{1}{m}\right| + \left|-\frac{1}{n}\right| \\
&\leq \left|\frac{m}{mn}\right| + \left|\frac{n}{mn}\right| + \left|\frac{1}{m}\right| + \left|\frac{1}{n}\right| \\
&= \left|\frac{1}{n}\right| + \left|\frac{1}{m}\right| + \left|\frac{1}{m}\right| + \left|\frac{1}{n}\right| \\
&= 2\left(\left|\frac{1}{n}\right| + \left|\frac{1}{m}\right|\right) \\
&\leq 2\left(\frac{1}{N} + \frac{1}{N}\right) \\
&= \frac{4}{N} \\
&< \varepsilon;
\end{aligned}$$

sehingga terbukti bahwa $(x_n) = \frac{1}{n}$ merupakan barisan G-konvergen ke 0 di ruang G-metrik $(\mathbb{R}, G)$ dengan $G(x, y, z) = |x - y| + |y - z| + |z - x|$.

Definisi 2.26. (Kamal & Rizk, 2023)

Diberikan (X, G) ruang G-Metrik, maka barisan $(x_n) \subseteq X$ disebut G-konvergen ke titik $x \in X$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $G(x_n, x_m, x) < \varepsilon$ untuk setiap $n, m \geq N$.

Untuk lebih memahaminya, akan diberikan contoh dari barisan G-Cauchy.

Contoh 2.27.

Diberikan ruang G-metrik $(\mathbb{R}, G)$ dengan $G(x, y, z) = |x - y| + |y - z| + |z - x|$ yang sudah dibuktikan pada contoh 2.21., barisan $(x_n) = \frac{1}{2^n}$ merupakan barisan G-Cauchy di ruang G-metrik $(\mathbb{R}, G)$.

Bukti.

Jika (x_n) G-Cauchy, maka jika diberikan $\varepsilon > 0$, akan dicari N sedemikian hingga $G(x_n, x_m, x_l\ ) = |x_n - x_m| + |x_m - x_l| + |x_l - x_n| < \varepsilon$.

Karena $n, m, l \geq N$, maka $2^n, 2^m, 2^l \geq 2^N$, sehingga $\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^m}, \frac{1}{2^l} \leq \frac{1}{2^N}$. Kemudian akan dicari N;

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^m}\right| + \left|\frac{1}{2^m} - \frac{1}{2^l}\right| + \left|\frac{1}{2^l} - \frac{1}{2^n}\right| &= \left|\frac{2^m - 2^n}{2^{n+m}}\right| + \left|\frac{2^l - 2^m}{2^{m+l}}\right| + \left|\frac{2^n - 2^l}{2^{m+l}}\right| \\
&\leq \left|\frac{2^m}{2^{n+m}}\right| + \left|\frac{2^n}{2^{n+m}}\right| + \left|\frac{2^l}{2^{m+l}}\right| + \left|\frac{2^m}{2^{m+l}}\right| \\
&\quad + \left|\frac{2^n}{2^{l+n}}\right| + \left|\frac{2^l}{2^{l+n}}\right| \\
&\leq \left|\frac{1}{2^n}\right| + \left|\frac{1}{2^m}\right| + \left|\frac{1}{2^m}\right| + \left|\frac{1}{2^l}\right| + \left|\frac{1}{2^l}\right| + \left|\frac{1}{2^n}\right| \\
&= 2\left(\left|\frac{1}{2^n}\right| + \left|\frac{1}{2^m}\right| + \left|\frac{1}{2^l}\right|\right) \\
&\leq 2\left(\frac{1}{2^N} + \frac{1}{2^N} + \frac{1}{2^N}\right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{6}{2^N};$$

sehingga dipilih

$$\frac{6}{2^N} < \varepsilon;$$

atau dapat kita pilih

$$2^N > \frac{6}{\varepsilon};$$

$$N > 2\log\frac{6}{\varepsilon}$$

Maka untuk sebarang $\varepsilon > 0$ dan untuk setiap $n, m, l \geq N$, didapatkan $\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^m}, \frac{1}{2^l} \leq \frac{1}{2^N}$ yang menyebabkan

$$\begin{aligned}
G(x_n, x_m, 0) &= |x_n - x_m| + |x_m - x_l| + |x_l - x_n| \\
&= \left|\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^m}\right| + \left|\frac{1}{2^m} - \frac{1}{2^l}\right| + \left|\frac{1}{2^l} - \frac{1}{2^n}\right| \\
&= \left|\frac{2^m - 2^n}{2^{n+m}}\right| + \left|\frac{2^l - 2^m}{2^{m+l}}\right| + \left|\frac{2^n - 2^l}{2^{m+l}}\right| \\
&\leq \left|\frac{2^m}{2^{n+m}}\right| + \left|\frac{2^n}{2^{n+m}}\right| + \left|\frac{2^l}{2^{m+l}}\right| + \left|\frac{2^m}{2^{m+l}}\right| + \left|\frac{2^n}{2^{l+n}}\right| + \left|\frac{2^l}{2^{l+n}}\right| \\
&\leq \left|\frac{1}{2^n}\right| + \left|\frac{1}{2^m}\right| + \left|\frac{1}{2^m}\right| + \left|\frac{1}{2^l}\right| + \left|\frac{1}{2^l}\right| + \left|\frac{1}{2^n}\right| \\
&= 2\left(\left|\frac{1}{2^n}\right| + \left|\frac{1}{2^m}\right| + \left|\frac{1}{2^l}\right|\right) \\
&\leq 2\left(\frac{1}{2^N} + \frac{1}{2^N} + \frac{1}{2^N}\right) \\
&= \frac{6}{2^N} \\
&< \varepsilon;
\end{aligned}$$

sehingga terbukti bahwa $(x_n) = \frac{1}{2^n}$ merupakan barisan G-Cauchy di ruang G-metrik $(\mathbb{R}, G)$ dengan $G(x, y, z) = |x - y| + |y - z| + |z - x|$.

BAB III

METODE PENELITIAN

3.1 Jenis Penelitian

Pada tugas akhir ini, metode yang digunakan penulis adalah metode penelitian yang bersifat kualitatif. Metode ini adalah mengumpulkan berbagai referensi yang berhubungan dengan topik penelitian yang kemudian diolah sebagai alat pendukung dalam menyelesaikan penelitian. Pada penelitian ini, topik yang akan dibahas adalah sifat-sifat kekonvergenan dan kelengkapan ruang metrik diperumum.

