PEWARNAAN PADA GRAF BIPARTISI KOMPLIT $K_{m,\,n}$ DAN GRAF TRIPARTISI $T_{2,\,n-1,\,n}$ DENGAN m, n ADALAH BILANGAN ASLI

SKRIPSI

Oleh:
ASIS AS' ADI HAQ
NIM: 05510039

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG

2010

PEWARNAAN PADA GRAF BIPARTISI KOMPLIT $K_{m, n}$ DAN GRAF TRIPARTISI $T_{2, n-1, n}$ DENGAN m, n ADALAH BILANGAN ASLI

SKRIPSI

Diajukan Kepada:
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
Untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
ASIS AS'ADI HAQ
NIM: 05510039

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN) MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2010

PEWARNAAN PADA GRAF BIPARTISI KOMPLIT $K_{m,n}$ DAN GRAF TRIPARTISI $T_{2, n-1, n}$ DENGAN m, n ADALAH BILANGAN ASLI

SKRIPSI

Oleh:
ASIS AS'ADI HAQ
NIM: 05510039

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji:
Tanggal: 11 Januari 2010

Pembimbing I,	**Pembimbing II,**
Wahyu Henky Irawan, M.Pd	**Dr. Munirul Abidin, M.Ag**
NIP: 19710420 200003 1 003	**NIP:19720420 200212 1 003**

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PEWARNAAN PADA GRAF BIPARTISI KOMPLIT $K_{m,n}$ DAN GRAF TRIPARTISI $T_{2, n-1, n}$ DENGAN m, n ADALAH BILANGAN ASLI

SKRIPSI

Oleh:
ASIS AS'ADI HAQ
NIM: 05510039

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Tanggal: 23 Januari 2010

Susunan Dewan Penguji:		Tanda Tangan
1. Penguji Utama	: **Abdussakir M.Pd** NIP. 19751006 200312 1 001	( )
2. Ketua Penguji	: **Hairur Rahman, S.Pd, M.Si** NIP. 19800429 200604 1 003	( )
3. Sekretaris Penguji	: **Wahyu Henky Irawan, M.Pd** NIP. 19710420 200003 1 003	( )
4. Anggota Penguji	: **Dr. Munirul Abidin, M.Ag** NIP. 19720420 200212 1 003	( )

Mengetahui dan Mengesahkan
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : ASIS AS' ADI HAQ

NIM : 05510039

Jurusan : Matematika

Fakultas : Sains dan Teknologi

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri.

Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 11 Januari 2010

Yang membuat pernyataan

Asis As' adi Haq
NIM. 05510039

MOTTO

إِنَّ مَعَ ٱلۡعُسۡرِ يُسۡرٗا ٦

" Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan. "

Orang yang sukses adalah orang yang mampu memadukan usaha, doa, dan prasangka yang baik kepada Nya dan selanjutnya bertawakal.bagi siapa saja yang mau merubah jalan hidupnya menjadi lebih baik pastilah ada jalan untuk keluar dari setiap masalah dan kesulitan yang di alaminya.

بِسْمِ اللهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيْمِ

Penulis persembahkan

Karya ini untuk orang-orang yang sangat berarti:

Kedua orang tua tercinta penulis yang tanpa lelah memberikan dorongan moral, spiritual, finansial dan tak henti-hentinya mencurahkan kasih sayangnya.

Kakak dan adik tersayang:

Ulin Nuha Haq & Mas Mustaqim, Muaammar & Izul ,

Teruslah berjuang untuk berbakti dan banggakan kedua orangtua.

KATA PENGANTAR

Syukur alhamdulillah penulis panjatkan kehadirat Allah Swt yang telah memberikan curahan rahmat, taufiq dan hidayahNya sehingga skripsi yang berjudul " *Pewarnaan pada Graf Bipartisi Komplit* $K_{m,n}$ *dan Graf Tripartisi* $T_{2, n-1, n}$ *dengan m, n adalah bilangan asli* " ini dapat terselesaikan. Sholawat serta salam semoga tetap terlimpahkan kepada junjungan nabi besar Muhammad Saw yang telah membawa kita dari jalan yang gelap menuju jalan yang terang benderang.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini tidak akan mendapatkan suatu hasil yang baik tanpa adanya bimbingan, bantuan, saran serta doa dari berbagai pihak. Oleh karena itu penulis menyampaikan ungkapan terima kasih kepada

1. Prof. H. Imam Suprayogo, M.Si selaku Rektor Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang
2. Prof. Dr. Sutiman Bambang Sumitro, SU., DSc. selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang
3. Abdussakir, M.Pd selaku Ketua Jurusan Matematika Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang
4. Wahyu Henky Irawan, M.Pd selaku Dosen Pembimbing I, yang senantiasa dengan sabar memberikan bimbingan.

5. Munirul Abidin, M.Ag selaku Dosen Pembimbing II, terima kasih atas bimbingan yang telah diberikan.
6. Segenap dosen Matematika yang telah berjasa memberikan ilmunya, membimbing dan memberikan motivasi dalam penyelesaian skripsi ini.
7. Kedua orang tua dan semua keluarga yang selalu mendoakan dan mendukung setiap langkah penulis.
8. Teman-teman matematika angkatan 2005, terima kasih atas dukungan, motivasi, dan kebersamaannya selama ini.
9. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu, yang telah banyak membantu dalam penyelesaian skripsi ini.

Kiranya skripsi ini masih jauh dari sempurna, oleh karena itu penulis mengharapkan kritik dan saran yang sifatnya membangun. Akhirnya, penulis berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi penulis khususnya dan bagi pembaca pada umumnya.

Malang, 11 Januari 2010

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Haq As'adi, Asis.2009. **Pewarnaan pada Graf Bipartisi Komplit $K_{m,\ n}$ dan Graf Tripartisi $T_{2,\ n-1,\ n}$ dengan *m, n* adalah Bilangan Asli.** Skripsi, jurusan Matematika Fakultas sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing : (I) Wahyu Henky Irawan, M.Pd.(II) Munirul Abidin, M.Ag

Kata Kunci : Graf, Graf Bipartisi Komplit, Graf *n* -partisi, Pewarnaan graf, graf planar, bilangan kromatik.

Salah topik permasalahan dalam topik graf adalah pewarnaan. Pewarnaan titik dari graf *G* adalah sebuah pemetaan warna- warna ke titik- titik dari G sedemikian hingga titik yang terhubung langsung mempunyai warna- warna yang berbeda. Suatu pewarnaan sisi –*k* untuk graf *G* adalah suatu penggunaan sebagian atau semua *k* warna untuk mewarnai semua sisi di *G* sehingga setiap pasang sisi yang mempunyai titik persekutuan diberi warna yang berbeda. Pewarnaan *n* Peta merupakan pewarnaan graf G yang dapat diwarnai dengan *n* atau warna mínimum, sehingga daerah yang terhubung langsung dapat diwarnai dengan warna yang berbeda. Masalah yang dibahas dalam penelitian ini adalah menentukan Bilangan kromatik pewarnaan titik, sisi, dan Peta dari graf bipartisi komplit dan graf tripartisi. Langkah yang dilakukan adalah dengan menentukan bilangan kromatik pada beberapa kasus khusus pada graf bipartisi komplit dan graf tripartisi kemudian dicari pola tertentu. Konjektur yang dihasilkan kemudian dibuktikan dengan terlebih dahulu merumuskan konjekturnya sebagai suatu teorema yang dilengkapi dengan bukti-bukti.

Berdasarkan hasil pembahasan dapat diperoleh bahwa bilangan kromatik pewarnaan pada graf bipartisi komplit ($K_{m,n}$) dan $m,n \geq 2$ adalah;

I. $\chi(K_{(m,n)}) = 2 \ \forall\, m, n \in N$

II. $\chi'(K_{(m,n)}) = m$, jika $m \geq n$ atau n, jika $n > m$, $\forall\, m, n \in N$

III.

$$\text{III } \chi''(K_{(m,n)}) \begin{cases} \chi''(K_{(1,n)}) = 1 & ,\forall\, n \in N \\ \chi''(K_{(2,n)}) = \begin{cases} 2, & n \text{ genap} \\ 3, & n \text{ ganjil} \end{cases} & ,\forall\, n \in N;\ n \geq 2 \\ \chi''K_{(m,2)}) = \begin{cases} 2, & m \text{ genap} \\ 3, & m \text{ ganjil} \end{cases} & ,\forall\, m \in N;\ m \geq 2 \\ \text{Selainnya tidak bisa diwarnai} & \text{, Bukan planar} \end{cases}$$

Sedangkan bilangan kromatik perwanaan pada graf tripartisi $T_{(2,\ n-1,\ n)}$ dengan $n \in N$; $n \geq 2$ diperoleh :

I. $\chi(T_{(2,\ n-1,\ n)}) = 3 \ \forall\, n \in N ;\ n \geq 2$

II. $\chi'(T_{(2,\ n-1,\ n)}) = 2n - 1 \ \forall\, n \in N ;\ n \geq 2$

III. $\chi''(T_{(2,n-1,n)}) = 3 ,\ \forall\, n \in N ;\ n \geq 2$

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Masalah yang sering kali muncul di tengah-tengah kehidupan masyarakat terkadang seringkali membutuhkan selesaian dari disiplin ilmu, dengan bantuan bahasa lambang pada matematika permasalahan tersebut lebih mudah untuk dipahami, lebih mudah dipecahkan, atau bahkan dapat ditunjukkan bahwa suatu persoalan tidak mempunyai penyelesaian.

Oleh karena itu suatu permasalahan perlu dikaji dan dianalisis dan kemudian dicari model matematikanya.

Menurut Abdul Aziz (2006:*v*) matematika adalah salah satu ilmu pasti yang mengkaji abstraksi ruang, waktu, dan angka. Matematika juga mendeskripsikan realitas alam semesta dalam bahasa lambang, sehingga suatu permasalahan dalam realitas alam akan lebih mudah dipahami. Alam semesta sendiri memuat bentuk-bentuk dan konsep matematika, meskipun alam semesta tercipta sebelum matematika itu ada. Alam semesta serta segala isinya diciptakan Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mapan, dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi (Abdusysyakir, 2007:79).

Dalam Al Qur'an surat Al- Hijr ayat 19 disebutkan:

وَٱلۡأَرۡضَ مَدَدۡنَٰهَا وَأَلۡقَيۡنَا فِيهَا رَوَٰسِيَ وَأَنۢبَتۡنَا فِيهَا مِن كُلِّ شَيۡءٖ مَّوۡزُونٖ ١٩

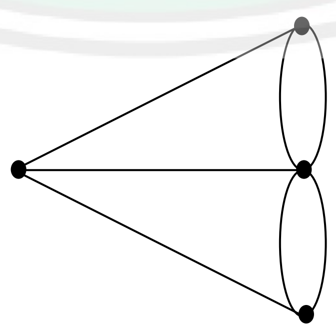
Artinya : " Dan Kami telah menghamparkan bumi dan menjadikan padanya gunung-gunung dan Kami tumbuhkan padanya segala sesuatu menurut ukuran ".

(Q.S. Al-Hijr: 19).

Salah satu cabang matematika yang banyak digunakan untuk menyelesaikan permasalahan dalam kehidupan sehari-hari adalah teori graf, karena teori-teorinya mudah untuk diaplikasikan dalam kehidupan sehari-hari, seperti mencari jarak terpendek untuk tukang pos dalam menyampaikan surat, masalah penjadwalan, jaringan telekomunikasi, ilmu komputer dan lain-lain.

Sejak masalah jembatan Konigsberg direpresentasikan dengan graf Euler, teori graf berkembang dengan pesat sebagai cabang ilmu matematika. Masalah jembatan Konigsberg adalah mengkinkah melewati tujuh buah jembatan tepat satu kali dan kembali lagi ke titik asal keberangkatan ? Kemudian pada tahun 1736 seorang matematikawan Swiss, *L.Euler*, adalah orang yang pertama kali menemukan jawaban masalah itu, hingga akhirnya Euler memodelkannya dalam bentuk graf sederhana. Untuk menghormatinya, model graf tersebut diberi nama sirkuit Euler (*cycle Euler*).

(*http://planetmath.org/encyclopedia/graphTheory*. diakses: 28 Desember 2007).



Gambar 1.1 sirkuit Euler

Graph G didefinisikan sebagai pasangan (*V*, *E*) dengan *V* adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut *titik*, dan *E* adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan takberurutan dari titik-titik berbeda di *V* yang disebut *sisi* (Miller, 2000:165). Banyaknya unsur di *V* disebut *order* dari *G* dan dilambangkan dengan *p(G)*, dan banyaknya unsur di *E* disebut ukuran dari *G* dan dilambangkan dengan *q(G)*. Jika graph yang dibicarakan hanya graph *G*, maka order dan ukuran dari *G* cukup masing-masing ditulis *p* dan *q* (Chartrand dan Leniak, 1986:4).

Secara global, graf berfungsi sebagai sarana pemodelan. Pemodelan yang dimaksud adalah membuat suatu penyederhanaan terhadap masalah dengan cara mempresentasikan objek- objek tersebut. (*http//en.wikipedia.org/wiki/Graph_theory*. diakses: 22 April 2009).

Teori graf merupakan pokok bahasan yang sudah tua usianya namun memiliki banyak terapan sampai saat ini. Graf digunakan untuk merepresentasikan objek- objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut. Representasi visual dari graf adalah dengan menyatakan objek dengan simpul, noktah, bulatan, titik, atau *vertex*, sedangkan hubungan antara objek dinyatakan dengan garis atau *edge*.

Salah satu aplikasi yang berkaitan dengan graf adalah pewarnaan graf (*graf colouring*) yang terdiri dari pewarnaan titik, sisi dan peta. pewarnaan pada graf erat kaitannya dengan penentuan bilangan kromatik yaitu masalah menentukan banyaknya warna minimum yang diperlukan untuk mewarnai suatu graf . Bilangan kromatik (*chromatic number*) dari graf *G*, dinyatakan dengan

$\chi(G)$, adalah bilangan n terkecil sehingga G dapat diwarnai dengan n warna. Biasanya warna – warna yang digunakan untuk mewarnai suatu graf dinyatakan dengan $1, 2, 3 \ldots, n$. Jelas bahwa $\chi(G) \leq |V(G)|$, (Purwanto,1998 : 73).

Didalam ayat disebutkan:

ٱلَّذِى لَهُۥ مُلْكُ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضِ وَلَمْ يَتَّخِذْ وَلَدًا وَلَمْ يَكُن لَّهُۥ شَرِيكٌ فِى
ٱلْمُلْكِ وَخَلَقَ كُلَّ شَىْءٍ فَقَدَّرَهُۥ تَقْدِيرًا ٢

Artinya: "Yang kepunyaan-Nya-lah kerajaan langit dan bumi, dan dia tidak mempunyai anak, dan tidak ada sekutu baginya dalam kekuasaan(Nya), dan dia Telah menciptakan segala sesuatu, dan dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya" (Q.S. Al-Furqaan: 2).

Ayat di atas menjelaskan bahwa segala sesuatu yang ada di alam ini ada ukurannya, ada hitungan-hitungannya, ada rumusnya, atau ada persamaannya. Dalam pewarnaan graf juga terdapat rumusan atau aturan-aturan, Dimana rumusan atau aturan –aturan yang dimaksud adalah bagaimana menentukan bilangan kromatik pada pewarnaan graf . Bahasan mengenai pewarnaan graf dapat diaplikasikan pada kehidupan sehari- hari yang dapat membantu dan memudahkan kita. Diantaranya pada pemasangan kabel telefon, pada masalah penjadwalan, pewarnaan peta dan lain sebagainya.

Beberapa kajian terdahulu tentang pewarnaan pada graf tertentu telah dibahas pada karya tulis yang lain, namun sebagian besar hanya membahas tentang pewarnaan titik atau pewarnaan sisi saja. seperti yang telah kita ketahui bahwa ada tiga macam pewarnaan pada graf yaitu pewarnaan titik, pewarnaan sisi, dan pewarnaan peta. karya tulis yang membahas tentang ketiga macam pewarnaan juga telah dibahas sebelumnya seperti " Pewarnaan pada graf buku dan graf tangga" oleh kokok imam wahyudi wijaya. Dari karya tulisnya tersebut diperoleh hasil ketiga macam pewarnaan graf tersebut.

Untuk selanjutnya penulis tertarik untuk melanjutkan meneliti tentang pewarnaan pada graf dengan menggunakan graf yang berbeda dimana nantinya juga akan ditentukan bilangan kromatik pada pewarnaan titik, sisi , dan peta pada graf Bipartisi Komplit dan graf tripartisi. Graf bipartisi komplit (*complete bipartite graph*) adalah graf bipartisi dengan himpunan partisi X dan Y sehingga masing-masing titik di X dihubungkan dengan masing-masing titik di Y oleh tepat satu sisi. Jika $|X| = m$ dan $|Y| = n$, maka graf bipartisi tersebut dinyatakan dengan $K_{m,n}$. (Purwanto, 1998:22). Oleh karena itu penulis merumuskan judul untuk skripsi ini , yakni " *Pewarnaan pada Graf Bipartisi Komplit* $K_{m,n}$ *dan Graf Tripartisi* $T_{2,\, n-1,\, n}$ *dengan m, n adalah bilangan asli* " .

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar balakang tersebut, maka rumusan masalah dalam penulisan ini antara lain :

1. Bagaimana menentukan bilangan kromatik pewarnaan titik pada graf bipartisi komplit $K_{m,n}$ dan graf tripartisi $T_{2,\, n-1,\, n}$. ?
2. Bagaimana menentukan bilangan kromatik pewarnaan sisi pada graf bipartisi komplit $K_{m,n}$ dan graf tripartisi $T_{2,\, n-1,\, n}$. ?

3. Bagaimana menentukan bilangan kromatik pewarnaan peta pada graf bipartisi komplit $K_{m,n}$ dan tripartisi $T_{2,\ n-1,\ n}$. ?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah diatas, maka tujuan penulisan skripsi ini antara lain :

1. Menjelaskan cara menentukan bilangan kromatik perwarnaan titik pada graf bipartisi komplit $K_{m,n}$ dan graf tripartisi $T_{2,\ n-1,\ n}$.
2. Menjelaskan cara menentukan bilangan kromatik perwarnaan sisi pada graf bipartisi komplit $K_{m,n}$ dan graf tripartisi $T_{2,\ n-1,\ n}$.
3. Menjelaskan cara menentukan bilangan kromatik perwarnaan peta pada graf bipartisi komplit $K_{m,n}$ dan graf tripartisi $T_{2,\ n-1,\ n}$.

1.4 Batasan Masalah

Pembahasan mengenai pewarnaan pada graf bipartisi komplit $K_{(m,n)}$ dan graf tripartisi $T_{2,\ n-1,\ n}$. dalam penulisan ini dibatasi pada m, $n \geq 2$. Hal ini dilakukan karena berdasarkan hasil percobaan penulis, ternyata untuk m, $n = 1$ memiliki pola yang berbeda dengan pola untuk m, n bilangan asli lainnya.

1.5 Manfaat Penulisan

1. Bagi penulis Penelitian ini digunakan sebagai tambahan informasi dan wawasan pengetahuan tentang teori graf, khususnya tentang pewarnaan pada graf bipartisi komplit.

2. Bagi lembaga

   Hasil penelitian ini dapat digunakan sebagai tambahan kepustakaan yang dijadikan sarana pengembangan wawasan keilmuan khususnya di jurusan matematika untuk mata kuliah Teori Graf.

3. Bagi pengembang ilmu

   Hasil penelitian ini dapat dijadikan sebagai bahan kajian keilmuan untuk menambah wawasan keilmuan.

1.6 Motode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode penelitian kepustaan (*library research*), Metode penelitian kepustakaan yaitu penelitian yang dilakukan di dalam perpustakaan untuk mengumpulkan data dan informasi kemudian dilanjutkan dengan menyusun, mengolah, menganalisis, menarik kesimpulan, menafsirkan, dan menguji hipotesis didasarkan dari hasil pengolahan data sehingga diperoleh ringkasan/kesimpulan data. Pengumpulan data dan informasi tersebut dapat dilakukan dengan bantuan bermacam material yang terdapat di ruang perpustakaan seperti buku-buku dan dokumen yang ada.

Sebagai literatur utama, penulis menggunakan buku *Graphs and Digraphs Second Edition* (Chartrand & Lesniak,), Matematika Diskrit (Purwanto), sedangkan sebagai literatur pendukung adalah semua buku atau sumber lain yang berhubungan dengan pewarnaan graf.

1.7 Sistematika Penulisan

Agar penulisan skripsi ini lebih terarah, mudah ditelaah, dan dipahami, maka digunakan sistematika pembahasan yang terdiri dari empat bab. Masing – masing bab dibagi ke dalam beberapa subbab dengan rumusan sebagai berikut :

BAB I. PENDAHULUAN

Dalam bab ini dijelaskan latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian dan sistematika penulisan.

BAB II. TINJAUAN PUSTAKA

Bagian ini terdiri atas konsep- konsep (teori - teori) yang mendukung bagian pembahasan, konsep – konsep tersebut antara lain : membahas tentang pengertian graf, graf terhubung, graf partisi, graf bipartisi,Graf tripartisi, graf planar, pewarnaan graf .

BAB III . PEMBAHASAN

Pembahasan berisi tentang bagaimana menentukan bilangan kromatik pewarnaan titik, sisi, dan pewarnaan peta pada graf bipartisi komplit dan Graf tripartisi serta membuktikannya, sekaligus berisi tentang kajian agama.

