ESTIMASI PARAMETER DISTRIBUSI GAMMA DENGAN METODE BAYES

SKRIPSI

Oleh:
IDA PUTRI RARASATI
NIM. 08610021

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2012

ESTIMASI PARAMETER DISTRIBUSI GAMMA
DENGAN METODE BAYES

SKRIPSI

Oleh:
IDA PUTRI RARASATI
NIM. 08610021

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERIMAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2012

ESTIMASI PARAMETER DISTRIBUSI GAMMA DENGAN METODE BAYES

SKRIPSI

Diajukan kepada:
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
IDA PUTRI RARASATI
NIM. 08610021

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERIMAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2012

ESTIMASI PARAMETER DISTRIBUSI GAMMA DENGAN METODE BAYES

SKRIPSI

Oleh:
IDA PUTRI RARASATI
NIM. 08610021

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji:
Tanggal:03 Maret 2012

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Sri Harini, M.Si	Fachrur Rozi, M.Si
NIP.19731014 200112 2 002	NIP.19800527 200801 1 012

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP.19751006 200312 1 001

ESTIMASI PARAMETER DISTRIBUSI GAMMA DENGAN METODE BAYES

SKRIPSI

Oleh:
IDA PUTRI RARASATI
NIM. 08610021

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi
dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan
UntukMemperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal:30 Maret 2012

Penguji Utama:	Drs.H. Turmudi, M.Si NIP. 19571005 198203 1 006	....
Ketua Penguji:	Abdul Aziz, M.Si NIP. 19760318 200604 1 002	....
Sekretaris Penguji:	Sri Harini, M.Si NIP. 19731014 200112 2 002	....
Anggota Penguji:	Fachrur Rozi, M.Si NIP. 19800527 200801 1 012	....

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP.19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Ida Putri Rarasati

NIM : 08610021

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 5 Maret 2012
Yang membuat pernyataan,

Ida Putri Rarasati
NIM. 08610021

MOTTO

يَٰٓأَيُّهَا ٱلَّذِينَ ءَامَنُواْ ٱسْتَعِينُواْ بِٱلصَّبْرِ وَٱلصَّلَوٰةِۚ إِنَّ ٱللَّهَ مَعَ ٱلصَّٰبِرِينَ ١٥٣

"Hai orang-orang yang beriman, jadikanlah sabar dan shalat sebagai penolongmu, sesungguhnya Allah beserta orang-orang yang sabar"
(Q.S. Al Baqarah: 153)

"Terpenting dalam mengatasi kesulitan adalah sabar dan bertindak bijaksana"

PERSEMBAHAN

Dengan mengucap syukur Alhamdulillah,

karya sederhana ini dipersembahkan kepada:

ibunda Wiwik Suprapti dan ayahanda Adi Wiyono tercinta,

tante Anik Suharti, dan seluruh keluarga, terima kasih atas

kasih sayang, doa, dan perhatian serta motivasinya.

Semoga Allahmembalas semua kebaikan ini.

KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Alhamdulillahirabbil'alamin, penulis haturkan kepada Allah SWT yang telah melimpahkan segala nikmat, rahmat, dan karunia serta hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan studi di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang sekaligus dapat menyelesaikan penulisan skripsi yang berjudul "Estimasi Parameter Distribusi Gamma dengan Metode Bayes."

Shalawat serta salam semoga terlimpahkan pada Nabi Muhammad SAW, keluarga serta sahabat-sahabatnya, yang telah menuntun ke jalan yang benar.

Selanjutnya penulis mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah membimbing, mengarahkan dan memotivasi penulis. Ucapan terima kasih ini penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Drs. Sutiman B. Sumitro, SU.,DSc, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Sri Harini, M.Si, sebagai pembimbing yang penuh kesabaran telah meluangkan waktunya demi memberikan bimbingan, arahan, saran, dan motivasi sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik.

5. Fachrur Rozi, M.Si, sebagai pembimbing agama yang telah memberikan bimbingan dan petunjuk dalam mengkaji ayat al-Qur'an secara mendalam dan mengintegrasikannya dengan matematika.
6. Seluruh dosen Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, yang telah mendidik, membimbing, dan mengajarkan ilmu-ilmunya yang tak ternilai harganya kepada penulis.
7. Kedua orang tua penulis ibunda dan ayahanda tercinta, dan tersayang yang tidak pernah berhenti memberikan doa, kasih sayang, ketenangan, dan motivasi dalam mengarungi hidup ini.
8. Nenek dan Kakek, serta seluruh keluarga yang telah memberikan doa, kasih sayang, dan dukungan bagi penulis.
9. Sahabat-sahabat terbaik Frida Luthvita Setiawan, Lailil Wakhidatus Solikha, Yeni Rahmawati, dan Yunita Rohmawati terima kasih atas do'a, semangat, dan kenangan indah bersama.
10. Semua teman-teman senasib seperjuangan mahasiswa Jurusan Matematika angkatan 2008 yang telah memberikan bantuan, motivasi, dan rasa kebersamaan yang indah selama masa perkuliahan.
11. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu, atas keikhlasan bantuan moril dan spirituil, penulis ucapkan terimakasih sehingga dapat menyelesaikan skripsi.

Semoga Allah SWT membalas kebaikan semuanya, Amin.

Dengan segala kerendahan hati, penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan, sehingga penulis mengharap kritik dan saran dari semua pihak guna kesempurnaan dan kebaikan skripsi ini.Semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat dan dapat menambah khazanah keilmuan, Amin.

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Malang, Maret 2012

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

DAFTAR SIMBOL

Simbol-simbol yang digunakan dalam skripsi ini adalah:

$f(x \mid \alpha, \beta)$	:Fungsi kepadatan peluang dari variabel random X bersyarat α, β
$\sim$	:Berdistribusi
$\sum_{i=1}^{n} X_i$	:Penjumlahanbarisan$X_1, X_2, \dots, X_n$
$\prod_{i=1}^{n} X_i$	:Perkalian barisan $X_1, X_2, \dots, X_n$
Γ	:Fungsi Gamma
α	:Parameterlokasi (*shape*) distribusi Gamma
β	:Parameterskala (*scale*) distribusi Gamma
$\frac{\partial y}{\partial \alpha}$	:Differensial dari *y* terhadap α

ABSTRAK

Rarasati, Ida Putri. 2012. **Estimasi Parameter Distribusi Gamma dengan Metode Bayes.** Skripsi.Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: (I) Sri Harini, M.Si.
(II) Fachrur Rozi, M.Si.

Kata kunci: Estimasi Parameter, Distribusi Gamma, Metode Bayes

Estimasi parameter dapat digunakan untuk menduga parameter suatu distribusi baik distribusi diskrit maupun distribusi kontinu.Salah satu metode estimasi yang dapat digunakan adalah metode Bayes.Metode Bayes dikenal sebagai metode yang lebih baik daripada metode yang lain, karena pada metode ini menggabungkan informasi dari data sampel dan informasi dari sebaran sebelumnya (*prior*).

Pada penelitian ini, akan dipaparkan tentang proses dan hasil estimasi parameter untuk distribusi Gamma dengan metode Bayes. Sehingga langkah-langkah dalam estimasi dengan metode Bayes, pertama-tama membentuk fungsi Likelihood dari distribusi Gamma.Selanjutnya, menentukan distribusi *prior*.Dan terakhir, menentukan distribusi *posterior*nya.

Adapun penentuan distribusi *posterior* untuk parameter α dan β adalah:

$$p(\alpha \mid X_i) \propto -\beta^{-n\alpha-1}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^{n\alpha} exp\left(-\frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\Gamma(n\alpha)^{-1}$$

$$p(\beta \mid X_i) \propto -\beta^{-n\alpha}\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{\alpha} \ln\left(\beta^{-n}\prod_{i=1}^{n} X_i\right)$$

Untuk hasil estimasi parameter distribusi Gamma dengan metode Bayes pada penelitian ini diperoleh menggunakan software WinBUGS.Dari hasil program yang dijalankan sehingga diperoleh nilai konvergen bagi parameter yang diduga. Kekonvergenan dapat diketahui dengan melihat plot *dynamic trace* bila memiliki pola acak maka iterasi dihentikan dan sebuah sampel acak dikatakan telah konvergen, selain itu juga dapat dilihat dari nilai MC *error*. Apabila nilai MC *error* bernilai kurang dari 5% simpangan baku maka kekonvergenan dapat terpenuhi dan iterasi dihentikan.

Berdasarkan analisis teori dan contoh aplikasi menunjukkan bahwa metode Bayes memberikan hasil yang baik dalam estimasi karena dalam prosesnya memperhitungkan informasi dari data sampel dan informasi dari sebaran sebelumnya (*prior*).Namun, estimasi parameter dengan metode Bayes menggunakan software WinBUGS ini memiliki kelemahan yaitu tidak dapat memberikan hasil estimator yang tetap.

ABSTRACT

Rarasati, Ida Putri. 2012. **Gamma Distribution Parameter Estimation with Bayes Methods.** Thesis. Mathematics Programme Faculty of Science and Technology The State Islamic University Maulana Malik Ibrahim Malang.
Advisors: (I) Sri Harini, M.Si.
(II) Fachrur Rozi, M.Si.

Parameter estimation can be used to estimate the parameters of a distribution of both discrete and continuous distribution distribution. One method of estimation that can be used is the Bayesian method. Bayesian method is known as a better method than other methods, because the method combines information from sample data and information from the previous distribution (prior).

In this study will be presentedabout the process and resultsof parameter estimationfor Gamma distribution with Bayesian methods. So, that the steps in the estimation of the Bayesian method, first of all establish Likelihood function of Gamma distribution. Next, specify the prior distribution. And finally, determine the posterior distribution.

The determination of the posterior distribution for the parameters α and β are:

$$p(\alpha \mid X_i) \propto -\beta^{-n\alpha-1}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^{n\alpha} exp\left(-\frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\Gamma(n\alpha)^{-1}$$

$$p(\beta \mid X_i) \propto -\beta^{-n\alpha}\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{\alpha} \ln\left(\beta^{-n}\prod_{i=1}^{n} X_i\right)$$

For the Gamma distribution parameter estimation with Bayesian methods in this study obtained using the software WinBUGS. From the results of the programs that run in order to obtain convergent values for the parameters expected. The convergent can be determined by looking at the plot dynamic trace it if you have a random pattern of the iteration is stopped and a random sample is said to have convergen, but it also can be seen from the MC error. If the MC error value of less than 5% standard deviation can be fulfilled and then the convergent iteration is stopped.

Based on theoretical analysis and application examples show that the Bayesian method gives good results in the estimation because the process takes into account information from sample data and information from the previous distribution (prior). However, parameter estimation with Bayesian method use software WinBUGS has the disadvantage that it can not provide the estimator is fixed.

Key words: Parameter Estimation, Gamma Distribution, Bayesian Method

الملخص

ايدافوترىرارساتى ،2012.تقديرمعلمةتوزيعغاما علىطريقةبايز

رسالة جامعية قسم الرياضيات من كلية العلوم و التكنولوجيا التابع لجامعة الدولية الإسلامية مولانا مالك إبرهيم مالا نغ.

مشريف: 1. سري هاريني الماجستير في العلوم
2. فخر الرازي الماجستير في الدين

كلمات رئيسيةير:تقديرمعلمة، وتوزيع غاما، الطريقة بايز

ويمكن استخدامتقديرالمعلمة لتقدير المعلمات في توزيع كل منتوزيعالمنفصلة والمتصلة .هناك طريقة يمكن. ومن المعروف أنطريقة بايز أفضلطريقةمنالطرق الأخرى، وذلك لأن .استخدامها وهي طريقةبايز أسلوبجمعالمعلومات مننموذج البيانات فيها منالتوزيعالسابقة

في هذ البحث ، سيعرض عرض حول عمليةونتائجتقديرمعلمةللتوزيعغامامعطريقةبايز .بحيثالخطوات في التقدير علىطريقةبايز هيإنشاءوظيفةاحتمالية من توزيعغاما. ثم، يحددتوزيعمسبق وأخيرا، تحديد توزيعالخلفي وتحديدتوزيعالخلفيللمعلمات α وβهي:

$$p(\alpha \mid X_i) \propto -\beta^{-n\alpha-1}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^{n\alpha} exp\left(-\frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\Gamma(n\alpha)^{-1}$$

$$p(\beta \mid X_i) \propto -\beta^{-n\alpha}\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{\alpha} \ln\left(\beta^{-n}\prod_{i=1}^{n} X_i\right)$$

تنال تقدير نتيجة توزيع غاما مع طرق بيز في هذ البحث باستخدام البرمجيات WinBUGS. من نتائج البرامج التي تعمل من أجل الحصول على القيم المتقاربة للمعلمات المتوقع. ويمكن تحديد القيم المتقاربة من خلال النظر في مؤامرة ديناميكية. وذالك إذا كان النتيجة يشير إلى نمط عشوائي فيمكن إيقاف التكرار ويقال أن النمط العشوائي يكون من جنس القيم المتقاربة، ولكنها أيضا يمكن أن يرى منerror MC. إذا كان تقدير errorMC أقل من 5٪ من الانحراف المعياري فالقيم المتقاربة فيه يكون كاملا ويمكن إيقاف التكرار.

بناء على التحليل النظري والأمثلة تدل على أن تطبيق طريقة بايز يأتي بنتائج جيدة لان العملية فيها تأخذ الاعتبار والمعلومات من نموذج البيانات والمعلومات من التوزيع السابقة. ومع ذلك، طريقة بايز لها ضعف أنه لا يمكن أن توفر يتم إصلاح مقدر. إذا تغيير قيمة معلمة معينة، فتغير النتيجة في اختبار بايز.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Segala puji bagi Allah SWT yang telah menciptakan langit dan bumi beserta isinya, yang menciptakan manusia dengan keadaan yang sebaik-baiknya, dan mengajarkan manusia segala yang tidak diketahuinya, serta yang menurunkan al-Qur'an sebagai pedoman hidup umat manusia. Al-Qur'an merupakan firman Allah SWT yang di dalamnya terkandung banyak sekali keajaiban. Allah SWT berfirman dalam QS. Al-Mujaadilah [58] ayat 11,

يَٰٓأَيُّهَا ٱلَّذِينَ ءَامَنُوٓاْ إِذَا قِيلَ لَكُمۡ تَفَسَّحُواْ فِي ٱلۡمَجَٰلِسِ فَٱفۡسَحُواْ
يَفۡسَحِ ٱللَّهُ لَكُمۡۖ وَإِذَا قِيلَ ٱنشُزُواْ فَٱنشُزُواْ يَرۡفَعِ ٱللَّهُ ٱلَّذِينَ ءَامَنُواْ
مِنكُمۡ وَٱلَّذِينَ أُوتُواْ ٱلۡعِلۡمَ دَرَجَٰتٖۚ وَٱللَّهُ بِمَا تَعۡمَلُونَ خَبِيرٞ ١١

Artinya: *Hai orang-orang beriman apabila dikatakan kepadamu: "Berlapang-lapanglah dalam majlis", maka lapangkanlah niscaya Allah akan memberi kelapangan untukmu. Dan apabila dikatakan: "Berdirilah kamu", maka berdirilah, niscaya Allah akan meninggikan orang-orang yang beriman di antaramu dan orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat. Dan Allah Maha Mengetahui apa yang kamu kerjakan*.

Ayat di atas tidak menyebutkan secara tegas bahwa Allah SWT akan meninggikan derajat orang yang berilmu tapi Allah SWT menegaskan bahwa manusia diberikan derajat-derajat yaitu derajat yang lebih tinggi dari yang sekadar beriman. Kaum beriman dibagi menjadi dua kelompok besar, yang pertama sekadar beriman dan beramal saleh, dan yang kedua beriman dan beramal saleh serta memiliki pengetahuan. Derajat kedua kelompok ini menjadi lebih tinggi, bukan saja karena nilai ilmu yang disandangnya, tetapi juga amal dan pengajarannya kepada orang lain baik secara lisan, tulisan maupun dengan keteladanan.

Ilmu yang dimaksud dalam ayat di atas bukan saja ilmu agama, tetapi ilmu apapun yang bermanfaat. Di sisi lain, juga ditunjukkan bahwa ilmu haruslah menghasilkan *khasyyah* yakni rasa takut dan kagum kepada Allah SWT, yang pada gilirannya mendorong yang berilmu untuk mengamalkan ilmunya serta memanfaatkannya untuk kepentingan makhluk (Shihab, 2003: 79-80).

