

**ANALISIS DINAMIK UNTUK KESTABILAN DARI MODEL SIR
DENGAN PERLAMBATAN WAKTU**

SKRIPSI

Oleh:
INES INDRAWATI
NIM. 07610061



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2012**

**ANALISIS DINAMIK UNTUK KESTABILAN DARI MODEL SIR
DENGAN PERLAMBATAN WAKTU**

SKRIPSI

Oleh:
INES INDRAWATI
NIM. 07610061



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2012**

**ANALISIS DINAMIK UNTUK KESTABILAN DARI MODEL SIR
DENGAN PERLAMBATAN WAKTU**

SKRIPSI

Diajukan kepada:
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
INES INDRAWATI
NIM. 07610061

**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2012**

**ANALISIS DINAMIK UNTUK KESTABILAN DARI MODEL SIR
DENGAN PERLAMBATAN WAKTU**

SKRIPSI

Oleh:
INES INDRAWATI
NIM. 07610061

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji:
Tanggal: 10 Maret 2012

Pembimbing I

Pembimbing II

Usman Pagalay, M.Si
NIP. 19650414 200312 1 001

Hairur Rahman, M.Si
NIP. 19800429 200604 1 003

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

**ANALISIS DINAMIK UNTUK KESTABILAN DARI MODEL SIR
DENGAN PERLAMBATAN WAKTU**

SKRIPSI

oleh:
INES INDRAWATI
NIM. 07610061

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima Sebagai Salah Satu Persyaratan untuk
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal: 29 Maret 2012

Penguji Utama:	Wahyu Henky Irawan, M.Pd NIP. 19710420 200003 1 003
Ketua Penguji:	Drs. Turmudi, M.Si NIP. 19571005 198203 1 006
Sekretaris Penguji:	Usman Pagalay, M.Si NIP. 19650414 200312 1 001
Anggota Penguji:	Hairur Rahman, M.Si NIP. 19800429 200604 1 003

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP.19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Ines Indrawati
NIM : 07610061
Jurusan : Matematika
Fakultas : Sains dan Teknologi

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambilalihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka. Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 9 Maret 2012

Yang membuat pernyataan,

Ines Indrawati

NIM. 07610061

MOTTO

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ ﴿١﴾

إِنَّ اللَّهَ لَا يُغَيِّرُ مَا بِقَوْمٍ حَتَّى يُغَيِّرُوا مَا بِأَنْفُسِهِمْ ۗ

Sesungguhnya Allah tidak merubah keadaan suatu kaum sehingga mereka merubah keadaan yang ada pada diri mereka sendiri

(QS. Ar-Ra'd: 11)

“Bangunlah Mimpi, Niscaya Engkau Akan Dibangunkan oleh Mimpi”

PERSEMBAHAN

Untuk yang tersayang dan tercinta

Ibunda Suwartinah

Ayahanda Jumat

Mbak Krisminarti dan mas As'ari

Ustad Suprayitno dan Ibu Mudrikah

*Terima kasih banyak telah mendoakan, membantu baik
moril maupun materil.*



KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Syukur alhamdulillah penulis haturkan ke hadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan hidayat-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan studi di Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang sekaligus penulisan skripsi ini dengan baik.

Selanjutnya penulis haturkan ucapan terima kasih seiring do'a harapan *jazakumullah ahsanul jaza'* kepada semua pihak yang telah membantu selesainya skripsi ini. Ucapan terima kasih ini penulis sampaikan kepada:

1. Prof. Dr. H. Imam Suprayogo, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Prof. Drs. Sutiman B. Sumitro, SU.,DSc, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir, M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.
4. Usman Pagalay, M.Si, sebagai pembimbing dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Atas bimbingan, arahan, saran, motivasi dan kesabarannya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik, penulis sampaikan *jazakumullah Ahsanul Jaza'*.
5. Hairur Rahman, M.Si, sebagai pembimbing dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Atas bimbingan, arahan, saran, motivasi dan kesabarannya,

sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik, penulis sampaikan *jazakumullah Ahsanul Jaza'*.

6. Seluruh dosen Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang, yang telah mendidik, membimbing, mengajarkan dan mencurahkan ilmu-ilmunya kepada penulis. Semoga Allah membalas amal kebajikannya.
7. Kepada orang tua tercinta yang telah mencurahkan cinta dan kasih-sayang teriring do'a, motivasi, dan materi, sehingga penulis selalu optimis dalam menghadapi kesuksesan hidup.
8. Kakakku Krisminarti dan Mas As'ari tersayang yang telah memberikan dukungan, do'a dan motivasi bagi penulis.
9. Sahabat-sahabat terbaik kos 165, Tri Nur Hayati, Asma'ul Husna, Syifaturrahmah, Mulyani, Ifa Fajarika, Nanik Fitria, Uum Efiyah, dan semuanya yang tidak dapat penulis sebutkan satu per satu, terima kasih banyak atas dukungannya.
10. Seluruh teman-teman Jurusan Matematika khususnya angkatan 2007 yang telah berjuang bersama-sama untuk mencapai kesuksesan yang diimpikan. Terima kasih atas segala pengalaman dan kenangan yang telah terukir saat menuntut ilmu bersama.
11. Seluruh teman-teman Jurusan Matematika angkatan 2008, Dewi Kurniasih, Saropah, Nuril Futikhatul Amanah, dan semuanya yang telah menemani untuk menyelesaikan skripsi ini, terima kasih banyak.
12. Semua pihak yang tidak mungkin penulis sebutkan satu persatu, terima kasih atas keiklasan bantuan moral dan spiritual yang sudah diberikan pada penulis.

Penulis menyadari bahwa dalam penyusunan skripsi ini masih terdapat kekurangan, dan penulis berharap semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat kepada para pembaca, khususnya bagi penulis secara pribadi. *Amin Ya Rabbal Alamin*

Wassalamu'alaikum Wr. Wb.

Malang, 9 Maret 2012

Penulis



DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	
HALAMAN PENGAJUAN	
HALAMAN PERSETUJUAN	
HALAMAN PENGESAHAN	
HALAMAN PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN	
MOTTO	
HALAMAN PERSEMBAHAN	
KATA PENGANTAR	i
DAFTAR ISI	iv
DAFTAR GAMBAR	vi
DAFTAR SIMBOL	viii
DAFTAR LAMPIRAN	ix
ABSTRAK	x
ABSTRACT	xi
ملخص	xii
BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	3
1.3 Tujuan.....	4
1.4 Batasan Masalah.....	4
1.5 Manfaat Penelitian.....	5
1.6 Metode Penelitian.....	5
1.7 Sistematika Penulisan.....	6
BAB II KAJIAN PUSTAKA	
2.1 Persamaan Diferensial.....	8
2.2 Persamaan Diferensial Linier dan Persamaan Diferensial Tak Linier.....	9
2.3 Sistem Persamaan Diferensial.....	10
2.4 Sistem Persamaan Diferensial Linier dan Sistem Persamaan Diferensial Tak Linier.....	11
2.5 Titik Kesetimbangan Sistem Otonomus.....	13
2.6 Linierisasi.....	14
2.7 Nilai Eigen dan Vektor Eigen.....	15
2.8 Bilangan Reproduksi Dasar.....	17
2.9 Persamaan Diferensial Biasa dengan Waktu Tunda.....	17
2.10 Model Matematika.....	19
2.11 Perilaku Dinamik.....	22
2.12 Model SIR.....	24
2.13 Pemodelan Matematika dalam Perspektif Islam.....	26
2.13.1 Konsep Matematika dalam AL-Qur'an.....	26
2.13.2 Kesehatan dalam Wawasan Keislaman.....	28

BAB III PEMBAHASAN

3.1	Interpretasi Model SIR dengan Perlambatan Waktu	31
3.2	Menentukan Titik Keseimbangan	32
3.3	Linierisasi dan Persamaan Karakteristik	35
3.4	Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan	40
3.5	Analisis Dinamik untuk Kestabilan dari Model SIR dengan Perlambatan Waktu.....	44
3.6	Model SIR dengan Perlambatan Waktu dalam Pandangan Islam	50

BAB IV PENUTUP

4.1	Kesimpulan.....	54
4.2	Saran	55

DAFTAR PUSTAKA	56
-----------------------------	----

LAMPIRAN-LAMPIRAN	58
--------------------------------	----



DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Grafik Model Logistik dari Persamaan (2.18) dengan $r = 1$, $K = 100$ dan $x_0 = 0.01$	18
Gambar 2.2 Grafik Model Logistik dari Persamaan (2.19) dengan $r = 1, K = 100$ dan dan Nilai Perlambatan $\tau = 1,5$	19
Gambar 2.3 Tahapan-tahapan Membangun Model.....	20
Gambar 2.4 Pola Koreksi dengan Penundaan	24
Gambar 2.5 Model SIR dengan Kelahiran dan Kematian.....	26
Gambar 3.1 Grafik Model SIR pada <i>Infected</i> $I(t)$ dari Persamaan (3.10). Parameter yang Digunakan $\delta = 0.94, \delta_1 = 0.05, \beta = 0.1$, dan $\gamma = 0.5$ dengan Syarat Awal $S(0) = 0.5, I(0) = 10$ Selama 150 Hari Tanpa Waktu Perlambatan	45
Gambar 3.2 Grafik Model SIR pada <i>Susceptible</i> $S(t)$ dari Persamaan (3.10). Parameter yang digunakan $\delta = 0.94, \delta_1 = 0.05, \beta = 0.1$, dan $\gamma = 0.5$ dengan Syarat Awal $S(0) = 0.5, I(0) = 10$ Selama 150 Hari Tanpa Waktu Perlambatan.....	45
Gambar 3.3 Phase Portrait dari Model SIR <i>Susceptible</i> $S(t)$ dan <i>Infected</i> $I(t)$ dari Persamaan (3.10). Parameter yang digunakan $\delta = 0.94$, $\delta_1 = 0.05, \beta = 0.1$, dan $\gamma = 0.5$ dengan Syarat Awal $S(0) = 0.5$, $I(0) = 10$ Selama 150 Hari Tanpa Waktu Perlambatan	46
Gambar 3.4 Grafik Model SIR <i>Susceptible</i> $S(t)$ dan <i>Infected</i> $I(t)$ dari Persamaan (3.10). Parameter yang digunakan $\delta = 0.94$, $\delta_1 = 0.05, \beta = 0.1$, dan $\gamma = 0.5$ dengan syarat awal $S(0) = 0.5$, $I(0) = 10$ Selama 150 Hari Tanpa Waktu Perlambatan	46
Gambar 3.5 Grafik Model SIR <i>Susceptible</i> $S(t)$ dan <i>Infected</i> $I(t)$ dari Persamaan (3.10). Parameter yang digunakan $\delta = 0.94$, $\delta_1 = 0.05, \beta = 0.1$, dan $\gamma = 0.5$ dengan Syarat Awal $S(0) = 0.5$, $I(0) = 10$ Selama 150 Hari dengan Waktu Perlambatan $\tau = 0.01$	47
Gambar 3.6 Grafik Model SIR <i>Susceptible</i> $S(t)$ dan <i>Infected</i> $I(t)$ dari Persamaan (3.10). Parameter yang digunakan $\delta = 0.94$, $\delta_1 = 0.05, \beta = 0.1$, dan $\gamma = 0.5$ dengan Syarat Awal $S(0) = 0.5$, $I(0) = 10$ Selama 150 Hari dengan Waktu Perlambatan $\tau = 0.5$	47

Gambar 3.7 Grafik Model SIR *Susceptible* $S(t)$ dan *Infected* $I(t)$ dari Persamaan (3.10). Parameter yang digunakan $\delta = 0.94$, $\delta_1 = 0.05$, $\beta = 0.1$, dan $\gamma = 0.5$ dengan Syarat Awal $S(0) = 0.5$, $I(0) = 10$ Selama 150 Hari dengan Waktu Perlambatan $\tau = 1$ 48



DAFTAR SIMBOL

Simbol-simbol yang digunakan dalam skripsi ini adalah:

$S(t)$: Banyaknya individu yang rentan terkena infeksi pada waktu t
$I(t)$: Banyaknya individu yang terinfeksi pada waktu t
$R(t)$: Banyaknya individu yang telah sembuh dari infeksi pada waktu t
β	: Laju penularan
δ	: Laju kelahiran atau kematian
γ	: Laju kesembuhan
λ	: Nilai eigen
τ	: Waktu perlambatan
Δ	: Determinan
R_0	: Bilangan reproduksi dasar

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1. Program Matlab Model SIR Tanpa Perlambatan	59
Lampiran 2. Program Matlab Model SIR dengan Perlambatan	61
Lampiran 3. Solusi Numerik Model SIR Tanpa Perlambatan	62
Lampiran 4. Solusi Numerik Model SIR dengan Perlambatan 0.01	64
Lampiran 5. Solusi Numerik Model SIR dengan Perlambatan 0.5	65
Lampiran 6. Solusi Numerik Model SIR dengan Nilai Perlambatan 1	66



ABSTRAK

Indrawati, Ines. 2012. **Analisis Dinamik untuk Kestabilan dari Model SIR dengan Perlambatan Waktu**. Skripsi. Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

Pembimbing: (I) Usman Pagalay, M.Si (II) Hairur Rahman, M.Si

Kata Kunci: Analisis Dinamik, Model SIR, Kestabilan, Waktu Perlambatan

Model epidemik SIR merupakan model satu spesies yang berbentuk sistem persamaan diferensial tak liner. Adanya waktu perlambatan sangat mempengaruhi kestabilan titik kesetimbangan sistem persamaan diferensial model SIR.

Berdasarkan permasalahan di atas maka penelitian ini bertujuan untuk menganalisis waktu perlambatan terhadap kestabilan titik ekuilibrium sistem persamaan diferensial model SIR. Namun sebelum itu perlu diketahui bentuk model SIR dengan perlambatan. Terdapat batas ambang atau lebih dikenal dengan bilangan reproduksi dasar (R_0) yang menentukan penyakit itu menghilang atau menetap. Jika $R_0 \leq 1$ maka kesetimbangan bebas penyakit akan mencapai stabil asimtotik secara umum, GAS, dan penyakit akan menghilang. Tetapi jika $R_0 > 1$ maka terjadi kesetimbangan endemik dan penyakit akan mewabah. Dengan adanya waktu perlambatan maka kesetimbangan endemik akan mencapai stabil asimtotik lokal, LAS, pada saat $R_0 > 1$ untuk waktu perlambatan positif.

Dengan asumsi yang telah disebutkan di atas, maka dengan waktu perlambatan $\tau = 0$ dan tidak ada individu yang terinfeksi $I(t) = 0$, maka diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit $E_1 = (S, I, R)$ yaitu $(1, 0, 0)$. Jika waktu perlambatan $\tau = 0$ dan terdapat individu yang terinfeksi $I(t) \neq 0$, maka diperoleh titik kesetimbangan endemik $E_+ = (S^*, I^*, R^*)$ yaitu $S^* = \frac{(\gamma + \delta)}{\beta}$, $I^* = \frac{\delta(R_0 - 1)}{\beta}$, $R^* = \frac{\gamma(R_0 - 1)}{\beta}$. Dengan batas ambang $R_0 \leq 1$, maka titik kesetimbangan bebas penyakit mencapai kestabilan asimtotik secara global. Sedangkan untuk $R_0 > 1$ maka titik kesetimbangan endemik mencapai kestabilan asimtotik secara lokal. Setelah mengetahui kestabilannya, maka dilakukan interpretasi model SIR dengan perlambatan waktu yaitu dalam bentuk grafik, kemudian dari grafik tersebut mempermudah menjelaskan perilaku dinamikanya.

ABSTRACT

Indrawati, Ines. 2012. **Dynamical Analysis for Stability of SIR Model with Time Delay**. Thesis. Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, The State of Islamic University Maulana Malik Ibrahim Malang. Promotor: (I) Usman Pagalay, M.Si (II) Hairur Rahman, M.Si

SIR epidemic model is a model species that form a system of not linear differential equations. The existence of time delay is important to stability of equilibrium point from differential equations system for SIR models.

Based on the above issues the study aims to analyze time delay to stability of equilibrium from differential equations system of SIR model. But before that to know the form of SIR models with time delay. The threshold or better known as basic reproduction number (R_0) determining whether the disease dies out or persist. If $R_0 \leq 1$ then the disease-free equilibrium is globally asymptotically stable, GAS, and the disease always dies out. But if $R_0 > 1$ then the endemic equilibrium and the disease will be endemic. with the time delay in endemic equilibrium is locally asymptotically stable, LAS, for $R_0 > 1$ for all positive time delay.

With the assumptions, then time delay $\tau = 0$ and no human infected, $I(t) = 0$, then the disease free equilibrium point is obtained $E_1 = (S, I, R)$ is $(1, 0, 0)$. If time delay $\tau = 0$ and there are human infected $I(t) \neq 0$, then endemic equilibrium point is obtained $E_+ = (S^*, I^*, R^*)$, where $S^* = \frac{(\gamma + \delta)}{\beta}$, $I^* = \frac{\delta(R_0 - 1)}{\beta}$, $R^* = \frac{\gamma(R_0 - 1)}{\beta}$. With the threshold $R_0 \leq 1$, then the disease free equilibrium point reached globally asymptotically stable. As for the $R_0 > 1$ then endemic equilibrium point reached locally asymptotically stable. After learning of its stability, then the interpretation SIR models with time delay in graphs and easier to explain its dynamical behavior.

Key words: Dynamical Analysis, SIR Model, Stability, Time Delay

ملخص

إندرا واتي، إيناس. 2012. تحليل الديناميكي لتحقيق الاستقرار للنموذج SIR مع الوقت التباطؤ. بحث الجامعي.شعبة الرياضية كلية العلوم والتكنولوجيا. جامعة مولانا مالك إبراهيم الإسلامية الحكومية مالانج. مشريف: 1. عثمان فغالي الماجستير في العلوم
2. خيرالرحمان الماجستير في العلوم

سيدي وباء النموذج هو نموذج الأنواع التي تشكل منظومة من المعادلات التفاضلية ليست خطية. وجود الوقت التباطؤ ويؤثر على استقرار والفرق نقطة توازن معادلات نماذج SIR نظام.