BAB IV. PENUTUP

Pada bab ini akan dibahas tentang kesimpulan akhir penelitian dan beberapa saran.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1. Graf

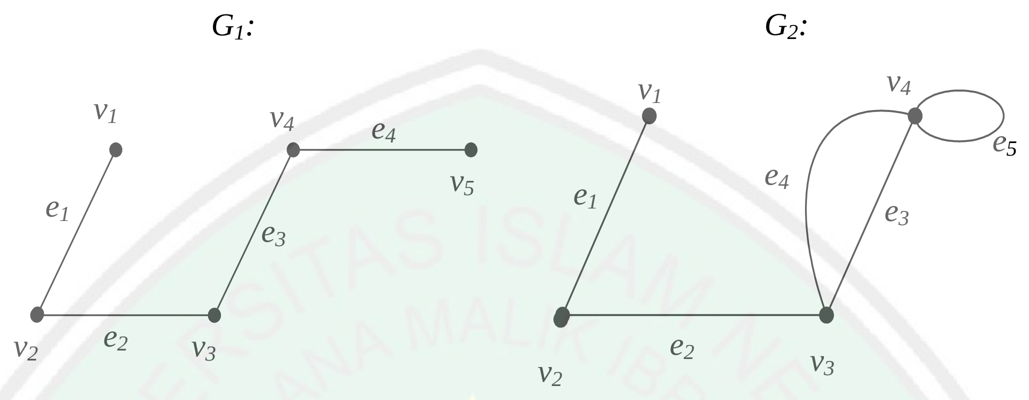
2.1.1 Definisi Graf

Definisi 1

Graf G adalah pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari obyek-obyek yang disebut sebagai titik dan E adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di G yang disebut sebagai sisi. Himpunan titik di G dinotasikan dengan $V(G)$ dan himpunan sisi dinotasikan dengan E(G). Sedangkan banyaknya unsur di V disebut order dari G dan dilambangkan dengan $p(G)$ dan banyaknya unsur di E disebut ukuran dari G dan dilambangkan dengan $q(G)$. Jika graf yang dibicarakan hanya graf G, maka order dan ukuran dari G tersebut cukup ditulis dengan p dan q (Chartrand dan Lesniak, 1986:4).

Dari definisi di atas, maka suatu graf sederhana tidak boleh mempunyai sisi rangkap (*multiple edges*) dan loop. Sisi rangkap dari suatu graf adalah jika dua titik yang dihubungkan oleh lebih dari satu sisi. Sedangkan yang disebut dengan loop adalah suatu sisi yang menghubungkan suatu titik dengan dirinya sendiri (Suryanto, 1986:14). Graf yang mempunyai sisi rangkap dan loop disebut multigraf.

Contoh :



b. Graf a. Multigraf

Gambar 2.1 Graf dan Multigraf

Pada Gambar 2.1 G_1 merupakan graf, memuat himpunan titik $V(G_1)$ dan sisi $E(G_1)$ yaitu:

$V(G_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, \}$

$E(G_1) = \{(v_1,v_2), (v_2,v_3), (v_3,v_4), (v_4,v_5)\}$

Graf G_1 mempunyai order 5 atau $p = 5$ dan *size* 4 atau $q = 4$

Sedangkan G_2 merupakan multigraf karena mempunyai sisi rangkap e_3, e_4 dan loop pada titik v_4 yaitu e_5.

Graf G disebut *finite* atau berhingga jika himpunan titik adalah berhingga, atau graf yang jumlah titiknya adalah n berhingga. Graf *infinite* atau tak berhingga adalah graf yang jumlah titiknya tidak berhingga. *Graf trivial* adalah graf berorder satu dengan himpunan sisinya merupakan himpunan kosong.

Graf *non trivial* adalah graf yang berorder lebih dari satu (Bondy and Murthy, 1976:3).

Contoh:

Gambar 2.2 G_1 Graf Trivial dan G_2 Graf Non Trivial

Pada Gambar 2.2 G_1 merupakan graf trivial karena G_1 hanya memuat satu titik atau berorder satu dan himpunan sisinya merupakan himpunan kosong. Sedangkan G_2 merupakan graf non trivial karena berorder lebih dari satu.

2.1.2 *Adjecent* dan *Insident*

Definisi 2

Sisi $e = (u, v)$ dikatakan menghubungkan titik u dan v. Jika $e = (u, v)$ adalah sisi di graf G, maka u dan v disebut terhubung langsung (*adjacent*), u dan e serta v dan e disebut terkait langsung (*incident*). Untuk selanjutnya, sisi $e = (u,v)$ akan ditulis $e = uv$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:4).

Dari gambar 2.1 pada G_2, titik v_3 dan sisi e_3, e_4, e_5 adalah *insident*. Sedangkan titik v_3 dan v_4 adalah *adjacent* tetapi v_4 dan v_1 tidak.

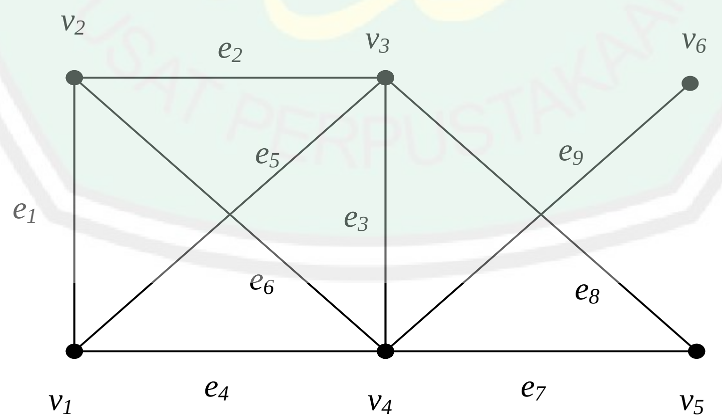
2.1.3 Derajat Titik

Definisi 3

Derajat dari titik v di graf G, ditulis $\deg_G(v)$, adalah banyaknya sisi di G yang terkait langsung (*incident*) dengan v. Jika dalam konteks pembicaraan hanya terdapat satu graf G, maka tulisan $\deg_G(v)$ disingkat menjadi $\deg(v)$. Titik yang berderajat genap sering disebut titik genap (*even vertices*) dan titik yang berderajat ganjil disebut titik ganjil (*odd vertices*). Titik yang berderajat nol disebut titik terisolasi (*isolated vértices*) dan titik yang berderajat satu disebut titik ujung (*end vertices*) (Chartrand dan Lesniak, 1986:7).

Contoh :

Perahatikan graf G berikut yang mempunyai himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9\}$



Gambar 2.3 Graf dengan Derajat Titik

Berdasarkan Gambar 2.3, diperoleh bahwa :

$\deg(v_1) = 3$

$\deg(v_2) = 3$

$\deg(v_3) = 4$

$\deg(v_4) = 5$

$\deg(v_5) = 2$

$\deg(v_6) = 1$

Jumlah derajat dari keenam titik yang mempunyai sembilan sisi itu adalah :

m = 3+3+4+5+2+1= 18

Jadi derajat pada graf G adalah dua kali jumlah sisinya.

Titik v_1, v_2, v_4 adalah titik ganjil, v_3 dan v_5 adalah titik genap, titik v_6 adalah titik ujung. Hubungan antara jumlah derajat semua titik dalam suatu graf G dengan banyak sisi, yaitu q adalah

$\sum_{v \in G} \deg(v) = 2q$

Hal ini dinyatakan dalam teorema berikut :

Teorema 1

Jika graf dengan $V(G)= \{v_1, v_2, \ldots v_p\}$

maka $\sum_{i=1}^{p} \deg(v_i) = 2q$. (Chartrand dan Lesniak, 1986:7)

Bukti :

Setiap sisi adalah terkait langsung dengan 2 titik. Jika setiap derajat titik dijumlahkan, maka setiap sisi dihitung dua kali.

Corollary 1.

Pada sebarang graf, banyak titik ganjil adalah genap.

Bukti:

Misalkan graf G dengan banyak sisi (*size*) q. Misalkan W himpunan yang memuat titik ganjil pada G serta U himpunan yang memuat titik genap di G. Dari teorema 1 maka diperoleh:

$$\sum_{v \epsilon v(G)} deg(v) = \sum_{v \epsilon v(W)} \deg(v) + \sum_{v \epsilon v(U)} \deg(v) = 2q$$

Dengan demikian karena $\sum_{v \epsilon v(U)} \deg(v)$ genap, maka $\sum_{v \epsilon v(W)} \deg(v)$ (jumlah derajat titik ganjil) juga genap. Sehingga $|W|$ adalah genap.

2.1.4 Graf Beraturan-*r*

Definisi 4

Graf beraturan-r adalah graf yang semua titiknya berderajat r, atau $\deg(v) = r, \forall v \epsilon V(G)$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:9).

Contoh:

Gambar 2.4 Graf G_1 beraturan -1 dan G_2 beraturan 2

Dari Gambar 2.4, graf G_1 disebut graf beraturan-1 karena derajat tiap titiknya adalah 1. Graf G_2 disebut graf beraturan-2 karena derajat tiap titiknya adalah 2.

2.1.5 Graf *n*- partisi

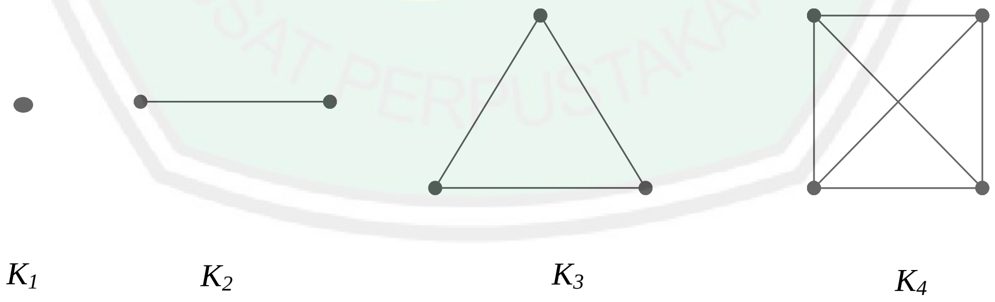
Definisi 5

Graf n- partisi didefinisikan sebagai graf dimana himpunan titik $V(G)$ dapat dipisah menjadi n himpunan titik, yaitu $V_1(G)$,$V_2(G)$,….,$V_n(G)$. Sisi – sisi pada graf n-partisi terhubung dari titik titik pada $Vi(G)$ ke titik - titik pada himpunan titik selain $Vi(G)$ atau $\overline{Vi(G)}$, dimana $\overline{Vi(G)}$ adalah komplemen dari dari $Vi(G)$.

2.1.6 Graf Komplit

Definisi 6

Graf komplit (*Complete Graph*) adalah graf dengan setiap pasang titik yang berbeda dihubungkan oleh satu sisi. Graf komplit dengan *n* titik dinyatakan dengan K_n (Purwanto, 1998:21).



Gambar 2.5 Graf Komplit

Dari Gambar 2.5, K_1, K_2, K_3 dan K_4 adalah graf komplit karena tiap titik dalam graf tersebut selalu *adjacent* dengan semua titik yang lain.

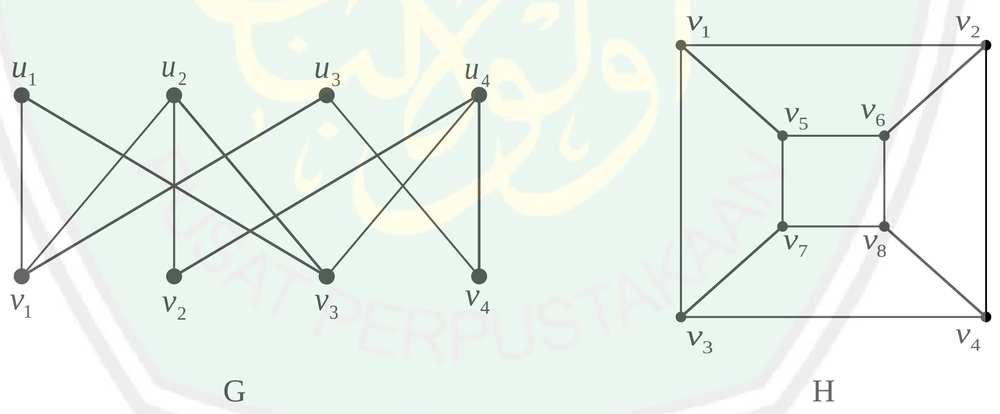
2.1.7 Graf Bipartisi

Definisi 7

Graf bipartisi (*bipartite graph*) adalah graf yang himpunan titiknya dapat dipisahkan menjadi dua himpunan tak kosong X dan Y sehingga masing-masing sisi di graf tersebut hanya menghubungkan satu titik di X dan satu titik di Y; X dan Y disebut himpunan partisi (Purwanto, 1998:21).

Contoh :

G adalah graf bipartisi dengan himpunan partisi $X = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ dan $Y = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ demikian juga H adalah graf bipartisi dengan himpunan partisi X = $\{v_1, v_4, v_6, v_7\}$ *dan* $Y = \{v_2, v_3, v_5, v_8\}$.



Gambar 2.6 Graf Bipartisi

2.1.8 Graf *n* Partisi Komplit

Definisi 8

Graf n partisi komplit G didefinisikan sebagai graf n partisi dengan himpunan partisinya $V_1, V_2, .., V_n$ itu mempunyai tambahan sifat yaitu jika

$u \in Vi$ dan $v \in Vj$, $i \neq j$ maka $uv \in E(G)$. Jika $|Vi| = Pi$, maka graf tersebut dinotasikan $K(p_1, p_2, \ldots, p_n)$. Graf bipartisi komplit dengan himpunan partisi V_1 dan V_2, dinama $|V1| = m$ dan $|V2| = n$, dinotasikan $K(m,n)$. Graf $K(1,n)$ dinamakan graf star . (Chartrand dan Lesniak, 1986:10).

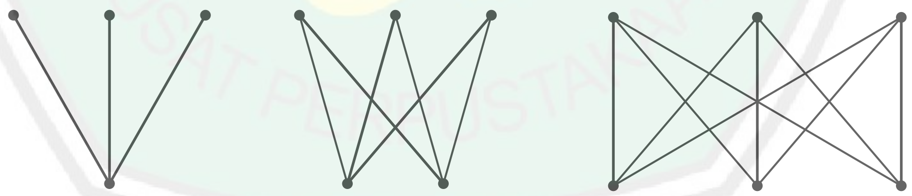
2.1.9 Graf Bipartisi Komplit

Definisi 9

Graf bipartisi komplit (*complete bipartite graph*) adalah graf bipartisi dengan himpunan partisi X dan Y sehingga masing-masing titik di X dihubungkan dengan masing-masing titik di Y oleh tepat satu sisi. Jika $|X| = m$ dan $|Y| = n$, maka graf bipartisi tersebut dinyatakan dengan $K_{m,n}$. (Purwanto, 1998:22).

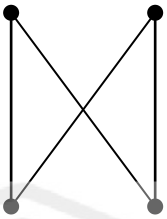
Contoh :

Graf $K_{1,3}$, $K_{2.3}$, *dan* $K_{3,3}$.

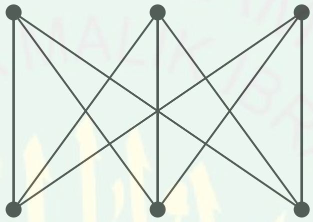


$K_{1,3}$ $K_{2.3}$ $K_{3,3}$

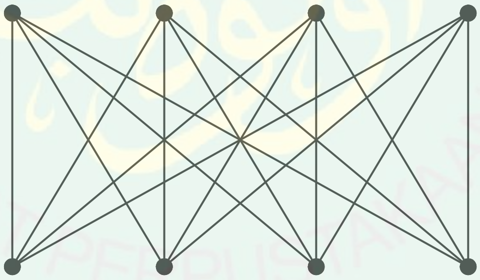
Gambar 2.7 Graf Komplit Bipartisi



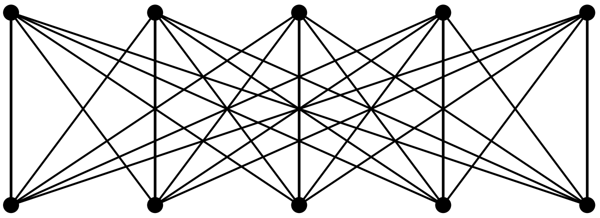
Gambar 2.8 Graf Komplit Bipartisi *K*(2, 2)



Gambar 2.9 Graf Komplit Bipartisi *K*(3, 3)



Gambar 2.10 Graf Komplit Bipartisi *K*(4, 4)



Gambar 2.11 Graf Komplit Bipartisi *K*(5, 5)

2.2 Graf Terhubung

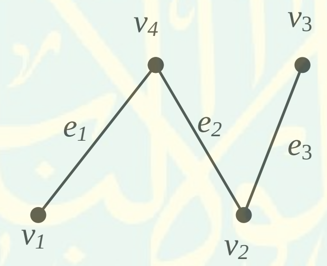
Definisi 10

Sebuah jalan (*walk*) $u - v$ di graf G adalah barisan berhingga (tak kosong). $W : u = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, ..., e_n, v_n = v$ yang berselang seling antara titik dan sisi, yang dimulai dari titik dan diakhiri dengan titik sedemikian hingga untuk $0 < i \leq n$. Dengan $e_i = v_{i-1}v_i$ adalah sisi di G.

v_0 disebut titik awal, v_n disebut titik akhir, $v_1, v_2, ..., v_{n-1}$ disebut titik internal, dan n menyatakan panjang dari W (Chartrand dan Lesniak, 1986:26).

Contoh:

G:



Gambar 2.12 Graf dengan Jalan

Jalan pada graf G di Gambar 2.12 adalah W: $v_1, e_1, v_4, e_2, v_2, e_3, v_3$

Definisi 11

Jalan $u - v$ yang semua sisinya berbeda disebut *Trail* $u - v$ (Chartrand dan Lesniak, 1986:26).

Definisi 12

Trail $u - v$ yang semua titiknya berbeda disebut *path* (lintasan) $u - v$. Dengan demikian, semua lintasan adalah *Trail* (Chartrand dan Lesniak, 1986:26).

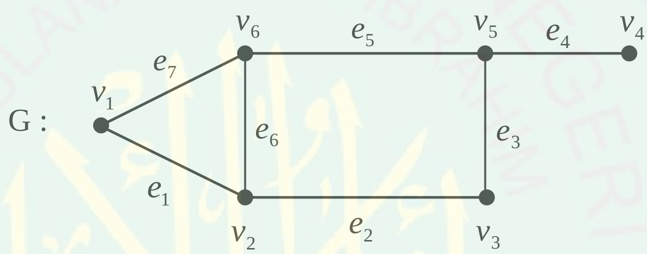
Definisi 13

Trail tertutup (*closed trail*) yang tak-trivial pada graf *G* disebut Sirkuit *G* (Chartrand dan Lesniak, 1986:28).

Definisi 14

Sirkuit $v_1, v_2, ..., v_n, v_1$ ($n \geq 3$) dimana v_i adalah titik-titik berbeda untuk $1 \leq i \leq n$ disebut Sikel (*cycle*). (Chartrand dan Lesniak, 1986:28).

Contoh:



Gambar 2.13 Trail, Lintasan, Sirkuit dan Sikel

Trail pada graf G di Gambar 2.13 adalah : $v_5, e_3, v_3, e_2, v_2, e_6, v_6, e_5, v_5, e_4, v_4$.

Lintasan pada graf G di Gambar 2.13 adalah : $v_3, e_2, v_2, e_1, v_1, e_7, v_6, e_5, v_5, e_4, v_4$.

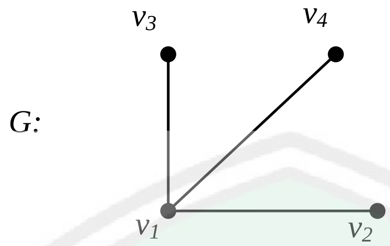
Sirkuit pada graf G di Gambar 2.13 adalah : $v_5, e_5, v_6, e_7, v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_5$

Sikel pada graf G di Gambar 2.13 adalah : $v_5, e_5, v_6, e_6, v_2, e_2, v_3, e_3, v_5$

Definisi 15

Misalkan *u* dan *v* titik berbeda pada graf *G*. Maka titik *u* dan *v* dapat dikatakan terhubung (*connected*), jika terdapat lintasan $u - v$ di *G*. Sedangkan suatu graf *G* dapat dikatakan terhubung (*connected*), jika untuk setiap titik *u* dan *v* di *G* terhubung (Chartrand dan Lesniak, 1986:28).

Contoh:



Gambar 2.14 Graf Terhubung (*connected*)

Graf G pada Gambar 2.14 dikatakan terhubung karena setiap titiknya terhubung dengan titik yang lain.

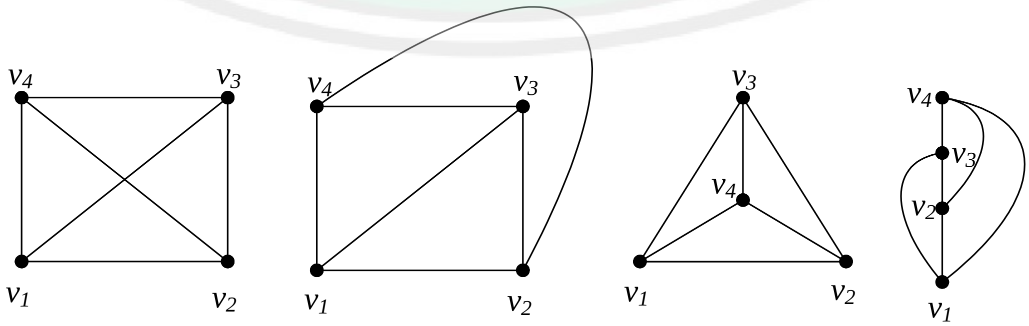
2.3 Graf Planar

Definisi 16

Suatu graf G dikatakan planar jika dapat dikembangkan dalam suatu bidang tanpa ada dua sisi saling bertemu kecuali pada simpul persekutuan, gambar tersebut disebut gambar bidang untuk G (Purwanto, 1998 : 58).

Contoh :

Graf K_4 adalah planar, ada lebih dari satu gambar graf bidang untuk K_4, yaitu



Gambar 2.15 Graf K_4 Graf Bidang dari K_4

2.4 Pewarnaan Pada Graf

Ada 3 macam pewarnaan graf, yaitu pewarnaan titik, pewarnaan sisi, dan pewarnaan peta.

2.4.1 Pewarnaan titik (*vertex coloring*).

Definisi 17

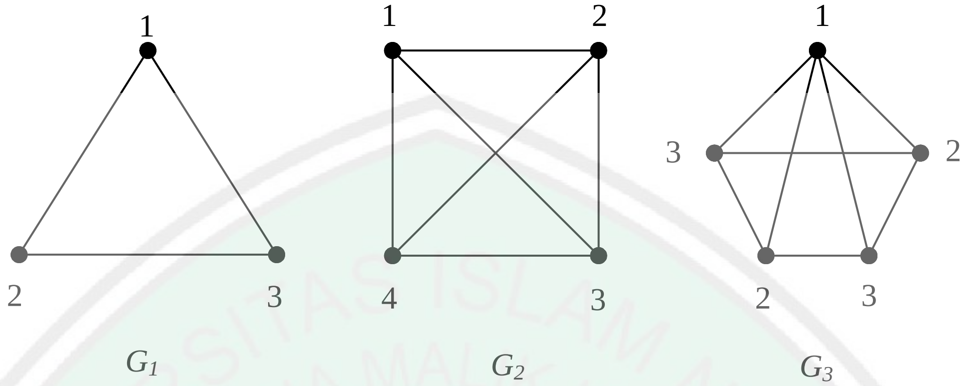
Pewarnaan titik dari graf G adalah sebuah pemetaan warna- warna ke titik-titik dari G sedemikian hingga titik yang terhubung langsung mempunyai warna- warna yang berbeda. Graf G berwarna n jika terdapat sebuah pewarnaan dari G yang menggunakan n warna. (Chartrand dan Lesniak, 1986:271).