3.2 Pra Penelitian

Sebelum pengerjaan penelitian, penulis melakukan pencarian sekaligus mengumpulkan rujukan-rujukan dari penelitian-penelitian yang sudah dilakukan sebelumnya dan berkaitan dengan penelitian yang akan penulis kerjakan. Rujukan utama yang penulis gunakan adalah jurnal artikel yang disusun oleh Hammad, Alshehri, dan Shehata (Hammad et al., 2023).

3.3 Tahapan Penelitian

Metrik diperumum atau G-metrik merupakan perumuman dari fungsi jarak (metrik) yang sudah diketahui sebelumnya. Ruang G-metrik memiliki persamaan dan perbedaan dengan ruang metrik biasa. Untuk menunjukkan persamaan dan perbedaan tersebut, akan dilakukan beberapa tahap penelitian. Tahapan-tahapan tersebut antara lain.

1. Mengidentifikasi ruang G-metrik, barisan G-konvergen, dan barisan G-cauchy sebagai objek penelitian.

2. Mengumpulkan topik-topik yang berkaitan dengan penelitian sebagai pendukung bagi penulis untuk menyelesaikan penelitian seperti ruang G-metrik, bola di ruang G-metrik, barisan G-konvergen, dan barisan G-Cauchy.
3. Membuktikan apakah setiap ruang metrik merupakan ruang G-metrik dan sebaliknya, membuktikan apakah setiap barisan konvergen di ruang metrik merupakan barisan G-konvergen, serta membuktikan apakah setiap barisan Cauchy di ruang metrik merupakan barisan G-Cauchy.

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

Sebelum membuktikan sifat-sifat dari barisan G-konvergen dan G-Cauchy, terlebih dahulu akan dijelaskan kembali mengenai definisi dari ruang G-metrik beserta pembuktian dari teorema-teorema keterkaitan antara ruang metrik dengan ruang G-metrik..

Definisi 2.20. (Hammad et al., 2023)

Diberikan himpunan tak kosong X, *dan diberikan* $G: X \times X \times X \to [0, \infty)$, *merupakan fungsi yang memuhi kondisi:*

G-1) $G(x, y, z) = 0$ *jika* $x = y = z$;

G-2) $0 < G(x, x, y)$; *untuk setiap* $x, y \in X$, *jika* $x \neq y$;

G-3) $G(x, x, y) \leq G(x, y, z)$, *untuk setiap* $x, y, z \in X$, *jika* $z \neq y$;

G-4) $G(x, y, z) = G\big(p(x, y, z)\big)$ *(simetri untuk ketiga variabel), di mana* p *merupakan fungsi permutasi;*

G-5) $G(x, y, z) \leq G(x, a, a) + G(a, y, z)$, *untuk setiap* $x, y, z, a \in X$, *(ketaksamaan segiempat*).

Fungsi G disebut metrik diperumum atau lebih singkat disebut **G-metrik** dan pasangan (X, G) disebut ruang metrik diperumum atau **ruang G-metrik**.

Lemma 4.1. (Hammad et al., 2023)

Diberikan ruang G-metrik (X, G), maka ketaksamaan berikut berlaku

$$G(x, x, y) \leq 2G(x, y, y), untuk\ setiap\ x, y \in X.$$

Bukti.

Berdasarkan G4, diperoleh

$$G(x,x,y) = G(x,y,x)$$

Dengan menggunakan G5) (ketaksamaan segiempat), diperoleh

$$\begin{aligned} G(x,y,x) &\leq G(x,y,y) + G(y,y,x) \\ &= G(x,y,y) + G(x,y,y) \\ &= 2G(x,y,y) \end{aligned}$$

Berikutnya akan ditunjukkan hubungan antara ruang metrik dan ruang G-metrik. Pembuktian akan dilakukan dengan cara membuktikan apakah setiap ruang metrik merupakan ruang G-metrik dan akan dilakukan juga pembuktian sebaliknya.

Akibat 4.2. (Jakfar et al., 2019)

Setiap ruang metrik adalah ruang G-metrik.

Bukti.

Ambil sebarang ruang metrik (X,d) dengan $d(x,y)$ memenuhi semua syarat metrik. Akan dibuktikan $d(x,y)$ memenuhi syarat-syarat G-metrik dengan mengambil $x,y,z,a \in X$.

G-1) Jika diambil $z = y$, maka:

(⇒) untuk $d(x,y) = 0$, maka $x = y = z$, sehingga $G(x,y,z) = 0$;

(⇐) untuk $x = y = z$ maka $d(x,y) = G(x,y,z) = 0$;

G-2) Berdasarkan definisi dari metrik yaitu $d(x,y) > 0$ jika $x \neq y$, maka menyebabkan juga $G(x,x,y) > 0$;

G-3) Jika $y \neq z$, maka:

- untuk $x = y$, berdasarkan syarat G-1) dan G-2) jelas bahwa $G(x,x,y) < G(x,y,z)$;
- untuk $x = z \neq y$, berdasarkan syarat G-4) jelas bahwa $G(x,x,y) = G(x,y,x) = G(x,y,z)$;

sehingga terbukti bahwa $G(x,x,y) \leq G(x,y,z)$ jika $y \neq z$;

G-4) Dengan menggunakan syarat M-3) yaitu $d(x,y) = d(y,x)$, maka untuk $z = x$, $z = y$, ataupun $z \neq x$ dan $z \neq y$ menyebabkan $G\big(p(x,y,z)\big)$;

G-5) Dengan menggunakan syarat M-4) (Ketaksamaan segitiga) yaitu $d(x,y) \leq d(x,a) + d(a,y)$, jika diambil sebarang variabel $z \in X$, maka

$$G(x,y,z) \leq G(x,a,z) + G(a,y,z);$$

jika kita misalkan $G(x,y,z) \leq d(x,y) + d(y,z), G(x,a,z) \leq d(x,a) + d(a,z)$, dan $G(a,y,z) \leq d(a,y) + d(y,z)$, maka

$$G(x,y,z) \leq d(x,a) + d(a,z) + d(a,y) + d(y,z);$$

Jelas bahwa

$$d(x,a) + d(a,y) + d(y,z) \leq d(x,a) + d(a,z) + d(a,y) + d(y,z);$$

dan

$$d(x,a) + d(a,y) + d(y,z) = d(x,a) + d(a,a) + d(a,y) + d(y,z);$$

Dengan menggunakan syarat M-4), maka

$$d(x,y) + d(y,z) \leq d(x,a) + d(a,y) + d(y,z);$$

dari ketaksamaan-ketaksamaan di atas, dapat disederhanakan menjadi

$$d(x,y) + d(y,z) \leq d(x,a) + d(a,a) + d(a,y) + d(y,z)$$

dari pemisalan yang diberikan sebelumnya, ketaksamaan tersebut dapat dituliskan dengan

$$G(x,y,z) \leq G(x,a,a) + G(a,y,z);$$

Karena kelima syarat G-metrik terbukti maka jelas bahwa setiap ruang metrik merupakan ruang G-metrik.