استنادا إلى القضايا المذكورة أعلاه وتهدف الدراسة إلى تحليل التباطؤ في تحقيق الاستقرار في نظام توازن نموذج المعادلات التفاضلية السير. ولكن قبل ذلك لمعرفة شكل نماذج SIR مع تباطؤ. هناك عتبة أو أفضل المعروفة باسم عدد من الإنجابية الأساسية (R_0) الذي يحدد المرض تختفي أو لا تزال قائمة. إذا $R_0 \leq 1$ ثم سيتم التوصل الى التوازن خالية من الأمراض مستقر مقارب بشكل عام، GAS، والمرض سوف تختفي. ولكن إذا $R_0 > 1$ ثم فإن التوازن المتوطنة والأمراض المتوطنة في أن تكون. نظرا للتباطؤ في التوازن المتوطنة محليا هو مستقر مقارب تكون واضحة، LAS، في $R_0 > 1$ للمرة تباطؤ إيجابي.

مع ذكر الافتراضات المذكورة أعلاه، ثم تباطؤ مرة $\tau = 0$ وليس الأشخاص المصابين $I(t) = 0$ ثم يتم الحصول على نقطة توازن مرض مجانا $E_1 = (S, I, R)$ هو $(1,0,0)$ إذا كان تباطؤ وقت $\tau = 0$ وهناك الأشخاص المصابين الأول $I(t) \neq 0$ ، ثم يتم الحصول على نقطة توازن المتوطنة $E_+ = (S^*, I^*, R^*)$ ، وهما $S^* = \frac{(\gamma + \delta)}{\beta}$ ، $I^* = \frac{\delta(R_0 - 1)}{\beta}$ ، $R^* = \frac{\gamma(R_0 - 1)}{\beta}$ مع عت $R_0 \leq 1$ ثم وصلت إلى نقطة توازن مرض حرة مستقرة على الصعيد العالمي مقارب. أما بالنسبة للصلت $R_0 > 1$ ثم نقطة التوازن المتوطنة محليا مستقر مقارب. بعد التعلم من استقراره، ثم أدلى تفسير نماذج الوقت SIR تباطؤ في شكل الرسوم البيانية والخرائط هي أسهل من تفسير سلوكها الحيوي.



BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pada zaman sekarang ini banyak penyakit yang telah menjangkiti manusia. Di antara penyakit tersebut adalah tuberkolusis, malaria, demam berdarah, dan masih banyak lainnya. Dari penyakit-penyakit tersebut dapat disembuhkan dalam kurun waktu yang berbeda-beda, tergantung kepada respon sistem imun penderita. Dari setiap penyakit tersebut memiliki model matematika yang berbeda-beda.

Model dan pemodelan memang telah membantu manusia memahami sistem alam yang kompleks, dari yang mikroskopik sampai yang makroskopik. Model merupakan presentasi suatu realitas dari seorang pemodel. Dengan kata lain model merupakan jembatan antara dunia nyata (*real world*) dengan dunia berfikir (*thinking world*) untuk memecahkan suatu masalah (Pagalay, 2009).

Model epidemi SIR (*Susceptible, Infected, Removed*) merupakan jenis model dinamik yaitu model yang mempertimbangkan waktu. Dalam model SIR menunjukkan bahwa S adalah *susceptible* yaitu banyaknya orang yang rentan terkena suatu penyakit, I adalah *infected* yaitu banyaknya orang yang telah terkena atau terinfeksi suatu penyakit dan R adalah *removed* yaitu banyaknya orang yang telah sembuh dan kebal dari suatu penyakit oleh imun. Model SIR dikembangkan pertama kali untuk mengetahui laju penyebaran dan kepunahan suatu wabah penyakit dalam suatu populasi tertutup dan bersifat epidemik (Riyanto, 2008:1).

Allah berfirman dalam Al-Qur'an surat Yunus ayat 57:

يَتَأْتِيهَا النَّاسُ قَدْ جَاءَتْكُمْ مَوْعِظَةٌ مِّن رَّبِّكُمْ وَشِفَاءٌ لِّمَا فِي الصُّدُورِ وَهُدًى وَرَحْمَةٌ

لِّلْمُؤْمِنِينَ

Artinya: Hai manusia, Sesungguhnya telah datang kepadamu pelajaran dari Tuhanmu dan penyembuh bagi penyakit-penyakit (yang berada) dalam dada dan petunjuk serta rahmat bagi orang-orang yang beriman (Q.S. Yunus [10]:57).

Istilah arab *mau'izhah* (nasihat) berarti peringatan dan kesadaran. Frase arab *syifa'is-shudur* merujuk kepada penyucian ruh dan hati dari keburukan-keburukan spiritual. Cacat-cacat spiritual lebih berat dari pada penyakit jasmani. Manfaat al-qur'an ini terletak dalam penyembuhan penyakit-penyakit ruhani ini.

Itulah sebabnya Rasulullah SAW mengatakan dalam suatu hadits, “Manakala kesusahan, laksana malam yang gelap dan mengerikan menimpamu maka berlidunglah kepada Al-Qur'an”. Di samping penuh dengan ajaran dakwah, di saat yang sama Al-Qur'an juga menjadi obat, penyembuh, sumber pencerah dan rahmat (Imani, 2005:83).

Menurut Rubono (2009:2) model epidemi SIR dengan perlambatan waktu adalah sebagai berikut:

$$\frac{dS(t)}{dt} = \delta - \delta S(t) - \beta S(t)I(t - \tau) \quad (1.1)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t)I(t - \tau) - \gamma I(t) - \delta I(t) \quad (1.2)$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) - \delta R(t) \quad (1.3)$$

dimana δ, β, γ dan τ adalah konstanta positif, δ adalah laju kematian, β adalah laju penularan, γ laju kesembuhan alami dari seorang penderita, t adalah waktu dan τ merupakan waktu perlambatan.

Diasumsikan batas ambang $R_0 \leq 1$ maka model SIR dengan perlambatan waktu akan mencapai kesetimbangan bebas penyakit dan mencapai kestabilan asimtotik secara umum (*Globally Asymptotically Stable*, GAS) sehingga penyakit akan menghilang, sedangkan $R_0 > 1$ maka penyakit tersebut akan menjadi endemik. Dengan adanya masa inkubasi yang tertunda dan konstan, maka kesetimbangan endemik akan mencapai kestabilan asimtotik secara lokal (*Locally Asymptotically Stable*, LAS) untuk $R_0 > 1$ dan semua waktu perlambatan yang positif. Kemudian dengan memasukkan waktu perlambatan yang berbeda-beda, maka dapat diketahui perilaku dinamik dari model SIR dengan perlambatan waktu

Berdasarkan analisis asumsi di atas maka dapat diketahui kestabilan dari model SIR dengan perlambatan waktu dan perilaku dinamiknyanya. Dari paparan di atas maka peneliti mengambil judul skripsi adalah “*Analisis Dinamik untuk Kestabilan dari Model SIR dengan Perlambatan Waktu*”.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan paparan di atas maka peneliti dapat merumuskan masalah sebagai berikut:

1. Bagaimana titik kesetimbangan model SIR dengan perlambatan waktu?
2. Bagaimana analisis kestabilan titik kesetimbangan dari model SIR dengan perlambatan waktu?
3. Bagaimana analisis dinamik untuk kestabilan dari model SIR dengan perlambatan waktu?

1.3 Tujuan

Dari rumusan masalah di atas maka tujuan penelitian adalah sebagai berikut:

1. Untuk mengetahui titik kesetimbangan model SIR dengan perlambatan waktu.
2. Untuk mengetahui analisis kestabilan titik kesetimbangan dari model SIR dengan perlambatan waktu
3. Untuk mengetahui analisis dinamik untuk kestabilan titik kesetimbangan dari model SIR dengan perlambatan waktu.

1.4 Batasan Masalah

Penulisan skripsi ini difokuskan pada pembahasan dengan beberapa penyakit menular melalui kontak langsung antara individu rentan dengan penderita.

1. Penyakit-penyakit yang dibahas dalam penelitian ini tidak spesifik, melainkan penyakit-penyakit umum yang tergolong dalam model SIR.
2. Proporsi dari populasi model SIR ini adalah konstan, yang berarti $S(t) + I(t) + R(t) = 1$.
3. Laju kelahiran sama dengan laju kematian.
4. Pembahasan penggunaan model dalam skripsi ini yaitu model SIR dengan perlambatan waktu sesuai dengan model yang telah ditulis oleh Rubono Setiawan (2009) dalam jurnalnya yang berjudul *Stability of Delayed SIR Model with Vital Dynamics*.

5. Dalam skripsi ini, analisis dinamik dimaksudkan membahas tentang titik kesetimbangan model, analisis kestabilan dari titik kesetimbangannya, kemudian menjelaskan perilaku dinamikinya setelah dimasukkan nilai parameter-parameter dan memasukkan waktu perlambatan yang berbeda-beda.

1.5 Manfaat penelitian

Manfaat penelitian ini adalah:

1. Bagi peneliti

Untuk memperdalam dan mengembangkan wawasan disiplin ilmu yang telah dipelajari dalam mengkaji permasalahan tentang analisis dari sistem persamaan diferensial dengan perlambatan.

2. Bagi pembaca

Sebagai tambahan wawasan dan informasi tentang model matematika dari salah satu model dalam matematika biologi, yaitu model SIR dengan perlambatan.

1.6 Metode Penelitian

Metode penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah:

- a. Mengkaji, mempelajari buku-buku yang berkaitan dengan masalah model SIR, persamaan diferensial non linier maupun sistem persamaan diferensial non linier. Pada penulisan skripsi ini, penulis mengacu pada karya tulis yang ditulis oleh Rubono Setiawan yang berjudul *Stability of Delayed SIR Model with Vital Dynamics*.

b. Menganalisis

Adapun langkah-langkah yang dilakukan penulis dalam menganalisis dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Interpretasi model.
2. Menentukan titik kesetimbangan dari model.
3. Melakukan linierisasi dari model SIR dengan perlambatan waktu
4. Menganalisis kestabilan titik kesetimbangan model.
5. Menyelesaikan model

Penyelesaian analitik sistem persamaan diferensial tak linier akan didekati secara numerik dengan metode Runga Kutta Orde Empat dan DDE23 menggunakan software MATLAB 7.6.

6. Menganalisis model matematika pada model SIR dengan perlambatan waktu dalam bentuk grafik dengan bantuan software MATLAB 7.6 dengan memasukkan nilai-nilai perlambatan yang berbeda-beda.

c. Membuat kesimpulan.

1.7 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan dari penelitian ini adalah:

BAB I PENDAHULUAN

Dalam bab pendahuluan ini berisi tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan, batasan masalah, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

BAB II KAJIAN PUSTAKA

Dalam bab ini dikemukakan teori yang mendasari penelitian yang meliputi persamaan diferensial, persamaan diferensial linier, persamaan diferensial tak linier, sistem persamaan diferensial, kestabilan titik kritis dari sistem otonomus, bilangan reproduksi dasar, model matematika, model SIR dan juga kajian agama tentang konsep keseimbangan penyakit, dan tentang kesehatan serta kestabilan dalam perspektif Islam.

BAB III PEMBAHASAN

Dalam bab ini dipaparkan hasil-hasil kajian yang meliputi analisis pembentukan model matematika SIR dengan perlambatan, titik kesetimbangan model, kestabilan titik kesetimbangan model, penyelesaian model dengan Runga Kutta Orde Empat dan DDE23, solusi numerik, dan interpretasi model serta membahas kajian agama tentang pandangan Islam terhadap waktu, penyakit, dan kesembuhan.

BAB IV PENUTUP

Penutup berisikan kesimpulan dari penelitian dan saran.

BAB II KAJIAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Diferensial

Definisi 2.1.1:

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat turunan satu (atau beberapa) fungsi yang tidak diketahui (Finizio dan Ladas, 1982:1).

Contoh 1:

$$1) y' + xy = 3$$

$$2) y'' + 2y' + 3y = \cos x$$

$$3) y'' = (1 + y')(x^2 + y^2)$$

$$4) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

Contoh 1 merupakan persamaan-persamaan diferensial. Dalam persamaan (1)-(3) merupakan fungsi yang tidak diketahui dan dinyatakan dengan y dan dianggap sebagai fungsi satu peubah bebas x , yaitu $y = y(x)$. Sedangkan persamaan (4) fungsi yang tidak diketahui u dianggap sebagai fungsi dua peubah bebas t dan x , yaitu $u = u(t, x)$, $\partial^2 u / \partial t^2$ dan $\partial^2 u / \partial x^2$ berturut-turut adalah turunan parsial kedua dari fungsi $u(t, x)$ terhadap t dan x .

Definisi 2.1.2:

Suatu persamaan diferensial biasa orde n adalah suatu persamaan yang dapat ditulis dalam bentuk

$$y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (2.1)$$

dimana $y, y', \dots, y^{(n)}$ semua ditentukan nilainya oleh x (Finizio dan Ladas, 1982:1).

Contoh 2:

$$1) \frac{dy}{dx} - y = x$$

$$2) \left(\frac{d^3y}{dx^3} \right)^2 - 2 \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y - 3x = 0$$

Definisi 2.1.3:

Order dari persamaan diferensial yaitu derivatif tertinggi yang terdapat pada persamaan diferensial tersebut (Baiduri, 2002:4).

Contoh 3:

$$1) \frac{dy}{dx} = 2\cos 2x - 3e^{-x}$$

$$2) y \, dy - x e^x dx = 0$$

$$3) \frac{d^3y}{dx^3} + 2xy = e^x$$

Pada contoh 3 di atas (1) dan (2) merupakan persamaan diferensial berorder satu, sedangkan (3) persamaan diferensial berorder tiga.

2.2 Persamaan Diferensial Linier dan Persamaan Diferensial Tak Linier**Definisi 2.2.1:**

Persamaan diferensial biasa linier orde- n dengan variabel terikat y dan variabel bebas x yaitu suatu persamaan yang dapat dinyatakan sebagai

$$\sum_{i=0}^n a_i(x) \frac{d^i y}{dx^i} = b(x), a_n(x) \neq 0, \frac{d^0 y}{dx^0} = y_n \quad (2.2)$$

(Baiduri, 2002:4).

Dari persamaan (2.2) persamaan diferensial order- n dikatakan linier jika mempunyai ciri-ciri sebagai berikut:

- 1) Variabel terikat y dan derivatifnya hanya berderajat satu.
- 2) Tidak ada perkalian antara y dan derivatifnya serta antara derivatif.
- 3) Variabel terikat y bukan merupakan fungsi transenden.

Definisi 2.2.2

Persamaan diferensial tak linier adalah persamaan diferensial yang bukan persamaan diferensial linier (Ross, 1984:5).

Contoh 4:

$$1) \frac{d^2y}{dx^2} + 5 \frac{dy}{dx} + 6y = 0$$

$$2) y''' + 4y'' - 5y' + 3y = \sin x$$

$$3) y'' - 3yy' + 2y = 0$$

Dari contoh 4 di atas (1) dan (2) merupakan persamaan diferensial linier dengan koefisien konstan, sedangkan (3) merupakan persamaan diferensial tak linier.

2.3 Sistem Persamaan Diferensial

Definisi 2.3.1:

Sistem persamaan diferensial adalah suatu sistem yang memuat n persamaan diferensial, dengan n fungsi yang tidak diketahui, dimana n merupakan bilangan bulat positif lebih besar sama dengan 2 (Finizio dan Ladas, 1982:132). Antara persamaan diferensial yang satu dengan yang lain saling terkait dan konsisten.

Bentuk umum dari suatu sistem n persamaan orde pertama mempunyai bentuk sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_1}{dt} &= g_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\
 \frac{dx_2}{dt} &= g_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\
 &\vdots \\
 \frac{dx_n}{dt} &= g_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n)
 \end{aligned}
 \tag{2.3}$$

x_1, x_2, \dots, x_n adalah variabel bebas dan t adalah variabel terikat, sehingga $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \dots, x_n = x_n(t)$, dimana $\frac{dx_n}{dt}$ merupakan derivatif fungsi x_n terhadap t , dan g_i adalah fungsi yang tergantung pada variabel x_1, x_2, \dots, x_n dan t (Neuhauser, 2004:702).

2.4 Sistem Persamaan Diferensial Linier dan Sistem Persamaan Diferensial Tak Linier

Definisi 2.4.1:

Sistem persamaan diferensial linier adalah persamaan yang terdiri dari lebih dari satu persamaan yang saling terkait. Sistem dari dua persamaan diferensial dengan fungsi yang tak diketahui berbentuk:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + f_1(t) \\
 \dot{x}_2 &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + f_2(t)
 \end{aligned}
 \tag{2.4}$$

Di mana koefisien $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$, dan fungsi-fungsi f_1, f_2 merupakan fungsi t yang kontinu pada suatu selang I dan x_1, x_2 adalah fungsi t yang tak diketahui. Seperti biasanya titik di atas x_1 dan x_2 dalam (2.1) menyatakan turunan menurut peubah bebas t (Finizio dan Ladas, 1988:132).

Sistem persamaan diferensial linier dengan n fungsi-fungsi yang tak diketahui berbentuk:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \dots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ \dot{x}_2 &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \dots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \dots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t) \end{aligned} \quad (2.5)$$

atau secara singkat

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j + f_i(t), \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

(Finizio dan Ladas, 1988:132-133).

Definisi 2.4.2:

Sistem persamaan diferensial tak linier adalah persamaan yang terdiri atas lebih dari satu persamaan yang saling terkait. Sistem dari dua persamaan diferensial tak linier dengan dua fungsi yang tak diketahui berbentuk:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax + by + F(x, y) \\ \dot{y} &= cx + dy + G(x, y) \end{aligned}$$

dimana $ad - bc \neq 0$

(Aliyah, 2007:12).

Dalam menyelesaikan persamaan diferensial linier dan sistem persamaan diferensial tak linier dapat juga menggunakan metode eksplisit yang diperluas sesuai dengan tingkat kesukaran, yaitu dengan metode eliminasi (metode penyelesaian persamaan diferensial dalam dua fungsi yang tak diketahui dan dengan koefisien konstan) dan dengan metode matriks (metode penyelesaian persamaan diferensial dalam n fungsi yang tak diketahui dan dengan koefisien

konstan). Persamaan diferensial linier dan sistem persamaan diferensial tak linier sering kali muncul dalam penerapan. Tetapi, hanya beberapa persamaan diferensial tak linier (sebagai contoh: terpisah, homogen, eksak) yang dapat diselesaikan secara eksplisit (Aliyah, 2007:12).

2.5 Titik Keseimbangan Sistem Otonomus

Sistem otonomus mempunyai bentuk :

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y)\end{aligned}\tag{2.6}$$

dimana turunan $\frac{dx}{dt}$ dan $\frac{dy}{dt}$ hanya bergantung pada (x, y) dan tidak bergantung secara eksplisit pada variabel t (Boyce dan DiPrima, 1992).