Dalam pewarnaan titik erat kaitannya dengan penentuan bilangan kromatik, yaitu masalah menentukan banyak warna mínimum yang diperlukan untuk mewarnai titik – titik pada graf sehingga dua titik yang terhubung langsung mempunyai warna yang berbeda

Bilangan kromatik (*chromatic number*) dari graf G, dinyatakan dengan $\chi(G)$, adalah bilangan n terkecil sehingga G dapat diwarnai dengan n warna. Biasanya warna- warna yang digunakan untuk mewarnai suatu graf dinyatakan dengan 1,2,3,…n. jelas bahwa $\chi(G) \leq |V(G)|$. (Purwanto, 1998:73).

Beberapa graf tertentu dapat langsung ditentukan bilangan kromatiknya. Graf kosong N_n memiliki $\chi(G)$=1, karena semua titik tidak terhubung langsung. Jadi untuk mewarnai semua titik cukup dibutuhkan satu warna saja. Graf komplit Kn memiliki $\chi(K_n) = n$ sebab semua titik saling terhubung. Sehingga diperlukan n warna (Chartrand dan Lesniak, 1986:271)

Contoh :



Gambar 2.16 Pewarnaan Titik

Untuk graf G_1, karena $|V(G_1)| = 3$, maka $\chi(G_1) \leq 3$. Untuk G_2, karena $|V(G_2)| = 4$, maka $\chi(G_1) \leq 4$. Karena semua titik pada G_1 dan G_2 saling terhubung langsung, akibatnya $\chi(G_1) \geq 3$ dan $\chi(G_1) \geq 4$. jadi $\chi(G_1) = 3$ dan $\chi(G_2) = 4$. Untuk graf G_3, $\chi(G_3) \leq 3$, karena 3 warna untuk mewarnainya seperti pada gambar. Karena graf G_3 memuat graf Komplit K_3, maka $\chi(G_3) \geq 3$,

Akibatnya $\chi(G_3) = 3$

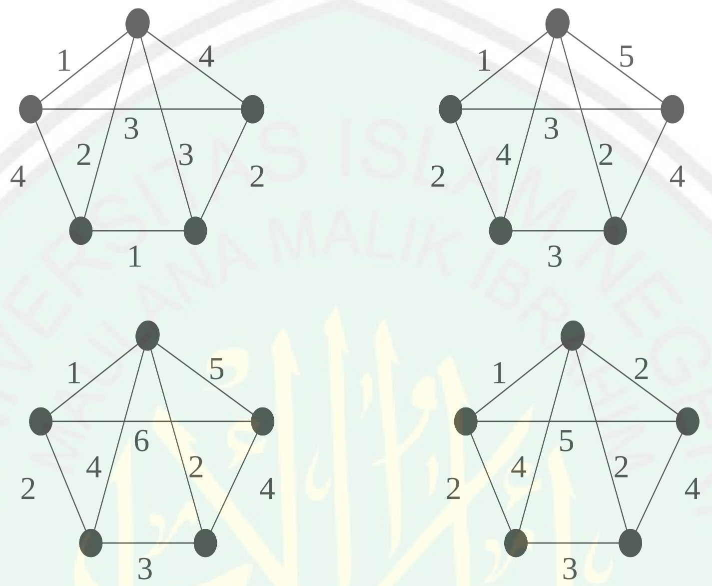
2.4.2 Pewarnaan sisi (*edge Coloring*)

Definisi 18

Suatu pewarnaan sisi –k untuk graf G adalah suatu penggunaan sebagian atau semua k warna untuk mewarnai semua sisi di G sehingga setiap pasang sisi yang mempunyai titik persekutuan diberi warna yang berbeda. Jika G mempunyai pewarnaan sisi- n, maka dikatakan sisi- sisi di G diwarnai dengan n warna. Indeks kromatik G dinotasikan dengan $\chi'(G)$

adalah bilanngan n terkecil sehingga G dapat diwarnai dengan n warna (Purwanto, 1998 : 80).

Contoh



Gambar 2.1.7 Pewarnaan Sisi Graf G

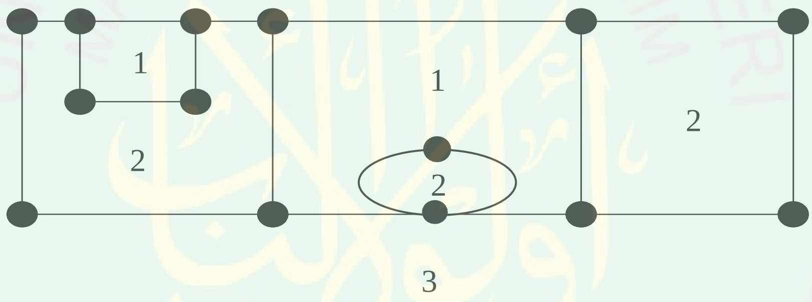
Biasanya pewarnaan sisi – n ini ditunjukkan dengan menulis bilangan-bilangan 1, 2, 3, …,n di dekat sisi- sisi yang sesuai. Contoh : diagram (a), (b), dan (c) diatas mengilustrasikan pewarnaan sisi -4, pewarnaan sisi-5, dan pewarnaan sisi-6 untuk graf G yang memiliki delapan sisi. Diagram (d) tidak dapat diwarnai karena dua sisi yang berwarna 2 bertemu pada titik yang sama. Dengan demikian $\chi'(G) \leq 4$, karena G memiliki pewarnaan sisi -4 [diagram (a)]. Sebaliknya, $\chi'(G) \geq 4$, karena G memuat empat sisi yang bertemu pada titik yang sama (yaitu titik berderajat 4), sehingga padanya harus diberikan warna berbeda.

2.4.3 Pewarnaan Peta (*Map Coloring*)

Definisi 19

Pewarnaan n wilayah merupakan pewarnaan graf G yang dapat diwarnai dengan n atau warna mínimum, sehingga wilayah yang terhubung langsung dapat diwarnai dengan warna yang berbeda. Pewarnaan n wilayah dapat disimbolkan dengan $\chi''(G)$

Contoh :



Gambar2.1.8 Pewarnaan Peta

BAB III

PEMBAHASAN

3.1 Pewarnaan pada Graf Bipartisi Komplit $K_{(m,n)}$.

3.1.1 Pewarnaan Titik pada Graf Bipartisi Komplit $K_{(m,n)}$.

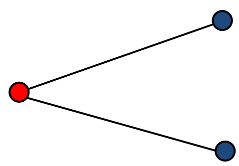
Dalam pewarnaan titik pada graf bipartisi komplit $K_{(m,n)}$. yang harus diperhatikan adalah mencari bilangan kromatiknya terlebih dahulu yaitu dengan menentukan banyaknya warna minimum yang diperlukan untuk mewarnai titik pada graf bipartisi komplit, sehingga dua titik yang terhubung mempunyai warna yang berbeda, langkah – langkah yang dipergunakan sebagai berikut :

1. Menentukan $\chi(K_{(m,n)})$, dengan $m,n \in$ N

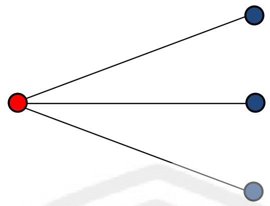
   a. Berikut ini akan ditentukan χ bilangan kromatik dari pewarnaan titik pada graf bipartisi komplit $K_{(2,n)}$ untuk n = 2, 3, 4, 5.

$\chi\,(K_{(1,1)}) = 2$

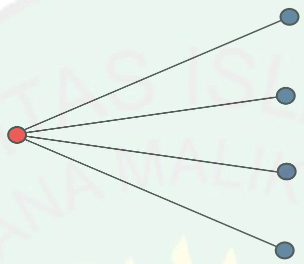
Ambil warna 1 untuk v_o karena $\{v_o\}$ merupakan partisi pertama. Selanjutnya titik-titik pada partisi kedua adalah warna 2 karena $\{w_0\}$ pada partisi kedua terhubung langsung dengan titik – titik pada partisi pertama. Sedemikian sehingga berlaku pula untuk semua $(K_{1,2})$, $(K_{1,3})$, $(K_{1,4})$ dan $(K_{1,5})$.



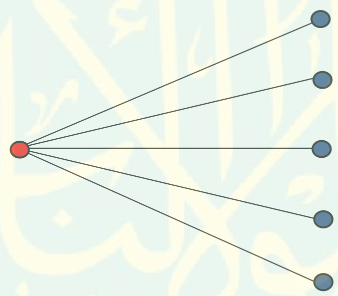
$\chi\,(K_{(1,2)}) = 2$



$\chi\,(K_{(1,3)}) \;=\; 2$



$\chi\,(K_{(1,4)}) \;=\; 2$

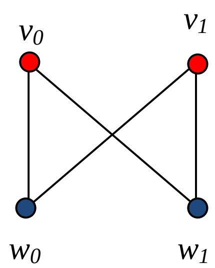


$\chi\,(K_{(1,5)}) \;=\; 2$

Gambar 3.1.1.1 Pewarnaan Titik pada Graf Bipartisi Komplit

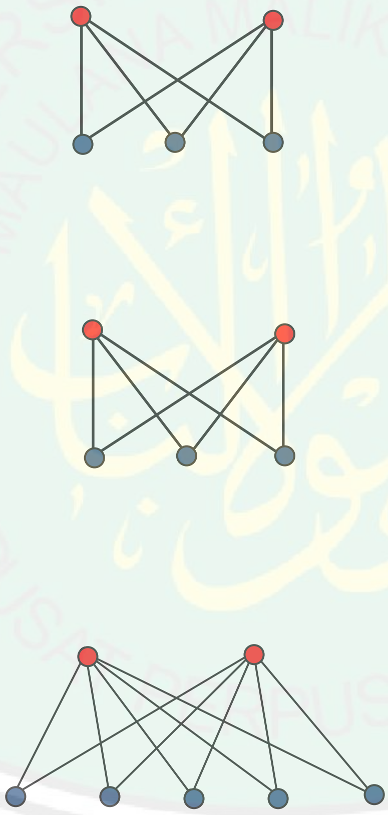
$K\,(_{1,n}\,)$, n = 1, 2, 3, 4, 5.

b. Berikut ini akan ditentukan χ bilangan kromatik dari pewarnaan titik pada graf bipartisi komplit $K_{(2,n)}$ untuk n = 2, 3, 4, 5.



$\chi\,(K_{(2,2)}) \;=\; 2$

Ambil warna 1 untuk v_o karena $\{v_o, v_1\}$ merupakan partisi pertama, untuk v_1 diberi warna 1 karena v_o tidak terhubung langsung dengan v_1. selanjutnya titik-titik pada partisi kedua adalah warna 2 karena $\{w_0, w_1\}$ pada partisi kedua terhubung langsung dengan titik – titik pada partisi pertama. Sedemikian sehingga berlaku pula untuk semua $(K_{2,3})$, $(K_{2,4})$, dan $(K_{2,5})$.



$\chi(K_{(2,3)}) = 2$

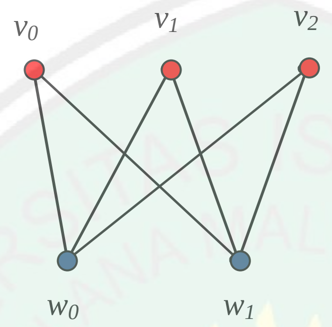
$\chi(K_{(2,4)}) = 2$

$\chi(K_{(2,5)}) = 2$

Gambar 3.1.1.2 Pewarnaan Titik pada Graf Bipartisi Komplit

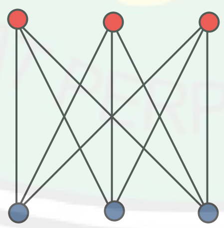
$K\ (_{2,n})$, n = 2, 3, 4, 5.

c. Berikut ini akan ditentukan χ bilangan kromatik dari pewarnaan titik pada graf bipartisi komplit $K_{(3,n)}$ untuk n = 2, 3, 4, 5.

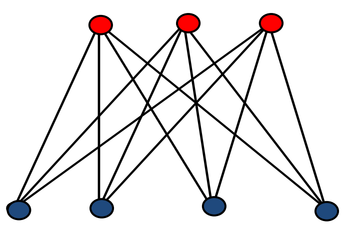


$\chi(K_{(3,2)}) = 2$

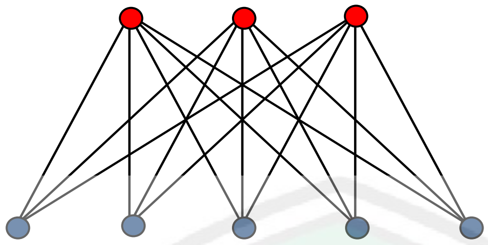
Ambil warna 1 untuk v_o karena $\{v_o, v_1, v_2\}$ merupakan partisi pertama, untuk v_1 dan v_2 diberi warna 1 karena v_o tidak terhubung langsung dengan v_1 dan v_2. selanjutnya titik-titik pada partisi kedua adalah warna 2 karena $\{w_0, w_1\}$ pada partisi kedua terhubung langsung dengan titik – titik pada partisi pertama. Sedemikian sehingga berlaku pula untuk semua ($K_{3,3}$), ($K_{3,4}$), dan ($K_{3,5}$).



$\chi(K_{(3,3)}) = 2$



$\chi(K_{(3,4)}) = 2$

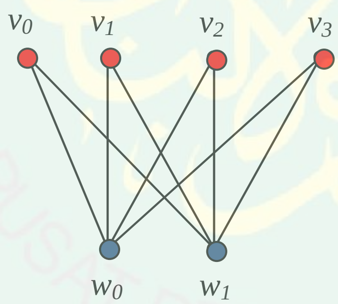


$\chi(K_{(3,5)}) = 2$

Gambar 3.1.1.3 Pewarnaan Titik pada Graf Bipartisi Komplit

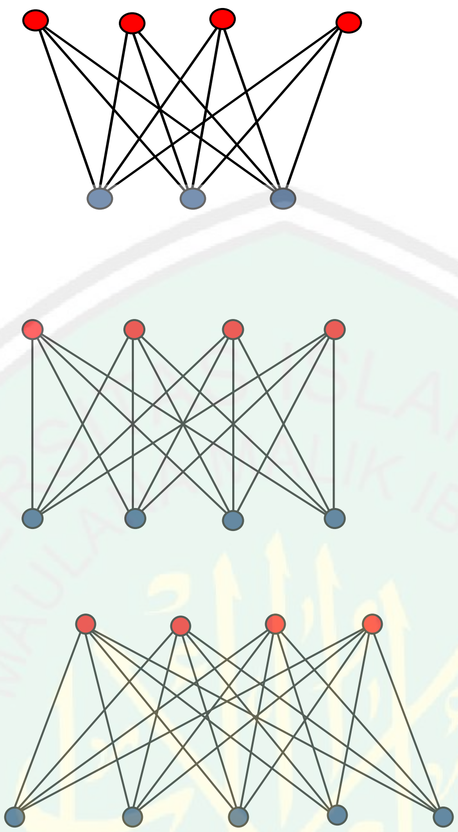
$K\ (_{3,n}\ ),\ n = 2, 3, 4, 5.$

d. Berikut ini akan ditentukan χ bilangan kromatik dari pewarnaan titik pada graf bipartisi komplit $K_{(4,n)}$ untuk $n = 2, 3, 4, 5$.



$\chi(K_{(4,2)}) = 2$

Ambil warna 1 untuk v_o karena $\{v_o, v_1, v_2, v_3\}$ merupakan partisi pertama, untuk v_1, v_2, dan v_3 diberi warna 1 karena v_o tidak terhubung langsung dengan v_1, v_2 dan v_3 selanjutnya titik-titik pada partisi kedua adalah warna 2 karena $\{w_0, w_1\}$ pada partisi kedua terhubung langsung dengan titik – titik pada partisi pertama. Sedemikian sehingga berlaku pula untuk semua $(K_{4,3})$, $(K_{4,4})$, dan $(K_{4,5})$.



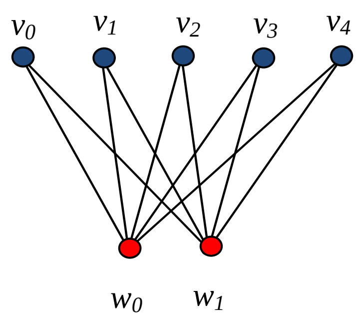
$\chi(K_{(4,3)}) = 2$

$\chi(K_{(4,4)}) = 2$

$\chi(K_{(4,5)}) = 2$

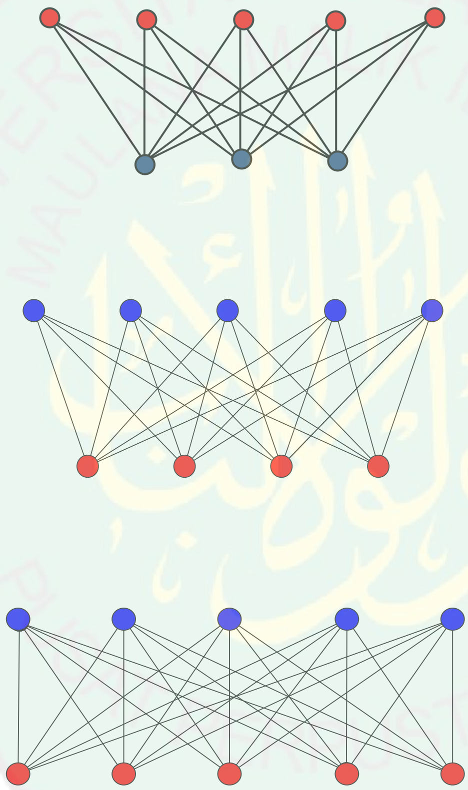
Gambar 3.1.1.4 Pewarnaan Titik pada Graf Bipartisi Komplit $K_{(4,n)}$, n = 2, 3, 4, 5.

e. Berikut ini akan ditentukan χ bilangan kromatik dari pewarnaan titik pada graf bipartisi komplit $K_{(5,n)}$ untuk n = 2, 3, 4, 5.



$\chi(K_{(5,2)}) = 2$

Ambil warna 1 untuk v_o karena $\{v_o, v_1, v_2, v_3, v_4\}$ merupakan partisi pertama, untuk v_1, v_2, v_3, v_4 diberi warna 1 karena v_o tidak terhubung langsung dengan v_1, v_2, v_3, v_4 selanjutnya titik-titik pada partisi kedua adalah warna 2 karena $\{w_0, w_1\}$ pada partisi kedua terhubung langsung dengan titik – titik pada partisi pertama. Sedemikian sehingga berlaku pula untuk semua $(K_{5,3})$, $(K_{5,4})$, dan $(K_{5,5})$.



$\chi(K_{(5,3)}) = 2$

$\chi(K_{(5,4)}) = 2$

$\chi(K_{(5,5)}) = 2$

Gambar 3.1.1.5 Pewarnaan Titik pada Graf Bipartisi Komplit

$K_{(5,n)}$, $n = 2, 3, 4, 5$.

2. Mencari pola dari bilangan kromatik dari,

$\chi(K_{(1,1)}) = 2$

$\chi(K_{(1,2)}) = 2$

$\chi(K_{(1,3)}) = 2$

$\chi(K_{(1,4)}) = 2$

$\chi(K_{(1,5)}) = 2$

$\chi(K_{(2,2)}) = 2$

$\chi(K_{(2,3)}) = 2$

$\chi(K_{(2,4)}) = 2$

$\chi(K_{(2,5)}) = 2$

$\chi(K_{(3,2)}) = 2$

$\chi(K_{(3,3)}) = 2$

$\chi(K_{(3,4)}) = 2$

$\chi(K_{(3,5)}) = 2$

$\chi(K_{(4,2)}) = 2$

$\chi(K_{(4,3)}) = 2$

$\chi(K_{(4,4)}) = 2$

$\chi(K_{(4,5)}) = 2$

$\chi(K_{(5,2)}) = 2$

$\chi(K_{(5,3)}) = 2$

$\chi(K_{(5,4)}) = 2$

$\chi(K_{(5,5)}) = 2$

$\chi(K_{(m,n)}) = 2$

Maka diperoleh pola bahwa

$\chi(K_{(m,n)}) = 2 \;\; \forall\, m,n \in N$

3. Pola yang diperoleh dinyatakan sebagai konjektur.

   $\chi(K_{(m,n)}) = 2 \ \forall \ m,n \in N$

   konjektur tersebut bersifat induktif dan belum diterima kebenarannya dalam matematika.

4. Konjektur tersebut dinyatakan sebagai teorema dan dibuktikan

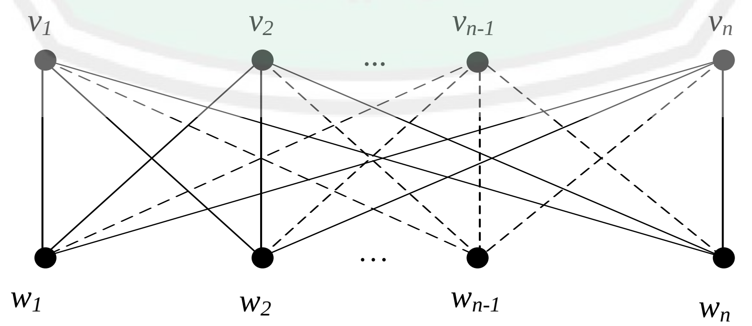
Teorema 3.1.1

Bilangan kromatik pewarnaan titik pada graf Bipartisi Komplit ($K_{(m,n)}$) adalah

$$\chi(K_{(m,n)}) = 2 \ \forall \ m,n \in N$$

Bukti :

Pewarnaan titik pada Graf Bipartisi Komplit $K_{(m,n)}$ dapat digambarkan sebagai berikut :



Gambar 3.1.1.6 Pewarnaan titik pada Graf bipartisi Komplit $K_{(m,n)}$

Pilih warna 1 untuk v_1

Karena $v_{2,}\ v_{3,....,}\ v_n$ tidak terhubung langsung dengan v_1 maka, $v_{2,}\ v_{3,....,}\ v_{n-1,}\ v_n$ dapat diberi warna 1.