Kemudian akan dilakukan pembuktian bahwa terdapat ruang G-metrik yang bukan merupakan ruang metrik

Akibat 4.3.

Terdapat ruang G-metrik yang bukan merupakan ruang metrik.

Bukti.

Dengan menggunakan pembuktian kontradiksi, akan dibuktikan bahwa setiap ruang G-metrik adalah ruang metrik.

M-1) Berdasarkan definisi dari ruang G-metrik, fungsi $G(x, y, z) \geq 0$, sehingga juga $d(x, y) \geq 0$;

M-2) Berdasarkan syarat G-1) maka jelas $G(x, y, z) = 0$ menyebabkan juga $d(x, y) = 0$;

M-3) Berdasarkan syarat G-4) maka jelas bahwa $G(x, y, z) = G(y, x, z)$;

M-4) Jika diberikan ruang G-metrik dengan fungsi G-metrik

$$G(x, y, z) = \begin{cases} 0, jika\ x = y = z; \\ 1, jika\ x = y \neq z; \\ 1, jika\ x \neq y = z; \\ 1, jika\ x = z \neq y; \\ 3, untuk\ lainnya; \end{cases}$$

Akan dibuktikan ketaksamaan segitiga

$$G(x, y, z) \leq G(x, a, z) + G(a, y, z);$$

Jika $a = z$, dan $x \neq y \neq z$, maka diperoleh

$$3 \leq 1 + 1$$

$$3 \leq 2;$$

sehingga dengan fungsi G-metrik yang sudah diberikan sebelumnya, pernyataan $G(x, y, z) \leq G(x, a, z) + G(a, y, z)$ bernilai salah sehingga tidak terbukti bahwa setiap ruang G-metrik adalah ruang metrik, atau dapat dikatakan bahwa terdapat ruang G-metrik yang bukan ruang metrik.

Kemudian akan dilakukan pembuktian apakah setiap barisan konvergen di ruang metrik merupakan barisan G-konvergen dan apakah setiap barisan Cauchy di ruang metrik merupakan barisan G-Cauchy.

4.1 Bukti Sifat-Sifat Barisan G-Konvergen

Definisi 2.24 (Kamal & Rizk, 2023)

Diberikan (X, G) ruang G-Metrik, maka barisan $(x_n) \subseteq X$ disebut G-konvergen ke titik $x \in X$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $G(x_n, x_m, x) < \varepsilon$ untuk setiap $n, m \geq N$.

Selanjutnya, akan dibuktikan beberapa teorema yang berkaitan dengan kekonvergenan pada ruang G-metrik.

Proposisi 4.4. (Hammad et al., 2023)

Diberikan ruang G-metrik (X, G), maka pernyataan-pernyataan berikut ini ekuivalen:

(i) (x_n) G-konvergen ke x;

(ii) $G(x_n, x_n, x) \to 0$ saat $n \to \infty$;

(iii) $G(x_n, x, x) \to 0$ saat $n \to \infty$;

(iv) $G(x, x_n, x_m) \to 0$ saat $n, m \to \infty$.

Bukti.

- (i) $\Rightarrow$ (ii)

  Karena (x_n) G-konvergen maka untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $N \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n, m \geq N$ berlaku

  $$G(x_n, x_m, x) < \varepsilon.$$

  Jika dipilih $m = n$, maka

  $$G(x_n, x_n, x) < \varepsilon.$$

Berdasarkan definisi dari G-metrik, maka

$$G(x_n, x_n, x) \geq 0;$$

sehingga dengan menggunakan definisi dari nilai mutlak didapatkan

$$G(x_n, x_n, x) = |G(x_n, x_n, x)| < \varepsilon.$$

Berdasarkan ketaksamaan tersebut, didapatkan

$$|G(x_n, x_n, x)| \quad < \varepsilon;$$

$$|G(x_n, x_n, x) - 0| < \varepsilon.$$

Berdasarkan definisi barisan konvergen maka saat $n \geq N$ dan $n \to \infty$, terbukti bahwa

$$G(x_n, x_n, x) \to 0.$$

- (i) ⇒ (iii)

  Karena (x_n) G-konvergen maka untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $N \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n, m \geq N$ berlaku

$$G(x_n, x_m, x) < \varepsilon.$$

  Berdasarkan syarat G4, didapatkan

$$G(x_n, x_m, x) = G(x, x_n, x_m) < \varepsilon.$$

  Dengan menggunakan syarat G3, didapatkan

$$G(x, x, x_n) \leq G(x, x_n, x_m) < \varepsilon.$$

  Dengan menggunakan kembali syarat G4, didapatkan

$$G(x, x, x_n) = G(x_n, x, x) < \varepsilon.$$

  Berdasarkan definisi dari G-metrik dan nilai mutlak, maka

$$G(x_n, x, x) = |G(x_n, x, x)| = |G(x_n, x, x) - 0| < \varepsilon.$$

  sehingga terbukti bahwa $G(x_n, x, x) \to 0$ saat $n \to \infty$.

- (i) ⇒ (iv)

Karena (x_n) G-konvergen maka untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $N \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n, m \geq N$ berlaku

$$G(x_n, x_m, x) < \varepsilon.$$

Berdasarkan definisi dari G-metrik dan nilai mutlak, maka

$$G(x_n, x_m, x) = |G(x_n, x_m, x)| = |G(x_n, x_m, x) - 0| < \varepsilon.$$

Berdasarkan syarat G4 didapatkan

$$|G(x, x_n, x_m) - 0| < \varepsilon.$$

Berdasarkan definisi barisan konvergen, maka saat $n, m \to \infty$, terbukti bahwa

$$G(x, x_n, x_m) \to 0.$$

- (ii) ⇒ (i)