Titik kritis sistem (2.6) adalah (x_0, y_0) , sedemikian sehingga

$$f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0\tag{2.7}$$

Titik kritis (x_0, y_0) merupakan solusi sistem (2.6) yang bernilai konstan, karena $\frac{dx}{dt} = 0$ dan $\frac{dy}{dt} = 0$ pada titik (x_0, y_0) . Keadaan yang menyebabkan $\frac{dx}{dt} = 0$ dan $\frac{dy}{dt} = 0$ disebut sebagai keadaan setimbang, dan titik yang memenuhinya disebut titik keseimbangan (Edward dan Penney, 2001).

Definisi 2.5.1:

Titik kritis (x_0, y_0) atau solusi konstan (2.7) dari sistem (2.6) disebut stabil jika untuk setiap bilangan ϵ positif ada suatu δ positif demikian sehingga setiap penyelesaian $(x(t), y(t))$ dari (2.6) yang pada $t = 0$ memenuhi

$$[x(0) - x_0]^2 + [y(0) - y_0]^2 < \delta \quad (2.6)$$

ada dan memenuhi

$$[x(t) - x_0]^2 + [y(t) - y_0]^2 < \epsilon \quad (2.7)$$

untuk semua $t \geq 0$.

(Finizio dan Ladas,1982:291).

Definisi 2.5.2:

Sebuah titik kritis (x_0, y_0) atau solusi konstan (2.7) disebut stabil asimtotis jika titik itu stabil dan jika sebagai tambahan ada δ_0 demikian sehingga setiap solusi $(x(t), y(t))$ dari (2.6) yang pada $t = 0$ memenuhi

$$[x(0) - x_0]^2 + [y(0) - y_0]^2 < \delta \quad (2.8)$$

ada untuk semua $t \geq 0$ dan memenuhi

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_0 \quad (2.9)$$

(Finizio dan Ladas,1982:291).

Secara kasar dapat dikatakan bahwa stabilitas berarti perubahan yang kecil dalam syarat awal hanya menyebabkan pengaruh kecil pada selesaian, kestabilan asimtotis berarti pengaruh dari suatu perubahan yang kecil cenderung menghilang sama sekali, sedang ketakstabilan berarti bahwa suatu perubahan yang kecil dalam syarat awal mempunyai pengaruh besar pada selesaian (Finizio dan Ladas,1982:291).

2.6 Linierisasi

Linierisasi adalah proses hampiran persamaan diferensial tak linier dengan persamaan diferensial linier. Suatu sistem otonomus (2.6) dimana f dan g adalah tak linier, selanjutnya akan dicari pendekatan sistem linier jika (x, y) di sekitar

(x_0, y_0) dengan melakukan ekspansi menurut deret Taylor di sekitar titik (x_0, y_0) dengan menghilangkan suku tak liniernya sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x_0, y_0) + \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)\end{aligned}\quad (2.12)$$

Bila dilakukan substitusi $x - x_0 = u$ dan $y - y_0 = v$, maka $\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt}$ dan $\frac{dy}{dt} = \frac{dv}{dt}$, pada keadaan setimbang $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$ sehingga diperoleh persamaan linier sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)u + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)v \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)u + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)v\end{aligned}\quad (2.13)$$

Sistem (2.13) tersebut dapat ditulis dalam bentuk matriks

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = A_0 \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \text{ dimana } A = \begin{bmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{bmatrix}\quad (2.14)$$

dimana $A = A_0$ pada $x = x_0, y = y_0$. Matriks tersebut disebut matriks Jacobian.

(Arisma, 2010:2)

2.7 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Definisi 2.7.1

Jika A adalah suatu matriks $n \times n$, maka vektor tak-nol x pada R^n disebut vektor eigen dari A jika Ax adalah suatu penggandaan skalar dari x , yaitu

$$Ax = \lambda x \quad (2.15)$$

untuk suatu skalar λ . Skalar λ disebut nilai eigen dari A , dan x disebut suatu vektor eigen dari A yang berpadanan dengan λ .

Untuk memperoleh nilai eigen dari matriks $A_{n \times n}$, persamaan (2.15) dapat ditulis kembali sebagai

$$(A - \lambda I)x = 0 \quad (2.16)$$

dimana I adalah matriks identitas. Persamaan (2.16) mempunyai solusi tak nol jika dan hanya jika

$$\det(A - \lambda I) = |A - \lambda I| = 0 \quad (2.17)$$

Persamaan (2.17) disebut persamaan karakteristik dari matriks A , skalar-skalar yang memenuhi persamaan ini adalah nilai-nilai eigen A (Anton, 2000:83).

Penentuan kestabilan titik kesetimbangan didapat dengan melihat nilai-nilai eigennya, yaitu $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$ yang diperoleh dari persamaan karakteristik dari A , yaitu $(A - \lambda I)x = 0$.

Secara umum kestabilan titik kesetimbangan mempunyai tiga perilaku sebagai berikut (Dwi Lara, 2009):

1. Stabil, jika
 - a. Setiap nilai eigen real adalah negatif ($\lambda_i < 0$ untuk setiap i),
 - b. Setiap komponen nilai eigen kompleks bagian realnya lebih kecil atau sama dengan nol, ($Re(\lambda_i) \leq 0$ untuk setiap i).
2. Tidak stabil, jika
 - a. Setiap nilai eigen real adalah positif ($\lambda_i > 0$ untuk setiap i),
 - b. Setiap komponen nilai eigen kompleks bagian realnya lebih besar dari nol, ($Re(\lambda_i) > 0$ untuk setiap i).
3. *Saddle*, jika

Perkalian dua nilai eigen real adalah negatif ($\lambda_i \lambda_j < 0$ untuk setiap i dan j sembarang).

2.8 Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan reproduksi dasar (R_0) adalah rata-rata banyaknya individu rentan yang terinfeksi secara langsung oleh individu lain yang telah terinfeksi bila individu yang telah terinfeksi tersebut masuk ke dalam populasi yang seluruhnya masih rentan.

Kondisi yang akan timbul adalah salah satu di antara kemungkinan berikut:

1. Jika $R_0 < 1$ maka penyakit akan menghilang.
2. Jika $R_0 = 1$ maka penyakit akan menetap.
3. Jika $R_0 > 1$ maka penyakit akan meningkat menjadi wabah.

(Giesecke, 1994).

2.9 Persamaan Diferensial Biasa dengan Waktu Tunda

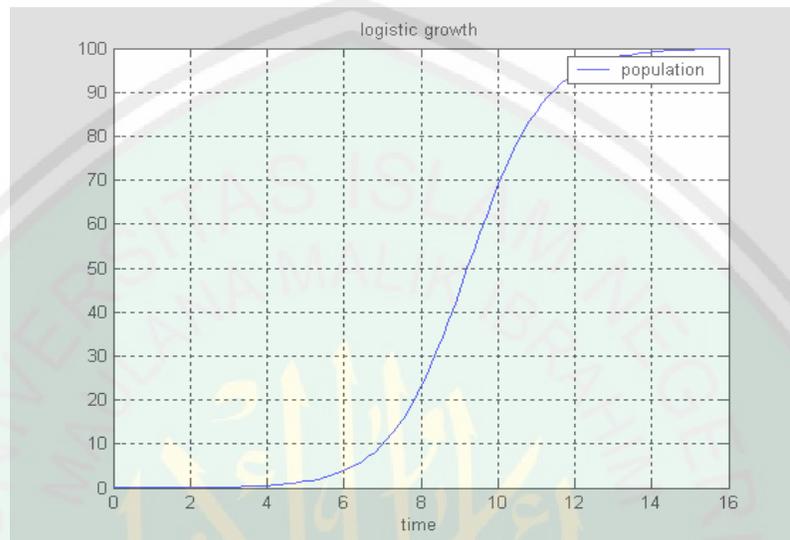
Waktu perlambatan (*delay*) sangat penting untuk diperhitungkan di dunia permodelan karena keputusan seringkali dibuat berdasarkan pada keterangan realita. Merupakan hal yang penting untuk mempertimbangkan model populasi dimana laju pertumbuhan populasi tidak hanya tergantung pada ukuran populasi pada satu waktu tertentu tetapi juga tergantung pada ukuran populasi pada $(t - \tau)$, dimana τ adalah waktu perlambatan (Fitria, 2009:22).

Penggunaan waktu tunda pada model persamaan biasa salah satunya ada pada model logistik. Model logistik atau model *Verhulst* adalah sebuah model pertumbuhan populasi. Model tersebut dideskripsikan sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) \quad (2.18)$$

dengan r adalah laju pertumbuhan intrinsik yang berbanding lurus dengan laju pertumbuhan untuk x . Konstanta positif K menggambarkan daya kapasitas kesehatan lingkungan, yaitu kemampuan menahan populasi agar tetap maksimum.

Berikut ini adalah kurva solusi dari model logistik dengan $r = 1$ dan $K = 100$



Gambar 2.1 Grafik Model Logistik dari Persamaan (2.18) dengan $r = 1$, $K=100$ dan $x_0 = 0.01$ (Fitria, 2009:22)

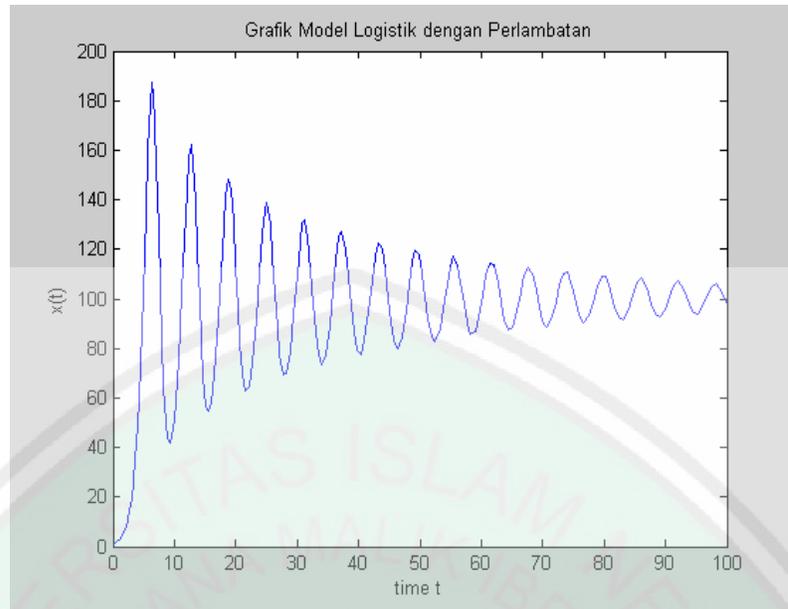
Sedangkan model logistik tunggal dengan perlambatan adalah

$$\frac{dx(t)}{dt} = rx(t) \left(1 - \frac{x(t-\tau)}{K} \right) \quad (2.19)$$

dimana τ adalah sebuah waktu perlambatan dan dianggap positif. Bentuk $\left(1 - \frac{x(t-\tau)}{K} \right)$ pada model (2.19) menggambarkan sebuah kepadatan tergantung pada mekanisme pengaruh arus balik yang mengambil τ satuan waktu untuk menanggapi perubahan pada kepadatan populasi yang pada model (2.18) diwakili oleh x . Model logistik dengan perlambatan dikenal sebagai persamaan perlambatan *Verhulst* atau persamaan *Hutchinson* (Fitria, 2009:23).

Berikut adalah kurva dari solusi model logistik dengan waktu perlambatan

1.5



Gambar 2.2 Grafik Model Logistik dari Persamaan (2.19) dengan $r = 1$, $K=100$ dan nilai perlambatan $t = 1.5$ (Fitria, 2009:23)

2.10 Model Matematika

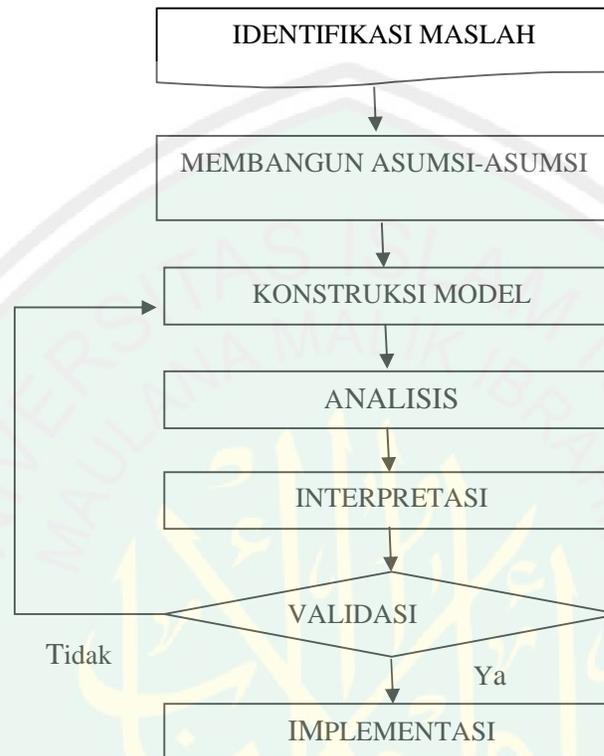
Model adalah representasi suatu realitas dari seorang pemodel. Dengan kata lain, model adalah jembatan antara dunia nyata (*real world*) dengan dunia berfikir (*thinking world*) untuk memecahkan suatu masalah. Proses penjabaran atau merepresentasikan ini disebut sebagai *modeling* atau pemodelan yang tidak lain merupakan proses berfikir melalui sekuen yang logis (Pagalay, 2009:3).

Pemodelan matematika adalah suatu proses yang menjalani tiga tahap berikut:

- a) Perumusan model matematika.
- b) Penyelesaian dan analisis model matematika.
- c) Penginterpretasian hasil ke situasi yang nyata (Abadiyah, 2009:25).

Dalam membangun sebuah model diperlukan beberapa tahapan agar dihasilkan model yang realibel. Secara umum tahapan-tahapan tersebut adalah

identifikasi masalah, membangun asumsi-asumsi, membuat konstruksi model, menganalisis, menginterpretasikan model validasi model, dan implementasi (Pagalay, 2009:5).



Gambar 2.3. Tahapan-tahapan Membangun Model (Pagalay, 2009)

1) Identifikasi masalah

Pemodel harus mempunyai kemampuan memahami masalah yang akan dirumuskan sehingga dapat ditranslasikan ke dalam bahasa matematika.

2) Membangun asumsi-asumsi

Hal ini diperlukan karena model adalah penyederhanaan realitas yang kompleks. Oleh karena itu, setiap penyederhanaan memerlukan asumsi, sehingga ruang lingkup model berada dalam koridor permasalahan yang akan dicari solusi atau jawabannya.

3) Membuat konstruksi model

Hal ini dapat dilakukan baik melalui hubungan fungsional dengan cara membuat diagram, alur, maupun persamaan-persamaan matematika. Konstruksi model ini dapat dilakukan dengan bantuan komputer software maupun secara analitis.

4) Analisis

Inti tahap ini adalah mencari solusi yang sesuai untuk menjawab pertanyaan yang dibangun pada tahap identifikasi. Di dalam pemodelan, analisis ini dilakukan dengan dua cara, pertama dengan melakukan optimisasi, kedua dengan melakukan simulasi. Optimisasi dirancang untuk mencari solusi “*what should happen*” (apa yang seharusnya dilakukan), sementara simulasi dirancang untuk mencari solusi “*what would happen*” (apa yang akan terjadi).

5) Interpretasi

Interpretasi ini penting dilakukan untuk mengetahui apakah hasil tersebut memang masuk akal atau tidak. Interpretasi juga diperlukan untuk mengomunikasikan keinginan si pemodel dengan hasil analisis yang dilakukan oleh komputer maupun alat pemecah model lainnya (*solver*).

6) Validasi

Pada tahap ini tidak hanya meginterpretasikan model, tetapi juga melakukan verifikasi atas keabsahan model yang dirancang dengan asumsi yang dibangun sebelumnya. Model yang valid tidak saja mengikuti kaidah-kaidah teoritis yang sah, namun juga memberikan interpretasi akan hasil yang diperoleh mendekati kesesuaian dalam hal besaran, uji-uji standar seperti statistik, dan prinsip-prinsip matematik lainnya seperti *first order condition*, *second order*

condition, dan sebagainya. Jika sebagian besar standar verifikasi ini dapat dilalui, model dapat diimplementasikan. Sebaliknya, jika tidak, konstruksi model harus dirancang ulang.

7) Implementasi

Jika hasil validasi memenuhi syarat, baru kemudian dilakukan implementasi melalui komputasi melalui “*hard system*” seperti komputer atau alat bantu lainnya. Keseluruhan hasil implementasi komputer, baik melalui optimisasi maupun simulasi, harus diverifikasi terlebih dahulu sebelum diinterpretasikan maupun diimplementasikan. Setelah itu, keseluruhan proses tersebut baru bisa digunakan untuk mengimplementasikan permasalahan awal yang telah dibangun sebelumnya.

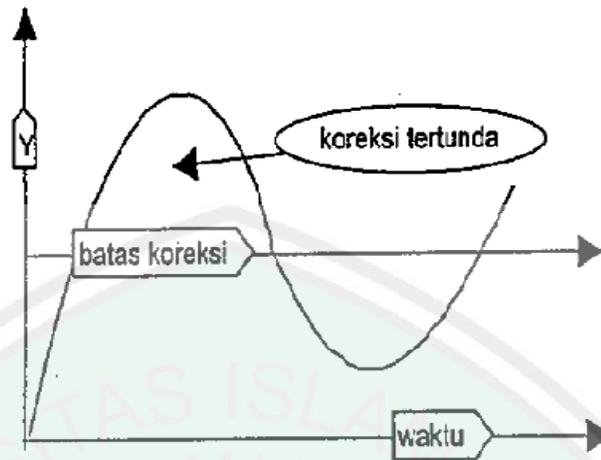
2.11 Perilaku Dinamik

Perilaku dinamik merupakan alat bantu yang mempermudah upaya penstrukturan sistem melalui diagram simpal kausal. Penstrukturan secara rinci tersebut bukan berarti membuat kompleksitas, tetapi sesuai dengan maksud berpikir sistemik adalah justru untuk mengungkapkan kompleksitas secara sederhana. Dalam perkembangannya, penyederhanaan kompleksitas tersebut telah dikembangkan menjadi pola-pola struktur dinamik, dimana masing-masing pola struktur memiliki perbedaan pola perilaku dinamik. Pola-pola perilaku dinamik tersebut dapat dipakai sebagai pedoman awal dalam membangun struktur dinamik yang lebih rinci atau untuk keperluan analisis (Wahid, 2007:35).