Karena w_1 terhubung langsung dengan $v_1,\ v_{2,}\ v_{3,....,}\ v_{n-1,}\ \ v_n$, tetapi tidak terhubung langsung dengan $w_2, w_3,...., w_{n-1}, w_n$. Maka dapat diberi warna beda pilih warna 2.

Karena w_i, i = 2, 3,..,n terhubung langsung dengan v_i ,i = 1, 2, 3,..,n, tetapi tidak terhubung langsung dengan w_1 maka, w_i, i = 2, 3, ...n dapat diberi warna 2.

Dengan demikian warna minimum yang diperlukan sebanyak 2 warna

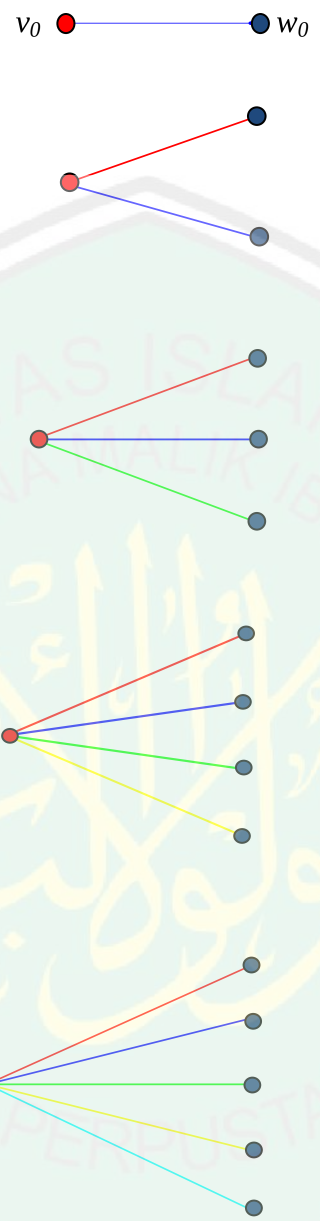
Jadi bilangan kromatik pada graf bipartisi komplit $K_{(m,n)}$ adalah

$$\chi\,(K_{(m,n)})\ =\ 2\ \ \forall\ m,n \in N$$

3.1.2 Pewarnaan Sisi pada Graf Bipartisi Komplit $K_{(m,n)}$

Dalam pewarnaan sisi pada graf bipartisi komplit yang harus diperhatikan adalah mencari bilangan kromatiknya terlebih dahulu yaitu dengan menentukan banyaknya warna minimum yang diperlukan untuk mewarnai sisi – sisi pada graf bipartisi komplit, sehingga sisi yang terhubung langsung mempunyai warna yang berbeda, langkah – langkah yang dipergunakan sebagai berikut :

1. Menentukan $\chi'(K_{(m,n)})$, dengan $m,n\ \geq 2$.
    a. Berikut ini akan ditentukan χ' bilangan kromatik dari pewarnaan sisi pada graf bipartisi komplit $K_{(2,n)}$ untuk n = 2, 3, 4, 5.



$\chi'(K_{(1,1)}) = 2$

$\chi'(K_{(1,2)}) = 2$

$\chi'(K_{(1,3)}) = 2$

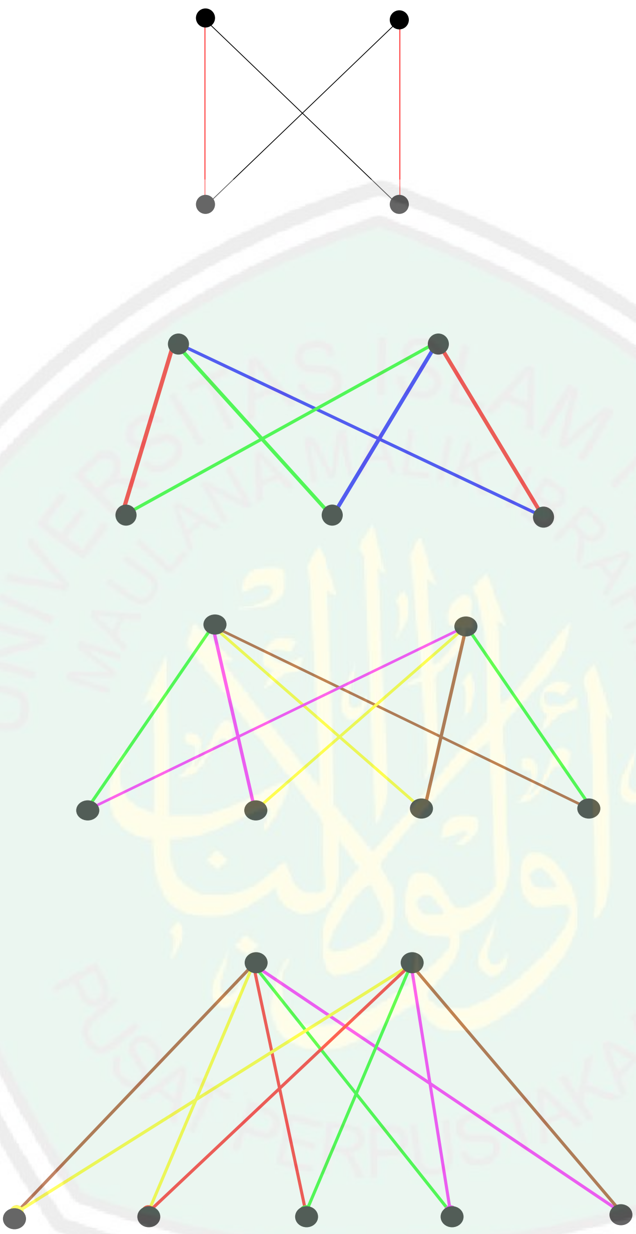
$\chi'(K_{(1,4)}) = 2$

$\chi'(K_{(1,5)}) = 2$

Gambar 3.1.2.1 Pewarnaan Sisi pada Graf Bipartisi Komplit

$K_{(1,n)}$, n = 1, 2, 3, 4, 5.

b. Berikut ini akan ditentukan χ' bilangan kromatik dari pewarnaan sisi pada graf bipartisi komplit $K_{(3,n)}$ untuk n = 2, 3, 4, 5.



$\chi'(K_{(2,2)}) = 2$

$\chi'(K_{(2,3)}) = 3$

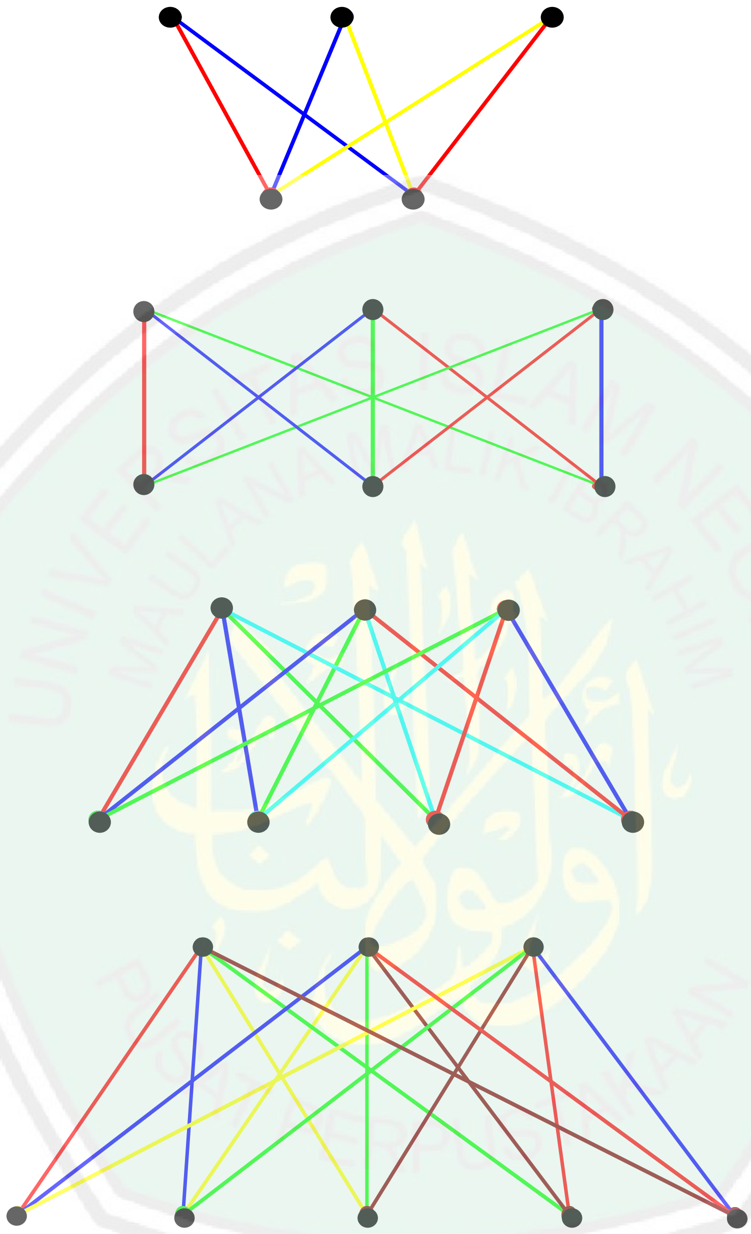
$\chi'(K_{(2,4)}) = 4$

$\chi'(K_{(2,5)}) = 5$

Gambar 3.1.2.2 Pewarnaan Sisi pada Graf Bipartisi Komplit

$K_{(2,n)}$, n = 2, 3, 4, 5.

c. Berikut ini akan ditentukan χ' bilangan kromatik dari pewarnaan sisi pada graf bipartisi komplit $K_{(3,n)}$ untuk n = 2, 3, 4, 5.



$\chi'(K_{(3,2)}) = 3$

$\chi'(K_{(3,3)}) = 3$

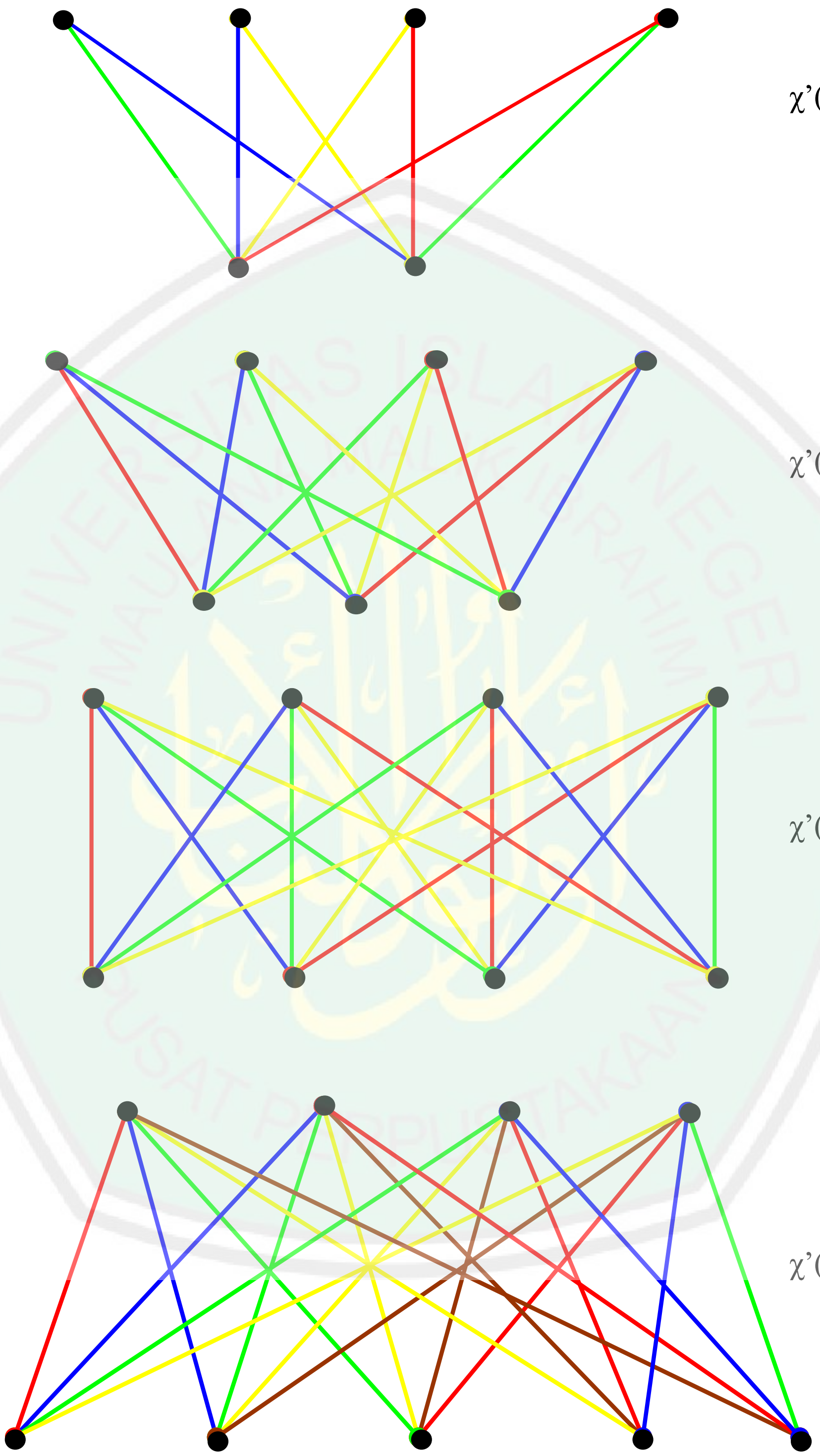
$\chi'(K_{(3,4)}) = 4$

$\chi'(K_{(3,5)}) = 5$

Gambar 3.1.2.3 Pewarnaan Sisi pada Graf Bipartisi Komplit

$K_{(3,n)}$, n = 2, 3, 4, 5.

d. Berikut ini akan ditentukan χ' bilangan kromatik dari pewarnaan sisi pada graf bipartisi komplit $K_{(4,n)}$ untuk n = 2, 3, 4, 5.



$\chi'(K_{(4,2)}) = 4$

$\chi'(K_{(4,3)}) = 4$

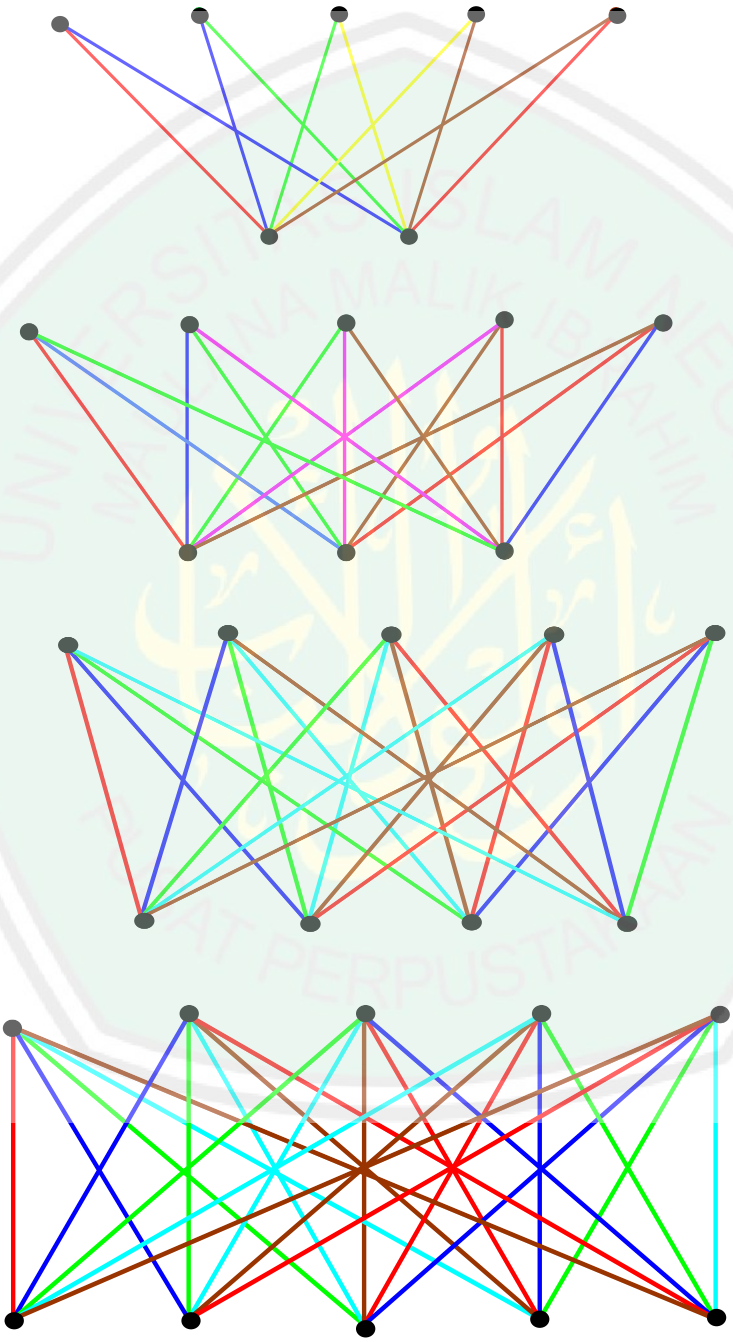
$\chi'(K_{(4,4)}) = 4$

$\chi'(K_{(4,5)}) = 5$

Gambar 3.1.2.4 Pewarnaan Sisi pada Graf Bipartisi Komplit

$K_{(4,n)}$, n = 2, 3, 4, 5.

e. Berikut ini akan ditentukan χ' bilangan kromatik dari pewarnaan sisi pada graf bipartisi komplit $K_{(5,n)}$ untuk n = 2, 3, 4, 5.



$\chi'(K_{(5,2)}) = 5$

$\chi'(K_{(5,3)}) = 5$

$\chi'(K_{(5,4)}) = 5$

$\chi'(K_{(5,5)}) = 5$

Gambar 3.1.2.5 Pewarnaan Sisi pada Graf Bipartisi Komplit $K_{(5,n)}$, n = 2, 3, 4, 5.

f. Mencari pola dari bilangan kromatik dari,

$\chi'(K_{(1,1)}) = 1$

$\chi'(K_{(1,2)}) = 2$

$\chi'(K_{(1,3)}) = 3$

$\chi'(K_{(1,4)}) = 4$

$\chi'(K_{(1,5)}) = 5$

$\chi'(K_{(2,2)}) = 2$

$\chi'(K_{(2,3)}) = 3$

$\chi'(K_{(2,4)}) = 4$

$\chi'(K_{(2,5)}) = 5$

$\chi'(K_{(3,2)}) = 3$

$\chi'(K_{(3,3)}) = 3$

$\chi'(K_{(3,4)}) = 4$

$\chi'(K_{(3,5)}) = 5$

$\chi'(K_{(4,2)}) = 4$

$\chi'(K_{(4,3)}) = 4$

$\chi'(K_{(4,4)}) = 4$

$\chi'(K_{(4,5)}) = 5$

$\chi'(K_{(5,2)}) = 5$

$\chi'(K_{(5,3)}) = 5$

$\chi'(K_{(5,4)}) = 5$

$\chi'(K_{(5,5)}) = 5$

$$\chi'(K_{(m,n)}) = \begin{cases} m, \text{ jika } m \geq n \\ n, \text{ jika } n > m \end{cases}$$

Maka diperoleh pola bahwa:

$$\chi'(K_{(m,n)}) = \begin{cases} m, \text{ jika } m \geq n \\ n, \text{ jika n} > m \end{cases} \qquad \forall\ m, n \in N$$

g. Pola yang diperoleh dinyatakan sebagai konjektur.

$$\chi'(K_{(m,n)}) = \begin{cases} m, \text{ jika } m \geq n \\ n, \text{ jika n} > m \end{cases} \qquad \forall\ m, n \in N$$

konjektur tersebut bersifat induktif dan belum diterima kebenarannya dalam matematika.

h. Konjektur tersebut dinyatakan sebagai teorema dan dibuktikan

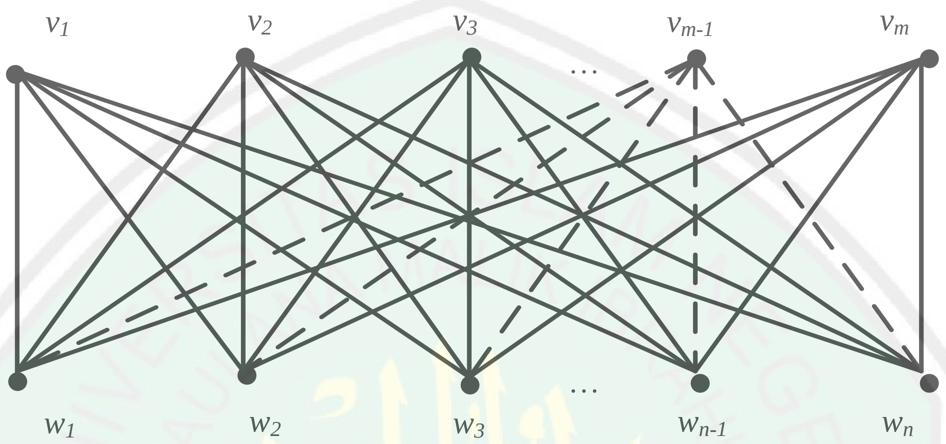
Teorema 3.1.2

Bilangan kromatik pewarnaan sisi pada graf Bipartisi Komplit adalah

$$\chi'(K_{(m,n)}) = \begin{cases} m, \text{ jika } m \geq n \\ n, \text{ jika } n > m \end{cases} \qquad \forall\ m, n \in N$$

Bukti :

Gambar Graf Bipartisi Komplit $K_{(m,n)}$ dapat digambarkan sebagai berikut :