Karena $G(x_n, x_n, x) \to 0$ saat $n \to \infty$, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ berdasarkan definisi barisan konvergen, ada suatu $K \in \mathbb{N}$ sehingga untuk $n \geq K$ berlaku

$$|G(x_n, x_n, x) - 0| \qquad < \tfrac{\varepsilon}{4};$$

$$0 < |G(x_n, x_n, x)| \qquad < \tfrac{\varepsilon}{4}.$$

Berdasarkan syarat G4 didapatkan

$$|G(x_n, x_n, x)| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Berdasarkan syarat G5 didapatkan

$$|G(x, x_n, x)| \leq |G(x, x_n, x_n)| + |G(x_n, x_n, x)| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dari ketakasamaan tersebut didapatkan

$$|G(x, x_n, x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dengan menggunakan kembali syarat G4 didapatkan

$$|G(x, x_n, x)| = |G(x_n, x, x)| = |G(x_n, x, x) - 0| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Jika dipilih m dengan $n \leq m$, berdasarkan definisi barisan konvergen, $G(x_n, x, x) \to 0$ dengan $m \geq n > L$, maka didapatkan

Dari ketaksamaan tersebut didapatkan

$$|G(x_m, x, x) - 0| < \frac{\varepsilon}{2};$$

sehingga

$$|G(x_n, x, x) - 0| + |G(x_m, x, x) - 0| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Dengan menggunakan ketaksamaan segitiga didapatkan

$$\begin{aligned} &|(G(x_n, x, x) - 0) + (G(x_m, x, x) - 0)| \\ &\qquad \leq |G(x_n, x, x) - 0| + |G(x_m, x, x) - 0| < \varepsilon. \end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned} \left|\big(G(x_n, x, x) + G(x_m, x, x)\big) - (0 + 0)\right| &< \varepsilon; \\ \left|\big(G(x_n, x, x) + G(x_m, x, x)\big) - 0\right| &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Berdasarkan syarat G4 maka

$$\left|\big(G(x_n, x, x) + G(x_m, x, x)\big) - 0\right| = \left|\big(G(x_n, x, x) + G(x, x_m, x)\big) - 0\right| < \varepsilon.$$

Berdasarkan syarat G5 maka

$$G(x_n, x_m, x) \leq G(x_n, x, x) + G(x, x_m, x);$$

sehingga

$$|G(x_n, x_m, x) - 0| \leq \left|\big(G(x_n, x, x) + G(x, x_m, x)\big) - 0\right| < \varepsilon.$$

Dari ketaksamaan tersebut diperoleh

$$\begin{aligned} |G(x_n, x_m, x) - 0| &< \varepsilon; \\ |G(x_n, x_m, x)| &< \varepsilon; \end{aligned}$$

Berdasarkan definisi dari G-metrik dan nilai mutlak, didapatkan

$$|G(x_n, x_m, x)| = G(x_n, x_m, x) < \varepsilon;$$

Jadi, (x_n) G-konvergen.

- (ii) ⇒ (iii)

  Karena $G(x_n, x_n, x) \to 0$ saat $n \to \infty$, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ berdasarkan definisi barisan konvergen, ada suatu $K \in \mathbb{N}$ sehingga untuk $n \geq K$ berlaku

$$|G(x_n, x_n, x) - 0| \quad < \frac{\varepsilon}{2};$$

$$0 < |G(x_n, x_n, x)| \quad < \frac{\varepsilon}{2}.$$

  Berdasarkan definisi G-metrik dan nilai mutlak didapatkan

$$0 < G(x_n, x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

  Berdasarkan syarat G4 didapatkan

$$G(x, x_n, x_n) = G(x_n, x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

  Berdasarkan syarat G5 didapatkan

$$G(x, x_n, x) \leq G(x, x_n, x_n) + G(x_n, x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

  Dari ketakasamaan tersebut didapatkan

$$G(x, x_n, x) < \varepsilon.$$

  Dengan menggunakan kembali syarat G4 didapatkan

$$G(x, x_n, x) = G(x_n, x, x) < \varepsilon.$$

  Berdasarkan definisi dari G-metrik dan nilai mutlak didapatkan

$$|G(x_n, x, x)| \quad < \varepsilon;$$

$$|G(x_n, x, x) - 0| < \varepsilon;$$

  sehingga terbukti bahwa $G(x_n, x, x) \to 0$ saat $n \to \infty$.

- (ii) ⇒ (iv)

  Karena $G(x_n, x_n, x) \to 0$ saat $n \to \infty$, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ berdasarkan definisi barisan konvergen, ada suatu $K \in \mathbb{N}$ sehingga untuk $n \geq K$ berlaku

$$|G(x_n, x_n, x) - 0| \quad < \tfrac{\varepsilon}{4};$$

$$0 < |G(x_n, x_n, x)| \quad < \tfrac{\varepsilon}{4}.$$

Berdasarkan syarat G4 didapatkan

$$|G(x_n, x_n, x)| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Berdasarkan syarat G5 didapatkan

$$|G(x, x_n, x)| \leq |G(x, x_n, x_n)| + |G(x_n, x_n, x)| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dari ketakasamaan tersebut didapatkan

$$|G(x, x_n, x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dengan menggunakan kembali syarat G4 didapatkan

$$|G(x, x_n, x)| = |G(x_n, x, x)| = |G(x_n, x, x) - 0| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Jika dipilih m dengan $n \leq m$, berdasarkan definisi barisan konvergen, $G(x_n, x, x) \to 0$ dengan $m \geq n > L$, maka didapatkan

Dari ketaksamaan tersebut didapatkan

$$|G(x_m, x, x) - 0| < \frac{\varepsilon}{2};$$

sehingga

$$|G(x_n, x, x) - 0| + |G(x_m, x, x) - 0| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Dengan menggunakan ketaksamaan segitiga didapatkan

$$|(G(x_n, x, x) - 0) + (G(x_m, x, x) - 0)|$$
$$\leq |G(x_n, x, x) - 0| + |G(x_m, x, x) - 0| < \varepsilon.$$

sehingga

$$\left|\left(G(x_n,x,x)+G(x_m,x,x)\right)-(0+0)\right|<\varepsilon;$$

$$\left|\left(G(x_n,x,x)+G(x_m,x,x)\right)-0\right| \qquad <\varepsilon.$$

Berdasarkan syarat G4 maka

$$\left|\left(G(x_n,x,x)+G(x_m,x,x)\right)-0\right|=\left|\left(G(x_n,x,x)+G(x,x_m,x)\right)-0\right|<\varepsilon.$$

Berdasarkan syarat G5 maka

$$G(x_n,x_m,x)\le G(x_n,x,x)+G(x,x_m,x);$$

sehingga

$$|G(x_n,x_m,x)-0|\le\left|\left(G(x_n,x,x)+G(x,x_m,x)\right)-0\right|<\varepsilon.$$