Gabungan simpal-simpal umpan balik tersebut menjelaskan kompleksitas. Semakin banyak simpal menggambar semakin banyak variabel (unsur) dan parameter (waktu) yang berarti semakin rinci dan dinamis (Wahid, 2007:36).

Dari hasil pengkajian oleh pakar secara empiris terhadap puluhan bahkan ratusan kasus perilaku dinamik, dewasa ini terdapat pola dasar perilaku dinamik hasil penyederhaan kompleksitas dinamik. Salah satunya adalah pola tindakan koreksi dengan penundaan (Wahid, 2007:40).

Dalam pola ini terdapat empat unsur, yaitu: kejadian aktual, kejadian diinginkan, kesenjangan, dan tindakan koreksi. Perbedaan antara kejadian aktual dengan diinginkan adalah kesenjangan. Untuk memecahkan masalah itu diperlukan tindakan koreksi. Tetapi di sini tindakan koreksi mengalami penundaan waktu, artinya tindakan koreksi tidak langsung menghasilkan perbaikan kejadian aktual. Oleh karena tindakan koreksi pertama tidak langsung menghasilkan perbaikan, maka masalah akan meningkat, yang berakibat tindakan koreksi kedua lebih besar dari yang pertama. Efek dari tindakan-tindakan koreksi yang lebih besar itu, akan menurunkan masalah berikutnya, yang berakibat tindakan koreksi ketiga menurun. Demikian seterusnya, sehingga perilaku kejadian aktual akan turun naik atau berisolasi seperti gambar berikut (Wahid, 2007:41).



Gambar 2.4 Pola Koreksi dengan Penundaan (Wahid, 2007).

2.12 Model SIR

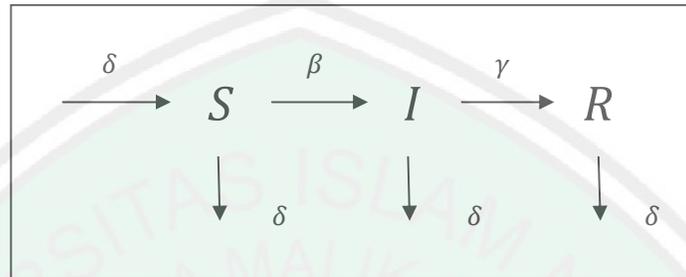
Model SIR (*Susceptibles, Infectives, Recovered*) pada awalnya dikembangkan untuk mengetahui laju penyebaran dan kepunahan suatu wabah penyakit dalam populasi tertutup dan bersifat epidemik (Riyanto, dkk, 2007:2).

Pada skripsi ini dibahas mengenai pembentukan model SIR pada penyakit yang tidak fatal dan berdasarkan asumsi-asumsi yang dibuat. Setelah model terbentuk, kemudian dicari solusi analitis dan titik kesetimbangannya, yang selanjutnya diinterpretasikan dalam permasalahan yang sesungguhnya dalam kehidupan nyata. Dalam hal ini adalah mengenai perilaku penyebaran penyakit dan eksistensinya, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik.

Titik kesetimbangan bebas penyakit adalah suatu kondisi di mana sudah tidak ada lagi penyakit yang menyerang atau dalam arti tidak ada lagi individu yang terserang penyakit. *Titik kesetimbangan endemik* adalah suatu kondisi di

mana penyakit selalu ada dalam populasi tersebut, maksudnya adalah bahwa selalu saja ada individu yang terserang penyakit (Riyanto, dkk, 2007:2).

Dari asumsi yang telah dibangun, model SIR dengan kelahiran dan kematian dengan perlambatan adalah



Gambar 2.5 Model SIR dengan Kelahiran dan Kematian

dimana:

δ = Kondisi dimana muncul kelahiran baru yang otomatis masuk dalam kondisi rentan

β = Laju penularan

γ = Laju kesembuhan

S = Orang yang yang rentan terinfeksi

I = Orang yang terinfeksi

R = Orang yang sembuh dari infeksi

Karena laju kelahiran sama dengan laju kematian maka keduanya sama yaitu δ .

Dalam satu waktu laju dari *Susceptible* menjadi *Infected* adalah:

$$\frac{dS}{dt} = \delta - \delta S(t) - \beta S(t)I(t - \tau) \quad (2.20)$$

Laju kesembuhan dari *Infected* menjadi *Removed* adalah

$$\frac{dI}{dt} = \beta S(t)I(t - \tau) - \gamma I(t) - \delta I(t) \quad (2.21)$$

Laju perubahan sub populasi *Removed* adalah

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I(t) - \delta R(t) \quad (2.22)$$

2.13 Pemodelan Matematika dalam Perspektif Islam

2.13.1 Konsep Matematika dalam Al-Qur'an

Matematika pada dasarnya berkaitan dengan pekerjaan menghitung, sehingga tidak salah kalau matematika disebut sebagai ilmu hitung atau *ilmu al-hisab*. Dalam urusan menghitung Allah adalah rajanya. Allah sangat cepat dalam menghitung dan sangat teliti (Abdussakir, 2007:83).

Matematika bersifat abstrak yang artinya bahwa objek dalam matematika diperoleh dari abstraksi dari fakta-fakta dan fenomena dari dunia nyata. Oleh karena itu matematika dapat ditelusuri kembali berdasarkan proses abstraksinya. Hal inilah yang mendasari bagaimana cara mempelajari matematika (Abdussakir, 2007:83).

Belajar matematika perlu dilakukan secara bertahap menuju level abstraksi. Dengan demikian matematika perlu dipelajari melalui tahapan nyata, setengah nyata, dan abstrak. Penyajian matematika secara nyata dapat berupa masalah yang berkaitan dengan dunia nyata. Bahasa yang digunakan adalah bahasa sehari-hari yang dekat dengan kehidupan. Masalah yang disajikan perlu diselesaikan untuk menemukan suatu konsep atau prinsip. Jadi aktivitas matematika adalah menemukan (*discovery*) melalui pemecahan masalah (*problem solving*). Sehingga inti dari belajar matematika adalah pemecahan masalah (Abdussakir, 2007:16).

Bentuk-bentuk dan konsep matematika juga termuat dalam alam semesta. Alam semesta beserta isinya telah diciptakan Allah sesuai dengan ukuran-ukuran, perhitungan-perhitungan yang cermat dan teliti, sebagaimana firman Allah SWT dalam surat Al-Qamar ayat 49:

إِنَّا كُلَّ شَيْءٍ خَلَقْنَاهُ بِقَدَرٍ ﴿٤٩﴾

Artinya: Sesungguhnya Kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran (QS. Al-Qamar [54]:49).

Pada era modern ini, pemodelan matematika bukan membuat sesuatu yang baru melainkan hanya mencari persamaan-persamaan rumus-rumus dan pengembangannya sesuai dengan fenomena yang terjadi. Seperti influenza, demam berdarah, tuberkolosis, dan lain-lain mempunyai aturan yang matematis. Sungguh semua tersebut telah berdasarkan ukuran, perhitungan, dan perumusan yang cermat, rapi, dan teliti (Abdussakir, 2007:80).

Ruang dan waktu terbentuk bersamaan dengan pembentukan alam semesta. Tidak ada ruang di luar alam semesta. Dan tidak ada waktu sebelum ada alam semesta. Namun, dalam kajian fisika, definisi waktu telah disederhanakan. Dalam kehidupan sehari-hari, pengalaman manusiawi terbagi dalam dua kelompok yaitu pertama hal-hal yang obyektif yang dapat dikenali panca indra tersebar dalam ruang. Kedua adalah hal-hal yang subyektif (ide, pemikiran, emosi, dan sejenisnya) tersebar dalam waktu. Tidak dapat digambarkan dalam dunia nyata, tetapi mengungkapkan waktu masa lalu, sekarang dan akan datang. Dalam fisika, waktu disederhanakan hanya apa yang tampak pada arloji atau alat pengukur waktu lainnya (misalnya, detak jantung, rotasi bumi, dan lain-lain) (Aziz, 2007:48).

وَهُوَ الَّذِي خَلَقَ اللَّيْلَ وَالنَّهَارَ وَالشَّمْسَ وَالْقَمَرَ كُلٌّ فِي فَلَكٍ يَسْبَحُونَ ﴿٣٣﴾

Artinya: Dan Dialah yang telah menciptakan malam dan siang, matahari dan bulan. masing-masing dari keduanya itu beredar di dalam garis edarnya (QS. Al-Anbiyaa' [21]:33).

Suatu penyakit tidak fatal akan sembuh seiring dengan waktu yang berjalan dan tingkat kesembuhannya berbeda-beda seiring dengan sistem imun dalam tubuh individu, ada yang cepat ada yang pelan.

2.13.2 Kesehatan dalam Wawasan Keislaman

Dalam ilmu kesehatan dikenal istilah-istilah kesehatan fisik dan kesehatan ruhiyah (Shihab, 2007:240-252):

1) Kesehatan fisik

Majelis Ulama Indonesia (MUI) merumuskan kesehatan sebagai ketahanan jasmaniah, ruhaniah, dan sosial yang dimiliki manusia, sebagai karunia Allah yang harus disyukuri dengan mengamalkan (tuntunan-Nya), dan memelihara serta mengembangkannya.

Dalam konteks kesehatan fisik, Rasulullah bersabda:

“Sesungguhnya badanmu mempunyai hak atas dirimu”

Demikian Rasulullah menegur beberapa sahabat yang melampaui batas beribadah sehingga kebutuhan jasmaniah dan kesehatan terganggu.

Pembicaraan literatur keagamaan tentang kesehatan fisik, dimulai dengan meletakkan prinsip:

“Pencegahan lebih baik dari pengobatan”

Karena itu dalam konteks kesehatan ditemukan sekian banyak petunjuk dalam Al-Qur'an dan sunnah Nabi SAW yang pada dasarnya mengarah pada upaya

pencegahan. Islam juga memerintahkan agar berobat saat ditimpa penyakit, sebagaimana hadis berikut:

“Berobatlah, karena tiada satu penyakit yang ditunkan Allah, kecuali diturunkan juga obat penangkalnya, selain dari satu penyakit, yaitu ketuaan (HR. Abu Daud dan At-Tirmidzi dari sahabat Usamah bin Syuraik)”.

Bahkan seandainya tidak ada perintah rinci dari hadis tentang keharusan berobat, maka prinsip-prinsip pokok yang diangkat dari Al-Qur’an dan Hadits cukup untuk dijadikan dasar dalam upaya kesehatan dan pengobatan.

2) Kesehatan ruhiyah

Hati merupakan unsur penting dalam diri setiap manusia. hati membutuhkan makanan sebagaimana fisik membutuhkannya (Shihab, 2007:240-252):.

Ibadah merupakan makanan pokok bagi hati dan ruhiyah. Bahkan makanan ruhiyah ini tidak memiliki batasan kuantitas. Semakin banyak ibadah seseorang, semakin rindu untuk melaksanakan ibadah yang lain. Semakin dekat seseorang dengan Allah, maka semakin ingin dekat, dan dekat lagi.

Makanan ruhiyah ini akan dapat membersihkan hati dan menentramkan jiwa.

Seseorang yang mempunyai kualitas ibadah yang baik, ia akan senantiasa merasa tenang, sejuk dan damai. Al-Qur’an al-Karim memang banyak berbicara tentang penyakit hati. Mereka yang lemah iman dinilai oleh Al-Qur’an sebagai orang yang memiliki penyakit di dalam dadanya sebagaimana surat Yunus 57 (Shihab, 2007:240-252).

Penyaki-penyakit hati pun beraneka ragam dan bertingkat-tingkat. Sikap angkuh, kikir, dan lain sebagainya merupakan bentuk berlebihan seseorang.

Sedangkan sikap pesimis, rasa takut, cemas dan lain sebagainya merupakan kekurangannya (Shihab, 2007:240-252).

Seseorang yang akan memperoleh keberuntungan dihari esok adalah mereka yang terbebas dari sikap-sikap seperti contoh di atas, sebagaimana firman Allah dalam surat Asy-Syuara' ayat 88-89:

يَوْمَ لَا يَنْفَعُ مَالٌ وَلَا بَنُونَ ﴿٨٨﴾ إِلَّا مَنْ أَتَى اللَّهَ بِقَلْبٍ سَلِيمٍ ﴿٨٩﴾

Artinya : (yaitu) di hari harta dan anak-anak laki-laki tidak berguna. Kecuali orang-orang yang menghadap Allah dengan hati yang bersih (QS. Asy-Syuara' [26]:88-89).

Islam mendorong manusia agar memiliki hati yang sehat dari segala penyakit dengan jalan berobat, dan mendekatkan diri kepada Tuhan mereka, karena:

... أَلَا بِذِكْرِ اللَّهِ تَطْمَئِنُّ الْقُلُوبُ ﴿٢٨﴾

Artinya: (yaitu) orang-orang yang beriman dan hati mereka manjadi tenteram dengan mengingat Allah. Ingatlah, hanya dengan mengingati Allah-lah hati menjadi tenteram (QS: Ar-Ra'd [13]: 28).

Itulah sebagaimana tuntunan Al-Qur'an dan hadis Rasulullah tentang kesehatan (Shihab, 2007:240-252).

BAB III PEMBAHASAN

3.1 Interpretasi Model SIR dengan Perlambatan Waktu

Interpretasi model SIR dengan perlambatan waktu dari persamaan Rubono (2009) adalah sebagai berikut:

$$1. \quad \frac{dS}{dt} = \delta - \delta S(t) - \beta S(t)I(t - \tau)$$

Perubahan jumlah populasi individu yang rentan terinfeksi (*Susceptible*) terhadap waktu dipengaruhi oleh laju kelahiran dan berkurangnya laju kematian sebanyak populasi individu yang rentan terinfeksi (*Susceptible*), serta berkurangnya laju kontak (laju penularan penyakit) terhadap individu yang terinfeksi tiap waktu dengan perlambatan sebanyak populasi individu yang rentan terinfeksi (*Susceptible*) dan populasi individu yang terinfeksi (*infectives*).

$$2. \quad \frac{dI}{dt} = \beta S(t)I(t - \tau) - \gamma I(t) - \delta I(t)$$

Perubahan jumlah populasi individu yang terinfeksi (*infectives*) terhadap waktu dipengaruhi oleh laju kontak terhadap individu yang terinfeksi tiap waktu dengan perlambatan sebanyak jumlah populasi individu yang terinfeksi (*infectives*) serta jumlah populasi individu yang rentan terinfeksi (*Susceptible*) dan berkurangnya laju (*rate*) *host* yang telah terinfeksi (*host* penderita) menjadi sembuh (*removed*) sebanyak jumlah populasi individu yang terinfeksi (*infectives*), serta berkurangnya laju kematian sebanyak jumlah populasi individu yang terinfeksi (*infectives*).

$$3. \quad \frac{dR}{dt} = \gamma I(t) - \delta R(t)$$

Perubahan jumlah populasi individu yang sembuh dan menjadi kebal (*removed*) terhadap waktu dipengaruhi oleh laju (*rate*) *host* yang telah terinfeksi

(*host* penderita) menjadi sembuh (*removed*) sebanyak jumlah populasi individu yang terinfeksi (*Infected*), serta berkurangnya laju kematian sebanyak jumlah populasi individu yang sembuh dan menjadi kebal (*removed*).

Ketiga persamaan di atas dapat ditulis kembali sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \delta - \delta S(t) - \beta S(t)I(t - \tau) \\ \frac{dI}{dt} &= \beta S(t)I(t - \tau) - \gamma I(t) - \delta I(t) \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I(t) - \delta R(t)\end{aligned}\tag{3.1}$$

dimana δ, β, γ , dan τ adalah konstanta positif. Parameter model (3.1) adalah sebagai berikut:

$S(t)$ = Banyaknya individu yang rentan terserang penyakit pada waktu t

$I(t)$ = Banyaknya individu yang terinfeksi penyakit pada waktu t

$R(t)$ = Banyaknya individu yang telah sembuh dan menjadi kebal dari penyakit pada waktu t

δ = Laju kelahiran (bertanda positif)/laju kematian (bertanda negatif)

β = Laju penularan penyakit

γ = Laju kesembuhan

τ = Waktu perlambatan

3.2 Menentukan Titik Keseimbangan

Untuk menganalisis titik kestabilan maka perlu menentukan titik kesetimbangan. Secara analitik titik kesetimbangan dari persamaan (3.1) dengan asumsi $\tau = 0$, maka persamaannya menjadi:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \delta - \delta S(t) - \beta S(t)I(t) \\ \frac{dI}{dt} &= \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) - \delta I(t) \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I(t) - \delta R(t)\end{aligned}\tag{3.2}$$

Dalam keadaan setimbang, $\frac{dS(t)}{dt} = 0$, $\frac{dI(t)}{dt} = 0$, dan $\frac{dR(t)}{dt} = 0$ sehingga persamaan

(3.2) ditulis

$$\begin{aligned}0 &= \delta - \delta S(t) - \beta S(t)I(t) \\ 0 &= \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) - \delta I(t) \\ 0 &= \gamma I(t) - \delta R(t)\end{aligned}\tag{3.3}$$

Untuk titik kesetimbangan bebas penyakit (E_1) diasumsikan tidak ada individu yang terinfeksi pada saat t , sehingga $I(t) = 0$, maka dapat diperoleh nilai $S(t)$ dan $R(t)$. Langkah-langkahnya adalah sebagai berikut:

Pertama, mensubstitusikan $I(t) = 0$ ke persamaan pertama dari persamaan (3.3)

$$\begin{aligned}\delta - \delta S(t) - \beta S(t)0 &= 0 \\ \delta &= \delta S(t)\end{aligned}$$

$$S(t) = \frac{\delta}{\delta}$$

$$S(t) = 1$$

$$I(t) = 0 \rightarrow S(t) = 1$$

Kedua, mensubstitusi $I(t) = 0$ ke persamaan ketiga dari persamaan (3.3)

$$\gamma I(t) - \delta R(t) = 0$$

$$\gamma 0 = \delta R(t)$$

$$R(t) = 0$$

$$I(t) = 0 \rightarrow R(t) = 0$$

Sehingga diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit, $E_1 = (1,0,0)$

Untuk menentukan titik kesetimbangan endemik diasumsikan terdapat individu yang terinfeksi penyakit sehingga $I(t) \neq 0$.