Dari ayat di atas, dapat dijadikan motivasi agar selalu mempergunakan akal dan pikiran untuk membaca alam semesta ini dengan ilmu, karena semakin mengetahui apa yang ada di bumi dan di langit ini akan semakin bertambah kuatlah iman manusia. Al-Qur'an diturunkan sebagai pedoman hidup bagi seluruh umat manusia. Inilah pedoman kita untuk membaca fenomena-fenomena yang ada di bumi dan di langit.

Sama halnya dengan statistika, dalam menduga parameter dari suatu populasi atau menganalisis statistik dari suatu sampel acak sebelum mengambil suatu keputusan digunakan metode statistika. Dalam penggunaan metode statistika, terdapat dua bagian utama yaitu statistika deskriptif, dan statistika inferensia. Statistika deskriptif merupakan cabang statistika yang bertujuan untuk menyajikan informasi data sebagai deskripsi dari suatu peristiwa yang disajikan dalam bentuk numerik, tabel, grafik, atau kurva distribusi. Hal ini bertujuan untuk mempermudah pemahaman dan pengambilan keputusan terhadap suatu peristiwa. Sedangkan statistika inferensia merupakan cabang statistika yang menggunakan konsep probabilitas untuk membuat perkiraan, prediksi, peramalan atau generalisasi suatu obyek berdasarkan data yang diperoleh baik berdasarkan populasi maupun sampel (Usman dan Akbar, 2006: 3-4).

Pada statistika inferensia dapat diperoleh suatu kesimpulan mengenai populasi dengan menguji populasi tersebut, meskipun sangat tidak praktis. Sehingga dengan berbagai keterbatasan yang dimiliki dan berbagai kendala yang ada maka tidak mungkin mengamati keseluruhan komponen populasi. Untuk itu digunakan alternatif lain yaitu menduga parameter dari populasi yang tidak diketahui menggunakan statistik sampel.

Distribusi Gamma merupakan salah satu dari beberapa distribusi kontinu. Distribusi Gamma ini memiliki dua parameter yang harus diestimasi yaitu α dan β. Parameter α merupakan parameter lokasi dan parameter β merupakan parameter skala.

Saat ini metode pendugaan berkembang sangat luas. Salah satu metode yang banyak dikembangkan diantaranya adalah metode Bayes. Metode Bayes merupakan suatu metode di mana harus diketahui bentuk distribusi awal (*prior*) dari populasi. Sebelum menarik sampel dari suatu populasi biasanya diperoleh informasi mengenai parameter yang akan diestimasi. Informasi ini digabungkan dengan informasi dari sampel digunakan untuk mengestimasi parameter populasi.

Metode Bayes memiliki keunggulan dibandingkan dengan metode yang lain di antaranya adalah metode Bayes dapat digunakan untuk penarikan kesimpulan pada kasus-kasus yang rumit atau ekstrim yang tidak dapat ditangani dengan metode lain seperti model Hierarki yang kompleks. Selain itu, bila dari informasi awal (*prior*) tidak menunjukkan adanya informasi yang lengkap dan jelas tentang distribusi *prior*, maka dapat diberikan asumsi-asumsi yang sesuai dengan karakteristik distribusinya. Sehingga bila distribusi *prior* sudah dapat ditentukan, selanjutnya dapat ditentukan distribusi *posterior* yang mungkin membutuhkan perkiraan komputasional (Box dan Tiao,1973).

Penelitian sebelumnya yang menggunakan metode Bayes untuk mengestimasi parameter pada berbagai distribusi baik untuk distribusi diskrit maupun kontinu masih jarang. Penelitian-penelitian yang ada selama ini untuk mengestimasi parameter menggunakan metode Bayes diterapkan pada distribusi Normal seperti pada Pramita Elfa Diana Santi (2009), diterapkan pada distribusi Binomial seperti pada Ade Candra Siska (2011). Oleh karena itu penulis memilih menggunakan distribusi Gamma untuk mengestimasi parameternya menggunakan metode Bayes.

Berdasarkan uraian di atas, pada tugas akhir ini penulis mengkaji lebih dalam tentang estimasi distribusi Gamma dengan menggunakan metode Bayes. Sehingga penulis tertarik untuk mengambil judul penelitian "Estimasi Parameter Distribusi Gamma dengan Metode Bayes."

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang di atas, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah bagaimana proses dan hasil estimasi parameter distribusi Gamma dengan metode Bayes?

1.3 Tujuan

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan yang ingin dicapai dalam penelitian adalah mengetahui proses dan hasil estimasi parameter distribusi Gamma dengan metode Bayes.

1.4 Batasan Masalah

Sesuai rumusan masalah dan tujuan penelitian, serta agar pembahasan lebih fokus maka pembatasan masalah yang diberikan adalah:

a. Distribusi *prior* yang digunakan pada penelitian ini menggunakan distribusi *prior* non-informatif.
b. Estimasi parameter distribusi Gamma dengan metode Bayes pada penelitian ini hanya sampai pada penentuan distribusi *posterior*.
c. Estimasi parameter distribusi Gamma dengan metode Bayes diaplikasikan menggunakan data simulasi.

1.5 Manfaat

Manfaat yang diharapkan dari penelitian ini antara lain:

a. Bagi penulis

Penulis mengetahui tentang proses dan hasil estimasi parameter distribusi Gamma dengan metode Bayes. Selain itu, dapat menjadi wacana baru dalam pengembangan ilmu pengetahuan khususnya Matematika yang dapat dimanfaatkan dalam kehidupan sehari-hari.

b. Bagi lembaga

Sebagai sumbangan pemikiran dan sebagai upaya peningkatan kualitas keilmuan, khususnya dalam bidang Matematika di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

c. Bagi pembaca

Memberikan gambaran tentang proses dan hasil estimasi parameter distribusi Gamma dengan metode Bayes. Sehingga pembaca dapat mengaplikasikan pada obyek yang berbeda, serta menggunakan distribusi yang lain dan mengkaji dengan metode yang lain bila ingin mengembangkan untuk penelitian selanjutnya.

1.6 Metode Penelitian

1.6.1 Pendekatan Penelitian

Penelitian ini menggunakan pendekatan penelitian kepustakaan. Penelitian kepustakaan ini merujuk pada pustaka atau buku-buku yang berkaitan dan yang dibutuhkan untuk melakukan penelitian ini. Untuk mengestimasi parameter distribusi Gamma menggunakan metode Bayes, terlebih dahulu dikaji mengenai definisi dan sifat dasar dari distribusi Gamma dan metode Bayes. Selanjutnya dianalisis dan diberikan contoh aplikasinya untuk memberikan gambaran yang lebih jelas tentang penggunaan metode dan sifat-sifat dari metode Bayes.

1.6.2 Data dan Variabel Penelitian

Data penelitian ini menggunakan data simulasi yang dibangkitkan dari *software* Minitab 14. Data yang dibangkitkan ini merupakan data yang berdistribusi Gamma sebanyak 40 data, dengan parameter $\alpha = 0.8$ dan $\beta = 1.5$.

1.6.3 Metode Analisis

Dalam penelitian ini, metode analisis yang digunakan penulis berdasarkan langkah-langkah berikut:

1. Mengestimasi parameter distribusi Gamma dengan metode Bayes berdasarkan langkah-langkah berikut:
   a. Mendefinisikan fungsi distribusi Gamma dan membentuk fungsi kepadatan peluang distribusi Gamma untuk suatu peubah acak $X_1, X_2, \dots, X_n$.
   b. Membentuk fungsi *Likelihood* yang dapat diperoleh dengan mengalikan fungsi kepadatan peluang $f(X_i \mid \alpha, \beta)$ dengan asumsi $X_i \sim \Gamma(\alpha, \beta)$.
   c. Menentukan distribusi *prior* non-informatif yang merupakan pemilihan distribusi yang tidak didasarkan pada data yang ada.
   d. Menentukan distribusi *posterior* yang dapat ditentukan dengan membagi hasil perkalian fungsi Likelihood dan distribusi *prior*nya dengan distribusi *marginal* atau dapat dirumuskan:

$$\pi(\theta \mid x) = \frac{f(x \mid \theta)\pi(\theta)}{g(x)}$$

2. Aplikasi estimasi data simulasi berdistribusi Gamma dengan metode Bayes menggunakan *software* WinBUGS mengikuti langkah-langkah berikut:
   a. Membuat struktur pemodelan grafik dalam *doodle* dengan nama-nama *node* yang sesuai dengan nama-nama variabel model. Jika pemodelan grafik telah selesai dibuat, maka secara otomatis dibuatkan kode program dalam *window* yang baru.
   b. Memberikan data masukan dan nilai inisialisasi pada proses iteratif MCMC, kemudian simulasi dapat dijalankan dan dianalisis hasilnya.

1.7 Sistematika Penulisan

Untuk mempermudah memahami penulisan ini secara keseluruhan, maka penulis menggambarkan sistematika penulisan sebagai berikut:

BAB I PENDAHULUAN

Pada bab ini membahas tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan, batasan masalah, manfaat, metode penelitian dan sistematika penulisan.

BAB II KAJIAN PUSTAKA

Pada bab ini menyajikan kajian teori mengenai peubah acak, fungsi distribusi peluang kontinu, ekspektasi, variansi, fungsi dan distribusi Gamma, estimasi parameter, fungsi Likelihood, dan metode Bayes yang diambil dari beberapa referensi yang terkait dengan topik tersebut. Serta kajian estimasi parameter dalam Al Qur’an.

BAB III HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini membahas tentang estimasi parameter pada distribusi Gamma menggunakan metode Bayes dan kaitannya dengan Al Qur'an, serta aplikasinya dalam kehidupan.

BAB IV PENUTUP

Pada bab ini berisi kesimpulan dari pembahasan dan saran-saran yang berkaitan dengan hasil pembahasan.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Peubah Acak

Peubah acak atau variabel acak merupakan hasil-hasil prosedur penyampelan acak (*random sampling*) atau eksperimen acak dari suatu data yang telah dianalisis secara statistik. Peubah acak dinyatakan dengan huruf besar, misal *X*, sedangkan nilai dari peubah acak dinyatakan dengan huruf kecil padanannya, misal *x*.

***Definisi 1*: Peubah Acak** (Walpole dan Myers, 2005: 51)

Peubah acak ialah suatu fungsi yang mengaitkan suatu bilangan real pada setiap unsur dalam ruang sampel.

Peubah acak diskrit adalah peubah acak yang memiliki nilai yang dapat dicacah (*countable*). Peubah acak kontinu adalah peubah acak yang memiliki nilai yang tak terhingga banyaknya sepanjang sebuah interval yang tidak terputus. Variabel acak kontinu biasanya diperoleh dari hasil pengukuran (Harinaldi, 2005: 62).

2.2 Fungsi Distribusi Peluang Untuk Peubah Acak Kontinu

***Definisi 2:* Peubah Acak Kontinu** (Hogg, Mc Kean, dan Craig, 2005: 45)

Sebuah peubah acak kontinu X jika fungsi distribusi kumulatif $F_X(x)$ adalah fungsi kontinu untuk setiap $x \in R$ maka peubah acak kontinu dinyatakan:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)dt \qquad (2.1)$$

Definisi 3: **Fungsi Kepadatan Peluang** (Walpole dan Myers, 2005: 60)

Fungsi *f(x)* adalah fungsi kepadatan peluang peubah acak kontinu *X*, yang didefinisikan atas himpunan semua bilangan real R, bila memenuhi:

1. $f(x) \geq 0$ $untuk\ semua\ x\ \in R$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$
3. $P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$ (2.2)

2.3 Ekspektasi dan Variansi

2.3.1 Ekspektasi

Definisi 4: **Ekspektasi** (Walpole dan Myers, 2005: 94)

Jika *X* menyatakan suatu variabel acak kontinu yang dapat mengambil setiap nilai *x* yang memiliki probabilitas *f(x)*, maka ekspektasi (nilai harapan) dinyatakan sebagai berikut:

$$E(X) = \int x \cdot f(x)dx \qquad (2.3)$$

Definisi 5: (Walpole dan Myers, 2005: 97)

Misalkan suatu peubah acak kontinu dengan fungsi kepadatan peluang *f(x)* dan *g(x)* suatu fungsi dari *X*. Nilai harapan dari *g(X)* adalah:

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx \qquad (2.4)$$

Teorema 1: (Walpole dan Myers, 2005: 60)

Bila a dan b konstanta, maka

$$E(aX + b) = aE(X) + b \qquad (2.5)$$

Bukti:

Dengan menggunakan definisi 5, maka:

$$E(aX+b) = \int_{-\infty}^{\infty} (ax+b)f(x)dx$$

$$= a\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx + b\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

$$= aE(X) + b \cdot 1$$

$$= aE(X) + b$$

Jadi terbukti bahwa $E(aX+b) = aE(X) + b$, sehingga berakibat

1) Bila $a = 0$ maka $E(b) = b$
2) Bila $b = 0$ maka $E(aX) = aE(X)$

2.3.2 Variansi

***Definisi 6:* Variansi** (Walpole dan Myers, 2005: 104)

Misalkan X peubah acak kontinu dengan distribusi peluang $f(x)$ dan rataan μ, maka $Var(X) = \sigma^2$ adalah

$$\sigma^2 = E[(X-\mu)^2]$$

Teorema 2: (Walpole dan Myers, 2005: 105)

$$Var(X) = \sigma^2 = E(X-\mu)^2 = E(X^2) - \mu^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 \qquad (2.6)$$

Bukti:

$$Var(X) = E(X-\mu)^2$$

$$= E(X^2 - 2\mu X + \mu^2)$$

$$= E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2$$

$$= E(X^2) - 2\mu\mu + \mu^2$$

$$= E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2$$

$$= E(X^2) - \mu^2$$

$$= E(X^2) - [E(X)]^2$$

Sehingga terbukti bahwa $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

2.4 Fungsi Kepadatan Peluang

2.4.1 Fungsi Kepadatan Peluang Bersama

Definisi 7: **Fungsi Kepadatan Peluang Bersama** (Bain dan Engelhardt (1992), dalam Siska, 2011: 22)

Sebuah k-dimensi nilai vektor variabel acak kontinu $X = (X_1, X_2, \dots, X_k)$ dengan fungsi kepadatan peluang bersama $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$, maka fungsi kepadatan kumulatifnya dapat ditulis

$$f(x_1, x_2, \dots, x_k) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_k} f(t_1, t_2, \dots, t_k) dt_1 dt_2 \dots dt_k \qquad (2.7)$$

Untuk semua nilai $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)$.

2.4.2 Fungsi Kepadatan Peluang Marginal

Definisi 8**: Fungsi Kepadatan Peluang Marginal** (Bain dan Engelhardt (1992), dalam Siska, 2011: 22)

Jika pasangan (X_1, X_2) adalah variabel acak kontinu yang mempunyai fungsi kepadatan peluang bersama $f(x_1, x_2)$, maka fungsi kepadatan peluang marginal untuk X_1 dan X_2 adalah

$$f_1(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)dx_2 \qquad (2.8)$$

$$f_2(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)dx_1 \qquad (2.9)$$

2.5 Distribusi Bersyarat

Definisi 9: **Distribusi Bersyarat** (Bain dan Engelhardt (1992), dalam Siska, 2011: 22)

Jika X_1 dan X_2 adalah variabel acak diskrit atau kontinu dengan fungsi kepadatan peluang bersama $f(x_1, x_2)$, maka fungsi kepadatan peluang bersyarat dari X_2 jika diketahui $X_1 = x_1$ didefinisikan dengan

$$f(x_2 \mid x_1) = \frac{f(x_1, x_2)}{f_1(x_1)} \qquad (2.10)$$

Untuk nilai x_1 sedemikian hingga $f_1(x_1) > 0$, dan nol untuk lainnya. Sedangkan fungsi kepadatan peluang bersyarat dari X_1 jika diketahui $X_2 = x_2$ didefinisikan dengan

$$f(x_1 \mid x_2) = \frac{f(x_1, x_2)}{f_2(x_2)} \qquad (2.11)$$

Untuk nilai x_2 sedemikian hingga $f_2(x_2) > 0$, dan nol untuk lainnya.