Dari ketaksamaan tersebut diperoleh

$$|G(x_n,x_m,x)-0|<\varepsilon.$$

Dengan menggunakan kembali syarat G4, didapatkan

$$|G(x_n,x_m,x)-0|=|G(x,x_n,x_m)-0|<\varepsilon.$$

Berdasarkan definisi barisan konvergen, maka saat $n,m\to\infty$, terbukti bahwa

$$G(x,x_n,x_m)\to 0.$$

- (iii) ⇒ (i)

  Karena $G(x_n,x,x)\to 0$ saat $n\to\infty$, maka $\forall\varepsilon>0$ berdasarkan definisi barisan konvergen, ada suatu $L\in\mathbb{N}$ sehingga untuk $n\ge K$ berlaku

$$|G(x_n,x,x)-0| <\tfrac{\varepsilon}{2}.$$

  Jika dipilih m dengan $n\le m$, berdasarkan definisi barisan konvergen, $G(x_n,x,x)\to 0$ dengan $m\ge n>L$, maka didapatkan

  Dari ketaksamaan tersebut didapatkan

$$|G(x_m,x,x)-0|<\frac{\varepsilon}{2};$$

  sehingga

$$|G(x_n, x, x) - 0| + |G(x_m, x, x) - 0| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Dengan menggunakan ketaksamaan segitiga didapatkan

$$\begin{aligned} &|(G(x_n, x, x) - 0) + (G(x_m, x, x) - 0)| \\ &\qquad \leq |G(x_n, x, x) - 0| + |G(x_m, x, x) - 0| < \varepsilon. \end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned} \left|\big(G(x_n, x, x) + G(x_m, x, x)\big) - (0 + 0)\right| &< \varepsilon; \\ \left|\big(G(x_n, x, x) + G(x_m, x, x)\big) - 0\right| &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Berdasarkan syarat G4 maka

$$\left|\big(G(x_n, x, x) + G(x_m, x, x)\big) - 0\right| = \left|\big(G(x_n, x, x) + G(x, x_m, x)\big) - 0\right| < \varepsilon.$$

Berdasarkan syarat G5 maka

$$G(x_n, x_m, x) \leq G(x_n, x, x) + G(x, x_m, x);$$

sehingga

$$|G(x_n, x_m, x) - 0| \leq \left|\big(G(x_n, x, x) + G(x, x_m, x)\big) - 0\right| < \varepsilon.$$

Dari ketaksamaan tersebut diperoleh

$$\begin{aligned} |G(x_n, x_m, x) - 0| &< \varepsilon; \\ |G(x_n, x_m, x)| &< \varepsilon; \end{aligned}$$

Berdasarkan definisi dari G-metrik dan nilai mutlak, didapatkan

$$|G(x_n, x_m, x)| = G(x_n, x_m, x) < \varepsilon;$$

Jadi, (x_n) G-konvergen.

- (iii) $\Rightarrow$ (ii)

  Karena $G(x_n, x, x) \to 0$ saat $n \to \infty$, maka $\forall \varepsilon > 0$ berdasarkan definisi barisan konvergen, ada suatu $L \in \mathbb{N}$ sehingga untuk $n \geq K$ berlaku

$$|G(x_n, x, x) - 0| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Berdasarkan definisi dari G-metrik dan nilai mutlak, maka

$$|G(x_n, x, x) - 0| = |G(x_n, x, x)| = G(x_n, x, x) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dengan menggunakan syarat G4, didapatkan

$$G(x_n, x, x) = G(x, x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Berdasarkan syarat G5, didapatkan

$$G(x_n, x, x_n) \leq G(x_n, x, x) + G(x, x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Dengan menggunakan kembali syarat G4 didapatkan

$$G(x_n, x, x_n) = G(x_n, x_n, x) < \varepsilon.$$

Berdasarkan definisi dari G-metrik dan nilai mutlak, maka

$$G(x_n, x_n, x) = |G(x_n, x_n, x)| = |G(x_n, x_n, x) - 0| < \varepsilon.$$

Berdasarkan definisi barisan konvergen maka saat $n \geq N$ dan $n \to \infty$, terbukti bahwa

$$G(x_n, x_n, x) \to 0.$$

- (iii) $\Rightarrow$ (iv)

Karena $G(x_n, x, x) \to 0$ saat $n \to \infty$, maka $\forall \varepsilon > 0$ berdasarkan definisi barisan konvergen, ada suatu $L \in \mathbb{N}$ sehingga untuk $n \geq K$ berlaku

$$|G(x_n, x, x) - 0| < \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Jika dipilih m dengan $n \leq m$, berdasarkan definisi barisan konvergen, $G(x_n, x, x) \to 0$ dengan $m \geq n > L$, maka didapatkan

Dari ketaksamaan tersebut didapatkan

$$|G(x_m, x, x) - 0| < \frac{\varepsilon}{2};$$

sehingga

$$|G(x_n,x,x)-0|+|G(x_m,x,x)-0|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Dengan menggunakan ketaksamaan segitiga didapatkan

$$\begin{aligned}&|(G(x_n,x,x)-0)+(G(x_m,x,x)-0)|\\&\qquad\leq |G(x_n,x,x)-0|+|G(x_m,x,x)-0|<\varepsilon.\end{aligned}$$

sehingga

$$\left|\big(G(x_n,x,x)+G(x_m,x,x)\big)-(0+0)\right|<\varepsilon;$$

$$\left|\big(G(x_n,x,x)+G(x_m,x,x)\big)-0\right| \qquad <\varepsilon.$$

Berdasarkan syarat G4 maka

$$\left|\big(G(x_n,x,x)+G(x_m,x,x)\big)-0\right|=\left|\big(G(x_n,x,x)+G(x,x_m,x)\big)-0\right|<\varepsilon.$$

Berdasarkan syarat G5 maka

$$G(x_n,x_m,x)\leq G(x_n,x,x)+G(x,x_m,x);$$

sehingga

$$|G(x_n,x_m,x)-0|\leq\left|\big(G(x_n,x,x)+G(x,x_m,x)\big)-0\right|<\varepsilon.$$

Dari ketaksamaan tersebut diperoleh

$$|G(x_n,x_m,x)-0|<\varepsilon.$$

Berdasarkan syarat G4 maka

$$|G(x,x_n,x_m)-0|<\varepsilon.$$

Berdasarkan definisi barisan konvergen, maka saat $n,m\to\infty$, terbukti bahwa

$$G(x,x_n,x_m)\to 0.$$

- (iv) ⇒ (i)

  Karena $G(x,x_n,x_m)\to 0$ saat $n,m\to\infty$, maka berdasarkan definisi barisan konvergen, $\forall\varepsilon>0$ berlaku

$$|G(x,x_n,x_m)-0| \qquad <\varepsilon;$$

$$|G(x, x_n, x_m)| \qquad\qquad < \varepsilon.$$

Berdasarkan definisi dari G-metrik dan nilai mutlak, maka

$$|G(x, x_n, x_m)| = G(x, x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Berdasarkan syarat G4 didapatkan

$$G(x, x_n, x_m) = G(x_n, x_m, x) < \varepsilon.$$

Jadi, (x_n) G-konvergen.