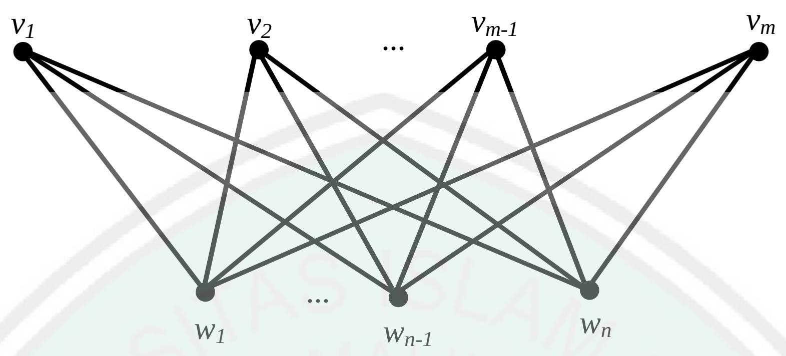
Gambar 3.1.2.6 Gambar Graf bipartisi Komplit $K_{(m,n)}$

a. Kasus I untuk $m = n$ $maka$ $\chi' = m$ $atau$ n

Pandang sisi v_1w_i karena titik w_i tidak terhubung dengan w_j $i \neq j$ maka warna sisi v_1w_i dapat diwarnai sebanyak i karena w_i , $i = 1,...,n$ berarti himpunan titik w sebanyak n maka warna sisi v_1w_i , $i = 1,...,n$ diberi warna sebanyak n,

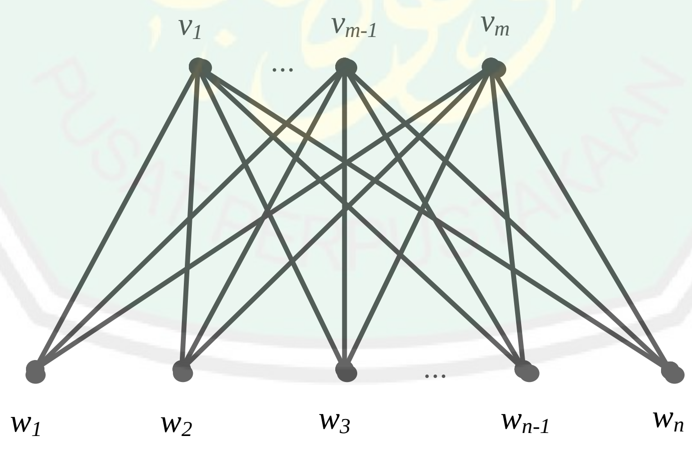
Pandang sisi w_1v_i karena titik v_i tidak terhubung dengan v_j $(i \neq j)$ maka warna sisi w_1v_i dapat diwarnai sebanyak i, karena v_i , $i = 1..m$ berarti himpunan titik v sebanyak m maka warna sisi w_1v_i , $i = 1...m$ diberi warna sebanyak m,

b. Kasus II untuk $m > n$, $maka\ \chi' = m$



Pandang sisi w_1v_i karena titik v_i tidak terhubung dengan v_j $(i \neq j)$ maka warna sisi w_1v_i dapat diwarnai sebanyak i, karena v_i , i= 1..m berarti himpunan titik v sebanyak m maka warna sisi w_1v_i , i = 1...m diberi warna sebanyak m,

c. Kasus III untuk $m < n$, $maka\ \chi' = n$



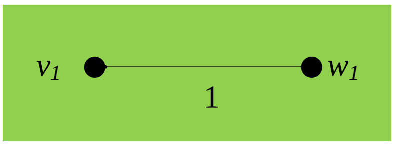
Pandang sisi v_1w_i karena titik w_i tidak terhubung dengan w_j $i \neq j$ maka warna sisi v_1w_i dapat diwarnai sebanyak i karena w_i , i = 1,...,n berarti himpunan titik w sebanyak n maka warna sisi v_1w_i , i = 1,...,n diberi warna sebanyak n,

3.1.3 Pewarnaan Peta pada Graf Bipartisi Komplit $K_{(m,n)}$

Dalam pewarnaan peta pada graf bipartisi komplit yang harus diperhatikan adalah mencari bilangan kromatiknya terlebih dahulu yaitu dengan menentukan banyaknya warna minimum yang diperlukan untuk mewarnai peta pada graf bipartisi komplit, sehingga peta yang terhubung langsung mempunyai warna yang berbeda dan syarat dari graf peta yaitu harus graf planar maka graf tersebut harus diubah dari graf planar ke graf bidang, langkah- langkah yang digunakan sebagai berikut :

1. Menentukan $\chi''(K_{(m,n)})$, dengan m, $n \geq 2$.
   a. Berikut ini akan ditentukan χ'' bilangan kromatik dari pewarnaan peta pada graf bipartisi komplit $K_{(2,n)}$ untuk n = 2, 3, 4, 5.

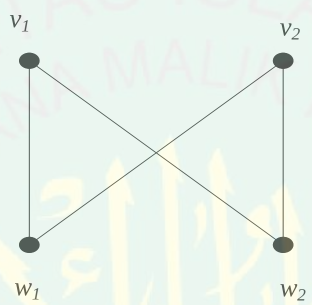
Graf $K_{(2,2)}$ diatas adalah planar kerena dapat digambar dalam suatu bidang tanpa ada dua sisi saling bertemu kecuali pada simpul persekutuan. Jika kita gambarkan graf yang terbentuk maka diperoleh gambar bidangnya sebagai berikut:



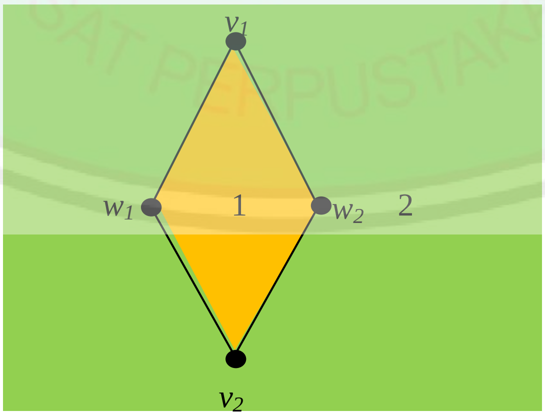
Gambar 3.1.3.1.Graf $K_{(1,1)}$ dan Plane graf $K_{(1,1)}$

Pada pewarnaan peta, graf bipartisi komplit $K_{(1,\ 1)}$ hanya dapat diwarnai dengan satu warna karena hanya terdiri dari 1 wilayah yakni wilayah luar. Sedemikian sehingga berlaku pula untuk semua ($K_{1,2}$), ($K_{1,3}$), ($K_{1,4}$) dan ($K_{1,5}$).

b. Berikut ini akan ditentukan χ'' bilangan kromatik dari pewarnaan peta pada graf bipartisi komplit $K_{(2,n)}$ untuk n = 2, 3, 4, 5.

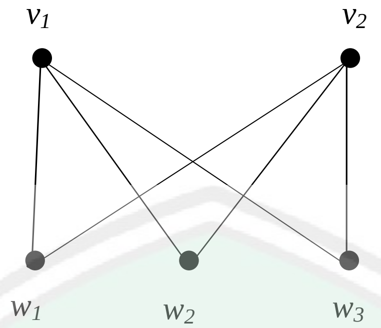


Graf $K_{(2,2)}$ diatas adalah planar kerena dapat digambar dalam suatu bidang tanpa ada dua sisi saling bertemu kecuali pada simpul persekutuan. Jika kita gambarkan graf yang terbentuk maka diperoleh gambar bidangnya sebagai berikut:

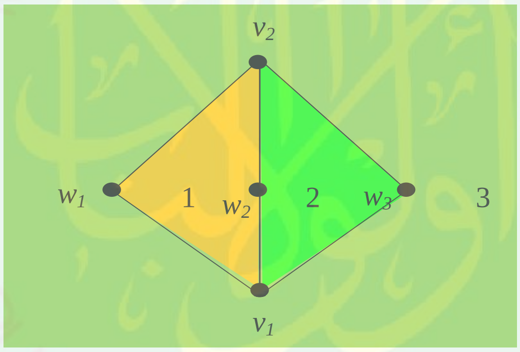


$\chi''(K_{(2,2)}) = 2$

Gambar 3.1.3.2 Graf $K_{(2,2)}$ dan Plane graf $K_{(2,2)}$

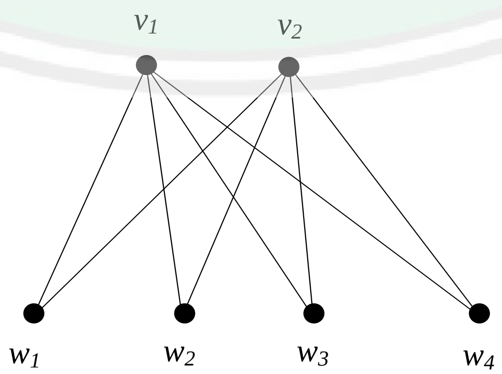


Graf $K_{(2,3)}$ diatas adalah planar kerena dapat digambar dalam suatu bidang tanpa ada dua sisi saling bertemu kecuali pada simpul persekutuan. Jika kita gambarkan graf yang terbentuk maka diperoleh gambar bidangnya sebagai berikut:



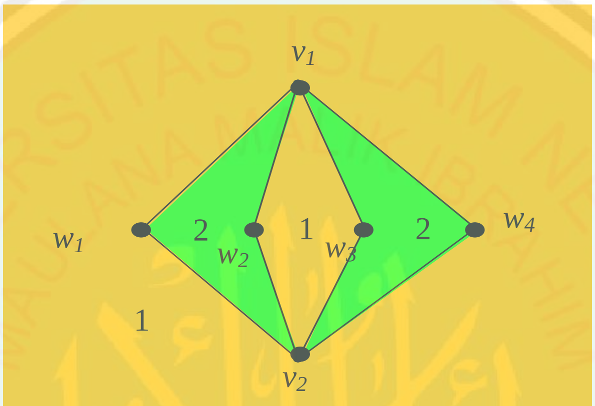
$\chi''(K_{(2,3)}) = 3$

Gambar 3.1.3.3.Graf $K_{(2,3)}$ dan Plane graf $K_{(2,3)}$



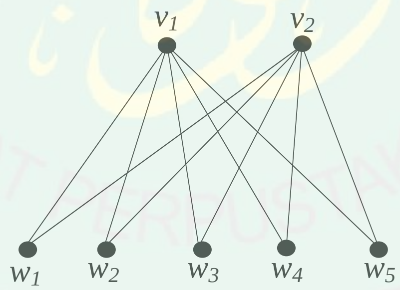
Gambar 3.1.3.4 Graf $K_{(2,4)}$

Graf $K_{(2,4)}$ diatas adalah planar kerena dapat digambar dalam suatu bidang tanpa ada dua sisi saling bertemu kecuali pada simpul persekutuan. Jika kita gambarkan graf yang terbentuk maka diperoleh gambar bidangnya sebagai berikut:



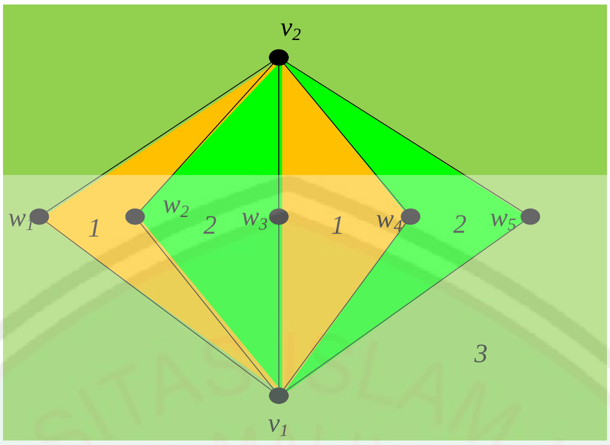
$\chi''(K_{(2,4)}) = 2$

Gambar 3.1.3.5 Plane graf $K_{(2,4)}$



Gambar 3.1.3.6 Graf $K_{(2,5)}$

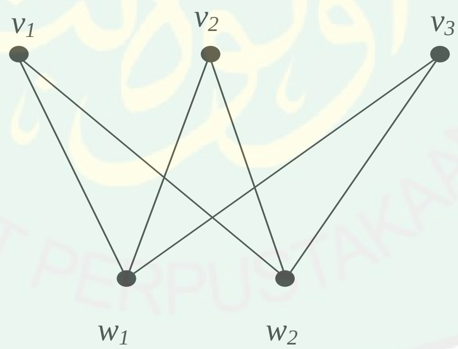
Graf $K_{(2,5)}$ diatas adalah planar kerena dapat digambar dalam suatu bidang tanpa ada dua sisi saling bertemu kecuali pada simpul persekutuan. Jika kita gambarkan graf yang terbentuk maka diperoleh gambar bidangnya sebagai berikut:



$\chi''(K_{(2,5)}) = 3$

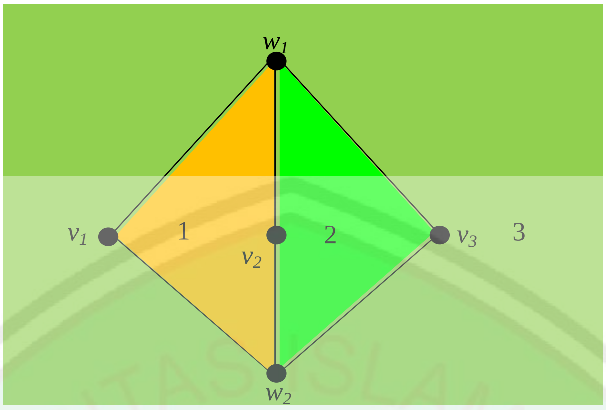
Gambar 3.1.3.7 Plane graf $K_{(2,5)}$

c. Berikut ini akan ditentukan χ'' bilangan kromatik dari pewarnaan peta pada graf bipartisi komplit $K_{(3,n)}$ untuk $n = 2, 3, 4, 5$.



Gambar 3.1.3.8 Graf $K_{(3,2)}$

Graf $K_{(3,2)}$ diatas adalah planar kerena dapat digambar dalam suatu bidang tanpa ada dua sisi saling bertemu kecuali pada simpul persekutuan. Jika kita gambarkan graf yang terbentuk maka diperoleh gambar bidangnya sebagai berikut:

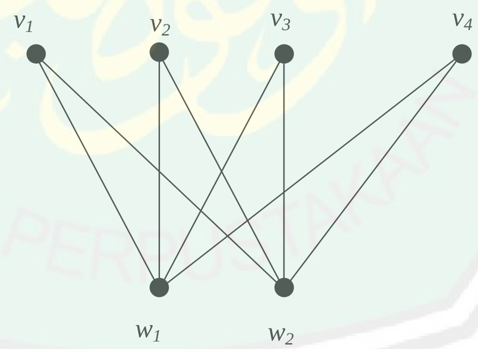


$\chi''(K_{(3,2)}) = 3$

Gambar 3.1.3.9 Plane graf $K_{(3,2)}$

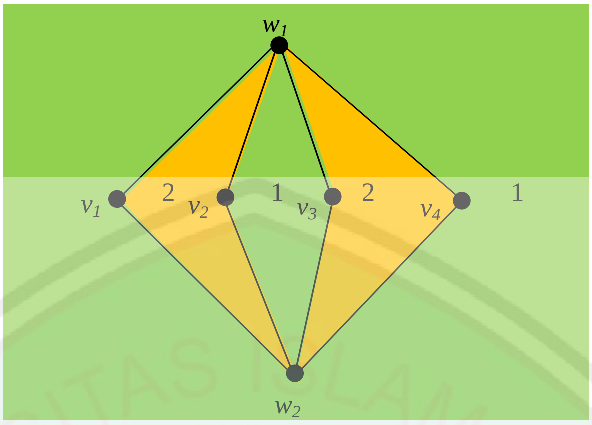
Sedangkan untuk Graf $K_{(3,n)}$ dimana $n > 2$ adalah bukan planar kerena jika digambar dalam suatu bidang graf bipartisi komplit $K_{3,n}$; $n > 2$ pasti memuat paling sedikit satu perpotongan sisi.

d. Berikut ini akan ditentukan χ'' bilangan kromatik dari pewarnaan peta pada graf bipartisi komplit $K_{(4,n)}$ untuk n = 2, 3, 4, 5.



Gambar 3.1.3.10 Graf $K_{(4,2)}$

Graf $K_{(4,2)}$ diatas adalah planar kerena dapat digambar dalam suatu bidang tanpa ada dua sisi saling bertemu kecuali pada simpul persekutuan. Jika kita gambarkan graf yang terbentuk maka diperoleh gambar bidangnya sebagai berikut:

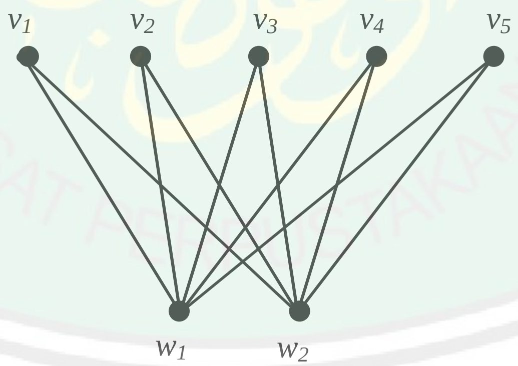


$\chi''(K_{(4,2)}) = 2$

Gambar 3.1.3.11 Plane graf $K_{(4,2)}$

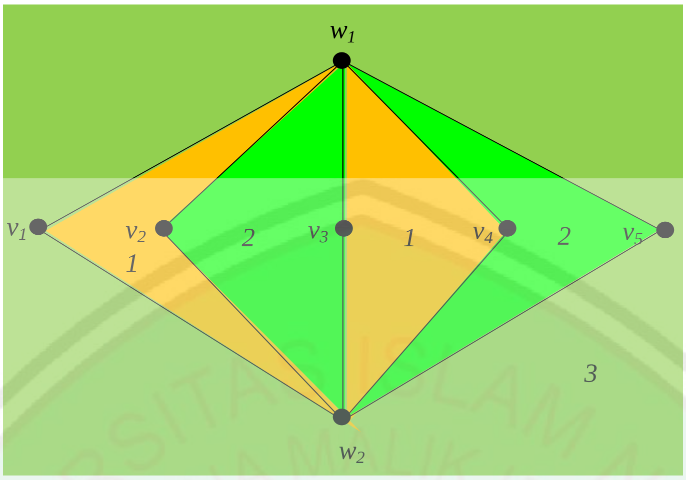
Sedangkan untuk Graf $K_{(4,n)}$ dimana $n > 2$ adalah bukan planar kerena jika digambar dalam suatu bidang graf bipartisi komplit $K_{4,n}$; $n > 2$ pasti memuat paling sedikit satu perpotongan sisi.

e. Berikut ini akan ditentukan χ'' bilangan kromatik dari pewarnaan peta pada graf bipartisi komplit $K_{(5,n)}$ untuk n = 2, 3, 4, 5.



Gambar 3.1.3.12 Graf $K_{(5,2)}$

Graf $K_{(5,2)}$ diatas adalah planar kerena dapat digambar dalam suatu bidang tanpa ada dua sisi saling bertemu kecuali pada simpul persekutuan. Jika kita gambarkan graf yang terbentuk maka diperoleh gambar bidangnya sebagai berikut:



$\chi''(K_{(5,2)}) = 3$

Gambar 3.1.3.13 Plane graf $K_{(5,2)}$

Sedangkan untuk Graf $K_{(5,n)}$ dimana $n > 2$ adalah bukan planar kerena jika digambar dalam suatu bidang graf bipartisi komplit $K_{5,n}$; $n > 2$ pasti memuat paling sedikit satu perpotongan sisi.

Dari beberapa uraian diatas maka untuk pewarnaan peta pada graf bipartisi komplit hanya bisa berlaku pada graf bipartisi komplit yang planar. Dengan demikian dari beberapa uraian diatas terlihat bahwa graf bipartisi komplit yang planar hanya berlaku pada graf bipartisi komplit $K_{(2,n)}$ atau $K_{(m,2)}$; $m, n \geq 2$ Sedangkan selainnya adalah bukan planar kerena jika digambar dalam suatu bidang pasti memuat paling sedikit satu perpotongan sisi.

f. Mencari pola dari bilangan kromatik dari,

$\chi''(K_{(2,2)}) = 2$

$\chi''(K_{(2,3)}) = 3$

$\chi''(K_{(2,4)}) = 2$

$\chi''(K_{(2,5)}) = 3$

$\chi''(K_{(3,2)}) = 3$

$\chi''(K_{(4,2)}) = 2$

$\chi''(K_{(5,2)}) = 3$

maka diperoleh pola bahwa

$$\chi''(K_{(m,n)}) \begin{cases} \chi''(K_{(1,n)}) = 1 & ,\forall\, n \in N \\ \chi''(K_{(2,n)}) = \begin{cases} 2, & n \text{ genap} \\ 3, & n \text{ ganjil} \end{cases} & ,\forall\, n \in N;\ n \geq 2 \\ \chi''K_{(m,2)}) = \begin{cases} 2, & m \text{ genap} \\ 3, & m \text{ ganjil} \end{cases} & ,\forall\, m \in N;\ m \geq 2 \\ \text{Selainnya} \quad \text{tidak bisa diwarnai} & \text{, Bukan planar} \end{cases}$$

g. Pola yang diperoleh dinyatakan sebagai konjektur.

$$\chi''(K_{(m,n)}) \begin{cases} \chi''(K_{(1,n)}) = 1 & ,\forall\, n \in N \\ \chi''(K_{(2,n)}) = \begin{cases} 2, & n \text{ genap} \\ 3, & n \text{ ganjil} \end{cases} & ,\forall\, n \in N;\ n \geq 2 \\ \chi''K_{(m,2)}) = \begin{cases} 2, & m \text{ genap} \\ 3, & m \text{ ganjil} \end{cases} & ,\forall\, m \in N;\ m \geq 2 \\ \text{Selainnya} \quad \text{tidak bisa diwarnai} & \text{, Bukan planar} \end{cases}$$

konjektur tersebut bersifat induktif dan belum diterima kebenarannya dalam matematika.

h. Konjektur tersebut dinyatakan sebagai teorema dan dibuktikan.