2.6 Fungsi Gamma dan Distribusi Gamma

2.6.1 Fungsi Gamma

Definisi 10: **Fungsi Gamma** (Hogg, Mc Kean, dan Craig, 2005: 149)

Fungsi gamma didefinisikan sebagai berikut:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx \quad untuk\ \alpha > 0 \tag{2.12}$$

Teorema 3: (Samsul Kislam (1994), dalam Misbahussurur, 2009: 34)

Bila $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ maka:

1. $\Gamma(1) = 1$
2. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

Bukti:

1. $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$

$$= \int_0^\infty x^{1-1} e^{-x} dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-x} dx$$

$$= -e^{-x} \mid_0^\infty$$

$$= -\frac{1}{e^x} \mid_0^\infty$$

$$= -0 - (-1)$$

$$= 1$$

2. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty x^{\frac{1}{2}-1} e^{-x} dx$

$$= \int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx$$

$$= \int_0^\infty (p^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-p^2} 2p\, dp$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty p^{-\frac{2}{2}} e^{-p^2} 2p\, dp$$

$$= \int_0^\infty p^{-1} e^{-p^2} 2p\, dp$$

$$= \int_0^\infty 2pp^{-1} e^{-p^2}\, dp$$

$$= 2\int_0^\infty p^{1-1} e^{-p^2}\, dp$$

$$= 2\int_0^\infty p^{0} e^{-p^2}\, dp$$

$$= 2\int_0^\infty e^{-p^2}\, dp, karena \int_0^\infty e^{-p^2}\, dp = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)\ maka$$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$$

$$= \sqrt{\pi}$$

2.6.2 Distribusi Gamma

Definisi 11: **Distribusi Gamma** (Hogg, Mc Kean, dan Craig, 2005: 149)

Suatu variabel acak X dikatakan memiliki distribusi Gamma atau terdistribusi Gamma, jika fungsi kepadatan peluangnya adalah

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} & x > 0\ (\alpha, \beta > 0) \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \tag{2.13}$$

dimana $\Gamma(\alpha)$ adalah fungsi Gamma.

Teorema 4: (Hogg, Mc Kean, dan Craig, 2005: 151)

Bila X berdistribusi Gamma $X \sim G(x \mid \alpha, \beta, 0)$ maka *mean* dan variansinya ditentukan oleh

$$\mu = E(X) = \alpha\beta \quad dan \quad \sigma^2 = \alpha\beta^2 \tag{2.14}$$

Bukti:

$$\mu = E(X)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^r f_x(x) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^r \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1+r} e^{-\frac{x}{\beta}} dx$$

Misalkan $y = \frac{x}{\beta}, \frac{y}{dx} = \frac{1}{\beta}$ dan $x = y\beta, dx = \beta dy$, sehingga diperoleh

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} (y\beta)^{\alpha-1+r} e^{-\frac{y\beta}{\beta}} \beta dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1+r} \beta^{\alpha-1+r} e^{-y} \beta dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta^{\alpha-1+r}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1+r} e^{-y} \beta dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta^{\alpha-1+r}}{\beta^\alpha \beta^{-1} \Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1+r} e^{-y} dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta^{\alpha-1+r}}{\beta^{\alpha-1} \Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1+r} e^{-y} dy$$

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta^{\alpha-1}\beta^{r}}{\beta^{\alpha-1}\Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1+r} e^{-y} dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta^{r}}{\Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1+r} e^{-y} dy$$

$$= \frac{\beta^{r}}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} y^{\alpha-1+r} e^{-y} dy$$

$$= \frac{\beta^{r}}{\Gamma(\alpha)} \Gamma(\alpha + r)$$

$$= \frac{\beta^{r}\Gamma(\alpha + r)}{\Gamma(\alpha)}$$

Ambil $r = 1$, maka diperoleh

$$\mu = E(X) = \frac{\beta\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha)}$$

$$= \frac{\beta(\alpha!)}{(\alpha - 1)!}$$

$$= \frac{\beta\alpha(\alpha - 1)!}{(\alpha - 1)!}$$

$$= \beta\alpha$$

$$= \alpha\beta$$

Sehingga terbukti bahwa $\mu = E(X) = \alpha\beta$

Ambil $r = 2$, maka

$$E(X^2) = \frac{\beta^2\Gamma(\alpha + 2)}{\Gamma(\alpha)}$$

$$= \frac{\beta^2(\alpha + 1)!}{(\alpha - 1)!}$$

$$E(X^2) = \frac{\beta^2(\alpha+1)\big((\alpha+1)-1\big)!}{(\alpha-1)!}$$

$$= \frac{\beta^2(\alpha+1)\big((\alpha+1)-1\big)\Big(\big((\alpha+1)-1\big)-1\Big)!}{(\alpha-1)!}$$

$$= \frac{\beta^2(\alpha+1)\alpha\big((\alpha+1)-2\big)!}{(\alpha+1)}$$

$$= \frac{\beta^2(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)!}{(\alpha+1)}$$

$$= \beta^2(\alpha+1)\alpha$$

$$= \beta^2(\alpha^2+\alpha)$$

$$= \alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^2$$

Bila $\sigma^2 = Var(X)$, maka diperoleh

$$\sigma^2 = Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$= \alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^2 - (\alpha\beta)^2$$

$$= \alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^2 - \alpha^2\beta^2$$

$$= \alpha\beta^2$$

Sehingga terbukti bahwa $\sigma^2 = Var(X) = \alpha\beta^2$

2.7 Estimasi dan Sifat-Sifat *Estimator* (Penduga)

2.7.1 Estimasi

Estimasi (pendugaan) adalah keseluruhan proses yang menggunakan sebuah estimator untuk menghasilkan sebuah *estimate* (hasil estimasi) dari suatu parameter. *Estimator* merupakan setiap statistik (*mean* sampel, persentase sampel, variansi sampel dan lain-lain) yang digunakan untuk mengestimasi sebuah parameter. *Estimate* (hasil estimasi) adalah sebuah nilai spesifik atau kuantitas dari suatu statistik seperti mean sampel, persentase sampel, atau variansi sampel (Harinaldi, 2005:127).

2.7.2 Sifat-Sifat *Estimator* (Penduga)

Adapun sifat-sifat penduga yang baik antara lain:

1. Sifat Tak Bias

   Sifat tak bias merupakan sifat baik dari *estimator* yang diperoleh melalui pendekatan klasik, dalam pembahasan pemilihan *estimator* terbaik salah satunya harus memenuhi sifat tak bias. Suatu statistik disebut *estimator* tak bias dari suatu parameter populasi jika mean atau ekspektasi dari statistik itu sama dengan parameter yang ditaksir (Spiegel, Schiller, dan Srinivasan, 2004: 166). Sehingga untuk suatu statistik $\widehat{\Theta}$ dikatakan penaksir tak bias parameter θ bila

$$\mu_{\widehat{\Theta}} = E(\widehat{\Theta}) = \theta \tag{2.15}$$

2. Efisien

   Jika distribusi sampling dari dua statistik memiliki mean yang sama, statistik dengan variansi yang lebih kecil disebut *estimator* yang lebih efisien dari mean. Maka nilai statistik efisiennya disebut sebagai estimasi efisien (*efficient estimate*) (Spiegel, Schiller, dan Srinivasan, 2004: 167).

3. Konsisten

   Suatu *estimator* dapat dikatakan konsisten bila memenuhi syarat berikut:

a. Jika ukuran sampel semakin bertambah maka *estimator* akan mendekati parameternya. Jika besarnya sampel menjadi tak terhingga maka *estimator* konsisten harus dapat memberi suatu *estimator* titik yang sempurna terhadap parameternya. Jadi $(\hat{\theta})$ merupakan *estimator* yang konsisten jika dan hanya jika:

$$E\left(\hat{\theta} - E(\hat{\theta})\right)^2 \to 0 \; jika \; n \to \infty \tag{2.16}$$

b. Jika ukuran sampel bertambah besar maka distribusi sampling *estimator* akan mengecil menjadi suatu garis tegak lurus di atas parameter yang sama dengan probabilitas sama dengan 1.

2.8 Fungsi Likelihood

Definisi 12: (Bain dan Engelhardt, (1992), dalam Siska, 2011:38)

Fungsi likelihood dari n variabel acak $X_1, X_2, \dots, X_n$ didefinisikan sebagai fungsi kepadatan bersama dari n variabel acak. Fungsi kepadatan bersama $f_{x_1,x_2,\dots,x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta)$ yang mempertimbangkan fungsi dari θ. Jika $x_1, x_2, \dots, x_n$ adalah sampel acak dari fungsi kepadatan $f(x;\theta)$, maka fungsi kepadatan gabungan adalah

$$L(\theta) = f(x_1;\theta)f(x_2;\theta)\dots f(x_n;\theta)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) \tag{2.17}$$

Kemungkinan maksimum dapat diperoleh dengan menentukan turunan dari L terhadap θ dan menyatakannya sama dengan nol.

2.9 Metode Bayes

Metode Bayes merupakan suatu metode yang menyediakan cara di mana data historis dapat digunakan dalam penilaian saat ini. Metode Bayes mempunyai cara tersendiri dalam menentukan *prior* dan *posterior* yang secara signifikan dapat membantu menyelesaikan bagian yang sulit dari sebuah solusi.

2.9.1 Teorema Bayes

Bila $y' = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ adalah suatu vektor dari n percobaan yang memiliki distribusi probabilitas $p(y \mid \theta)$ yang tergantung pada k nilai parameter yaitu $\theta' = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$. Anggap juga bahwa θ itu sendiri memiliki distribusi peluang $p(\theta)$. Maka

$$p(\, y \mid \theta\,)p(\theta) = p(y, \theta) = p(\,\theta \mid y\,)p(y) \qquad (2.18)$$

Diberikan data pengamatan y, maka distribusi bersyarat dari θ adalah

$$p(\,\theta \mid y\,) = \frac{p(\,y \mid \theta\,)p(\theta)}{p(y)} \qquad (2.19)$$

dengan,

$$p(y) = Ep(\,y \mid \theta\,) = c^{-1} = \begin{cases} \int p(\,y \mid \theta\,)p(\theta)d\theta & \theta \; kontinu \\ \sum p(\,y \mid \theta\,)p(\theta) & \theta \; diskrit \end{cases} \qquad (2.20)$$

(Box dan Tiao, 1973).

2.9.2 Distribusi *Prior*

Dalam metode Bayes, memilih distribusi *prior* $f(\theta)$ menunjukkan ketidakpastian tentang parameter θ yang tidak diketahui. Distribusi *prior* dikelompokkan menjadi dua kelompok berdasarkan bentuk fungsi likelihoodnya (Box dan Tiao, 1973).

1. Berkaitan dengan bentuk distribusi hasil identifikasi pola datanya
   a. Distribusi *prior* konjugat, mengacu pada acuan analisis model terutama dalam pembentukan fungsi likelihoodnya sehingga dalam penentuan *prior* konjugat selalu dipikirkan mengenai penentuan pola distribusi *prior* yang mempunyai bentuk konjugat dengan fungsi kepadatan peluang pembangkit likelihoodnya.
   b. Distribusi *prior* tidak konjugat, apabila pemberian *prior* pada suatu model tidak memperhatikan pola pembentuk fungsi likelihoodnya.
2. Berkaitan dengan penentuan masing-masing parameter pada pola distribusi *prior* tersebut.
   a. Distribusi *prior* informatif mengacu pada pemberian parameter dari distribusi *prior* yang telah dipilih baik distribusi *prior* konjugat atau tidak, pemberian nilai parameter pada distribusi *prior* ini akan sangat mempengaruhi bentuk distribusi *posterior* yang akan didapatkan dengan menggabungkan informasi distribusi *prior* dengan informasi data yang diperoleh.
   b. Distribusi *prior* non-informatif, pemilihannya tidak didasarkan pada data yang ada atau distribusi *prior* yang tidak mengandung informasi tentang parameter θ, salah satu pendekatan dari non-informatif *prior* adalah metode Jeffrey's.

2.9.3 Distribusi *Posterior*

Definisi 13: (Walpole dan Myers, 2005: 269)

Bila diberikan data x, maka distribusi dari θ yang disebut distribusi *posterior* adalah

$$\pi(\theta \mid x) = \frac{f(x \mid \theta)\pi(\theta)}{g(x)} \tag{2.21}$$

di mana *g(x)* adalah fungsi distribusi peluang *marginal* dari *x*. Fungsi distribusi peluang *marginal* dalam definisi di atas dapat dihitung dengan menggunakan rumus berikut

$$g(x) = \begin{cases} \sum_{\theta} f(x \mid \theta)\pi(\theta), (diskrit) \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x \mid \theta)\pi(\theta)d\theta\ (kontinu) \end{cases} \tag{2.22}$$

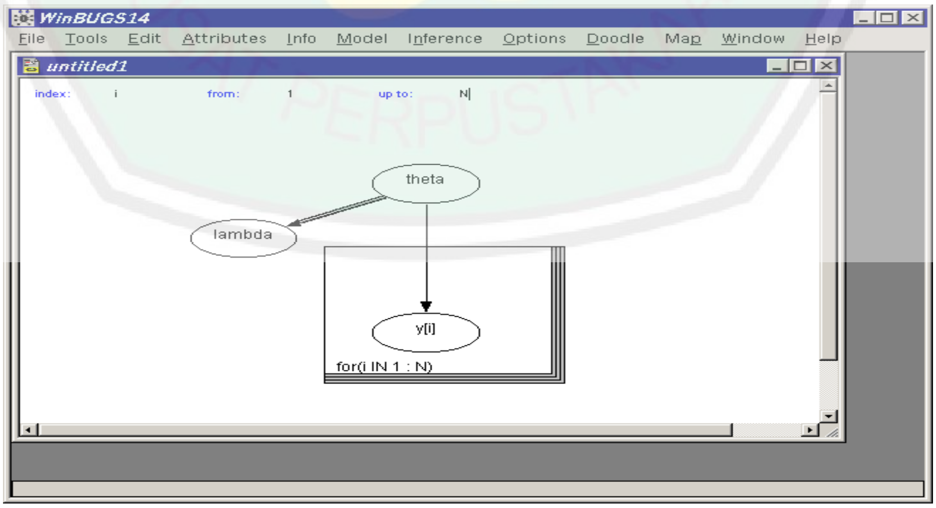
Dalam konsep dasar Bayes, semua informasi tentang θ dari data yang diamati dan dari pengetahuan *prior*nya termuat dalam *posterior* atau distribusi $\pi(\theta \mid x)$.

2.10 WinBUGS

WinBUGS adalah bahasa pemrograman berbasis perangkat lunak yang digunakan untuk menghasilkan distribusi *posterior* untuk sampel acak dari parameter model Bayes. Pengguna hanya perlu menentukan data, struktur dari model yang dipertimbangkan, dan beberapa nilai awal untuk parameter model. Tujuan utama WinBUGS adalah untuk mengembangkan perangkat lunak untuk membentuk distribusi *posterior* dari *k* sampel *Markov Chain Monte Carlo* (MCMC) dari parameter model yang diinginkan. Nama WinBUGS diambil dari isi paket programnya yang dikembangkan berdasarkan pada metode *Gibbs*

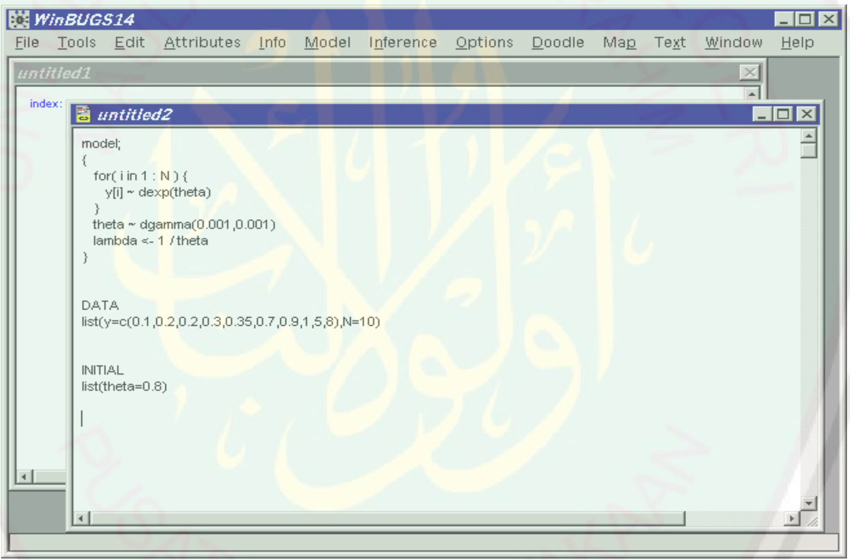
Sampler dan dibuat untuk dapat dijalankan di dalam sistem operasi komputer *Windows*. Sehingga pengertian nama WinBUGS adalah *Bayesian Using Gibbs Sampler* (BUGS) dalam *Windows* (Ntzoufras, 2009: 83).