- (iv) ⇒ (ii)

  Karena $G(x, x_n, x_m) \to 0$ saat $n, m \to \infty$, maka berdasarkan definisi barisan konvergen, $\forall \varepsilon > 0$ berlaku

$$|G(x, x_n, x_m) - 0| < \varepsilon.$$

  Berdasarkan syarat G4, didapatkan

$$|G(x, x_n, x_m) - 0| = |G(x_n, x, x_m) - 0| < \varepsilon.$$

  Dengan menggunakan syarat G3, maka

$$|G(x_n, x_n, x) - 0| \leq |G(x_n, x, x_m) - 0| < \varepsilon.$$

  Berdasarkan definisi barisan konvergen maka saat $n \geq N$ dan $n \to \infty$, terbukti bahwa

$$G(x_n, x_n, x) \to 0.$$

- (iv) ⇒ (iii)

  Karena $G(x, x_n, x_m) \to 0$ saat $n, m \to \infty$, maka berdasarkan definisi barisan konvergen, $\forall \varepsilon > 0$ berlaku

$$|G(x, x_n, x_m) - 0| < \varepsilon.$$

  Berdasarkan syarat G3 didapatkan

$$|G(x, x, x_n) - 0| \leq |G(x, x_n, x_m) - 0| < \varepsilon.$$

  Berdasarkan syarat G4 didapatkan

$$|G(x_n, x, x) - 0| < \varepsilon;$$

sehingga terbukti bahwa $G(x_n, x, x) \to 0$ saat $n \to \infty$.

Akibat 4.5.

Setiap barisan konvergen di ruang metrik merupakan barisan G-konvergen.

Bukti.

Berdasarkan definisi dari barisan (x_n) konvergen ke x di ruang metrik, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli $N(\varepsilon)$ sehingga $d(x_n, x) < \varepsilon$ untuk $n \geq N(\varepsilon)$. Akan dibuktikan bahwa (x_n) juga G-konvergen ke x untuk setiap $\delta > 0$ terdapat bilangan asli $N(\delta)$ sehingga $G(x_n, x_m, x) < \delta$ untuk $n, m \geq N(\delta)$.

Jika dimisalkan $G(x, y, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Karena (x_n) konvergen ke x, maka untuk $n, m \geq N(\varepsilon)$ menyebabkan $d(x_n, x), d(x_m, x) \leq d\left(x_{N(\varepsilon)}, x\right)$. Dipilih $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, dan didapatkan $d\left(x_{N(\varepsilon)}, x\right) < \frac{\varepsilon}{2}$, sehingga

$$d(x_n, x) + d(x_m, x) \leq d\left(x_{N(\varepsilon)}, x\right) + d\left(x_{N(\varepsilon)}, x\right) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon;$$

dari pemisalan sebelumnya dan berdasarkan syarat M-3) dan G-4), didapatkan

$$G(x_n, x, x_m) = G(x_n, x_m, x) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \varepsilon;$$

jika dipilih $\delta = \varepsilon$ untuk $n, m \geq N(\delta)$, maka

$$G(x_n, x_m, x) < \delta;$$

sehingga terbukti bahwa setiap barisan konvergen di ruang metrik merupakan barisan G-konvergen.

4.2 Bukti Sifat-Sifat Barisan G-Cauchy

Definisi 2.26. (Kusumaningati et al., 2023)

Diberikan (X, G) ruang G-Metrik, maka barisan $(x_n) \subseteq X$ disebut G-Cauchy jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $G(x_n, x_m, x_l) < \varepsilon$ untuk setiap $n, m, l \geq N$.

Proposisi 4.6. (Hammad et al., 2023)

Diberikan ruang G-metrik (X, G), maka pernyataan-pernyataan berikut ini ekuivalen:

(a) (x_n) merupakan barisan G-Cauchy;

(b) Untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $K \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $G(x_n, x_m, x_m) < \varepsilon$, untuk setiap $n, m \geq K$.

Bukti.

- (a) $\Rightarrow$ (b)

  Karena (x_n) barisan G-Cauchy, maka $\forall \varepsilon > 0 \exists K \in \mathbb{N} \ni \forall n, m, l \geq K$ berlaku

$$G(x_n, x_m, x_l) < \varepsilon.$$

  Jika dipilih $l = m$ dengan $n, m \geq K$, maka terbukti bahwa

$$G(x_n, x_m, x_m) < \varepsilon.$$

- (b) $\Rightarrow$ (a)

  Karena untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $K \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $G(x_n, x_m, x_m) < \varepsilon$, untuk setiap $n, m \geq K$. Jika dipilih $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ dan $l \geq n, m \geq K$, maka didapatkan

$$G(x_n. x_m, x_m) < \frac{\varepsilon}{2};$$

  Dan

$$G(x_l, x_m, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

  Berdasarkan syarat G4 didapatkan

$$G(x_m, x_m, x_l) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Berdasarkan syarat G5 didapatkan

$$\begin{aligned} G(x_n, x_m, x_l) &\leq G(x_n, x_m, x_m) + G(x_m, x_m, x_l) \\ &< \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Dari ketaksamaan tersebut didapatkan

$$G(x_n, x_m, x_l) < \varepsilon.$$

Berdasarkan definisi G-Cauchy, menyatakan (x_n) merupakan barisan G-Cauchy di ruang G-metrik (X, G).

Akibat 4.7.

Setiap barisan Cauchy di ruang metrik merupakan barisan G-Cauchy.

Bukti.

Berdasarkan definisi dari barisan Cauchy (x_n) di ruang metrik, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli $N(\varepsilon)$ sehingga $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ untuk $n, m \geq N(\varepsilon)$. Akan dibuktikan bahwa (x_n) juga G-Cauchy untuk setiap $\delta > 0$ terdapat bilangan asli $N(\delta)$ sehingga $G(x_n, x_m, x_l) < \delta$ untuk $n, m, l \geq N(\delta)$.