Karena $I(t) \neq 0$ maka persamaan (3.3) menjadi

$$0 = \delta - \delta S(t) - \beta S(t)I(t) \Leftrightarrow \beta S(t)I(t) = \delta - \delta S(t) \quad (3.4a)$$

$$0 = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) - \delta I(t) \Leftrightarrow \beta S(t)I(t) = \gamma I(t) + \delta I(t) \quad (3.4b)$$

$$0 = \gamma I(t) - \delta R(t) \Leftrightarrow \delta R(t) = \gamma I(t) \quad (3.4c)$$

Dari persamaan (3.4b) maka diperoleh $S^*(t)$:

$$\beta S(t)I(t) = \gamma I(t) + \delta I(t)$$

$$\beta S(t)I(t) = (\gamma + \delta)I(t)$$

$$S(t) = \frac{(\gamma + \delta)I(t)}{\beta I(t)}$$

$$S^*(t) = \frac{(\gamma + \delta)}{\beta} \quad (3.5)$$

Selanjutnya dari persamaan (3.4a) dan (3.4b) maka diperoleh $I^*(t)$:

$$\delta - \delta S(t) = \gamma I(t) + \delta I(t)$$

$$\delta - \delta S(t) = (\gamma + \delta)I(t) \quad (3.6)$$

Dengan mensubstitusikan $S^*(t)$ ke persamaan (3.6) maka diperoleh

$$\delta - \delta \left(\frac{(\gamma + \delta)}{\beta} \right) = (\gamma + \delta)I^*(t)$$

$$\frac{\delta}{(\gamma + \delta)} - \frac{\delta}{\gamma + \delta} \left(\frac{(\gamma + \delta)}{\beta} \right) = I^*(t)$$

$$\frac{\delta}{(\gamma + \delta)} - \frac{\delta}{\beta} = I^*(t)$$

Kedua ruas dikalikan dengan β , menjadi

$$\frac{\delta\beta}{(\gamma + \delta)} - \delta = I^*(t)\beta$$

Jika didefinisikan $\frac{\beta}{(\gamma+\delta)} = R_0$ sehingga

$$\delta R_0 - \delta = I^*(t)\beta$$

$$\delta(R_0 - 1) = I^*(t)\beta$$

$$I^*(t) = \frac{\delta(R_0-1)}{\beta} \quad (3.7)$$

Selanjutnya dapat menentukan R^* dengan persamaan (3.4c)

$$\delta R(t) = \gamma I(t)$$

$$R(t) = \frac{\gamma I(t)}{\delta} \quad (3.8)$$

Mensubstitusikan $I^*(t)$ ke persamaan (3.8) menjadi

$$R^*(t) = \frac{\gamma \left(\frac{\delta(R_0 - 1)}{\beta} \right)}{\delta}$$

$$R^*(t) = \frac{\gamma \delta (R_0 - 1)}{\delta \beta}$$

$$R^*(t) = \frac{\gamma(R_0-1)}{\beta} \quad (3.9)$$

Ketika $\tau = 0$ dan $R_0 > 1$ diperoleh titik kesetimbangan endemik dari sistem

$$(3.2), E^* = (S^*, I^*, R^*) \text{ dengan } S^* = \frac{(\gamma+\delta)}{\beta}, I^* = \frac{\delta(R_0-1)}{\beta}, R^* = \frac{\gamma(R_0-1)}{\beta}.$$

3.3 Linierisasi dan Persamaan Karakteristik

Pada bagian sebelumnya telah diketahui tentang titik kesetimbangan bebas penyakit $E_1 = (1, 0)$ dan titik kesetimbangan endemik $E^* = (S^*, I^*)$. Dalam skripsi ini hanya dibahas titik kesetimbangan endemik, karena titik kesetimbangan bebas penyakit (1,0) menunjukkan bahwa adanya kepunahan penyakit dari populasi. Pembahasan titik kesetimbangan endemik $E^* = (S^*, I^*)$ dilakukan dengan menganalisis kestabilan melalui linierisasi titik kesetimbangan (S^*, I^*) .

Linierisasi yaitu proses melinierkan suatu persamaan diferensial tak linier menjadi persamaan diferensial linier. Linierisasi ini menggunakan deret Taylor disekitar titik kesetimbangan (S^*, I^*) , sehingga didapatkan persamaan karakteristiknya.

Didefinisikan fungsi untuk masing-masing persamaan dari sistem persamaan model SIR, yaitu

$$\begin{aligned}\frac{dS(t)}{dt} &= \delta - \delta S(t) - \beta S(t)I(t - \tau) && \equiv F(S, I) \\ \frac{dI(t)}{dt} &= \beta S(t)I(t - \tau) - (\gamma + \delta)I(t) && \equiv G(S, I)\end{aligned}\tag{3.10}$$

Deret Taylor dari persamaan (3.10) dengan menghilangkan suku tak liniernya adalah sebaga berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dS(t)}{dt} &= F(S^*, I^*) + \frac{\partial F}{\partial S}(S^*, I^*)(S(t) - S^*) + \frac{\partial F}{\partial I}(S^*, I^*)(I(t) - I^*) \\ \frac{dI(t)}{dt} &= G(S^*, I^*) + \frac{\partial G}{\partial S}(S^*, I^*)(S(t) - S^*) + \frac{\partial G}{\partial I}(S^*, I^*)(I(t) - I^*)\end{aligned}\tag{3.11}$$

Didefinisikan

$$\begin{aligned}x(t) &= S(t) - S^* && y(t) = I(t) - I^* \\ x_\tau(t) &= S(t - \tau) - S^* && y_\tau(t) = I(t - \tau) - I^*\end{aligned}$$

Dimana $x(t), y(t)$ adalah deviasi nilai titik kesetimbangan. Begitu pula dengan $x_\tau(t), y_\tau(t)$ adalah deviasi nilai titik kesetimbangan dengan adanya perlambatan.

Dengan menggunakan $\frac{dS(t)}{dt} = \frac{d(S(t) - S^*)}{dt}$ dan $\frac{dI(t)}{dt} = \frac{d(I(t) - I^*)}{dt}$, maka persamaan

(3.11) dapat ditulis dalam bentuk sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{d(S(t) - S^*)}{dt} &= F(S^*, I^*) + \frac{\partial F}{\partial S}(S^*, I^*)(S(t) - S^*) + \frac{\partial F}{\partial I}(S^*, I^*)(I(t) - I^*) \\ \frac{d(I(t) - I^*)}{dt} &= G(S^*, I^*) + \frac{\partial G}{\partial S}(S^*, I^*)(S(t) - S^*) + \frac{\partial G}{\partial I}(S^*, I^*)(I(t) - I^*)\end{aligned}\quad (3.12)$$

Oleh karena $x(t) = S(t) - S^*$, $y(t) = I(t) - I^*$ dan pada keadaan setimbang $F(S^*, I^*) = G(S^*, I^*) = 0$, maka diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial S}(S^*, I^*)x(t) + \frac{\partial F}{\partial I}(S^*, I^*)y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} &= \frac{\partial G}{\partial S}(S^*, I^*)x(t) + \frac{\partial G}{\partial I}(S^*, I^*)y(t)\end{aligned}\quad (3.13)$$

Persamaan (3.13) merupakan persamaan yang terlinierisasi. Kemudian, mensubstitusi fungsi $F(S, I)$ dan $G(S, I)$ ke persamaan (3.13), maka diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial S}(S^*, I^*)x(t) + \frac{\partial F}{\partial I}(S^*, I^*)y(t) \\ &= \frac{\partial(\delta - \delta S(t) - \beta S(t)I(t - \tau))}{\partial S} x(t) + \\ &\quad \frac{\partial(\delta - \delta S(t) - \beta S(t)I(t - \tau))}{\partial I} y(t) \\ &= (-\delta - \beta I^*)x(t) - (\beta S^*) y_\tau(t)\end{aligned}\quad (3.14)$$

$$\begin{aligned}\frac{dy(t)}{dt} &= \frac{\partial G}{\partial S}(S^*, I^*)x(t) + \frac{\partial G}{\partial I}(S^*, I^*)y(t) \\ &= \frac{\partial(\beta S(t)I(t - \tau) - (\gamma + \delta)I(t))}{\partial S} x(t) + \\ &\quad \frac{\partial(\beta S(t)I(t - \tau) - (\gamma + \delta)I(t))}{\partial I} y(t) \\ &= (\beta I^*) x(t) + (\beta S^*) y_\tau(t) - (\gamma + \delta)y(t)\end{aligned}\quad (3.15)$$

Persamaan (3.14) dan (3.15) merupakan persamaan yang sudah dilinierkan dan dapat ditulis kembali sebagai

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= (-\delta - \beta I^*)x(t) - (\beta S^*) y_\tau(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} &= (\beta I^*) x(t) + (\beta S^*) y_\tau(t) - (\gamma + \delta)y(t)\end{aligned}\quad (3.16)$$

untuk mendapatkan persamaan karakteristik, maka persamaan (3.16) dapat ditulis dalam bentuk matriks

$$\begin{bmatrix} \frac{dx(t)}{dt} \\ \frac{dy(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\delta - \beta I^* & 0 \\ \beta I^* & -(\gamma + \delta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\beta S^* \\ 0 & \beta S^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_\tau(t) \\ y_\tau(t) \end{bmatrix}\quad (3.17)$$

Misalkan $M_0 = \begin{bmatrix} -\delta - \beta I^* & 0 \\ \beta I^* & -(\gamma + \delta) \end{bmatrix}$, $M_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\beta S^* \\ 0 & \beta S^* \end{bmatrix}$, maka matriks (3.17)

dapat ditulis dengan

$$\begin{bmatrix} \frac{dx(t)}{dt} \\ \frac{dy(t)}{dt} \end{bmatrix} = M_0 \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + M_1 \begin{bmatrix} x_\tau(t) \\ y_\tau(t) \end{bmatrix}\quad (3.18)$$

Misalkan solusi dari persamaan (3.18) berbentuk $x(t) = c_1 e^{\lambda t}$ dan $y(t) = c_2 e^{\lambda t}$, dengan c_1 dan c_2 adalah konstanta. Kemudian $x(t) = c_1 e^{\lambda t}$ dan $y(t) = c_2 e^{\lambda t}$ disubstitusikan ke persamaan (3.18), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \frac{d(c_1 e^{\lambda t})}{dt} \\ \frac{d(c_2 e^{\lambda t})}{dt} \end{bmatrix} &= M_0 \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda t} \\ c_2 e^{\lambda t} \end{bmatrix} + M_1 \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda t} e^{-\lambda \tau} \\ c_2 e^{\lambda t} e^{-\lambda \tau} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \lambda c_1 e^{\lambda t} \\ \lambda c_2 e^{\lambda t} \end{bmatrix} &= M_0 \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda t} \\ c_2 e^{\lambda t} \end{bmatrix} + M_1 \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda t} e^{-\lambda \tau} \\ c_2 e^{\lambda t} e^{-\lambda \tau} \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (3.19)$$

$$\lambda \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = M_0 \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + M_1 e^{-\lambda \tau} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$$(\lambda I - M_0 - M_1 e^{-\lambda\tau}) \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Misalkan matriks $M = (\lambda I - M_0 - M_1 e^{-\lambda\tau})$ maka diperoleh

$$M \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Jika

$$|M| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

Maka M mempunyai invers, yaitu M^{-1} , sehingga apabila kedua ruas dikalikan dengan invers M^{-1} maka (3.20) diperoleh

$$M^{-1}M \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = M^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

akibatnya

$$I \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

atau dapat ditulis

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jadi $x(t) = y(t) = 0$. Namun solusi yang diinginkan adalah solusi yang tak nol atau non-trivial. Dengan demikian, untuk mendapatkan $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, maka determinan matriks M harus nol atau dapat ditulis

$$|M| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$$

Berdasarkan pendefinisian matriks M maka diperoleh

$$\begin{aligned} & |(\lambda I - M_0 - M_1 e^{-\lambda\tau})| = 0 \\ & \left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\delta - \beta I^* & 0 \\ \beta I^* & -(\gamma + \delta) \end{bmatrix} - e^{-\lambda\tau} \begin{bmatrix} 0 & -\beta S^* \\ 0 & \beta S^* \end{bmatrix} \right| = 0 \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{vmatrix} \lambda + \delta + \beta I^* & \beta S^* e^{-\lambda\tau} \\ -\beta I^* & \lambda + (\gamma + \delta) - \beta S^* e^{-\lambda\tau} \end{vmatrix} = 0 \quad (3.22)$$

Persamaan (3.22) merupakan persamaan karakteristik dari sistem (3.10) dan dapat ditulis dalam bentuk

$$(\lambda + \delta + \beta I^*)(\lambda + (\gamma + \delta) - \beta S^* e^{-\lambda\tau}) - (-\beta I^*)(\beta S^* e^{-\lambda\tau}) = 0 \quad (3.23)$$

3.4 Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan

Kestabilan titik keseimbangan endemik (S^*, I^*) bergantung pada nilai τ , sehingga terdapat dua kasus yang terjadi dalam analisis kestabilan dari sistem persamaan (3.10).

a) Analisis Kestabilan dari Titik Keseimbangan Bebas Penyakit

Dari sistem persamaan (3.10) maka persamaan karakteristik adalah persamaan (3.22) dan dalam keadaan keseimbangan bebas penyakit $E_1 = (1,0)$.

Teorema 3.1 Untuk sistem (3.10) titik kesetimbangannya $E_1 = (1,0)$

- i) Stabil asimtotik jika $R_0 < 1$
- ii) Stabil jika $R_0 = 1$
- iii) Tidak stabil jika $R_0 > 1$

Bukti

Persamaan karakteristik pada $E_1 = (1,0)$ adalah

$$\begin{vmatrix} \lambda + \delta & \beta e^{-\lambda\tau} \\ 0 & \lambda + (\gamma + \delta) - \beta e^{-\lambda\tau} \end{vmatrix} = 0, \text{ maka}$$

$$(\lambda + \delta)(\lambda + (\gamma + \delta) - \beta e^{-\lambda\tau}) = 0$$

Sesuai dengan definisi bahwa $R_0 = \frac{\beta}{(\gamma + \delta)} \leftrightarrow \beta = R_0(\gamma + \delta)$, sehingga

$$(\lambda + \delta)(\lambda + (\gamma + \delta) - R_0(\gamma + \delta)e^{-\lambda\tau}) = 0$$

$$(\lambda + \delta)(\lambda + (\gamma + \delta)(1 - R_0 e^{-\lambda\tau}) = 0 \quad (3.24)$$

Dari persamaan (3.24) mempunyai bagian akar karakteristik riil negatif $\lambda = -\delta$

$$\text{dan akar dari } \lambda + (\gamma + \delta)(1 - R_0 e^{-\lambda\tau}) = 0 \quad (3.25)$$

- i) Diasumsikan bahwa $R_0 < 1$, persamaan (3.25) mempunyai akar karakteristik $\lambda = -(\gamma + \delta)(1 - R_0) < 0$ ketika $\tau = 0$. Jika $\lambda = i\omega$ dan diasumsikan $\omega > 0$ maka akar karakteristik dari (3.24) ketika $\tau = 0$ harus memenuhi $\omega^2 = -(\gamma + \delta)^2(1 - R_0)^2$ (3.26)

Ketika $R_0 < 1$ tidak ada akar karakteristik riil positif dari λ . Hal ini menunjukkan bahwa semua akar dari (3.24) mempunyai bagian riil negatif, sehingga E_1 stabil asimtotik.

- ii) Diasumsikan bahwa $R_0 = 1$, maka $\lambda = 0$ adalah akar dari (3.24), sehingga E_1 stabil.
- iii) Diasumsikan bahwa $R_0 > 1$, maka persamaan (3.24) ketika $\tau = 0$ mempunyai paling sedikit satu akar karakteristik positif riil $\lambda = -(\gamma + \delta)(1 - R_0) > 0$. Sehingga $E_1 = (1,0)$ tidak stabil.