Langkah pertama dalam pemodelan WinBUGS adalah membentuk grafik struktur model. Model tersebut dapat ditentukan dalam *doodle* (Gambar 2.1) menggunakan *node* yang relatif sederhana (yang mirip dengan S-Plus). Terdapat tiga tipe *node*, yaitu *stochastic*, *logical*, dan *constant*. *Node* dengan bentuk *ellips* akan berarti bertipe *stochastic* atau *logical*, sedangkan apabila *node* tersebut berbentuk kotak berarti *node* tersebut bertipe *constant*. Setelah menggambar struktur model dalam *doodle*, maka secara otomatis dibuatkan *window* baru yang berisi kode program yang sesuai dengan struktur model dalam *doodle* (Gambar 2.2). Untuk menjalankan program WinBUGS ini perlu adanya data masukan dan nilai inisialisasi pada proses iteratif MCMC (Gambar 2.3). Sehingga program dapat dijalankan.



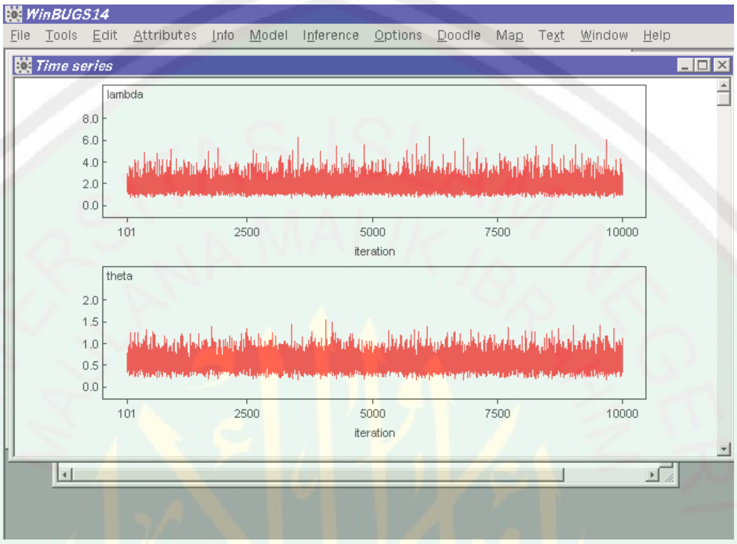
Gambar 2.1 *Graphical* Eksponensial Model

Gambar 2.2 Program WinBUGS dari Graphical Model

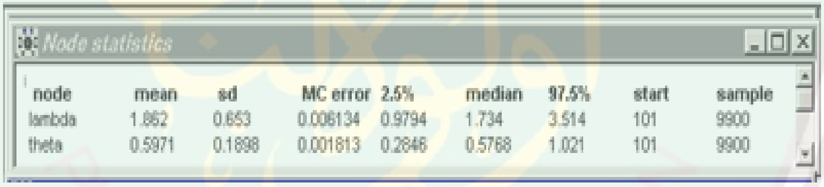


Gambar 2.3 Program WinBUGS dari *Graphical Model* Lengkap dengan Data dan Initialisasi Parameter

Dari hasil program yang dijalankan sehingga diperoleh nilai konvergen bagi parameter yang diduga. Kekonvergenan dapat diketahui dengan melihat plot *dynamic trace* (Gambar 2.4) dan juga dapat dilihat dari nilai MC *error*. *Dynamic trace* merupakan plot nilai dari variabel pada seluruh iterasi yang telah konvergen. Jika *dynamic trace* menunjukkan pola acak maka iterasi dihentikan dan sebuah sampel acak dikatakan telah konvergen. MC *error* (Gambar 2.5) merupakan salah baku dari proses *Markov Chain* sehingga dapat dikatakan bahwa nilai *mean* pada metode Bayes MCMC merupakan koefisien *estimator* parameter yang terbentuk. Apabila MC *error* bernilai kurang dari 5% simpangan baku maka kekonvergenan dapat terpenuhi dan iterasi dihentikan.



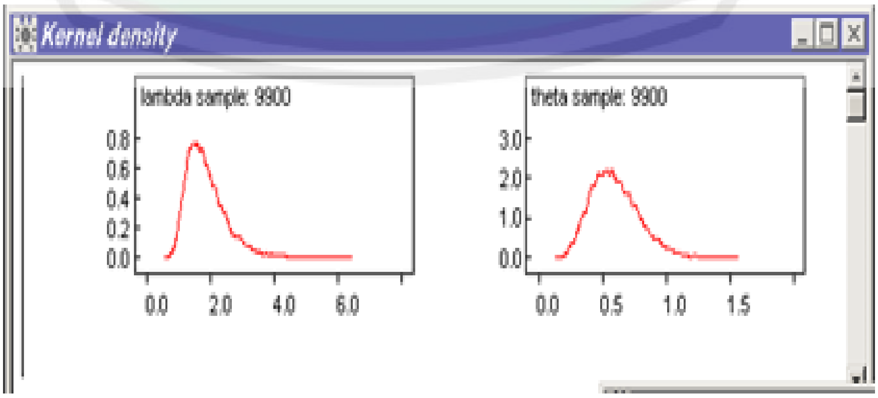
Gambar 2.4 *Dynamic Trace Plot* dari Eksponensial Parameter


Node statistics

node	mean	sd	MC error	2.5%	median	97.5%	start	sample
lambda	1.862	0.653	0.006134	0.9794	1.734	3.514	101	9900
theta	0.5971	0.1898	0.001813	0.2846	0.5768	1.021	101	9900

Gambar 2.5 Penduga Parameter Sebaran Eksponensial

Kepadatan Kernel (gambar 2.6) digunakan untuk melihat sebaran *posterior* yang terbentuk dari variabel parameter yang diduga (Ntzoufras, 2009: 83-108).



Gambar 2.6 *Kepadatan Kernel* dari Eksponensial Parameter.

2.11 Kajian Al-Qur'an tentang Perhitungan Matematis dan Estimasi

Ilmu merupakan samudera yang maha luas. Sesungguhnya ilmu merupakan cahaya dan petunjuk sedangkan kebodohan adalah kegelapan dan kesesatan. Begitu pentingnya ilmu, Allah SWT menganjurkan kepada manusia untuk selalu menuntut ilmu mulai lahir hingga ajal menjemput. Menuntut ilmu merupakan kemuliaan di dunia dan di akhirat serta terdapat balasan pahala yang terus menerus tanpa putus hingga hari kiamat datang.

Islam tidak membiarkan umatnya hidup dalam kebodohan, apapun bentuknya. Islam justru menuntut umatnya untuk menjadi umat yang melandaskan segala pikiran, perbuatan, dan tindak tanduknya di muka bumi ini dengan ilmu. Jadi bagi seorang muslim kewajiban menuntut ilmu dan bersikap sopan santun saat berada dalam suatu majlis merupakan hal yang tak terbantahkan.

Menuntut ilmu telah diteladani oleh Rasulullah SAW. Hal ini diperkuat dengan suatu hadits yang menyebutkan bahwa:

Artinya : "Barang siapa menginginkan hal-hal yang berhubungan dengan dunia, wajiblah ia memiliki ilmunya; dan barang siapa yang ingin (selamat dan berbahagia) di akhirat, wajiblah ia mengetahui ilmunya pula; dan barangsiapa yang menginginkan kedua-duanya, wajiblah ia memiliki ilmu kedua-duanya pula". (HR. Bukhari dan Muslim).

2.11.1 Konsep Perhitungan Matematis dalam Al-Qur'an

Sebagai seorang ilmuwan, harus dapat membaca situasi alam semesta ini dengan bidang keilmuan masing-masing. Dalam matematika, istilah perhitungan sudah tidak asing lagi, karena matematika sangat erat kaitannya dengan perhitungan. Sehingga ada yang berpendapat bahwa matematika adalah ilmu hitung. Dengan matematika dapat fenomena alam semesta ini dibuka. Bila memperhatikan firman Allah SWT dalam QS. Al-Jinn [72] ayat 28, bahwa:

لِّيَعْلَمَ أَن قَدْ أَبْلَغُوا۟ رِسَٰلَٰتِ رَبِّهِمْ وَأَحَاطَ بِمَا لَدَيْهِمْ وَأَحْصَىٰ كُلَّ
شَىْءٍ عَدَدًۢا ﴿٢٨﴾

Artinya: 28. *Supaya Dia mengetahui, bahwa sesungguhnya rasul-rasul itu telah menyampaikan risalah-risalah Tuhannya, sedang (sebenarnya) ilmu-Nya meliputi apa yang ada pada mereka, dan Dia menghitung segala sesuatu satu persatu.*

Dari ayat di atas, dapat diketahui dengan jelas Allah adalah raja dari segala sesuatu, bahkan dalam hal perhitungan. Ditegaskan dalam ayat di atas, perhitungan yang Allah lakukan dengan cara perhitungan satu persatu ini menunjukkan bahwa perhitungan Allah sangat cepat dan sangat teliti. Tidak satupun luput dari pengetahuan Allah.

2.11.2 Konsep Estimasi dalam Al-Qur'an

Estimasi merupakan salah satu kegiatan yang dilakukan dalam ilmu statistika. Estimasi biasanya diartikan sebagai pendugaan atau penaksiran. Dalam al-Quran terdapat suatu ayat yang memuat tentang konsep estimasi yang disebutkan dalam QS. Al-Baqarah [2] ayat 78 sebagai berikut.

وَمِنْهُمْ أُمِّيُّونَ لَا يَعْلَمُونَ ٱلْكِتَٰبَ إِلَّآ أَمَانِىَّ وَإِنْ هُمْ إِلَّا يَظُنُّونَ ﴿٧٨﴾

Artinya: *Dan diantara mereka ada yang buta huruf, tidak mengetahui Al Kitab (Taurat), kecuali dongengan bohong belaka dan mereka hanya menduga-duga*

Ayat di atas menjelaskan bahwa kebanyakan orang Yahudi belum belajar menulis dan tidak bisa membaca tulisan sehingga mereka mudah sekali di bohongi. Selain itu mereka juga tidak mengetahui kabar tentang apa yang telah diketahui oleh orang-orang terdahulu. Dengan kondisi demikian ini mereka hanya bisa menduga hal-hal yang tidak diketahuinya (Abdurrahman, 2006: 142).

Kaitan ayat tersebut dengan metode estimasi terletak pada lafadh *yazhunnun* seperti yang diungkapkan Ibnu 'Abbas, Muhammad bin Ishak mengatakan bahwa artinya mereka tidak mengetahui isi kitab tersebut dan mereka mengetahui kenabian (Muhammad) hanya melalui dugaan belaka. Mujahid, Qatadah, Abdul 'Aliyah dan Rabi' bin Annas mengatakan bahwa dugaan mereka itu hanyalah dusta belaka dan mereka hanya berprasangka buruk terhadap Allah SWT tanpa sedikitpun kebenaran. Sesungguhnya manusia tidak mengetahui kebenaran yang mutlak atas sesuatu tetapi manusia hanya menduga atau menyangka saja. Pendugaan itu belum jelas kebenarannya. Oleh karena itu, hasil pendugaan itu harus diuji kebenarannya. (Abdullah, 2004: 167-168).

Metode estimasi (pendugaan) ini juga disebutkan dalam suatu hadits jual beli, yaitu: *Hadits riwayat Ibnu Abbas r.a, ialah berkata: Rasulullah SAW melarang menjual pohon kurma sebelum ia memakan sebagian buahnya atau dimakan orang lain dan sebelum ditimbang. Aku berkata: apa yang dimaksud dengan ditimbang? Seorang lelaki yang berada di sebelahnya menjawab: Yaitu ditaksir (Shahih Muslim No.2833)* (Al Albani, 2007: 649).

Menurut sejarah, metode estimasi ini sudah sering dilakukan Rasulullah. Salah satu contohnya adalah pada saat beliau akan menyusun strategi berperang. Menurut beliau memperoleh informasi tentang kondisi militer musuh serta strategi perang dan pasukan yang dibawanya ke medan sangatlah penting. Sehingga beliau mengutus mata-matanya untuk mengumpulkan informasi dari berbagai sumber tentang lawannya. Dengan informasi yang diperoleh sebelum perang sangat efektif untuk menyusun strategi mengalahkan musuh di medan perang nantinya. Mata-mata ini hanya dikirimkan untuk mengumpulkan informasi yang diperlukan tentang musuh, oleh karena itu memperoleh perintah yang tegas untuk tidak melibatkan diri melawan musuh (Rahman, 2002: 120).

Salah satu perang besar yang pernah dialami Rasulullah beserta para pengikutnya adalah perang Badar. Dalam menyusun siasatnya, beliau mendapat informasi dari mata-mata yang telah ditugaskan salah satunya adalah dari sekelompok patroli di bawah pimpinan Ali dan beranggotakan Zubair bin ‘Awwam dan Sa’ad bin Abi Waqqash pergi ke sumur Badar untuk mendapatkan informasi lebih banyak tentang kafir Quraisy maupun kafilahnya. Di dekat sumur, kelompok itu bertemu dengan dua orang budak Quraisy bersama seekor unta yang membawa air. Mereka menahan kedua orang budak itu lalu membawanya kepada Nabi. Setelah memeriksa mereka, diketahuilah bahwa keduanya masing-masing milik Bani Hajjaj dan Bani ‘Ash yang ditugasi memasok air bagi kaum Quraisy. Nabi bertanya,”Di mana orang-orang Quraisy itu?” Budak-budak itu menjawab bahwa mereka berada di sisi lain bukit yang terletak di gurun. Kemudian beliau bertanya tentang jumlah mereka. Budak-budak itu mengatakan tidak mengetahui dengan pasti. Nabi bertanya, “Berapa ekor unta yang mereka sembelih setiap hari?” Dijawab bahwa mereka menyembelih sepuluh ekor unta pada suatu hari dan sembilan ekor di hari lainnya. Nabipun menyimpulkan bahwa jumlah mereka antara 900 hingga 1000 orang. Setelah itu nabi menanyai tentang para pemimpin Quraisy. Mereka menjawab bahwa ‘Utbah bin Rabiyyah, Syaibah bin Rabiyah, Abu al-Bakhtari bin Hisyam, Abu Jahal bin Hisyam, Hakim bin Hizam dan Umayyah bin Khalaf termasuk diantara mereka. Kemudian Nabi memerintahkan supaya kedua orang itu ditawan agar pemeriksaan dapat dilanjutkan (Subhani, 2006: 328-329).

BAB III

HASIL DAN PEMBAHASAN

Bab ini membahas tentang proses dan hasil estimasi dari distribusi Gamma dengan menggunakan metode Bayes. Pada bab ini juga membahas keterkaitan estimasi parameter dari distribusi Gamma menggunakan metode Bayes dengan kajian al-Qur’an dan Hadits. Proses dalam mengestimasi distribusi Gamma dengan metode Bayes adalah sebagai berikut:

3.1 Fungsi Distribusi Gamma

Distribusi Gamma merupakan salah satu dari beberapa distribusi kontinu.Distribusi Gamma memiliki dua parameter, yaitu α dan β di mana masing-masing parameter tersebut belum diketahui nilainya. Fungsi kepadatan peluang distribusi Gamma didefinisikan sebagai berikut:

$$f(\,x \mid \alpha, \beta\,) = \begin{cases} \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{\frac{-x}{\beta}} untuk x > 0\,, \alpha > 0, \beta > 0 \\ 0, \quad untuk x lainnya \end{cases} \tag{3.1}$$

Fungsi kepadatan peluang distribusi Gamma di atas dapat diperoleh dari fungsi Gamma yang didefinisikan pada definisi 10.Untuk suatu peubah acak X sebanyak $n$yaitu$X_1, X_2, \dots, X_n$ dan berdasarkan persamaan (3.1) dapat dicari fungsi kepadatan peluang distribusi Gamma yaitu:

$$f(\,X_i \mid \alpha, \beta\,) = f(\{X_1, X_2, \dots, X_n\})$$

$$= f(X_1) f(X_2) \dots f(X_n)$$

$$f(X_i \mid \alpha, \beta) = \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} X_i^{\alpha-1} exp\left(\frac{-X_i}{\beta}\right)$$

$$= \left[\frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} X_1^{\alpha-1} exp\left(\frac{-X_1}{\beta}\right)\right]\left[\frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} X_2^{\alpha-1} exp\left(\frac{-X_2}{\beta}\right)\right] \dots$$

$$\left[\frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} X_n^{\alpha-1} exp\left(\frac{-X_n}{\beta}\right)\right]$$

$$= \left(\frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}\right)^n \left(X_1^{\alpha-1} X_2^{\alpha-1} \cdots X_n^{\alpha-1}\right) exp\left(\frac{-X_1}{\beta} + \frac{-X_2}{\beta} + \cdots + \frac{-X_n}{\beta}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}\right)^n \left(X_1^{\alpha-1} X_2^{\alpha-1} \cdots X_n^{\alpha-1}\right) exp\left(\left(-\frac{1}{\beta}\right)(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}\right)^n \left(X_1^{\alpha-1} X_2^{\alpha-1} \cdots X_n^{\alpha-1}\right) exp\left(-\frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} X_i^{\alpha-1} exp\left(-\frac{X_i}{\beta}\right) \qquad (3.2)$$

Mendefinisikan dan mengetahui karakteristik distribusi Gamma di atas merupakan langkah awal sebelum mengestimasi parameternya. Mengetahui karakteristik distribusi Gamma ini bertujuan untuk mengetahui metode apa saja yang dapat digunakan untuk mengestimasi distribusi Gamma agar hasil pendugaan yang diperoleh memiliki kesalahan yang kecil. Mengetahui karakteristik obyek sebelum melakukan pendugaan telah diteladani oleh Rasulullah salah satunya pada bidang perdagangan yang dijelaskan dalam hadits shahih Muslim No. 2388 seperti yang telah diterangkan pada bab II. Dalam hadits itu dijelaskan bahwa Rasulullah melarang menjual pohon kurma sebelum ia memakan sedikit (mencicipi) buahnya dan sebelum ditaksir (ditimbang). Hal ini dimaksudkan agar pembeli tidak merasa dikecewakan terhadap kondisi buah kurma yang dijual.