Jika dimisalkan $G(x, y, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Karena (x_n) barisan Cauchy, maka untuk $n, m, l \geq N(\varepsilon)$ menyebabkan $d(x_n, x_m) \leq d\big(x_{N(\varepsilon)}, x_n\big), d(x_m, x_l) \leq d\big(x_{N(\varepsilon)}, x_m\big)$, dan $d(x_l, x_n) \leq d\big(x_{N(\varepsilon)}, x_l\big)$. Dipilih $\frac{\varepsilon}{4} > 0$, dan didapatkan $d\big(x_{N(\varepsilon)}, x_n\big), d\big(x_{N(\varepsilon)}, x_m\big), d\big(x_{N(\varepsilon)}, x_l\big) < \frac{\varepsilon}{4}$, sehingga

$$\begin{aligned} &d(x_n, x_m) + d(x_m, x_l) + d(x_l, x_n) + d(x_n, x_m) \\ &\qquad \leq d\big(x_{N(\varepsilon)}, x_n\big) + d\big(x_{N(\varepsilon)}, x_m\big) + d\big(x_{N(\varepsilon)}, x_l\big) + d\big(x_{N(\varepsilon)}, x_n\big) \\ &\qquad < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon; \end{aligned}$$

dari pemisalan sebelumnya dan berdasarkan syarat G-4), didapatkan

$$
\begin{aligned}
G(x_n, x_m, x_l) &< G(x_n, x_m, x_l) + G(x_l, x_n, x_m) \\
&= G(x_n, x_m, x_l) + G(x_n, x_m, x_l) \\
&= 2(x_n, x_m, x_l) \\
&\leq d(x_n, x_m) + d(x_m, x_l) + d(x_l, x_n) + d(x_n, x_m) \\
&< \varepsilon
\end{aligned}
$$

jika dipilih $\delta = \varepsilon$ untuk $n, m, l \geq N(\delta)$, maka

$$G(x_n, x_m, x_l) < \delta;$$

sehingga terbukti bahwa setiap barisan Cauchy di ruang metrik merupakan barisan G-Cauchy.

4.3 Barisan *G*-Konvergen dan Barisan *G*-Cauchy Pada Konsep Ikhtiar

Di dalam al-Qur'an surat an-Najm ayat 39-42 yang memiliki terjemahan, "*Dan tidaklah manusia memperoleh sesuatu kecuali apa yang telah diusahakannya (39). Dan sesungguhnya apa yang telah diusahakannya itu kelak akan diperlihatkan (kepadanya) (40). Kemudian akan dibalaskan kepadanya dengan balasan yang sempurna (41). Dan sesungguhnya kepada Tuhanmulah kesudahan (dari segala sesuatu) (42),"* menejelaskan bahwa untuk mendapatkan sesuatu, Allah SWT. memerintahkan umat manusia untuk berusaha. Usaha yang dilakukan manusia untuk mendapatkan sesuatu ini disebut dengan Ikhtiar. Ikhtiar yang dilakukan ini kelak akan Allah SWT. balas dengan balasan terbaik. Dalam hal ini balasan terbaik yang dimaksud bukanlah apa yang terbaik bagi kita, melaikan terbaik menurut Allah SWT. Imam Al-Ghazali menjelaskan konsep *raja'* di dalam berikhtiar, yaitu suatu harapan berlebih dari seorang hamba kepada Allah SWT. untuk memperoleh balasan atas segala bentuk Ikhtiar termasuk beribadah dan bekerja. Hal ini serupa dengan konsep barisan konvergen di ruang metrik dan barisan G-konvergen, yaitu setiap usaha yang dilakukan umat manusia diibaratkan sebagai suatu barisan yang diharapkan mencapai suatu titik tujuan yang diibaratkan sebagai limit. Akan tetapi, walaupun tidak berhasil mencapai tujuan tersebut, Allah SWT. akan menggantinya dengan hasil terbaik bagi-Nya.

Selain membahas tentang barisan konvergen dan G-konvergen, pada penelitian ini juga membahas tentang barisan Cauchy di ruang metrik dan barisan G-Cauchy. Selain konsep Raja' dalam Ikhtiar, Imam Al-Ghazali juga menjelaskan konsep lain yang disebut dengan *khauf*, yaitu perasaan takut kepada Allah SWT. dalam melakukan segala bentuk larangannya. Perasaan takut ini berbeda dengan perasaan takut pada umumnya dimana akan membuat manusia semakin menjauhi apa yang ditakuti. Rasa takut kepada Allah SWT. akan membuat manusia semakin berusaha untuk mendekatkan diri kepada-Nya. Usaha manusia untuk mendekatkan diri kepada Allah SWT. karena sebab *khauf* ini serupa dengan konsep barisan Cauchy dan barisan G-Cauchy, dimana suatu individu manusia dengan Allah SWT. sebagai Tuhannya diibaratkan menjadi suatu barisan dengan rasa *khauf* sebagai penyebab mendekatnya jarak di antara individu tersebut dengan Allah SWT.

BAB V

PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Dari pembahasan pada bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa dengan membuktikan sebarang metrik $d(x, y)$ memenuhi kelima syarat G-metrik menyebabkan setiap ruang metrik merupakan ruang G-metrik, tetapi karena terdapat suatu G-metrik $G(x, y, z)$ yang tidak memenuhi syarat ketaksamaan segitiga dari metrik, maka jelas terdapat ruang G-metrik yang bukan merupakan ruang metrik. Dan berdasarkan pembuktian dari pernyataan-pernyataan tersebut, maka:

1. dengan pemisalan $G(x, y, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ maka terbukti bahwa setiap barisan konvergen di ruang metrik merupakan barisan G-konvergen,
2. dengan pemisalan $G(x, y, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ maka terbukti bahwa setiap barisan Cauchy di ruang metrik merupakan barisan G-Cauchy.

5.2 Saran

Penulis menyarankan untuk penelitian di masa yang akan datang dapat menggunakan bentuk perumuman ruang metrik yang lain, seperti ruang quasi-metrik, ruang *Fuzzy* metrik, ruang quasi-*Fuzzy* metrik, ruang *Fuzzy* metrik diperumum, dan lain-lain. Selain itu, penulis juga menyarankan untuk membahas tentang teorema-teorema kelengkapan dari bentuk-bentuk perumuman ruang metrik tersebut sebagai referensi pada penelitian berikutnya.

DAFTAR PUSTAKA

Aphane, M. (2009). *On Some Results Of Analysis In Metric Spaces And Fuzzy Metric Space.* South Africa: University of South Africa.