Ketika $S = 1, I = 0$ dan $R = 0$, maka diperoleh kesetimbangan bebas penyakit dari sistem (3.1). Menurut teorema 3.1 jika $R_0 \leq 1$ terjadi kesetimbangan bebas penyakit pada model SIR dengan perlambatan, $E_1 = (1,0,0)$ yaitu stabil asimtotik secara global, (GAS).

b) Analisis Kestabilan dari Titik Kesetimbangan Endemik

Dari sistem persamaan (3.10) maka persamaan karakteristik adalah persamaan (3.22) dan dalam keadaan kesetimbangan endemik

$E_+ = \left(\frac{(\gamma + \delta)}{\beta}, \frac{\delta(R_0 - 1)}{\beta} \right)$, maka E_+ disubstitusi ke persamaan karakteristik menjadi:

$$\begin{vmatrix} \lambda + \delta + \beta I^* & \beta S^* e^{-\lambda\tau} \\ -\beta I^* & \lambda + (\gamma + \delta) - \beta S^* e^{-\lambda\tau} \end{vmatrix} = 0 \quad (3.27)$$

$$(\lambda + \delta + \beta I^*)(\lambda + (\gamma + \delta) - \beta S^* e^{-\lambda\tau}) - (-\beta I^*)(\beta S^* e^{-\lambda\tau}) = 0$$

$$\left(\lambda + \delta + \beta \left(\frac{\delta(R_0 - 1)}{\beta} \right) \right) \left(\lambda + (\gamma + \delta) - \beta \left(\frac{\gamma + \delta}{\beta} \right) e^{-\lambda\tau} \right) -$$

$$\left(-\beta \left(\frac{\delta(R_0 - 1)}{\beta} \right) \right) \left(\beta \left(\frac{\gamma + \delta}{\beta} \right) e^{-\lambda\tau} \right) = 0$$

$$(\lambda + \delta + \delta(R_0 - 1))(\lambda + (\gamma + \delta) - (\gamma + \delta)e^{-\lambda\tau}) -$$

$$(-\delta(R_0 - 1))((\gamma + \delta)e^{-\lambda\tau}) = 0$$

$$(\lambda + \delta R_0)(\lambda + (\gamma + \delta) - (\gamma + \delta)e^{-\lambda\tau}) - (-\delta(R_0 - 1))((\gamma + \delta)e^{-\lambda\tau}) = 0$$

$$\lambda^2 + \lambda(\gamma + \delta) - \lambda((\gamma + \delta)e^{-\lambda\tau}) + \lambda\delta R_0 + \delta R_0(\gamma + \delta) - \delta R_0(\gamma + \delta)e^{-\lambda\tau} +$$

$$\delta R_0(\gamma + \delta)e^{-\lambda\tau} - \delta(\gamma + \delta)e^{-\lambda\tau} = 0$$

$$\lambda^2 + \lambda(\gamma + \delta) - \lambda((\gamma + \delta)e^{-\lambda\tau}) + \lambda\delta R_0 + \delta R_0(\gamma + \delta) - \delta(\gamma + \delta)e^{-\lambda\tau} = 0$$

$$\lambda^2 + \lambda(\delta R_0 + (\gamma + \delta)) + \delta R_0(\gamma + \delta) - (\lambda((\gamma + \delta) + \delta(\gamma + \delta))e^{-\lambda\tau}) = 0$$

(3.28)

Misalkan $P = \lambda^2 + \lambda(\delta R_0 + (\gamma + \delta)) + \delta R_0(\gamma + \delta)$

$$Q = -(\lambda((\gamma + \delta) + \delta(\gamma + \delta)))$$

$$\Delta(\lambda, \tau) = P(\lambda, \tau) + Q(\lambda, \tau)e^{-\lambda\tau} = 0 \quad (3.29)$$

Diasumsikan bahwa $\tau = 0$, maka persamaan (3.29) menjadi

$$\Delta(\lambda, \tau) = P(\lambda, \tau) + Q(\lambda, \tau)e^{-\lambda\tau} = 0$$

$$\Delta(\lambda, 0) = P(\lambda, \tau) + Q(\lambda, \tau)e^{-\lambda 0} = 0$$

$$= P(\lambda, \tau) + Q(\lambda, \tau) = 0$$

$$= \lambda^2 + \lambda(\delta R_0 + (\gamma + \delta)) + \delta R_0(\gamma + \delta) - (\lambda(\gamma + \delta) + \delta(\gamma + \delta)) = 0$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda^2 + \lambda \delta R_0 + \lambda(\gamma + \delta) + \delta R_0(\gamma + \delta) - \lambda(\gamma + \delta) - \delta(\gamma + \delta) = 0 \\
&= \lambda^2 + \lambda \delta R_0 + \delta R_0(\gamma + \delta) - \delta(\gamma + \delta) = 0 \\
&= \lambda^2 + \lambda \delta R_0 + \delta(\gamma + \delta)(R_0 - 1) = 0 \tag{3.30}
\end{aligned}$$

Ketika didefinisikan $p = \delta R_0$ dan $q = \delta(\gamma + \delta)(R_0 - 1)$, maka jika $p > 0$ dan $R_0 > 0$ maka dalam keadaan kesetimbangan endemik harus memenuhi $R_0 > 1$. Dan jika $p > 0$ dengan kondisi di atas maka harus memenuhi $R_0 > 1$ yang berimplikasi $q > 0$. Ketika $p > 0$ dan $q > 0$ maka akar dari (3.30) riil negatif atau kompleks dengan bagian riil negatif dan tidak ada nilai eigen yang mempunyai bagian riil nol. Jadi E_+ stabil asimtotik karena telah diketahui bahwa E_1 setimbang secara global. Sehingga kesetimbangan endemik E_+ adalah stabil secara lokal.

Jika $R_0 < 0$ maka kesetimbangan endemik dari (3.30) tidak stabil, karena dalam faktanya kesetimbangan endemik harus memenuhi $R_0 > 1$ sehingga kondisi stabil dari E_+ dari (3.30) dan memenuhi semua asumsi di atas maka terjadi kestabilan lokal asimtotik, LAS.

Sekarang ketika $\tau \neq 0$ ($\tau > 0$), dan jika $\lambda = i\omega$ ($\omega > 0$) maka persamaan (3.29) menjadi

$$\begin{aligned}
\Delta(\lambda, \tau) &= P(\lambda, \tau) + Q(\lambda, \tau)e^{-\lambda\tau} = 0 \\
\Delta(i\omega, \tau) &= P(i\omega, \tau) + Q(i\omega, \tau)e^{-i\omega\tau} = 0 \\
&\Leftrightarrow P(i\omega, \tau) + Q \cos(\omega\tau) + iQ \sin(\omega\tau) = 0 \\
&\Leftrightarrow (i\omega)^2 + i\omega(\delta R_0 + (\gamma + \delta)) + \delta R_0(\gamma + \delta) = i\omega((\gamma + \delta) + \delta(\gamma + \delta)) \cos(\omega\tau) + i(i\omega((\gamma + \delta) + \delta(\gamma + \delta))) \sin(\omega\tau) = 0 \\
&\Leftrightarrow -\omega^2 + i\omega\delta R_0 + i\omega(\gamma + \delta) + \delta R_0(\gamma + \delta) = i\omega(\gamma + \delta) \cos(\omega\tau) + \delta(\gamma + \delta) \cos(\omega\tau) - \omega(\gamma + \delta) \sin(\omega\tau) + i\delta(\gamma + \delta) \sin(\omega\tau) = 0
\end{aligned}$$

Kemudian dengan memisahkan bagian riil dan imajiner maka didapat dua persamaan yaitu,

$$\begin{aligned} -\omega^2 + \delta R_0(\gamma + \delta) &= \delta(\gamma + \delta) \cos(\omega\tau) - \omega(\gamma + \delta) \sin(\omega\tau) \\ \omega(\delta R_0 + (\gamma + \delta)) &= \omega(\gamma + \delta) \cos(\omega\tau) + \delta(\gamma + \delta) \sin(\omega\tau) \end{aligned} \quad (3.31)$$

Dari kedua persamaan di atas maka keduanya dikuadratkan menjadi

$$\begin{aligned} \omega^4 + \delta^2 R_0^2 (\gamma + \delta)^2 &= \delta^2 (\gamma + \delta)^2 \cos^2(\omega\tau) + \omega^2 (\gamma + \delta)^2 \sin^2(\omega\tau) \\ \omega^2 \delta^2 R_0^2 + \omega^2 (\gamma + \delta)^2 &= \omega^2 (\gamma + \delta)^2 \cos^2(\omega\tau) + \delta^2 (\gamma + \delta)^2 \sin^2(\omega\tau) \end{aligned} \quad (3.32)$$

Setelah dikuadratkan kemudian persamaan (3.32) dijumlahkan menjadi

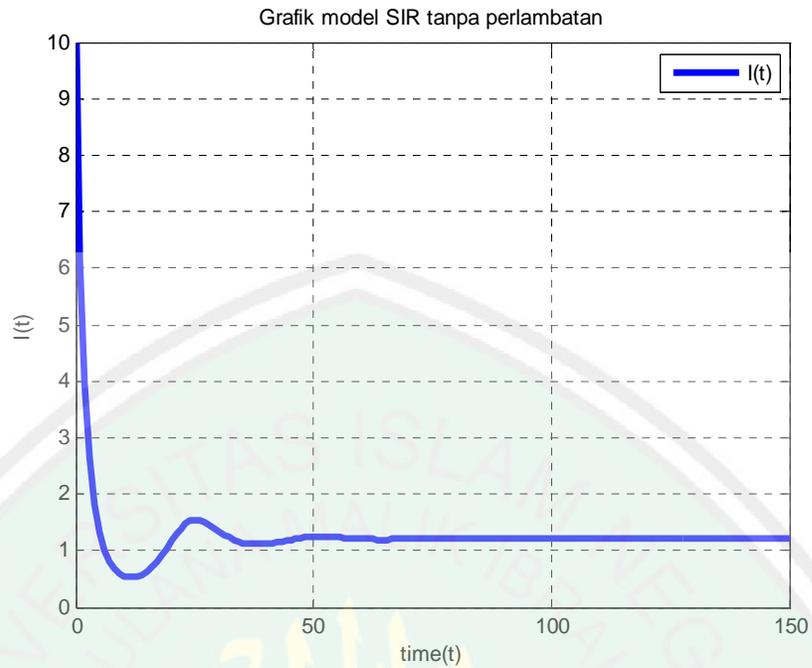
$$\begin{aligned} \omega^4 + \delta^2 R_0^2 (\gamma + \delta)^2 + \omega^2 \delta^2 R_0^2 + \omega^2 (\gamma + \delta)^2 & \\ &= \delta^2 (\gamma + \delta)^2 \cos^2(\omega\tau) + \omega^2 (\gamma + \delta)^2 \sin^2(\omega\tau) \\ &+ \omega^2 (\gamma + \delta)^2 \cos^2(\omega\tau) + \delta^2 (\gamma + \delta)^2 \sin^2(\omega\tau) \\ \omega^4 + \delta^2 R_0^2 (\gamma + \delta)^2 + \omega^2 \delta^2 R_0^2 + \omega^2 (\gamma + \delta)^2 &= \delta^2 (\gamma + \delta)^2 + \omega^2 (\gamma + \delta)^2 \\ \omega^4 + \delta^2 R_0^2 (\gamma + \delta)^2 + \omega^2 \delta^2 R_0^2 &= \delta^2 (\gamma + \delta)^2 \\ \omega^4 + \delta^2 R_0^2 (\gamma + \delta)^2 + \omega^2 \delta^2 R_0^2 - \delta^2 (\gamma + \delta)^2 &= 0 \\ \omega^4 + \omega^2 \delta^2 R_0^2 + \delta^2 (\gamma + \delta)^2 (R_0^2 - 1) &= 0 \end{aligned} \quad (3.33)$$

Didefinisikan $u = \delta^2 R_0^2$ dan $v = \delta^2 (\gamma + \delta)^2 (R_0^2 - 1)$. Nilai dari u selalu positif dan jika $v > 0$ maka $R_0 > 1$ atau $R_0 < -1$, tetapi dilihat dari asumsi biologi pada model ini untuk kesetimbangan endemik maka $R_0 > 1$. Jika kondisi ini terjadi, maka tidak ada ω riil positif yang memenuhi (3.33) karena nilai akar dari persamaan (3.33) (ω^2) adalah negatif.

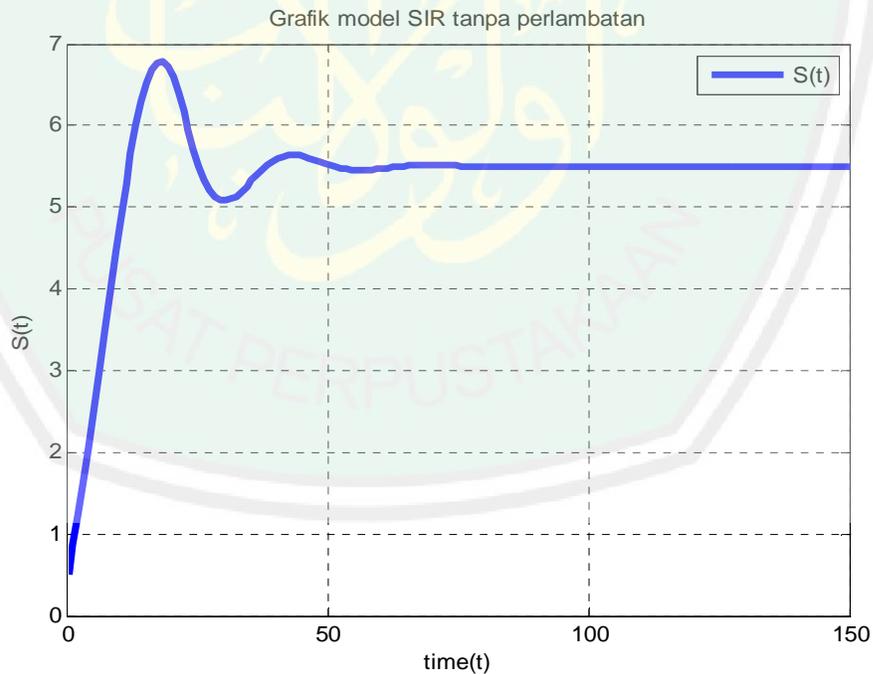
3.5 Analisis Dinamik untuk Kestabilan dari Model SIR dengan Perlambatan

Waktu

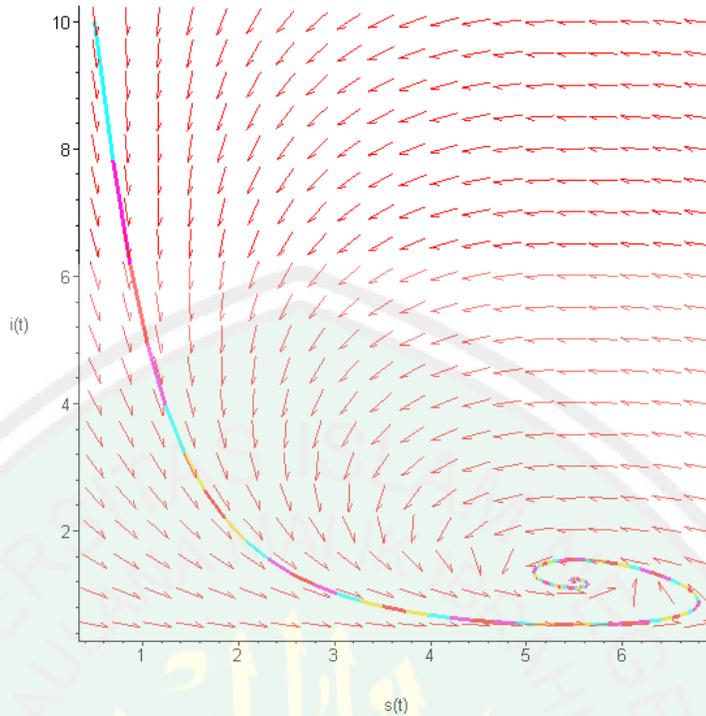
Ketika model (3.1) dimasukkan data simulasi, maka didapatkan beberapa grafik dari hasil simulasi sebagai berikut (Kadar, 2010):



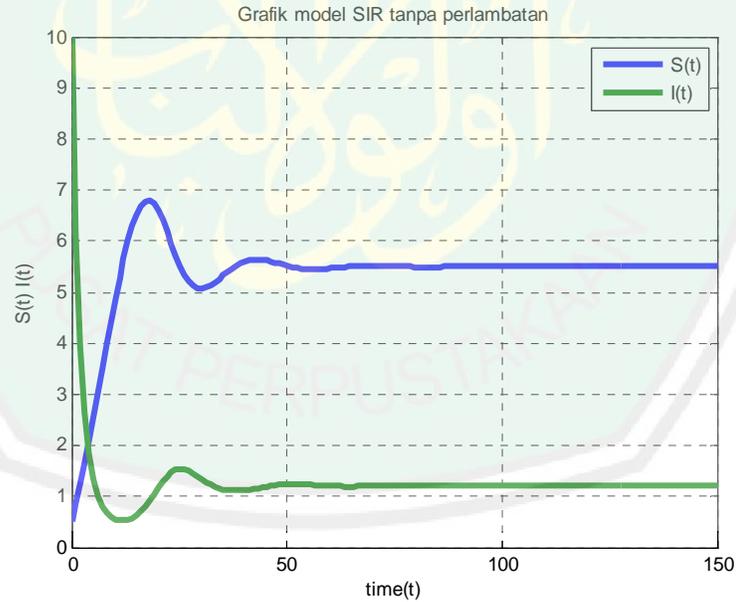
Gambar 3.1 Grafik Model SIR pada *Infected* $I(t)$ dari Persamaan (3.10). Parameter yang Digunakan $\delta = 0.94$, $\delta_1 = 0.05$, $\beta = 0.1$, dan $\gamma = 0.5$ dengan Syarat Awal $S(0) = 0.5$, $I(0) = 10$ Selama 150 Hari Tanpa Waktu Perlambatan



Gambar 3.2 Grafik Model SIR pada *Susceptible* $S(t)$ dari Persamaan (3.10). Parameter yang Digunakan $\delta = 0.94$, $\delta_1 = 0.05$, $\beta = 0.1$, dan $\gamma = 0.5$ dengan Syarat Awal $S(0) = 0.5$, $I(0) = 10$ Selama 150 Hari Tanpa Waktu Perlambatan



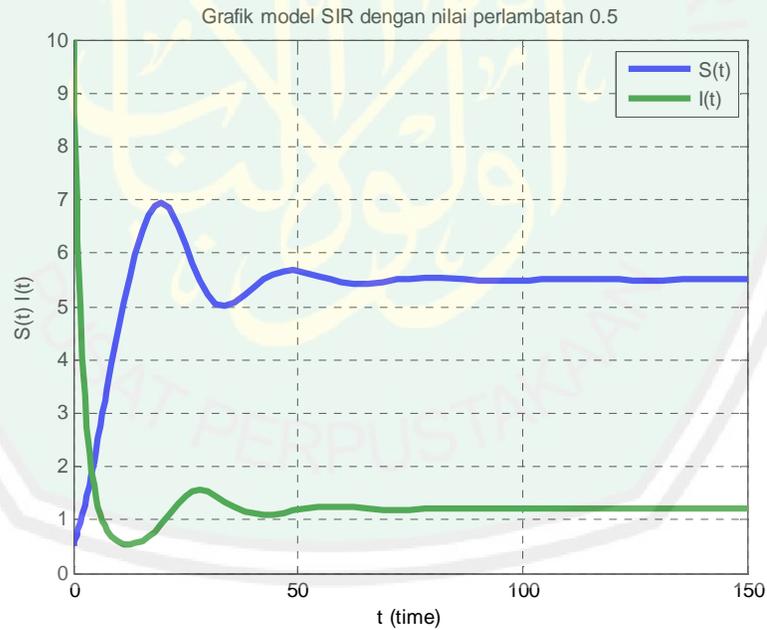
Gambar 3.3 Phase Portrait dari Model SIR $S(t)$ terhadap $I(t)$. Parameter yang Digunakan $\delta = 0.94$, $\delta_1 = 0.05$, $\beta = 0.1$, dan $\gamma = 0.5$ dengan Syarat Awal $S(0) = 0.5$, $I(0) = 10$ Selama 150 Hari Tanpa Waktu Perlambatan