Berdasarkan teladan Rasulullah ini dapat diambil pelajaran bahwa mengetahui karakteristik obyek sangatlah penting sebelum obyek tersebut dikenai perlakuan.Pada penelitian ini yang diidentifikasi karakteristiknya adalah distribusi Gamma dan dikenai perlakuan estimasi parameter.Identifikasi dilanjutkan dengan membentuk fungsi Likelihood.Dimana fungsi Likelihood ini dapat dicari berdasarkan fungsi kepadatan peluang distribusi Gamma di atas.

3.2 Membentuk Fungsi Likelihood

Setelah mendefinisikan dan mengetahui karakteristik distribusi Gamma maka dapat dilakukan estimasi parameter menggunakan metode Bayes.Dalam mengestimasi parameter dengan metode Bayes membutuhkan fungsi Likelihood.Fungsi Likelihood memberikan peran penting dalam inferensi statistika, terutama pada metode estimasi parameter dari suatu statistik. Fungsi Likelihood dapat diperoleh dengan mengalikan fungsi kepadatan peluang $f(X_i \mid \alpha,\beta)$diasumsikan $X_i \sim \Gamma(\alpha,\beta)$. Menurut definisi fungsi Likelihood pada persamaan (2.17), sehingga diperoleh

$$L(\alpha,\beta \mid X_i) = \prod_{i=1}^{n} f(X_i \mid \alpha,\beta)$$

Berdasarkan persamaan (3.2) maka diperoleh

$$L(\alpha,\beta \mid X_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} {X_i}^{\alpha-1} exp\left(-\frac{X_i}{\beta}\right)$$

$$L(\alpha,\beta \mid X_i) = \left(\frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}\right)^n \left(\prod_{i=1}^{n} X_i^{\alpha-1} exp\left(-\frac{X_i}{\beta}\right)\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}\right)^n \left(\prod_{i=1}^{n} X_i^{\alpha-1} \prod_{i=1}^{n} exp\left(-\frac{X_i}{\beta}\right)\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}\right)^n \left(\prod_{i=1}^{n} X_i^{\alpha-1}\right)\left(exp\left(\frac{-X_1}{\beta}\right) exp\left(\frac{-X_2}{\beta}\right) \dots exp\left(\frac{-X_n}{\beta}\right)\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}\right)^n \left(\prod_{i=1}^{n} X_i^{\alpha-1}\right) exp\left(-\frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$

$$= \beta^{-n\alpha}\left(\Gamma(\alpha)\right)^{-n}\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{\alpha-1} exp\left(-\frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \qquad (3.3)$$

Persamaan (3.3) di atas merupakan fungsi Likelihood dari X.

3.3 Menentukan Distribusi *Prior* Non-Informatif

Metode Bayes merupakan suatu metode yang memperhitungkan peranan informasi dari sebaran sebelumnya (*prior*). Hal inilah yang membedakan metode Bayes dengan metode pendugaan yang lain. Sehingga dapat dikatakan bahwa metode Bayes menggunakan informasi yang lebih lengkap untuk menduga suatu obyek.

Konsep pendugaan parameter dalam statistika, pada kajian Bab II telah dijelaskan pada QS.Al-Baqarah [2] ayat 78, bahwa menduga hal-hal yang belum diketahui itu tidaklah mudah, banyak informasi-informasi yang harus dicari dari sumber yang akurat untuk mempermudah pendugaan.Informasi yang mendukung pendugaan biasanya berupa sejarah data dari suatu populasi yang diteliti, pengetahuan tentang metode pendugaan yang cocok untuk data yang sudah diperoleh, karakteristik dari populasi yang diteliti, dan lain-lain.

Pada kenyataannya, terkadang informasi-informasi seperti sejarah data dan karakteristik obyek yang diperoleh tidak seperti yang diharapkan. Hal ini disebabkan karena keterbatasan dana, waktu dan kemampuan yang dimiliki. Sehingga untuk mendukung informasi yang sudah diperoleh itu perlu adanya asumsi-asumsi yang dapat membantu pendugaan.Namun asumsi yang diberikan harus disesuaikan dengan karakteristik dari obyek yang dikaji.

Asumsi dapat dilakukan seperti pada saat menentukan distribusi *prior* ini.Asumsi-asumsi yang diberikan dapat didasarkan pada bentuk distribusi hasil identifikasi pola datanya atau dengan penentuan masing-masing parameter untuk pola distribusi *prior* tersebut.Ketika suatu sejarah data dan data sampel yang ada tidak menunjukkan informasi untuk distribusi *prior*, maka dapat memilih asumsi berdasarkan penentuan masing-masing parameter untuk pola distribusi *prior* tersebut.Asumsi seperti ini biasanya disebut dengan asumsi distribusi *prior* non-informatif.Asumsi yang digunakan ini harus bersifat logis dan sesuai dengan karakteristik distribusi Gamma.Dengan demikian asumsi tersebut dapat mendukung informasi yang ada dan dapat diperoleh hasil estimasi yang akurat.

Langkah analisis selanjutnya adalah menentukan distribusi *prior* non-informatif.Menurut Box dan Tiao (1973) distribusi *prior* non-informatif merupakan pemilihan distribusi yang tidak didasarkan pada data yang ada.Distribusi *prior* non-informatif dapat diperoleh berdasarkan parameter lokasi-skala.Pada penelitian ini, fungsi kepadatan untuk parameter skala ditentukan sebagai berikut:

Misalkan βdidefinisikan sebagai parameter populasi B, dan misalkan $\beta^* = b\beta$maka dapat diasumsikan suatu *prior* memilikikepadatan

$p(\beta \in B) = p(\beta^* \in B)$

$p(\beta \in B) = p(b\beta \in B)$

$p(\beta \in B) = p(\beta \in b^{-1}B)$

Persamaan tersebut dapat ditulis sebagai $\beta = b^{-1}$. Jika $\beta = b$ maka$\beta = \beta^{-1}$sehingga$p(\beta) = p(\beta^{-1})$, di mana p adalah fungsi konstan. Hal ini memberikan asumsi bahwa $p = 1$, dengan$p(\alpha)$ berbentuk *locally uniform*, yaitu: $p(\alpha) = p(\alpha|\beta) \propto c$ (Box dan Tiao, 1973:48) sehingga fungsi kepadatan*prior* non-informatif untuk parameter skalanya adalah

$$p(\alpha, \beta) = p(\alpha) \cdot p(\beta)$$

$$= \frac{1}{\beta} \tag{3.4}$$

Berdasarkan persamaan (3.4) di atas, maka distribusi *prior* non-informatifnya adalah distribusi uniform.

3.4 Menentukan Distribusi *Posterior*

Penentuan distribusi *prior* di atas dapat mendukung informasi yang ada seperti pada penentuan distribusi *posterior*.Menurut sirah nabawiyah, menggabungkan informasi yang ada dengan asumsi yang dibuat ini telah diteladani oleh Rasulullah pada bidang militer yaitu ketika menyusun siasat perang. Dalam menghadapi musuhnya di medan perang, Rasulullah selalu mempersiapkan segalanya dengan penuh perhitungan yang matang. Meski tidak jarang jumlah pasukan kaum muslimin lebih sedikit jumlahnya daripada jumlah pasukan musuh.Namun berkat perhitungan yang matang maka tidak jarang pula kemenangan diraih oleh kaum muslimin.

Ketika menyusun siasat perang, Rasulullah selalu bermusyawarah dengan para sahabat untuk menentukan kesiapan kaum muslimin ketika terjun di medan perang menghadapi musuh yang jumlahnya tidak terduga. Selain bermusyawarah dengan para sahabat, beliau juga mengirim utusan (mata-mata) dengan membawa misi hanya mencari informasi tentang kegiatan musuh sebelum berperang.Tujuan beliau mengirim utusan ke daerah musuh adalah untuk mengukur kesiapan musuh.Berdasarkan hasil musyawarah dan informasi yang diperoleh dari mata-mata tersebut, dibentuklah siasat perang dan kekuatan pasukan kaum muslimin. Sehingga kemungkinan untuk menang di medan perang sangat terbuka lebar. Berdasarkan pada sirah nabawiyah tersebut, maka keteladanan Rasulullah ini dapat ditiru namun diterapkan pada obyek yang berbeda.Hal ini dapat dilakukan untuk menentukan distribusi *posterior*, yaitu pada perkalian fungsi Likelihood dengan distribusi *prior*nya.

Selanjutnya distribusi *posterior* dapat ditentukan dengan membagi perkalian fungsi Likelihood dandistribusi *prior*nya dengan distribusi *marginal*nya.Langkah pertama, mengalikan fungsi Likelihood dengan distribusi *prior*nya yaitu

$L(\alpha, \beta \mid X_i) \cdot p(\alpha, \beta)$

Berdasarkan persamaan (3.3) dan (3.4) maka diperoleh

$$L(\alpha,\beta \mid X_i)\cdot p(\alpha,\beta) = \left(\frac{1}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}\right)^{n}\left(\prod_{i=1}^{n} X_i^{\,\alpha-1}\right) exp\left(-\frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\cdot\frac{1}{\beta}$$

$$= \beta^{-n\alpha}\big(\Gamma(\alpha)\big)^{-n}\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{\alpha-1} exp\left(-\frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\cdot\beta^{-1}$$

$$= \beta^{-n\alpha-1}\big(\Gamma(\alpha)\big)^{-n}\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{\alpha-1} exp\left(-\frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \quad (3.5)$$

Persamaan (3.5) di atas merupakan hasil perkalian dari fungsi Likelihood dengan distribusi *prior*nya.

Setelah perkalian dari fungsi Likelihood dengan distribusi *prior*nya sudah diperoleh, maka langkah kedua adalah menentukan distribusi *marginal*.Distribusi *marginal* ini dapat diperoleh dengan mengintegralkan hasil perkalian dari fungsi Likelihood dengan distribusi *prior*nya. Sehingga dapat diperoleh distribusi *marginal* untuk parameter α dan distribusi *marginal* untuk parameter β.

Konsep penentuan distribusi *marginal* ini telah diisyaratkan dalam QS. Yunus [10] ayat 36, yaitu:

وَمَا يَتَّبِعُ أَكْثَرُهُمْ إِلَّا ظَنًّاۚ إِنَّ ٱلظَّنَّ لَا يُغْنِى مِنَ ٱلْحَقِّ شَيْـًٔاۚ إِنَّ ٱللَّهَ عَلِيمُۢ
بِمَا يَفْعَلُونَ ﴿٣٦﴾

Artinya: 36. *Dan kebanyakan mereka tidak mengikuti kecuali persangkaan saja. Sesungguhnya persangkaan itu tidak sedikitpun berguna untuk mencapai kebenaran*[690]. *Sesungguhnya Allah Maha Mengetahui apa yang mereka kerjakan.*

[690] Sesuatu yang diperoleh dengan persangkaan sama sekali tidak bisa menggantikan sesuatu yang diperoleh dengan keyakinan.

Penafsiran ayat di atas bahwa orang-orang kafir telah dipalingkan dari jalan yang benar kepada jalan yang bathil.Hati mereka diombang-ambingkan yaitu mereka menyamakan Allah SWT dengan berhala-berhala dan mereka tidak mengesakan Allah SWT Yang Maha Mengetahui. Kemudian Allah SWT menerangkan bahwa sesungguhnya mereka menganut agama mereka ini bukan karena dalil dan bukti, akan tetapi hanyalah karena persangkaan saja, maksudnya dugaan dan khayalan. Maka dari itu tidak ada manfaatnya sama sekali bagi mereka (Abdullah, 2004: 33-34).

Berdasarkan ayat dan tafsirnya di atas, dapat diambil pelajaran bahwa Allah SWT adalah Zat Yang memberikan petunjuk kepada kebenaran, karena sesungguhnya kebenaran yang mutlak hanyalah milik Allah SWT dan manusia harus mempergunakan akal dan pikirannya untuk mempelajari, meyakini, dan mengikuti petunjuk dari Allah SWT. Selain itu, juga tidak mengikuti suatu persangkaan yang belum jelas kebenarannya, hal ini dikhawatirkan akan membawa manusia kepada kesesatan. Sedangkan persangkaan yang diperbolehkan adalah persangkaan yang berdasarkan pengetahuan yang benar dan dapat dipertanggungjawabkan.

Penentuan distribusi *marginal* adalah salah satu langkah dari estimasi dengan metode Bayes yang meyakini hasil yang dibentuk dari gabungan informasi data yang ada dengan asumsi yaitu pada perkalian dari fungsi Likelihood dengan distribusi *prior*nya. Meskipun pada pembentukannya distribusi *marginal* didasarkan pada informasi yang ada dan asumsi, namun asumsi yang digunakan disini berdasarkan karakteristik dari distribusi Gamma, sehingga dapat dipertanggungjawabkan.