Baqi, M. F. (2017). *Shahih Bukhari Muslim (Al-Lu'Lu' Wal Marjan).* Jakarta: PT Elex Media Komputindo.

Bartle, R. G., & Sherbert, D. R. (2011). *Introduction to Real Analysis Fourth Edition.* Illionis: University of Illinois, Urbana-Champaign.

Hakim, A., Sholihah, F. M., & Anifa, N. A. (2023). Konsep Ikhtiar dalam Berobat sesuai Ajaran Islam. *Jurnal Religion: Jurnal Agama, Sosial, dan Budaya Volume 1, Nomor 4*, 914 - 924.

Hammad, H. A., Alshehri, M. G., & Shehata, A. (2023). Control Functions in G-Metric Spaces: Novel Methods for θ-Fixed Points and θ-Fixed Circles with an Application. *Symmetry Vol. 15 No. 164*, 1-24.

Jakfar, M., Manuharawati, Yunianti, D. N., & Kumala, M. D. (2019). Metrics on a G-metric Space. *Journal of Physics: Conference Series,* 1-6. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1417/1/012023

Kamal, A., & Rizk, D. (2023). Convergence Theorems in G- Metric Space and its Applications. *Research Square*, 1-11.

Kementrian Agama, S. A. (1971). Al-Qur'an dan Terjemahannya. *In Komplek Percetakan Al Qur'anul Karim Kepunyaan Raja Fahd* (p. 1281). https://d1.islamhouse.com/data/id/ih_books/single/id_Translation_of_the_meaning_of_the_holy_quran_in_indonesian.pdf.

Kusumaningati, A. D., Manuharawati, & Jakfar, M. (2023). Properties of Compact Set in G-metric Space. *International Journal of Research in Engineering, Science and Management Vol. 6 Issue 9*, 1-8.

Mustafa, Z., & Sims, B. (2006). A New Approach To Generalized Metric Spaces Vol. 7 Number 2. *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, 289-297.

Shirali, S., & Vasudeva, H. L. (2006). *Metric Space.* London: Springer-Verlag.

Taskovic, M. R. (2005). Frechet's metric spaces–100th next. *Mathematica Moravica*, 69–75.

Utami, S. N., Al Ghazal, S., & Rasyid, A. M. (2023). Nilai-Nilai Pendidikan Akhlak dalam Konsep Khauf dan Raja' Menurut Imam Al-Ghazali. *Jurnal Riset Pendidikan Agama Islam Vol. 3 No. 1*, 55-62.

Wahidin. (2023). Optimisme Perspektif Pendidikan Islam dan Implementasinya dalam Layanan Bimbingan dan Konseling Bagi Mahasiswa. *Edukasi Islami: Jurnal Pendidikan Islam, XII*(02), 1535 - 1558. https://doi.org/10.30868/ei.v12i02.3636

RIWAYAT HIDUP

Ainun Chabibulloh Hilaluddin, Lahir di Sidoarjo, 11 Januari 1999. Dari lahir hingga bertumbuh sampai sekarang tetap tinggal di Desa Pagerwojo, Kecamatan Buduran, Kabupaten Sidoarjo, Provinsi Jawa Timur. Putra pertama dari Bapak Muchamad Thowiluddin dan Ibu Siti Mu’as Shomah.

Penulis menempuh pendidikan taman kanak-kanak di RA Muslimat Asy-Syuhada’ Pagerwojo, kemudian melanjutkan pendidikan dasar di MI Ma’arif Pagerwojo dan lulus pada tahun pada tahun 2011. Dilanjutkan pendidikan sekolah menengah pertama di MTsN 1 Sidoarjo dan lulus tahun 2014. Kemudian melanjutkan pendidikan sekolah menengah atas di MAN Sidoarjo dan lulus pada tahun 2017. Kemudian melanjutkan pendidikan perguruan tinggi pada tahun 2017 di Universitas Islam Negri Maulana Malik Ibrahim Malang mengambil program studi Matematika di Fakultas Sains dan Teknologi. Penulis dapat dihubungi melalui email chabibullohainu@gmail.com.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

BUKTI KONSULTASI SKRIPSI

Nama	: Ainun Chabibulloh Hilaluddin.
NIM	: 17610026
Fakultas / Jurusan	: Sains dan Teknologi / Matematika.
Judul Skripsi	: Sifat G-Konvergen dan G-Cauchy pada Barisan di Ruang G-Metrik.
Pembimbing I	: Dian Maharani. M.Si.
Pembimbing II	: Erna Herawati, M.Pd.

No	Tanggal	Hal	Tanda Tangan
1.	25 Juli 2023	Konsultasi Topik dan Data	1.
2.	2 Agustus 2023	Konsultasi Bab I, II, dan III	2.
3.	18 Agustus 2023	Konsultasi Bab I, II, dan III	3.
4.	4 Oktober 2023	Konsultasi Bab I, II, dan III	4.
5.	30 Oktober 2023	Konsultasi Kajian Agama Bab I dan II	5.
6.	31 Oktober 2023	Konsultasi Bab I, II, dan III	6.
7.	1 November 2023	Konsultasi Kajian Agama Bab I dan II	7.
8	9 November 2023	ACC Bab I, II, dan III	8.
9.	9 November 2023	ACC Kajian Agama Bab I dan II	9.
10.	10 November 2023	ACC Seminar Proposal	10.
11.	5 Februari 2024	Konsultasi Revisi Seminar Proposal	11.
12.	13 Februari 2024	Konsultasi Bab IV dan V	12.
13.	22 Maret 2024	Konsultasi Bab IV dan V	13.
14.	24 April 2024	Konsultasi Kajian Agama Bab IV	14.

KEMENTERIAN AGAMA RI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
MAULANA MALIK IBRAHIM MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
Jl. Gajayana No.50 Dinoyo Malang Telp. / Fax. (0341)558933

15.	2 Mei 2024	Konsultasi Bab IV dan V	15.
16.	27 Mei 2024	ACC Bab IV dan V	16.
17.	31 Mei 2024	ACC Kajian Agama Bab IV	17.
18.	3 Juni 2024	ACC Seminar Hasil	18.
19.	19 Juni 2024	Konsultasi Revisi Seminar Hasil	19.
20.	21 Juni 2024	Konsultasi Revisi Penulisan Seminar Hasil	20.
21.	21 Juni 2024	ACC Sidang Skripsi	21.
22.	28 Juni 2024	ACC Keseluruhan	22.

Malang, 28 juni 2024
Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika

Dr. Elly Susanti, M.Sc.
NIP. 19741129 200012 2 005