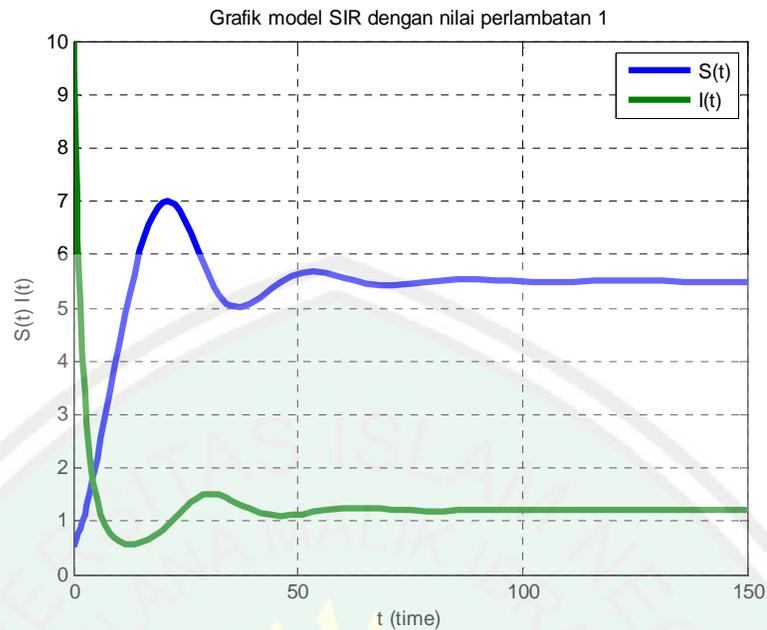
Gambar 3.4 Grafik Model SIR pada *Susceptible* $S(t)$ dan *Infected* $I(t)$ dari Persamaan (3.10). Parameter yang Digunakan $\delta = 0.94$, $\delta_1 = 0.05$, $\beta = 0.1$, dan $\gamma = 0.5$ dengan Syarat Awal $S(0) = 0.5$, $I(0) = 10$ Selama 150 Hari Tanpa Waktu Perlambatan



Gambar 3.5 Grafik Model SIR pada *Susceptible* $S(t)$ dan *Infected* $I(t)$ dari Persamaan (3.10). Parameter yang Digunakan $\delta = 0.94$, $\delta_1 = 0.05$, $\beta = 0.1$, dan $\gamma = 0.5$ dengan Syarat Awal $S(0) = 0.5, I(0) = 10$ Selama 150 dengan $\tau = 0.01$



Gambar 3.6 Grafik Model SIR pada *Susceptible* $S(t)$ dan *Infected* $I(t)$ dari Persamaan (3.10). Parameter yang Digunakan $\delta = 0.94$, $\delta_1 = 0.05$, $\beta = 0.1$, dan $\gamma = 0.5$ dengan Syarat Awal $S(0) = 0.5, I(0) = 10$ Selama 150 dengan $\tau = 0.5$



Gambar 3.7 Grafik Model SIR pada *Susceptible* $S(t)$ dan *Infected* $I(t)$ dari Persamaan (3.10). Parameter yang Digunakan $\delta = 0.94$, $\delta_1 = 0.05$, $\beta = 0.1$, dan $\gamma = 0.5$ dengan Syarat Awal $S(0) = 0.5$, $I(0) = 10$ Selama 150 dengan $\tau = 1$

Dengan nilai parameter dan syarat awal yang sama analisis pertama akan dibandingkan perilaku populasi *Susceptible* dan populasi *Infected* tanpa dan dengan perlambatan waktu. Diperoleh grafik $S(t)$, $I(t)$ dari model pertama (tanpa perlambatan) dan model kedua (dengan perlambatan) yang berturut turut dapat dilihat pada gambar 3.1 sampai 3.7.

Gambar 3.1 adalah grafik model SIR tanpa perlambatan dari populasi *Infected* dengan parameter yang digunakan $\delta = 0.94$, $\delta_1 = 0.05$, $\beta = 0.1$, dan $\gamma = 0.5$ dengan syarat awal $S(0) = 0.5$, $I(0) = 10$ selama 150. Pada grafik tersebut menunjukkan terjadi penurunan yang tajam pada hari ke 13 dan mulai merangkak naik pada hari ke 26, dan seterusnya mengalami gelombang beberapa kali hingga mencapai titik kesetimbangan yaitu pada titik 1,2 pada hari ke 68.

Gambar 3.2 adalah grafik model SIR tanpa perlambatan dari populasi *Susceptible* dengan parameter yang digunakan $\delta = 0.94$, $\delta_1 = 0.05$, $\beta = 0.1$, dan

$\gamma = 0.5$ dengan syarat awal $S(0) = 0.5, I(0) = 10$ selama 150. Pada grafik tersebut menunjukkan terjadi kenaikan yang tajam pada hari ke 19 dan mulai menurun pada hari ke 31, dan seterusnya mengalami gelombang beberapa kali hingga mencapai titik kesetimbangan yaitu pada titik 5,5 pada hari ke 91.

Gambar 3.3 adalah phase portrait dari populasi *Susceptible* terhadap populasi *Infected* dengan parameter yang digunakan $\delta = 0.94, \delta_1 = 0.05, \beta = 0.1$, dan $\gamma = 0.5$ dengan syarat awal $S(0) = 0.5, I(0) = 10$ selama 150. Phase portrait ini mempunyai tanda anak panah yang mengarah masuk ke dalam. Hal ini menandakan bahwa sistem persamaan diferensial dari persamaan (3.10) adalah stabil asimtotik, karena dalam sub bab 3.4 bagian a menyatakan bahwa ketika $\tau = 0$ dan $E_1 = (1,0)$ mempunyai nilai eigen yang semuanya bernilai negatif. Dalam hal ini sistem tersebut stabil pada titik (5,5, 1,2).

Gambar 3.4 merupakan gabungan dari gambar 3.1 dan gambar 3.2. Berdasarkan gambar 3.5 dapat dikatakan bahwa nilai perlambatan $\tau = 0.01$ memberikan pengaruh yang signifikan terhadap perilaku kedua populasi dibandingkan dengan model pertama tanpa perlambatan. Tanpa waktu perlambatan model SIR stabil titik kesetimbangannya pada hari ke 99 untuk populasi *Susceptible* dan hari ke 68 untuk populasi *Infected*. Dengan perlambatan $\tau = 0.01$, terlihat dari grafik sistem persamaan diferensial model SIR stabil pada titik kesetimbangan pada hari ke 117 untuk populasi *Susceptible* dan hari ke 70 untuk populasi *Infected*. Terdapat perbedaan tidak terlalu besar antara terdapat waktu perlambatan dengan tanpa waktu perlambatan. Dalam teorinya bahwa dengan adanya perlambatan yang cukup kecil cenderung akan menyamai keadaan

dimana keadaan tersebut tanpa waktu perlambatan. Sehingga dapat dikatakan bahwa pada perlambatan 0.01 ini cenderung stabil asimtotik.

Gambar 3.6 merupakan grafik Model SIR dengan perlambatan waktu 0.5. Dari gambar tersebut terlihat bahwa populasi mencapai kestabilan dalam waktu yang cukup lama yaitu pada hari ke 135 untuk populasi *Susceptible*. Hal ini terjadi karena adanya perlambatan waktu yang membesar. Untuk populasi *Infected* terjadi juga mengalami kenaikan waktu kestabilan yaitu dimulai pada hari ke 79.

Gambar 3.7 merupakan grafik dari model SIR dengan perlambatan waktu 1. Dari grafik ini dapat dilihat bahwa dengan perlambatan waktu 1 maka untuk populasi *Susceptible* mencapai kestabilan sekitar pada hari ke 135 dan untuk populasi *Infected* mencapai keadaan stabil naik dari hari ke 79 ke sekitar hari 87.

Dapat disimpulkan dari tujuh gambar diatas bahwa terdapat perbedaan perilaku masing-masing populasi terhadap waktu pada keadaan tanpa waktu perlambatan dan dimasukkannya waktu perlambatan yaitu 0.01, 0.5, dan 1. Semakin kecil waktu perlambatan, maka keadaan tersebut hampir sama dengan keadaan tanpa waktu perlambatan dalam mencapai keadaan stabil meskipun terdapat perbedaan waktu yang tidak terlalu besar. Sedangkan semakin besar waktu perlambatan mengakibatkan model SIR tersebut lama untuk mencapai keadaan stabil.

3.6 Model SIR dengan Perlambatan Waktu dalam Pandangan Islam

Islam merupakan agama sempurna yang tidak hanya mengatur hubungan manusia dengan Sang Khalik, namun juga memiliki aturan dan tuntunan yang jelas tentang banyak hal khususnya membahas masalah kesehatan.

Karena manusia menurut Islam bukanlah jasmaniah saja melainkan mencakup bagian lain yaitu jiwa. Sebagai contoh kalau melakukan shalat, puasa, zakat dan melakukan ibadah lainnya dengan khusuk dan penuh ikhlas maka akan membawa pengaruh positif terhadap emosi, sehingga menjadi tenang.

“Kesehatan merupakan salah satu hak bagi tubuh manusia” demikian sabda Nabi Muhammad SAW. Kesehatan merupakan hak asasi manusia, sesuatu yang sesuai dengan fitrah manusia, maka Islam menegaskan perlunya istiqomah memantapkan dirinya dengan menegakkan agama Islam. Satu-satunya jalan dengan melaksanakan perintah-perintah-Nya dan meninggalkan larangan-Nya sebagaimana terdapat dalam Al-Qur’an surat Yunus ayat 57:

يَأْتِيهَا النَّاسُ قَدْ جَاءَتْكُمْ مَوْعِظَةٌ مِّن رَّبِّكُمْ وَشِفَاءٌ لِّمَا فِي الصُّدُورِ وَهُدًى وَرَحْمَةٌ

لِّلْمُؤْمِنِينَ

Artinya: “Hai manusia, Sesungguhnya telah datang kepadamu pelajaran dari Tuhanmu dan penyembuh bagi penyakit-penyakit (yang berada) dalam dada dan petunjuk serta rahmat bagi orang-orang yang beriman”.

Sakit di sini bukan hanya disebabkan adanya penyakit fisik namun juga penyakit-penyakit yang menimpa akal dan hati. Penyakit fisik dapat menimbulkan kegelisahan dalam hati, karena semua manusia tentunya tidak ingin mengalami sakit. Jadi jikalau sakit hendaklah berobat karena Allah menurunkan sakit sekaligus menurunkan obatnya juga.

Sistem imun dalam tubuh manusia akan merespon suatu penyakit dalam tubuh. Sistem imun ini yang akan menentukan manusia berapa lama akan mengalami proses kesembuhan. Hal ini tergantung masa infeksi penyakit di

dalam tubuh seseorang. Jadi semakin lama waktu infeksi maka semakin lama pula waktu sembuhnya. Sebagaimana dalam Al-Qur'an surat An-Nissa' ayat 7:

وَإِنَّ مِنْكُمْ لَمَنْ لِيُبَطِّئَنَّ فَإِنْ أَصَابْتُمْ مُصِيبَةً قَالَ قَدْ أَنْعَمَ اللَّهُ عَلَيَّ إِذْ لَمْ أَكُنْ مَعَهُمْ شَهِيدًا



Artinya: "Dan Sesungguhnya di antara kamu ada orang yang sangat berlama-lama (ke medan pertempuran). Maka jika kamu ditimpa musibah ia berkata: "Sesungguhnya Tuhan Telah menganugerahkan nikmat kepada saya Karena saya tidak ikut berperang bersama mereka".

Sebagai umat Islam yang baik alangkah baiknya dapat menjaga kesehatan karena segala sesuatu yang menimpa seluruh umat manusia selain merupakan takdir juga hasil dari berusaha. Dan juga orang-orang yang beruntung adalah orang yang terbebas dari penyakit-penyakit tersebut, sebagaimana Allah berfirman:

يَوْمَ لَا يَنْفَعُ مَالٌ وَلَا بَنُونَ ﴿٨٨﴾ إِلَّا مَنْ أَتَى اللَّهَ بِقَلْبٍ سَلِيمٍ ﴿٨٩﴾

Artinya: "(yaitu) di hari (akhirat) harta dan anak-anak tidak berguna (tetapi yang berguna tiada lain), kecuali yang menghadap Allah dengan hati yang sehat" (QS. Asy-Syu'ara:88-89).

Untuk memiliki hati yang tenang dan sehat, maka harus banyak berdzikir mengingat Allah adalah tempat berkeluh kesah dan berharap. Orang yang jauh dan lupa dengan penciptanya hanya akan merasakan kebahagiaan semu, kegelisahan hati karena tidak mengetahui tujuan hidup yang sebenarnya. Oleh sebab itu, sudah seharusnya para umat manusia dapat mengoptimalkan fungsi ruhani dengan banyak mengingat Allah, sebagaimana dalam firmanNya:

الَّذِينَ ءَامَنُوا وَتَطْمَئِنُّ قُلُوبُهُمْ بِذِكْرِ اللَّهِ أَلَا بِذِكْرِ اللَّهِ تَطْمَئِنُّ الْقُلُوبُ ﴿٢٨﴾

Artinya: "(yaitu) orang-orang yang beriman dan hati mereka manjadi tenteram dengan mengingat Allah. Ingatlah, hanya dengan mengingati Allah-lah hati menjadi tenteram" (Q.S ar Rad'u:28).

Ketenangan dan ketentruman akan lahir jika para umat manusia percaya bahwa Allah adalah penguasa dan pengatur alam raya, dan segala sesuatu yang ada dalam genggamanNya.

Seringkali umat manusia lalai untuk menjaga kesehatan, tidak memikirkan singkatnya hidup di dunia ini. Hanya jika jatuh sakit saja berdoa kepada Allah, namun saat kembali sehat dan kembali kepada kehidupan sehari-hari sering melupakannya. Dalam Al-Quran, Allah menyinggung karakteristik manusia dalam surat Ar-Ruum ayat 33:

وَإِذَا مَسَّ النَّاسَ ضُرٌّ دَعَوْا رَبَّهُمْ مُنِيبِينَ إِلَيْهِ ثُمَّ إِذَا آذَاهُمْ مِنْهُ رَحْمَةٌ إِذَا فَرِيقٌ مِنْهُمْ بِرَبِّهِمْ

يُشْرِكُونَ ﴿٣٣﴾

Artinya: "Dan apabila manusia disentuh oleh suatu bahaya, mereka menyeru Tuhannya dengan kembali bertaubat kepada-Nya, kemudian apabila Tuhan merasakan kepada mereka barang sedikit rahmat daripada-Nya, tiba-tiba sebagian dari mereka mempersekutukan Tuhannya".

Oleh sebab itu, sudah seharusnya sebagai umat manusia dapat menghargai kesehatan sebagai suatu anugerah Allah dengan pola hidup yang baik dan produktif, jika Allah menghendaki tak satu pun penyakit menyerang dan tidak akan ada masalah di semua organ atau sistem tubuh manusia. Jelaslah bahwa ada satu pesan yang dikirimkan kepada umat manusia dalam segala sesuatu yang terjadi bahwa kehidupan di dunia ini bersifat sementara.

BAB IV PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan penelitian yang telah penulis lakukan, maka penulis dapat menarik kesimpulan tentang titik kesetimbangan dari model SIR dengan perlambatan waktu yaitu :

1. Titik kesetimbangan dari model SIR dengan asumsi $\tau = 0$ dan tidak ada populasi yang terinfeksi ($I(t) = 0$) maka titik kesetimbangan bebas penyakit adalah $E_1 = (S, I, R) = (1, 0, 0)$.
2. Titik kesetimbangan dari model SIR dengan asumsi $\tau = 0$ dan ada populasi yang terinfeksi ($I(t) \neq 0$) maka titik kesetimbangan endemik

$$E_+ = (S^*, I^*, R^*) = \left(\frac{(\gamma + \delta)}{\beta}, \frac{\delta(R_0 - 1)}{\beta}, \frac{\gamma(R_0 - 1)}{\beta} \right)$$

Selanjutnya analisis kestabilan dari titik kesetimbangan adalah sebagai berikut:

1. Kestabilan dari titik kesetimbangan bebas penyakit

Menurut toerema 3.1 $R_0 \leq 1$ terjadi kesetimbangan bebas penyakit pada model SIR dengan perlambatan $E_1 = (1, 0, 0)$ yaitu stabil asimtotik secara global, GAS.

2. Kestabilan dari titik kesetimbangan endemik

Ketika $\tau = 0$ dan $\tau \neq 0$ dan $R_0 > 1$ sehingga kondisi stabil dari E_+ dari (3.25) dan memenuhi semua asumsi di atas maka terjadi kestabilan asimtotik secara lokal, LAS.

Perilaku dinamik dari model SIR dengan perlambatan dan tanpa perlambatan menunjukkan perbedaan yang tidak terlalu besar tentang keadaan mencapai kestabilan pada saat diberikan waktu perlambatan 0.01. Dengan perlambatan yang semakin kecil, maka nilainya akan mendekati nilai tanpa perlambatan. Jika waktu perlambatan diperbesar, maka akan mencapai kesetimbangan dalam waktu yang cukup lama.

4.2 Saran

Untuk penelitian selanjutnya diharapkan pembaca dapat melakukan penelitian tentang model epidemik SIR non linier dengan perlambatan waktu ganda. Karena dalam skripsi ini hanya dibahas perlambatan waktu pada populasi terinfeksi.

DAFTAR PUSTAKA

- Abadiyah, Lilik Masluhatul. 2009. *Analisis Model Matematika ada pengaruh Sistem Imun Terhadap Infeksi Virus HIV*. Skripsi S1 Tidak Dipublikasikan Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi. Malang: UIN Maliki Malang.
- Abdussakir. 2007. *Ketika Kyai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Press.
- Aliyah, Ijazatul. 2007. *Analisis Model Matematika Pada Pengaruh Sistem Imun Terhadap Infeksi bakteri Tuberkulosis*. Skripsi S1 Tidak Dipublikasikan Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi. Malang: UIN Maliki Malang.
- Al-Maraghi, Musthofa Ahmad. 1971. *Tafsir Al Maraghi*. Beirut : Darul Fikri
- Anton, Howard. 2000. *Dasar-Dasar Aljabar Linier Edisi 7 Jilid 2*. Batam: Interaksara.
- Arisma, Y.H. 2010. *Kajian Model Epidemik SIR Deterministik dan Stokastik pada Waktu Diskrit*. Skripsi S1 Tidak Dipublikasikan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam. Bogor: Institut Pertanian Teknologi Sepuluh November.
- Aziz, Abdul. 2007. *Bumi Sholat Secara Matematis*. Malang: UIN Press.
- Baiduri. 2002. *Persamaan Diferensial dan Matematika Model*. Malang: UMM Press.
- Boyce, W. dan R.C. DiPrima. 1992. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. John Willey & Sons, Inc. New York.
- Dwi Lara, N.Y. 2009. *Dinamika Model Penyembuhan Sel Darah Putih Karena Adanya Virus HIV dengan Terapi Protease Inhibitor*. Skripsi S1 Tidak Dipublikasikan Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam. Bogor: Institut Pertanian Bogor.
- Edwards, C.H. dan D.E. Penney. 2001. *Differential Equation and Linear Algebra*. New Jersey: Prentice Hall Inc.
- Fitria, Vivi A. 2009. *Analisis Sistem Persamaan Diferensial Model Predator-Prey dengan Perlambatan*. Skripsi S1 Tidak Dipublikasikan Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi. Malang: UIN Maliki Malang.
- Giesecko, J. 1994. *Mathematical Models for Epidemics. Modern Infectious Disease Epidemiology*: 109-123.