Langkah analisis selanjutnya adalah menentukan distribusi *marginal*. Distribusi *marginal* yang ditentukan di sini dibedakan menjadi dua, yaitu distribusi *marginal* untuk α dan distribusi *marginal*untuk β, yang ditentukan sebagai berikut:

a. Distribusi Marginal untuk α

Distribusi *marginal* dari α dapat diperoleh dengan mengintegralkan hasil perkalian dari fungsi Likelihood dengan distribusi *prior*nyaterhadap β, yaitu

$$g(\alpha \mid X_i) = \int_0^\infty f(\alpha, \beta \mid y)\, d\beta$$

Pandang persamaan (3.5) bahwa,

$$L(\alpha, \beta \mid X_i) \cdot p(\alpha, \beta) = \beta^{-n\alpha-1}(\Gamma(\alpha))^{-n}\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{\alpha-1} exp\left(-\frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$

Maka distribusi *marginal* dari α dapat diperoleh sebagai berikut

$$g(\alpha \mid X_i) = \int_0^\infty \beta^{-n\alpha-1}(\Gamma(\alpha))^{-n}\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{\alpha-1} exp\left(-\frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) d\beta$$

$$= (\Gamma(\alpha))^{-n}\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{\alpha-1}\int_0^\infty \beta^{-n\alpha-1} exp\left(-\frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) d\beta \qquad (3.6)$$

Misalkan: $k = \frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{n} X_i$maka diperoleh

$$\frac{dk}{d\beta} = -\frac{1}{\beta^2}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$d\beta = \frac{1}{-\frac{1}{\beta^2}\sum_{i=1}^{n} X_i} dk$$

$$= -\frac{\beta^2}{\sum_{i=1}^{n} X_i} dk$$

Kemudian mensubstitusikan permisalan k ke dalam persamaan (3.6) sehingga diperoleh

$$g(\alpha \mid X_i) = \left(\Gamma(\alpha)\right)^{-n} \left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{\alpha-1} \int_0^\infty \beta^{-n\alpha-1} exp(-k) \left(-\frac{\beta^2}{\sum_{i=1}^{n} X_i}\right) dk$$

$$= \left(\Gamma(\alpha)\right)^{-n} \left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{\alpha-1} \int_0^\infty -\frac{\beta^{-n\alpha+1}}{\sum_{i=1}^{n} X_i} exp(-k)\ dk$$

$$= \left(\Gamma(\alpha)\right)^{-n} \left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{\alpha-1} \int_0^\infty -\frac{\beta^{-(n\alpha-1)}}{\sum_{i=1}^{n} X_i} exp(-k)\ dk$$

$$= \left(\Gamma(\alpha)\right)^{-n} \left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{\alpha-1} \int_0^\infty -\frac{1}{\beta^{n\alpha-1}\sum_{i=1}^{n} X_i} exp(-k)\ dk$$

$$= \left(\Gamma(\alpha)\right)^{-n} \left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{\alpha-1} \int_0^\infty -\frac{1}{\beta^{n\alpha-1}\sum_{i=1}^{n} X_i} \frac{(\sum_{i=1}^{n} X_i)^{n\alpha-1}}{(\sum_{i=1}^{n} X_i)^{n\alpha-1}} exp(-k)\ dk$$

$$= \left(\Gamma(\alpha)\right)^{-n} \left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{\alpha-1} \int_0^\infty -\frac{(\sum_{i=1}^{n} X_i)^{n\alpha-1}}{\beta^{n\alpha-1}(\sum_{i=1}^{n} X_i)^{n\alpha}} exp(-k)\ dk$$

$$= \left(\Gamma(\alpha)\right)^{-n} \left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{\alpha-1} \left(-\frac{1}{(\sum_{i=1}^{n} X_i)^{n\alpha}}\right) \int_0^\infty \frac{(\sum_{i=1}^{n} X_i)^{n\alpha-1}}{\beta^{n\alpha-1}} exp(-k) dk$$

$$= \left(\Gamma(\alpha)\right)^{-n} \left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{\alpha-1} \left(-\frac{1}{(\sum_{i=1}^{n} X_i)^{n\alpha}}\right) \int_0^\infty \left(\frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^{n\alpha-1} exp(-k) dk$$

Karena pada permisalan di atas $k = \frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{n} X_i$, maka diperoleh

$$g(\alpha \mid X_i) = \left(\Gamma(\alpha)\right)^{-n}\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{\alpha-1}\left(-\frac{1}{(\sum_{i=1}^{n} X_i)^{n\alpha}}\right)\int_{0}^{\infty}(k)^{n\alpha-1}\,exp(-k)dk$$

$$= \left(\Gamma(\alpha)\right)^{-n}\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{\alpha-1}\left(-\frac{1}{(\sum_{i=1}^{n} X_i)^{n\alpha}}\right)\Gamma(n\alpha) \qquad (3.7)$$

Persamaan (3.7) di atas merupakan persamaan distribusi *marginal*untuk α.

b. Distribusi Marginal untukβ

Distribusi *marginal* dari β dapat diperoleh dengan mengintegralkan hasil perkalian dari fungsi Likelihood dengan distribusi *prior*nyaterhadap α, yaitu

$$g(\beta \mid X_i) = \int_{0}^{\infty} f(\alpha, \beta \mid x)\, d\alpha$$

Pandang persamaan (3.5) bahwa,

$$L(\alpha, \beta \mid X_i) \cdot p(\alpha, \beta) = \beta^{-n\alpha-1}\left(\Gamma(\alpha)\right)^{-n}\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{\alpha-1} exp\left(-\frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$

Maka distribusi *marginal* dari β dapat diperoleh sebagai berikut

$$g(\beta \mid X_i) = \int_{\alpha=0}^{\infty} \beta^{-n\alpha-1}\left(\Gamma(\alpha)\right)^{-n}\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{\alpha-1} exp\left(-\frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) d\alpha$$

$$= exp\left(-\frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\int_{\alpha=0}^{\infty} \beta^{-n\alpha-1}\left(\Gamma(\alpha)\right)^{-n}\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{\alpha-1} d\alpha \qquad (3.8)$$

Berdasarkan teori kalkulus maka,

Misal: $w = u \cdot v$

dimana,

$$u = \left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{\alpha-1}$$

sehingga turunan pertama dari u diperoleh

$$\frac{du}{d\alpha} = D_\alpha\left(exp\left(\alpha - 1\ln\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)\right)\right)$$

$$= exp\left(\alpha - 1\ln\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)\right) D_\alpha\left(\alpha - 1\ln\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)\right)$$

$$= exp\left(\ln\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{\alpha-1}\right)\ln\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)$$

$$= \left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{\alpha-1} \ln\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)$$

Sedangkan

$$v = \beta^{-n\alpha-1}$$

sehingga turunan pertama dari v diperoleh

$$\frac{dv}{d\alpha} = D_\alpha\left(exp\big((-n\alpha - 1)\ln(\beta)\big)\right)$$

$$= exp\big((-n\alpha - 1)\ln(\beta)\big)\, D_\alpha\big((-n\alpha - 1)\ln(\beta)\big)$$

$$= \exp(\ln(\beta)^{-n\alpha-1})\,(-n)\ln(\beta)$$

$$= -n\beta^{-n\alpha-1}\ln(\beta)$$

Akhirnya dapat diperoleh

$$w = u \cdot v$$

$$w = \left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{\alpha-1} \beta^{-n\alpha-1}$$

$$\frac{dw}{d\alpha} = \frac{d(u,v)}{d\alpha}$$

$$= uv' + vu'$$

$$\frac{dw}{d\alpha} = u\frac{dv}{d\alpha} + v\frac{du}{d\alpha}$$

$$= \left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{\alpha-1} (-n\beta^{-n\alpha-1}\ln(\beta)) + \beta^{-n\alpha-1}\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{\alpha-1} \ln\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)$$

$$= \left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{\alpha-1} \beta^{-n\alpha-1}\left(-n\ln(\beta) + \ln\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)\right)$$

$$= \left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{\alpha-1} \beta^{-n\alpha-1}\left(\ln\beta^{-n} + \ln\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)\right)$$

$$= \left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{\alpha-1} \beta^{-n\alpha-1}\ln\left(\beta^{-n}\prod_{i=1}^{n} X_i\right)$$

sehingga

$$d\alpha = \left[\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{\alpha-1} \beta^{-n\alpha-1}\ln\left(\beta^{-n}\prod_{i=1}^{n} X_i\right)\right]^{-1} dw$$

$$= \left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{-\alpha+1} \beta^{n\alpha+1}\left(\ln\left(\beta^{-n}\prod_{i=1}^{n} X_i\right)\right)^{-1} dw$$

Jadi persamaan (3.8) menjadi

$g(\beta \mid X_i)$

$$\propto exp\left(-\frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\int_{\alpha=0}^{\infty}(\Gamma(\alpha))^{-n} w\left[\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{-\alpha+1} \beta^{n\alpha+1}\left(\ln\left(\beta^{-n}\prod_{i=1}^{n} X_i\right)\right)^{-1} dw\right]$$

$$= exp\left(-\frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\int_{\alpha=0}^{\infty}(\Gamma(\alpha))^{-n} w\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{-(\alpha-1)} \beta^{-(-n\alpha+1)}\left(\ln\left(\beta^{-n}\prod_{i=1}^{n} X_i\right)\right)^{-1} dw$$

Karena $w = (\prod_{i=1}^{n} X_i)^{\alpha-1}\beta^{-n\alpha-1}$sehingga dapat diperoleh

$$= exp\left(-\frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \int_{\alpha=0}^{\infty} \left(\Gamma(\alpha)\right)^{-n} w \frac{1}{w}\left(\ln\left(\beta^{-n}\prod_{i=1}^{n} X_i\right)\right)^{-1} dw$$

$$= exp\left(-\frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\left(\Gamma(\alpha)\right)^{-n}\left(\ln\left(\beta^{-n}\prod_{i=1}^{n} X_i\right)\right)^{-1} \int_{\alpha=0}^{\infty} 1\, dw$$

$$= exp\left(-\frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\left(\Gamma(\alpha)\right)^{-n}\left(\ln\left(\beta^{-n}\prod_{i=1}^{n} X_i\right)\right)^{-1} [w]_{\alpha=0}^{\infty}$$

$$= exp\left(-\frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\left(\Gamma(\alpha)\right)^{-n}\left(\ln\left(\beta^{-n}\prod_{i=1}^{n} X_i\right)\right)^{-1} \left[\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{\alpha-1} \beta^{-n\alpha-1}\right]_{\alpha=0}^{\infty}$$

$$= \left(\Gamma(\alpha)\right)^{-n} exp\left(-\frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\left(\ln\left(\beta^{-n}\prod_{i=1}^{n} X_i\right)\right)^{-1} \left[\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{\infty-1} \beta^{-n\infty-1} - \left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{0-1} \beta^{-n0-1}\right]$$

$$= \left(\Gamma(\alpha)\right)^{-n} exp\left(-\frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\left(\ln\left(\beta^{-n}\prod_{i=1}^{n} X_i\right)\right)^{-1} \left[0 - \left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{-1} \beta^{-1}\right]$$

$$= \left(\Gamma(\alpha)\right)^{-n} exp\left(-\frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\left(\ln\left(\beta^{-n}\prod_{i=1}^{n} X_i\right)\right)^{-1} \left(-\beta\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{-1}$$

$$= -\left(\Gamma(\alpha)\right)^{-n} exp\left(-\frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\left(\ln\left(\beta^{-n}\prod_{i=1}^{n} X_i\right)\right)^{-1} \left(\beta\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{-1} \qquad (3.9)$$

Persamaan (3.9) di atas merupakan persamaan distribusi*marginal* untuk β.

Langkah ketiga adalah menentukan distribusi *posterior* dengan membagi hasil perkalian dari fungsi Likelihood dan distribusi *prior*nya dengan distribusi *marginal*nya. Distribusi *posterior* yang diperoleh yaitu distribusi *posterior* untuk α dan distribusi *posterior* untuk β.

Konsep estimasi berdasarkan QS.Al-Baqarah [2] ayat 78 dan QS.Yunus [10] ayat 36 terdapat kesinambungan dan saling melengkapi.Sehingga dapat diambil pelajaran bahwa dalam mengestimasi suatu obyek perlu memperhatikan informasi yang ada dan keyakinan atau kepercayaan terhadap asumsi yang telah dibuat.Meskipun pada prosesnya terdapat asumsi-asumsi yang ditentukan secara disengaja untuk mempermudah jalannya estimasi, maka hasil estimasi yang diperoleh itu harus dapat dipertanggungjawabkan keakuratannya atau kebenarannya, karena estimasi tersebut dilakukan dengan metode yang sudah sesuai dengan karakteristik obyeknya.

Ketika distribusi *posterior*akan ditentukan, pertama yang harus dilakukan adalah mempercayai bahwa hasil perkalian fungsi Likelihood dengan distribusi *prior* dan fungsi distribusi *marginal* sudah sesuai dengan karakteristik distribusi Gamma. Hal inilah yang mempengaruhi hasil dari distribusi *posterior*.

a. Distribusi Posterior untuk α

Distribusi *posterior* untuk α dapat ditentukan dengan cara membagi hasil perkalian fungsi Likelihood dan distribusi *prior* dengan distribusi *marginal* untuk α yaitu:

$$p(\alpha \mid X_i) \propto \frac{L(\alpha, \beta \mid X_i) \cdot p(\alpha, \beta)}{g(\alpha \mid X_i)}$$

Sehingga berdasarkan persamaan (3.5) dan (3.7) dapat diperoleh distribusi *posterior*untuk α, yaitu

$$p(\alpha \mid X_i) \propto \frac{\beta^{-n\alpha-1}\big(\Gamma(\alpha)\big)^{-n}(\prod_{i=1}^{n} X_i)^{\alpha-1} exp\left(-\frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)}{\big(\Gamma(\alpha)\big)^{-n}(\prod_{i=1}^{n} X_i)^{\alpha-1}\left(-\frac{1}{(\sum_{i=1}^{n} X_i)^{n\alpha}}\right)\Gamma(n\alpha)}$$

$$= \frac{\beta^{-n\alpha-1} exp\left(-\frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)}{\left(-\frac{1}{(\sum_{i=1}^{n} X_i)^{n\alpha}}\right)\Gamma(n\alpha)}$$

$$p(\alpha \mid X_i) \propto -\frac{\beta^{-n\alpha-1}(\sum_{i=1}^{n} X_i)^{n\alpha} exp\left(-\frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)}{\Gamma(n\alpha)}$$

$$= -\beta^{-n\alpha-1}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^{n\alpha} exp\left(-\frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\Gamma(n\alpha)^{-1}, \alpha > 0, \beta > 0 \qquad (3.10)$$

Persamaan (3.10) di atas merupakan fungsi distribusi *posterior*untuk α.

b. Distribusi Posterior untuk β

Distribusi *posterior* untuk β dapat ditentukan dengan cara membagi hasil perkalian fungsi Likelihood dan distribusi *prior* dengan distribusi *marginal* untuk β yaitu:

$$p(\beta \mid X_i) \propto \frac{L(\alpha, \beta \mid X_i) \cdot p(\alpha, \beta)}{g(\beta \mid X_i)}$$

Sehingga berdasarkan persamaan (3.5) dan (3.9) dapat diperoleh distribusi *posterior*untuk β, yaitu:

$$p(\beta \mid X_i) \propto \frac{\beta^{-n\alpha-1}\left(\Gamma(\alpha)\right)^{-n}(\prod_{i=1}^{n} X_i)^{\alpha-1} exp\left(-\frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)}{-\left(\Gamma(\alpha)\right)^{-n} exp\left(-\frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)(\ln(\beta^{-n}\prod_{i=1}^{n} X_i))^{-1}(\beta\prod_{i=1}^{n} X_i)^{-1}}$$

$$= \frac{\beta^{-n\alpha-1}(\prod_{i=1}^{n} X_i)^{\alpha-1}}{-(\ln(\beta^{-n}\prod_{i=1}^{n} X_i))^{-1}(\beta\prod_{i=1}^{n} X_i)^{-1}}$$

$$= \frac{\beta^{-n\alpha-1}(\prod_{i=1}^{n} X_i)^{\alpha-1}(\beta\prod_{i=1}^{n} X_i)}{-(\ln(\beta^{-n}\prod_{i=1}^{n} X_i))^{-1}}$$

$$= \frac{\beta^{-n\alpha}(\prod_{i=1}^{n} X_i)^{\alpha}}{-(\ln(\beta^{-n}\prod_{i=1}^{n} X_i))^{-1}}$$

$$= \beta^{-n\alpha}\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{\alpha}\left(-\ln\left(\beta^{-n}\prod_{i=1}^{n} X_i\right)\right)$$

$$p(\beta \mid X_i) \propto -\beta^{-n\alpha}\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{\alpha} \ln\left(\beta^{-n}\prod_{i=1}^{n} X_i\right) \tag{3.11}$$

Persamaan (3.11) di atas merupakan fungsi distribusi *posterior*untuk β.

3.5 Aplikasi Estimasi Parameter Distribusi Gamma dengan Metode Bayes

Islam menganjurkan kepada umatnya untuk menuntut ilmu agar memperoleh kebaikan dunia dan akhirat. Dengan bantuan ilmu, seseorang dengan berbagai cara dan upaya dapat mendekatkan diri kepada Allah. Namun sayang, terkadang manusia kurang menyadari bahwa ilmu yang dimaksud dalam ajaran Islam bukanlah ilmu yang sekedar teori belaka, yang terlihat dalam bentuk hapalan atau dalam bentuk penyampaian materi kajiannya, tanpa adanya wujud nyata dan pengaruh dari kemanfaatan ilmu tersebut khususnya bagi orang yang mempelajarinya dan bagi masyarakat pada umumnya.

Pentingnya mengamalkan ilmu yang dipelajari baik untuk kepentingan diri sendiri maupun untuk orang lain telah dijelaskan dalam QS. Al-Maa'idah [5] ayat 93 sebagai berikut.