Teorema 3.1.3

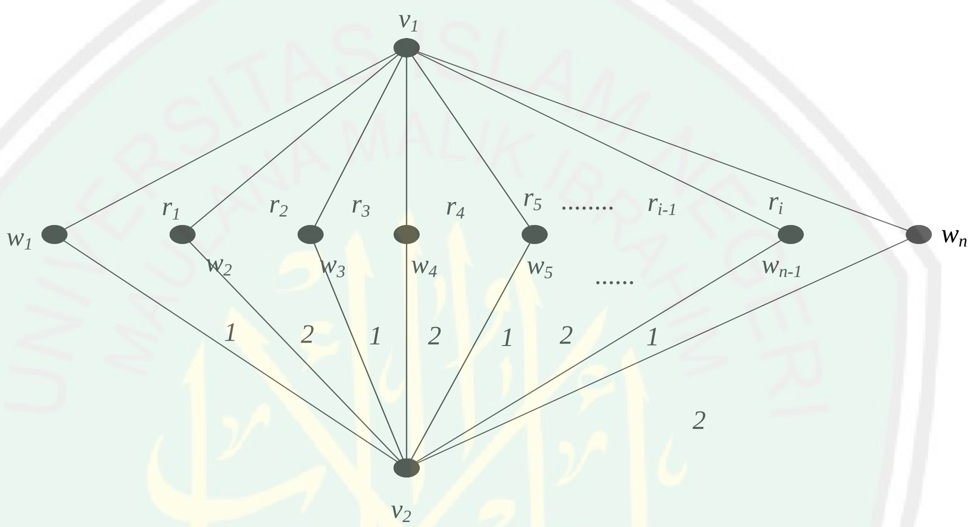
Bilangan kromatik untuk pewarnaan peta pada graf bipartisi Komplit adalah ,

$$\chi''(K_{(m,n)}) \begin{cases} \chi''(K_{(1,n)}) = 1 & ,\forall n \in N \\ \chi''(K_{(2,n)}) = \begin{cases} 2, & n \text{ genap} \\ 3, & n \text{ ganjil} \end{cases} & ,\forall n \in N;\ n \geq 2 \\ \chi''K_{(m,2)}) = \begin{cases} 2, & m \text{ genap} \\ 3, & m \text{ ganjil} \end{cases} & ,\forall m \in N;\ m \geq 2 \\ \text{Selainnya} \quad \text{tidak bisa diwarnai} & , \text{Bukan planar} \end{cases}$$

Bukti :

Pewarnaan peta pada Graf Bipartisi Komplit $K_{(2,n)}$ dapat digambar sebagai berikut :

a. Kasus I, untuk n = genap



Gambar 3.1.3.14 Pewarnaan peta $K_{(2,n)}$, n genap

Wilayah	Batas wilayah	
r_1	v_1w_1	v_2w_1
	v_1w_2	v_2w_2
r_2	v_1w_2	v_2w_2
	v_1w_3	v_2w_3
⋮	⋮	
r_i	v_1w_n	v_2w_n
	v_1w_{n+1}	v_2w_{n+1}

Terlihat bahwa untuk n genap maka $r_i, i = 1,2,3, .., i - 1$ adalah ganjil.

Terlihat bahwa untuk $r_i, i = 1, 3, 5.., i - 1$ tidak saling berbatasan langsung maka dapat diberi warna yang sama.

Demikian juga $r_i, i = 2, 4, 6, \dots, i$ .tidak saling berbatasan langsung maka dapat diberi warna yang sama

Pilih warna 1 untuk $r_i, i = 1, 3, 5.., i - 1$

Karena $r_i, i = 2, 4, 6, \dots, i$ berbatasan langsung dengan $r_i, i = 1, 3, 5.., i - 1$ maka $r_i, i = 2, 4, 6, \dots, i$ tidak boleh diberi warna 1. Maka diberi warna 2.

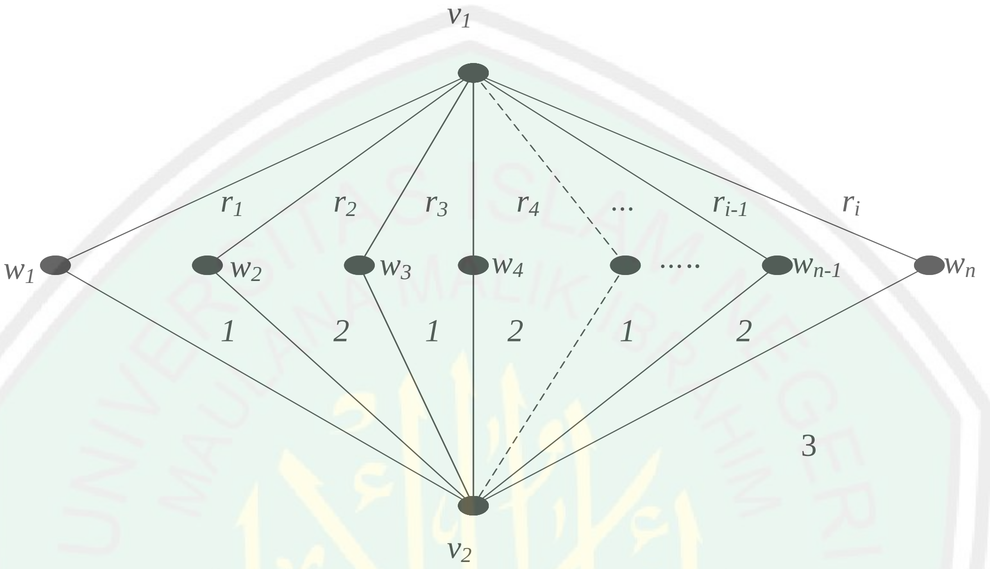
Karena r_i berbatasan langsung dengan r_1 dan r_{n-1} yang berwarna 1 maka r_i dapat diberi warna 2.

Jadi warna minimum yang diperlukan untuk pewarnaan peta adalah 2 warna.

Jadi bilangan kromatik untuk pewarnaan peta pada $K_{(2,n)}$, n genap adalah

$\chi''(K_{(2,n)}) = 2$, n genap. Sedemikian sehingga berlaku pula untuk graf bipartisi komplit $K_{(m,2)}$ karena jika digambarkan dalam suatu bidang, gambar bidang yang terbentuk akan sama.

b. Kasus II, untuk n = ganjil



Gambar 3.1.3.15 Pewarnaan peta $K_{(2,n)}$, n ganjil.

Wilayah	Batas wilayah	
r_1	v_1w_1	v_2w_1
	v_1w_2	v_2w_2
r_2	v_1w_2	v_2w_2
	v_1w_3	v_2w_3
⋮	⋮	
r_i	v_1w_n	v_2w_n
	v_1w_{n+1}	v_2w_{n+1}

Terlihat bahwa untuk n ganjil maka $r_i, i = 1,2,3, .., i - 1$ adalah genap .

Terlihat bahwa. $r_i, i = 1,3, .., i - 2$ tidak saling berbatasan langsung, maka dapat diberi warna yang sama.

Demikian juga $r_i, i = 2,4,6, .., i - 1$ tidak saling berbatasan langsung, maka dapat diberi warna yang sama.

Pilih warna 1 untuk $r_i, i = 1,3, .., i - 2$

Karena $r_i, i = 2,4,6, .., i - 1$ berbatasan langsung dengan $r_i, i = 1,3, .., i - 2$ maka $r_i, i = 2,4,6, .., i - 1$ tidak boleh diberi warna 1, maka diberi warna 2.

Karena r_i berbatasan langsung dengan r_1 yang berwarna 1, dan dengan r_{i-1} yang berwarna 2, maka r_i harus diberi warna 3.

Dengan demikian warna minimum yang diperlukan untuk pewarnaan peta adalah 3 warna.

Jadi bilangan kromatik untuk pewarnaan peta pada $K_{(2,n)}$, n ganjil adalah $\chi''(K_{(2,n)}) = 3$,, n ganjil. Sedemikian sehingga berlaku pula untuk graf bipartisi komplit $K_{(m,2)}$ karena jika digambarkan dalam suatu bidang, gambar bidang yang terbentuk akan sama.

Jadi bilangan kromatik untuk pewarnaan peta pada graf bipartisi komplit adalah,

$$\chi''(K_{(2,n)}) \text{ atau } \chi''(K_{(m,2)}) \begin{cases} 2\text{ , } n \text{ atau } m = \text{genap} \\ 3\text{ , } n \text{ atau } m = \text{ganjil} \end{cases} \quad ,\forall\, n,m \in N;\ n \geq 2$$

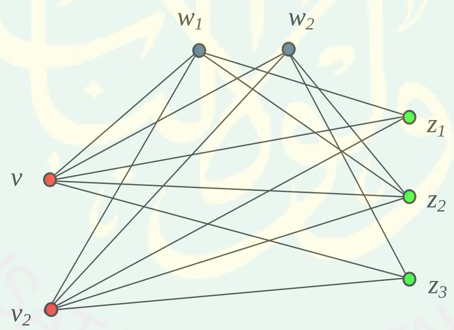
3.2 Pewarnaan pada Graf Tripartisi $T_{(2,n-1,\, n)}$

3.2.1 Pewarnaan Titik Pada Graf Tripartisi $T_{(2,n-1,\, n)}$

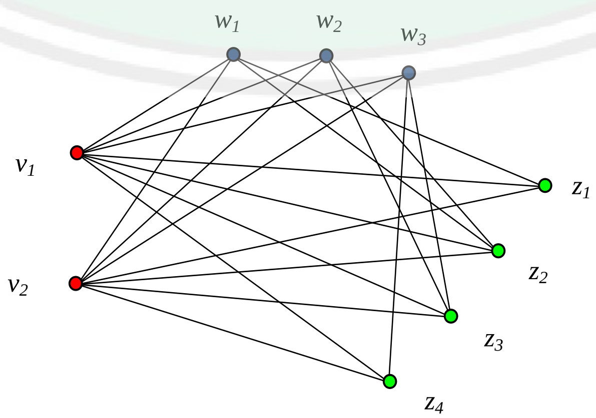
Dalam pewarnaan titik pada Graf Tripartisi $T_{(2,n-1,n)}$. yang harus diperhatikan adalah mencari bilangan kromatiknya terlebih dahulu yaitu dengan menentukan banyaknya warna minimum yang diperlukan untuk mewarnai titik pada graf Tripartisi, sehingga dua titik yang terhubung mempunyai warna yang berbeda, langkah – langkah yang dipergunakan sebagai berikut :

1. Menentukan $\chi(T_{(2,n-1,\, n)})$, dengan $n \geq 2$.

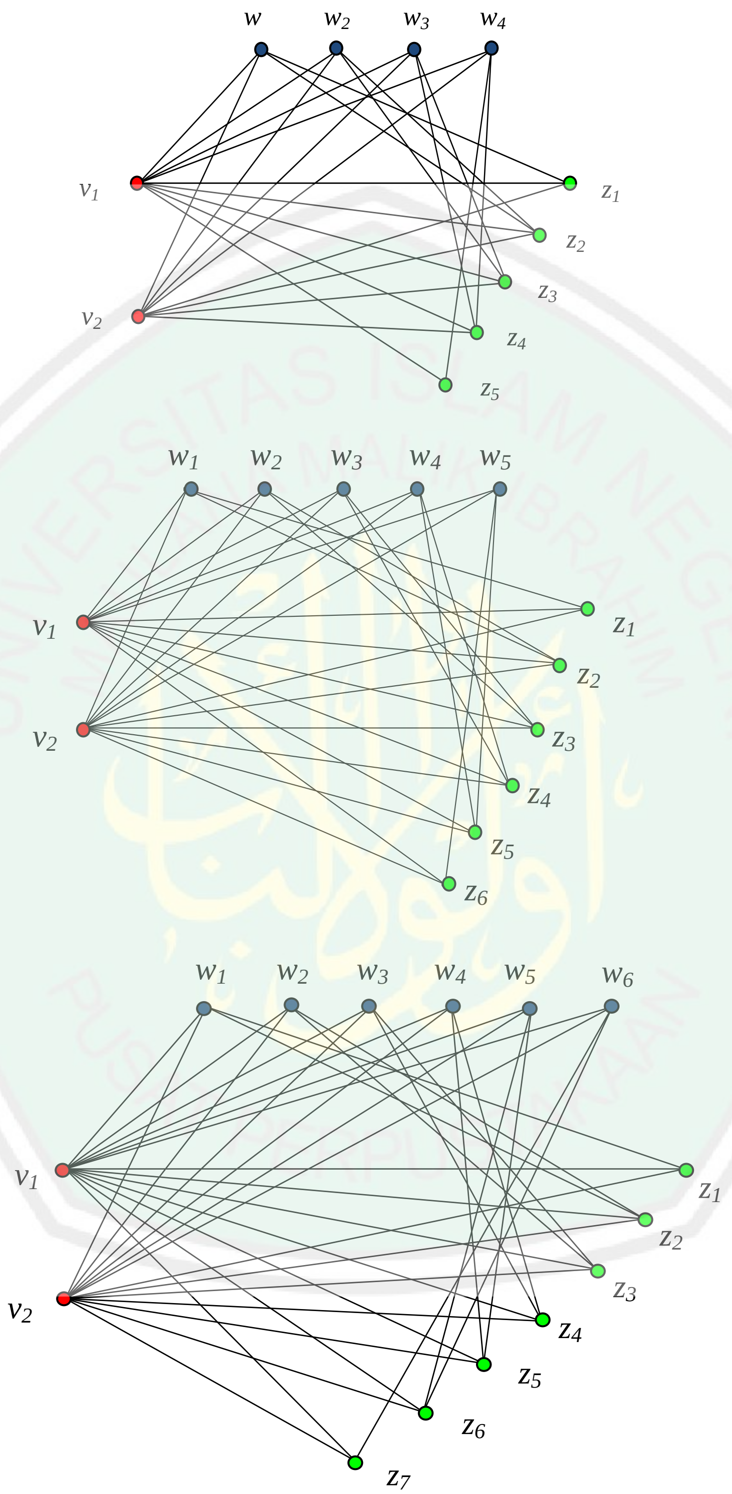
   Berikut ini akan ditentukan χ bilangan kromatik dari pewarnaan titik pada graf Tripartisi $T_{(2,n-1,\, n)}$ untuk n = 2, 3, 4, 5.



$\chi(T_{(2,2,\, 3)}) = 3$



$\chi(T_{(2,3,\, 4)}) = 3$



$\chi(T_{(2,4,5)}) = 3$

$\chi(T_{(2,5,6)}) = 3$

$\chi(T_{(2,6,7)}) = 3$

Gambar 3.1.4.1 Pewarnaan Titik pada Graf Tripartisi

$T_{(2,\, n-1,\, n)}$, n = 3, 4, 5, 6,7

2. Mencari pola dari bilangan kromatik dari,

   $\chi(T_{(2,\,2,3)}) = 3$

   $\chi(T_{(2,3,\,4)}) = 3$

   $\chi(T_{(2,\,4,\,5)}) = 3$

   $\chi(T_{(2,\,5,\,6)}) = 3$

   $\chi(T_{(2,\,6,\,7)}) = 3$

   $\chi(T_{(2,\,n-1,\,n)}) = 3$

   Maka diperoleh pola bahwa

   $\chi(T_{(2,\,n-1,\,n)}) = 3\ \forall\ n \in N\ ;\ n \geq 2$

3. Pola yang diperoleh dinyatakan sebagai konjektur.

   $\chi(T_{(2,\,n-1,\,n)}) = 3\ \forall\ n \in N\ ;\ n \geq 2$

   konjektur tersebut bersifat induktif dan belum diterima kebenarannya dalam matematika.

4. Konjektur tersebut dinyatakan sebagai teorema dan dibuktikan

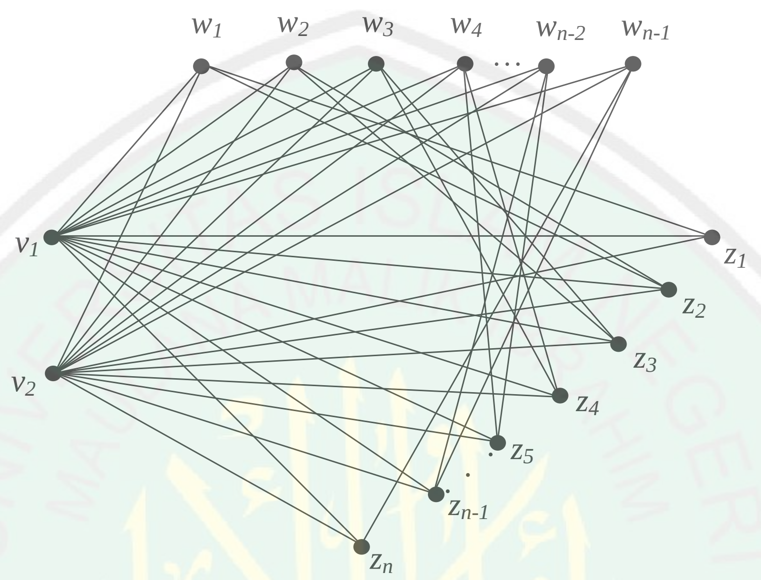
Teorema 3.1.4

Bilangan kromatik pewarnaan titik pada graf tripartisi $T_{(2,\,n-1,\,n)}$ adalah

$$\chi(T_{(2,\,n-1,\,n)}) = 3\ \forall\ n \in N\ ;\ n \geq 2$$

Bukti :

Gambar Graf tripartisi $T_{(2,\, n\text{-}1,\, n\,)}$ dapat digambarkan sebagai berikut :



Gambar 3.1.4.2 Gambar Graf Tripartisi $T_{(2,\, n\text{-}1,\, n\,)}$

Ambil warna 1 untuk v_1 pada$\{v_1\ v_2\}$ yang merupakan partisi pertama. Untuk titik-titik pada partisi kedua adalah warna 2 karena $\{\ w_1,\ldots,\ w_{n-1}\}$ pada partisi kedua terhubung langsung dengan titik – titik pada partisi pertama tetapi tidak saling terhubung langsung dalam satu partisi. sedangkan untuk titik-titik pada partisi ketiga tidak dapat diberi warna1 dan 2 karena$\{\ z_1,\ldots,\ z_n\ \}$ terhubung langsung dengan titik-titik pada partisi pertama dan kedua tetapi tidak saling terhubung langsung dalam satu partisi sehingga untuk titik – titik pada partisi ketiga diberi warna 3,

Jadi bilangan kromatik untuk pewarnaan titik pada Graf tripartisi $T_{(2,\, n\text{-}1,\, n\,)}$ adalah

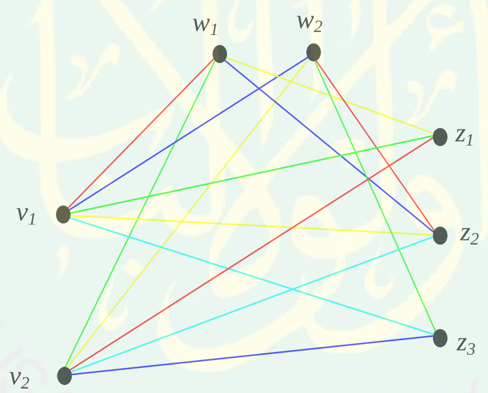
$$\chi(T_{(2,\, n\text{-}1,\, n\,)}) = 3,\ \forall\ n \in N\ ;\ n \geq 2.$$

3.2.2 Pewarnaan Sisi Pada Graf Tripartisi $T_{(2,\, n-1,\, n)}$.

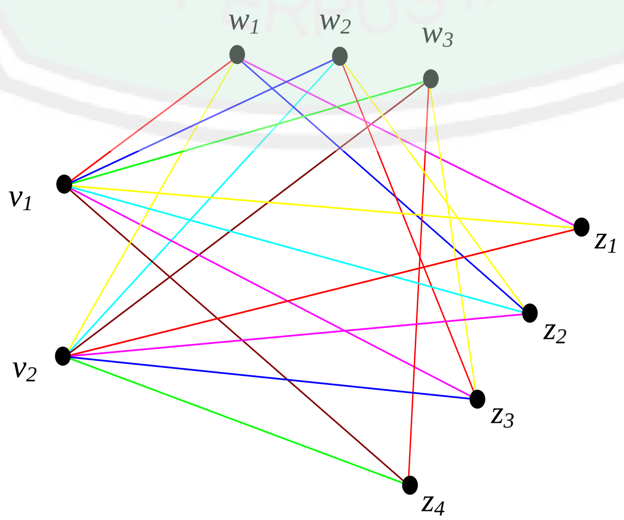
Dalam pewarnaan sisi pada Graf Tripartisi $T_{(2,\, n-1,\, n)}$ yang harus diperhatikan adalah mencari bilangan kromatiknya terlebih dahulu yaitu dengan menentukan banyaknya warna minimum yang diperlukan untuk mewarnai sisi pada graf Tripartisi, sehingga dua titik yang terhubung mempunyai warna yang berbeda, langkah – langkah yang dipergunakan sebagai berikut :

1. Menentukan $\chi'(T_{(2,\, n-1,\, n)})$, dengan $n \geq 2$.

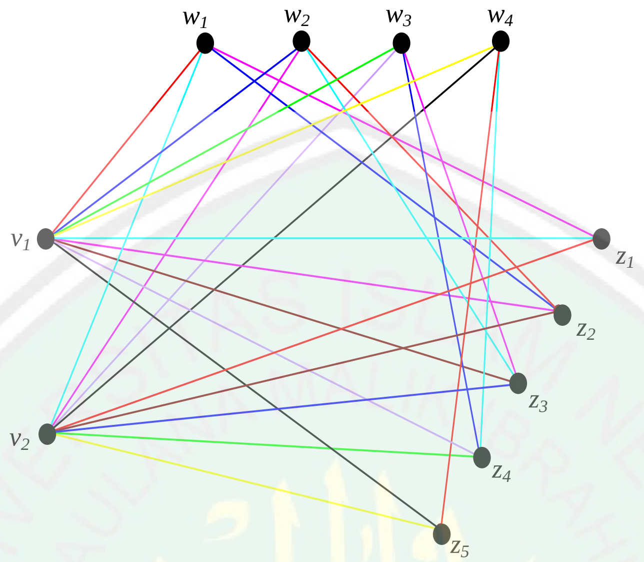
   Berikut ini akan ditentukan χ' bilangan kromatik dari pewarnaan sisi pada graf Tripartisi $T_{(2,\, n-1,\, n)}$ untuk $n =$ 3, 4, 5, 6,7.