- Imani, Allamah K. F. 2005. *Nurul Qur'an, Jilid VII*. Terjemahan Nafi' Z. dan Suratman. Jakarta: Al-Huda.
- Kadar, A. 2010. *Stability Analysis in A Delayed SIR Epidemic Model with A Saturated Incidence Rate*. Hal 303. Morocco: Universit'e Mohammed V – Souissi.
- Finizio, N dan Ladas, G. 1988. *Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern, Edisi kedua*. Terjemahan Widiarti Santoso. Jakarta: Erlangga.
- Neuhauser, Claudia. 2004. *Calculus for Biology and Medicine*. New Jersey: Pearson Education
- Pagalay, Usman. 2009. *Mathematical Modelling*. Malang: UIN Press.
- Riyanto, M. Zaki. 2008. *Model Matematika SIR (Susceptible, Infection, Recovery) Untuk Penyebaran Wabah Penyakit Suatu Populasi Tertutup*. Hal: 1-2. Yogyakarta: Universitas Gajah Mada.
- Riyanto, M. Zaki, dkk. 2007. *Model SIR Penyakit Tidak Fatal*. Yogyakarta: Jurusan Matematika FMIPA UGM.
- Ross, L. Shepley. 1984. *Differential Equation 3th*. New York: University of New Hampshire.
- Rubono, Setiawan. 2009. *Analisa Kestabilan Ekuilibrium Model Matematika Berbentuk Sistem Persamaan Diferensial Tundaan dengan Waktu Tundaan Diskrit*. Yogyakarta: Universitas Gajah Mada.
- _____. 2009. *Stability of Delayed SIR Model with Vital Dynamics*. hal: 471-478. Yogyakarta: Universitas Gajah Mada.
- Shihab, M. Quraish. 2007. *Tafsir AlMisbah*. Jakarta: Lentera Hati.
- Wahid, Abdul. 2007. *Pengendalian Proses*. Jakarta: Fakultas Teknik Universitas Indonesia.



LAMPPIRAN-LAMPPIRAN

Lampiran 1

Program Matlab Model SIR Tanpa Perlambatan

```

function [x,y]=runge_sir(x0,y0,ti,tf,N)
t = ti;
dt = (tf-ti)/N;
x = zeros(1,N);
y = zeros(1,N);
x(1) = x0;
y(1) = y0;
for k = 1:(N-1)
k11 = dt*dx(t,x(k),y(k));
k12 = dt*dy(t,x(k),y(k));
k21 = dt*dx(t+dt/2,x(k)+k11/2,y(k)+k12/2);
k22 = dt*dy(t+dt/2,x(k)+k11/2,y(k)+k12/2);
k31 = dt*dx(t+dt/2,x(k)+k21/2,y(k)+k22/2);
k32 = dt*dy(t+dt/2,x(k)+k21/2,y(k)+k22/2);
k41 = dt*dx(t+dt,x(k)+k31*dt,y(k)+k32*dt);
k42 = dt*dy(t+dt,x(k)+k31*dt,y(k)+k32*dt);

t = t+dt;
x(k+1) = x(k)+1/6*(k11+2*k21+2*k31+k41);
y(k+1) = y(k)+1/6*(k12+2*k22+2*k32+k42);
x'
y'

end
% =====
clc,clear
t0 = input('masukkan batas waktu awal t0 = ');
tfi = input('masukkan batas akhir waktu tfi = ');
N = input('masukkan banyaknya iterasi yang diharapkan N = ');
x0 = input('masukkan x(0) = ');
y0 = input('masukkan y(0) = ');
ti = t0;
tf = tfi;
[x,y]=runge_sir(x0,y0,ti,tf,N);
time=[ti:(tf-ti)/(N-1):tf];
figure(1)
plot(time,x,time,y,'LineWidth',3)
legend('S(t)', 'I(t)')
grid on
title('Grafik model SIR tanpa perlambatan')
xlabel('time(t)')
ylabel('S(t) I(t)')

```

```
figure(2)
plot(x,y,'LineWidth',3)
grid on
title('phaseportrait dari model SIR')
xlabel('S(t)')
ylabel(' I(t) ')
```

```
figure (3)
plot(time,x,'LineWidth',3)
legend('S(t)')
grid on
title('Grafik model SIR tanpa perlambatan')
xlabel('time(t)')
ylabel('S(t)')
```

```
figure (4)
plot(time,y,'LineWidth',3)
legend('I(t)')
grid on
title('Grafik model SIR tanpa perlambatan')
xlabel('time(t)')
ylabel('I(t)')
```

Lampiran 2

Program Matlab Model SIR dengan Perlambatan

```

function sol = cb4
global tau
tau = 0.01; %nilai tau = 0.01
sol = dde23(@dides1, [tau], [0.5; 10], [0, 150])
figure(1)
plot(sol.x,sol.y,'LineWidth',3)
legend('S(t)', 'I(t)')
xlabel('t (time)')
ylabel('S(t) I(t)')

```

```

function dydt = ddes1(t,y,Z)
global tau
S=y(1);
I=y(2);
Itau = Z(2,1);
Stau = Z(1,1);
dSdt = 0.94-0.05*S-(0.1*S*Itau);
dIdt = 0.1*S*Itau-0.5*I-0.05*I;
dydt = [ dSdt; dIdt];

```

Lampiran 3

Solusi Numerik Model SIR Tanpa Perlambatan

Tanpa perlambatan					
hari	I(t)	S(t)			
1	10.0000	0.5000	39	1.1112	5.5096
2	6.1827	0.8726	40	1.1150	5.5571
3	3.9642	1.2423	41	1.1236	5.5942
4	2.6419	1.6468	42	1.1358	5.6204
5	1.8365	2.0854	43	1.1506	5.6356
6	1.3357	2.5488	44	1.1666	5.6403
7	1.0183	3.0261	45	1.1829	5.6359
8	0.8145	3.5067	46	1.1985	5.6239
9	0.6833	3.9813	47	1.2124	5.6062
10	0.6008	4.4419	48	1.2240	5.5846
11	0.5526	4.8811	49	1.2330	5.5612
12	0.5304	5.2921	50	1.2391	5.5376
13	0.5295	5.6683	51	1.2424	5.5155
14	0.5478	6.0026	52	1.2431	5.4959
15	0.5845	6.2879	53	1.2415	5.4798
16	0.6400	6.5161	54	1.2382	5.4674
17	0.7147	6.6796	55	1.2336	5.4591
18	0.8084	6.7714	56	1.2283	5.4545
19	0.9193	6.7868	57	1.2226	5.4535
20	1.0430	6.7258	58	1.2170	5.4555
21	1.1719	6.5945	59	1.2119	5.4599
22	1.2957	6.4064	60	1.2074	5.4660
23	1.4031	6.1811	61	1.2037	5.4732
24	1.4841	5.9416	62	1.2009	5.4809
25	1.5331	5.7102	63	1.1991	5.4885
26	1.5492	5.5048	64	1.1981	5.4956
27	1.5365	5.3369	65	1.1980	5.5019
28	1.5017	5.2119	66	1.1986	5.5071
29	1.4525	5.1298	67	1.1997	5.5111
30	1.3963	5.0871	68	1.2012	5.5137
31	1.3389	5.0784	69	1.2029	5.5151
32	1.2846	5.0972	70	1.2048	5.5154
33	1.2361	5.1369	71	1.2066	5.5147
34	1.1952	5.1915	72	1.2083	5.5132
35	1.1625	5.2550	73	1.2098	5.5112
36	1.1382	5.3226	74	1.2110	5.5087
37	1.1220	5.3898	75	1.2119	5.5062
38	1.1132	5.4531	76	1.2125	5.5036
			77	1.2128	5.5013
			78	1.2128	5.4992

79	1.2126	5.4975
80	1.2122	5.4962
81	1.2117	5.4954
82	1.2111	5.4950
83	1.2105	5.4949
84	1.2099	5.4952
85	1.2093	5.4957
86	1.2088	5.4964
87	1.2084	5.4972
88	1.2081	5.4980
89	1.2080	5.4989
90	1.2079	5.4996
91	1.2079	5.5003
92	1.2079	5.5009
93	1.2081	5.5013
94	1.2082	5.5015
95	1.2084	5.5017
96	1.2087	5.5017
97	1.2088	5.5016
98	1.2090	5.5014
99	1.2092	5.5012
100	1.2093	5.5009
101	1.2094	5.5006
102	1.2095	5.5004
103	1.2095	5.5001
104	1.2095	5.4999
105	1.2095	5.4997
106	1.2094	5.4996
107	1.2094	5.4995
108	1.2093	5.4994
109	1.2092	5.4994
110	1.2092	5.4995
111	1.2091	5.4995
112	1.2091	5.4996
113	1.2090	5.4997
114	1.2090	5.4998
115	1.2090	5.4999
116	1.2090	5.5000

117	1.2090	5.5000
118	1.2090	5.5001
119	1.2090	5.5001
120	1.2090	5.5002
121	1.2090	5.5002
122	1.2090	5.5002
123	1.2091	5.5002
124	1.2091	5.5002
125	1.2091	5.5001
126	1.2091	5.5001
127	1.2091	5.5001
128	1.2091	5.5000
129	1.2091	5.5000
130	1.2091	5.5000
131	1.2091	5.5000
132	1.2091	5.5000
133	1.2091	5.4999
134	1.2091	5.4999
135	1.2091	5.4999
136	1.2091	5.4999
137	1.2091	5.5000
138	1.2091	5.5000
139	1.2091	5.5000
140	1.2091	5.5000
141	1.2091	5.5000
142	1.2091	5.5000
143	1.2091	5.5000
144	1.2091	0
145	1.2091	0
146	1.2091	0
147	1.2091	0
148	0	0
149	0	0
150	0	0

Lampiran 4

Solusi Numerik Model SIR dengan Perlambatan 0.01

Perlambatan 0.01					
Hari	S(t)	I(t)			
0	0.5000	10.0000	41.9668	5.6537	1.1361
0.0050	0.5021	9.9750	44.2233	5.6605	1.1755
0.0100	0.5041	9.9502	46.8633	5.6141	1.2187
0.0200	0.5082	9.9006	49.1984	5.5505	1.2438
0.0300	0.5123	9.8514	51.5335	5.4907	1.2519
0.0800	0.5325	9.6093	53.9840	5.4495	1.2451
0.3300	0.6285	8.4978	56.5040	5.4361	1.2287
0.7101	0.7663	7.0802	59.4860	5.4506	1.2087
1.2121	0.9455	5.6074	62.7952	5.4853	1.1937
1.8166	1.1683	4.2856	66.1045	5.5172	1.1907
2.4573	1.4187	3.2721	69.0294	5.5301	1.1972
3.1270	1.6968	2.5121	72.3356	5.5262	1.2074
3.8280	2.0042	1.9443	76.7760	5.5039	1.2176
4.5668	2.3424	1.5201	79.1277	5.4931	1.2177
5.3536	2.7136	1.2028	83.2583	5.4840	1.2148
6.2036	3.1217	0.9653	87.1735	5.4880	1.2088
7.1427	3.5736	0.7881	90.1863	5.4959	1.2054
8.2222	4.0850	0.6573	93.0426	5.5030	1.2046
9.6013	4.7114	0.5626	95.3396	5.5061	1.2058
10.6883	5.1724	0.5291	98.0212	5.5065	1.2078
11.7752	5.5947	0.5221	101.2322	5.5038	1.2100
12.9414	5.9952	0.5398	104.7947	5.4995	1.2113
14.1076	6.3298	0.5824	107.7133	5.4971	1.2108
15.4094	6.6107	0.6595	110.7488	5.4969	1.2097
16.6563	6.7730	0.7639	114.6290	5.4987	1.2083
18.0036	6.8178	0.9078	117.3592	5.5004	1.2080
19.5384	6.7012	1.0990	120.9077	5.5016	1.2084
21.7927	6.2760	1.3686	124.7300	5.5013	1.2091
23.1029	5.9607	1.4847	127.8811	5.5002	1.2096
24.4132	5.6558	1.5470	132.8925	5.4983	1.2099
25.9255	5.3662	1.5522	137.1694	5.4982	1.2094
27.5054	5.1651	1.4985	140.3770	5.4990	1.2088
29.3418	5.0620	1.3989	145.1885	5.5010	1.2083
31.3579	5.0782	1.2838	150.0000	5.5021	1.2085
34.2363	5.2397	1.1580			
36.0883	5.3743	1.1156			
37.9403	5.4978	1.1007			
39.9651	5.5993	1.1093			

Lampiran 5

Solusi Numerik Model SIR dengan Perlambatan 0.5

Perlambatan 0.5					
hari	S(t)	I(t)			
0	0.5000	10.0000	40.2505	5.3629	1.1138
0.0964	0.5380	9.5324	42.4230	5.5056	1.0997
0.2982	0.6063	8.6405	44.5203	5.6098	1.1090
0.5000	0.6615	7.8541	46.7265	5.6721	1.1350
0.7500	0.7250	6.9971	49.0761	5.6844	1.1715
1.0000	0.7926	6.2456	51.8295	5.6433	1.2127
1.5000	0.9387	5.0069	54.4907	5.5732	1.2414
2.0000	1.0991	4.0504	57.1518	5.5016	1.2532
2.5000	1.2730	3.3085	59.7451	5.4508	1.2491
3.0000	1.4594	2.7305	62.3841	5.4274	1.2348
3.5000	1.6567	2.2776	65.3414	5.4324	1.2160
4.0000	1.8636	1.9210	69.0746	5.4670	1.1971
4.5000	2.0786	1.6387	72.0190	5.4991	1.1911
5.0000	2.2999	1.4138	74.9633	5.5225	1.1927
5.5000	2.5262	1.2339	78.3113	5.5328	1.1995
6.0000	2.7560	1.0893	81.8444	5.5267	1.2085
6.5000	2.9879	0.9725	86.8059	5.5029	1.2180
7.0000	3.2207	0.8780	90.4263	5.4873	1.2182
7.5000	3.4533	0.8014	94.0466	5.4816	1.2142
8.5144	3.9200	0.6872	98.2662	5.4866	1.2086
9.8573	4.5170	0.5964	101.2945	5.4943	1.2056
11.2109	5.0810	0.5529	104.3541	5.5019	1.2046
12.4805	5.5632	0.5437	109.5473	5.5102	1.2047
13.7502	5.9894	0.5594	114.2859	5.5096	1.2084
15.2900	6.4163	0.6078	117.3425	5.5054	1.2107
16.6643	6.7000	0.6789	121.5827	5.4983	1.2123
18.0980	6.8836	0.7803	124.4260	5.4951	1.2116
19.5904	6.9415	0.9133	127.5300	5.4944	1.2103
21.2551	6.8433	1.0851	131.0328	5.4962	1.2087
23.3563	6.5094	1.3040	135.7746	5.5004	1.2073
24.9475	6.1589	1.4420	139.3310	5.5029	1.2075
26.5388	5.7918	1.5281	144.6655	5.5035	1.2084
28.1203	5.4685	1.5527	150.0000	5.5009	1.2100
29.7711	5.2162	1.5215			
31.5648	5.0569	1.4457			
33.5450	5.0075	1.3437			
35.8865	5.0744	1.2335			
38.0685	5.2074	1.1576			

Lampiran 6

Solusi Numerik Model SIR dengan Nilai Perlambatan 1

Perlambatan 1			48.5452	5.5982	1.1172
Hari	S(t)	I(t)	50.8895	5.6633	1.1392
0	0.5000	10.0000	53.3811	5.6825	1.1705
0.0964	0.5380	9.5324	56.2092	5.6533	1.2057
0.4144	0.6396	8.1753	60.0225	5.5672	1.2409
0.7072	0.7074	7.1418	62.6024	5.5050	1.2485
1.0000	0.7572	6.2777	65.1822	5.4584	1.2452
1.4980	0.8517	5.0814	68.1471	5.4318	1.2334
2.0000	0.9790	4.1353	71.1734	5.4323	1.2177
2.5000	1.1263	3.3993	75.0736	5.4599	1.2012
3.0000	1.2899	2.8226	78.7187	5.4945	1.1931
3.6979	1.5412	2.2159	82.2996	5.5214	1.1934
4.4542	1.8377	1.7465	85.7028	5.5326	1.1994
5.2617	2.1752	1.3932	89.5199	5.5286	1.2074
6.1377	2.5580	1.1260	94.2880	5.5097	1.2157
7.1109	2.9942	0.9233	97.1774	5.4973	1.2166
8.1109	3.4453	0.7834	102.0736	5.4835	1.2168
9.1109	3.8910	0.6901	106.0351	5.4814	1.2121
10.1109	4.3245	0.6291	111.1666	5.4905	1.2068
11.5025	4.8968	0.5815	115.9424	5.5028	1.2036
12.5025	5.2795	0.5684	120.8228	5.5117	1.2041
13.5025	5.6334	0.5690	125.4726	5.5124	1.2075
14.8540	6.0590	0.5887	131.1063	5.5047	1.2114
15.8540	6.3300	0.6166	135.8297	5.4966	1.2128
16.8540	6.5595	0.6551	141.3687	5.4908	1.2124
17.8540	6.7441	0.7042	145.6843	5.4915	1.2097
18.8540	6.8806	0.7635	150.0000	5.4963	1.2075
19.8540	6.9664	0.8325			
20.8540	7.0000	0.9104			
22.5985	6.9345	1.0601			
23.5985	6.8308	1.1512			
26.0739	6.4147	1.3562			
27.7251	6.0684	1.4592			
28.7251	5.8566	1.4989			
29.7251	5.6568	1.5202			
31.3241	5.3826	1.5197			
32.3241	5.2474	1.4989			
34.0513	5.0870	1.4417			
35.0513	5.0352	1.3994			
37.0760	5.0099	1.3129			
39.1007	5.0659	1.2342			
41.5216	5.1965	1.1636			
43.9426	5.3525	1.1227			
46.2864	5.4934	1.1096			