لَيْسَ عَلَى ٱلَّذِينَ ءَامَنُوا۟ وَعَمِلُوا۟ ٱلصَّٰلِحَٰتِ جُنَاحٌ فِيمَا
طَعِمُوٓا۟ إِذَا مَا ٱتَّقَوا۟ وَّءَامَنُوا۟ وَعَمِلُوا۟ ٱلصَّٰلِحَٰتِ ثُمَّ ٱتَّقَوا۟ وَّءَامَنُوا۟
ثُمَّ ٱتَّقَوا۟ وَّأَحْسَنُوا۟ ۗ وَٱللَّهُ يُحِبُّ ٱلْمُحْسِنِينَ ﴿٩٣﴾

Artinya: *93. Tidak ada dosa bagi orang-orang yang beriman dan mengerjakan amalan yang saleh karena memakan makanan yang telah mereka makan dahulu, apabila mereka bertakwa serta beriman, dan mengerjakan amalan-amalan yang saleh, kemudian mereka tetap bertakwa dan beriman, kemudian mereka (tetap juga) bertakwa dan berbuat kebajikan.Dan Allah menyukai orang-orang yang berbuat kebajikan.*

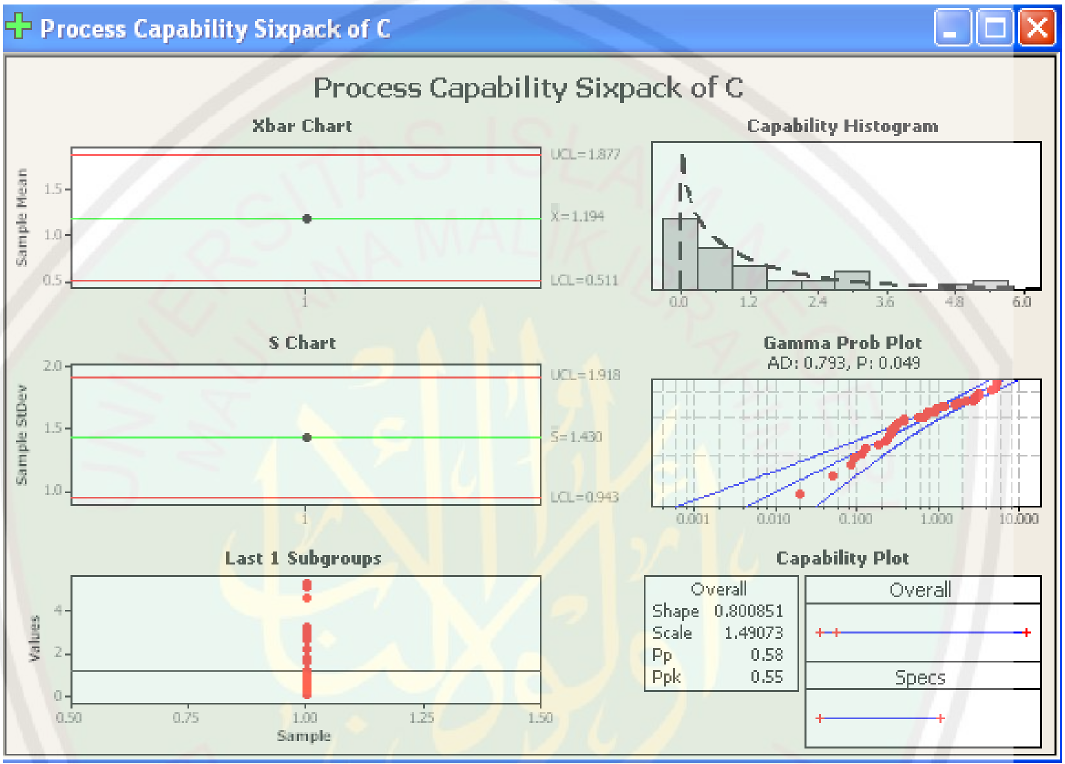
Ayat di atas dapat dijadikan motivasi untuk menjadi umat muslim yang terbaik, salah satunya yaitu berusaha mengamalkan ilmu yang dimiliki dalam kehidupan sehari-sehari. Hasil dan pengaruh dari mengamalkan ilmu adalah menumbuhkan dalam hati orang yang memilikinya rasa tenang, takut, dan tunduk kepada Allah.Sehingga dapat meneguhkan keimanan dengan menjadikan al-Qur'an sebagai sumber petunjuk untuk semua pengetahuan.

Berdasarkan penjelasan di atas, maka pada penelitian ini estimasi parameter distribusi Gamma diaplikasikan pada data simulasi yang dibangkitkan dengan bantuan software Minitab sebanyak 40 data. Data tersebut berdistribusi Gamma dengan parameter $\alpha = 0.8$dan $\beta = 1.5$. Berikut data yang digunakan untuk aplikasi:

Tabel 3.1Data Simulasi Berdistribusi Gamma dengan Parameter $\alpha = 0.8$ dan $\beta = 1.5$

No	C	No	C
1	0.38642	21	2.16251
2	0.75095	22	0.26867
3	0.29796	23	0.69325
4	0.08399	24	0.11575
5	0.58542	25	0.91228
6	3.09961	26	0.2595
7	0.91227	27	0.38384
8	1.15699	28	4.58007
9	0.12602	29	0.17988
10	5.10422	30	0.32526
11	2.63697	31	0.68215
12	0.23975	32	0.9817
13	2.84184	33	0.28814
14	1.10954	34	0.02015
15	0.22359	35	5.27677
16	0.05044	36	0.31152
17	0.72633	37	1.75457
18	0.26242	38	0.09341
19	2.83644	39	3.20776
20	0.24502	40	1.58086

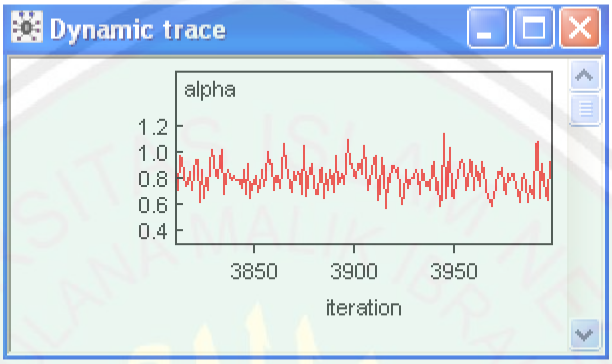
Langkah pertama pada aplikasi estimasi parameter distribusi Gamma dengan metode Bayes adalah melihat sebaran data berdistribusi Gamma pada histogram *capability* dan plot probabilitas Gamma sebagai berikut:



Gambar 3.1 Histogram *Capability* dan Plot Probabilitas Gamma

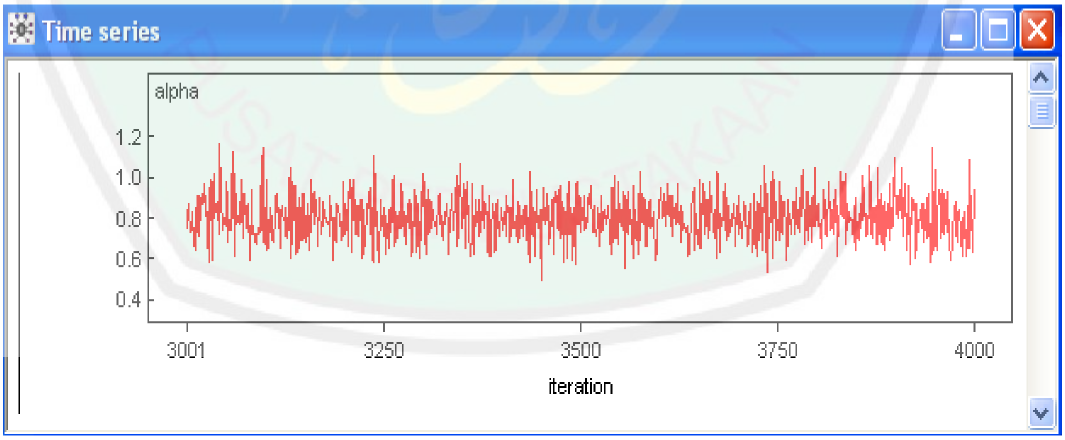
Langkah kedua adalah mengestimasi parameter dengan metodeBayes.Pada penelitian ini, pengujian Bayes dilakukan dengan menggunakan *software* WinBUGS. Langkah-langkah dalam mengoperasikan softwere ini adalah dengan membuat *flowchart* dan memasukkan nilai awal pada *doodle* (*flowchart* dapat dilihat pada lampiran 1) yang nantinya akan dibentuk sebuah *Model Specification* (program dapat dilihat pada lampiran 2). Kemudian melakukan cek spesifikasi model.Setelah model yang dibentuk merupakan model yang spesifik, maka peng*update*an hingga 4000 iterasi.Setelah ter*update*, maka ditentukan grafik mana saja yang ingin dimunculkan.

Dengan mengikuti langkah-langkah di atas, maka dapat diperoleh hasil berupa grafik seperti grafik *dynamic trace* untuk parameter αdan β. Grafik *dynamic trace* untuk parameter α yaitu:



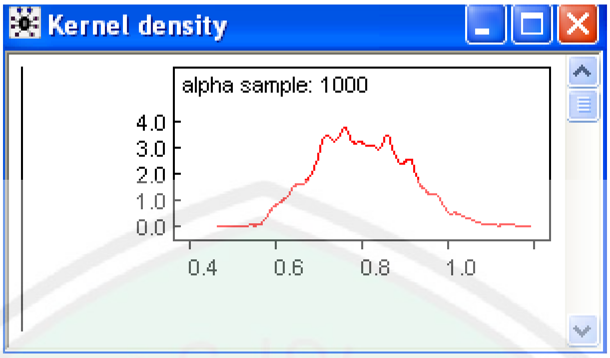
Gambar 3.2*Dynamic Trace* untuk Parameter α

Pada Gambar 3.2 di atas terlihat bahwa pola *Dynamic Trace* tidak teratur.Sehingga dapat dikatakan bahwa sebuah contoh acak tersebut telah konvergen. Hal itu juga terlihat pada grafik *time series* untuk parameter αpada Gambar 3.3 di bawah ini,



Gambar 3.3*Time Series* untuk Parameter α

Gambar 3.3 di atas menunjukkan bahwa grafik *time series* juga memiliki pola yang tidak teratur ketika dilakukan iterasi sebanyak 4000. Selanjutnya melihat sebaran *posterior* untuk parameter αyang dapat dilihat pada gambar fungsikepadatanKernelberikut:



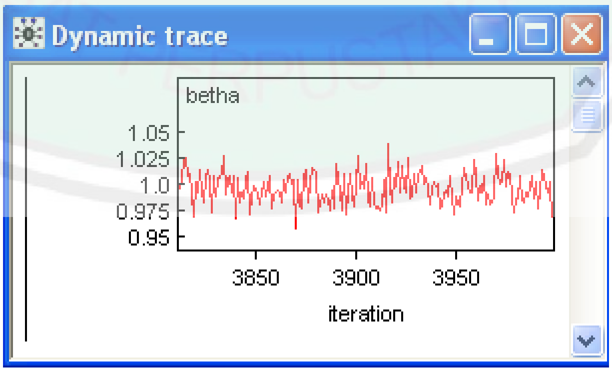
Gambar 3.4Kepadatan Kerneluntuk Parameter α

Gambar diatas menunjukkan sebaran *posterior* yang terbentuk untuk parameter α. Sebaran *posterior* tersebut menyerupai sebaran normal. Adapun hasil rata-rata, simpangan baku, dan MC error yang dihasilkan dari pendugaan Bayes MCMC yaitu

Tabel 3.2 Hasil Statistik Pendugaan Bayes MCMC utnuk Parameter α

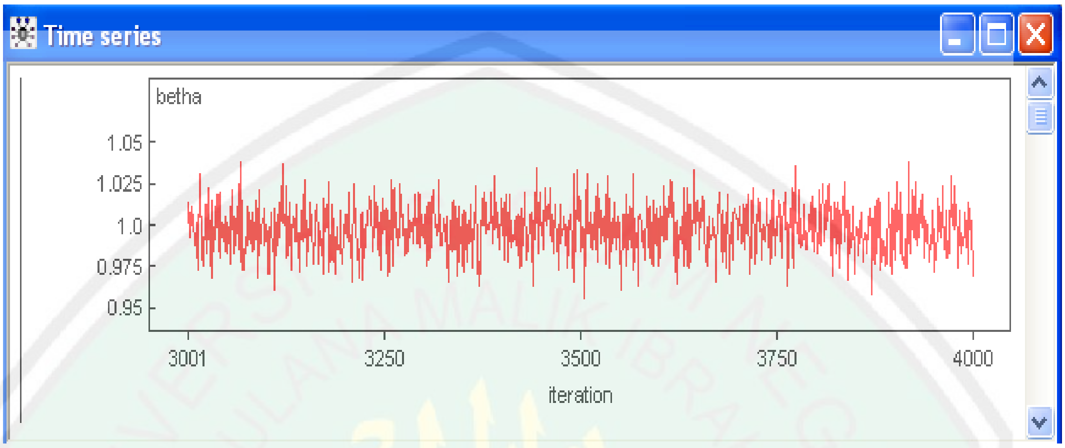
Parameter	Rata-rata	Simpangan Baku	MC error
Alpha	0.8014	0.1078	0.003064

Selanjutnya, hasil untuk parameter β yang dapat dilihat seperti pada grafik *dynamic trace* seperti pada gambar di bawah ini:



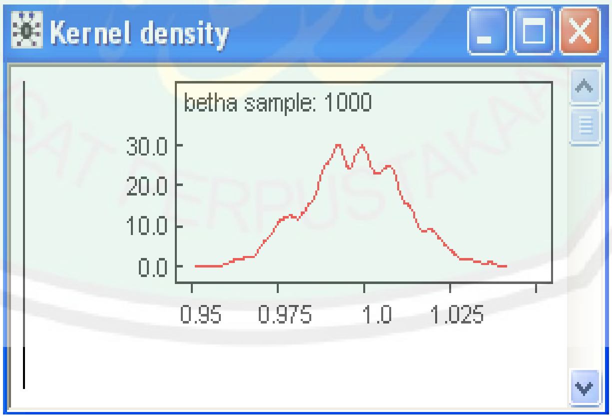
Gambar 3.5 Dynamic Trace untuk Parameter β

Pada Gambar 3.5 di atas terlihat bahwa pola *Dynamic Trace* untuk parameter βtidak teratur.Sehingga dapat dikatakan bahwa sebuah contoh acak tersebut telah konvergen. Hal itu juga terlihat pada grafik *time series* untuk parameter βpada Gambar 3.6 di bawah ini:



Gambar 3.6 Grafik Time Series untuk Parameter β

Gambar 3.6 di atas menunjukkan bahwa grafik *time series* juga memiliki pola yang tidak teratur ketika dilakukan iterasi sebanyak 4000. Selanjutnya melihat sebaran *posterior* untuk parameter βyang dapat dilihat pada gambar fungsikepadatan Kernelberikut ini:



Gambar 3.7 Grafik KepadatanKernel untuk Parameter β

Gambar diatas menunjukkan sebaran *posterior* yang terbentuk untuk parameter β. Sebaran *posterior* tersebut menyerupai sebaran Normal. Adapun hasil rata-rata, simpangan baku, dan MC *error* yang dihasilkan dari pendugaan Bayes MCMC yaitu:

Tabel 3.3 Hasil Statistik Pendugaan Bayes MCMC untuk Parameterβ

Parameter	Rata-rata	Simpangan Baku	MC error
Betha	0.9973	0.01409	4.639E-4

Berdasarkan analisis teori dan contoh aplikasi di atas dapat menunjukkan bahwa metode Bayes memberikan hasil yang baik dalam estimasi karena dalam prosesnya memperhitungkan informasi dari data sampel dan informasi dari sebaran sebelumnya (*prior*).Namun, metode Bayes ini memiliki kelemahan yaitu tidak dapat memberikan hasil estimator yang tetap.Jika nilai inisialisasi parameter yang diberikan berubah, maka hasil untuk pendugaanBayes juga berubah.

Analisis teori dan aplikasi di atas merupakan suatu bentuk pengamalan QS.Al-Maa'idah [5] ayat 93. Dengan adanya pengamalan ilmu pada contoh kasus ini diharapkan dapat memberikan motivasi untuk selalu berusaha mengamalkan ilmu yang dimiliki dalam kehidupan, baik pengamalannya ditujukan untuk kepentingan pribadi maupun untuk kepentingan orang lain. Selain itu, juga dapat meningkatkan semangat untuk menuntut ilmu dan mengintegrasikannya dengan al-Qur'an.