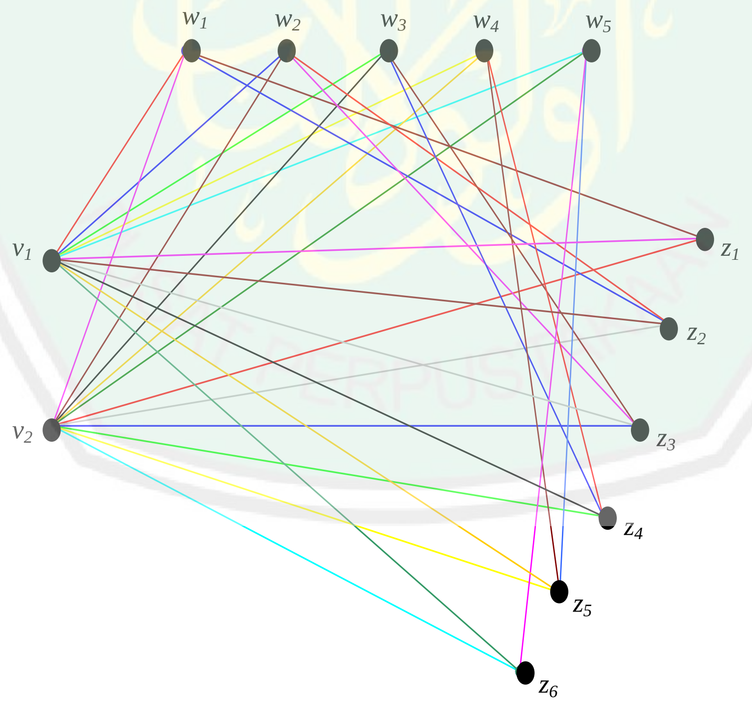
$\chi'(T_{(2,\,2,\,3)}) = 5$



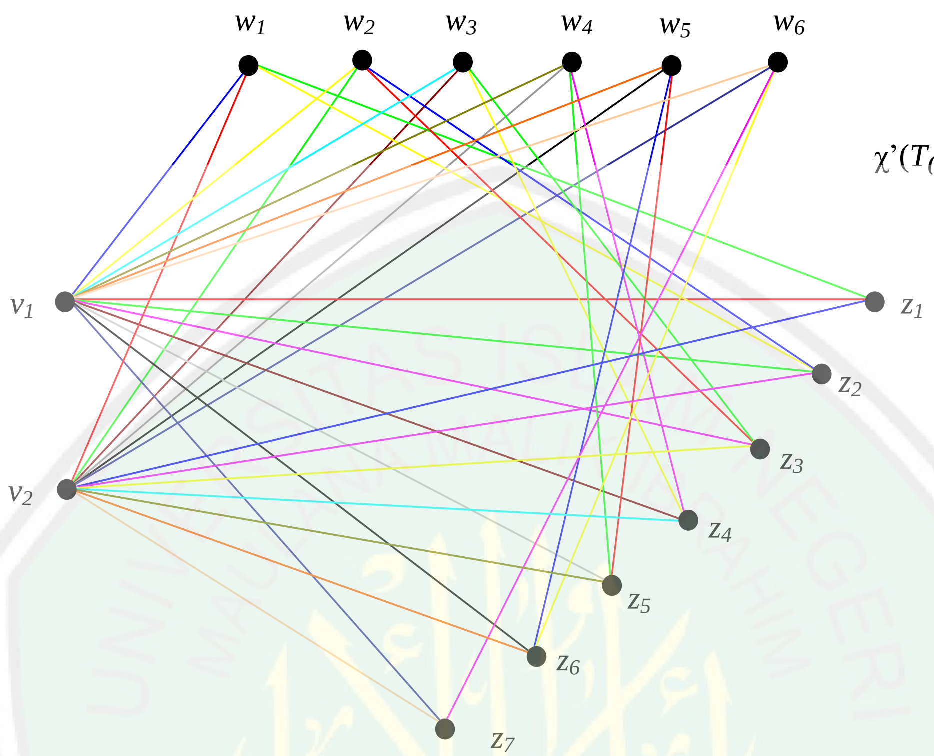
$\chi'(T_{(2,3,\,4)}) = 7$



$\chi'(T_{(2,4,5)}) = 9$



$\chi'(T_{(2,5,6)}) = 11$



$\chi'(T_{(2,6,7)}) = 13$

Gambar 3.1.5.1 Pewarnaan sisi pada Graf Tripartisi

$T_{(2,\, n\text{-}1,\, n)}$, $n =$ 3, 4, 5, 6, 7.

2. Mencari pola dari bilangan kromatik dari,

$\chi'(T_{(2,\,2,\,3)}) = 5$

$\chi'(T_{(2,\,3,\,4)}) = 7$

$\chi'(T_{(2,4,\,5)}) = 9$

$\chi'(T_{(2,\,5,\,6)}) = 11$

$\chi'(T_{(2,\,6,\,7)}) = 13$

$\chi'(T_{(2,\,n-1,\,n)}) = 2n - 1$

Maka diperoleh pola bahwa

$\chi'(T_{(2,\,n-1,\,n)}) = 2n - 1\ \forall\ n \in N;\ n \geq 2.$

3. Pola yang diperoleh dinyatakan sebagai konjektur.

$\chi'(T_{(1,2,n)}) = 2n - 1 \ \forall \ n \in N; n \geq 2.$

konjektur tersebut bersifat induktif dan belum diterima kebenarannya dalam matematika.

4. Konjektur tersebut dinyatakan sebagai teorema dan dibuktikan

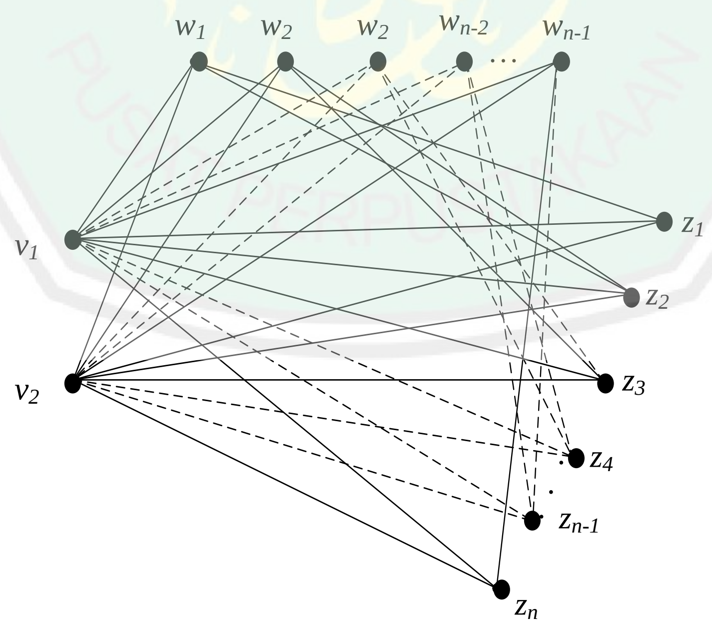
Teorema 3.1.5

Bilangan kromatik pewarnaan sisi pada graf tripartisi $T_{(2, n-1, n)}$ adalah

$$\chi'(T_{(2, n-1, n)}) = 2n - 1 \ \forall \ n \in N; n \geq 2.$$

Bukti :

Graf tripartisi $T_{(2, n-1, n)}$ dapat digambarkan sebagai berikut :



Gambar 3.1.5.2 Graf Tripartisi $T_{(2, n-1, n)}$

Menurut teorema vizing bahwa jika G adalah graph sederhana dengan derajat titik maksimum Δ maka $\Delta \leq \chi'(G) \leq \Delta + 1$

Jika G adalah graf tripartisi $T_{(2,\ n\text{-}1,\ n\ )}$ yang memiliki derajat titik maksimum Δ , maka $\Delta \leq \chi'\left(T_{(2,n-1,n\ )}\right) \leq \Delta + 1$, sedemikian sehingga untuk $T_{(2,\ n\text{-}1,\ n\ )}$ pada Gambar 3.1.5.2 diperoleh $\Delta =$ (n-1) + n atau 2n-1 sehingga dapat dituliskan $2\mathrm{n} - 1 \ \leq \chi'\left(T_{(2,n-1,n\ )}\right) \leq 2\mathrm{n} - 1\ + 1$ atau $2\mathrm{n} - 1 \ \leq \chi'\left(T_{(2,n-1,n\ )}\right) \leq 2\mathrm{n}$

Dengan menggunakan perluasan teorema vizing maka Gambar 3.1.5.2 diketahui pula bahwa h banyaknya maksimum sisi-sisi yang menghubungkan sepasang titik adalah sebanyak 1 maka, $\Delta \leq \chi'\left(T_{(2,n-1,n\ )}\right) \leq \Delta + h$ dapat dituliskan $2n - 1 \ \leq \chi'\left(T_{(2,n-1,n\ )}\right) \leq 2n - 1 + 1$ atau $2n - 1 \ \leq \chi'\left(T_{(2,n-1,n\ )}\right) \leq 2n$ kenyataannya untuk graf tripartisi diperoleh $\chi'(T_{(2,\ n\text{-}1,\ n)}) = 2n - 1$

Dengan demikian untuk graf tripartisi $T_{(2,\ n\text{-}1,\ n)}$ cukup diwarnai sebanyak 2n-1 sehingga $\chi'(T_{(2,\ n\text{-}1,\ n)}) \leq 2n - 1$. Jadi $2n - 1 \ \leq \chi'\left(T_{(2,n-1,n\ )}\right) \leq 2n - 1$ dengan demikian berarti $\chi'\left(T_{(2,n-1,n\ )}\right) = 2n - 1$

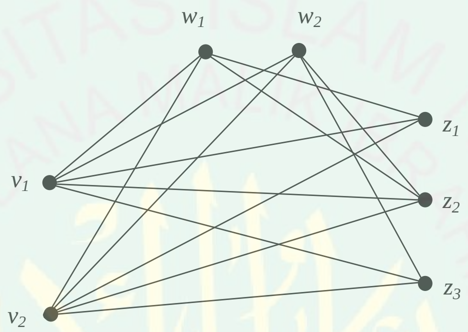
Dengan demikian terbukti bahwa $\chi'(T_{(2,\ n\text{-}1,\ n)}) = 2n - 1\ \forall\ n \in N$.

3.2.3 Pewarnaan Peta Pada Graf Tripartisi $T_{(2,\ n\text{-}1,\ n)}$.

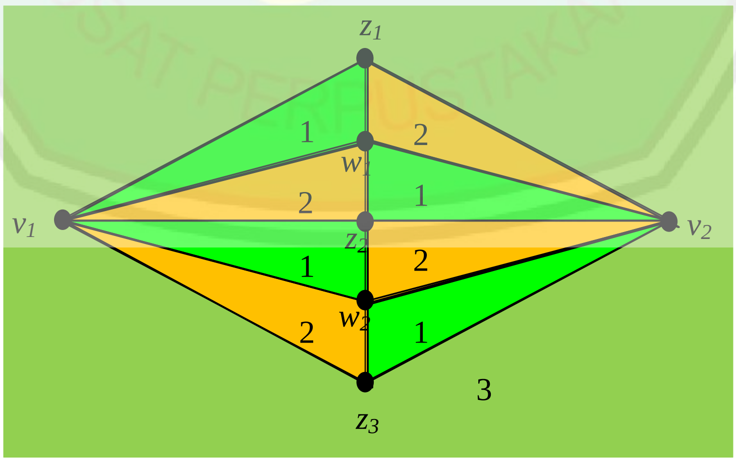
Dalam pewarnaan peta pada Graf Tripartisi $T_{(2,\ n\text{-}1,\ n)}$ yang harus diperhatikan adalah mencari bilangan kromatiknya terlebih dahulu yaitu dengan menentukan banyaknya warna minimum yang diperlukan untuk mewarnai wilayah pada Graf Tripartisi $T_{(2,\ n\text{-}1,\ n)}$, sehingga wilayah yang terhubung langsung mempunyai warna yang berbeda dan syarat dari graf peta yaitu harus graf planar maka graf tersebut harus diubah dari graf planar ke graf bidang, langkah- langkah yang digunakan sebagai berikut :

1. Menentukan $\chi''(T_{(2, n-1, n)})$, dengan $n \geq 2$.

   Berikut ini akan ditentukan χ'' bilangan kromatik dari pewarnaan peta pada Graf Tripartisi $T_{(2, n-1, n)}$ untuk n = 3, 4, 5, 6,7.

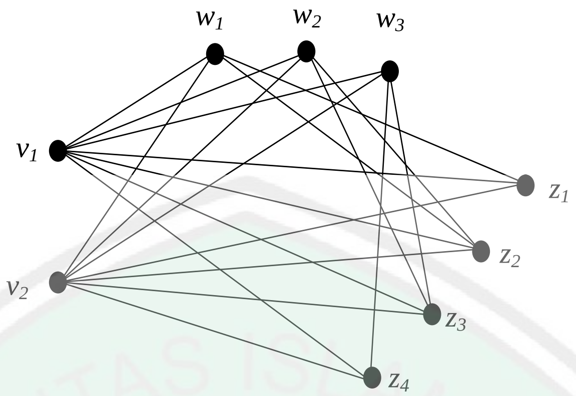


   Graf $T_{(2, 2, 3)}$ diatas adalah planar kerena dapat digambar dalam suatu bidang tanpa ada dua sisi saling bertemu kecuali pada simpul persekutuan. Jika kita gambarkan graf yang terbentuk maka diperoleh gambar bidangnya sebagai berikut:

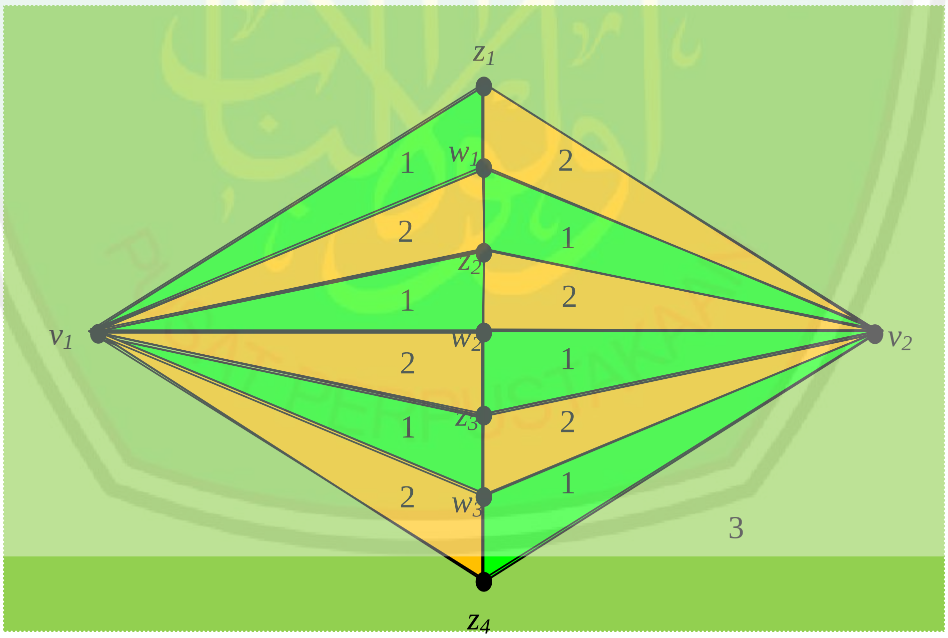


$\chi''(T_{(2,2,3)}) = 3$

Gambar 3.1.6.1.Graf $T_{(2,2,3)}$ dan Plane graf $T_{(2,2,3)}$

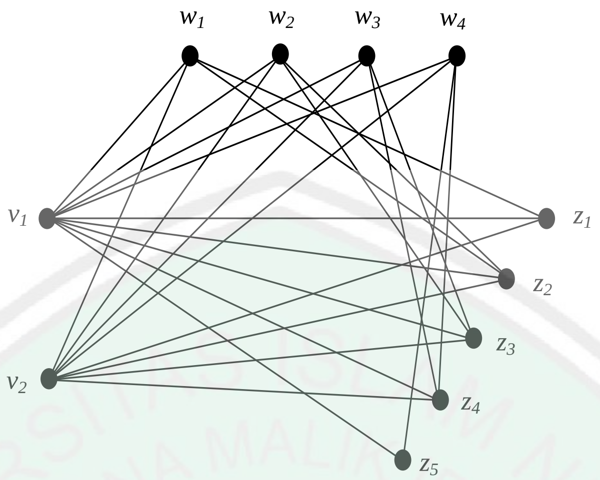


Graf $T_{(2,3,4)}$ diatas adalah planar kerena dapat digambar dalam suatu bidang tanpa ada dua sisi saling bertemu kecuali pada simpul persekutuan. Jika kita gambarkan graf yang terbentuk maka diperoleh gambar bidangnya sebagai berikut:

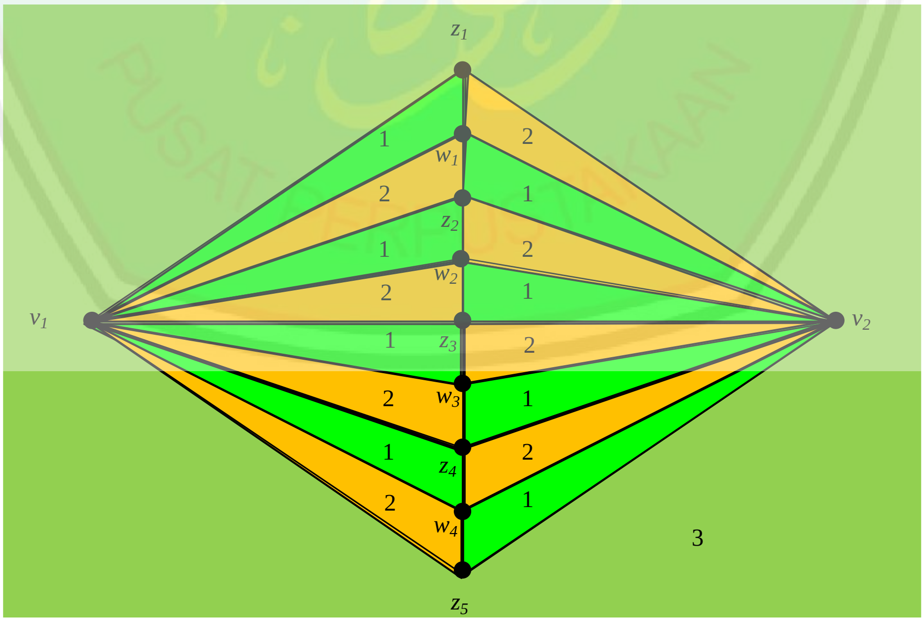


$$\chi''(T_{(2,3,4)}) = 3$$

Gambar 3.1.6.2.Graf $T_{(2,3,4)}$ dan Plane graf $T_{(2,3,4)}$

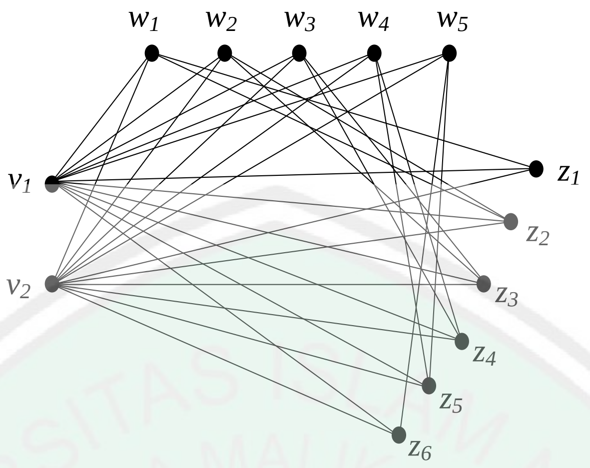


Graf $T_{(2,4,5)}$ diatas adalah planar kerena dapat digambar dalam suatu bidang tanpa ada dua sisi saling bertemu kecuali pada simpul persekutuan. Jika kita gambarkan graf yang terbentuk maka diperoleh gambar bidangnya sebagai berikut:

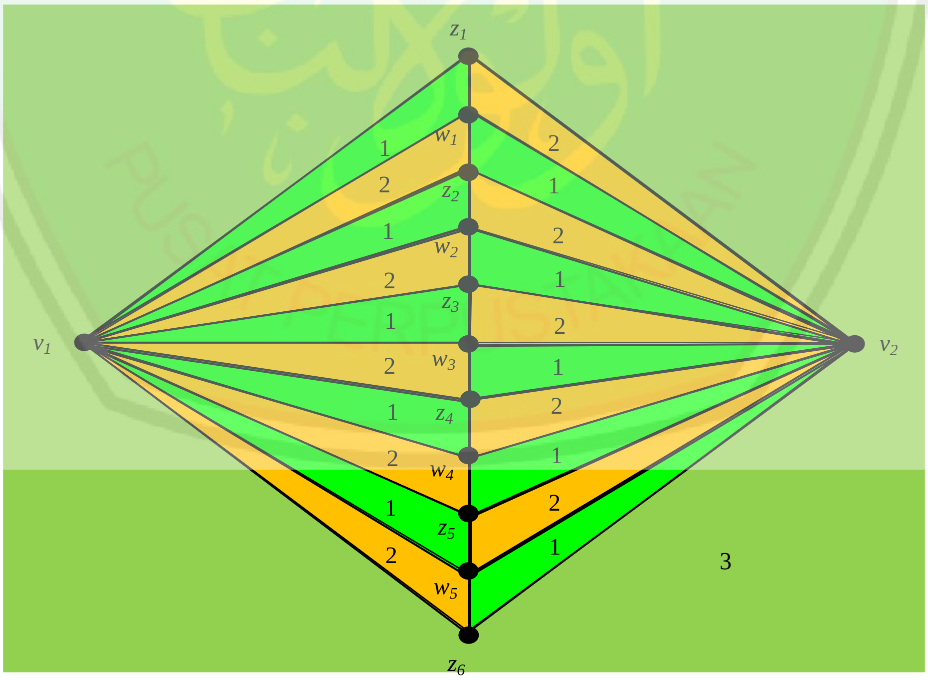


$\chi''(T_{(2,4,5)}) = 3$

Gambar 3.1.6.3.Graf $T_{(2,4,5)}$ dan Plane graf $T_{(2,4,5)}$

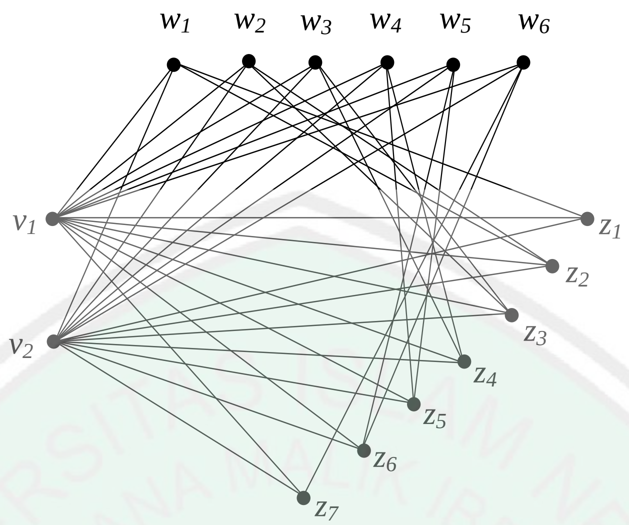


Graf $T_{(2,5,6)}$ diatas adalah planar kerena dapat digambar dalam suatu bidang tanpa ada dua sisi saling bertemu kecuali pada simpul persekutuan. Jika kita gambarkan graf yang terbentuk maka diperoleh gambar bidangnya sebagai berikut:

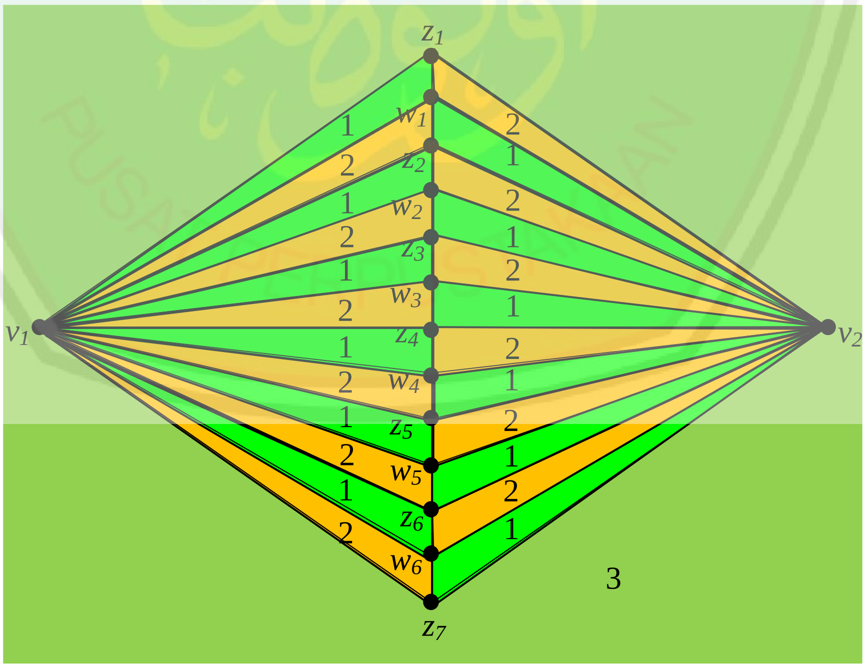


$\chi''(T_{(2,5,6)}) = 3$

Gambar 3.1.6.4.Graf $T_{(2,5,6)}$ dan Planar graf $T_{(2,5,6)}$



Graf $T_{(2,6,7)}$ diatas adalah planar kerena dapat digambar dalam suatu bidang tanpa ada dua sisi saling bertemu kecuali pada simpul persekutuan. Jika kita gambarkan graf yang terbentuk maka diperoleh gambar bidangnya sebagai berikut:



$\chi''(T_{(2,6,7)}) = 3$

Gambar 3.1.6.5. Graf $T_{(2,6,7)}$ dan Plane graf $T_{(2,6,7)}$

2. Mencari pola dari bilangan kromatik dari,

   $\chi''(T_{(2,2,3)}) = 3$

   $\chi''(T_{(2,3,4)}) = 3$

   $\chi''(T_{(2,4,5)}) = 3$

   $\chi''(T_{(2,5,6)}) = 3$

   $\chi''(T_{(2,6,7)}) = 3$

   maka diperoleh pola bahwa

   $\chi''(T_{(2,n-1,n)}) = 3, \forall\, n \in N;\, n \geq 2$

3. Pola yang diperoleh dinyatakan sebagai konjektur.

   $\chi''(T_{(2,n-1,n)}) = 3\,,\ \forall\, n \in N;\, n \geq 2$

   konjektur tersebut bersifat induktif dan belum diterima kebenarannya dalam matematika.

4. Konjektur tersebut dinyatakan sebagai teorema dan dibuktikan

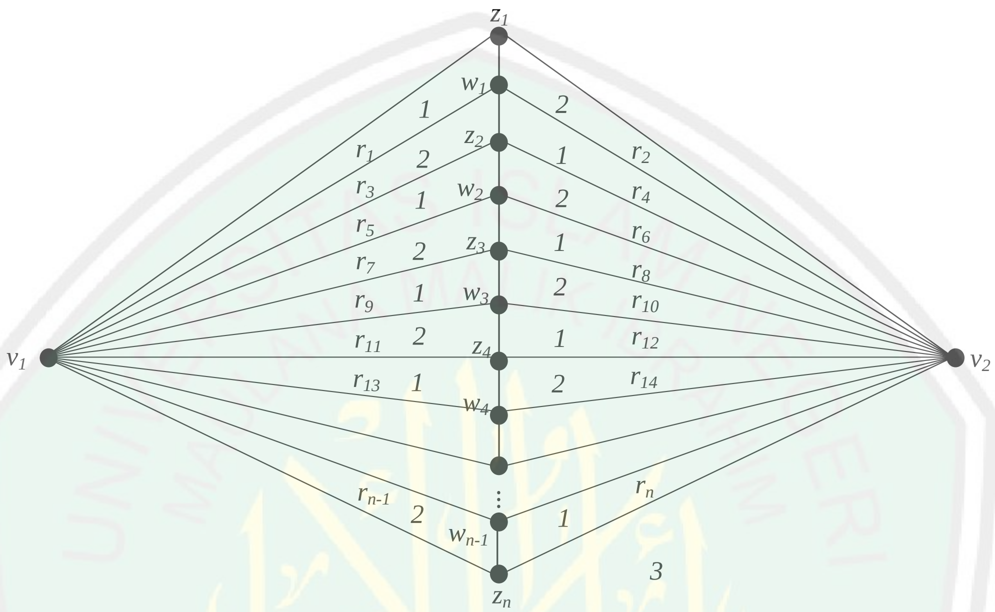
Teorema 3.1.3

Bilangan kromatik untuk pewarnaan peta pada graf Tripartisi $T_{(2,n-1,n)}$ adalah ,

$$\chi''(T_{(2,n-1,n)}) = 3\,,\ \forall\, n \in N;\, n \geq 2$$

Bukti :

Plane Graf Tripartisi $T_{(2,n-1,\, n)}$ dapat digambarkan sebagai berikut :



$\chi''(T_{(2,\, n-1,\, n)}) = 3$

Gambar 3.1.6.6. Plane graf $T_{(2,n-1,n)}$

Terlihat bahwa $ri\,, i\ =\ 1, 4, 5, 8, 9, 12, 13, .. n$ tidak saling berbatasan langsung, maka dapat diberi warna yang sama.

Demikian juga $ri\,, i\ =\ 2, 3, 6,7, 10, 11, 14, \ldots, n-1$ tidak saling berbatasan langsung , maka deberi warna yang sama.

Pilih warna 1 untuk $ri\,, i =\ 1, 4, 5, 8, 9, 12, 13, .., n$

Karena $ri\,, i\ =\ 2, 3, 6, 7, 10, 11, 14, \ldots, n-1$ saling berbatasan langsung dengan $ri\,, i =\ 1, 4, 5, 8, 9,12, 13, ., n$ maka $ri\,, i\ =\ 2, 3, 6, 7, 10, 11, 14, \ldots, n-1$ tidak boleh diberi warna 1. Maka diberi warna 2.

Karena wilayah luar hanya berbatasan langsung dengan r_1r_2 dan $r_{n-1}r_n$ yang berwarna 1 dan 2 maka wilayah luar dapat diberi warna beda pilih warna 3.

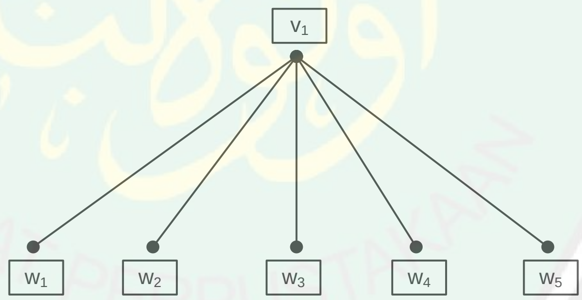
Jadi warna minimum yang diperluakan untuk pewarnaan peta adalah 3 warna.

Jadi bilangan kromatik untuk pewarnaan sisi pada Graf tripartisi $T_{(2,\, n-1,\, n)}$ adalah

$$\chi''(T_{(2,\, n-1,\, n)}) = 3,\ \forall\, n \in N;\ n \geq 2.$$

3.3 Konsep Graf berdasarkan Al – Qur'an.

Dalam teori graf, manusia diasumsikan sebagai himpunan titik. sedangkan sisi atau garis yang menghubungkan elemen-elemen tersebut adalah perintah Allah untuk berbuat kebaikan. Bentuk graf dari perintah Allah kepada manusia untuk berbuat kebaikan, sebagai berikut :



Gambar 3.1.7.1 Representasi Graf tentang Perintah Allah Kepada Manusia untuk Berbuat Kebaikan.

Pada gambar diatas terlihat bahwa titik v_1 (manusia) terhubung oleh sisi di semua titik $w_i\,, i = 1, 2, .., 5$ (orang tua, anak yatim, fakir miskin, dll) Hal ini dapat digambarkan bahwa pada setiap manusia tersebut Allah SWT memerintahkan agar setiap manusia menyambung hubungan baik dengan orang tua, orang fakir, tetangga, kerabat dan sanak famili, dll.

Dalam surat An-nisaa' ayat 36 Allah berfirman:

۞ وَٱعۡبُدُواْ ٱللَّهَ وَلَا تُشۡرِكُواْ بِهِۦ شَيۡـٔٗاۖ وَبِٱلۡوَٰلِدَيۡنِ إِحۡسَٰنٗا وَبِذِي ٱلۡقُرۡبَىٰ وَٱلۡيَتَٰمَىٰ وَٱلۡمَسَٰكِينِ وَٱلۡجَارِ ذِي ٱلۡقُرۡبَىٰ وَٱلۡجَارِ ٱلۡجُنُبِ وَٱلصَّاحِبِ بِٱلۡجَنۢبِ وَٱبۡنِ ٱلسَّبِيلِ وَمَا مَلَكَتۡ أَيۡمَٰنُكُمۡۗ إِنَّ ٱللَّهَ لَا يُحِبُّ مَن كَانَ مُخۡتَالٗا فَخُورًا ٣٦

Artinya " Sembahlah Allah dan janganlah kamu mempersekutukan-Nya dengan sesuatupun. dan berbuat baiklah kepada dua orang ibu-bapa, karib-kerabat, anak-anak yatim, orang-orang miskin, tetangga yang dekat dan tetangga yang jauh, dan teman sejawat, Ibnu sabil dan hamba sahayamu. Sesungguhnya Allah tidak menyukai orang-orang yang sombong dan membangga-banggakan diri "(Q.S. An-nisaa': 36).

Sedangkan titik - titik di w_i , $i = 1,2,3,\dots,5$ tidak terdapat adanya sisi yang menghubungkan titik- titik tersebut hal itu dapat digambarkan bahwa apabila manusia memutuskan apa yang diperintahkan oleh Allah untuk dihubungkan, maka ikatan sosial masyarakat akan hancur berantakan, kerusakan menyebar disetiap tempat, kekacauan terjadi dimana-mana.

Dalam surat Al-Hujurat ayat 10 Allah berfirman:

إِنَّمَا ٱلۡمُؤۡمِنُونَ إِخۡوَةٞ فَأَصۡلِحُواْ بَيۡنَ أَخَوَيۡكُمۡۚ وَٱتَّقُواْ ٱللَّهَ لَعَلَّكُمۡ تُرۡحَمُونَ ١٠

Artinya: "Orang-orang beriman itu Sesungguhnya bersaudara. sebab itu damaikanlah (perbaikilah hubungan) antara kedua saudaramu itu dan takutlah terhadap Allah, supaya kamu mendapat rahmat." (Q.S. Al-Hujurat: 10).

Ayat di atas menjelaskan bahwa kita harus menciptakan perdamaian antar kelompok orang beriman karena sesungguhnya orang-orang mukmin yang mantap imannya serta dihimpun oleh keimanan meskipun tidak seketurunan adalah bagaikan bersaudara seketurunan.

Kata *innama* digunakan untuk membatasi sesuatu. Disini kaum beriman dibatasi hakikat hubungan mereka dengan persaudaraan. Penggunaan kata *innama* dalam konteks penjelasan tentang persaudaraan antara sesama mukmin ini, mengisyaratkan bahwa sebenarnya semua pihak telah mengetahui secara pasti bahwa kaum beriman bersaudara, sehingga semestinya tidak terjadi dari pihak manapun hal-hal yang mengganggu persaudaraan itu (Shihab, 2002: 247).

Kata *ikhwah* adalah bentuk jamak dari kata *akh*, yang dalam kamus bahasa sering kali diterjemahkan *saudara* atau *sahabat*. Kata ini pada mulanya berarti *yang sama*. Persamaan dalam garis keturunan mengakibatkan persaudaraan, demikian juga persamaan dalam sifat atau bentuk apapun, persamaan dalam kebangsaan mengakibatkan persaudaraan (Shihab, 2002: 247). Dalam surat Al-Hujurat ayat 10 ini, dijelaskan bahwa persaudaraan yang terjalin antar sesama mukmin dikarenakan adanya *persamaan agama*. Meskipun tidak seketurunan, berbeda suku bangsa, tetapi karena persamaan agama mereka bagaikan bersaudara seketurunan, karena dihubungkan oleh keimanan mereka.

Semakin kuat pengenalan satu pihak kepada selainnya, semakin terbuka peluang untuk saling memberi manfaat. Karena itu ayat diatas menekankan perlunya *saling mengenal*. Pengenalan itu dibutuhkan untuk saling menarik pelajaran dan pengalaman pihak lain, guna meningkatkan ketakwaan kepada

Allah swt. Yang dampaknya tercermin pada kedamaian dan kesejahteraan hidup duniawi dan kebahagiaan ukhrawi.

Demikian juga halnya dengan pengenalan terhadap alam raya. Semakin banyak pengenalan terhadapnya, semakin banyak pula rahasia – rahasianya yang terungkap, dan ini pada gilirannya melahirkan kemajuan ilmu pengetahuan dan teknologi serta menciptakan kesejahteraan lahir dan batin, dunia dan akherat.
(Shihab, 2002: 262).

قُلْ أَنزَلَهُ ٱلَّذِى يَعْلَمُ ٱلسِّرَّ فِى ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضِ ۚ إِنَّهُۥ كَانَ غَفُورًا رَّحِيمًا ﴿٦﴾

Artinya : “ Katakanlah: Al Quran itu diturunkan oleh (Allah) yang mengetahui rahasia di langit dan di bumi. Sesungguhnya Dia adalah Maha Pengampun lagi Maha Penyayang." (QS Al-Furqaan : 6)

Akhirnya sampai pada kesimpulan bahwa segala sesuatu itu ada penciptanya, yaitu Tuhan, dan segala sesuatunya itu diciptakan dengan maksud dan tujuan tertentu, yang akhir-akhirnya mendorong manusia untuk lebih beriman kepada Tuhan yang Esa dalam segala bidang-Nya.Al-Qur’an juga memerintahkan manusia untuk berfikir, sebagaimana firman Allah dalam surat Ali Imran :190 sebagai berikut :

إِنَّ فِى خَلْقِ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضِ وَٱخْتِلَٰفِ ٱلَّيْلِ وَٱلنَّهَارِ لَءَايَٰتٍ لِّأُو۟لِى ٱلْأَلْبَٰبِ

﴿١٩٠﴾

Artinya :"Sesungguhnya dalam penciptaan langit dan bumi, dan silih bergantinya malam dan siang terdapat tanda-tanda bagi orang-orang yang berakal" (*Q.S. Ali Imran:* 190).

Dalam tafsir Al-Maraghi penjelasan ayat 190 diatas adalah sesungguhnya dalam tatanan langit dan bumi serta keindahan perkiraan dan keajaiban ciptaan Allah juga dalam silih bergantinya siang dan malam secara teratur sepanjang tahun yang dapat dirasakan secara langsung pengaruhnya pada tubuh dan cara berpikir manusia karena pengaruh panas matahari, dinginnya malam dan pengaruhnya yang ada dalam dunia *flora* dan *fauna* dan sebagainya merupakan tanda bukti keesaan Allah, kesempurnaan pengetahuan dan kekuasaannya. Sedangkan *Ulul Albab* adalah orang-orang yang mau menggunakan pikirannya untuk mengambil faedah darinya, mengambil hidayah darinya, mengambarkan keagungan Allah dan mau mengingat hikmah akal dan keutamaannya.

Dalam menyelesaikan suatu permasalahan dalam matematika harus dikerjakan dengan cermat dan teliti, karena dalam Al Quran Allah telah berfirman dalam surat Maryam : 94 sebagai berikut :

لَّقَدۡ أَحۡصَىٰهُمۡ وَعَدَّهُمۡ عَدّٗا ٩٤

Artinya :" Sesungguhnya Allah telah menentukan jumlah mereka dan menghitung mereka dengan hitungan yang teliti" (*Q.S. Maryam:* 94).

Ayat di atas melukiskan Allah sebagai *ahsahum*, yang dipahami oleh sebagian ulama' sebagai Dia yang mengetahui kadar setiap peristiwa dan rinciannya, baik yang terjangkau oleh makhluk maupun yang tidak dapat mereka jangkau, seperti hembusan nafas, rincian perolehan rizki dan kadar untuk masa kini dan mendatang. Jadi Allah yang mengetahui amat teliti rincian segala sesuatu dari segala segi jumlah dan kadarnya, panjang dan lebarnya, jauh dan dekatnya, tempat dan waktunya, kadar cahaya dan gelapnya, sebelum, sedang / ketika dan saat wujudnya dan lain-lain.

Begitu juga refleksinya dalam kehidupan, bahwa dalam menyelesaikan suatu permasalahan harus dikerjakan dengan hati-hati dan teliti serta tidak boleh tergesa-gesa. Dalam setiap melangkah harus tetap berpedoman pada aturan-aturan yang telah ditetapkan. Jadi dengan mempelajari matematika, dapat menambah keimanan dan ketaqwaan, karena apa yang ada dalam Al Quran juga sejalan dengan apa yang ada pada matematika.

BAB IV

PENUTUP

4.1 . Kesimpulan.

Berdasarkan hasil pembahasan pada Bab III, maka dapat diambil kesimpulan, bahwa untuk menentukan bilangan kromatik pada graf bipartisi komplit $K_{(m,n)}$ dilakukan dengan langkah- langkah sebagai berikut :

a. Menentukan bilangan kromatik pada beberapa kasus khusus yaitu pada $K_{(2,n)}$, $K_{(3,n)}$, $K_{(4,n)}$, $K_{(5,n)}$ dengan $n \geq 2$.
b. Menentukan pola dari bilangan kromatik pada langkah (a)
c. Pola yang diperoleh diasumsikan sebagai teorema
d. Pembuktian teorema

Berdasarkan langkah – langkah di atas diperoleh :

I. $\chi(K_{(m,n)}) = 2 \ \forall m,n \in \mathbb{N}$

II. $\chi'(K_{(m,n)}) = \begin{cases} m, \text{ jika } m \geq n \\ n, \text{ jika } n > m \end{cases} \qquad m,n \in \mathbb{N}$

$$
\text{III.}\quad \chi''(K_{(m,n)}) \begin{cases} \chi''(K_{(1,n)}) = \quad 1 & , \forall\, n \in N \\[2ex] \chi''(K_{(2,n)}) = \begin{cases} 2, \; n \text{ genap} \\ 3, \; n \text{ ganjil} \end{cases} & , \forall\, n \in N;\; n \geq 2 \\[2ex] \chi''K_{(m,2)}) = \begin{cases} 2, \; m \text{ genap} \\ 3, \; m \text{ ganjil} \end{cases} & , \forall\, m \in N;\; m \geq 2 \\[2ex] \text{Selainnya} \quad \text{tidak bisa diwarnai} & , \text{Bukan planar} \end{cases}
$$

Sedangkan untuk menentukan bilangan kromatik pada graf tripartisi $T_{(2,\, n\text{-}1,\, n\,)}$ dilakukan dengan langkah- langkah sebagai berikut :

a. Menentukan bilangan kromatik pada beberapa kasus khusus yaitu pada pada graf Tripartisi $T_{(2,n\text{-}1,\, n)}$ untuk $n = 2, 3, 4, 5$.

b. Menentukan pola dari bilangan kromatik pada langkah (a)

c. Pola yang diperoleh diasumsikan sebagai teorema

d. Pembuktian teorema

Berdasarkan langkah – langkah di atas diperoleh :

i. $\chi\,(T_{(2,\, n\text{-}1,\, n\,)}) = \;\; 3 \; \forall\; n \in N \,;\, n \geq 2$

ii. $\chi'(T_{(2,\, n\text{-}1,\, n)}) \;=\; 2n - 1 \; \forall\; n \in N \,;\, n \geq 2$

iii. $\chi''(T_{(2,n\text{-}1,n)}) \quad = \;\; 3 \,,\, \forall\; n \in N \,;\, n \geq 2$

4.2. Saran

Pada skripsi ini, penulis hanya memfokuskan pada pokok bahasan mengenai pewarnaan sisi , titik, dan peta pada graf bipartisi komplit dan graf tripartisi. Maka dari itu, untuk penulisan skripsi selanjutnya, penulis menyarankan kepada pembaca untuk mengkaji masalah pewarnaan titik, sisi, dan peta pada graf yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

Abdusysyakir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press.

Aziz, Abdul dan Abdusysyakir. 2006. *Analisis Matematis Terhadap Filsafat Al-Qur'an*. Malang: UIN Malang Press.

Chartrand, Gery and Lesniak, Linda. 1986. *Graphs and Digraphs Second Edition*. California: a Division of Wadsworth, Inc.

Ghofur, Abdul. 2008. *Pewarnaan Titik Pada Graf Yang Berkaitan dengan Sikel*. UIN Malang: Skripsi, tidak diterbitkan.

Purwanto, 1998. *Matematika Diskrit*. Malang: IKIP Malang.

(PlanetMath,*http://planetmath.org/encyclopedia/graphTheory*.Tanggal akses: 28 Desember 2007, pukul 15.00 WIB)

Shihab, M. Quraish. 2002. *Tafsir Al-Misbah Volume 14 Pesan, Kesan & Keserasian Al Qur'an*. Ciputat: Lentera Hati.

Shihab, M. Quraish. 2002. *Tafsir Al- Misbah: Pesan, Kesan dan Keserasian Al-Qur'an*. Jakarta: Lentera Hati.

(Wikipedia,*http//en.wikipedia.org/wiki/Graph_theory*. Tanggal akses: 22 April 2009, pukul 11.16 WIB).