Pasti semua konsep ilmu pengetahuan dibidang apapun sudah dijelaskan dalam al-Qur'an baik itu secara tersirat maupun secara tersurat.Dari hal ini perlu diketahui bahwa al-Qur'an benar-benar merupakan suatu sumber utama untuk pedoman hidup manusia baik itu berupa perintah, hukum maupun ilmu pengetahuan.Meskipun dalam ayat al-Qur'an semua konsep ilmu pengetahuan tidaklah dijelaskan secara mendalam, namun dari ayat tersebut perlu dikaji penafsirannya secara mendalam. Dengan demikian dapat diketahui makna-makna rahasia yang terkandung dalam ayat tersebut.

Dengan menggali penafsiran ayat al-Qur'an secara mendalam dan mengintegrasikan dengan konsep Matematika dapat memotivasi untuk mengembangkan dan membangkitkan lagi semangat untuk mewujudkan peradaban yang berdasarkan Islam.Sudah saatnya kita sebagai umat Islam berusaha mengembalikan esensi al-Qur'an sebagai sumber segala ilmu pengetahuan dan teknologi.Satu hal yang harus selalu kita ingat bahwa semua yang kita fikirkan dan kita lakukan harus berdasarkan dengan ajaran al-Qur'an dan al-Hadits dengan harapan kita dapat mencapai hidup bahagia di dunia dan di akhirat.

BAB IV

PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan dari bab sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa:

Estimasi parameter distribusi Gamma dengan metode Bayes dapat dilakukan dengan mengikuti langkah-langkah yaitu penentuan fungsi Likelihood dari distribusi Gamma, kemudian menentukan fungsi distribusi *prior* non-informatif, dan terakhir menentukan fungsi distribusi *posterior* untuk parameter αdan β.

Adapun penentuan fungsi distribusi *posterior* untuk parameter α dan β adalah:

$$p(\alpha \mid X_i) \propto -\beta^{-n\alpha-1} \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^{n\alpha} exp\left(-\frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \Gamma(n\alpha)^{-1}$$

$$p(\beta \mid X_i) \propto -\beta^{-n\alpha} \left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{\alpha} \ln\left(\beta^{-n} \prod_{i=1}^{n} X_i\right)$$

Untuk hasil estimasi parameter distribusi Gamma dengan metode Bayes pada penelitian ini diperoleh menggunakan *software* WinBUGS.Dari hasil program yang dijalankan sehingga diperoleh nilai konvergen bagi parameter yang diduga. Kekonvergenan dapat diketahui dengan melihat plot *dynamic trace* bila memiliki pola acak maka iterasi dihentikan dan sebuah sampel acak dikatakan telah konvergen, selain itu juga dapat dilihat dari nilai MC *error*. Apabila nilai MC *error* bernilai kurang dari 5% simpangan baku maka kekonvergenan dapat terpenuhi dan iterasi dihentikan.Metode Bayes memberikan hasil yang baik dalam estimasi karena memperhitungkan informasi dari data sampel dan informasi dari sebaran sebelumnya (*prior*).Namun, metode Bayes ini memiliki kelemahan yaitu tidak dapat memberikan hasil estimator yang tetap.Jika nilai inisialisasi parameter yang diberikan berubah, maka hasil untuk pendugaanBayes juga berubah.

4.2 Saran

Penelitian ini masih perlu pengembangan keilmuan sehingga disarankan untuk penelitian selanjutnya dapat menggunakan estimasi parameter distribusi Gamma dengan metode Bayes menggunakan distribusi *prior* yang lain. Selain itu, dapat juga mengestimasi parameter dengan metode Bayes untuk distribusi yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

Abdullah, bin Muhammad. 2004. *Tafsir Ibnu Katsir Jilid 1*. Bogor: Pustaka Imam Asy-Syafi'i

Abdurrahman, Syaikh bin Nashir as-Sa'di. 2006. *Tafsir As-Sa'di*. Alih bahasa oleh Muhammad Iqbal dkk. Jakarta: Pustaka Sahifa

Bain, L.J and Engelhardt, M. 1992. *Introduction to probability and Mathematical Statistiks*.Second Edition. California;Duxbury Press

Box, G.E.P and Tiao, G.C. 1973.*Bayes Inference InStatistical Analysis*. Philippines: Addision-Wesley Publishing Company, Inc

Dudewicz, Edward J & Mishra, Satya N. 1995.*Statistika Matematika Modern*. Bandung: ITB

Harinaldi. 2005. *Prinsip-Prinsip Statistik untuk Teknik dan Sains*. Jakarta: Erlangga.

Harini, Sri & Turmudi. 2007. *Metode Statistika*. Malang: UIN PRESS.

Hogg, McKean, dan Craig. 2005. *Introduction to Mathematical Statistics*. Sixth edition. New Jersey: Pearson Prentice Hall.

Nashiruddin, Muhammad Al Albani. 2007. *Ringkasan Shahih Muslim*. Buku 1. Jakarta: Pustaka Azzam

Ntzoufras, Ioannis. 2009.*Bayesian Modelling Using WinBUGS*. New Jersey: John Willey & Sons, Inc.

Misbahussurur, Ahmad. 2009. Estimasi Parameter Distribusi Gamma dengan Metode Maksimum Likelihood. *Skripsi* Tidak Diterbitkan. Malang: Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Rahman, Afzalur. 2002. *Nabi Muhammad Sebagai Seorang Pemimpin Militer*. Penj.Anas Sidik.Jakarta: Amzah.

Santi, Pramitha Elfa Diana. 2009. Penentuan Estimasi Interval dari Distribusi Normal dengan Metode Bayes.*Skripsi* Tidak Diterbitkan. Semarang: Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Diponegoro.

Shihab, M. Quraish. 2003. *Tafsir Al Mishbah Pesan, Kesan dan Keserasian Al Qur'an*. Volume 12. Jakarta: Lentera Hati.

Siska, Ade Candra. 2011. Inferensi Statistik Distribusi Binomial dengan Metode Bayes Menggunakan Prior Konjugat. *Skripsi* Tidak Diterbitkan.

Semarang: Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Diponegoro.

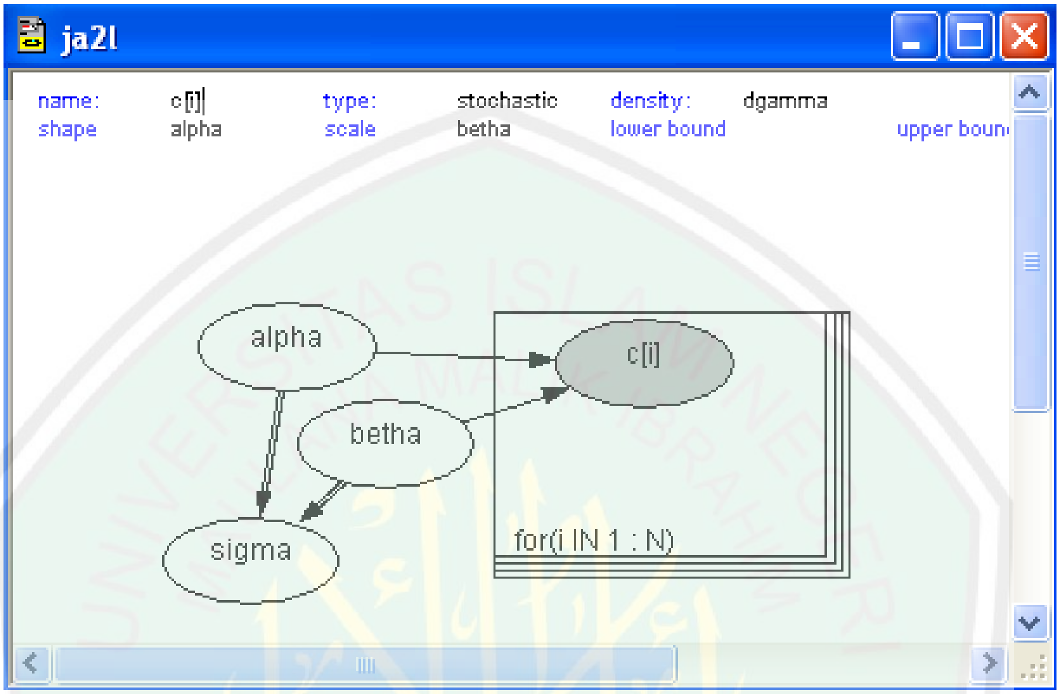
Spiegel, M.R, Schiller, J.J dan Srinivasan, R.A. 2004.*Probabilitas dan Statistik*. Alih bahasa oleh Wiwit, K dan Irzam H. Jakarta : Erlangga

Subhani, Ja'far. 2006. *Sejarah Nabi Muhammad SAW*. Jakarta: Lentera

Usman, Husaini, dan Akbar, Purnomo Setiady. 2006. *Pengantar Statistika*. Jakarta: Bumi Aksara.

Walpole, Ronald E dan Myers, Raymond H. 2005.*Ilmu Peluang dan Statistika untuk Insinyur dan Ilmuwan*.Penj. RK Sembiring. Bandung: ITB

Lampiran 1: Struktur Doodle dalam Winbugs

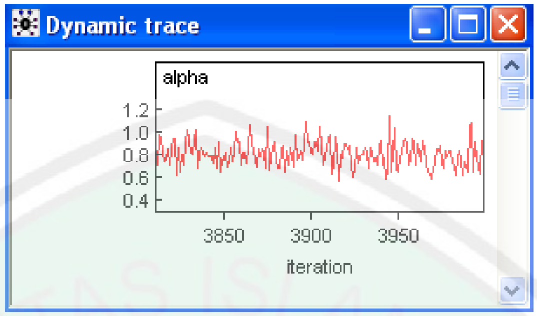


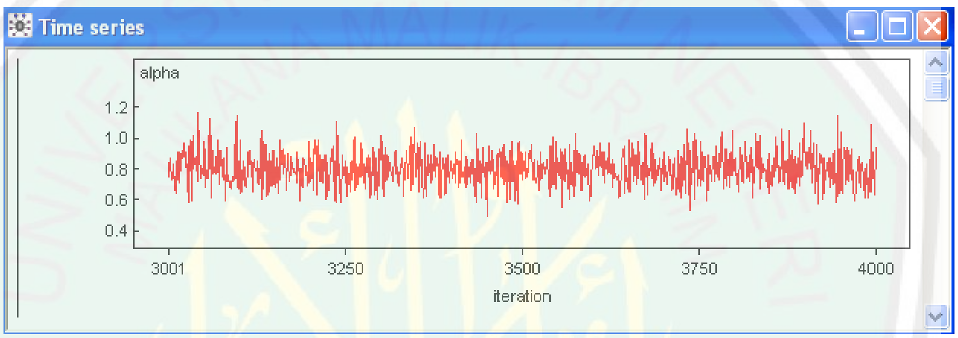
Lampiran 2: Struktur Program Winbugs untuk Data Penelitian

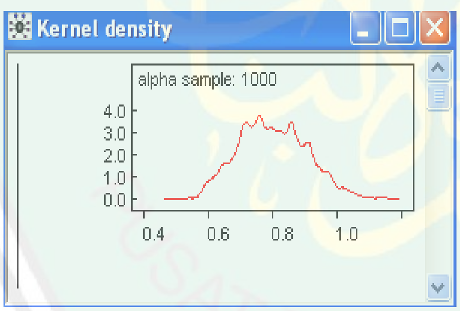
C

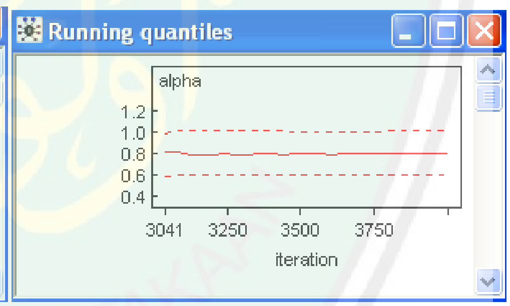
```
model;
{
  for( i in 1 : N ) {
    C[i] ~ dgamma(alpha,betha)
  }
  alpha ~ dgamma( 0, 15)
  betha ~ dgamma( 5000, 5000)

}
initialisasi
list(alpha=16,betha=5544)

data
list(N=40,C=c(0.38642,0.75095,0.29796,0.08399,0.58542,3.09961,0.91227,1.15699,0.12602,5.10422,2.63697,0.23975,2.84184,1.10954,
0.22359,0.05044,0.72633,0.26242,2.83644,0.24502,2.16251,0.26867,0.63925,0.11575,0.91228,0.25950,0.38384,4.58007,0.17988,0.3252
6,0.68215,0.98170,0.28814,0.02015,5.27677,0.31152,1.75457,0.09341,3.20776,1.58086))
```

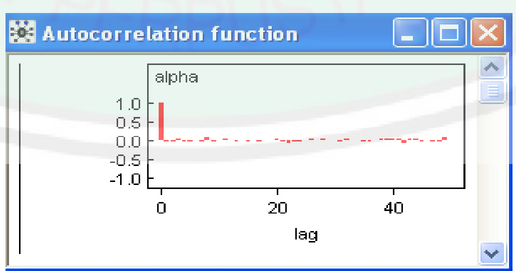
Lampiran 3: Hasil Program Winbugs untuk Parameter α







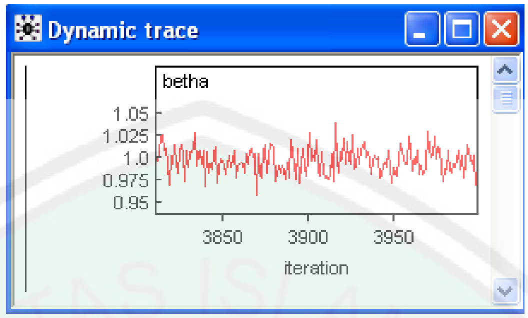


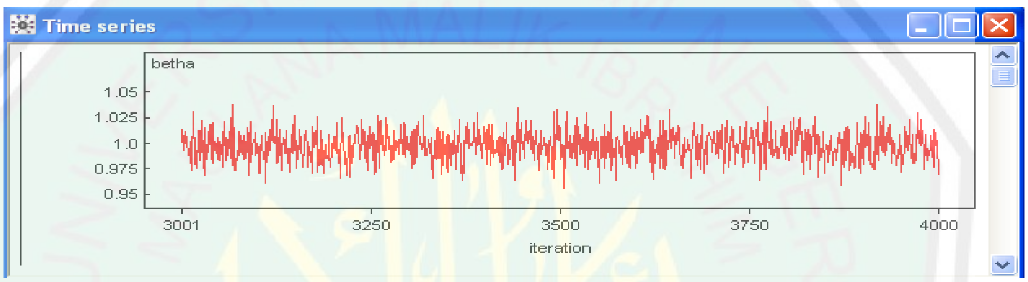


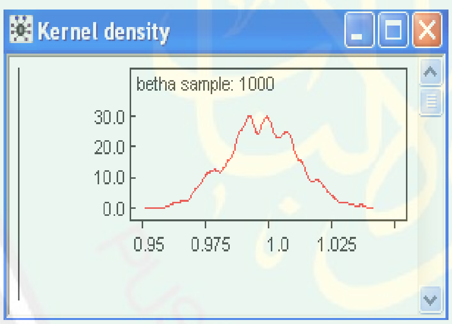
Node statistics

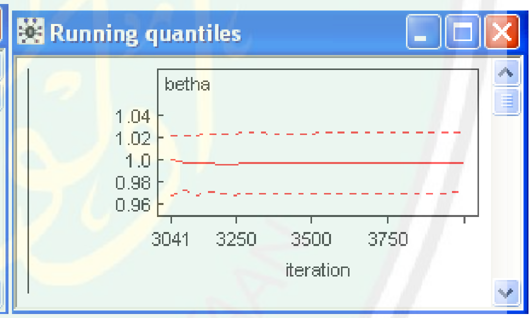
node	mean	sd	MC error	2.5%	median	97.5%	start	sample
alpha	0.8014	0.1078	0.003064	0.6072	0.7959	1.022	3001	1000

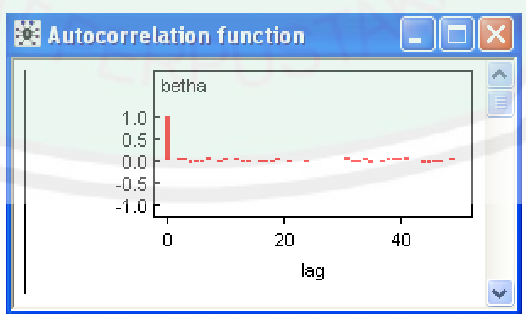
Lampiran 4: Hasil Program Winbugs untuk Parameter β











Node statistics

node	mean	sd	MC error	2.5%	median	97.5%	start	sample
betha	0.9973	0.01409	4.639E-4	0.9704	0.9974	1.024	3001	1000